ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

KHOA KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT MÁY TÍNH

MÔN HỌC: HỆ ĐIỀU HÀNH

Bài tập lớn mở rộng

TÍNH TOÁN SONG SONG TÌM BAO LỒI VỚI TẬP ĐIỂM CHO TRƯỚC

GVHD: Trần Quang Hùng

Sinh viên: Nguyễn Khoa Gia Cát - 1912749

Ngô Thị Hà Bắc - 1912700

Lớp: TNMT4

Tp. Hồ Chí Minh, 05/2021

MỤC LỤC

1. Tập lồi và bao lồi:

- Cho 3 điểm $p, q, t \in R^2$, kí hiệu:

$$[p, q] = \{(1-\lambda)p + \lambda q : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

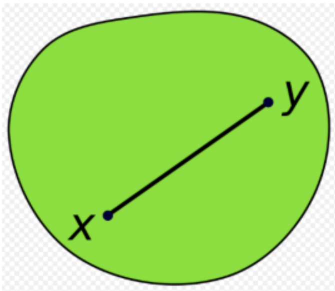
- pq là đường thẳng qua điểm p và q dist(t,pq) là khoảng cách Euclid từ t xuống pq

Kí hiệu x_p và y_p lần lượt là tọa độ x, y của điểm p

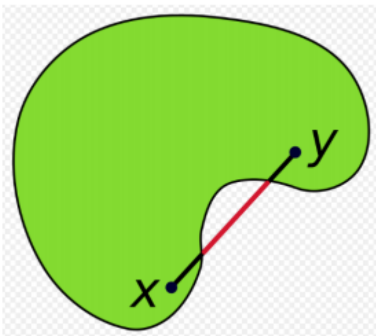
Ta có $dist(p, q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$

- **Tập lồi:** Một tập $S \subset R^2$ được gọi là tập lồi nếu S chứa mọi đoạn thẳng đi qua 2 điểm bất kì của nó. Tức S lồi khi và chỉ khi

$$\forall x, y \in C, \forall \lambda \in [0,1] \rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in S$$



Tập lồi



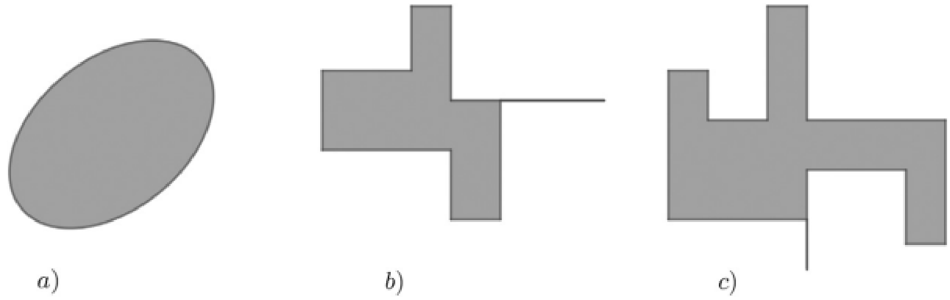
Tập không lồi

- **Bao lồi:** Bao lồi của một tập S là giao của tất cả các tập lồi chứa S. Do đó, ta có thể thấy, bao lồi của một tập S chính là tập lồi nhỏ nhất chứa nó

2. Bao lồi trực giao và một số tính chất của nó:

2.1. Bao lồi trực giao liên thông:

Định nghĩa 1. Một tập $S \subset R^2$ được gọi là tập lồi trực giao nếu giao điểm của nó với đường thẳng đứng hoặc nằm ngang bất kì đều là tập lồi

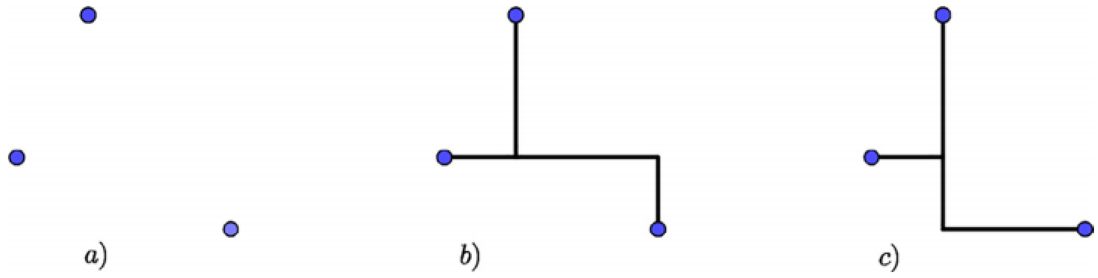


(a) và (b) là tập lồi trực giao. (c) không phải là tập lồi trực giao

S được gọi là tập lồi trực giao liên thông nếu nó là tập lồi trực giao và liên thông

Tập lồi trực giao liên thông

Tập lồi trực giao không liên thông



(a) Tập các điểm, (b), (c) các tập lồi trực giao liên thông của các điểm đó

Cho $u = (x_u, y_u), v = (x_v, y_v) \in S \subset R^2$

Chuẩn L_1 được xác định bởi $||u - v||_1 = |x_u - x_v| + |y_u - y_v|$.

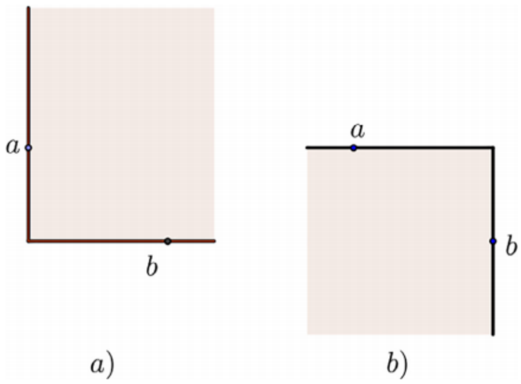
Ta sẽ dùng định nghĩa của chuẩn L_1 để phát biểu mệnh đề 1

Mệnh đề 1. Cho tập $S \subset R^2$. Khi đó S là bao lồi trực giao liên thông khi chỉ và chỉ với mọi $a, b \in S$, tồn tại một đường đi ngắn nhất $SP(a, b) \subset S$ qua a, b với chuẩn L_1, và độ dài của $SP(a, b)$ là $||a - b||_1$. Ngoài ra, $SP(a, b)$ là một đường đi đơn điệu tăng (Ví dụ: Với mọi $u, v \in SP(a, b), (x_u - x_v)(y_u - y_v) \geq 0$)

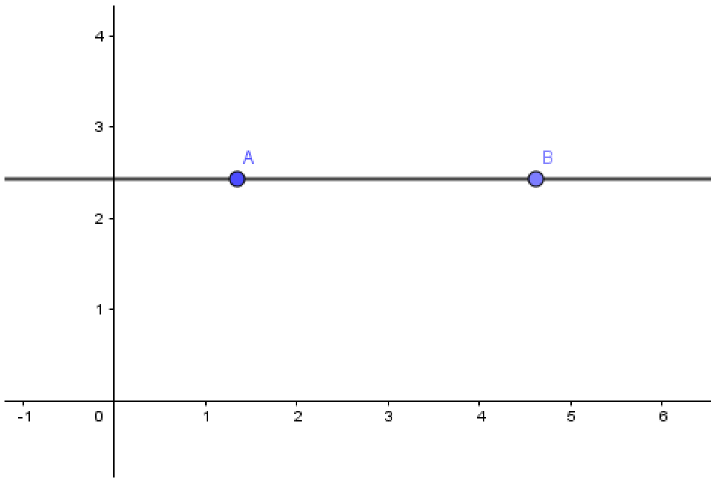
Định nghĩa 2. Bao lồi trực giao liên thông của tập S là tập lồi trực giao liên thông bé nhất chứa tập S

Chúng ta định nghĩa một đường thẳng được gọi là **thẳng góc** nếu nó song song với trục Ox hoặc trục Oy. Tia hoặc đoạn thẳng là **thẳng góc** nếu nó nằm trên đường thẳng **thẳng góc** (rectilinear)

Cho hai điểm $a \neq b$ trên mặt phẳng. Ta định nghĩa $l(a,b)$ $(x_a \neq x_b, y_a \neq y_b)$ xuyên qua a, b là một tập của hai tia **thẳng góc** có chung điểm xuất phát



Nếu $x_a = x_b$ hoặc $y_a = y_b$ thì $l(a,b)$ là một đường thẳng qua a, b.



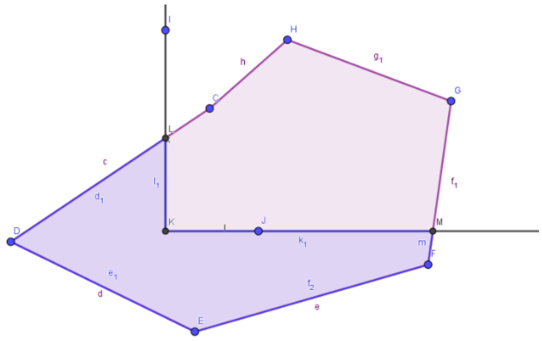
Tập $l(a,b)$ được gọi là đường trực giao qua a và b. Chúng ta cũng kí hiệu $l^v(a,b)$ là đường trực giao $l(a,b)$ với đỉnh v

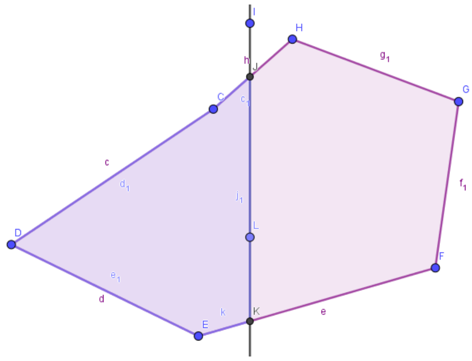
Một đường trực giao $l(a,b)$ $(x_a \neq x_b, y_a \neq y_b)$ chia mặt phẳng thành 2 miền. Góc phần tư cùng với đường trực giao $l(a,b)$ được gọi là góc phần tư được xác định bởi đường trực giao và ký hiệu là $q(a,b)$

<u>Định nghĩa 3.</u> Cho một tập $S \subset R^2$. $l(a,b)$ là một đường hỗ trợ trực giao (O-support) của tập S (a và b có thể không thuộc S) nếu giao của $l(a,b)$ với S là một tập không rỗng và:

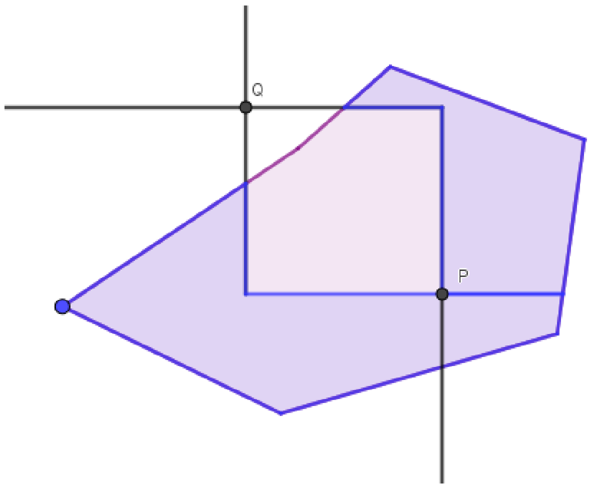
+ Tất cả các điểm $S \backslash S \cap l(a,b)$ không thuộc góc phần tư của $l(a,b)$ trong trường hợp $(x_a \neq x_b, y_a \neq y_b)$

+ Tất cả các điểm $S \backslash S \cap l(a,b)$ là một nửa mặt phẳng mở được phân ra bởi đường thẳng $l(a,b)$ trong trường hợp $(x_a = x_b$ hoặc $y_a = y_b)$



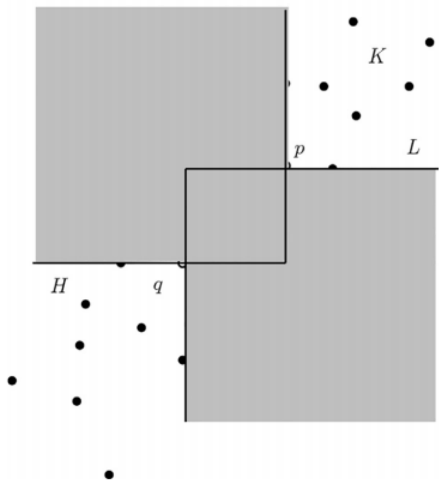


Hai O-supports của tập S được gọi là **đối diện** nếu chúng giao nhau tại chính xác 2 điểm phân biệt



Ta ký hiệu $F(S)$ là tập gồm tất cả các tập lồi trực giao của S.

Với $E \in F(S)$, nếu tồn tại hai O-support đối diện H và L của S giao nhau tại chính xác 2 điểm phân biệt p và q, với $x_p \neq x_q, y_p \neq y_q$



Khi đó sẽ tồn tại một đường đi bậc thang kết nối p và q trong E. Chúng ta định nghĩa tất cả các điểm trên đường đi đó (không bao gồm p và q) gọi là các điểm *semi-isolated* của E.

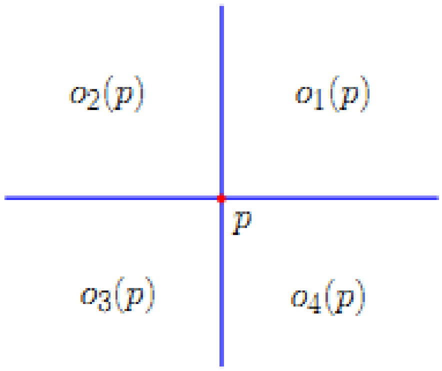
Nếu tồn tại một phần tử của $F(S)$ mà không có điểm *semi-isolated* thì khi đó $\cap_{E \in F(S)} E$ là một bao lồi trực giao liên thông của S.

Vì vậy $F(S)$ có một phần tử duy nhất, kí hiệu là $COCH(S)$. Từ bây giờ, chúng ta sẽ cho rằng $F(S)$ có duy nhất một phần tử là $COCH(S)$ và nó không có điểm *semi-isolated*

Cho một điểm $p(x_p, y_p)$. Bốn góc phần tư $o_1(p), o_2(p), o_3(p)$ và $o_4(p)$ được xác định bởi các miền đóng:

$$o_1(p) \coloneqq [x_p, +\infty) \times [y_p, +\infty)$$
$$o_2(p) \coloneqq (-\infty, x_p] \times [y_p, +\infty)$$
$$o_3(p) \coloneqq (-\infty, x_p] \times (-\infty, y_p]$$
$$o_1(p) \coloneqq [x_p, +\infty) \times (-\infty, y_p]$$

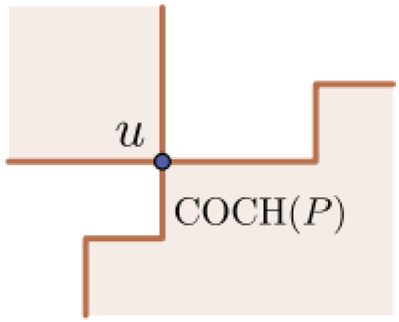
là những góc phần tư của điểm p



<u>Nhận xét 1:</u> Bốn góc phần tư của một điểm trùng với góc phần tư được định nghĩa bởi các đường trực giao với cùng một điểm

Cho tập P là một tập hữu hạn các điểm phẳng. Chúng ta giả định tập P thỏa mãn rằng: bao lồi trực giao liên thông của nó không có các điểm *semi-isolated và* gọi đây là **giả định (A)**

<u>Định nghĩa 4.</u> Một điểm $e \in COCH(P)$ được gọi là điểm cực biên nếu tồn tại một góc phần tư không chứa bất kì điểm nào của $COCH(P)\backslash\{e\}$. Ký hiệu tất cả các điểm cực biên của $COCH(P)$ là $o - ext(COCH(P))$



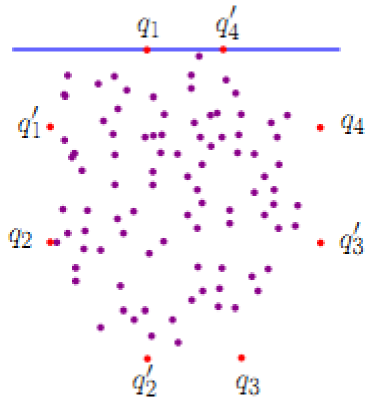
Điểm cực biên u của $COCH(P)$

<u>Định nghĩa 5.</u> Một điểm cực biên e của $COCH(P)$ có chỉ mục j nếu $o_j(e), j = 1,2,3,4$ không chứa bất kì điểm nào của $COCH(P)\{e\}$. Tập tất cả các điểm cực biên của $COCH(P)$ với chỉ mục j kí hiệu là $o - ext^j\big(COCH(P)\big)$

2.2. Tính chất của bao lồi trực giao liên thông của một tập hữu hạn các điểm phẳng:

Định nghĩa 6. Cho P là một tập hữu hạn các điểm phẳng. Điểm với tọa độ y lớn nhất trong tập những điểm thuộc P có tọa độ x nhỏ nhất được gọi là điểm ngoài cùng trái cao nhất (1) $(\max(x) : \max(y) \rightarrow highest\ leftmost)$

Tương tự, chúng ta định nghĩa 7 điểm đặc biệt còn lại của P: ngoài cùng trái thấp nhất (2), ngoài cùng phải cao nhất (3), ngoài cùng phải thấp nhất (4), cao nhất ngoài cùng trái (5), thấp nhất ngoài cùng trái (6), cao nhất ngoài cùng phải (7), thấp nhất ngoài cùng phải (8)



8 điểm đặc biệt của tập P

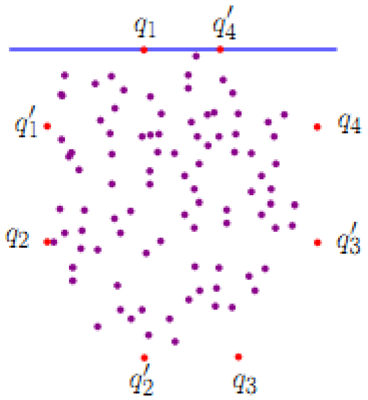
Trong đó:

- q_1' là điểm ngoài cùng trái cao nhất (1)
- q_2 là điểm ngoài cùng trái thấp nhất (2)
- q_4 là điểm ngoài cùng phải cao nhất (3)
- q_3' là điểm ngoài cùng phải thấp nhất (4)
- q_1 là điểm cao nhất ngoài cùng trái (5)
- q_2' là điểm thấp nhất ngoài cùng trái (6)
- q_4' là điểm cao nhất ngoài cùng phải (7)
- q_3 là điểm thấp nhất ngoài cùng phải (8)

Nhận xét 2. Nếu $|P| > 2$, tồn tại 2 điểm cực biên của $COCH(P)$. Khi đó, chúng ta có các trường hợp sau đây:

- Nếu P có nhiều hơn 2 điểm phân biệt và các điểm của P thuộc một đường thẳng. Khi đó, 2 điểm kết thúc sẽ là 2 điểm cực biên phân biệt của $COCH(P)$

- Nếu P có nhiều hơn 2 điểm phân biệt và các điểm của P không thẳng hàng, khi đó 2 điểm cực biên phân biệt của $COCH(P)$ là (q_1', q_3') hoặc (q_2, q_4) hoặc (q_1, q_3) hoặc (q_2', q_4')



Các điểm đặc biệt

<u>Bổ đề 1.</u> Chúng ta có:

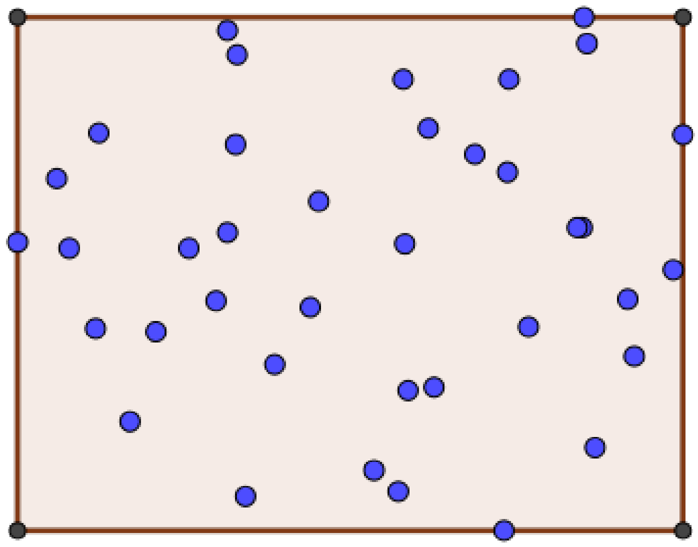
i) $o - ext\big(COCH(P)\big) \subseteq P$

ii) $P \subseteq COCH(P)$

iii) Cho P_1 và P_2 là hai tập hữu hạn các điểm phẳng và $P_1 \subseteq P_2$

Khi đó, ta có: $COCH(P_1) \subseteq COCH(P_2)$

Hình chữ nhật **thẳng góc** nhỏ nhất của tập hữu hạn điểm phẳng là hình chữ nhật nhỏ có các cạnh song song trục x hoặc trục y và chứa tập đó.

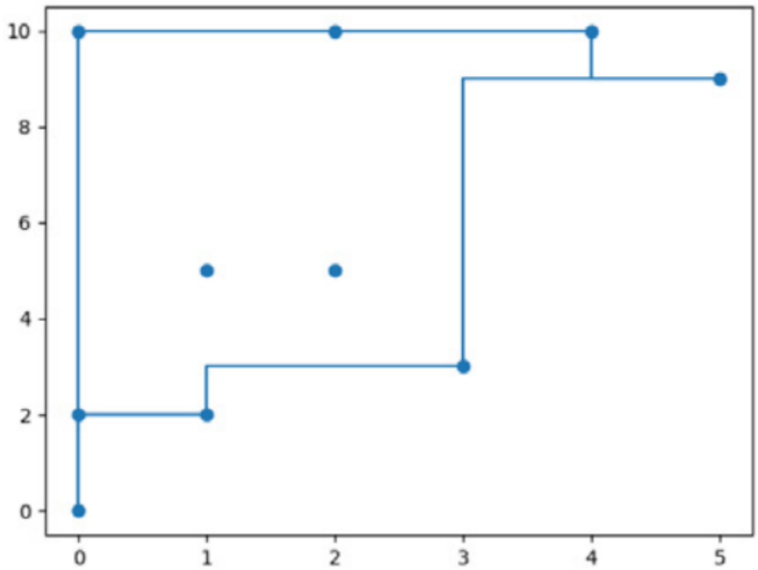


<u>Bổ đề 2.</u> Mọi bao lồi trực giao liên thông của tập hữu hạn điểm phẳng đều được chứa trong hình chữ nhật thẳng góc nhỏ nhất của tập điểm đó

<u>Mệnh đề 2.</u> Cho tập $P \coloneqq \{p_1, \dots, p_m\} \subset R^2$. Khi đó mọi bao lồi trực giao liên thông của P đều tối giản

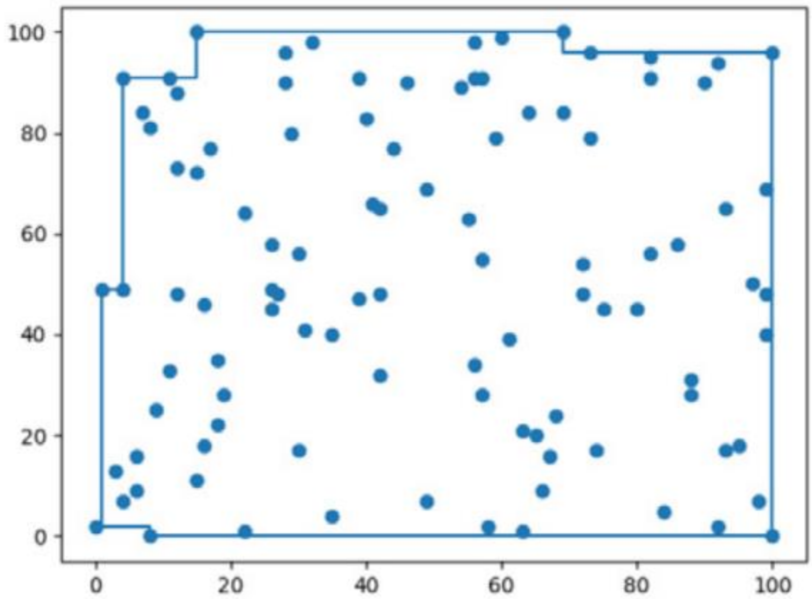
Một **đa giác thẳng góc** là một đa giác đơn giản có các cạnh **thẳng góc**. Vì vậy, đa giác chỉ có thể có số đo góc là 90^o hoặc 270^o. Một (x, y) – đa giác là một trong các trường hợp sau đây

a. Một điểm
b. Các đoạn thẳng **thẳng góc** liên thông với nhau
c. Một đa giác thẳng góc
d. Một sự kết hợp giữa b và c



(x, y) – đa giác

Bổ đề 3. Bao lồi trực giao liên thông của tập hữu hạn điểm phẳng là một (x, y) – đa giác lồi trực giao có biên là một tập hợp hữu hạn các O-support mà mỗi O-support đi qua 2 điểm cực biên của $COCH(P)$



Bao lồi trực giao liên thông của tập hữu hạn điểm phẳng

Bổ đề 4. Nếu $p \in COCH(P)$ thì khi đó, mỗi góc phần tư của p đều chứa ít nhất một điểm cực biên của $COCH(P)$

Bổ đề 5. Cho P là một tập hữu hạn các điểm phẳng thỏa mãn giả định (A). Khi đó, cực đại của P là một điểm cực biên của $COCH(P)$ và ngược lại. Do đó,

$$M(P) = o - ext\big(COCH(P)\big)$$

Bổ đề 6. Cho P là một tập n điểm được chọn dựa trên phân bố xác suất Δ. Khi đó, số điểm cực đại kì vọng của P là $O(\log n)$

3. Các đường trực giao trực tiếp và một số vấn đề khác:

Cho một bộ ba điểm có thứ tự $(a, b, c) \subset R^2$, đặt

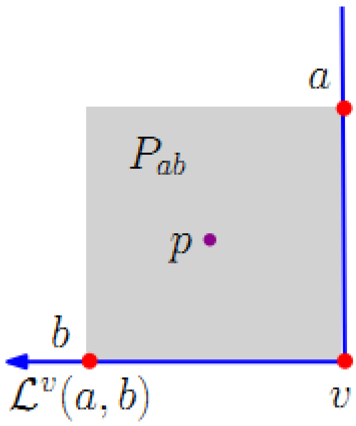
$$orient(a, b, c) = \begin{vmatrix} 1 & x_a & y_a \\ 1 & x_b & y_b \\ 1 & x_c & y_c \end{vmatrix}$$

Định nghĩa 7.

i. Bộ ba có thứ tự (a, b, c) có định hướng dương (định hướng âm, định hướng 0) khi $orient(a, b, c) > 0$ $(orient(a, b, c) < 0, orient(a, b, c) = 0)$

ii. Điểm c được gọi là nằm bên trái (nằm bên phải, nằm trên) đường trực tiếp nối ab nếu $orient(a, b, c) > 0$ $(orient(a, b, c) < 0, orient(a, b, c) = 0)$

Định nghĩa 8. Cho $l^v(a, b)$ là đường trực giao qua 2 điểm a và b $(x_a \neq x_b, y_a \neq y_b)$ với đỉnh v. Nếu b nằm bên phải av thì chúng ta sẽ gọi $l^v(a, b)$ là đường trực giao trực tiếp từ a qua b và ký hiệu là $\mathcal{L}^v(a, b)$

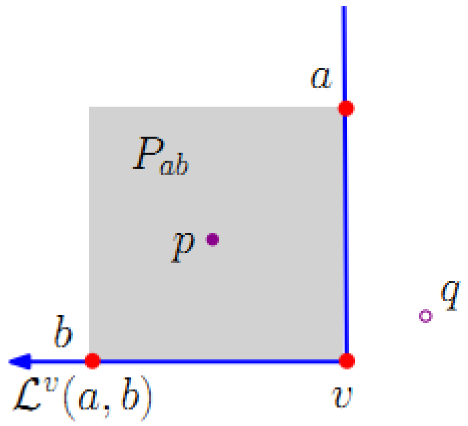


$\mathcal{L}^v(a, b)$

Định nghĩa 9. Cho $\mathcal{L}^v(a,b)$ là một đường trực giao trực tiếp từ a sang b với đỉnh v.

- Một điểm p được gọi là nằm bên phải $\mathcal{L}^v(a,b)$ nếu nó nằm bên phải av và vb.

- Một điểm p được gọi là nằm bên trái $\mathcal{L}^v(a,b)$ nếu nó nằm bên trái av hoặc vb

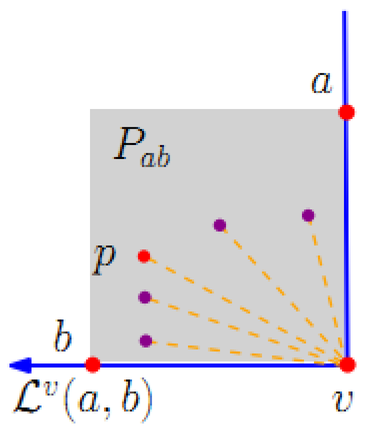


p nằm bên phải và q nằm bên trái $\mathcal{L}^v(a,b)$

Kí hiệu tập hợp tất cả các điểm nằm bên phải $\mathcal{L}^v(a,b)$ là P_{ab}

Định nghĩa 10. Cho $\mathcal{L}^v(a,b)$ là một đường trực giao trực tiếp từ a sang b với đỉnh v và điểm $p \in P_{ab}$. Chúng ta gọi $[p,v]$ là *khoảng cách trực giao* từ p đến $\mathcal{L}^v(a,b)$, kí hiệu là $Odist(p,\mathcal{L}^v(a,b))$. Điểm p được gọi là điểm xa nhất nếu p thỏa mãn

$$Odist(p,\mathcal{L}^v(a,b)) = \max_{q\in P_{ab}}\{Odist(q,\mathcal{L}^v(a,b))\}$$



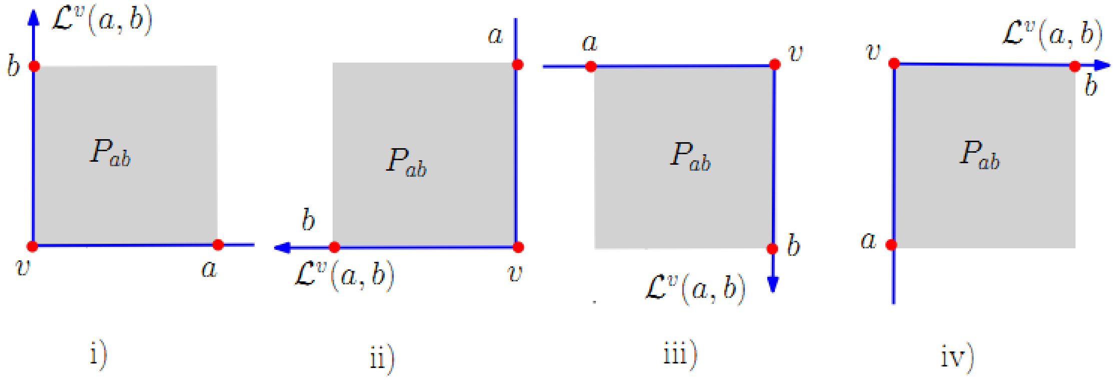
p là điểm xa nhất

Bổ đề 7. Cho $a, b(x_a \neq x_b, y_a \neq y_b)$ là 2 điểm cực biên phân biệt của $COCH(P)$. Khi đó

$$o - ext_{ab}^{j}\big(COCH(P)\big) \subseteq o - ext\big(COCH(P_{ab})\big)$$

trong đó $o - ext_{ab}^{j}\big(COCH(P)\big)$ là tập tất cả các điểm cực biên chỉ mục j của $COCH(P)$ nằm trong P_{ab}

Cho $a, b(x_a \neq x_b, y_a \neq y_b)$ là 2 điểm cực biên phân biệt bất kì của $COCH(P)$. Khi đó, sẽ có 4 trường hợp của 2 điểm a và b



- Trường hợp 1: $x_a > x_b, y_a < y_b$
- Trường hợp 2: $x_a > x_b, y_a > y_b$
- Trường hợp 3: $x_a < x_b, y_a > y_b$
- Trường hợp 4: $x_a < x_b, y_a < y_b$

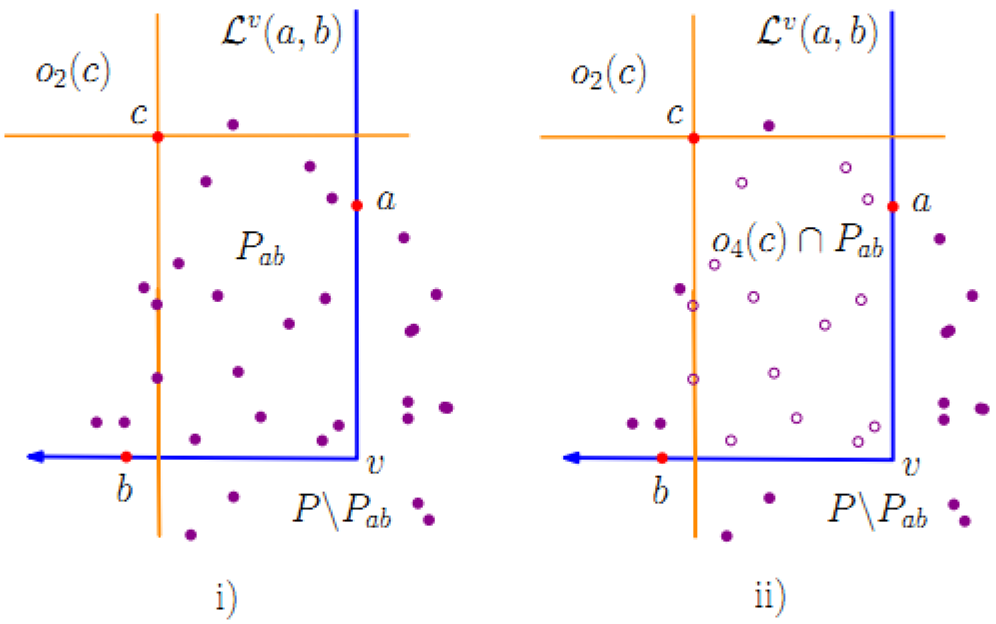
Mệnh đề 3. Cho $a, b(x_a \neq x_b, y_a \neq y_b)$ là 2 điểm cực biên phân biệt bất kì của $COCH(P)$ và c là điểm xa nhất của P_{ab} từ đường trực giao trực tiếp $\mathcal{L}^v(a, b)$. Khi đó:

i. c là điểm cực biên chỉ mục j của $COCH(P)$ trong trường hợp j của 2 điểm $a, b, j = 1,2,3,4$

ii. $o_v(c) \cap (P_{ab} \backslash \{c\}) \cap o - ext^j\big(COCH(P)\big) = \emptyset$

trong đó: $o_v(c)$ là góc phần tư của điểm c có chứa v

Điều này có nghĩa là, bất kì điểm nào trong $o_v(c) \cap (P_{ab} \backslash \{c\})$ đều không là điểm cực biên chỉ mục j của $COCH(P)$ trong P_{ab}



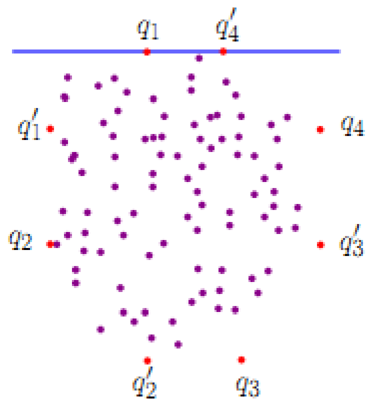
Ví dụ trong trường hợp j = 2

c là điểm xa nhất, mọi điểm $o_4(c) \cap (P_{ab} \backslash \{c\})$ đều không là điểm cực biên chỉ mục 2

Nhận xét 3. Trong tất cả các điểm thuộc P_{ab}, có thể có nhiều hơn một điểm xa nhất trong đường trực giao trực tiếp $\mathcal{L}^v(a, b)$. Tuy nhiên, tất cả chúng đều là điểm cực biên của $COCH(P)$ (theo mệnh đề 3(i))

4. Thuật toán O-QuickHull dựa trên QuickHull để tìm bao lồi trực giao liên thông:

4.1. Thuật toán O-QuickHull:



Xem xét 4 trường hợp sau đây:

- Trường hợp 1: $q_1 \equiv q_1'$
- Trường hợp 2: $q_2 \equiv q_2'$
- Trường hợp 3: $q_3 \equiv q_3'$
- Trường hợp 3: $q_4 \equiv q_4'$

Khi đó, $COCH(P)$ cũng là hình chữ nhật dựa trên những điểm đã cho. Như vậy, ta có thể giả định rằng không có trường hợp nào trong 4 trường hợp trên xảy ra. Tức là, P có 8 điểm đặc biệt phân biệt

Thuật toán O-QuickHull dùng để tìm bao lồi trực giao liên thông $COCH(P)$ của tập hữu hạn điểm P với giả định (A)

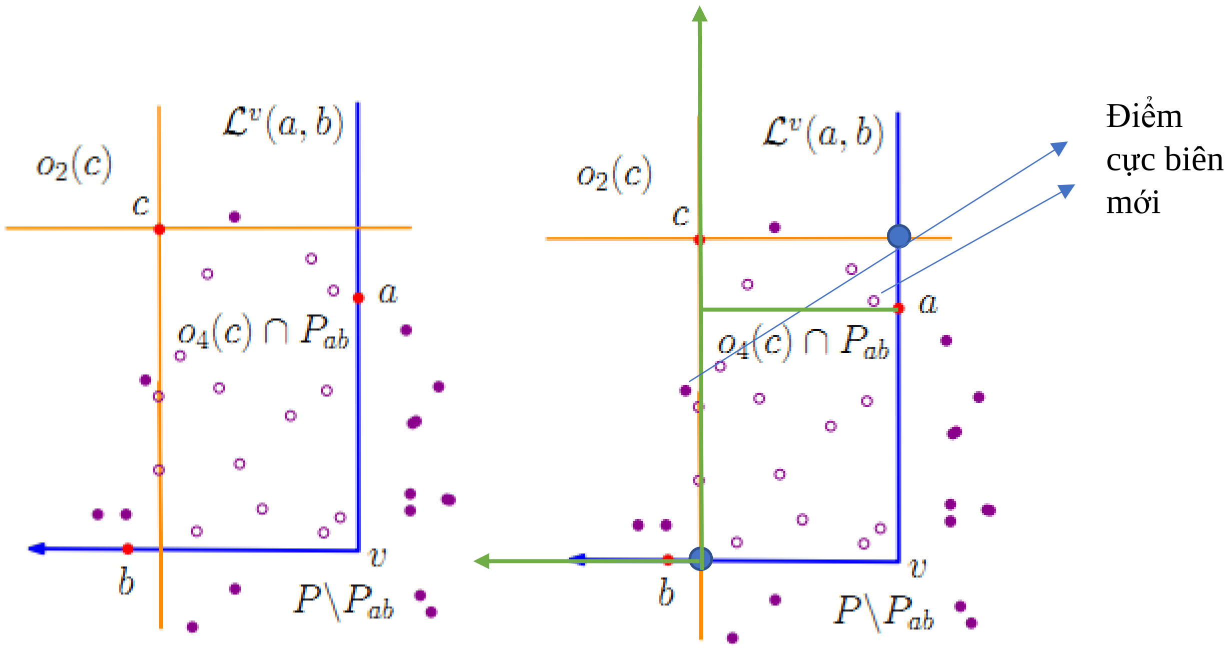
Bước đầu tiên của thuật toán, ta sẽ tìm 2 điểm cực biên a và b của $COCH(P)$ (đều này luôn tồn tại do nhận xét (2)).

Đặt $\mathcal{L}^v(a,b)$ là đường trực giao trực tiếp từ a qua b với đỉnh v. Chú ý rằng P_{ab} là tập tất cả các điểm nằm bên phải $\mathcal{L}^v(a,b)$

Sau đó, trong P_{ab}, tìm điểm xa nhất, gọi là c, từ đường trực giao trực tiếp $\mathcal{L}^v(a,b)$

Thêm điểm c vào $o-ext\big(COCH(P)\big)$. Đặt $\mathcal{L}^{v_1}(a,c), \mathcal{L}^{v_2}(c,b)$ là đường trực giao trực tiếp với đỉnh v_1 (tương tự là v_2) từ a đến c (tương tự là từ c đến b)

Mệnh đề 3 không cho phép chúng ta xem xét các điểm $t \in o_v(c) \cap (P_{ab} \backslash \{c\})$. Vì vậy, chúng ta sẽ thay thế $\mathcal{L}^v(a,b)$ bằng $\mathcal{L}^{v_1}(a,c)$, $\mathcal{L}^{v_2}(c,b)$ và tiếp tục đệ quy lại thuật toán



Đệ quy lại thuật toán

Thuật toán O-QuickHull được minh họa dưới dạng hàm $O - QuickHull(a, b, P_{ab})$ trong đó a, b là 2 điểm cực biên phân biệt của $COCH(P)$ và P_{ab} là tập tất cả các điểm nằm bên phải đường trực giao trực tiếp $\mathcal{L}^{v}(a, b)$ với đỉnh v từ a sang b

Nếu 2 điểm a và b nằm trong trường hợp j thì output của nó là những điểm cực biên chỉ mục j

Bao lồi sẽ được tìm thấy nếu chúng ta tìm được 2 điểm cực biên a, b và thực hiện hàm O-QuickHull

Algorithm 1 $\mathcal{O}$-QUICKHULL algorithm

function $\mathcal{O}$-Quickhull(a, b, P_{ab})

1. **If** $P_{ab} = \emptyset$ then **return** ()
2. **else**
   (a) $c \leftarrow$ the farthest point from $\mathcal{L}^{v}(a, b)$.
   (b) $P_{ac} \leftarrow$ the set of points on the right of the directed orthogonal line $\mathcal{L}^{v_1}(a, c)$ from a to c with its vertex v_1.
   (c) $P_{cb} \leftarrow$ the set of points on the right of the directed orthogonal line $\mathcal{L}^{v_2}(c, b)$ from c to b with its vertex v_2.
   (d) **return** $\mathcal{O}$-Quickhull$(a, c, P_{ac}) \cup \{c\} \cup \mathcal{O}$-Quickhull$(c, b, P_{cb})$.

Minh họa giải thuật O-QuickHull

4.2. Tính đúng đắn và độ phức tạp của giải thuật O-QuickHull:

- Tính đúng đắn của giải thuật được thể hiện qua định lý 1.

Định lý 1. Nếu 2 điểm a và b nằm trong trường hợp j thì mọi điểm cực biên trong Output của hàm O-QuickHull đều là điểm cực biên có chỉ mục j

Định lý 2. Cho rằng P_{ab} có n điểm.

- Độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất là $O(n^2)$

- Độ phức tạp kỳ vọng là $O(n \log n)$

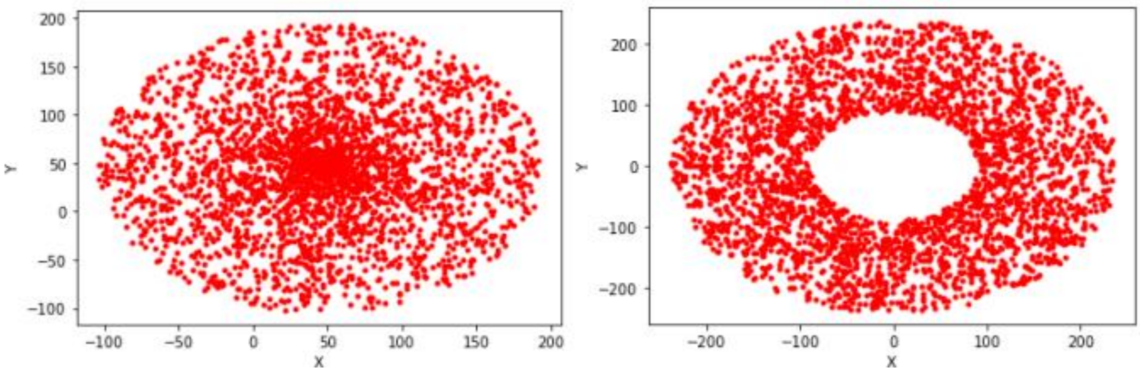
5. Hoàn thiện giải thuật:

5.1. Tập dữ liệu:

- Chúng ta sẽ thử trên 6 tập dữ liệu khác nhau (mỗi tập dữ liệu gồm 100000 điểm phẳng phân biệt):

+ Dữ liệu đĩa: Tạo điểm ngẫu nhiên nằm trong một hình đĩa

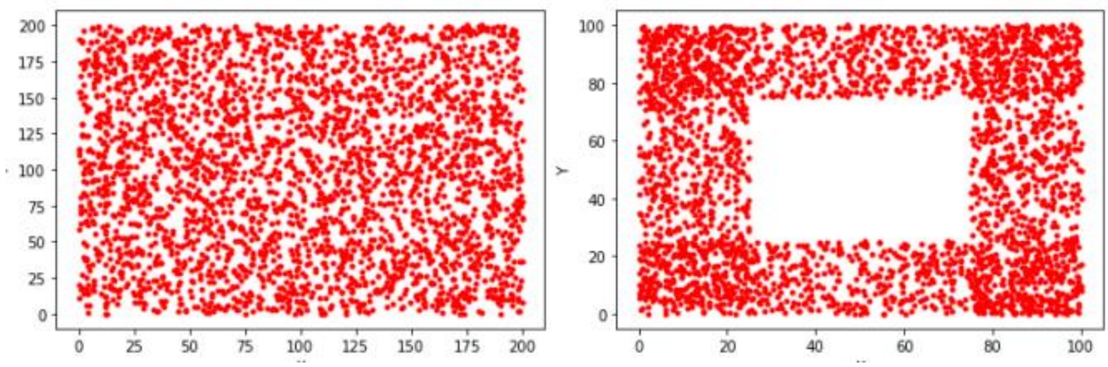
+ Dữ liệu đĩa rỗng: Tạo 2 đĩa và sinh điểm ngẫu nhiên nằm trong vành 2 đĩa đó



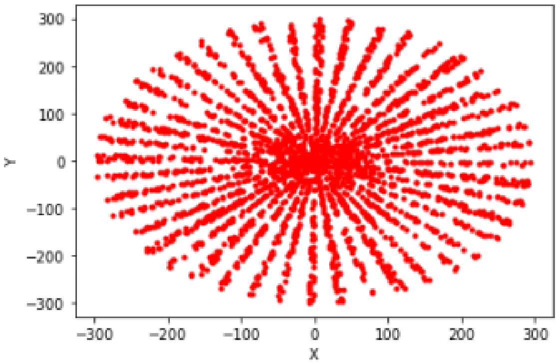
Hình minh họa

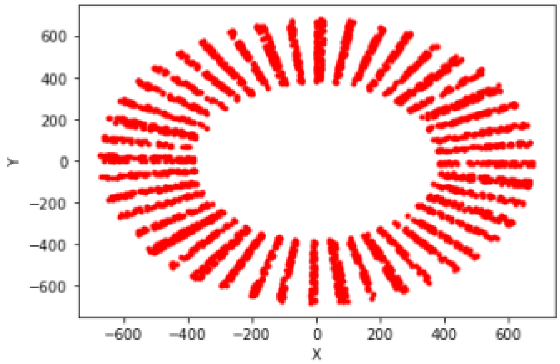
Tương tự ta có:

+ Dữ liệu hình chữ nhật và hình chữ nhật rỗng:



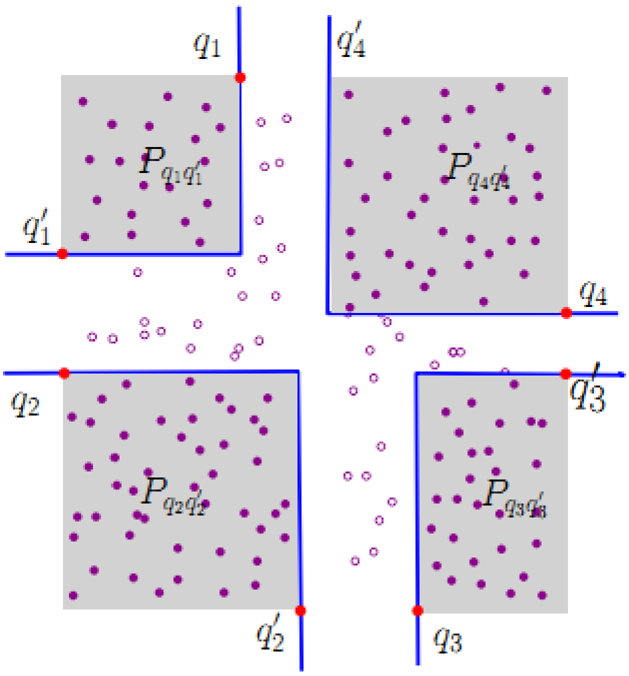
+ Dữ liệu mặt trời và mặt trời rỗng:





<u>5.2. Chọn điểm cực biên khởi đầu:</u>

- Chúng ta đã biết rằng tất cả các điểm nằm bên trong hoặc bên trên các cạnh của đa giác có cạnh song song trục x hoặc trục y kết nối 8 điểm cực biên $q_1, q_1', q_2, q_2', q_3, q_3', q_4, q_4'$ không thể là điểm cực biên của $COCH(P)$ và chúng ta có thể xóa bỏ các điểm đó



- Nhưng vì sự tối giản của $COCH(P)$, chúng ta có thể xác định biên dựa theo bổ đề 3 là một tập hữu hạn các O-support đi qua 2 điểm cực biên của $COCH(P)$

→ Vì vậy, ta có thể kết luận rằng $COCH(P)$ là

$$\{q_1\} \cup \mathcal{O} - QuickHull\left(q_1, q_1', P_{q_1 q_1'}\right) \cup \{q_1', q_2\} \cup \mathcal{O} - QuickHull\left(q_2, q_2', P_{q_2 q_2'}\right)$$
$$\cup \{q_2', q_3\} \cup \mathcal{O} - QuickHull\left(q_3, q_3', P_{q_3 q_3'}\right)$$
$$\cup \{q_3', q_4\} \cup \mathcal{O} - QuickHull\left(q_4, q_4', P_{q_4 q_4'}\right)$$

5.3. Điểm đổi mới trong bước tìm điểm có khoảng cách lớn nhất:

- Ở đây dữ liệu là số thực nên khó để tính toán một cách chính xác các giá trị khoảng cách để tìm điểm c có $Dist_{max}$

→ Do đó chúng ta sẽ xác định ngược lại, tức là chúng ta sẽ tìm điểm $\boldsymbol{new\_q_1}$ và điểm $\boldsymbol{new\_qq_1}$ trong miền $P_{q_1 q_1'}$ lần lượt ra các điểm có tính chất giống như q_1 và qq_1
Khi đó, new_q_1 và new_qq_1 vẫn sẽ là **những điểm cực biên chỉ mục j** theo tính chất đặc biệt của điểm

Ta sẽ đệ quy thuật toán trên miền mới cho đến khi $\boldsymbol{new\_q_1} \equiv \boldsymbol{new\_qq_1}$ hoặc trong miền mới không có điểm nào

Điều này là khả thi vì càng ngày, miền mới sẽ càng thu nhỏ → Số điểm càng giảm → Sẽ giảm về 0

- Khi $new\_q_1 \equiv new\_qq_1$ thì đó chính là điểm xa nhất ban đầu theo mong muốn của ta.

5.4 Sơ lược về giải thuật:

Bước 1. Ta sẽ tìm 4 cặp điểm đặc biệt của tập điểm:

$$(q_1, q_1'); (q_2, q_2'); (q_3, q_3'); (q_4, q_4')$$

Bước 2. Với mỗi cặp điểm, ta sẽ chọn những điểm thuộc 4 đường trực giao trực tiếp đi qua cặp điểm đó. Tức là sẽ phân hoặc tập điểm đã cho thành 4 tập set_1, set_2, set_3, set_4

Bước 3. Tìm bao lồi trên 4 tập điểm đó bằng cách đệ quy. Ví dụ với set_1:

- Với mỗi miền, ta sẽ tìm thêm 2 điểm đặc biệt của miền mới: $(q_{1_{new}}; q_{1'_{new}})$
- Sau đó, ta sẽ tìm các điểm trong set_1 mà thuộc miền của : $(q_{1_{new}}; q_{1'_{new}})$
- Đệ quy lại các bước trên miền mới $set_{1_{new}}$

Ta sẽ đệ quy thuật toán trên miền mới cho đến khi $\boldsymbol{new\_q_1} \equiv \boldsymbol{new\_qq_1}$ hoặc trong miền mới không có điểm nào

Điều này là khả thi vì càng ngày, miền mới sẽ càng thu nhỏ → Số điểm càng giảm → Sẽ giảm về 0

- Khi $new\_q_1 \equiv new\_qq_1$ thì đó chính là điểm xa nhất ban đầu theo mong muốn của ta.

6. Sử dụng thư viện OMP để hoàn thành giải thuật song song:

6.1. Giới thiệu OMP trong C++:

- OpenMP là một thư viện mở rộng C/C++/Fortran nhằm cho phép thực hiện song song vào source code hiện tại mà không cần phải viết lại nó. Khi lập trình với OpenMP, tất cả các luồng sẽ chia sẻ bộ nhớ và dữ liệu. Các hàm của OpenMP được bao gồm trong header file là **omp.h**.

- Cấu trúc chương trình OpenMP bao gồm các phần tuần tự và các phần song song. Phần code được thực thi song song được đánh dấu bằng một chỉ thị đặc biệt (**omp pragma).** Khi thực thi đến phần song song, chỉ thị này sẽ tạo ra các luồng phụ. Mỗi luồng thực thi song song đoạn code một cách độc lập. Khi một luồng kết thúc, nó sẽ tham gia vào luồng chủ. Khi tất cả các luồng kết thúc, luồng chủ tiếp tục với đoạn code song song tiếp theo.

- Khi sử dụng OpenMP, OpenMP ẩn đi các chi tết cấp thấp và cho phép lập trình viên mô tả các đoạn code song song đơn giản hơn với cấu trúc cấp cao. OpenMP có các chỉ thị cho phép lập trình viên:

- Chỉ định vùng song song.
- Chỉ định xem các biến trong phần song song là biến riêng tư hay biến chia sẻ.
- Chỉ định cách thức các luồng được đồng bộ hóa.
- Chỉ định cách song song hóa vòng lặp.
- Chỉ định cách các công việc được chia thành các luồng (định thời).

6.2 Sử dụng OMP để song song hóa giải thuật O-Quickhull:

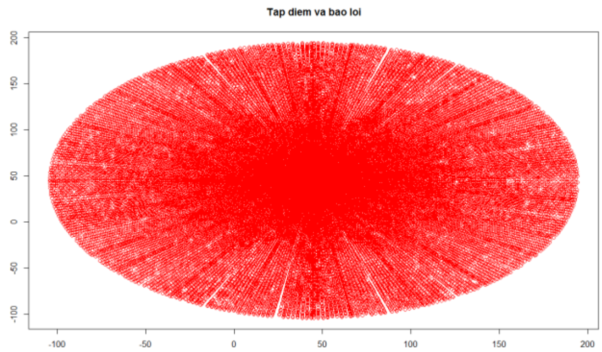
7. Code:

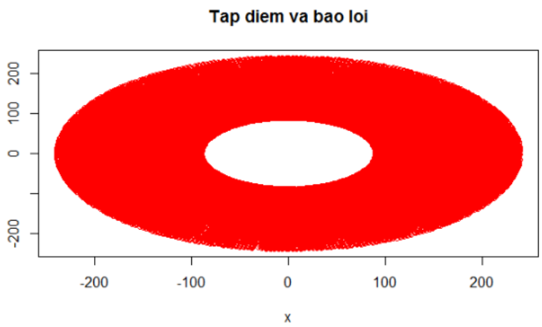
7.1 Code tuần tự (Lưu trong file O-Quickhull.cpp):

7.2 Code song song (Lưu trong file O-Quickhull-parallel.cpp):

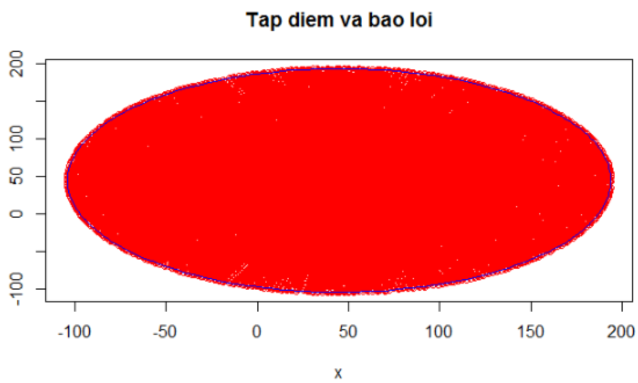
8. Chạy và so sánh:

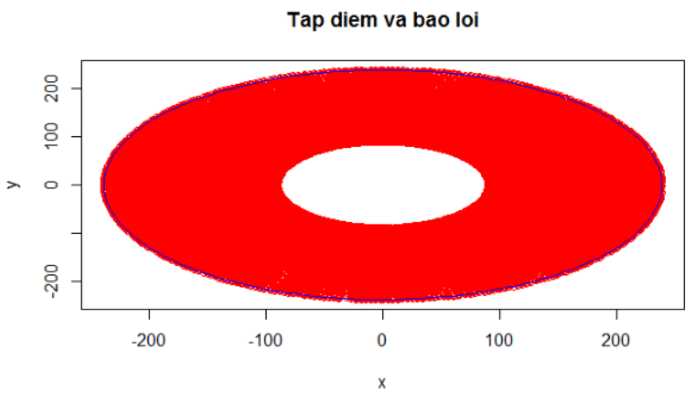
8.1. Dữ liệu đĩa và đĩa rỗng (100000 điểm)



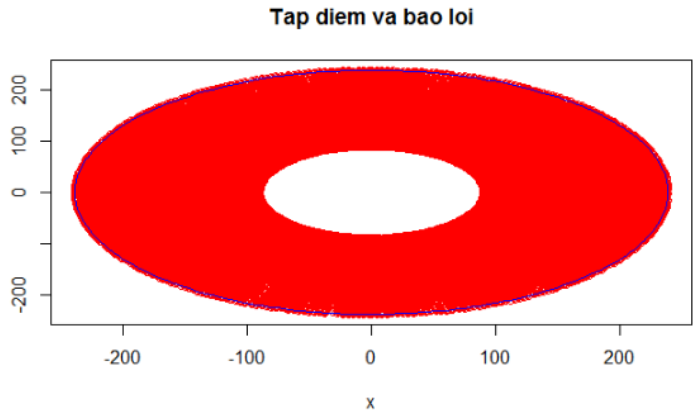


Kết quả:





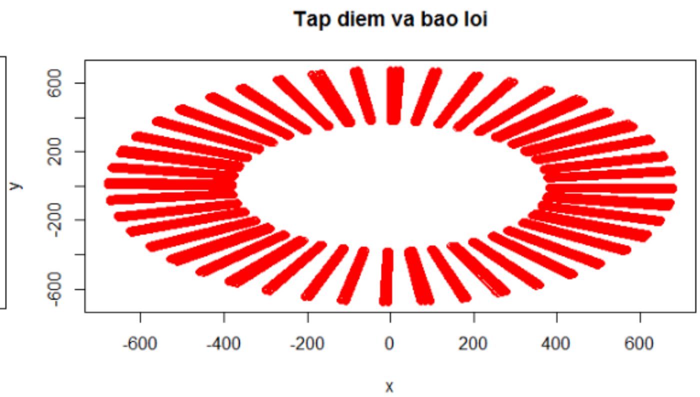
Tuần tự



Song song

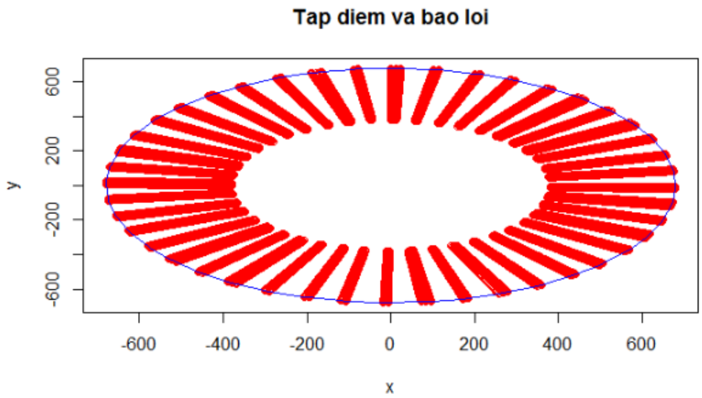
Dữ liệu	Thời gian chạy (s) (Chạy 10 lần, tính TB)	
	Tuần tự	Song song
Đĩa	0.49	0.47
Đĩa rỗng	0.62	0.61

8.2 Mặt trời và mặt trời rỗng:



Kết quả:

Tuần tự



Song song

Dữ liệu	**Thời gian chạy (s) (Chạy 10 lần, tính TB)**	
	Tuần tự	**Song song**
Mặt trời	0.352	0.341
Mặt trời rỗng	0.389	0.383