

**Linea Guida Report**  
**Controlli Automatici - T**  
**Progetto Tipologia B- Traccia 1**  
**Controllo di uno scaldatore elettrico**  
**Gruppo 23**

Nobili Giacomo, Raffoni Federico, Roca Marco

Il progetto riguarda il controllo di uno scaldatore elettrico, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali

$$m_R c_R \frac{dT_R(t)}{dt} = h_R A_R (T_{out}(t) - T_R(t)) + \frac{P_E(t)}{(1 + \kappa T_R(t))} \quad (1a)$$

$$m_A c_A \frac{dT_{out}(t)}{dt} = \dot{m}_A c_A (T_{in} - T_{out}(t)) + h_R A_R (T_R(t) - T_{out}(t)), \quad (1b)$$

dove

- $T_R(t)$  è la temperatura del riscaldatore [C°];
- $T_{out}(t)$  è la temperatura dell'aria in uscita dal riscaldatore [C°];
- $P_E(t)$  è la potenza elettrica fornita [W];
- $T_{in}$  è la temperatura dell'aria in ingresso (ambiente a temperatura costante) [C°];
- $m_R$  è la massa del riscaldatore [kg];
- $c_R$  è il calore specifico del riscaldatore [J/(kg C°)];
- $h_R$  è il coefficiente di convezione tra riscaldatore e aria [m<sup>2</sup>];
- $\kappa$  è il coefficiente di variazione della resistenza con la temperatura [1/C°];
- $m_A$  è la massa dell'aria [kg];
- $c_A$  è il calore specifico dell'aria [J/(kg C°)];
- $\dot{m}_A$  è la portata massica dell'aria [kg/s].

## 1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u). \quad (2b)$$

Pertanto, andiamo individuare lo stato  $x$ , l'ingresso  $u$  e l'uscita  $y$  del sistema come segue

$$x := \begin{bmatrix} T_R \\ T_{out} \end{bmatrix}, \quad u := P_E, \quad y := T_{out}$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni  $f$  ed  $h$

$$f(x, u) := \dots$$

$$h(x, u) := \dots$$

Una volta calcolate  $f$  ed  $h$  esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h_R A_R}{m_R c_R} x_2 - \frac{h_R A_R}{m_R c_R} x_1 + \frac{u}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_1)} \\ \frac{\dot{m}_A T_{in}}{m_A} - \left( \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} \right) x_2 + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} x_1 \end{bmatrix} \quad (3a)$$

(3b)

$$y = x_2 \quad (3c)$$

Per trovare la coppia di equilibrio  $(x_e, u_e)$  di (3), andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} f_1(x, u) = 0 \\ f_2(x, u) = 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{h_R A_R}{m_R c_R} (x_{2e} - x_{1e}) + \frac{u_e}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})} = 0 \\ \frac{\dot{m}_A T_{in}}{m_A} - \left( \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} \right) x_{2e} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} x_{1e} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Abbiamo tre parametri  $(x_{1e}, x_{2e}, u_e)$  per due equazioni, quindi ci sono un numero infinito di coppie di equilibrio. Tuttavia noi siamo interessati alla coppia di equilibrio che si ottiene fissando  $x = x_e$  tale che:

$$x_e = \begin{bmatrix} x_{1e} \\ x_{2e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{R,e} \\ T_{out,e} \end{bmatrix}$$

Consideriamo quindi solo la prima equazione e isoliamo  $u_e$ :

$$u_e = h_R A_R (x_{2e} - x_{1e})(1 + \kappa x_{1e})$$

dal quale otteniamo, sostituendo i parametri

$$x_e := \begin{bmatrix} 200 \text{ } ^\circ\text{C} \\ 80 \text{ } ^\circ\text{C} \end{bmatrix}, \quad u_e = \dots \text{W.} \quad (5)$$

Definiamo le variabili alle variazioni  $\delta x$ ,  $\delta u$  e  $\delta y$  come

$$\delta x = \dots, \quad \delta u = \dots, \quad \delta y = \dots$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A \delta x + B \delta u \quad (6a)$$

$$\delta y = C \delta x + D \delta u, \quad (6b)$$

dove le matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  vengono calcolate come

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{h_R A_R}{m_R c_R} + \frac{1}{m_R c_R} \frac{u_e \kappa}{(1 + \kappa x_{1e})^2}\right) & \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \\ \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & -\frac{h_R A_R}{m_A c_A} - \frac{\dot{m}_A}{m_A} \end{bmatrix} \quad (7a)$$

(7b)

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7c)$$

(7d)

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7e)$$

(7f)

$$D = 0. \quad (7g)$$

## 2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento  $G(s)$  dall'ingresso  $\delta u$  all'uscita  $\delta y$  mediante la seguente formula

$$G(s) = C \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D$$

Procediamo per passi e calcoliamo prima il determinante di  $sI - A$ :

$$\det(sI - A) = (s + \frac{h_R A_R}{m_R c_R} + \frac{u_e \kappa}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})^2})(s + \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A}) - \frac{(h_R A_R)^2}{m_A m_R c_A c_R}$$

poi la matrice aggiunta di  $sI - A$ . Visto che quest'ultima è una matrice  $2 \times 2$ , vale la seguente:

$$\text{adj}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$\text{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix} s + \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \\ \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & s + \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \frac{u_e \kappa}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})^2} \end{bmatrix}$$

Mettendo tutto insieme abbiamo:

$$G(s) = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{\dot{m}_A}{m_A} + \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \\ \frac{h_R A_R}{m_A c_A} & s + \frac{h_R A_R}{m_R c_R} \frac{u_e \kappa}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(m_R c_R)(1 + \kappa x_{1e})} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Infine, sostituendo i parametri e svolgendo i calcoli si ottiene la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{2.407 \cdot 10^{-5}}{s^2 + 1.968s + 8.152 \cdot 10^{-3}} \quad (8)$$

Dunque il sistema linearizzato (6) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (8) con **2 poli** e **nessuno zero**. I poli (indicati con  $p_1$  e  $p_2$ ) sono i seguenti:

$$\begin{aligned} p_1 &= -1.964 \\ p_2 &= -0.0042 \end{aligned}$$

In Figura ... mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

...

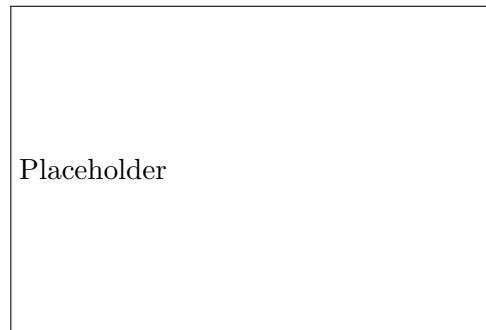


Figura 1: Caption.

...

Inoltre, ...

...

...

...

### 3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono

- **Specifiche 1:** Errore a regime  $|e_\infty| \leq e^* = 0.001$  in risposta ad un gradino  $w(t) = W \cdot 1(t)$  e  $d(t) = D \cdot 1(t)$  con ampiezze  $W \leq 50$  e  $D \leq 2$
- **Specifiche 2:** Margine di fase  $M_f \geq 40^\circ$
- **Specifiche 3:** Sovraelongazione percentuale massima del 18%, quindi  $S\% \leq 18\%$
- **Specifiche 4:** Il tempo di assestamento alla  $\epsilon\% = 1\%$  deve essere inferiore al valore fissato:  $Ta, \epsilon = 0.3s$ .
- **Specifiche 5:** Il disturbo sull'uscita  $d(t)$ , con banda limitata nel range delle pulsazioni  $[0, 0.1]$  deve essere abbattuto di almeno 60 dB
- **Specifiche 6:** Il rumore di misura  $n(t)$ , con banda limitata nel range delle pulsazioni  $[10^3, 10^6]$  deve essere abbattuto di almeno 40 dB

Andiamo ad effettuare la mappatura punto per punto le specifiche richieste. ...

Pertanto, in Figura ..., mostriamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento  $G(s)$  con le zone proibite emerse dalla mappatura delle specifiche.

...

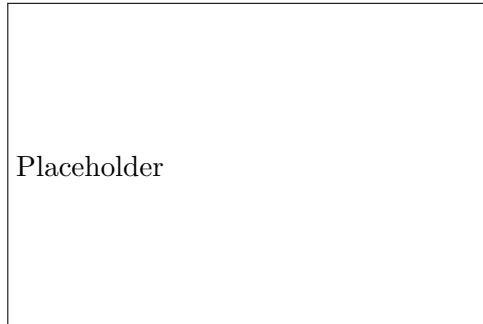


Figura 2: Caption.

...

Si può notare che ...

...

## 4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico  $R_s(s)$  partendo dalle analisi fatte in sezione 3.

...

Dunque, definiamo la funzione estesa  $G_e(s) = R_s(s)G(s)$  e, in Figura ..., mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate.

...

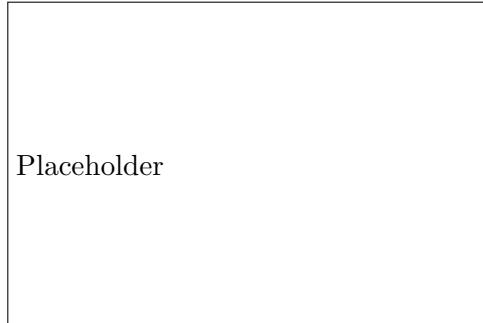


Figura 3: Caption.

...

Da Figura ..., emerge ...

...

Inoltre, possiamo notare che ...

...

...

...

## 5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico  $R_d(s)$ . Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello Scenario di tipo .... Dunque, progettiamo  $R_d(s)$  ricorrendo a ...

In Figura ..., mostriamo il diagramma di Bode della funzione d'anello  $L(s) = R_d(s)G_e(s)$

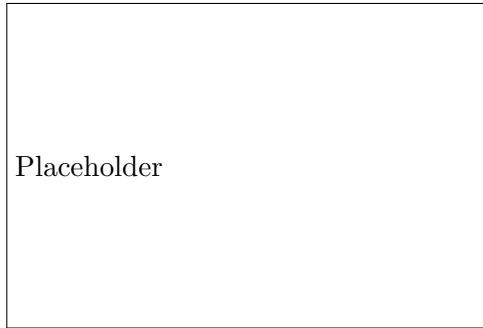


Figura 4: Caption.

...

Possiamo notare che ...

...

...

...

## 6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato con ...

In Figura ..., mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso. ...

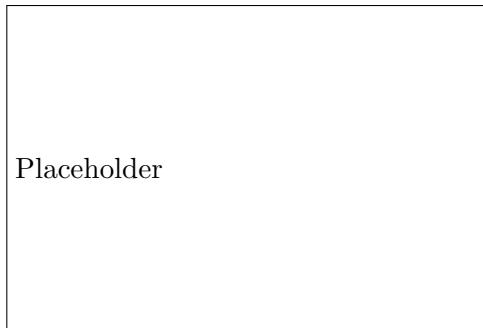


Figura 5: Caption.

...

Di seguito è riportato ... in merito alla risposta del sistema a fronte di un ingresso ...

... Si nota che ...

...

Inoltre possiamo notare dalle seguenti figure ... che i disturbi ...

In seguito, ...

...

...

...

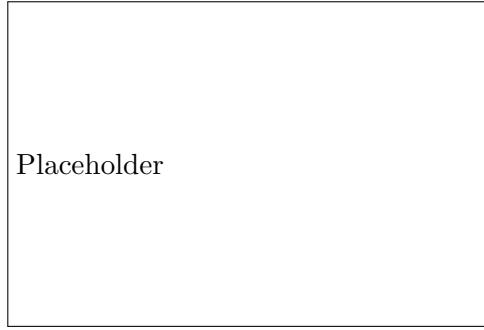


Figura 6: Caption.

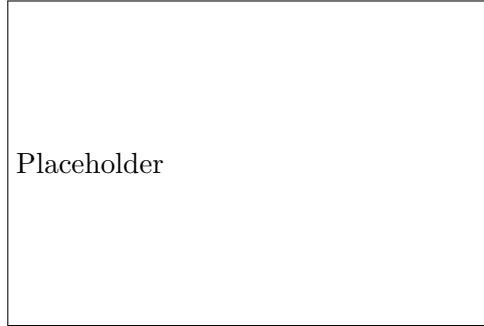


Figura 7: Caption.

## 7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare con ...

In Figura ..., mostriamo lo schema a blocchi del sistema in anello chiuso. ...

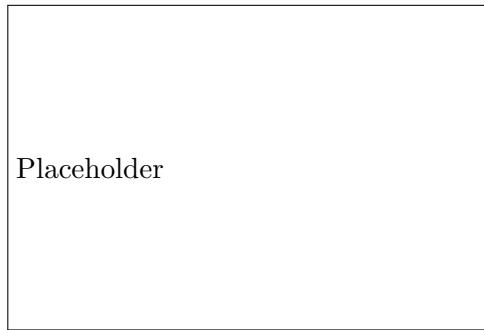


Figura 8: Caption.

...  
Di seguito è riportato ... in merito alla risposta del sistema a fronte di un ingresso ...  
... Si nota che ...

...  
Rispetto alle simulazioni riguardanti il sistema linearizzato emerge ...

...  
Inoltre, è possibile osservare ...

...

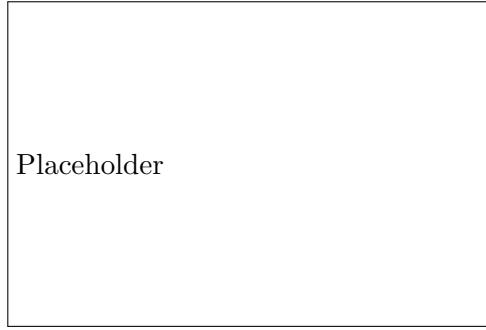


Figura 9: Caption.

...

...

## 8 Punti opzionali

### 8.1 Primo punto

...

### 8.2 Secondo punto

...

### 8.3 Terzo punto

...

## 9 Conclusioni

...