

**Linea Guida Report**  
**Controlli Automatici - T**  
**Progetto Tipologia B- Traccia 1**  
**Controllo di uno scaldatore elettrico**  
**Gruppo 23**

Nobili Giacomo, Raffoni Federico, Roca Marco

Il progetto riguarda il controllo di uno scaldatore elettrico, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali

$$m_R c_R \frac{dT_R(t)}{dt} = h_R A_R (T_{out}(t) - T_R(t)) + \frac{P_E(t)}{(1 + \kappa T_R(t))} \quad (1a)$$

$$m_A c_A \frac{dT_{out}(t)}{dt} = \dot{m}_A c_A (T_{in} - T_{out}(t)) + h_R A_R (T_R(t) - T_{out}(t)), \quad (1b)$$

dove

- $T_R(t)$  è la temperatura del riscaldatore [C°];
- $T_{out}(t)$  è la temperatura dell'aria in uscita dal riscaldatore [C°];
- $P_E(t)$  è la potenza elettrica fornita [W];
- $T_{in}$  è la temperatura dell'aria in ingresso (ambiente a temperatura costante) [C°];
- $m_R$  è la massa del riscaldatore [kg];
- $c_R$  è il calore specifico del riscaldatore [J/(kg C°)];
- $h_R$  è il coefficiente di convezione tra riscaldatore e aria [m²];
- $\kappa$  è il coefficiente di variazione della resistenza con la temperatura [1/C°];
- $m_A$  è la massa dell'aria [kg];
- $c_A$  è il calore specifico dell'aria [J/(kg C°)];
- $\dot{m}_A$  è la portata massica dell'aria [kg/s].

## 1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u). \quad (2b)$$

Pertanto, andiamo individuare lo stato  $x$ , l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$  del sistema come segue

$$x := \begin{bmatrix} T_R \\ T_{out} \end{bmatrix}, \quad u := P_E, \quad y := T_{out}$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni  $f$  ed  $h$

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{h_R A_R}{m_R c_R} x_2 - \frac{h_R A_R}{m_R c_R} x_1 + \frac{u}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_1)} \\ \frac{\dot{m}_A}{m_A} T_{in} - \left( \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} \right) x_2 + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} x_1 \end{bmatrix}$$

$$h(x, u) := x_2$$

Una volta calcolate  $f$  ed  $h$  esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h_R A_R}{m_R c_R} x_2 - \frac{h_R A_R}{m_R c_R} x_1 + \frac{u}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_1)} \\ \frac{\dot{m}_A}{m_A} T_{in} - \left( \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} \right) x_2 + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} x_1 \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$y = x_2 \quad (3c)$$

Per trovare la coppia di equilibrio  $(x_e, u_e)$  di (3), andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} f_1(x_e, u_e) = 0 \\ f_2(x_e, u_e) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{h_R A_R}{m_R c_R} (x_{2e} - x_{1e}) + \frac{u_e}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})} = 0 \\ \frac{\dot{m}_A}{m_A} T_{in} - \left( \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} \right) x_{2e} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} x_{1e} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

In particolare sono noti gli equilibri per lo stato  $(x_{1e}, x_{2e})$  e dobbiamo ricavare  $u_e$  in relazione ad essi. Possiamo ottenere il risultato dalla prima equazione isolando  $u_e$ . Procedendo con i calcoli otteniamo:

$$u_e = h_R A_R (x_{1e} - x_{2e})(1 + \kappa x_{1e})$$

Infine, sostituendo i parametri, la coppia di equilibrio risulta:

$$x_e := \begin{bmatrix} 200 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 28.8136 \text{ } ^\circ\text{C} \end{bmatrix}, \quad u_e = 1.0785 \cdot 10^3 \text{ W.} \quad (5)$$

Definiamo le variabili alle variazioni  $\delta x$ ,  $\delta u$  e  $\delta y$  come

$$\delta x \approx x(t) - x_e, \quad \delta u \approx u(t) - u_e, \quad \delta y \approx y(t) - y_e.$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A \delta x + B \delta u \quad (6a)$$

$$\delta y = C \delta x + D \delta u, \quad (6b)$$

dove le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  vengono calcolate come

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} \Big|_{x_e, u_e} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} \Big|_{x_e, u_e} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} \Big|_{x_e, u_e} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} \Big|_{x_e, u_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{h_R A_R}{m_R c_R} + \frac{1}{m_R c_R} \frac{u_e \kappa}{(1 + \kappa x_{1e})^2}\right) & \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \\ \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & -\frac{h_R A_R}{m_A c_A} - \frac{\dot{m}_A}{m_A} \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$= \begin{bmatrix} -0.044 & -0.0035 \\ -0.0428 & -1.9640 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

(7c)

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5624 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7d)$$

(7e)

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x, u)}{\partial x_1} \Big|_{x_e, u_e} & \frac{\partial h(x, u)}{\partial x_2} \Big|_{x_e, u_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7f)$$

(7g)

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (7h)$$

## 2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento  $G(s)$  dall'ingresso  $\delta u$  all'uscita  $\delta y$  mediante la seguente formula

$$G(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

Procediamo per passi e calcoliamo prima il determinante di  $sI - A$ :

$$\det(sI - A) = (s + \frac{h_R A_R}{m_R c_R} + \frac{u_e \kappa}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})^2})(s + \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A}) - \frac{(h_R A_R)^2}{m_A m_R c_A c_R}$$

poi la matrice aggiunta di  $sI - A$ . Visto che quest'ultima è una matrice  $2 \times 2$ , vale la seguente:

$$\text{adj}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \\ \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & s + \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \frac{u_e \kappa}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})^2} \end{bmatrix}$$

Mettendo tutto insieme abbiamo:

$$G(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} [0 \ 1] \begin{bmatrix} s + \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \\ \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & s + \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \frac{u_e \kappa}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Infine, sostituendo i parametri e svolgendo i calcoli si ottiene la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{2.407 \cdot 10^{-5}}{s^2 + 1.968s + 8.509 \cdot 10^{-3}}$$

(8)

Dunque il sistema linearizzato (6) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (8) con **2 poli** e **nessuno zero**. I poli (indicati con  $p_1$  e  $p_2$ ) sono i seguenti:

$$\begin{aligned} p_1 &= -1.9641 \\ p_2 &= -0.0043 \end{aligned}$$

In Figura 1 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

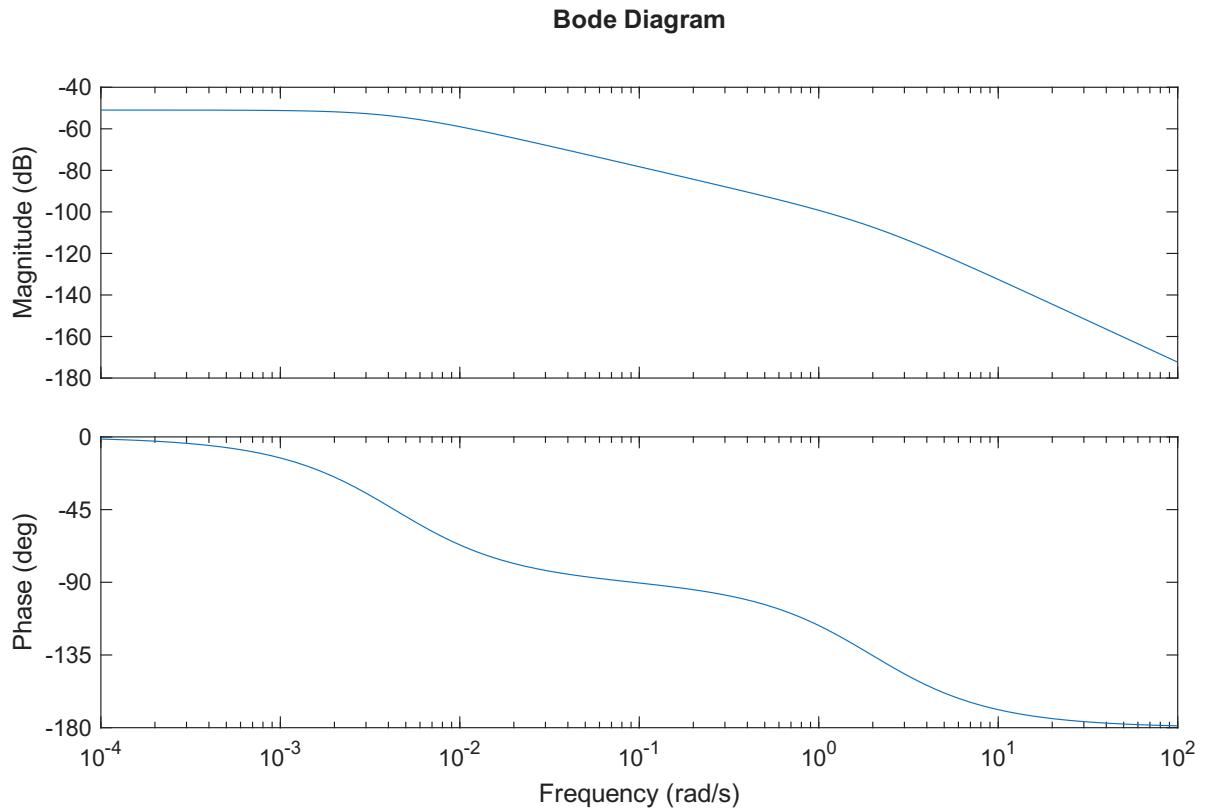


Figura 1: Diagramma di Bode del sistema.

## Analisi in Frequenza

Consideriamo la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{2.407 \cdot 10^{-5}}{s^2 + 1.968s + 8.509 \cdot 10^{-3}} \quad (9)$$

Per passare al dominio della frequenza, sostituiamo  $s$  con  $j\omega$ :

$$G(j\omega) = \frac{2.407 \cdot 10^{-5}}{(j\omega)^2 + 1.968(j\omega) + 8.509 \cdot 10^{-3}} \quad (10)$$

Notiamo che ci troviamo nel caso di un sistema del secondo ordine (due poli a parte reale negativa). Di conseguenza il sistema si comporta come un filtro passa-basso reale.

Il guadagno statico si mantiene costante fino a quando la frequenza raggiunge il modulo del polo più vicino all'origine, ovvero  $\omega = 0.0043$  rad/s. A questa frequenza, il polo  $p_2$  introduce una pendenza di  $-20$  dB/decade nel diagramma delle ampiezze. Dopo che anche il secondo polo si manifesta ad  $\omega = 1.9641$  rad/s avremo una pendenza di  $-40$  db/decade.

Per quanto riguarda il diagramma della fase, vediamo che presenta due curvature principali, in corrispondenza dei due poli, per poi assestarsi a frequenze alte su  $-180^\circ$ .

Ora portiamo la funzione di trasferimento nella forma di Bode:

$$G(j\omega) = \frac{0.002829}{1 + 2j(10.66)\frac{\omega}{0.0922} - \frac{\omega^2}{0.0922^2}} \quad (11)$$

Confrontiamo il denominatore con la forma canonica  $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$  per ricavare i parametri caratteristici. La pulsazione naturale risulta:

$$\omega_n = 0.0922 \text{ rad/s} \quad (12)$$

Il coefficiente di smorzamento risulta:

$$\xi = 10.66 \quad (13)$$

Essendo  $\xi > 1$ , il sistema è fortemente smorzato e il picco di risonanza non è rilevante.

## 3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono le seguenti:

**Specifiche 1:** Errore a regime  $|e_\infty| \leq e^* = 0.001$  in risposta ad un gradino  $w(t) = W \cdot 1(t)$  e  $d(t) = D \cdot 1(t)$  con ampiezze  $W \leq 50$  e  $D \leq 2$

Sappiamo che

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)\left(\frac{W}{s} + \frac{D}{s}\right) = (W + D) \lim_{s \rightarrow 0} S(s)$$

Vista l'assenza di poli in  $s = 0$ , il limite di  $S(s)$  per  $s \rightarrow 0$  vale  $\frac{1}{1+\mu}$ , e quindi

$$e_\infty = \frac{W + D}{1 + \mu} \approx \frac{W + D}{\mu} \leq e^*$$

e isolando  $\mu$

$$\mu = L(0) \geq \frac{D^* + W^*}{e^*} = 5.2 \cdot 10^4$$

Abbiamo quindi ottenuto la prima condizione:

$$\mu \geq 5.2 \cdot 10^4$$

**Specifiche 2:** Margine di fase  $M_f \geq 40^\circ$

**Specifiche 3:** Sovraelongazione percentuale massima del 18%, quindi  $S\% \leq 18\%$

Sappiamo che  $S \% \leq S^*$  equivale a richiedere  $\xi \geq \xi^*$ , con  $S^* = e^{\frac{-\pi\xi^*}{\sqrt{1-(\xi^*)^2}}}$ . Procedendo con i calcoli si ottiene:

$$\xi^* = 0.479133 \approx 0.48$$

Essendo  $M_f \geq 100\xi^*$ , allora si ottiene la condizione

$$M_f \geq 48\%$$

La quale, dovendo scegliere la più restrittiva tra la specifica 2 e 3, risulta la condizione da imporre sul margine di fase.

**Specifiche 4:** Il tempo di assestamento alla  $\epsilon\% = 1\%$  deve essere inferiore al valore fissato:  $T_a, \epsilon = 0.3s$ .

Ricordando che  $T_{a,1} = 4.6T$  e che  $T = \frac{1}{\xi\omega_c}$ , allora si ottiene che

$$\omega_c \geq \frac{460}{T^* M_f^*} \approx 32 \text{ rad/s}$$

Possiamo concludere che

$$\omega_{c,min} = 32 \text{ rad/s}$$

**Specifiche 5:** Il disturbo sull'uscita  $d(t)$ , con banda limitata nel range delle pulsazioni  $[0, 0.1]$  deve essere abbattuto di almeno 60 dB; ciò equivale a:

$$|L(j\omega)|_{\text{dB}} \geq 60 \text{ dB} \quad \text{con } \omega \in [\omega_{d,min}, \omega_{d,max}] = [0, 0.1]$$

**Specifiche 6:** Il rumore di misura  $n(t)$ , con banda limitata nel range delle pulsazioni  $[10^3, 10^6]$  deve essere abbattuto di almeno 40 dB; ciò equivale a:

$$|L(j\omega)|_{\text{dB}} \leq -40 \text{ dB} \quad \text{con } \omega \in [\omega_{n,min}, \omega_{n,max}] = [10^3, 10^6]$$

Pertanto, in Figura 2 mostriamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento  $G(s)$  con le zone proibite emerse dalla mappatura delle specifiche.

Si può notare dal diagramma delle ampiezze che il guadagno statico è insufficiente. E' compito del regolatore alzarlo per soddisfare la specifica 1.

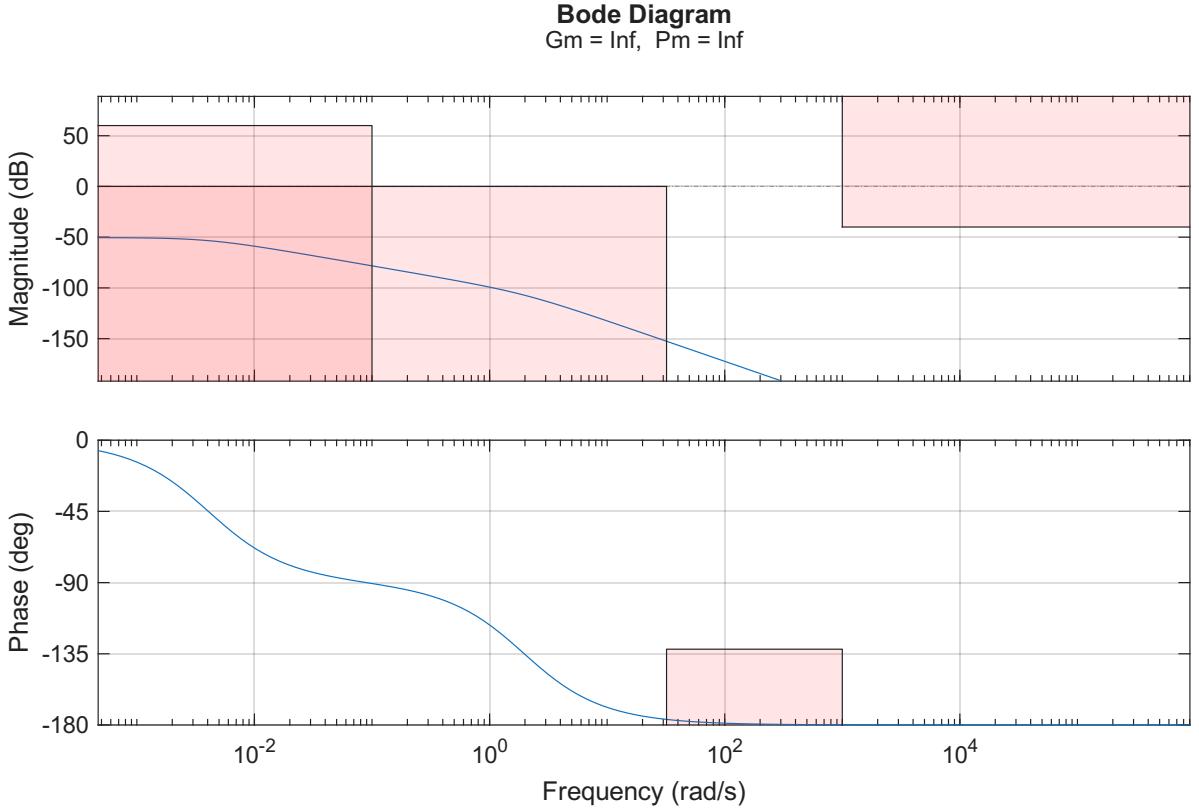


Figura 2: Mappatura delle richieste

## 4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico  $R_s(s)$  partendo dalle analisi fatte in sezione 3.

La specifica 1 sull'errore a regime impone di avere un guadagno statico pari o superiore a  $\mu_e^* = 5.2 \cdot 10^4$ . Di conseguenza, il guadagno del regolatore statico deve essere tale da imporre un guadagno complessivo almeno pari a  $\mu_e^*$ . Ne consegue che il guadagno di  $R_s(s)$  deve essere pari a:

$$\mu_e = \frac{\mu_e^*}{|G(0)|} = \frac{5.2 \cdot 10^4}{2.8 \cdot 10^{-3}} = 1.8382 \cdot 10^7$$

La specifica 5 sul disturbo in uscita impone di avere

$$\min_{[\omega_{d,min}, \omega_{d,max}]} |L(j\omega)|_{\text{dB}} = |L(\omega_{d,max})|_{\text{dB}} = |G(\omega_{d,max})|_{\text{dB}} \geq 60 \text{dB} = \mu_d^*$$

Passando dai decibel a una forma lineare otteniamo:

$$\mu_d^* = 10^{\frac{60}{20}} = 10^3$$

Di conseguenza, il guadagno del regolatore statico deve essere tale da imporre un guadagno complessivo almeno pari a  $\mu_d^*$ , che è pari a:

$$\mu_d = \frac{\mu_d^*}{|G(\omega_{d,max})|} = \frac{10^3}{1.1178 \cdot 10^{-4}} = 8.9461 \cdot 10^6$$

In definitiva, dobbiamo imporre che il guadagno statico di  $R_s(s)$  sia:

$$\mu = \max\{\mu_e, \mu_d\} = \mu_e = 1.8382 \cdot 10^7$$

Non dovendo soddisfare altri requisiti, termina qui il progetto del regolatore statico, la cui espressione è semplicemente:

$$R_s(s) = \mu$$

Dunque, definiamo la funzione estesa  $G_e(s) = R_s(s)G(s)$  e, in Figura 3, mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate.

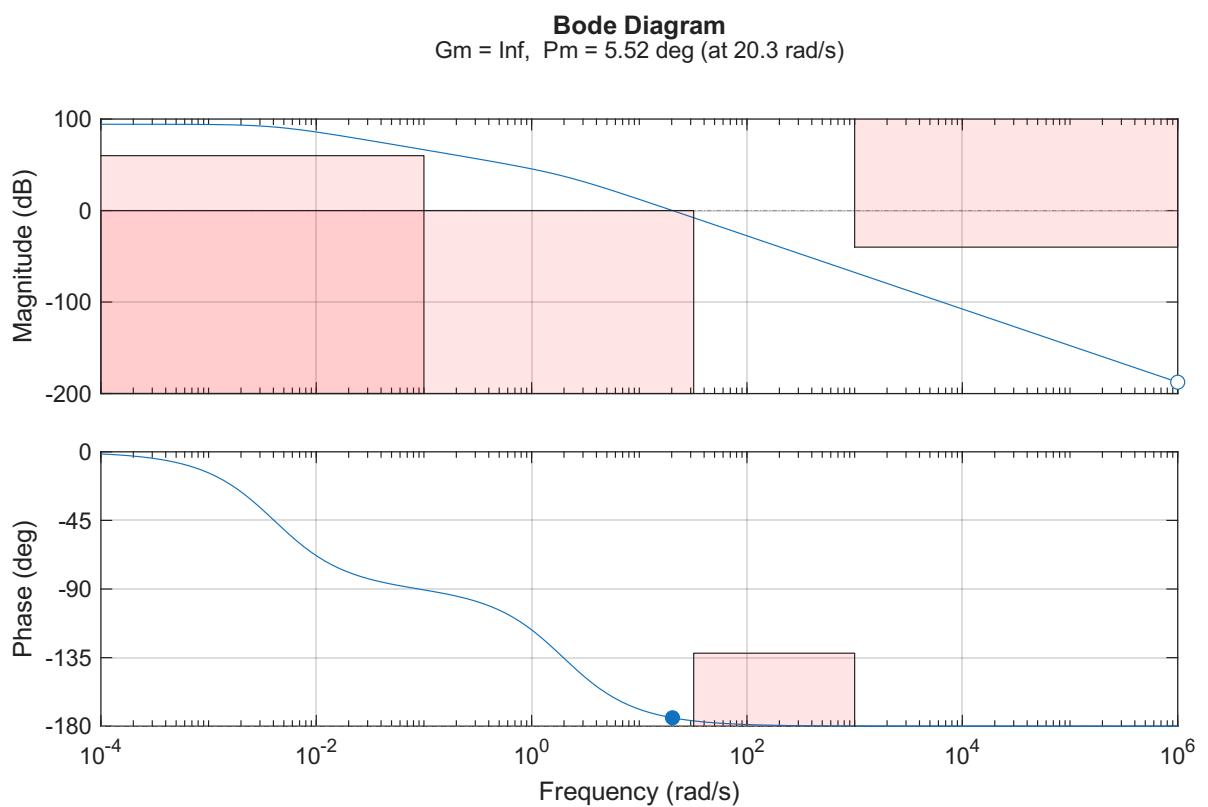


Figura 3: Funzione di trasferimento estesa

Dalla Figura 3, emerge che nel diagramma di ampiezza la funzione estesa interseca la zona proibita corrispondente alla specifica 4 sulla frequenza critica minima, ossia la frequenza di attraversamento a 0 dB è inferiore a  $\omega_{c,min}$ .

Inoltre possiamo notare dal diagramma di fase che nell'intervallo di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento  $\omega_c$  non esistono pulsazioni in cui la fase rispetta il vincolo sul margine di fase, relativo alle specifiche 2 e 3.

## 5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico  $R_d(s)$ .

Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello Scenario di tipo B. Dunque, progettiamo  $R_d(s)$

ricorrendo a una rete anticipatrice, ossia una rete nella forma:

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad 0 < \alpha < 1$$

In particolare, applichiamo le formule di inversione per ottenere i parametri  $\tau$  e  $\alpha\tau$ , imponendo la frequenza di attraversamento come  $\omega_c^* = 70$  rad/s. Inoltre, inseriamo un margine di sicurezza per la fase  $\varepsilon = 8$ . Chiamiamo  $M^*$  l'amplificazione della rete anticipatrice a  $\omega_c^*$  e  $0 < \varphi^* < \frac{\pi}{2}$  lo sfasamento a tale pulsazione. Allora bisogna che sia:

$$M^* = \frac{1}{|G_e(j\omega_c^*)|} \quad \varphi^* = M_f^* - [180^\circ + \arg\{G_e(j\omega_c^*)\}] + \varepsilon$$

Quindi, tramite le formule di inversione:

$$\tau = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c^* \sin \varphi^*} = 0.1846 \quad \alpha\tau = \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \varphi^*} = 8.7 \cdot 10^{-3}$$

In Figura 4 mostriamo il diagramma di Bode della funzione d'anello  $L(s) = R_d(s)G_e(s)$ .

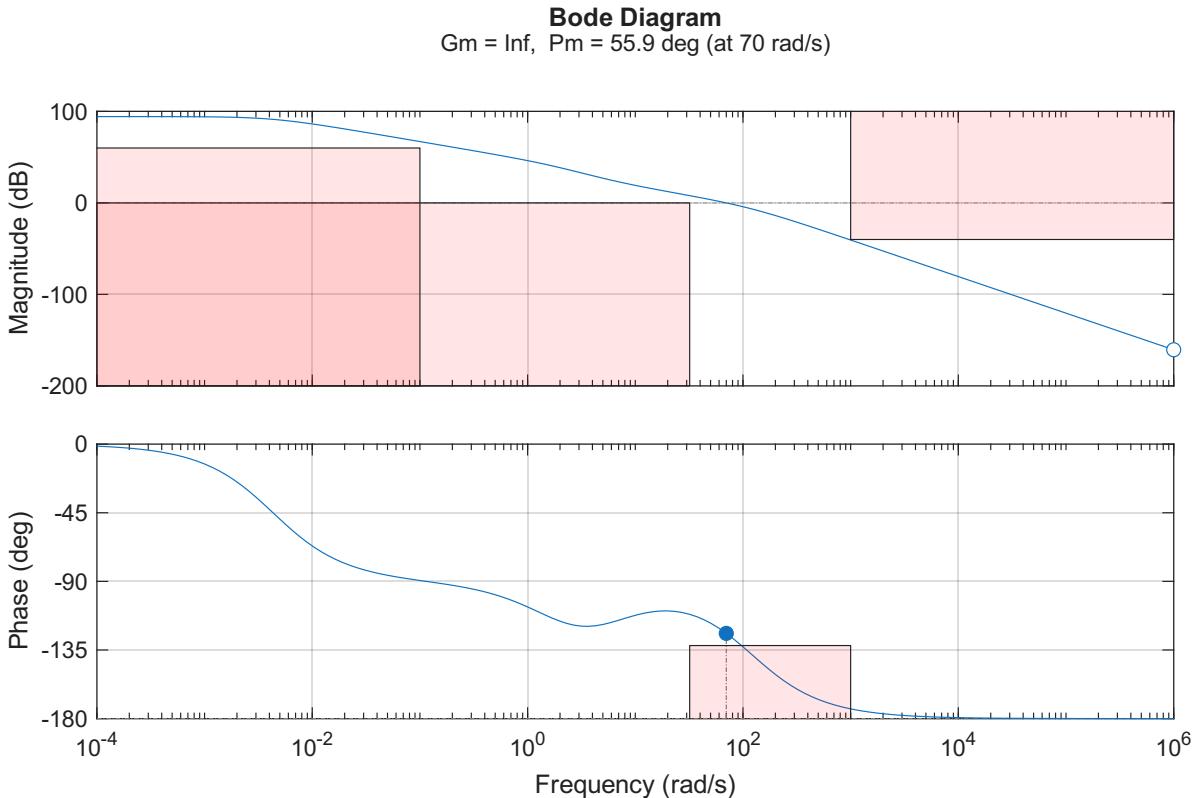


Figura 4: Funzione d'anello  $L(s)$

Possiamo notare che tutte le specifiche sono rispettate e di conseguenza una rete anticipatrice è sufficiente per il progetto del regolatore dinamico.

## 6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato con ...

In Figura ..., mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso. ...

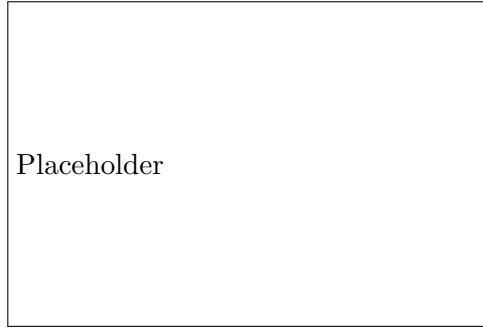


Figura 5: Caption.

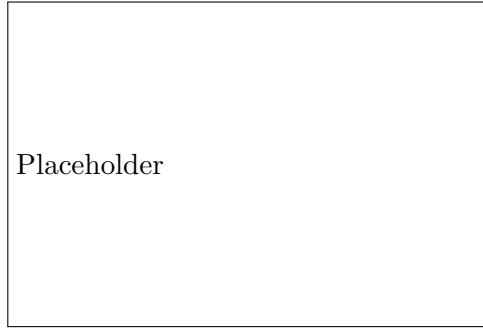


Figura 6: Caption.

...

Di seguito è riportato ... in merito alla risposta del sistema a fronte di un ingresso ...

... Si nota che ...

...

Inoltre possiamo notare dalle seguenti figure ... che i disturbi ...

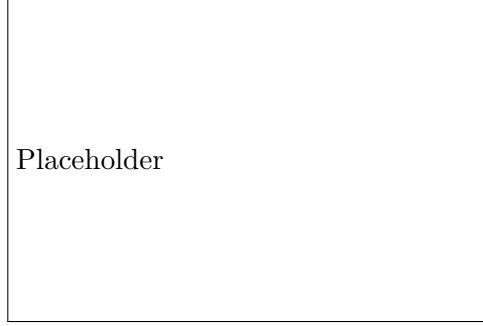


Figura 7: Caption.

In seguito, ...

...

...

...

## 7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare con ...

In Figura ..., mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso. ...

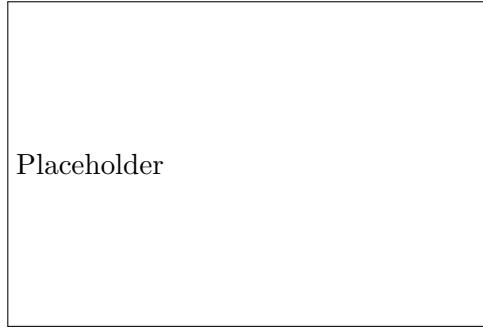


Figura 8: Caption.

...

Di seguito è riportato ... in merito alla risposta del sistema a fronte di un ingresso ...

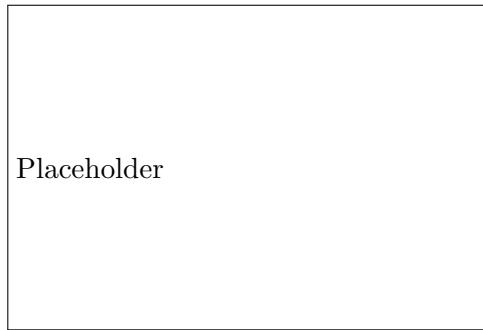


Figura 9: Caption.

... Si nota che ...

...

Rispetto alle simulazioni riguardanti il sistema linearizzato emerge ...

...

Inoltre, è possibile osservare ...

...

...

...

## 8 Punti opzionali

### 8.1 Primo punto

...

### 8.2 Secondo punto

...

### 8.3 Terzo punto

...

## 9 Conclusioni

...