Logica

Giacomo Fantoni

13 dicembre 2019

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Si definisca la logica attraverso il suo oggetto principale e il suo scopo: la logica è la disciplina che studia le condizioni di correttezza del ragionamento. Il suo scopo è elaborare criteri e metodi attraverso i quali si possano distinguere i ragionamenti corretti o validi da quelli incorretti o invalidi. Si considera un argomento un gruppo strutturato di enunciati. È pertanto costituito da un insieme di enunciati detti premesse dati per certi che vengono asserite a sostegno di un enunciato conclusione. Esistono espressioni dette indicatori di conclusione che vengono utilizzate per segnalare il passaggio dalle premesse alla conclusione definita come l'enunciato che viene affermato sulla base delle premesse, mentre queste ultime come enunciati asseriti o assunti che forniscono il fondamento per affermare la conclusione. Quando ciò accade si dice che la conclusione segue dalle premesse. Indagare sulla validità di un ragionamento vuol dire pertanto indagare se la sua conclusione segue effettivamente dalle premesse che ne costituirebbero un buon fondamento. Si definisce inferenza il processo con cui si giunge ad accettare la conclusione di un ragionamento sulla base delle sue premesse. Si può pertanto dire che la logica studia le condizioni di correttezza delle inferenze. Si definiscono argomentazioni complesse argomentazioni in cui una conclusione di una precedenza inferenza viene utilizzata come premessa in una successiva.

1.1 Enunciati dichiarativi

Gli enunciati dichiarativi sono gli enunciati caratteristici di un ragionamento. Si definisce enunciato dichiarativo pertanto un discorso con la proprietà di essere univocamente vero o falso. Una proposizione è il senso di un enunciato, che la esprime. Si riconosce un enunciato in quanto equivale a un gruppo di valore a cui è possibile assegnare il valore di verità indipendentemente dal resto.

1.2 Essere corretti, essere veridici

Se verità e falsità sono caratteristiche proprie degli enunciati, la correttezza caratterizza i ragionamenti. Si può dire che la correttezza è una proprietà delle relazioni che sussistono tra enunciati. Dalla verità degli enunciati non segue nè necessariamente nè sufficientemente la correttezza del ragionamento. Il seguire di una conclusione dalle sue premesse è caratterizzato dal criterio generale di correttezza logica: un ragionamento è corretto se e solo se non può darsi il caso che le sue premesse siano tutte vere e la sua conclusione falsa. Si dice che un enunciato P è conseguenza logica di altri enunciati $P_1, \ldots, P_n$ se e solo se in ogni circostanza o situazione in cui $P_1, \ldots, P_n$ sono veri anche P è vero, ovvero che se e solo se $P_1, \ldots, P_n$ siano veri mentre P è vero. Si può pertanto dire come un ragionamento è corretto se e solo se la sua conclusione è conseguenza logica delle sue premesse.

1.3 Induzione e deduzione

Per descrivere induzione e deduzione si devono innanzitutto caratterizzare gli enunciati in universali, particolari e singolari. Si dicono universali tutti gli enunciati che riguardano un'intera classe di individui, particolari gli enunciati che riguardano alcuni elementi di una classe e singolari tutti quelli che caratterizzano un unico elemento. Sia per ragionamenti induttivi che deduttivi si dice che le loro premesse devono fornire un fondamento per l'affermazione della conclusione. Vengono caratterizzati dal modo in cui si arriva a tale conclusione: in un ragionamento induttivo le premesse non forniscono ragioni decisive per la conclusione ma si limitano a garantirla secondo diversi gradi di probabilità, mentre per un ragionamento deduttivo la correttezza è determinata dal criterio di correttezza logica e fornisce pertanto un fondamento infallibile e definitivo per la verità.

1.4 Forma logica

Trattando di logica formale si rende necessario esprimere una forma logica dei ragionamenti per verificarne le condizioni di validità. Si può banalmente notare come ragionamenti di contesto diverso possono avere forme comuni e si possono pertanto trarre delle osservazioni.

1.4.0.1 Osservazioni

La correttezza dei ragionamenti dipende dalla forma o struttura logica che può essere studiata indipendentemente dal contenuto degli enunciati. Inoltre la verità degli enunciati riguarda il contenuto caratterizzato dagli enunciati che non essendo studio della logica verrà tralasciato. In fine si può notare come la forma sia più generale del contenuto, ovvero sostituendo ad una forma enunciati di qualsiasi contenuto si otterrà un ragionamento valido.

1.5 Logica e scienze particolari

La logica astrae largamente dal contenuto e si può dire che studi le leggi dell'esser vero. Si dice pertanto che la logica prescinde dall'accertamento della verità degli enunciati. Si occupa delle relazioni logiche che intercorrono fra gli enunciati: fra premesse e conclusioni e pertanto della validità delle inferenze ed è pertanto presente in ogni scienza.

1.6 Parole logiche

Essendo che la validità degli schemi logici non dipende dal significato particolare delle espressioni dipende da altre espressioni costanti che si dicono descrittive che permettono di legare gli enunciati o enumerarli.

1.7 Diagrammi

Ai fini dell'analisi logica è utile rappresentare la struttura di un'argomentazione in modo da evidenziarne i nessi inferenziali in maniera schematica. A questo scopo ogni asserzione viene numerata. Se due o più premesse operano congiuntamente in un passo induttivo si trascrivono i loro numeri uniti dal segno + e sottolineate. La conclusione viene descritta da una freccia verticale dai numeri delle premesse a quello della stessa. L'intera procedura è ripetuta per ogni passo dell'argomentazione.

1.8 Argomentazioni convergenti

Si dice argomentazione convergente un'argomentazione che contiene diversi passi di ragionamento separati e ciascuno sostiene la stessa conclusione.

1.9 Asserzioni implicite

È possibile che alcuni enunciati non siano esplicitamente dichiarati durante l'argomentazione ma lasciati impliciti in quanto di banale comprensione.

1.10 Valutare un'argomentazione

1.10.1 Criteri di valutazione

Per determinare se un'argomentazione dimostra la verità della conclusione vengono considerati quattro criteri:

- Se le premesse su cui si regge l'argomentazione sono effettivamente vere.
- Se la conclusione è probabile data la verità delle premesse.
- Se le premesse sono pertinenti alla conclusione.
- Se la conclusione risulta vulnerabile di fronte a nuove informazioni.

1.10.2 Verità delle premesse

Un'argomentazione non stabilisce la verità della conclusione se una delle premesse è falsa. Inoltre se una delle premesse ha un grado di verità ignoto allora si fallisce nel determinare il valore della conclusione per quanto ci è dato conoscere.

1.10.3 Probabilità della conclusione

Si valutano le argomentazioni in relazione alla probabilità della conclusione data la verità delle premesse. Le argomentazioni si classificano pertanto in deduttive e induttiva. Si dice deduttiva un'argomentazione la cui conclusione segue necessariamente dalle premesse di partenza mentre se esiste una certa probabilità che la conclusione sia falsa l'argomentazione si dice induttiva. Si definisce pertanto la probabilità induttiva, ovvero la probabilità che date premesse tutte vere lo sia anche la conclusione. La forza induttiva di un'argomentazione può variare a seconda del contesto. Considerando argomentazioni complesse si noti che la validità deduttiva e probabilità induttiva dipendono dalle premesse fondamentali e la conclusione. Per valutarla si consideri:

- Nel caso di argomentazioni complesse non convergenti con almeno un passo debole la probabilità induttiva risulta bassa.
- Nel caso di argomentazioni complesse non convergenti con solo e non troppi passi forti la probabilità induttiva risulta alta.
- Nel caso di argomentazione convergente la probabilità è tanto alta quanto la probabilità del ramo più forte.
- Se tutti i passi di un'argomentazione sono deduttivi allora è deduttiva anche l'argomentazione nella sua interezza.

1.10.4 Pertinenza

Un'argomentazione che manca di pertinenza non è utile per dimostrare la verità della conclusione e si dice che commette una fallacia di pertinenza o rilevanza. La mancanza di pertinenza causa una discontinuità tra premesse e conclusione. Per esempio una conclusione logicamente necessaria qualsiasi insieme di premesse la conclude. Un altro modo in cui un'argomentazione può mancare di pertinenza è quando ha premesse inconsistenti che non possono essere tutte simultaneamente vere.

1.10.5 Vulnerabilità

Le argomentazioni induttive soffrono di vulnerabilità a fronte di una nuova premessa in quanto possono indebolire la probabilità induttiva. Per questo motivo nel ragionamento induttivo la scelta delle premesse è fondamentale. Nasce perciò il criterio dell'evidenza totale che dice che se un'argomentazione è induttiva le sue premesse devono contenere tutta l'evidenza conosciuta che sia pertinente per la conclusione.

1.11 Fallacie di ragionamento

Si dicono fallacie gli errori che danneggiano la cogenza delle argomentazioni in cui insorgono. Si divideranno e fallacie in cinque gruppi:

- Fallacie semantiche: derivano dall'uso di linguaggio ambiguo, ovvero espressioni il cui significato non è determinato in maniera chiara.
- Fallacie formali: vengono commesse quando si applica una regola errata o una regola valida in modo errato.
- Fallacie induttive: la probabilità della soluzione è inferiore di quanto si suppone.
- Fallacie di presunzione: derivano da ragionamenti in cui si presume la verità di ciò di cui si vuole dimostrare.
- Fallacie di pertinenza: derivano da ragionamenti le cui premesse non hanno relazione o scarsa relazione con la conclusione.

Capitolo 2

Logica proposizionale

2.1 Simbolizzare è chiarificare

Nella logica esistono varie notazioni simboliche artificiali con cui esprimere la struttura logica dei ragionamenti in modo da poterne verificare le condizioni di verità. Essendo che la correttezza dei ragionamenti dipende dalla struttura, dai rapporti tra gli enunciati che li compongono e dal significato delle parole logiche la valutazione dei ragionamenti è resa difficoltosa dall'utilizzo del linguaggio naturale in quanti impreciso e metaforico. Viene pertanto teorizzato un simbolismo logico perfetto che rimedia ai difetti delle lingue naturali e che permette di descrivere la scienza rigorosa.

2.2 Determinatezza, bivalenza, vero-funzionalità

Per descrivere un linguaggio logico è necessario considerare tre elementi:

- Principio di determinatezza: ogni enunciato ha uno e un solo valore di verità.
- Principio di bivalenza: i valori di verità sono soltanto due: vero o valso. Combinato con il primo ci dice che ogni enunciato ha uno e uno solo dei due valori di verità.
- Vero funzionalità o estensibilità: lo stato o valore di verità degli enunciati composti dipende interamente da quello degli enunciati che li compongono. In altro modo, il valore di verità di enunciati dipende o è funzione del valore di verità degli enunciati che li compongono.

Il principio di vero funzionalità non vale in tutti i contesti: è possibile che per alcuni enunciati sostituire un enunciato elementare con un altro dallo stesso valore di verità cambi lo stato di verità dell'enunciato composto. Questi casi di fallimento della sostituzione danno luogo a elementi non vero-funzionali o non estensionali prodotti tipicamente da espressioni modali o epistemiche.

2.3 Connettivi logici

I connettivi logici o connettivi enunciativi sono quelle espressioni che consentono di formare enunciati composti connettendo tra di loro enunciati dati. Si possono chiamare anche connettivi vero-funzionali. In questo capitolo verrà analizzato il linguaggio enunciativo o proposizionale con cui ci si propone di evidenziare la forma logica di ragionamenti la cui correttezza dipende dalla struttura connettivale degli enunciati che li compongono. Gli enunciati semplici vengono sostituiti da singole lettere dette variabili enunciative o proposizionali che possono sostituire un qualunque enunciato semplice. Per i simboli logici vengono utilizzati simboli appositi.

2.3.1 Congiunzione

Il connettivo logico della congiunzione traduce la "e". È un connettivo binario e si indica con il simbolo $\wedge$. I due enunciati connetti verranno detti congiunti. Questo connettivo è un connettivo vero- funzionale e il suo valore di verità dipende unicamente da quello dei suoi componenti e in particolare risulterà vero se e solo se entrambi i suoi congiunti sono veri. Il valore di verità può pertanto essere rappresentato da una tabella:

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Questa tabella si dice matrice del connettivo e può essere intesa come una sua definizione in quanto esprime la funzione di verità che il connettivo esprime.

2.3.2 Disgiunzione

Il connettivo logico della disgiunzione traduce la "o". È un connettivo binario e si indica con il simbolo $\vee$. I due enunciati verranno detti disgiunti. Questo connettivo ha il significato della disgiunzione debole o inclusiva e risulta falsa solo quando entrambi i disgiunti sono falsi:

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

2.3.3 Negazione

Il connettivo logico della negazione traduce il "non". Viene rappresentato con il simbolo $\neg$ o $\sim$. È un connettivo unario in quanto si applica ad un unico enunciato per volta.

P	$\neg P$
T	F
F	T

Questo connettivo ha il ruolo di invertire il valore di verità dell'enunciato. Si nota come $\neg\neg P \equiv P$. Si dice che due enunciati sono contradditori se e solo se uno deve essere vero se l'altro è falso e viceversa.

2.3.4 Condizione materiale

Il connettivo binario del condizionale intende tradurre l'espressione "se...allora...". Si nota con il simbolo $\Rightarrow$. Il primo enunciato è detto antecedente, il secondo conseguente. Si intende che un enunciato condizionale è falso nel caso in cui il suo antecedente sia vero e il conseguente falso, ovvero si intende escludere che all'antecedente della sua assezione accada di essere vero mentre il conseguente è falso.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Viene anche chiamato condizionale materiale. Questo connettivo esprime la nozione di condizione sufficiente: la verità del suo antecedente è condizione sufficiente per la verità del suo conseguente in quanto la permette sia al suo verificarsi che attraverso altre condizioni.

2.3.5 Bicondizionale

Questo connettivo logico intende tradurre l'espressione "se e solo se". Viene utilizzato il simbolo $\Leftrightarrow$. Gli enunciati costituenti sono detti lato sinistro e destro e il composto risulta vero solo se i due sono entrambi con lo stesso valore di verità:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

È anche detto equivalenza materiale e si dice che due enunciati sono materialmente equivalenti quando hanno lo stesso valore di verità. Equivale alla congiunzione di due condizionali in cui l'antecedente dell'uno è il conseguente dell'altro. Si può pertanto dire che: $P \Leftrightarrow Q := (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. Questo connettivo permette di esprimere il concetto di condizione necessaria e sufficiente.

2.4 Regole per mettere in campo una buona formazione

2.4.0.1 Parentesi

In maniera del tutto analoga alle formule matematiche servono per evitare ambiguità e dare un ordine di utilizzo di considerazione ai connettivi logici.

2.4.1 Simboli

Il linguaggio logico possiede un alfabeto logico formato dai cinque connettivi logici e un alfabeto descrittivo consistente in un numero indefinito di variabili enunciative che può essere pensato come indefinitamente esteso. È importante distinguere i due alfabeti: quello descrittivo si riferisce ad enunciati che descrivono il mondo e parlano di stati di cose, quello logico possiede elementi non descrittivi che hanno unicamente la funzione di connettivi e operatori. Esisterà inoltre un alfabeto ausiliario che in questo caso consiste unicamente delle parentesi.

2.4.2 Formule ben formate

Un linguaggio logico-formale si considera dato quando è stato specificato insieme al suo alfabeto anche il modo in cui tali simboli possono essere combinati per formare espressioni composte. Viene definita come formula del linguaggio una qualunque sequenza finita di simboli. La costruzione di un linguaggio formale esige precise regole morfologiche o di formazione che ne definiscono la sintassi che specificano un sottoinsieme di formule ammissibili dette sintatticamente ben formate. Si noti come esistono un numero infinito di enunciati e formule mentre si devono specificare le regole di formazione in maniera finita e assolutamente rigorosa. Le regole devono rendere possibile, di fronte ad una qualunque formula di decidere se è ben formata o meno. Si rende pertanto necessario procedere per induzione.

2.4.3 Come catturare un infinito in modo finito

Per definire un insieme finito si rende necessario l'utilizzo di tre clausole:

- Base dell'induzione: si specifica un certo gruppo iniziale di elementi appartenenti all'insieme.
- Passo dell'induzione: si specificano delle operazioni e si dice che applicando tali operazioni a elementi dell'insieme si ottengono elementi dell'insieme.
- Conclusione o chiusura dell'induzione: si specifica che appartengono unicamente all'insieme unicamente quelli che soddisfano i primi due passi.

In questo modo viene rigorosamente specificato un insieme con cardinalità infinita.

2.4.4 Metavariabili e regole di formazione

Le regole di formazione di un linguaggio formale consistono in una serie di clausole che forniscono una definizione induttiva di formula ben formata, identificando tutte e sole le formule ben formate. A questo scopo si deve introdurre la nozione di metavariabile o variabili metalogiche o metalinguistiche sono simboli che rappresentano simboli o sequenze di simboli del linguaggio formale. Verranno ora introdotte formule per queste metavariabili, ovvero valide per singole variabili enunciative o per sequenze di esse. Essendo le formule in numero indefinito, sarà necessario avere un numero indefinito di metavariabili, che verranno identificate con le lettere greche.

- Base induttiva: ogni variabile enunciativa è una formula ben formata.
- Passo induttivo, considerando α e β formule ben formate:
  - $\neg\alpha$ è una formula ben formata.
  - $\alpha \wedge \beta$ è una formula ben formata.
  - $\alpha \vee \beta$ è una formula ben formata.
  - $\alpha \Rightarrow \beta$ è una formula ben formata.
  - $\alpha \Leftrightarrow \beta$ è una formula ben formata.
- Chiusura dell'induzione: le uniche formule ben formate sono quelle che si possono ricavare dalla base e dal passo induttivo.

Questo sta a significare che sono formule ben formate tutte le variabili enunciative e tutti i composti che si ottengono connettendo formule ben formate date in modo conforme alle regole mediante i cinque connettivi logici con gli eventuali simboli ausiliari.

2.4.5 Campo, subordinazione di connettivi

Essendo le parentesi meri ausili alla comprensione della formula verranno omesse quando questo passo non crea ambiguità, pertanto possono essere omesse agli estremi di una formula, e attraverso l'occorrenza di un simbolo, il campo e la subordinazione di un connettivo. Si indica per occorrenza di un simbolo in una formula il numero di volte in cui compare, ordinandolo da sinistra a destra. Il campo o ambito dell'occorrenza di un connettivo in una formula è la più piccola formula ben formata in cui tale occorrenza compare. Le parentesi hanno lo scopo di chiarire l'ambito di ciascun connettivo. Grazie alla nozione di campo si può definire quella di subordinazione di un connettivo: si dice subordinato a un altro se e solo se il suo campo è contenuto nel campo di quest ultimo. Si dice pertanto che la formula subordinata è una sottoformula e connettivo principale il connettivo non subordinato a nessun altro. Si stabilisce anche un ordine di forza dei connettivi in questo ordine:$\neg$, $\vee$ e $\wedge$ e $\Leftrightarrow, \Rightarrow$ e stabilendo che un connettivo che lega più fortemente attrae nel proprio campo una certa formula o variabile enunciativa. Congiunzioni e disgiunzioni sono associative.

2.5 Creare tavole di verità

2.5.1 Valutare i ragionamente con le tavole di verità

Il metodo delle tavole di verità può essere utilizzato come un sistema di calcolo logico, in modo da stabilire in modo meccanico la correttezza o la non correttezza di tutti gli argomenti la cui forma logica sia esprimibile nel linguaggio enunciativo. Le premesse sono intervallate da virgole e sono separate dalla conclusione dal segno /. Questo schema cattura la forma logica di una quantità di elementi espressi in linguaggio naturale. Si può dare pertanto una prima caratterizzazione di ragionamento espresso nel linguaggio formale: un ragionamento è una sequenza finita di formule dette premesse intervallate da virgole seguite dal segno / che precede la conclusione, una formula. Ricordando il criterio di correttezza logica un argomento è corretto se e solo se non può darsi che tutte le sue premesse siano vere e la conclusione falsa. Mediante una tavola di verità diventa pertanto possibile assegnare il valore vero o falso a ciascuna delle variabili enunciative che compongono le premesse e la conclusione degli schemi d'argomento. Eseguendo quest'assegnazione per ogni combinazione di valori di verità si verificherà che se vi è una sola assegnazione in cui tutte le premesse risultano vere ma la conclusione falsa lo schema è scorretto, se tutti i casi in cui le assegnazioni di valori di verità alle variabili enunciative rendono vere tutte le premesse e la conclusione lo schema è corretto. Gli argomenti scorretti vengono chiamati fallacie logiche.

2.5.2 Tautologie, incoerenze e contingenze

Le leggi logiche più note sono il principio di identità, di non contraddizione e del terzo escluso.

2.5.2.1 Principio di identità

$\alpha \Rightarrow \alpha$ ovvero ogni enunciato implica sè stesso, viene pertanto detta anche legge di identità enunciativa.

2.5.2.2 Principio di non contraddizione

$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ ovvero ogni enunciato non si dà il caso che valgano l'enunciato stesso e la sua negazione.

2.5.2.3 Principio del terzo escluso

$\alpha \vee \neg\alpha$ ovvero per qualsiasi enunciato valgono l'enunciato stesso o la sua negazione.

2.5.2.4 Tautologie

Si dice tautologia una qualsiasi formula che assume il valore di vero per qualunque valore di verità assegnato alle sue variabili enunciative. Vengono dette anche leggi logico-enunciative e si nota perchè prendono il nome di leggi. Sono infatti vere a prescindere del valore di verità assegnato alle variabili enunciative in virtù della loro forma logica.

2.5.2.5 Incoerenze o contraddizioni

Si dice incoerenza o contraddizione una qualsiasi formula che assume il valore di falso per qualunque valore di verità assegnato alle sue variabili enunciative. La negazione di una tautologia è un'incoerenza e viceversa.

2.5.2.6 Contingenza

Si dice contingenza una formula il cui valore di verità dipende dai valori di verità delle sue variabili enunciative.

2.5.2.7 Decidibilità

Le tabelle di verità permettono di classificare univocamente le formule in tautologie, contraddizioni o contingenze o la correttezza del ragionamento. Essendo questo fattibile in un numero finito di passi si dice che la questione di stabilire le leggi logico-enunciative è decidibile. Il limite delle tabelle di verità è la loro complessità: rendendosi necessario sviluppare tutte le possibili combinazioni per le variabili enunciative un algoritmo per la decisione avrà complessità $O(2^n)$, dove n è il numero di variabili enunciative.

2.5.3 La foma condizionale corrispondente

Dato un qualunque schema di ragionamento nella forma generale $\alpha_1, \ldots, \alpha_n/\beta$ si definisce la sua forma condizionale corrispondente come la formula: $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$. Questa forma è quel condizionale che ha per antecedente la congiunzione delle premesse dell'argomento e come conseguente la conclusione. Per qualunque schema vale che è corretto se e solo se la sua forma condizionale corrispondente è una tautologia.

2.6 Alberi di refutazione

Creati per snellire il lavoro delle tavole di verità, gli alberi di refutazione sono una ricerca esaustiva dei modi in cui tutte le formule di una lista possano essere vere. Si comincia formando una lista composta dalle sue premesse e dalla negazione della sua conclusione e si scompone ogni formula segnandola fino ad ottenere lettere enunciative o loro negazioni. Se si trova qualche assegnazione di un valore di verità alle lettere enunciative che rende vere tutte le formule della lista allora risulta che la forma è stata refutata e si può sancirne l'invalidità, se invece la ricerca non permette di scoprire alcuna assegnazione di valori di verità che lo permetta allora la forma è valida. Se alla fine di un ramo dell'albero il tentativo di refutazione fallisce lo si segna con una X e si chiama cammino chiuso, altrimenti aperto. Un cammino si dice terminato se è chiuso o se le sole formule non segnate che contiene sono elementari o loro negazioni. Se tutti i cammini dell'albero terminato sono chiusi la forma è valida, mentre se ne rimane uno aperto è refutata. In particolare ogni cammino aperto dell'albero terminato rappresenta un modello per la costruzione di un controesempio.

2.6.1 Regole sintattiche

- Le regole per la costruzione degli alberi si applicano solo a formule intere e non a sottoformule.
- L'ordine di applicazione non è importante ma è più efficace utilizzare prima regole che non danno luogo a ramificazioni.
- In un albero terminato per una forma argomentativa i cammini aperti indicano tutti i controesempi a quella formula.

2.6.2 Regole di formazione

- Negazione: se un cammino aperto contiene sia una formula che la sia negazione si scriva una X al termine del cammino.
- Congiunzione: se un cammino aperto contiene un formula non segnata nella formula $\alpha \wedge \beta$ la si segni e si scriva sia α che β al termine di ogni cammino aperto che la contiene.
- Disgiunzione: se un cammino aperto contiene una disgiunzione non segnata si traccino due rami sotto ciascun cammino aperto che la contiene e si scriva un disgiunto per ramo.
- Condizionale: se un cammino contiene una condizionale non segnata la si segni e si traccino due rami sotto ciascun cammino aperto che la contiene e si scriva la negazione dell'antecedente sul primo e il conseguente sul secondo.
- Bicondizionale: se un cammino contiene una bicondizionale non segnata la si segni e si traccino due rami sotto ciascun cammino aperto che la contiene e si scriva lato sinistro e destro sul primo e la negazione dei due sul secondo.
- Negazione negata: se un cammino contiene una doppia negazione non segnata la si segni e si scriva la formula su ogni ramo che la contiene.
- Congiunzione negata: se un cammino aperto contiene un formula non segnata nella formula $\neg(\alpha \wedge \beta)$ la si segni, si traccino due cammini e si scriva $\neg\alpha$ sul primo e $\neg\beta$ al termine del secondo.

- Disgiunzione negata: se un cammino aperto contiene un formula non segnata nella forma $\neg(\alpha \vee \beta)$ la si segni e si scriva sia $\neg\alpha$ che $\neg\beta$ al termine di ogni cammino aperto che la contiene.
- Congiunzione negata: se un cammino aperto contiene una formula non segnata nella forma $\neg(\alpha \Rightarrow \beta)$ la si segni e si scriva sia α che $\neg\beta$ al termine di ogni cammino aperto che la contiene.
- Bicondizionale negata: se un cammino aperto contiene una formula non segnata nella forma $\neg(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ la si segni, si traccino due rami sotto ciascun cammino aperto che la contiene e scrivere α e $\neg\beta$ sotto il primo e $\neg\alpha$ e β sotto il secondo.

2.6.3 Altri utilizzi per gli alberi di refutazione

Inoltre un albero terminato con un cammino aperto costituisce un insieme vero-funzionalmente consistente. In particolare:

- α è inconsistente se e solo se tutti i cammini di un albero terminato per α sono chiusi.
- α è tautologica se e solo se tutti i cammini di un albero terminato per $\neg\alpha$ sono chiusi.
- α è vero-funzionalmente contingente se e solo se α non è nè tautologica nè inconsistente.

Capitolo 3

La logica delle asserzioni categoriche

Verranno analizzati la struttura interna dei predicati, in particolare quelli che esprimono termini di classe, ovvero denotano classi o insiemi di oggetti quando sono uniti a quantificatori, operatori logici che esprimono relazioni tra gli insiemi designati da termini di classe. In queste asserzioni compare una copula che accoppia due termini di classe: il soggetto e il predicato. Ogni asserzione è costituita da un quantificatore seguito da un termine soggetto, una copula e un predicato, queste asserzioni prendono il nome di asserzioni categoriche, queste asserzioni compaiono in quattro forme:

- A: ogni S è P.
- E: ogni S non è P, ovvero l'insieme S è disgiunto da P.
- I: qualche S è P.
- O: qualche S non è P, ovvero l'insieme S non è incluso in P.

A e I sono dette affermative, le altre negative e A e E sono universali mentre le altre particolari. Le negazioni di soggetto e predicato possono essere considerate come l'analisi degli insiemi complementari alle due parti.

3.1 Diagrammi di Venn

Per analizzare le asserzioni categoriche è conveniente analizzare attraverso i diagrammi di Venn le relazioni tra soggetto e predicato: un'asserzione categorica viene rappresentata da due cerchi sovrapposti che rappresentano gli insiemi e l'area in comune qualcosa che appartiene ad entrambi. Per mostrare che un insieme non ha elementi lo si oscura, per indicare che contiene almeno un membro lo si indica con una $\times$ e le aree in bianco sono quelle senza informazioni. In quanto si devono spesso rappresentare anche complementari è utile incorniciare il diagramma in modo da rappresentare l'insieme universale.

3.2 Inferenze dirette

I diagrammi di Venn consentono di rappresentare le condizioni di verità di tali asserzioni: il diagramma di una certa forma categorica dice come devono stare le cose affinchè sia vera. La validità di una forma argomentativa sancisce la validità di ogni suo esempio per sostituzione mentre la sua invalidità dimostra che nessun esempio può essere valido per il semplice fatto di avere quella forma. Verranno considerate le forme argomentative a una o due premesse. Per le prime, chiamate inferenze dirette basta disegnare il diagramma della premessa e se descrive una situazione in cui risulta vera anche la conclusione allora l'inferenza corrisponde a una forma argomentativa valida. Sono tipi di inferenza diretta:

- Obversione: si dicono obverse coppie di asserzioni ottenibili l'una dall'altra invertendo la qualità e sostituendo il predicato con il suo termine complementare.
- Contraddizione: si dicono contraddittorie due asserzioni categoriche che siano ottenibili una dall'altra invertendo sia la qualità che la quantità.
- Conversione: si dicono converse due asserzioni categoriche che siano ottenibili una dall'altra scambiando soggetto e predicato, risulta valida per E e I.
- Contrapposizione: si dicono contrapposte due asserzioni categoriche che siano ottenibili una dall'altra in cui si sostituisce il soggetto con il complementare del predicato e il predicato con il complementare del soggetto, risulta valida per A e O.
- Contrarie o subcontrarie: due asserzioni categoriche che differiscono unicamente per la qualità.
- Subalterna: un'asserzione particolare è subalterna a un'universale se differisce esclusivamente per la quantità.

3.3 Sillogismi categorici

Si considerino ora le forme a due premesse e ci si concentri sui sillogismi categorici, ovvero argomentazioni che contengono tre termini di classe: il soggetto e predicato della conclusione chiamati termini minore e maggiore e un terzo termine che compare in entrambe le premesse o termine medio. I termini maggiore e minore devono comparire esattamente una volta in una delle due premesse. Per studiarne la validità deduttiva verranno utilizzati i diagrammi di Venn che in questo caso saranno formati da tre cerchi sovrapposti. Verranno tracciate le informazioni riguardanti le premesse e il risultato verrà utilizzato per controllare la validità della forma: se la porzione di diagramma corrispondente alla conclusione risulta automaticamente completata in modo da verificare quest'asserzione è valida, altrimenti no. Le forme sillogistiche sono raggruppate in quattro figure secondo la posizione del termine medio utilizzando F per il termine minore, G per il medio e H per il maggiore:

Figura I	Figura II	Figura III	Figura IV
GH	HG	GH	HG
FG	FG	GF	GF
FH	FH	FH	FH

Rispetto alla classificazione per quantità e qualità si è notato che esistono solo 15 sillogismi validi:

Figura I	Figura II	Figura III	Figura IV
AAA	EAE	IAI	AEE
EAE	AEE	AII	IAI
AII	EIO	OAO	EIO
EIO	AOO	EIO	

Capitolo 4

Predicazione e quantificazione

4.1 Dal linguaggio enunciativo a quello predicativo

Il linguaggio logico descritto proposizionale non basta a esprimere tutti i ragionamenti: la correttezza di alcuni dipende da altri tipi di parole logiche e dalla struttura interna degli enunciati semplici che la logica enunciativa non è in grado di analizzare. Occorre dunque utilizzare un linguaggio di tipo diverso in grado di esibire la struttura interna degli enunciati, chiamato predicativo o elementare possiede grandi capacità espressive e unisce il linguaggio proposizionale e le asserzioni categoriche.

4.2 Enunciati singolari

Il linguaggio deve possedere nomi per individui o nomi atomici individuati da lettere minuscole corsive e simboli per i predicati, indicati da lettere maiuscole corsive dette lettere di predicazione o costanti predicative. Per significare l'individuo m possiede la proprietà F si scrive $F(m)$. Si possono rappresentare tutti gli enunicati semplici in cui si attribuisce una proprietà a un certo individuo. Esistono inoltre enunciati in cui si afferma una relazione tra un gruppo di individui: per rappresentare questo si scrive la proprietà seguita dalla ennupla generalmente ordinata di nomi (tra parentesi tonde). Naturalmente queste espressioni possono essere collegate da connettivi logici.

4.2.1 Descrizioni definite ed espressioni funtoriali

Gli individui, oltre ad essere individuati da nomi propri possono essere identificati anche da descrizioni definite chiamate in questo modo in quanto si riferisce ad uno e un solo individuo descrivendolo mediante certe proprietà o caratteristiche. Le descrizioni definite possono pertanto essere considerate nomi nel senso lato di espressioni che significano individui. A differenza dei nomi atomici possono essere ulteriormente scomposte. In logica le descrizioni definite sono rappresentate da simboli che significano funzioni e sono pertanto detti espressioni funtoriali o costanti funtoriali o funtori. Le descrizioni definite sono considerate significanti l'individuo assunto come valore da una certa funzione ennaria per una certa ennupla ordinata di argomenti individuali. I funtori sono rappresentati da lettere minuscole. Si possono costruire descrizioni con altre descrizioni annidate al loro interno.

4.3 Considerazioni generali

4.3.1 Funzioni enunciative

Si cominci introducendo un insieme di simboli chiamato variabili individuali rappresentato dalle lettere minuscole corsive, utilizzate per designare individui con la possibilità di cambiare valore. Sostituendo al nome proprio m in $F(m)$ la variabile individuale x questo tipo di espressione non traduce più un enunciato in quanto la variabile x non si riferisce ad alcun individuo determinato, ovvero non si può stabilire il valore di verità fino alla determinazione di x. $F(x)$ viene pertanto chiamata funzione enunciativa, definita come un'espressione che contiene n variabili individuali e che si trasforma in enunciato quando tutte vengono sostituite con constanti individuali o nomi.

4.3.2 I quantificatori

Si possono ottenere enunciati da funzioni enunciative anche attraverso la quantificazione, il metodo utilizzato per rendere gli enunciati universali e particolari. Si chiamano quantificatori in quanto dicono per quanti oggetti vale l'espressione che segue, sono immediatamente seguiti dalla variabile che quantificano o vincolano.

4.3.2.1 Quantificatore per tutti

Il quantificatore universale si indica con $\forall$ e vuol dire che la proprietà vale per tutti gli elementi della funzione enunciativa: per esempio per dire che tutte le cose hanno la proprietà F si dirà: $\forall x F(x)$. Tramite questo quantificatore si possono rendere tutti gli enunciati universali.

4.3.2.2 Quantificatore per qualcuno

Il quantificatore particolari si indica con $\exists$ e vuol dire che la proprietà vale per alcuni degli elementi della funzione enunciativa. L'espressione è vera se esiste almeno un elemento che la soddisfa.

4.3.2.3 Quantificatori combinati e interdefiniti

Si può esprimere tutto ciò che si dice con ciascuno dei due quantificatori adoperando l'altro e la negazione. È inoltre possibile che entrambi capitino nella stessa espressione enunciativa.

4.4 L'identità

Una particolare importanza viene data al simbolo che indica la relazione d'identità: l'essere del linguaggio naturale quando viene utilizzato per indicare che il precedente è la stessa cosa del seguente, viene spesso seguito da descrizioni definite. La relazione di identità è la relazione che ogni oggetto ha unicamente con sè stesso. Viene rappresentata dal simbolo di uguaglianza =. Si noti come $x \neq y := \neg(x = y)$. L'aggiunta di questo simbolo al linguaggio predicativo ne determina un'espansione detta linguaggio quasipredicativo o quasielementare. Il potere espressivo risulta grandemente aumentato e si possono fare affermazioni numericamente determinate su oggetti.

4.5 Regole per una buona formazione

4.5.1 Simboli

L'alfabeto di base del linguaggio predicativo sarà suddiviso in tre sottoalfabeti:

- Logico: i cinque connettivi logici e i quantificatori universale ed esistenziale detti operatori logici.
- Descrittivo: un'infinità numerabile di variabili individuali, un numero determinato o indefinitamente esteso di costanti individuali, un altro numero di lettere di predicazione o costanti predicative ennarie, un certo numero di costanti funtoriali ennarie.
- L'alfabeto ausiliario consistente delle parentesi e della virgola.

4.5.2 Termini e formule

Alle regole di formazione delle formule ben formate vanno aggiunte regole per descrivere i termini individuali o singolari, ovvero le locuzioni che esprimono determinatamente o indeterminatamente individui. Verranno create a supporto metavariabili per termini individuali identificate dalle lettere t, s, r. Queste regole vengono create attraverso un processo induttivo:

- Base dell'induzione: sono termini individuali le variabili individuali e le costanti individuali (o nomi propri o atomici).
- Passo induttivo: se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini individuali e f è una qualsiasi costante funtoriale ennaria allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine individuale.

- Chiusura induttiva: nient'altro tranne quello descritto da base e passo induttivo è un termine individuale.

Si dice formula atomica una lettera di predicazione ennaria con i termini necessari per i suoi n posti. Le formule atomiche sono la base da cui si costruiscono le formule più complesse. Pertanto per induzione:

- Base induttiva: ogni formula atomica è ben formata.
- Passo induttivo: definisce i composti ben formati se α e β sono formule ben formate e x una variabile individuale:
  - $\neg\alpha$ è una formula ben formata.
  - $\alpha \wedge \beta$ è una formula ben formata.
  - $\alpha \vee \beta$ è una formula ben formata.
  - $\alpha \Rightarrow \beta$ è una formula ben formata.
  - $\alpha \Leftrightarrow \beta$ è una formula ben formata.
  - $\forall x\alpha$ è una formula ben formata.
  - $\exists x\alpha$ è una formula ben formata.
- Chiusura induttiva: null'altro che quello specificato nella base e nel passo creano una formula ben formata.

Anche per il linguaggio predicativo sussistono le nozioni di occorrenza, campo e subordinazione. Si estende la notazione di campo di un quantificatore come la più piccola formula su cui esso agisce. Si stabilisce che i quantificatori nella gerarchia sono allo stesso livello della negazione, ovvero al di sopra di qualsiasi connettore binario. A essere quantificata è l'occorrenza di una variabile e una formula si dice quantificata quando inizia con un quantificatore. A volte si utilizzano linguaggi privi di costanti funtoriali e hanno come termini individuali solo variabili individuali e nomi propri e possono mancare anche questi ultimi: in questo caso si parla di linguaggi puramente predicativi. Considerando le costanti predicative ennarie non è stato escluso che $n = 0$: in questo modo si esprimono le variabili enunciative del linguaggio enunciativo. In questo modo tutti i simboli base del linguaggio enunciativo sono simboli di quello predicativo, pertanto ogni formula ben formata del linguaggio enunciativo sarà una formula ben formata di quello predicativo, secondo questa considerazione il linguaggio predicativo è un'estensione di quello enunciativo.

4.6 Variabili in libertà, vincolate, sostituzioni

Le occorrenze di una variabile in una formula del linguaggio predicativo si dividono in vincolate e libere a seconda che siano o meno abbinate ad un quantificatore e una stessa variabile può comparire libera e vincolata in occorrenze diverse. Viene detta aperta una formula α con la variabile x con almeno un'occorrenza libera e si indica con $\alpha[x]$. Una formula senza variabili libere è detta formula chiusa o enunciato. Come già visto esistono termini individuali che contengono variabili: un termine privo di variabili è detto termine chiuso o nome, se ne contiene è chiamato termine aperto o forma nominale. La definizione di formula ben formata permette la quantificazione vacua, ovvero la quantificazione di una variabile che non occorre libera, ma questo non ha effetti sulla formula.

4.6.1 Sostituzione

Un'operazione che si può svolgere sulle formule è la sostituzione: dati una formula α, una qualunque variabile x e un termine t si dice sostituzione di x con t in α la formula ottenuta rimpiazzando uniformemente tutte le occorrenze libere della variabile in α con t, tale formula si indicherà con $\alpha[x/t]$. Si noti come è possibile nella sostituzione creare degli enunciati chiusi. Per impedire questo si dice che un termine t è libero per x , ovvero sostituibile a x in una qualsiasi formula α se ogni occorrenza libera di x nella formula è tale che nessuna sottoformula di α che la contenga comincia con un quantificatore che vincola una delle variabili occorrenti nel termine t. $\alpha[x/t]$ è una sostituzione corretta se e solo se t è libero per x.

4.7 Alberi di refutazione

Le regole semantiche e quelle per gli operatori vero-funzionali permettono di caratterizzare il concetto di validità deduttiva: i simboli non logici che compaiono nella forma argomentativa possono essere interpretati: una forma argomentativa della logica dei predicati è valida se e solo se non esiste nessun modello per quella forma in cui le premesse sono vere mentre la conclusione è falsa, in particolare: $\vdash \forall x\alpha \Leftrightarrow \neg\exists x\neg\alpha$ e $\vdash \exists x\alpha \Leftrightarrow \neg\forall x\neg\alpha$. Pur essendo la logica dei predicati indecidibile esistono procedure algoritmiche per verificare la validità di un numero di forme argomentative. Una tecnica consiste nella generalizzazione degli alberi di refutazione. Questa tecnica permette di dimostrare la validità di qualunque forma valida in un numero finito di passi ma non garantisce che si possa sempre dimostrare l'invalidità di una forma invalida. Rimane in ogni caso corretto e completo.

4.7.1 Regole di formazione

Rimarranno valide le regole introdotte per gli operatori vero-funzionali e le loro negazioni che verranno integrate da altre quattro regole:

- Quantificatore universale: se un cammino aperto contiene una formula nella forma $\forall x\alpha$ se t è una costante individuale che compare in qualche passo di quel cammino si scriva $\alpha[t/x]$. Se e solo se il cammino non contiene alcuna formula in cui compare una costante individuale si scelga una costante individuale qualsiasi u e si scriva $\alpha[u/x]$. In entrambi i casi non si segni $\forall x\alpha$.

- Quantificazione esistenziale negata: se un cammino aperto contiene una formula non segnata nella forma $\neg\exists x\alpha$ la si segni e si scriva $\forall x\neg\alpha$ al termine di ogni cammino aperto che la contiene.

- Quantificazione universale negata: se un cammino aperto contiene una formula non segnata nella forma $\neg\forall x\alpha$ la si segni e si scriva $\exists x\neg\alpha$ al termine di ogni cammino aperto che la contiene.

- Quantificazione esistenziale : se un cammino aperto contiene una formula non segnata nella forma $\exists x\alpha$ la si segni, si scelga una costante individuale t che non sia già presente in alcun cammino aperto che la contiene e si scriva $\alpha[t/x]$ al termine di tali cammini.

- Identità: se un cammino aperto contiene una formula nella forma $\alpha = \beta$ e se un'altra formula γ che contiene o α o β e non è segnata si scriva al termine del cammino qualunque formula che non vi compaia e risulti dalla sostituzione in γ un qualsiasi numero di occorrenze di β con α o viceversa.

- Identità negata: se sul cammino aperto compare una formula nella forma $\neg\alpha = \alpha$ si scriva una $\times$ alla fine del cammino.

4.7.2 Generare controesempi

Si noti come questi alberi non generino una lista completa di controesempi, ma è possibile definire un metodo sistematico per associare ciascun cammino aperto di un albero terminato con un controesempio, ovvero un modello in cui le premesse della forma argomentativa sono vere e la conclusione falsa. Per far ciò si fissa un universo che contiene esattamente un oggetto distinto per ogni distinta costante individuale che compare in qualche formula del cammino e si considerino le formule atomiche che compaiono per definire un'adeguata rappresentazione dei simboli non logici in cui basta associare ciascuna costante individuale a un oggetto dell'universo e interpretare ogni lettera predicativa in maniera da rendere vere le formule non negate e vere quelle negate. Si conviene di includere nella classe designata da una lettera predicativa solo quegli oggetti che devono essere inclusi per rendere vere le formule atomiche.

Capitolo 5

Deduzioni naturali

5.1 La dimostrazione formale

Superato il linguaggio enunciativo le tavole di verità non sono più uno strumento adeguato per stabilire la correttezza dei ragionamenti. Occorre lo sviluppo di un sistema formale, un apparato di regole e di principi che consenta di costruire dimostrazioni formali inquadrate su un certo linguaggio formale. Si studierà un sistema formale che consenta di dimostrare formalmente la validità di schemi d'argomento deducendo la loro conclusione dalle premesse attraverso una sequenza di deduzioni elementari. Si esibisce la bontà di un'inferenza attraverso una concatenazione di inferenze base di indubbia validità. Una dimostrazione della validità di uno schema è una sequenza di formule alcune in quanto premesse e altre ottenute attraverso le regole d'inferenza. Questo sistema formale è detto calcolo della deduzione naturale.

5.2 Assiomatica

Nei sistemi di tipo assiomatico le formule di partenza delle dimostrazioni formali sono assiomi. Si tratta di formule assunte senza dimostrazione come principi di deduzione. Questi assiomi sono alla base di tutte le dimostrazioni attraverso le regole di inferenza. In un qualsiasi sistema di formule una regola di inferenza si applica a un certo gruppo di formule $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dette premesse dalle quali si inferisce una formula α detta conclusione. Si rappresentano le regole attraverso una riga orizzontale sopra la quale si annotano le premesse intervallate da linee e con la conclusione al di sotto. Vengono chiamate anche regole di derivazione o trasformazione in quanto derivano formule da formule. Un esempio di regola di inferenza è il modus ponendo ponens o modus ponens: $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha}{\beta}$ che descrive come avendo come premessa una condizionale e ponendo l'antecedente si pone il conseguente come conclusione, viene chiamata anche regola di separazione o di eliminazione del condizionale o $E \Rightarrow$. Ogni conclusione ricavata da assiomi e regole di inferenza è detta teorema. Nel calcolo assiomatico si definisce l'insieme dei teoremi il più piccolo insieme di formule che contiene gli assiomi ed è chiuso sotto le regole d'inferenza. La struttura di una dimostrazione formale di tipo assiomatico è una sequenze di formule ciascuna delle quali è introdotta in quanto assioma o segue dalle formule precedenti per applicazione di una regola d'inferenza.

5.3 Il calcolo enunciativo

Il calcolo della deduzione naturale è utilizzato per costruire dimostrazioni formali della validità di forme o schemi d'argomento intesi come sequenze finite di formule strutturate come $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$. Il simbolo che separa premesse da conclusione è detto segno di asserzione, è un simbolo del linguaggio e indica l'inferibilità della conclusione. In questo paradigma non ci sono tipicamente assiomi ma unicamente regole di inferenza una di introduzione e una di eliminazione per ciascuno dei simboli logici, connettivi e quantificatori. In generale per un simbolo logico \$ una regola di eliminazione è determinata come $E\$$ e lo contiene come operatore principale nella premessa e dice cosa ne si può inferire. Una regola di introduzione è determinata come $I\$$ dice come ottenere da certe premesse una conclusione che contiene \$ come operatore principale. Le regole del calcolo enunciativo governano i connettivi vero-funzionali e consentono di operare manipolazioni meramente enunciative sulle formule: sono adatte per costruire dimostrazioni la cui validità dipende dai connettivi.

5.3.1 Assunzioni a tempo indeterminato

La regola di assunzione consente di introdurre una qualunque formula in un qualsiasi passo di una dimostrazione. Questo nella rappresentazione lineare viene rappresentata aggiungendo la colonna delle assunzioni a destra del numero progressivo. Si indica così che la formula dipende dall'assunzione fatta in tale riga. Un'assunzione viene introdotta come dipendente da sè stessa. L'assunzione determina il ragionamento ipotetico: nelle dimostrazioni ci si concede di introdurre enunciati in qualità di ipotesi e si tiene conto che ciò che si dimostra dipende dalle ipotesi o assunzioni fatte. L'unica differenza con le premesse è che le assunzioni non sono state ricavate come conclusioni da formule precedenti attraverso regole d'inferenza esclusa l'assunzione, una premessa in senso stretto viene utilizzata per ottenere una formula mediante una regola di inferenza. Si può dire che le assunzioni sono una forma particolare di premesse.

5.3.2 Modus ponens o eliminazione del condizionale

Come già visto il modus ponens è $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta, \alpha}{\beta}(E \Rightarrow)$. La conclusione dipende da tutte le assunzioni da cui dipendono le premesse. Si nota come pur essendo concettualmente distinte assunzioni e premesse di norma coincidono.

5.3.3 Introduzione del condizionale e assunzioni a tempo determinato

Questa regola d'inferenza è la reciproca del modus ponens e consiste nel ricavare un condizionale nella conclusione, viene pertanto detta introduzione del condizionale o prova condizionale $I \Rightarrow$. Per derivare un condizionale $\alpha \Rightarrow \beta$ la strategia consiste nell'assumere l'antecedente α nel tentativo di dedurre il conseguente β come conclusione eventualmente utilizzando altre assunzioni $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. In questo modo si scarica l'assunzione dell'antecedente α e si dice che si è derivato il condizionale $\alpha \Rightarrow \beta$ in dipendenza dalle assunzioni restanti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. In generale se a un certo passo di una dimostrazione β dipende da α come assunzione $I \Rightarrow$ permette di concludere $\alpha \Rightarrow \beta$. Questo condizionale dipende da tutte le assunzioni rimanenti ma non da α. Le assunzioni scaricate sono rappresentate fra parentesi quadre. Si creano in questo modo assunzioni con tempo di vita determinato o limitato all'interno dell'argomento.

5.3.3.1 I teoremi

Essendo che $I \Rightarrow$ fa diminuire il numero di assunzioni ha un'importanza particolare nel calcolo della deduzione naturale: si possono cerare formule nelle quali non compare alcuna assunzione dette per l'appunto teoremi che sono definiti come formule derivabili sulla base delle regole del calcolo in dipendenza da un insieme vuoto di assunzioni. Quando una formula è derivata come un teorema si dice che è stata dimostrata. Si noti come quando la conclusione di uno schema di ragionamento è stata derivata mediante le regole di ragionamento si è dimostrata la validità dello schema d'argomento, quando una formula è stata dimostrata vuol dire che è stata dedotta come teorema. I teoremi sono scritti come formule d'asserzione non preceduti da alcuna formula. In generale da qualsiasi forma d'argomento di cui si sia dimostrata la validità si può ottenere un teorema applicando $I \Rightarrow$ iterativamente. Si può dire che i teoremi del calcolo della deduzione naturale sono leggi logiche in quanto non dipendendo da alcuna assunzione sono formule vere da un punto di vista puramente logico. Si rende necessario sul fatto che i termini siano veri. Non è obbligatorio scaricare le assunzioni ma aiuta in quanto è più facile derivare risultati in dipendenza dal minor numero possibile di assunzioni.

5.3.4 Eliminazione della congiunzione

Essendo una congiunzione vera se e solo se sono veri entrambi i suoi congiunti, la regola di eliminazione della congiunzione o attenuante congiuntiva $E\wedge$ consente data come premessa di una congiunzione di derivare come conclusione uno o l'altro dei suoi congiunti: $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\ \dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}(E\wedge)$. La conclusione dipende da tutte le assunzioni da cui dipende la premessa. È intuitivo come si tratti di una buona regola di inferenza, ovvero la conclusione di ogni sua applicazione sia una conseguenza logica della premessa.

5.3.5 Introduzione alla congiunzione

È l'operazione reciproca di $E\wedge$, detta aggiunzione $I\wedge$ consente, date come premesse due formule qualunque di derivare come conclusione la loro congiunzione: $\frac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta} I\wedge$. La conclusione dipende da tutte le assunzioni da cui dipendono le premesse. È intuitivo come si tratti di una buona regola sul fatto vero-funzionale che se due formule sono vere lo è senz'altro anche la loro congiunzione. L'introduzione della congiunzione permette di dimostrare $\alpha \vdash \beta \Rightarrow \alpha$, ovvero il paradosso dell'implicazione materiale che sostiene che verificata α questa è implicata da una qualsiasi formula, questo accade in quanto $\Rightarrow$ non esprime alcun nesso causale o di contenuto. Questa regola insieme all'eliminazione e introduzione del condizionale rendono ridondanti le regole di inferenza per una bicondizionale $\alpha \Leftrightarrow \beta$ in quanto può essere considerata come $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$. Volendo concludere da una condizionale come premessa si separano attraverso $E\wedge$, se ci si vuole arrivare come conclusione si utilizza $I\wedge$.

5.3.6 Eliminazione della disgiunzione

L'eliminazione della disgiunzione o $E\vee$ la si usa quando si vuole derivare da una disgiunzione $\alpha \vee \beta$. Una strategia generale consiste nel derivare la conclusione separatamente da ciascuno dei due disgiunti in quanto in base alla vero-funzionalità della disgiunzione risulta vera se almeno uno dei suoi disgiunti è vero: se la conclusione segue da uno dei due essa segue dalla disgiunzione stessa. $E\vee$ si applica alle formule delle seguenti righe: quella in cui compare la disgiunzione $\alpha \vee \beta$, quella in cui si assume il primo disgiunto α, quella in cui si deriva la conclusione γ dal primo disgiunto, quella in cui si assume il secondo disgiunto β quella in cui si deriva la conclusione γ dal secondo disgiunto. Questa operazione scarica le assunzioni dei due disgiunti separati in quanto non è rilevante quale dei singoli disgiunti valga effettivamente in quanto derivando la conclusione da entrambi segue direttamente dalla disgiunzione: $\frac{\alpha \vee \beta, \gamma, \gamma}{\gamma} E\vee$ con $[\alpha]$ sulla prima γ e $[\beta]$ sulla seconda.

5.3.7 Introduzione della disgiunzione

L'introduzione della disgiunzione o $I\vee$ consente di derivare la disgiunzione tra questa e qualunque altra formula: $\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}, \frac{\beta}{\alpha \vee \beta} I\vee$. La conclusione dipende dalle stesse assunzioni da cui dipende la premessa ed è corretta e affidabile sfruttando le proprietà vero-funzionali della disgiunzione.

5.3.8 Eliminazione della negazione

La regola di eliminazione della negazione $E\neg$ dice che da una contraddizione si può dedurre qualsiasi cosa: $\frac{\alpha . \neg\alpha}{\beta} E\neg$. La conclusione dipende da tutte le assunzioni da cui dipendono le due premesse. È banale notare come dal falso può seguire qualsiasi cosa, ovvero una contraddizione non preclude alcuna possibilità.

5.3.9 Introduzione della negazione

La regola di introduzione della negazione o reductio ad absurdum o $I\neg$ dice che se da una qualunque assunzione α si deriva una contraddizione, ovvero si ottiene α derivando sia da β che da $\neg\beta$ si può negare la formula di partenza concludendo $\neg\alpha$ scaricando l'assunzione α: $\frac{\beta, \neg\beta}{\neg\alpha} I\neg$ dove β e $\neg\beta$ hanno sopra $[\alpha]$. La regola si basa su tre premesse: la formula α da negare e le due formule β e $\neg\beta$ da essa derivate. Questa operazione tenta pertanto di dimostrare come α generi una contraddizione e sia pertanto falsa.

5.3.10 Due negazioni fanno un'affermazione

La regola di eliminazione della doppia negazione permette di derivare $\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} DN$. Si possono in questo modo ridurre le doppie negazioni ottenute. Questo strumento permette l'inferenza indiretta, ovvero si deriva un enunciato assumendo provvisoriamente la sua deduzione.

5.3.11 Introduzione di teoremi

Una caratteristica della deduzione naturale è la progressività: è possibile utilizzare i risultati di dimostrazioni già effettuate per accorciare quelle nuove. Per fare questo si utilizza una regola di introduzione del teorema abbreviata con IT che permette di introdurre in in qualunque passo di una dimostrazione un teorema già dimostrato in forma schematica. Questa regola non è primitiva ma derivata in quanto facilita i calcoli ma non aumenta la potenza inferenziale.

5.4 Il calcolo elementare o dei predicati

Affinchè il sistema logico sia capace di trattare ragionamenti la cui correttezza dipende dai quantificatori è necessario dotarlo di regole ulteriori, ovvero regole di introduzione e eliminazione per ciascuno di essi .

5.4.1 Eliminazione dell'universale

Si osservi come esista un'analogia tra il quantificatore universale e la congiunzione che nel caso di un numero finito di oggetti diventa un'equivalenza. Si può intendere allora la regola di eliminazione dell'universale $E\forall$ in analogia con l'eliminazione della congiunzione. $E\forall$ dice che se una formula α vale per tutte le cose di cui parliamo allora essa varrà per singoli casi: $\frac{\forall x\alpha}{\alpha[x/t]} E\forall$, ricordando che t deve essere libera per x in α. La conclusione dipende da tutte le assunzioni da cui dipendeva la premessa. Viene chiamata anche regola di esemplificazione. Questa regola consente anche di togliere un quantificatore rimanendo con una formula che ha la corrispondente variabile libera.

5.4.2 Introduzione dell'universale

Viene detta anche generalizzazione universale serve per derivare una formula universale come conclusione $I\forall$. Questa regola sfrutta il principio per cui esiste una caratteristica in comune di cui esiste un esempio e il valore arbitrario delle variabili libere, essendo che quando non sono vincolate possono stare indeterminatamente per oggetti qualsiasi ciò che si dimostra per variabili libere vale implicitamente per qualsiasi cosa appartenga al loro campo di variazione. Riuscendo a derivare $F(x)$ per un x completamente arbitrario la derivazione di $F(x)$ funge da schema applicabile a qualsiasi particolare oggetto nel campo di variazione della variabile, legittimando l'inferenza $\forall x F(x)$, la formula generale è pertanto: $\dfrac{\alpha[x]}{\forall y \alpha[x/y]} I\forall$ la conclusione dipende in questo modo da tutte le assunzioni da cui dipendeva la premessa. Questa regola va sottoposta a due condizioni: la variabile y non deve comparire libera in α a meno che y non coincida con x stessa, inoltre la regola può essere applicata solo se $\alpha[x]$ che funge da premessa non dipende da assunzioni in cui la stessa variabile x compariva libera in quanto non potrebbe essere considerato completamente arbitrario.

5.4.3 Eliminazione dell'esistenziale

Vi è una stretta analogia tra quantificatore esistenziale e disgiunzione in quanto per le caratteristiche vero-funzionali della disgiunzione questa è vera se almeno uno dei due disgiunti è vero. La regola di eliminazione dell'esistenziale o $E\exists$ può essere considerata tentando di derivare γ da ciascuno dei disgiunti separatamente eventualmente utilizzando altre assunzioni. Essendo gli elementi del quantificatore esistenziale potenzialmente infiniti si rende necessario sfruttare le proprietà delle variabili libere si può tentare di provare che γ segue da $F(x)$ essendo che ciò che si prova per variabili libere vale per cose qualsiasi nel loro campo di variazione, una prova di γ in dipendenza da $F(x)$ funge da schema che rappresenta un'implicita deduzione di γ da tutti i disgiunti che $F(x)$ esprime: $\dfrac{\exists y \alpha[x/y], \gamma}{\gamma} E\exists$ dove sopra la prima γ si trova $[a[x]]$. Detta in altro modo se c'è qualcosa per cui vale una certa condizione e γ segue dall'assunzione che la condizione valga per un qualunque oggetto x arbitrariamente scelto allora γ segue senz'altro. In questo modo si scaricano le assunzioni sul disgiunto-tipo. Quest'operazione è soggetta a condizioni restrittive per evitare deduzioni scorrette: la variabile y non deve comparire libera in α a meno che non coincida con x, la variabile x non deve comparire libera nelle assunzioni utilizzate per derivare la conclusione γ dal disgiunto tipo e occorre che x non sia libera neppure in γ.

5.4.4 Introduzione dell'esistenziale

Detta anche generalizzazione esistenziale o particolarizzazione $I\exists$ si usa per derivare formule quantificate esistenzialmente come conclusione e dice che se una condizione vale per un qualunque t allora esiste qualcosa per cui vale quella condizione $\frac{\alpha[x/t]}{\exists x\alpha}I\exists$ e al solito t deve essere libero per x in α. La conclusione dipende da tutte le assunzioni da cui dipende la premessa. Permette di ottenere una formula quantificata esistenzialmente sia da una formula chiusa che da una formula aperta. Nel primo caso si sostituisce alla costante individuale una variabile e si introduce il quantificatore, nel secondo si introduce direttamente l'esistenziale.

5.4.5 Proprietà dei quantificatori

5.4.5.1 Scambio dei quantificatori

$\forall x\forall y\alpha \vdash \forall y\forall x\alpha$ e $\exists x\exists y\alpha \vdash \exists y\exists x\alpha$ i quali dicono che l'ordine dei quantificatori omogenei è indifferente, ma lo stesso non accade per le coppie di quantificatori eterogenei: vale $\exists y\forall x\alpha \vdash \forall x\exists y\alpha$ mentre non vale per qualunque α $\forall x\exists y\alpha \vdash \exists y\forall x\alpha$. Le relazioni per cui vale quest'inversione si dicono uniformabili.

5.4.5.2 Cambio alfabetico

Se y non è libera rispettivamente in $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$ allora valgono $\vdash \forall x\alpha \Leftrightarrow \forall y(\alpha[x/y])$ e $\vdash \exists x\alpha \Leftrightarrow \exists y(\alpha[x/y])$. Questi due teoremi illustrano l'intercambiabilità delle variabili vincolate. Il cambio alfabetico non deve mutare il senso della formula. La restrizione per cui y non deve essere libera garantisce questo.

5.4.5.3 Associatività rispetto ai connettori

$\vdash \forall x(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \forall x\alpha \wedge \forall x\beta$ e $\vdash \exists x(\alpha \vee \beta) \Leftrightarrow \exists x\alpha \vee \exists x\beta$ e vale il teorema $\vdash \exists x(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \exists x\alpha \wedge \exists x\beta$.

5.4.6 Quantificatori e implicazione materiale

$\forall x(\alpha \Rightarrow \beta) \vdash \forall x\alpha \Rightarrow \forall x\beta$ e $\exists x\alpha \Rightarrow \exists\beta \vdash \exists x(\alpha \Rightarrow \beta)$.

5.5 Il calcolo dei predicati con identità o quasielementare

Alcune inferenze si basano su qualità particolari dell'identità che si rende pertanto necessario esprimere estendendo il linguaggio dei predicati in un linguaggio quasielementare.

5.5.1 Eliminazione dell'identità

Detta anche regola di sostitutività $E=$ dice che data l'identità tra t e s da $\alpha[x/t]$ si ricava $\alpha[x/s]$ e viceversa: $\dfrac{t=s,\alpha[x/t]}{\alpha[x/s]},\dfrac{t=s,\alpha[x/s]}{\alpha[x/t]}E=$ il senso generale è espresso nel principio di indiscernibilità degli identici: se t è identico a s allora ogni proprietà di t è anche proprietà di s e viceversa, ovvero l'identità implica la congruenza rispetto a tutte le proprietà.

5.5.2 Introduzione dell'identità

Abbreviato come $I=$ consente di introdurre l'identità $t=t$ per un qualsiasi t come un teorema senza dipendenza da alcuna assunzione: $\dfrac{}{t=t}I=$ Questo dimostra come l'identità sia una relazione riflessiva attraverso la legge di identità: $\vdash \forall x(x=x)$.

5.6 Considerazioni conclusive

A differenza dell'utilizzo delle tavole di verità il calcolo della deduzione naturale non ha carattere meccanico e pertanto non si riuscirà a trovare una dimostrazione formale dell'invalidità di un esempio a meno di utilizzare controesempi. Non aumentando la capacità espressiva delle tavole risulta utile solo nel calcolo dei predicati. È stato stabilito infatti che l'insieme delle inferenze logico predicative valide non è decidibile, per ragionamenti complessi non esiste un test algoritmico di validità.

Capitolo 6

Semantica logica

In generale si ascrive alla semantica tutti ciò che riguarda il rapporto fra i segni linguistici e le entità che essi possono significare. È strettamente connessa all'ontologia, lo studio dei complessi di enti che si possono esprimere nel linguaggio formale. Verranno trattati i tratti essenziali della semantica logica elementare standard. Per parlare di ontologia si rendono necessari richiami alla teoria degli insiemi.

6.1 Teoria degli insiemi

6.1.1 Insiemi

Si definisce un insieme come una qualsiasi collezione di oggetti rappresentati da lettere maiuscole i cui elementi sono indicate con lettere minuscole. La relazione fondamentale è l'appartenenza $\in$ che determina che un oggetto appartiene ad un insieme. Un insieme può essere identificato attraverso una lista completa dei suoi elementi tra parentesi classe e non contano nè l'ordine nè le ripetizioni. Per rappresentare insiemi infiniti viene utilizzata una condizione di appartenenza che indica la caratteristica comune posseduta da tutti e soli gli elementi dell'insieme in questione. In generale una qualsiasi proprietà F determina un'insieme (principio di astrazione). Il principio di estensionalità stabilisce le condizioni sufficienti per l'identità tra insiemi: $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$. Un insieme è determinato interamente dalla totalità dei suoi elementi, in particolare tutti gli insiemi vuoti sono identici tra di loro, ovvero $\forall x(x \notin A \land x \notin B) \Rightarrow \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Rightarrow A = B$. Pertanto si identifica l'unico insieme vuoto con $\emptyset = \{x|x \neq x\}$. All'estremo opposto dell'insieme vuoto si trova l'insieme universo di cui ogni oggetto è membro indicato con $V = \{x|x = x\}$.

6.1.2 Relazioni e operazioni insiemistiche

La prima relazione da considerare è quella di inclusione o $\subseteq$ che indica la proprietà di un sottoinsieme, ovvero: $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$ a differenza della relazione di appartenenza che rapporta oggetti e insiemi questa mette in relazione insiemi con insiemi. Si deve pertanto distinguere tra l'oggetto x e il singoletto $[x]$, ovvero l'insieme che ha come unico oggetto x. Questa relazione è riflessiva e transitiva. L'insieme vuoto è incluso in ogni insieme.

6.1.2.1 Operazioni tra insiemi

- Unione: $A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$.
- Intersezione: $A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.
- Complementazione: $A' := \{x | x \notin A\}$.

6.1.2.2 Prodotto cartesiano

Si definisce ennupla ordinata un insieme di n elementi in cui l'ordine è specifico e serve a determinarla, si indica con $< x_1, \ldots, x_n >$. Si dice prodotto cartesiano $A \times B$ un insieme formato da tutte e sole le coppie ordinate il cui primo elemento appartiene al primo insieme e il secondo al secondo: $A_1 \times \cdots \times A_n := \{< x_1, \ldots, x_n > | x_1 \in A_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$. Si definisce potenza cartesiana il prodotto di un insieme con sè stesso.

6.1.2.3 Insieme potenza

Si definisce insieme potenza l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di un insieme: $P(A) := \{B | B \subseteq B\}$.

6.1.3 Ontologia e insiemi

Attraverso la teoria degli insiemi si possono esprimere le strutture ontologiche che si assumono come sistemi di significati da attribuire alle espressioni del linguaggio formale. L'ontologia logica elementare si basa infatti su concetti che sono esprimibili mediante la teoria degli insiemi. Quando si interpretano espressioni dei linguaggi formali della logica si attribuisce loro un riferimento in strutture ontologiche dette universi del discorso, i mondi dove si può far parlare i linguaggi formali. Una struttura è normalmente formata da un insieme non vuoto U di individui detto dominio o supporto alla struttura i quali godono di certe proprietà e fra cui sussistono relazioni e operazioni definite in U. In questo modo si possono esprimere i concetti di proprietà, relazione, operazione o funzione mediante insiemi in modo naturale. Assegnare una proprietà a certi individui vuol dire creare un sottoinsieme di U detto estensione ontologica. Una relazione ennaria è un sottoinsieme dell'ennesima potenza cartesiana di U.

6.1.4 Paradosso di Russel

Esiste la possibilità che esistano degli insiemi che contengano loro stessi. Gli insiemi che non appartengono a loro stessi si dicono normali e il loro insieme viene definito come $R = \{x|x \notin x\}$. Questo insieme esiste in virtù di comprensione secondo cui qualsiasi condizione o proprietà determina un insieme. Ora ci si può chiedere se R appartenga a sè stesso: da questo si ottiene che $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ da cui per la logica elementare discende una contraddizione: $R \in R \wedge R \notin R$. Questo paradosso mostra come se il principio di comprensione viene assunto senza restrizioni porta a possibili contraddizioni. La soluzione sta nella teoria di tipi logici. Il meccanismo consiste nello sviluppare una gerarchia di tipi di oggetti: individui, insiemi, insiemi di insiemi e così via e determinare che ciò che fa parte di un tipo logico può essere membro solo di qualcosa che faccia parte del livello superiore. Come risultato un insieme può essere composto solo di oggetti omogenei, ovvero appartenenti allo stesso livello logico. Altre proposte si basano sul principio della limitazione di grandezza in cui si differisce tra insieme e classe: alcune estensioni di predicati o classi non possono essere considerate insiemi o oggetti dei quali chiedersi se appartengano ad altri insiemi o classi.

6.2 Una teoria del significato basata sulla verità

Comprendere un enunciato vuol dire coglierne il significato che consiste nelle sue condizioni di verità. Un enunciato si presenta come la descrizione di un pezzo di realtà e il suo significato è noto quando si conoscono le condizioni in cui la descrizione che esso fornisce è adeguata, ovvero come deve essere fatto il mondo affinchè il significato sia vero. La concezione di significato così proposta è pertanto incentrata sulla verità. Quest'ultima si colloca fra il livello segnico e simbolico del linguaggio e il livello ontologico. La semantica in questa istanza ha lo scopo di di determinare le condizioni sotto le quali un enunciato costituisce un'affermazione vera intorno all'universo del discorso in cui lo si interpreta. Viene pertanto detta semantica vero-condizionale. Questa idea di significato si lega al fatto che l'enunciato dichiarativo è l'unità fondamentale della logica in quanto configurazione linguistica secondo cui si può parlare di condizioni di verità e che il significato delle espressioni subenunciative consiste nel modo in cui esse contribuiscono al significato degli enunciati in cui compaiono. In questo modo si può interpretare come soltanto negli enunciati le parole hanno senso. Conoscere le condizioni di verità di un enunciato non equivale a sapere che sia vero o falso in quanto si può comprendere il significato di un enunciato il cui valore di verità risulta ignoto o può cambiare nel tempo. Si deve considerare inoltre il principio di composizionalità del significato secondo cui il significato di un'espressione linguistica composta dipende funzionalmente dai significati dei sui costituenti. Una teoria semantica deve tener conto di come si comprendono potenzialmente infinite espressioni linguistiche nuove se sono sintatticamente ben formate. Questo fatto può essere spigato come la capacità da parte di un parlante competente di effettuare un calcolo del valore semantico di ogni espressione composta partendo da un numero finito di costituenti già noti. La composizionalità del significato opera anche a livello di enunciati composti: un enunciato composto vero-funzionalmente ha un significato che dipende dal significato degli enunciati che lo compongono e dalla loro composizione. Avendo detto che il significato degli enunciati consiste nelle circostanze che li rendono veri il valore semantico di ogni enunciato composto dipende composizionalmente dal valore semantico degli enunciati che lo compongono.

6.3 Semantica Tarskiana

6.3.1 La convenzione V

Vengono forniti gli strumenti per edificare una semantica rigorosa per un ampio gruppo di linguaggi formali. Per fare questo si caratterizza la nozione di verità relativamente ad un certo linguaggio accompagnando ad essa un metodo per esplicitare le condizioni di verità degli enunciati di singoli linguaggi logici formalizzati. La verità è considerata come una proprietà di enunciati: il predicato "è vero" si applica al nome dell'enunciato la cui verità è attribuita. Si definisce linguaggio oggetto il linguaggio di cui si parla o intorno al quale si forma una certa teoria o trattazione che sarà formata in un altro linguaggio detto metalinguaggio. Secondo questa convezione linguaggio oggetto e metalinguaggio devono essere distinti. Si può in questo modo formulare lo schema di verità come N è vero (nel linguaggio L) se e solo se T, dove N è il nome dell'enunciato di L cui si ascrive la verità e T è la sua traduzione nel metalinguaggio. Questo schema aiuta a ben definire la verità per un linguaggio in quanto si individua una condizione formale di adeguatezza per la definizione consistente nel fatto che questa non deve consentire di dedurre contraddizioni e una condizione materiale di adeguatezza che si esprime formulando la convenzione V: la definizione sarà adeguata se si potrà dedurne logicamente tutte le esemplificazioni dello schema di verità, ossia se per ognuno degli enunciati del linguaggio-oggetto L si potrà derivare dalla definizione il corrispondente condizionale in quanto determinerebbero l'estensione del predicato di verità per il linguaggio in questione. Emerge come questa concezione di verità sia corrispondentista in base a cui un enunciato è vero se e solo se corrisponde ai fatti. Lo schema di verità fornisce un criterio guida generale per specificare le condizioni di verità degli enunciati senza far ricorso a troppe nozioni. Si studi ora come queste nozioni si sviluppano nel linguaggio studiato precedentemente che verrà chiamato L. La sua semantica verrà sviluppata utilizzando come metalinguaggio l'italiano informale con notazione di tipo insiemistico. A differenza dei linguaggio naturali che sono già interpretati, ovvero le espressioni sono originariamente provviste di significato le formule dei linguaggi formali sono pure sequenze di simboli costruite in base alle regole sintattiche. Si è pertanto interessati a stabilire le condizioni di verità di L quando alle espressioni di L viene attribuito un significato in universi del discorso, ovvero fare in modo che il linguaggio parli di un certo mondo e poi di stabilire sotto quali condizioni una certa formula è vera in quell'universo. In questa prospettiva si parlerà di verità o falsità in relazione all'universo in cui L viene interpretato.

6.3.2 Interpretazioni e assegnazioni

Si consideri una struttura ontologica che ha per dominio un insieme non vuoto U di individui, un modello $\mathcal{M}$ per L è una coppia ordinata $\mathcal{M} =< U, i >$ dove i è una funzione di interpretazione, ossia una funzione che assegna significati a espressioni di L. Un'interpretazione di L è un'attribuzione di significato a ogni simbolo descrittivo costante di L meiante i che assegnerà significati ai simboli in modo che per ogni nome proprio o costante individuale k il suo significato secondo i in $\mathcal{M}$ o $\mathcal{M}(k)$ sarà un individuo appartenente a U, per ogni costante funtoriale ennaria f $\mathcal{M}(f)$ assegnatole da i in $\mathcal{M}$ sarà una certa operazione ennaria definita su U e per ogni costante predicativa ennaria P, $\mathcal{M}(P)$ assegnatole da i in $\mathcal{M}$ sarà una proprietà, o una relazione ennaria definita su U. In questo modo i predicati monadici significheranno proprietà ricondotte a insiemi e alle loro estensioni ontologiche. I predicati poliadici di L significheranno relazioni fra enti di U, ovvero insiemi di ennuple ordinate di elementi di U. Inoltre è stato fissato univocamente il significato delle costanti descrittive: ogni simbolo descrittivo costante ha uno e un solo significato in $\mathcal{M}$. Questa semantica è centrata su un apparato referenzialista: assume che il significato delle espressioni subenunciative di L consista nel riferimento o denotazione di oggetti del dominio di U. Le variabili individuali a differenza delle costanti possono stare per individui o assumere valori diversi e si assume di solito che l'interpretazione si limiti a fissare per ogni variabile individuale di x un campo di variazione, ovvero l'insieme dei suoi valori possibili. Tuttavia in termini di esplicitazione delle condizioni di verità delle formule risulta utile assegnare un valore determinato o denotazione temporanea che servirà per poter valutare le formule aperte che contengono variabili libere. Si dice pertanto che una asseggazione a relativa a un modello $\mathcal{M}$ è l'attribuzione a ogni variabile x di L di un valore determinato $a(x)$ nel suo campo di variazione U. Occorre distinguere tra assegnazione, ossia l'applicazione delle variabili a un oggetto determinato nel loro dominio e l'interpretazione delle costanti. a differisce da i perchè si suppone che il significato di una costante resti fissato univocamente in un'interpretazione mentre si possono avere diverse assegnazioni di valore alle variabili entro una stessa interpretazione. Combinando queste due operazioni si può avere una notazione deteminata per tutti i termini individuali del linguaggio e si scrive $\mathcal{M}^a(t)$ per indicare la denotazione di un termine individuale t relativa all'interpretazione del modello e all'assegnazione a e si definisce per induzione la costruzione dei termini individuali di L:

- Base idnuttiva:
  - Se t è una costante individuale allora $\mathcal{M}^a(t) := \mathcal{M}(t)$.
  - Se s è una variabile individuale allora $\mathcal{M}^a(s) := a(s)$.
- Passo induttivo: se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini individuali e f è una qualsiasi costante funtoriale ennaria allora $\mathcal{M}^a(f(t_1, \ldots, t_n)) := \mathcal{M}(f)(\mathcal{M}^a(t_1), \ldots, \mathcal{M}^a(t_n))$

Se t non contiene variabili le assegnazioni di valori alle variabili non fanno differenza per esso e il suo singificato è interamente fissato dalla sola interpretazione delle costanti.

6.3.3 La definizione ricorsiva

Dopo aver attribuito significati a tutte le parti descrittive di L ha senso tentare di esplicitare per ogni formula di L le condizioni per cui è vera in relazione all'interpretazione effettuata. Se si riuscirà a fornire una definizione che consenta in linea di principio di poter dedurre tutti i bicondizionali della forma di V si rispetterà la convenzione V e fornita una soddisfacente caratterizzazione della verità per L. Per far ciò si necessita di considerare che i bicondizionali che esemplificano V sono infiniti in quanto le regole di formazione consentono di costruire potenzialmente infinite formule e per ciascuna si rende necessario poter derivare il corrispondente bicondizionale. Si vuole pertanto poter esplicitare le condizioni di verità di un'infinità di formule in modo finito partendo da una definizione che contenga un numero finito di clausole. Per far questo si utilizzi l'induzione sulla costruzione delle formule di L. Siccome la semantica intende conformarsi al principio di composizionalità si può pensare di specificare schematicamente le condizioni di verità delle formule atomiche di L come dipendenti dalle denotazioni dei costituenti subenunciativi e poi indicare come il valore semantico delle fomule comonenti determina quello dei composti vero-funzionali. Tuttavia formule quantificate di L non sono formule atomiche e non sembrano propriamente composti vero-funzionali e potrebbero essere intese come abbreviazioni di congiunzioni e disgiunzioni. Se il dominio dell'interpretazione è infinito queste operazioni dovrebbero contenere infiniti congiunti e simili formule infinitarie. Un'altra considerazione va fatta sulle regole di formazione per L in quanto permettono di costruire formule aperte che non sono propriamente enunciati. Le due ultime considerazioni sono risolte mediante la nozione di soddisfacimento di una formula rispetto a una data assegnazione di un valore alle variabili in modo da esplicitare anche le condizioni di verità di formule quantificate che saranno vere solo se la loro condizione è soddisfatta da ogni e da almeno una assegnazione di valore a x. I quantificatori vengono visti come una sorta di istruzione per valutare assegnazioni di valori alle variabili che li quantificano. Si generalizza il concetto di soddisfacimento a tutte le formule, sia quelle aperte che agli enunciati. Si indica con $\models$. Si può ora scrivere la definizione induttiva. Si indica $\mathcal{M}^a \models \alpha$ a indicare che la formula α di L è soddisfatta nel modello $\mathcal{M} =< U, i >$ e rispetto all'assegnazione a di un dato valore alle variabili di L entro quella interpretazione. Con $a[x/u]$ si indica l'assegnazione identica ad a tranne per il fatto che assegna come valore alla variabile x l'individuo u del dominio U.

- Base induttiva: riguarda le formule atomiche: $\mathcal{M}^a \models P(t_1, \ldots, t_n)$ se e solo se $< \mathcal{M}^a(t_1), \ldots, \mathcal{M}^a(t_n) >\in \mathcal{M}(P)$. Questa clausola può essere interpretata come: una qualunque formula atomica $P(t_1, \ldots, t_n)$ di L è soddisfatta nell'interpretazione nel modello $\mathcal{M} =< U, i >$ e rispetto all'assegnazione a se e solo se la ennupla ordinata di individui rispetto a questa assegnazione appartiene all'insieme denotato dal predicato P, equivalentemente: se e solo se fra gli individui di U che sono le denotazioni dei termini $t_1, \ldots, t_n$ in questa interpretazione e secondo questa assegnazione sussiste la relazione che è la denotazione del predicato ennario P.

- Passo induttivo: vengono stabilite le clausole per il soddisfacimento di formule composte:
  - $\mathcal{M}^a \models \neg\alpha$ se e solo se non $\mathcal{M} \models \alpha$.
  - $\mathcal{M}^a \models \alpha \wedge \beta$ se e solo se $\mathcal{M} \models \alpha$ e $\mathcal{M} \models \beta$.
  - $\mathcal{M}^a \models \alpha \vee \beta$ se e solo se $\mathcal{M} \models$ o $\mathcal{M} \models$.
  - $\mathcal{M}^a \models \alpha \Rightarrow \beta$ se e solo se non $\mathcal{M} \models \alpha$ o $\mathcal{M} \models \beta$.
  - $\mathcal{M}^a \models \alpha \Leftrightarrow \beta$ se e solo se ($\mathcal{M} \models \alpha$ e $\mathcal{M} \models \beta$ oppure non $\mathcal{M} \models \alpha$ e non $\mathcal{M} \models \beta$.
  - $\mathcal{M}^a \models \forall x\alpha$ se e solo se per ogni $u \in U\mathcal{M}^{a[x/u]} \models \alpha$.
  - $\mathcal{M}^a \models \exists x\alpha$ se e solo se per qualche $u \in U\mathcal{M}^{a[x/u]} \models \alpha$.

La definizione di soddisfacimento nella semantica tarskiana viene strutturata in modo tale che per il soddifacimento di una formula α rispetto a un'assegnazione il valore attribuito da quell'assegnazione a variabili che non compaiono libere in α è irrilevante. In conseguenza di ciò gli enunciati non contenendo variabili libere sono soddisfatti rispetto a tutte le assegnazioni o rispetto a nessuna. La verità di una formula in un'interpretazione è definita come soddisfacimento rispetto a tutte le assegnazioni. Per indicare che α è vera nell'interpretazione nel modello $\mathcal{M}$ si scrive $\mathcal{M} \models \alpha$. La definizione induttiva della relazione di soddisfacimento è conforme alla convenzione V. Consente infatti di esplicitare le condizioni di verità di formule semplici e delle loro derivate. Poichè se ne possono dedurre tutti i condizionali è in grado di caratterizzare la verità per il linguaggio predicativo L.

6.3.4 Verità logica e conseguenza logica

La verità degli enunciati è caratterizzata relativamente al modello e all'interpretazione: una formula potrà essere vera o falsa dipendentemente da essa. Si consideri la totalità delle interpretazioni possibili: se una formula è soddisfatta rispetto ad un'assegnazione in almeno un'interpretazione si dice soddisfacibile, me è vera rispetto a tutte le assegnazioni in almeno un'interpretazione si dice verificabile. Si può dare il caso che α sia soddisfatta rispetto a tutte le assegnazioni in tutte le interpretazioni, ovvero che sia vera in tutti i modelli: dato un qualsiasi modello $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \alpha$. In questo caso dice che α è una formula logicamente vera o universalmente valida, ovvero è una legge logica e si indica con $\models \alpha$. Le formule predicative che sono leggi logiche si dicono leggi logico-predicative. Attraverso la semantica formale si può caratterizzare precisamente e generalmente la nozione di legge logica: essa è una formula che resta vera qualunque significato si assegni ai suoi simboli descrittivi e si tratta di una verità logica. Si può inoltre caratterizzare una conseguenza logica: si è detto che una formula è conseguenza logica di altre formule se e solo se in qualsiasi circostanza in cui tutte queste formule sono vere anche quella è vera. Essendo un modello la rappresentazione formale di una circostanza si può dire che β è conseguenza logica di $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se e solo se per ogni modello $\mathcal{M}$ se $\mathcal{M} \models \alpha_1$ e ... e $\mathcal{M} \models \alpha_n$ allora $\mathcal{M} \models \beta$, ossia se e solo se tutti i modelli che rendono vera ciascuna delle premesse rendono vera anche la conclusione. Si può estendere la notazione in modo da poter scrivere $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$. Un'altra notazione caratterizzabile è l'equivalenza logica. α e β si dice che sono logicamente equivalenti se ciascuna delle due è conseguenza logica dell'altra, ovvero se tutti i modelli che rendono vera l'una rendono vera anche l'altra e viceversa. A differenza dei teoremi e di derivabilità logica puramente sintattici leggi logiche e conseguenze logiche sono nozioni semantiche in quanto nella loro caratterizzazione si fa ricorso esplicito alla nozione di verità. Che i teoremi del calcolo dei predicati classico coincidano con le leggi logiche è vero ma non scontato.

6.3.5 La verità è inesprimibile

La condizione formale di adeguatezza di una definizione della verità per un linguaggio è che non consenta di dedurre contraddizioni, che è legata alla distinzione fra linguaggio-oggetto e metalinguaggio: se i due vengono confusi V può generare paradossi che accadono se si assume che il predicato di verità per un linguaggio sia esprimibile o definibile nello stesso linguaggio. Questo è dovuto al paradosso del mentitore (M): l'enunciato (M) è falso. Questo enunciato è autoreferenziale. Ci si chiede quale sia il suo valore di verità e si ragiona per casi: se sia vero allora per ciò che dice è falso, supponendo sia falso allora è vero. Accettando il principio di bivalenza ciascuna di queste alternative produce una situazione paradossale. Mediante una particolare tecnica è possibile costruire enunciati autoreferenziali attraverso un linguaggio formale come L: essendo le formule di L insiemi di oggetti possono venir prese come dominio di una interpretazione di L per cui esisterà un'interpretazione detta morfologica in cui formule di L parlano delle stesse formule di L. Sotto certe condizioni è posibile costruire enunciati autoreferenziali mediante la diagonalizzazione che permette di associare a $\alpha[x]$ l'enunciato β che si ottiene sostituendo al variabile libera con il suo nome in quella interpretazione $\beta \Leftrightarrow \alpha[x.\text{"}\beta\text{"}]$ β viene detto punto fisso di $\alpha[x]$. Si ponga ora che V sia il predicato di verità per L e che sia esprimibile in L. Ora diagonalizzando $V(x)$ si potrà avere $\mu \Leftrightarrow \neg V(\text{"}\mu\text{"})$ che dice che questo enunciato non è vero che rompe il principio di bivalenza. Una conclusione è che il predicato di verità per un linguaggio L non deve essere esprimibile nello stesso linguaggio L, secondo una versione del teorema di Tarski di indefinibilità della verità. Da qui l'importanza per cui la teoria in cui viene definita la verità per L sia formulata in un metalingauggio L_1 distinto dal linguaggio-oggetto L e nel quale si possa soltanto parlare dei concetti semantici riguardanti L. Una conseguenza di questa situazione è che una caratterizzazione universale della verità è impossibile. Questo metodo inoltre non sembra applicabile al linguaggio naturale in quanto non è strutturato secondo una gerarchia di metalinguaggi nè che ci possano essere concetti inesprimibili in esso.

Capitolo 7

Cenni di metalogica

Una volta determinato un linguaggio logico L e a un sistema formale S su di esso ci si può occupare delle caratteristiche generali del sistema entrando così nel campo della metalogica. Si tratta di un discorso che verte sulle caratteristiche complessive dei sistemi logici. I teoremi della metalogica qui discussi vengono chiamati metateoremi e vertono sui sistemi formali esprimendo le loro proprietà generali.

7.1 Coerenza e completezza o le virtù di una logica

7.1.1 La coerenza dei sistemi formali

Un sistema formale S viene detto sintatticamente coerente se per nessuna formula α del linguaggio formale su cui è impiantato si dà il caso che $\vdash \alpha$ e $\vdash \neg\alpha$ ossia se non consente di derivare come teoremi sua una formila che la sua negazione. Se ciò accade il sistemaè detto incoerente o contradditorio. Per capire le conseguenze di un sistema incoerente si introduca l'inconsistenza: un sistema S viene detto inconsistente se consente di dimostrare o derivare come teoremi tutte le formule del linguaggio L su cui è impiantato. Se ne esiste una che S non dimostra viene detto consistente. In un sistema formale che esprime la logica classica e nei sistemi dotati di $E\neg$ o di formulazioni equivalenti della legge dello pseudo- Scoto l'incoerenza implica l'inconsistenza: questa regola dice che da una contraddizione si può dedurre qualunque formula. Pertanto se fosse possiblie dedurre una contraddizione come teorema il sistema in questione diventerebbe inconsistente che sarebbe deduttivamente inutile in quanto dimostra tutto. Da qui l'importanza di fornire dimostrazioni di coerenza o non contraddittoreità che garantiscano che i principi di un sistema formale siano sicuri. La dimostrazione della coerenza di un sistema formale avviene utilizzando la coerenza o correttezza semantica in quanto caratterizzata con riferimento alla nozione di verità. Si studi la correttezza del calcolo dei predicati classico. Di questo il sistema della deduzione naturale è una sistemazione tipica. Provare che è corretto vuol dire provare che tutti i teoremi del calcolo dei predicati sono veri in ogni interpretazione, ovvero in tutti i modelli: se $\vdash \alpha$ allora $\models \alpha$. Questo è detto il teorema speciale o debole di coerenza del calcolo dei predicati che riguarda il caso a zero premesse. Il teorema generale o forte di correttezza dice che tutte le formule derivabili da un gruppo qualsiasi di premesse nel calcolo dei predicati sono conseguenza logica di quel gruppo di premesse: se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ allora $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$, la dimostrazione non vista nel dettaglio ha luogo per induzione sulla costruzione delle dimostrazioni formali. Il teorema debole dice che le versioni del calcolo dei predicati consentono di derivare come teoremi solo formule vere in ogni interpretazione, o le leggi logiche. Da questa correttezza semantica deriva la coerenza sintattica: non essendo la contraddizione una legge logica non potrà mai essere derivata: non è vera in nessuna interpretazione. Il teorema forte dice che i principi e regole d'inferenza delle versioni del calcolo dei predicati consentono di dedurre solo conseguenze logiche: essendo che la conseguenza logica cattura il criterio di correttezza logica dei ragionamenti e il teorema assicura che il calcolo dei predicati consente di costruire dimostrazioni formali per ragionamenti effettivamente validi non consentendo mai di derivare una conclusione falsa da premesse tutte vere.

7.1.2 La completezza dei sistemi formali

La completezza è la proprietà che dice che i sistemi "dimostrano il più possibile". Il teorema deboel di completezza afferma che tutte le formule vere in ogni interpretazione sono teoremi del calcolo dei predicati: se $\models \alpha$ allora $\vdash \alpha$ ovvero nel calcolo dei predicati si possono derivare come predicati tutte le leggi logiche. Unendo i teoremi deboli di coerenza e completezza si otterrà: $\vdash \alpha$ se e solo se $\models \alpha$ che dice come nel caso della logica dei predicati classica il teorema del calcolo logico e quello di legge logica sono nozioni indipendenti che individuano lo stesso insieme di formule. Il teorema forte di completezza dice che tutte le conseguenze logiche di un gruppo qualsiasi di premesse sono derivabili da quel gruppo di premesse nel calcolo dei predicati: se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ allora $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$, ossia nel calcolo dei predicati si possono costruire dimostrazoni formali per tutti i ragionamenti effettivamente validi. Queste due proprietà dicono come la logica classica non sia arbitraria in quanto le inferenze dimostrabili sono corrette contemporaneamente sintatticamente e semanticamente e che i vari sistemi formali che la esprimono sono equivalenti fra loro in quanto coerenti e completi.

7.2 Teoremi limitativi

7.2.1 L'incompletezza dell'aritmetica

In un qualsiasi sistema formale S che soddisfi certe condizioni si può parlare di alcune proprietà e relazioni sintattiche che riguardano S stesso, nel senso che la proprietà sintattica di essere dimostrabile in S può essere espressa all'interno della teoria stessa. Per ottenere ciò si rende necessaria la gödelizzazione: studiando un qualunque linguaggio formalizzato L e un sistema S si du esso impiantato si ha a che fare con un insieme numerabile di oggetti e che pertanto si possono rappresentare associandoli ai numeri naturali. La gödelizzazione è basata su questa associazione univoca di simboli, formule e sequenze di formule di L a un numero naturale. Successivamente data un'espressione di L si può stabilire il numero di Gödel che le corrisponde e dato un numero naturale si può stabilire se e a quale espressione si riferisce. Se ora il sistema ha capacità espressive riconducibili al fatto che contiene una certa quantità di aritmetica formale è possibile che enunciati del sistema parlino di proprietà e ralzioni tra enunciati del sistema stesso: i numeri natorali diventano gli oggetti di cui gli enunciati aritmetici parlano ma codici univocamente associati a espressioni del linguaggio della teoria stessa, allora affermazioni si S sono rispecchiate in S come affermazioni su numeri. Utilizzando la diagonalizzazione si possono costruire enunciati che parlano di sè stessi in quato si riferiscono al proprio numero di Gödel. Si costruisca pertanto in S γ che dice di essere indimostrabile in S: $\gamma \Leftrightarrow \neg Dim("\gamma")$. In luogo del predicato di verità V si ha un predicato di dimostrabilità. La formula $Dim(x)$ è una fromula aritmetica che raffigura nel sistema la proprietà sintattica di formule del sistema di essere dimostrabile in S, ovvero di essere un teorema in S. Questo predicato è esprimibile in S e non dà luogo a paradossi che dice che per un sistema S che soddisfi queste condizioni se S è coerente allora non $\vdash \gamma$ dove si intende con coerenza il fatto che S dimostra solo verità in quanto se γ fosse dimostrabile e pertanto falso il sistema consentirebbe di derivare enunciati falsi come teoremi. Se γ non è dimostrabile allora γ è vero, pertanto se S è coerente allora $\vdash \neg\gamma$ in quanto se fosse vero la sua negazione sarà falsa ed essendo S coerente $\neg\gamma$ non sarà teorema di S. Queste due condizioni unite costituiscono una versione semantica informale del primo teorema di incomletezza di Göedel. Il primo teorema dice che qualunque sistema formale coerente S in grado di esprimere l'aritmetica elementare è incompleto: si possono formulare enunciati aritmetici veri nel suo linguaggio ma S non può derivarli come teoremi. Inoltre γ è indecidibile per S in quanto non può dimostarlo nè refutarlo in quanto non può dimostrare nè lui nè la sua negazione. E aggiungere questo problema indecidibile come assioma ne creerebbe altri.

7.2.2 Incompletezza e prove di coerenza

Si è provato come si S è coerente allora γ non è dimostrabile. Per esprimere questa idea nel sistema formale bisogna introdurre un'affermazione di coerenza ($Coer$) per S, dove $Coer := \neg Dim("k")$ ovvero dire che S è coerente è come dire che S non dimostra k una qualsiasi falsità logica o aritmetica. Si può esprimre che se S è coerente allora γ non è dimostrabile: $\neg Dim("k") \Rightarrow \neg Dim("\gamma")$. Il coonseguente di quest'ultima è γ, pertanto $Coer \Rightarrow \gamma$, pertanto se S è coerente allora non $\vdash Coer$ Supponendo di poter dimostare l'antecedente che la formula esprimere la coerenza di S sia un teorema del sistema di esso mediante il modus ponens si potrebbe dimostrare anche γ, quello esclusio dal primo teorema di incompletezza, viene pertanto espresso il secondo teorema di incompletezza di Göedel che è un corollario del primo che dice che se S è coerente allora non è in grado di dimostrare l'assezione $Coerr$ del linguaggio formale su cui è impiantato che esprima S, ovvero S non è in grado di dimostrare la propria coerenza.

7.2.3 La logica è trasendentale

Questi due teoremi si ritiene illustrino una discrepanza tra dimostrabilità in un sistema formale e verità in quanto nessun sistema formale può dimostrare solo cose vere ma non tutte e nessun sistema coerente è capace di dimostrare autonomamente di esserlo.

Capitolo 8

Il ragionamento induttivo

8.1 Il concetto di forza

Nel ragionamento induttivi si è interessati alla probabilità della conclusione date le premesse, ovvero alla probabilità induttiva dell'argomentazione che essendo dipendente dalla forza di premesse e conclusione rende necessario introdurre la nozione di forza di un'asserzione. La forza di un'asserzione è direttamente proporzionale alla quantità di informazioni che trasmette e pertanto un'asserzione forte risulta vera solamente in situazioni specifiche. Si può dare un'ulteriode definizione di forza come inversamente proporzionale alla sua probabilità a priori ovvero la sua probabilità a prescindere da una qualunque evidenza. Le asserzioni più forti sono pertanto quelle così tanto da non poter essere vere in alcune circostanze, ovvero le asserzioni logicamente impossibili. Le asserzioni più deboli sono invece quelle logicamente necessarie. Non sempre è possibile confrontare la forza di due assezioni, si possono tuttavia classificare insiemi di asserzioni rispetto alla loro forza relativa:

- Se A implica deduttivamente B ma B non implica A allora A è più forte di B in quanto le circostanze possibili di A formano un sottoinsieme di B.
- se A è logicamente equivalente è B allora hanno la stessa forza in quanto le circostanze possibili di A e B formano lo stesso insie,.

L'importanza della forza sta nel suo legame con la probabilità induttiva che tende a variare in modo proporzionale alla forza delle premesse e inversamente alla forza della conclusione.

8.2 Il sillogismo statistico

Si possono dividere le argomentazioni induttive in quelle che non presuppongono in alcun modo che l'universo sia uniforme o risponente a leggi generali e quelle che lo fanno. Le prime sono chiamate argomentazioni statistiche dato che le loro premesse sostengono la conclusione per ragioni statistiche o matematiche mentre le seconde sono denominate argomentazioni humeane. La stima della probabilità induttiva per argomentazioni humeane dipende dal grado della conclusione sulla certezza rispetto a leggi contingenti.

8.2.1 Argomentazioni statistiche

Un ovvio valore per la probabilità induttiva per le argomentazioni statistiche è il valore percentuale si può determinare un sillogismo statistico nella forma $\frac{n \text{ pertcentuale di } F \text{ è } G, x \text{ è } F}{x \text{ è } G}$, la sua probabilità induttiva è $\frac{n}{100}$.

8.3 Generalizzazioni statistiche

Nel caso di generalizzazioni statistiche ha come premesse statistiche di alcuni elementi di un insieme e una conclusione riguardo l'insieme nella sua interezza hanno forma: $\frac{n \text{ pertcentuale di } c \text{ elementi scelti a caso tra } F \text{ è } G}{n \text{ percento di tutti gli } F \text{ è } G}$. c indica la grandezza del campione e se è abbastanza grande il sottoinsieme di F con c elementi è abbastanza rappesentativo. Il successo di questa argomentazione statistica dipende grandemente dalla casualità della tecnica di campionamento in quanto altrimenti si genera una distorsione sistematica. La probabilità induttiva della generalizzazione è proporzionale a c e inversamente alla forza della conclusione. Si rende necessario accordare alla conclusione un margine di errore.

8.4 Generalizzazioni induttive e induzioni semplici

Si chiama generalizzazione induttiva $\frac{n \text{ pertcento dei } c \text{ elementi di } F \text{finora osservati è } G}{n \text{ percento di tutti gli } F \text{ è } G}$ non è una generalizzazione statistica in quanto c non può essere casuale a causa di questo il ragionamento non può essere giustificato unicamente da ragionamenti matematici e presuppone l'uniformità e sono generalizzazioni di tipo humeano. Questo tipo di generalizzazione è una forma di ragionamento debole in quanto il grado di uniformità è incerto. Per aumentare la probabilità induttiva si può indebolire una conclusione riducendo la popolazione menzionata ad un solo individuo creando l'induzione semplice o per enumerazione: $\frac{n \text{ pertcento dei } c \text{ elementi di } F \text{finora osservati è } G}{\text{Se si osserva un altro } F \text{ è } G}$. A differenza dei sillogismi statistici le induzioni semplici non diventano deduzioni quando $n = 100$.

8.5 Induzione per analogia

L'induzione per analogia è un tipo di argomentazione humeana: in un argomentazione per analogia si osserva che x ha diverse proprietà $F_1, \ldots, F_n$ con un altro oggetto y e si osserva che y gode anche di G, pertanto si reputa probabile che anche x goda di G: $\frac{F_1x \wedge \cdots \wedge F_nx, F_1y \wedge \cdots \wedge F_ny, Gy}{Gx}$. Affermazioni di questa forma possono essere rafforzate rafforzando le premesse, indebolendo la conclusione o notando ulteriori proprietà in comune e aumentare la forza delle proprietà. È importante considerare la pertinenza di G rispetto alle F. Si possono introdurre nuove analogie con altri oggetti per rafforzare la conclusione di un argomentazione ibrida.

8.6 Inferenza causali e metodi di Mill

Sia le argomentazioni statistiche che quelle humeane tentano di instaurare un nesso logico tra caratteristiche di un insieme e quelle di alcuni elementi dell'insieme. Si considerino ora le inferenza causali in cui si tenta di identificare le cause di un evento o effetto. Queste procedure hanno due passi: il primo consiste nella formulazione di una lista di cause sospette che nel secondo verranno eliminate per osservazione nel maggior numero possibile. L'ipotesi che la causa reale è inclusa nella lista iniziale è generalmente induttiva mentre il secondo passo è deduttivo. Normalmente si giunge alla lista di cause sospette attraverso un ragionamento prevalentemente analogico. Il processo di eliminazione dipende dal tipo di cause ricercate:

8.6.1 Causa necessaria o condizione causalmente necessaria

Una causa necessaria per E è una condizione in assenza della quale E non si verifica mai ma essa si può verificare senza che accada E. Un effetto può avere diverse cause necessarie. Si riduce attraverso il metodo dell'accordo.

8.6.1.1 Metodo dell'accordo

Questo metodo è una procedura deduttiva. Per determinare quale nell'elenco di condizione sospette sia in effetti condizione necessaria si esaminano un certo numero di casi diversi di E, ovvero di ricorrenze di effetti dello stesso tipo. Se in uno di questi casi una delle condizioni necessarie sospette non compare la si può eliminare. Si spera che la lista si riduca ad un solo elemento che comunque avrà un certo grado di incertezza in quanto si deve presupporre che l'elenco contenga la vera causa necessaria.

8.6.2 Causa sufficiente o condizione causalmente sufficiente

Una causa sufficiente per E è una condizione in presenza della quale E si verifica sempre, anche se può manifestarsi senza che ci sia la causa. Un certo effetto può avere diverse cause sufficienti. Si riduce attraverso il metodo della differenza.

8.6.2.1 Metodo della differenza

Per determinare quali dele condizioni non sia una condizione sufficiente si considera quando una di esse ricorre senza E e la si elimina.

8.6.3 Causa necessaria e sufficiente

Si dice causa necessaria e sufficiente una causa che soddisfa i requisiti dei tipi precedenti. Si riduce attraverso il metodo del congiunto.

8.6.3.1 Metodo del congiunto

Nel metodo del congiunto si applicano simultaneamente i metodi dell'accordo e edella differenza e una causa potrè essere esclusa se si verifica senza E o quando quest'ultimo si verifica senza di essa.

8.6.4 Dipendenza causale di una quantità variabile da un'altra

Una quantità variabile B si dice dipendente da una seconda quantità variabile A se un cambiamento in A produce un cambiamento corrispondente in B. Si riduce attraverso il metodo della variazione concomitante.

8.6.4.1 Metodo della variazione concomitante

Questo metodo serve per ridurre un elenco di grandezze variabili che si ipotizza possano essere responsabili di un cambiamento specifico. Si scarta una di esse se il suo valore rimane costante durante il cambiamento di E.

Capitolo 9

La semantica di Kripke

La semantica dei mondi possibili prevede un modello costituito da tre componenti $\mathcal{M} =< W, R, I >$, costituita da un insieme non vuoto W di mondi, una relazione binaria R di accessibilità tra mondi e un'interpretazione I che associa in ciascun mondo di W il valore di verità alle elettere proposizionali di U. Dato un modello ogni formula A della logica intensionale ottenuta ampliando il linguaggio della logica proposizionale classica con due nuovi operatori ad un argomento $\Box$ e $\diamond$ assume in ciascun mondo di W uno e uno solo dei due valori di verità. $\Box$ e $\diamond$ si possono leggere come è necessario ed è possibile, pertanto all'insieme delle formule ben formati si aggiunge: se A è una formula allora $\Box A$ e $\diamond A$ sono formule. Queste formule sono dette modalizzate.

9.1 Strutture (frames)

Si definisce struttura una coppia ordinata $< W, R >$ in cui W è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti mondi possibili indicati con le lettere minuscole e R è una relazione binaria in W, un sottoinsieme del prodotto cartesiano $W \times W$ e viene detta relazione di accessibilità. Si dice uRv se ciò che vale nel mondo v può influenzare cosa accade nel mondo u. Se nessun mondo vede sè stesso R si dice irriflessiva, e se nessun mondo è cieco si dice che è seriale. In particolare per dare una struttura basta disegnare un insieme qualsiasi di mondi e collegarli con frecce nel modo che si vuole.

9.2 Interpretazioni e verità in strutture: modelli

Nelle logiche intensionali l'assegnazione di valori di verità o interpretazione I viene riferita ad una struttura (W, R): si associa un valore di verità alle lettere proposizionali di U in corrispondenza di ogni mondo di W. È pertanto una funzione a due argomenti avente come dominio $U \times W$ e come codominio

$\{True, False\}$. Un modello è pertanto $\mathcal{M} = (W, R, I)$. Mediante questa definizione di modello si può definire il concetto semantico di verità di una formula A in un mondo u indicata con $(W, R, I), u \models A$ o $\mathcal{M}, u \models A$, ovvero A è vera nel mondo u in base a I nella struttura (W, R). Pertanto definendo per induzione:

(1) $A = p$: $\mathcal{M}, u \models p \Leftrightarrow I(p, u) = True$.

(2) $A = \neg B$: $\mathcal{M}, u \models A \Leftrightarrow \mathcal{M}, u \not\models B$.

(3) $A = B \wedge C$: $\mathcal{M}, u \models A \Leftrightarrow \mathcal{M}, u \models B$ e $\mathcal{M}, u \models C$.

(4) $A = B \vee C$: $\mathcal{M}, u \models A \Leftrightarrow \mathcal{M}, u \models B$ o $\mathcal{M}, u \models C$.

(5) $A = B \Rightarrow C$: $\mathcal{M}, u \models A \Leftrightarrow \mathcal{M}, u \not\models B$ o $\mathcal{M}, u \models C$.

(6) $A = \Box B$: $\mathcal{M}, u \models A \Leftrightarrow$per ogni $v \in W$ se uRv allora $\mathcal{M}, v \models B$.

(7) $A = \diamond B$: $\mathcal{M}, u \models A \Leftrightarrow$ esiste $v \in W$ tale che uRv e $\mathcal{M}, v \models B$.

Da questa definizione $((1) - (5))$ si nota come il valore di verità di una formula del linguaggio della logica proposizionale classica in un mondo u si calcola come nella logica classica. La proposizione (6) determina $\Box B$ come vera in u se e solo se B è vera in tutti i mondi di W accessibili da i. La (7) determina come $\diamond B$ sia vera in u se e solo se B è vera in almeno un mondo di W accessibile a u. Si noti come in un mondo cieco u tutte le formule modalizzate $\Box A$ sono vere, mentre $\diamond A$ sono false. Si noti come continua a valere il principio di bivalenza. Ciò che vale in logica classica continua a valere in ogni mondo di una struttura per qualsiasi interpretazione. Pertanto queste logiche conservano le tautologie e le regole della logica classica.

9.3 Concetti semantici

Al variare del mondo cambia il valore di verità di una formula. Si verifichi il caso in cui una formula abbia lo stesso valore in tutti i mondi. Si possono pertanto definire i concetti di validità per modello e struttura:

- Una formula A è valida in un modello $\mathcal{M}(W, R, I)$, ovvero $\mathcal{M} \models A((W, R, I) \models A)$ se e solo se A è vera in tutti i mondi di W, ovvero $\mathcal{M} \models A \Leftrightarrow$ per ogni u in $W, \mathcal{M}, u \models A$.

- Una formula A è valida in una struttura (W, R), ovvero $(W, R) \models A$ se e solo se per ogni I, A è valida in W, R, I, $(W, R) \models A \Leftrightarrow$ per ogni $I, (W, R, I) \models A$.

Inoltre, indicando con $R \dots$ il fatto che R goda della proprietà $\dots$:

- Una formula A è valida in tutte le strutture (W, R) con $R \dots$, ovvero $R \dots \models A$ se e solo se per ogni (W, R) con $R \dots$ e per ogni I, A è valida in (W, R, I): $R \dots \models A \Leftrightarrow$ per ogni (W, R) con $R \dots (W, R) \models A$.

- Una formula A è valida $\models A$ se e solo se è valida in tutte le strutture: $\models A \Leftrightarrow$ per ogni $(W, R), (W, R) \models A$.

Si noti come il concetto di vailidità diventi più articolato: variando u si ha il concetto di validità in un modello, variando I si ha il concetto di validità in struttura e facendo variare la struttura con quelle di una classe $R\ldots$ si ha il concetto di validità per le strutture con $R\ldots$, se si fa variare la struttura in tutti i modi possibili si ha la validità più generale, analoghe alle tautologie. Da questi concetti siestraggono i concetti di conseguenza logica: sia X un insieme di formule

- Conseguenza logica in un modello $\mathcal{M} = (W, R, I)$: $\mathcal{M}, X \models A \Leftrightarrow$ per ogni u in W, se $\mathcal{M}, u \models X$, allora $\mathcal{M}, u \models A$.
- Conseguenza logica in una struttura(W, R): $(W, R), X \models A \Leftrightarrow$ per ogni I, $(W, R, I), X \models A$.
- Conseguenza logica in una classe di strutture con $R\ldots$: $X \models A$ (con $R\ldots$) $\Leftrightarrow$ per ogni (W, R) con $R\ldots$ $(W, R), u \models A$.
- Conseguenza logica in tutte le strutture: $X \models A \Leftrightarrow$ per ogni (W, R), se $(W, R) \models X$ allora $W, R) \models A \Leftrightarrow$ per ogni $(W, R), (W, R), X \models A$.

Come per la logica proposizionale classica si possono introdurre i concetti di soddisfacibilità di formule e insiemi che qua non vengono esplicitati. Nella semantica di Kripke ogni formula riceve in ciascun modello uno e un solo dei due valori di verità.

Capitolo 10

La logica modale minimale

L'insieme di formule valide costituisce la logica intensionale minimale indicata con **K**. Le formule valide in essa sono valide in quasi tutte le logiche intensionali. Essendo tutte le tautologie vere in ogni mondo di ogni modello, la logica classica è contenuta in **K**.

10.1 Formule valide

10.1.0.1 Esempio 1

Si dimostri che la formula $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box b)$ è valida. Si deve pertanto dimostrare che qualsiasi sia il modello $\mathcal{M}$ e il mondo u di W essa è vera in u. Si ragioni per assurdo. Se tale formula non è valida deve esistere almeno un modello $\mathcal{M} = (W, R, I)$ e un mondo $u \in W$ in cui essa è falsa. Pertanto in u l'antecedente deve essere vero e il conseguente falso. Essendo falso $\Box A \Rightarrow \Box B$ in u deve essere vera $\Box A$ e falsa $\Box B$. Da queste tre formule la più informativa è l'ultima: essendo che $\neg\Box B$ deve esistere un mondo $v \in W$ accessibile da u in cui sia falsa B. Essendo vere $\Box(A \Rightarrow B)$ e $\Box A$ le formule $A \Rightarrow B$ e A devono essere vere anche in B. Si crea pertanto un assurdo in v in quanto non possono essere vere $A \Rightarrow B$ e A e falsa B.

10.1.0.2 Esempio 2

Si dimostri che è valida $\Diamond A \Rightarrow \neg\Box\neg A$. Si ragioni per assurdo: se il condizionale non fosse valido esisterebbe u in cui $\Diamond$ è falso, ovvero è vera $\Diamond A$ e falsa $\neg\Box\neg A$. Dato che in u risulta vera $\Diamond A$ deve esistere $v \in W$ accessibile da u in cui è vera A, ma essendo vera $\Box\neg A$ $\neg A$ deve essere vera in tutti i mondi accessibili da u e pertanto vera anche in v e si arriva ad un assurdo.

10.1.0.3 Esempio 3

Si dimostri che è valida $\neg\Box\neg A \Rightarrow \Diamond A$. Si ragioni per assurdo: se non fosse valida esisterebbe un mondo u di un modello $\mathcal{M}$ in cui è vera $\neg\Box\neg A$ e falsa $\Diamond A$. Se è falsa $\Box\neg A$ vi deve essere $v \in W$ accessibile da u tale che A è vera. Essendo A vera in v e v accessibile da u in u deve essere vera $\Diamond A$ e si arriva all'assurdo. Dai due esempi precedenti si dimostra il bicondizionale $\neg\Box\neg A \Leftrightarrow \Diamond A$.

10.2 Formule non valide

10.2.0.1 Esempio 4

Si verifichi che la formula $\Diamond p \wedge \Diamond q \Rightarrow \Diamond(p \wedge q)$ non è valida: se in un mondo u è vera $\Diamond p \wedge \Diamond q$ ed è falsa $\Diamond(p \wedge q)$ si deduce che esiste $v \in W$ accessibile da u in cui è vera p e un mondo w accessibile da u in cui è vera q. Se in v si pone falsa q e in w si pone falsa p in entrambi è falsa $p \wedge q$.

10.2.0.2 Esempio 5

Si consideri la formula $\Box p \Rightarrow p$ si noti come la formula non è valida in quanto è falsa in un mondo u in cui è vera $\Box p$ e falsa p e il mondo è cieco.

10.3 Il calcolo K della logica modale minimale

K come calcolo logico assiomatico si ottiene estendendo un qualsiasi calcolo logico assiomatico per la logica proposizionale classica. Si ampli il linguaggio con l'operatore $\Box$ e si definisca $\Diamond := \neg\Box\neg A$. Si ampli inoltre l'apparato deduttivo con l'assioma di distribuzione $\Box(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\Box A \Rightarrow \Box B)$ e la regola di necessitazione se si è derivato A allora si può derivare $\Box A$: $\vdash A \Rightarrow \vdash \Box A$. Si dimostra facilmente che tutte le formule derivabili in **K** sono valide e che tutte le formule valide sono derivabili in **K**, pertanto essa è corretta e completa. Nasce anche la regola di necessitazione generalizzata. Se $A_1, \dots, A_n \vdash A$ allora $\Box A_1, \dots, \Box A_n \vdash \Box A$.

Capitolo 11

Logiche modali aletiche

Le logiche modali aletiche studiano il comportamento logico delle modalità del necessario, del possibile, dell'impossibile e del contingente. Si amplia il linguaggio della logica proposizionale con $\Box$ e $\diamond$. $\Box A$ si legge A è necessariamente vera e $\diamond$ come A è possibile. L'impossibile si formalizza con $\neg \diamond A$ mentre contingente con $A \wedge \diamond \neg A$. Tutto quanto assunto nella logica modale minimale **K** vale nella logica modale aletica e pertanto la semantica di Kripke è uno strumento adeguato per trattare gli operatori modali aletici.

11.1 La logica modale aletica minimale KT

KT si ottiene aggiungendo a **K** come nuovo assioma $\Box A \Rightarrow A$. Sono derivabili in tutte le formule derivabili da **K**. più quelle nella cui derivazione si utilizza l'assioma appena aggiunto. Per ottenere una semantica adeguata a **KT** si deve modificare la nozione di validità utilizzando la nozione di validità in una struttura (W, R). Una formula A è valida in (W, R) se e solo se per ogni interpretazione$I$ e per ogni mondo u di W A è vera in u rispetto a $\mathcal{M} = (W, R, I)$ per fare questo si dimostri il seguente teorema da qui seguono facilmente correttezza e completezza di **KT**.

11.1.1 Teorema

11.1.1.1 Enunciato

La formula $\Box p \Rightarrow p$ è valida in (W, R) se e solo se R è riflessiva.

11.1.1.2 Dimostrazione

Si dimostri prima che se $\Box p \Rightarrow p$ è valida in (W, R) allora R è riflessiva, ovvero se $u \in W$ in mondo qualsiasi allora uRu. Sia $u \in W$ un mondo qualsiasi si definisce l'interpretazione I in (W, R) come per ogni w di W, $I(p, w) = True$ se e solo se uRw. In base a I in u è vera $\Box p$. Dato che per ipotesi $\Box p \Rightarrow p$ è

valida in (W, R) essa è vera in tutti i mondi di W e pertanto anche in u, dalla verità in u di $\Box p$ e di $\Box p \Rightarrow p$ segue la verità di p, ovvero $I(p, u) = True$, dalla definizione di I si ottiene uRu.
Si dimostri ora che se R è riflessiva allora $\Box p \Rightarrow p$ è valida in (W, R). Se $\Box p \Rightarrow p$ non fosse valida in (W, R) esisterebbe un'interpretazione I e un mondo $u \in W$ in cui è falsa, pertanto $\Box p$ vera e p falsa. Dato che per ipotesi R è riflessiva si ha l'assurdo che in u sarebbe vera $\Box p$ e in un mondo accessibile da u falsa p.

11.2 Il sistema KT$_4$

Si consideri la formula $\Box p \Rightarrow \Box\Box p$ se p è necessaria, allora è necessariamente vero che p è necessaria. Questa regola non è derivabile in **KT** in quanto supponendo un mondo u con $\Box p$ e $\neg\Box\Box p$ che accede a v con $\neg\Box p$ che a sua volta accede a $\neg p$ crea un modello in cui $\Box p \Rightarrow \Box\Box p$ è falsa anche se i mondi accedono a sè stessi. Per questo motivo si aggiunge a **KT** come assioma $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$. Questo sistema viene chiamato anche **S$_4$**. Per trovare la semantica adeguata occorre individuare una nuova nozione di validità per cui l'assioma diventi valido. Il diagramma descritto precedentemente suggerisce come procedere: se il mondo w fosse accessibile da u il modello verrebbe a contenere l'assurdo che in u sia vera $\Box p$ e in w $\neg p$. Pertanto si deve imporre che R sia transitiva: da uRv e vRw segue che uRw. SI dimostra pertanto il teorema: la formula $\Box p \Rightarrow \Box\Box p$ è valida in (W, R) se e solo se R è transitiva. da cui segue il teorema di correttezza e completezza. La semantica di Kripke pertanto determina che l'accettazione o meno della validità di una formula equivale ad una proprietà della relazione R di accessibilità.

11.3 il sistema KT$_5$(S_5)

Un ragionamento analogo alla sezione precedente si può condurre sulla formula $\Diamond p \Rightarrow \Box \Diamond p$: ciò che è possibile è necessario che sia possibile. Questa formula non è derivabile in **KT$_4$** e pertanto esprime una proprietà non ancora considerata dell'operatore di necessità. Si introduce pertanto come assioma grazie al teorema: la formula $\Diamond p \Rightarrow \Box \Diamond p$ è valida in (W, R) se e solo se è euclidea. Determinando una relazione R come euclidea se e solo se per ogni $u, v, w \in W$ se uRv e uRw allora vRw e wRv, ovvero se da un mondo si accede a due mondi questi si vedono l'un l'altro. Se R è riflessiva ed euclidea allora è una relazione di equivalenza. Si aggiunge pertanto lo schema $\Diamond A \Rightarrow \Box \Diamond A$. Le formule derivabili in **KT$_5$** sono tutte e sole le formule nelle strutture (W, R) con R riflessiva ed euclidea, con R relazione di equivalenza. È un estensione di **KT$_4$** corretta e completa.

11.4 Le modalità nei tre sistemi logici

I re sistemi modali considerati $\mathbf{KT}, \mathbf{KT_4}$ e $\mathbf{KT_5}$ si distinguono per il numero di modalità distinte in essi presenti. Si definisce modalità una qualisasi stringa di operatori modali preceduta o meno dal segno di negazione.

11.4.1 KT

Si può dimostrare che in **KT** vi sono infinite modalità non equivalenti: non si possono dimostrare formule bicondizionali del tipo $SA \Leftrightarrow S'A$ dove S e S' sono stringhe diverse di operatori modali.

11.4.2 $\mathbf{KT_4}$

In $\mathbf{KT_4}$ ci sono varie modalità equivalenti:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{KT_4} \vdash \diamond \diamond A \Leftrightarrow \diamond A & \mathbf{KT_4} \vdash \Box\Box A \Leftrightarrow \Box A \\ \mathbf{KT_4} \vdash \Box \diamond A \Leftrightarrow \Box \diamond \Box \diamond A & \mathbf{KT_4} \vdash \Box \diamond A \Leftrightarrow \diamond\Box \diamond \Box A \end{array}$$

Sfruttando queste equivalenze si dimostra che in $\mathbf{KT_4}$ vi sono quattordici modalità distinte in quanto tutte le altre sono equivalenti ad una di esse e sono le seguenti e le rispettive negazioni:

$$- \quad \Box \quad \diamond \quad \Box\diamond \quad \diamond\Box \quad \Box \diamond \Box \quad \diamond\Box\diamond$$

Inoltre tra le prime sette valgono le seguenti relazioni di implicazione:

- $\diamond\Box A \Rightarrow \diamond\Box \diamond A \Rightarrow \diamond A$.
- $\Box \diamond A \Rightarrow \diamond\Box \diamond A$.
- $\Box \diamond \Box a \Rightarrow \Box \diamond A$,
- $\Box A \Rightarrow \Box \diamond \Box A \Rightarrow \diamond\Box A$.
- $\Box A \Rightarrow A \Rightarrow \diamond A$.

11.4.3 $\mathbf{KT_5}$

In $\mathbf{KT_5}$ si dimostrano i seguenti condizionali:

$$\mathbf{KT_5} \vdash \diamond A \Leftrightarrow \Box \diamond A \quad \mathbf{KT_5} \vdash \Box A \Leftrightarrow \diamond\Box A$$

E le modalità distinte si riducono a $-$, $\Box$, $\diamond$ e le loro negazioni.

Capitolo 12

Logiche descrittive

Le logiche descrittive sono una famiglia di logiche che permettono di modellare relazioni rispetto entità in un dominio di interesse. Esistono tre tipi di entità: concetti, ruoli e nomi individuali che rappresentano rispettivamente insiemi di individui, relazioni binarie tra individui e singolo individui nel dominio. A differenza di un database consiste in un insieme di predicati detti assiomi ognuno dei quali deve essere vero nella situazione che si vuole descrivere. Generalmente catturano una conoscenza parziale. Possono essere divisi in tre categorie: assiomi assertivi ($ABox$), assiomi terminologici $TBox$ e assiomi relazionali $RBox$.

12.0.0.1 Asserire fatti attraverso assiomi ABox

Gli assiomi $ABox$ catturano conoscenza riguardo individui nominati, ovvero a quale concetto appartengono (asserzione di concetto) e come sono messi in relazione tra di loro (asserzione di ruolo). I nomi individuali così caratterizzati si dicono istanze dei concetti e delle relazioni. Essendo che questa logica non fa una unique name assumption nomi diversi possono riferirsi allo stesso individuo come può accadere combinando conoscenza riguardo lo stesso dominio da fonti diverse, facendo ovvero ontology alignment.

12.0.0.2 Asserire conoscenza terminologica dagli assiomi TBox

Gli assiomi $TBox$ descrivono relazioni tra concetti attraverso inclusione $\sqsubseteq$ detta anche sottoassunzione o equivalenza $\equiv$.

12.0.0.3 Modellare relazioni tra ruoli attraverso assiomi RBox

Gli assiomi $RBox$ si riferiscono a proprietà dei ruoli. Riguardo ai concetti vengono supportate inclusioni ed equivalenze. Si possono comporre ruoli attraverso $\circ$ e ruoli disgiunti attraverso $Disjoint(A, B)$. Gli assiomi includono anche caratteristiche di ruolo come riflessività, transitività e simmetria.

12.1 Costruttori per concetti e ruoli

Gli assiomi tipici sono limitati, per descrivere situazioni più complesse si renda necessaria la creazione di nuovi concetti e ruoli utilizzando una varietà di costruttori. Nel caso dei concetti i costruttori possono essere separati in basici booleani, restrizioni d i ruolo e nominali, enumerazioni.

12.1.1 Costruttori di concetti booleani

Questi costruttori mettono a disposizione operazioni booleane classiche in vicina relaizone con le operazioni di intersezione, unione e complemento o le analoghe operazioni logiche. L'inclusione di concetti permette di congiungere concetti attraverso l'operazione di intersezione $\sqcap$ di altri due concetti. L'unione invece permette di descrivere un nuovo concetto attraverso l'unione di altri due con l'operatore $\sqcup$. Il complementare di un concetto, ovvero la sua negazione è espresso dall'operatore $\neg$. Si definisce $\top$ il top concept, ovvero il concetto in cui ogni individuo è una sua istanza e $\bot$ il bot concept, la contraddizione, il concetto in cui nessun individuo è una sua istanza.

12.1.2 Restrizioni di ruolo

$TBox$ e $RBox$ possono essere utilizzate per esprimere relazioni tra ruoli e concetti. Essendo C un concetto e R una relazione si definisce l'operatore di restrizione esistenziale $\exists R.C$ che descrive che esiste y tale che $C(y)$ tutte le x tali che $R(y, x)$. Un ulteriore operatore è la restrizione universale $\forall R.C$ che definisce che per ogni y, se $R(x, y)$ allora $C(y)$. Queste due restrizioni sono utili in combinazione con $\top$ per esprimere restrizioni di dominio e range per i ruoli. Si può inoltre aggiungere a questi operatori le restrizioni almeno $\geq n$ e al più $\leq n$. Inoltre la riflessività locale espressa da $opR.Self.C$ può esprimere i concetti in relazione con sè stessi nel ruolo.

12.1.3 Nominali

Si possono definire concetti anche enumerando le loro istanze. Questo può essere fatto attraverso i nominali, concetti che hanno esattamente un'istanza. Combinando questi elementi atraverso l'unione nasce l'enumerazione.

12.1.4 Costruttori di ruolo

Esistono pochi costruttori per i ruoli complessi. Come per esempio i ruoli inversi. Il ruolo inverso di $R : C \rightarrow C'$ viene indicato con $R^- : C' \rightarrow C$. Viene definito il ruolo universale U che mette in relazione tutte le paia di individui. Si può definire un ruolo R come vuoto attraverso l'assioma $\top \sqsubseteq \neg\exists R.\top$.

12.1.5 Caratteristiche di ruolo

La transitività è una forma di composizione di ruolo complessa, la riflessività l'equivalenza rispetto all'intersezione.

12.2 La logica descrittiva $\mathcal{SROIQ}$

Formalmente ogni ontologia delle logiche descrittive è basata su tre insiemi finiti di simboli: un insieme N_i di nomi individuali, un insieme N_C di nomi di concetti e un insieme N_R di nomi di ruoli. Questi concetti sno assunti fissati per qualche applicazione e non menzionati esplicitamente. L'insieme delle espressioni di ruoli di $\mathcal{SROIQ}$ R è definito come $R := U|N_R|N_{R^-}$ dove U è il ruolo universale. L'insieme dei concetti C verrà definito come $C := C_C|(C \sqcap C)|(C \sqcup C)|\neg C|\top|\bot|\exists R.C|\forall R.C| \geq nR.C| \leq nR.C|\exists R.Self|\{N_i\}$. Utilizzando questi insiemi gli assiomi di $\mathcal{SROIQ}$ possono essere definiti come:

$ABox$:	$C(N_i)$	$R(N_i, N_i)$	$N_i \approx N_i$	$N_i \not\approx N_i$
$TBox$:	$C \sqsubseteq C$	$C \equiv C$		
$RBox$:	$R \sqsubseteq C$	$R \equiv R$	$R \circ R \sqsubseteq R$	$Disjoint(R, R)$

L'ontologia o base di conoscenza è un insieme di tali assiomi. Per garantire l'esistenza di algoritmi di ragionamento corretti e che terminano si devono aggiungere aggiuntive restrizioni sintattiche che si riferiscono all'intera struttura dell'ontologia e sono pertanto chiamate restrizioni strutturali. Le due condizioni rilevanti per $\mathcal{SROIQ}$ sono basate sulla nozione di semplicità e regolarità, entrambe automaticamente soddisfatte in mancanza di assiomi di inclusione di ruolo complessi. Un ruolo R in un'ontologia O è detto non semplice se qualche assioma di inclusione di ruolo complesso in O implica istanze di R:

- Se O contiene un'assioma $S \circ T \sqsubseteq R$ allora R è non semplice.
- Se R è non semplice allora la sua inversa R^- è non semplice.
- Se R è non semplice e O contiene uno qualunque degli assiomi $R \sqsubseteq S$, $S \equiv R$ o $R \equiv S$ allora anche S è non semplice.

Tutti gli altri ruoli sono semplici. Per un'ontologia $\mathcal{SROIQ}$ è richiesto che i seguenti assiomi e concetti contengano solamente ruoli semplici:

- Assiomi limitati: $Disjoint(R, R)$.
- Espressioni di concetto limitate: $\exists R.Self$, $\geq nR.C$, $\leq nR.C$.

L'altra restrizione strutturale è chiamata regolarità e riguarda unicamente gli assiomi per $RBOx$. Questa restrizione si assicura che dipendenze cicliche tra assiomi di inclusione di ruoli complessi avvengano unicamente in una forma limitata.

12.3 Semantiche delle logiche descrittive

Il significato formale degli assiomi è dato dalla semantica della teoria del modello. La semantica specifica cos'è la conseguenza logica di un ontologia. Un'ontologia descrive una particolare situazione in un dominio del discorso dato, senza specificarla completamente. Dovendo gestire questa incompletezza considerando tutte le situazioni possibili dove gli assiomi di un'ontologia siano soddisfatti. Questa caratteristica è detta Open World Assumption in quanto lascia le informazioni non specificate aperte a interpretazione. Una conseguenza logica di un'ontologia è un assioma che vale in tutte le interpetazioni che soddisfano l'ontologia. Un'ontologia può non essere soddisfatta da nessuna interpretazione ed è pertanto detta inconsistente e ogni assioma rimane indecidibile. Un'interpretazione I consiste di un insieme Δ^I detto dominio di I e una funzione di interpretazione $\cdot^I$ che mappa ogni concetto atomico A a un insieme $A^I \subseteq \Delta^I$, ogni ruolo atomico R a una relazione binaria $R^I \subseteq \Delta^I \times \Delta^I$ e ogni nome individuale a a un elemento $a^I \in \Delta^I$. L'interpretazione di concetti e ruoli complessi segue dall'interpretazione delle entità base.