

Linea Guida Report
Controlli Automatici - T
Progetto Tipologia B- Traccia 1
Controllo di uno scaldatore elettrico
Gruppo 23

Nobili Giacomo, Raffoni Federico, Roca Marco

Il progetto riguarda il controllo di uno scaldatore elettrico, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali

$$m_R c_R \frac{dT_R(t)}{dt} = h_R A_R (T_{out}(t) - T_R(t)) + \frac{P_E(t)}{(1 + \kappa T_R(t))} \quad (1a)$$

$$m_A c_A \frac{dT_{out}(t)}{dt} = \dot{m}_A c_A (T_{in} - T_{out}(t)) + h_R A_R (T_R(t) - T_{out}(t)), \quad (1b)$$

dove

- $T_R(t)$ è la temperatura del riscaldatore [C°];
- $T_{out}(t)$ è la temperatura dell'aria in uscita dal riscaldatore [C°];
- $P_E(t)$ è la potenza elettrica fornita [W];
- T_{in} è la temperatura dell'aria in ingresso (ambiente a temperatura costante) [C°];
- m_R è la massa del riscaldatore [kg];
- c_R è il calore specifico del riscaldatore [J/(kg C°)];
- h_R è il coefficiente di convezione tra riscaldatore e aria [m²];
- κ è il coefficiente di variazione della resistenza con la temperatura [1/C°];
- m_A è la massa dell'aria [kg];
- c_A è il calore specifico dell'aria [J/(kg C°)];
- \dot{m}_A è la portata massica dell'aria [kg/s].

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u). \quad (2b)$$

Pertanto, andiamo individuare lo stato x , l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue

$$x := \begin{bmatrix} T_R \\ T_{out} \end{bmatrix}, \quad u := P_E, \quad y := T_{out}$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{h_R A_R}{m_R c_R} x_2 - \frac{h_R A_R}{m_R c_R} x_1 + \frac{u}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_1)} \\ \frac{\dot{m}_A}{m_A} T_{in} - \left(\frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} \right) x_2 + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} x_1 \end{bmatrix}$$

$$h(x, u) := x_2$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h_R A_R}{m_R c_R} x_2 - \frac{h_R A_R}{m_R c_R} x_1 + \frac{u}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_1)} \\ \frac{\dot{m}_A}{m_A} T_{in} - \left(\frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} \right) x_2 + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} x_1 \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$y = x_2 \quad (3c)$$

Per trovare la coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (3), andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} f_1(x_e, u_e) = 0 \\ f_2(x_e, u_e) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{h_R A_R}{m_R c_R} (x_{2e} - x_{1e}) + \frac{u_e}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})} = 0 \\ \frac{\dot{m}_A}{m_A} T_{in} - \left(\frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} \right) x_{2e} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} x_{1e} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

In particolare sono noti gli equilibri per lo stato (x_{1e}, x_{2e}) e dobbiamo ricavare u_e in relazione ad essi. Possiamo ottenere il risultato dalla prima equazione isolando u_e . Procedendo con i calcoli otteniamo:

$$u_e = h_R A_R (x_{1e} - x_{2e})(1 + \kappa x_{1e})$$

Infine, sostituendo i parametri, la coppia di equilibrio risulta:

$$x_e := \begin{bmatrix} 200 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 80 \text{ } ^\circ\text{C} \end{bmatrix}, \quad u_e = 756 \text{ W.} \quad (5)$$

Definiamo le variabili alle variazioni δx , δu e δy come

$$\delta x \approx x(t) - x_e, \quad \delta u \approx u(t) - u_e, \quad \delta y \approx y(t) - y_e.$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A \delta x + B \delta u \quad (6a)$$

$$\delta y = C \delta x + D \delta u, \quad (6b)$$

dove le matrici A , B , C e D vengono calcolate come

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} \Big|_{x_e, u_e} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} \Big|_{x_e, u_e} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} \Big|_{x_e, u_e} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} \Big|_{x_e, u_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{h_R A_R}{m_R c_R} + \frac{1}{m_R c_R} \frac{u_e \kappa}{(1 + \kappa x_{1e})^2}\right) & \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \\ \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & -\frac{h_R A_R}{m_A c_A} - \frac{\dot{m}_A}{m_A} \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$= \begin{bmatrix} -1.05 & -0.45 \\ -0.35 & -0.95 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

(7c)

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.407 \cdot 10^{-5} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7d)$$

(7e)

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x, u)}{\partial x_1} \Big|_{x_e, u_e} & \frac{\partial h(x, u)}{\partial x_2} \Big|_{x_e, u_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7f)$$

(7g)

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \Big|_{x_e, u_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (7h)$$

2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu all'uscita δy mediante la seguente formula

$$G(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

Procediamo per passi e calcoliamo prima il determinante di $sI - A$:

$$\det(sI - A) = (s + \frac{h_R A_R}{m_R c_R} + \frac{u_e \kappa}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})^2})(s + \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A}) - \frac{(h_R A_R)^2}{m_A m_R c_A c_R}$$

poi la matrice aggiunta di $sI - A$. Visto che quest'ultima è una matrice 2×2 , vale la seguente:

$$\text{adj}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \\ \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & s + \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \frac{u_e \kappa}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})^2} \end{bmatrix}$$

Mettendo tutto insieme abbiamo:

$$G(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} [0 \ 1] \begin{bmatrix} s + \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \\ \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & s + \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \frac{u_e \kappa}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Infine, sostituendo i parametri e svolgendo i calcoli si ottiene la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{2.407 \cdot 10^{-5}}{s^2 + 1.968s + 8.152 \cdot 10^{-3}}$$

(8)

Dunque il sistema linearizzato (6) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (8) con **2 poli** e **nessuno zero**. I poli (indicati con p_1 e p_2) sono i seguenti:

$$\begin{aligned} p_1 &= -1.964 \\ p_2 &= -0.0042 \end{aligned}$$

In Figura 1 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

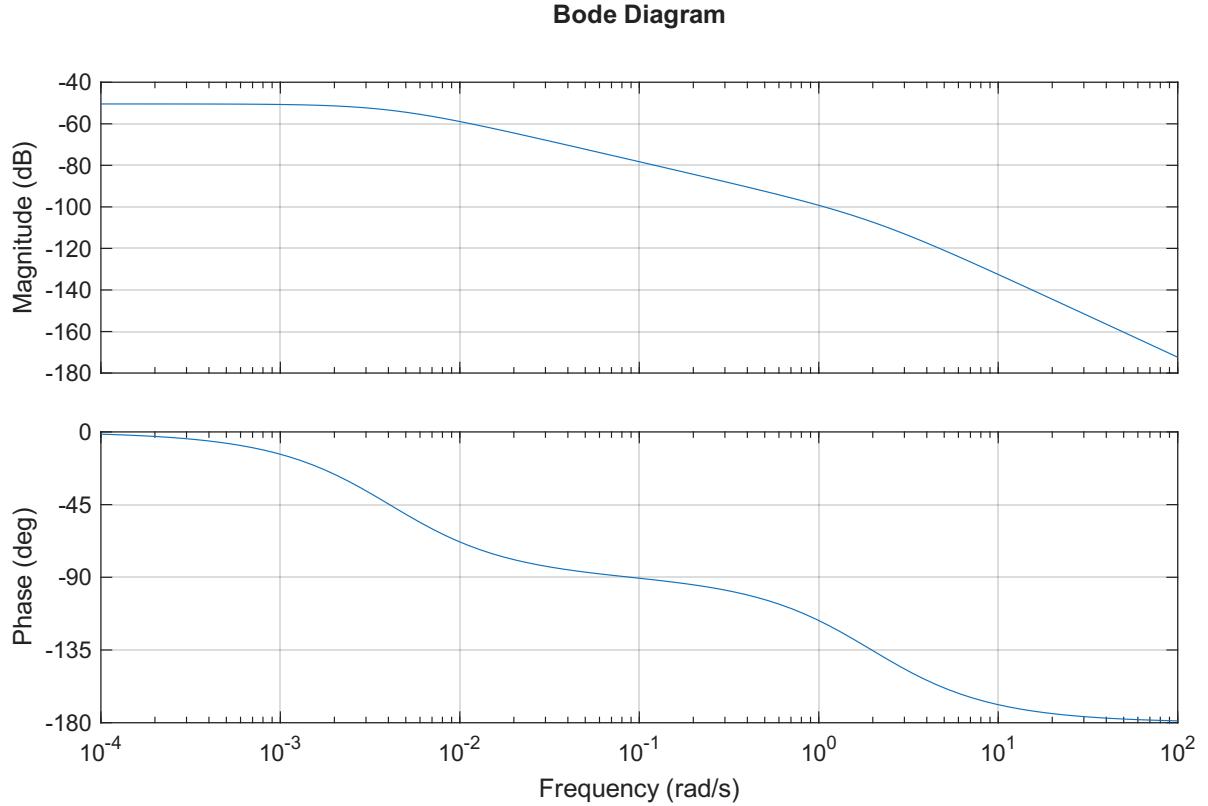


Figura 1: Diagramma di Bode del sistema.

Analisi in Frequenza

Consideriamo la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{2.407 \cdot 10^{-5}}{s^2 + 1.968s + 8.152 \cdot 10^{-3}} \quad (9)$$

Per passare al dominio della frequenza, sostituiamo s con $j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{2.407 \cdot 10^{-5}}{(j\omega)^2 + 1.968(j\omega) + 8.152 \cdot 10^{-3}} \quad (10)$$

Notiamo che ci troviamo nel caso di un sistema del secondo ordine (due poli a parte reale negativa). Di conseguenza il sistema si comporta come un filtro passa-basso reale.

Il guadagno statico si mantiene costante fino a quando la frequenza raggiunge il modulo del polo più vicino all'origine, ovvero $|p_2| = 0.0042$ rad/s. A questa frequenza, il polo p_2 introduce una pendenza di -20 dB/decade nel diagramma delle ampiezze. Dopo che anche il secondo polo si manifesta ad $\omega = 1.964$ rad/s avremo una pendenza di -40 db/decade.

Per quanto riguarda il diagramma della fase, vediamo che presenta due curvature principali, in corrispondenza dei due poli, per poi assestarsi a frequenze alte su -180° .

Ora portiamo la funzione di trasferimento nella forma di Bode:

$$G(j\omega) = \frac{0.00295}{1 + 2j(10.9)\frac{\omega}{0.0903} - \frac{\omega^2}{0.0903^2}} \quad (11)$$

Confrontiamo il denominatore con la forma canonica $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2$ per ricavare i parametri caratteristici. La pulsazione naturale risulta:

$$\omega_n = 0.0903 \text{ rad/s} \quad (12)$$

Il coefficiente di smorzamento risulta:

$$\xi = 10.9 \quad (13)$$

Essendo $\xi > 1$, il sistema è fortemente smorzato e il picco di risonanza non è rilevante.

3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono le seguenti:

Specifiche 1: Errore a regime $|e_\infty| \leq e^* = 0.001$ in risposta ad un gradino $w(t) = W \cdot 1(t)$ e $d(t) = D \cdot 1(t)$ con ampiezze $W \leq 50$ e $D \leq 2$

Sappiamo che

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s)\left(\frac{W}{s} + \frac{D}{s}\right) = (W + D) \lim_{s \rightarrow 0} S(s)$$

Vista l'assenza di poli in $s = 0$, il limite di $S(s)$ per $s \rightarrow 0$ vale $\frac{1}{1+\mu}$, e quindi

$$e_\infty = \frac{W + D}{1 + \mu} \approx \frac{W + D}{\mu} \leq e^*$$

e isolando μ

$$\mu = L(0) \geq \frac{D^* + W^*}{e^*} = 5.2 \cdot 10^4$$

Abbiamo quindi ottenuto la prima condizione:

$$\mu \geq 5.2 \cdot 10^4$$

Specifiche 2: Margine di fase $M_f \geq 40^\circ$

Specifiche 3: Sovraelongazione percentuale massima del 18%, quindi $S\% \leq 18\%$

Sappiamo che $S \% \leq S^*$ equivale a richiedere $\xi \geq \xi^*$, con $S^* = e^{\frac{-\pi\xi^*}{\sqrt{1-(\xi^*)^2}}}$. Procedendo con i calcoli si ottiene:

$$\xi^* = 0.479133 \approx 0.48$$

Essendo $M_f \geq 100\xi^*$, allora si ottiene la condizione

$$M_f \geq 48\%$$

La quale, dovendo scegliere la più restrittiva tra la specifica 2 e 3, risulta la condizione da imporre sul margine di fase.

Specifiche 4: Il tempo di assestamento alla $\epsilon\% = 1\%$ deve essere inferiore al valore fissato: $T_a, \epsilon = 0.3s$.

Ricordando che $T_{a,1} = 4.6T$ e che $T = \frac{1}{\xi\omega_c}$, allora si ottiene che

$$\omega_c \geq \frac{460}{T^* M_f^*} \approx 32 \text{ rad/s}$$

Possiamo concludere che

$$\omega_{c,min} = 32 \text{ rad/s}$$

Specifiche 5: Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con banda limitata nel range delle pulsazioni $[0, 0.1]$ deve essere abbattuto di almeno 60 dB; ciò equivale a:

$$|L(j\omega)|_{\text{dB}} \geq 60 \text{ dB} \quad \text{con } \omega \in [\omega_{d,min}, \omega_{d,max}] = [0, 0.1]$$

Specifiche 6: Il rumore di misura $n(t)$, con banda limitata nel range delle pulsazioni $[10^3, 10^6]$ deve essere abbattuto di almeno 40 dB; ciò equivale a:

$$|L(j\omega)|_{\text{dB}} \leq -40 \text{ dB} \quad \text{con } \omega \in [\omega_{n,min}, \omega_{n,max}] = [10^3, 10^6]$$

Pertanto, in Figura 2 mostriamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ con le zone proibite emerse dalla mappatura delle specifiche.

Si può notare dal diagramma delle ampiezze che il guadagno statico è insufficiente. E' compito del regolatore alzarlo per soddisfare la specifica 1.

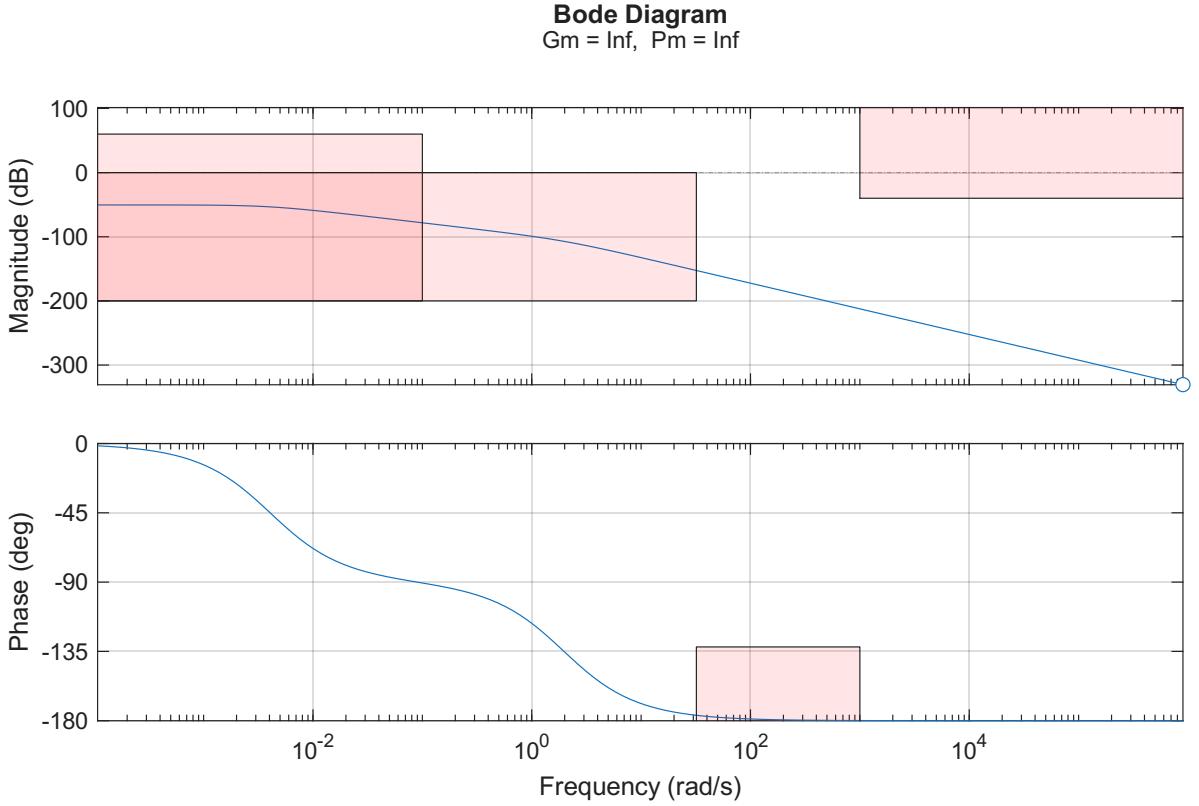


Figura 2: Mappatura delle richieste

4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico $R_s(s)$ partendo dalle analisi fatte in sezione 3.

La specifica 1 sull'errore a regime impone di avere un guadagno statico pari o superiore a $\mu_e^* = 5.2 \cdot 10^4$. Di conseguenza, il guadagno del regolatore statico deve essere tale da imporre un guadagno complessivo almeno pari a μ_e^* . Ne consegue che il guadagno di $R_s(s)$ deve essere pari a:

$$\mu_e = \frac{\mu_e^*}{|G(0)|} = \frac{5.2 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^{-3}} = 1.7283 \cdot 10^7$$

La specifica 5 sul disturbo in uscita impone di avere

$$\min_{[\omega_{d,min}, \omega_{d,max}]} |L(j\omega)|_{\text{dB}} = |L(\omega_{d,min})|_{\text{dB}} = |G(\omega_{d,min})|_{\text{dB}} \geq 60 \text{dB} = \mu_d^*$$

Passando dai decibel a una forma lineare otteniamo:

$$\mu_d^* = 10^{\frac{60}{20}} = 10^3$$

Di conseguenza, il guadagno del regolatore statico deve essere tale da imporre un guadagno complessivo almeno pari a μ_d^* , che è pari a:

$$\mu_d = \frac{\mu_d^*}{|G(\omega_{d,min})|} = \frac{10^3}{1.223 \cdot 10^{-4}} = 8.1767 \cdot 10^6$$

In definitiva, dobbiamo imporre che il guadagno statico di $R_s(s)$ sia:

$$\mu = \max\{\mu_e, \mu_d\} = \mu_e = 1.7283 \cdot 10^7$$

Non dovendo soddisfare altri requisiti, termina qui il progetto del regolatore statico, la cui espressione è semplicemente:

$$R_s(s) = \mu$$

Dunque, definiamo la funzione estesa $G_e(s) = R_s(s)G(s)$ e, in Figura 3, mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate.

Figura 3: Funzione di trasferimento estesa

Dalla Figura 3, emerge che nel diagramma di ampiezza la funzione estesa interseca la zona proibita corrispondente alla specifica 4 sulla frequenza critica minima, ossia la frequenza di attraversamento a 0 dB è inferiore a $\omega_{c,min}$.

Inoltre possiamo notare dal diagramma di fase che nell'intervallo di pulsazioni ammissibili per la pulsazione di attraversamento ω_c non esistono pulsazioni in cui la fase rispetta il vincolo sul margine di fase, relativo alle specifiche 2 e 3.

5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico $R_d(s)$.

Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello Scenario di tipo B. Dunque, progettiamo $R_d(s)$ ricorrendo a una rete anticipatrice, ossia una rete nella forma:

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad 0 < \alpha < 1$$

In particolare, applichiamo le formule di inversione per ottenere i parametri τ e $\alpha\tau$, imponendo la frequenza di attraversamento come $\omega_c^* = 70$ rad/s. Inoltre, inseriamo un margine di sicurezza per la fase $\varepsilon = 8$. Chiamiamo $M^* > 1$ l'amplificazione della rete anticipatrice a ω_c^* e $0 < \varphi^* < \frac{\pi}{2}$ lo sfasamento a tale pulsazione. Allora bisogna che sia:

$$M^* = \frac{1}{|G_e(j\omega_c^*)|} \quad \varphi^* = M_f^* - [180^\circ + \arg\{G_e(j\omega_c^*)\}] + \varepsilon$$

Quindi, tramite le formule di inversione:

$$\tau = \frac{M^* - \cos \varphi^*}{\omega_c^* \sin \varphi^*} = 0.197 \quad \alpha\tau = \frac{\cos \varphi^* - \frac{1}{M^*}}{\omega_c^* \sin \varphi^*} = 8.8 \cdot 10^{-3}$$

In Figura 4 mostriamo il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s) = R_d(s)G_e(s)$.

Possiamo notare che tutte le specifiche sono rispettate e di conseguenza una rete anticipatrice è sufficiente per il progetto del regolatore dinamico.

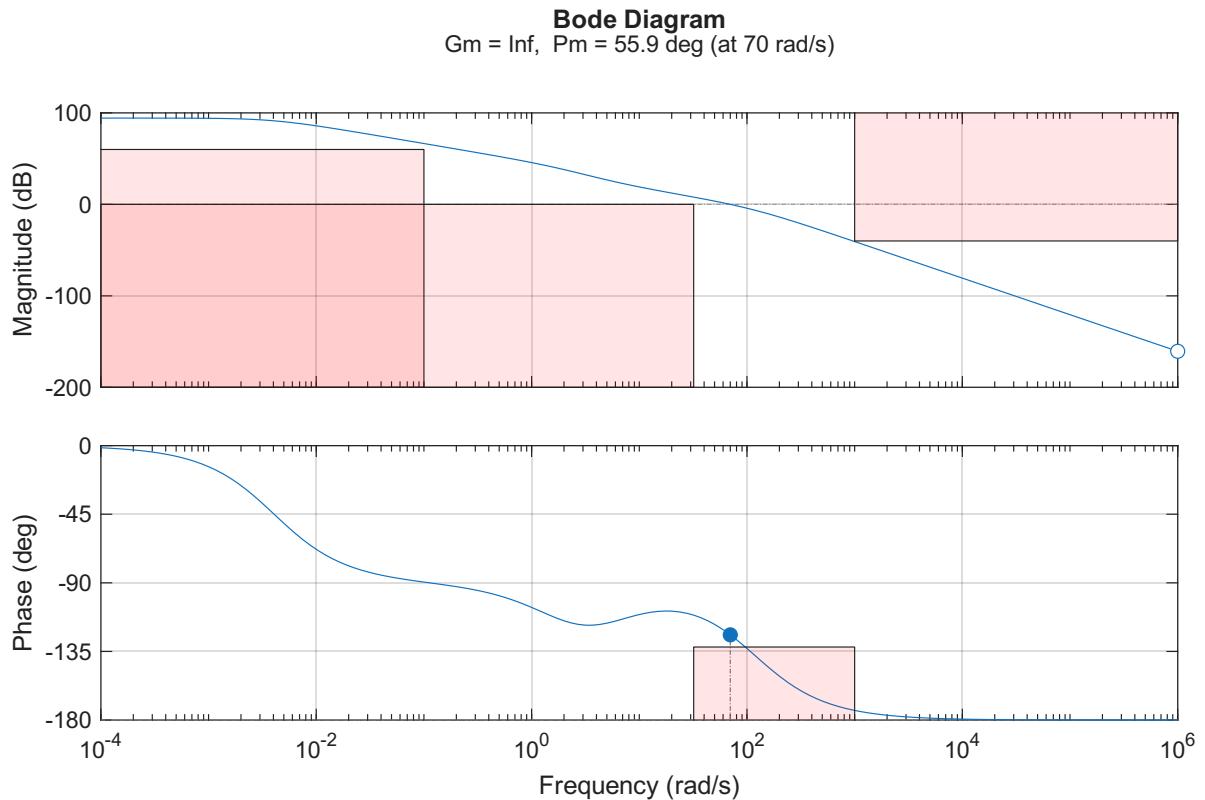


Figura 4: Funzione d'anello $L(s)$

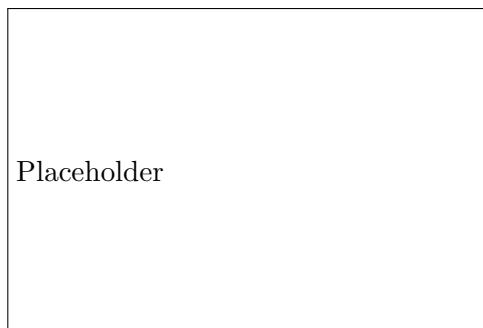


Figura 5: Caption.

6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato con ...
In Figura ..., mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso. ...

...
Di seguito è riportato ... in merito alla risposta del sistema a fronte di un ingresso ...
... Si nota che ...

...
Inoltre possiamo notare dalle seguenti figure ... che i disturbi ...
In seguito, ...

...
...
...

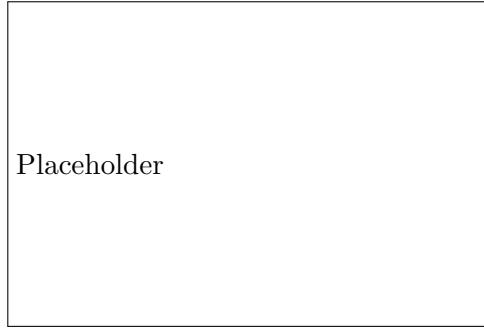


Figura 6: Caption.

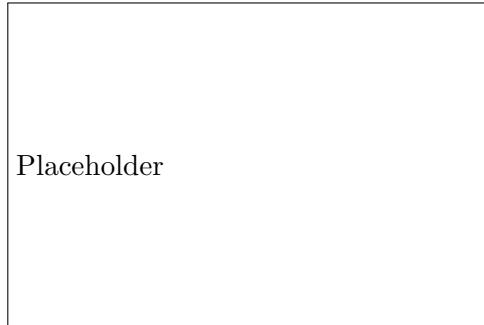


Figura 7: Caption.

7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare con ...

In Figura ..., mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso. ...

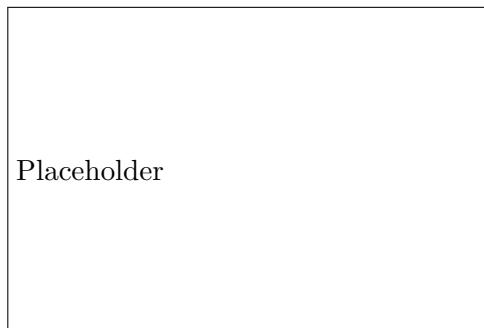


Figura 8: Caption.

...
Di seguito è riportato ... in merito alla risposta del sistema a fronte di un ingresso ...
... Si nota che ...

...
Rispetto alle simulazioni riguardanti il sistema linearizzato emerge ...

...
Inoltre, è possibile osservare ...

...

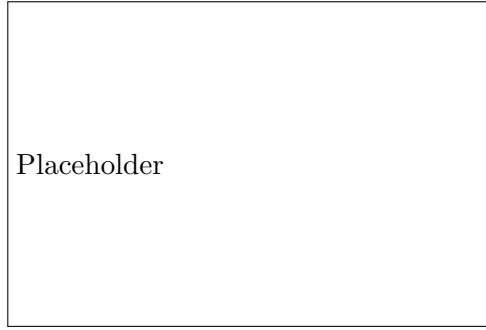


Figura 9: Caption.

...

...

8 Punti opzionali

8.1 Primo punto

...

8.2 Secondo punto

...

8.3 Terzo punto

...

9 Conclusioni

...