

COMPLEMENTI DI CINEMATICA E DINAMICA DELLE MACCHINE

allievi ingegneri magistrali mecatronici (I anno)
A.A. 2020-2021

MANUTENZIONE

Il problema del danneggiamento delle macchine può essere in parte o completamente risolto con l'effettuazione di interventi di manutenzione, che si può definire come: l'insieme delle azioni che permettono di mantenere o ristabilire un bene in uno stato specificato o in modo da assicurarne un servizio determinato.

La manutenzione può essere a rottura, preventiva o predittiva.

La manutenzione a rottura viene effettuata solo dopo che si è verificato il guasto: essa può essere conveniente solo (per esempio dispositivi che presentano un alto tasso di guasti accidentali, come quelli elettrici).

La manutenzione preventiva si basa sull'effettuazione di interventi periodici per limitare la progressione del degrado e prevenire l'insorgenza di guasti. In questo caso specifico è opportuno ottimizzare la frequenza degli interventi con un'opportuna programmazione: i guasti accidentali, tuttavia, richiedono la riprogrammazione degli interventi.

La manutenzione predittiva è un'evoluzione della preventiva. Consiste nel rilievo (monitoraggio) e nella valutazione periodica di parametri legati allo stato di salute della macchina: la variazione temporale di questi parametri permette di prevedere il loro andamento fino alla condizione in cui diventa critico il corretto funzionamento dell'impianto, al fine di predeterminare il momento di effettuazione dell'intervento di manutenzione.

Questa politica è particolarmente indicata quando vi è bassa probabilità di danni accidentali ed i costi di intervento e quelli di mancata produzione sono elevati.

Occorre individuare in un impianto la macchina o le macchine da sottoporre a monitoraggio in base al grado di criticità individuale in rapporto al normale e corretto funzionamento dell'impianto: per esempio ogni macchina disposta in una singola linea di produzione ha grado di criticità molto elevato in quanto un suo mancato funzionamento produce l'arresto della linea e la conseguente perdita di produzione.

Le più comuni tecniche di monitoraggio si basano su:

- analisi delle vibrazioni: la più diffusa nel settore delle macchine rotanti;
- rilevazione della temperatura: l'inizio del danneggiamento si verifica generalmente con un aumento di temperatura (ad esempio nei cuscinetti a rotolamento);
- rilevazione di portata e pressione nei circuiti idraulici e di raffreddamento;
- analisi dei lubrificanti: detta anche analisi del particolato, si propone di rilevare la quantità di particelle di usura disperse nel liquido;
- emissione acustica: sviluppatasi in ambito nucleare per il controllo dei recipienti in pressione mediante sensori che operano in un campo di frequenza compreso tra 0.1 ed 1 MHz. Il segnale ad alta frequenza, generato da onde elastiche che si propagano nel materiale, viene modulato in ampiezza dai fenomeni vibratorii legati alla presenza di difetti: attraverso operazioni di demodulazione è possibile ottenere un segnale analogo a quello ottenuto con i comuni accelerometri ed analizzato allo stesso modo. Il vantaggio principale di questa tecnica risiede in un più favorevole rapporto segnale-rumore.
- termografia: si basa sulla rilevazione dell'emissione dell'energia nel campo delle radiazioni infrarosse. Tecnica non intrusiva utilizzabile anche a distanza.

ELEMENTI DI ANALISI DEI DATI

Serie e Trasformata di Fourier

Una funzione periodica di periodo $T=2\pi/\omega$ può essere espressa mediante una serie di termini sinusoidali del tipo:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t))$$

dove:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt \end{array} \right.$$

Condizione necessaria per l'esistenza della serie è che la funzione $f(t)$ sia assolutamente integrabile nell'intervallo $(0, T)$, ossia che

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty.$$

Posto

$$a_n = F_n \cdot \cos \psi_n$$

$$b_n = F_n \cdot \sin \psi_n$$

la funzione periodica può essere ricostruita anche come:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \cdot \cos \psi_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + F_n \cdot \sin \psi_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t - \psi_n) \end{aligned}$$

con

$$F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\tan \psi_n = \frac{b_n}{a_n}$$

Il termine corrispondente ad $n=1$, ossia $F_1 \cdot \cos(\omega \cdot t - \psi_1)$, è detto *fondamentale*; quelli di ordine superiore, con $n > 1$, sono detti *armoniche*.

Mediante le relazioni di Eulero – che legano tra loro le funzioni trigonometriche agli esponenziali complessi – si ottiene:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \frac{e^{i \cdot n \cdot \omega \cdot t} + e^{-i \cdot n \cdot \omega \cdot t}}{2} - i \cdot b_n \cdot \frac{e^{i \cdot n \cdot \omega \cdot t} - e^{-i \cdot n \cdot \omega \cdot t}}{2} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - i \cdot b_n) \cdot e^{i \cdot n \cdot \omega \cdot t} + (a_n + i \cdot b_n) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega \cdot t} \right] \end{aligned}$$

Posto

$$\begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2} \\ c_n = \frac{a_n - i \cdot b_n}{2} \\ c_n^* = \frac{a_n + i \cdot b_n}{2} = c_{-n} \end{cases}$$

ed estendendo la sommatoria da $-\infty$ a $+\infty$, si può scrivere:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i \cdot n \cdot \omega \cdot t}$$

I coefficienti complessi c_n possono essere calcolati nel seguente modo:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \cdot (a_n - i \cdot b_n) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot (\cos(n \cdot \omega \cdot t) - i \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)) dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot e^{-i \cdot n \cdot \omega \cdot t} dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

Le serie dei valori dei coefficienti a_n e b_n , oppure F_n e ϕ_n , oppure dei valori complessi c_n , costituiscono lo *spettro* della funzione $f(t)$ e ne forniscono una rappresentazione nel dominio delle frequenze.

Si è visto che una funzione periodica, di periodo T , può essere rappresentata da una serie di Fourier, ossia da una serie di infinite funzioni armoniche di pulsazione $n\omega$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$), dove $\omega = 2 \cdot \pi / T$ rappresenta la pulsazione della fondamentale. Se si fa tendere all'infinito il periodo T , la funzione diventa aperiodica. In questa operazione le frequenze discrete si avvicinano sempre più l'una all'altra, finché, al limite, vengono a costituire uno spettro continuo. A questo punto la serie di Fourier diventa l'*integrale di Fourier*.

Consideriamo ancora la funzione periodica $f(t)$ espressa in serie di Fourier secondo la:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i \cdot n \cdot \omega \cdot t} \quad \omega = 2 \cdot \pi / T$$

Adottando le notazioni

$$n \cdot \omega = \omega_n$$

$$(n + 1) \cdot \omega - n \cdot \omega = \omega = 2 \cdot \pi / T = \Delta\omega$$

si può scrivere:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t} dt \right) \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t} dt \right) \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \Delta\omega$$

Al tendere di T all'infinito, ω_n diventa la variabile continua ω e la quantità

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t} dt$$

tende ad una funzione della pulsazione ω che indichiamo con $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$$

Nel passaggio al limite l'espressione della funzione diventa:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega_n \cdot t} dt \right) \cdot e^{i \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \Delta\omega = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} d\omega$$

La funzione $F(\omega)$ è la *trasformata di Fourier* della funzione del tempo $f(t)$. Si può dire che la quantità $F(\omega) d\omega$ rappresenta il contributo ad $f(t)$ delle armoniche comprese nell'intervallo da ω ad $\omega + d\omega$

Mediante la *trasformata inversa di Fourier*, ogni funzione $f(t)$ può essere descritta da un integrale che rappresenta il contributo di componenti armoniche aventi uno spettro di frequenza continuo da $-\infty$ a $+\infty$.

Analogamente a quanto visto nel caso della serie di Fourier per le funzioni periodiche, condizione necessaria affinché esista la trasformata di Fourier è che la funzione $f(t)$ sia assolutamente integrabile nell'intervallo da $-\infty$ a $+\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

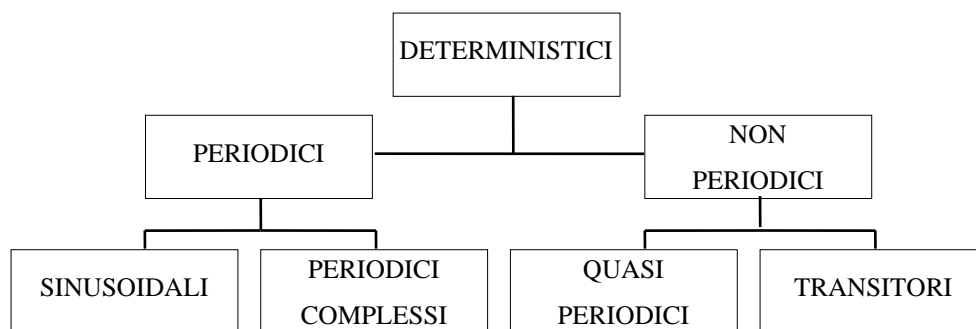
La $F(\omega)$ è una funzione complessa, di cui si può rappresentare la parte reale e la parte immaginaria, oppure l'ampiezza e la fase in funzione di ω .

Classificazione dei dati

I dati che rappresentano un fenomeno fisico e che da questo sono ottenuti mediante l'impiego di opportuni sistemi di misura possono essere classificati come deterministici oppure come casuali.

Sono deterministici quei dati che possono essere descritti da esplicite relazioni matematiche.

La seguente tabella rappresenta una classificazione dei dati deterministici:



I dati *periodici sinusoidali*, possono essere descritti, in funzione del tempo, dalla seguente legge:

$$x(t) = X \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t + \theta)$$

dove X rappresenta l'ampiezza, f_0 la frequenza in cicli per unità di tempo, θ l'angolo di fase corrispondente all'istante iniziale in radianti ed $x(t)$ il valore della variabile x all'istante generico t .

Si definisce *periodo* T_p l'intervallo temporale corrispondente ad un intero ciclo di oscillazione, *frequenza* f_0 il numero di cicli per unità di tempo. Questi due parametri sono legati dalla seguente relazione:

$$T_p = \frac{1}{f_0}$$

I dati *periodici complessi* sono rappresentabili analiticamente da una funzione che si ripete esattamente ad intervalli regolari di tempo, per esempio del tipo:

$$x(t) = x(t \pm n \cdot T_p) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vale la definizione di periodo data per i dati sinusoidali, mentre il numero di cicli per unità di tempo viene definito *frequenza fondamentale* f_1 . I dati sinusoidali rappresentano un caso particolare di dati periodici complessi.

Salvo alcune eccezioni, è possibile sviluppare i dati periodici complessi in serie di Fourier, che può essere espressa come:

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_1 \cdot t - \theta_n) \right]$$

Pertanto, i dati periodici complessi sono costituiti da una componente statica X_0 , definita *valore medio*, e da un numero infinito di componenti sinusoidali, definite *armoniche*, di ampiezza X_n e fase θ_n . Si noti che le frequenze delle componenti armoniche sono tutte multipli interi della frequenza fondamentale f_1 .

Una funzione periodica può essere espressa come una somma di termini sinusoidali aventi frequenze multiple di una frequenza fondamentale. Reciprocamente, la somma di più termini sinusoidali, le cui frequenze siano tra loro commensurabili - ossia i cui rapporti siano numeri razionali -, dà luogo ad una funzione periodica.

Se i rapporti tra le frequenze sono numeri irrazionali, il periodo della fondamentale risulta infinitamente lungo: tali dati sono definiti come *quasi periodici* e possono essere rappresentati mediante una serie:

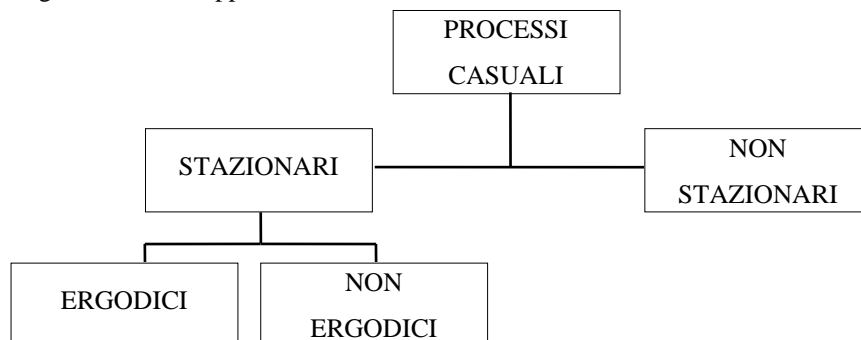
$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_n \cdot t + \theta_n)$$

con $\frac{f_i}{f_j} \neq \text{numero razionale} (i \neq j)$.

Trascurando la fase la suddetta funzione può essere rappresentata nel dominio delle frequenze con uno spettro discreto, nel quale le frequenze delle componenti non sono multipli interi di una frequenza fondamentale.

I dati non periodici diversi da quelli definiti come quasi periodici sono indicati come *transitori*: essi non possono essere rappresentati mediante uno spettro discreto, nella maggior parte dei casi è tuttavia possibile ottenere uno *spettro continuo* mediante la Trasformata di Fourier.

La seguente tabella rappresenta una classificazione dei dati casuali:



I dati che rappresentano un fenomeno fisico casuale non possono essere descritti da una relazione matematica esplicita, perché ogni osservazione del fenomeno ha carattere di unicità. In altre parole, ogni osservazione fornirà solo uno dei possibili risultati che hanno modo di verificarsi.

Una singola storia temporale che rappresenti un fenomeno casuale è detta *funzione campione* (o *registrazione campione*) quando l'osservazione avviene in un intervallo finito di tempo). L'insieme di tutte le possibili funzioni campione che il fenomeno casuale potrebbe aver prodotto viene chiamato *processo casuale* o *processo stocastico*.

Quando un fenomeno fisico è considerato come un processo stocastico, le proprietà del fenomeno possono essere descritte ad ogni istante calcolando dei valori medi su una raccolta di funzioni campione che descrivono il processo.

Ad esempio, se si considera la raccolta di funzioni campione (detta anche *insieme*) che costituiscono un processo casuale, il *valore medio* (*momento del primo ordine*) del processo casuale ad un certo istante t , può essere calcolato prendendo il valore istantaneo di ogni funzione campione dell'insieme all'istante t , sommando i valori e dividendo per il numero delle funzioni campione. Similmente, una correlazione tra i valori del processo casuale in due istanti diversi (detta *funzione di autocorrelazione*) può essere calcolata prendendo la media sull'insieme del prodotto dei valori delle funzioni agli istanti t e $(t + \tau)$. Pertanto, per il processo casuale $\{x(t)\}$, dove il simbolo $\{ \}$ è usato per indicare un insieme di funzioni campione, il valore medio $\mu_x(t_1)$ e la funzione di autocorrelazione $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau)$ sono dati dalle seguenti espressioni:

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N x_k(t_1)$$

$$R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \cdot x_k(t_1 + \tau)$$

Nel caso generale in cui $\mu_x(t_1)$ e $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau)$ varino al variare di t_1 , il processo casuale $\{x(t)\}$ è detto *non stazionario*. Nel caso particolare in cui $\mu_x(t_1)$ e $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau)$ non varino al variare di t_1 , il processo casuale $\{x(t)\}$ è detto *debolmente stazionario* o stazionario in senso lato. Per processi casuali debolmente stazionari il valore medio è costante e la funzione di autocorrelazione dipende solo dallo spostamento temporale τ . Ossia $\mu_x(t_1) = \mu_x$ e $R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = R_{xx}(\tau)$.

Le proprietà di un processo casuale possono essere determinate calcolando le medie sull'insieme in corrispondenza di specifici istanti, nella maggior parte dei casi, tuttavia, è anche possibile descrivere le proprietà di un processo casuale stazionario calcolando le medie nel tempo lungo di una specifica funzione campione dell'insieme.

Si consideri, ad esempio, la k -esima funzione di un insieme. Il valore medio $\mu_x(k)$ e la funzione di autocorrelazione $R_{xx}(\tau, k)$ della k -esima funzione campione sono dati da:

$$\mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x_k(t) dt$$

$$R_{xx}(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x_k(t) \cdot x_k(t + \tau) dt$$

Se il processo $\{x(t)\}$ è stazionario e $\mu_x(k)$ e $R_{xx}(\tau, k)$ non differiscono se calcolate lungo diverse funzioni campione, il processo casuale è detto *ergodico*. Per i processi ergodici il valore medio e la funzione di autocorrelazione, mediati nel tempo, (così come altre proprietà mediate nel tempo) sono uguali ai corrispondenti valori mediati sull'insieme. Vale a dire $\mu_x(k) = \mu_x$ e $R_{xx}(\tau, k) = R_{xx}(\tau)$. Si noti che solo i processi casuali stazionari possono essere anche ergodici.

I processi casuali ergodici costituiscono chiaramente una classe importante di processi casuali, perché tutte le loro proprietà possono essere determinate eseguendo medie temporali lungo una singola funzione temporale. Fortunatamente, in pratica i dati casuali che rappresentano fenomeni fisici stazionari sono generalmente ergodici.

I processi casuali non stazionari comprendono tutti i processi che non soddisfano i requisiti di stazionarietà definiti precedentemente. In generale, le proprietà di un processo casuale non stazionario variano con il tempo e, pertanto, possono essere valutate solo eseguendo medie sull'insieme delle funzioni campione che costituiscono il processo.

Registrazioni campione stazionarie

Il concetto di stazionarietà fa riferimento alle proprietà di un processo casuale mediate sull'insieme. Nella pratica, tuttavia, si fa spesso riferimento a dati ottenuti sotto forma di singole registrazioni temporali e se ne considera la stazionarietà o la non stazionarietà, introducendo un'interpretazione di stazionarietà leggermente diversa.

Infatti, quando si parla di stazionarietà di una singola registrazione temporale, si intende dire che le proprietà calcolate lungo un breve intervallo di tempo non variano significativamente da un intervallo a quello successivo. Il termine significativamente è qui usato per indicare che le variazioni osservate sono maggiori di quelle dovute alle normali variazioni statistiche relative al campionamento.

Nel caso generale in cui le proprietà del campione varino significativamente al variare di t , la singola registrazione campione è detta *non stazionaria*. Se invece, come caso particolare, le proprietà non variano significativamente al variare dell'istante t , la registrazione campione è detta *stazionaria*. Si noti che una registrazione campione ottenuta da un processo casuale ergodico è sempre stazionaria. Pertanto, se l'ipotesi di ergodicità è accettabile (come avviene per la maggior parte dei fenomeni fisici stazionari reali), la verifica della stazionarietà di una singola registrazione campione giustifica l'ipotesi di stazionarietà e di ergodicità del processo casuale da cui la registrazione campione è stata ottenuta.

Sistemi lineari a parametri costanti

Si definisce *sistema ideale* un sistema fisico a *parametri costanti* e *lineare*, tra due distinti punti: l'*ingresso* e l'*uscita*.

Un sistema è a parametri costanti se tutte le sue proprietà fondamentali sono invarianti rispetto al tempo; si dice lineare se le caratteristiche della risposta sono *additive* ed *omogenee*, cioè se:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$$

Le caratteristiche di un sistema a parametri costanti lineare possono essere descritte dalla *funzione risposta all'impulso unitario* $h(t)$, che è la risposta del sistema in un dato istante t ad un impulso unitario applicato all'istante $t - \tau$.

La conoscenza della funzione risposta all'impulso unitario permette di determinare la risposta $y(t)$ ad un impulso arbitrario $x(t)$, data dall'*integrale di convoluzione*:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau$$

Perché un sistema lineare a parametri costanti sia *fisicamente realizzabile* (o *causale*) è necessario che risponda solo ad impulsi che precedono l'istante t , dovrà essere:

$$h(\tau) = 0 \quad \text{per} \quad \tau < 0$$

Per il suddetto motivo, per i sistemi fisici, l'effettivo limite inferiore di integrazione deve essere 0 anziché $-\infty$.

Un sistema lineare a parametri costanti è detto *stabile* se ogni funzione limitata in ingresso produce una funzione limitata in uscita; ciò avviene se $h(\tau)$ è integrabile in valore assoluto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

Un sistema lineare a parametri costanti può anche essere caratterizzato dalla *funzione di trasferimento* $H(s)$, che è definita come la trasformata di Laplace della $h(\tau)$:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-s \cdot \tau} d\tau \quad s = a + i \cdot b.$$

Funzione di Risposta in Frequenza

Se un sistema lineare a parametri costanti è fisicamente realizzabile e stabile, le sue caratteristiche dinamiche possono essere descritte dalla *funzione risposta in frequenza* $H(f)$, definita come la trasformata di Fourier della $h(\tau)$:

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau$$

Se si considera la funzione risposta all'impulso unitario e si opera la trasformata di Fourier su entrambi i membri, si ottiene:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau \right) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau \right) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot (t + \tau - \tau)} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot (t - \tau)} d(t - \tau) = \\ &= H(f) \cdot X(f) \end{aligned}$$

dove $Y(f)$ ed $X(f)$ sono rispettivamente la trasformata di Fourier dell'uscita $y(t)$ e quella dell'ingresso $x(t)$.

Pertanto, la funzione risposta in frequenza è definita come il rapporto tra lo spettro del segnale di uscita e lo spettro del segnale di ingresso.

La funzione risposta in frequenza è generalmente una quantità complessa che può essere espressa in termini di ampiezza $|H(f)|$ e fase $\phi(f)$:

$$H(f) = |H(f)| \cdot e^{i \cdot \phi(f)}$$

La funzione risposta in frequenza di un sistema lineare a parametri costanti è funzione della sola frequenza e non del tempo o dell'eccitazione. Se il sistema fosse non lineare, $H(f)$ sarebbe funzione anche dell'eccitazione; se i parametri non fossero costanti, $H(f)$ sarebbe funzione anche del tempo.

Tecnica del filtraggio inverso

Il monitoraggio delle condizioni di funzionamento di un meccanismo a scopo diagnostico presuppone l'acquisizione continuativa dei segnali di vibrazione del cedente.

Tuttavia, nella maggior parte dei casi, può risultare difficile o addirittura impossibile montare il trasduttore di misura direttamente sul componente da analizzare in condizioni normali di esercizio, perciò risulta più conveniente acquisire un segnale dal telaio ed effettuare una ricostruzione di quello del cedente individuando una Funzione di Trasferimento (o "Funzione Filtro") che legghi, in modo univoco, i due movimenti vibratorii.

Se si affronta il problema del monitoraggio degli ingranaggi, per esempio, lo strumento certamente più sensibile all'errore di trasmissione è rappresentato dalla vibrazione torsionale delle ruote; le vibrazioni della cassa, invece, danno una misura della risposta della struttura alla forzante prodotta dal processo di ingranamento: i due fenomeni sono chiaramente legati tra loro in quanto prodotti dalla stessa fonte di eccitazione.

Il legame esistente tra l'oscillazione torsionale del cedente (una delle due ruote) e la vibrazione di un punto della scatola è una funzione dipendente dal percorso attraverso cui si propaga la vibrazione (alberi e cuscinetti).

La vibrazione torsionale, di interesse per il monitoraggio dello stato di salute della macchina, può essere quindi ricostruita, tramite opportuno filtraggio, partendo da un'acquisizione effettuata sulla cassa.

Il segnale accelerometrico rilevato dal cedente può essere considerato come la sua risposta alla legge di moto introdotta e, parimenti, le vibrazioni della cassa esterna in un dato punto rappresentano la risposta della struttura alla stessa eccitazione: in altri termini ci troviamo di fronte a due output del medesimo input.

1) possono considerarsi due Funzioni Risposta in Frequenza: $H'(f)$ è quella tra eccitazione $x(t)$ e risposta del telaio $y_a(t)$ e $H''(f)$ è quella tra eccitazione e risposta del cedente $y_b(t)$ in base alle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} H'(f) &= \frac{Y_a(f)}{X(f)} \\ H''(f) &= \frac{Y_b(f)}{X(f)} \end{aligned}$$

dove $X(f)$, $Y_a(f)$ ed $Y_b(f)$ sono rispettivamente le Trasformate di Fourier del segnale di eccitazione, di quello rilevato sul telaio e di quello rilevato sul cedente;

2) può definirsi una Funzione Risposta in Frequenza $H(f)$ tra la vibrazione del telaio e quella del cedente, come rapporto tra $H'(f)$ e $H''(f)$; nel caso specifico degli ingranaggi viene considerato come input il moto della ruota dentata da controllare e come output la vibrazione della scatola nel punto di applicazione del trasduttore:

$$H(f) = \frac{Y_a(f)}{Y_b(f)} = \frac{H'(f)}{H''(f)}.$$

Se si definisce *Funzione Filtro* il reciproco complesso $H^*(f)$ della Funzione Risposta in Frequenza $H(f)$, la ricostruzione del segnale del cedente si può ricavare dalla moltiplicazione complessa tra la misura della vibrazione della scatola e la Funzione Filtro:

$$Y_b(f) = H^*(f) \cdot Y_a(f)$$

In pratica non si riesce a conoscere con esattezza la Funzione Filtro a causa di errori di calcolo e di misura. In letteratura sono state presentate diverse tecniche di stima della Funzione Risposta in Frequenza, che si differenziano per il metodo di minimizzazione degli effetti del rumore.

Per la stima sperimentale della Funzione Filtro, si può procedere come segue. Si misura contemporaneamente il segnale vibratorio del cedente $y_b(t)$ e quello del telaio $y_a(t)$ in una posizione facilmente accessibile anche in condizioni normali di esercizio della macchina. Si valuta poi una stima della Funzione di Risposta in Frequenza e, tramite inversione, la stima della Funzione Filtro. E' sufficiente compiere questa operazione una sola volta per ciascuna macchina, individualmente considerata.

Durante il funzionamento della macchina si può acquisire in maniera continua il segnale vibratorio del telaio $y_a(t)$, al quale si applica la Trasformata di Fourier per ricavarne lo spettro in frequenza $Y_a(f)$, che, moltiplicato per la stima della Funzione Filtro, fornisce lo spettro della stima del segnale del cedente. La Trasformata Inversa di Fourier, infine, permette di completare la ricostruzione del segnale del cedente.

Gli operatori più frequentemente utilizzati per la stima della Funzione Risposta in Frequenza hanno le seguenti espressioni (vedere paragrafo relativo alla Densità Spettrale):

$$H_1 = \frac{G_{oi}}{G_{ii}}$$

$$H_2 = \frac{G_{oo}}{G_{io}}$$

dove:

G_{ii} = autospettro dell'input;

G_{oo} = autospettro dell'output;

G_{oi} = crosspettro tra output ed input; $G_{oi} = G_{io}^*$;

H_1 si utilizza quando sono presenti disturbi sull'output, H_2 se sono sull'input (vedere paragrafo relativo alla Densità Spettrale).

ELEMENTI DI TEORIA DELLA PROBABILITÀ

Alla base della teoria della probabilità si trova il concetto di *insieme*. Un insieme può essere inteso come una collezione di oggetti, detti *membri* o *elementi* dell'insieme. In particolare, i possibili risultati di un esperimento (o di una misura) rappresentano un insieme di *punti* detto *spazio dei campioni*. Questi punti possono essere raggruppati in vari modi, così da formare dei sottoinsiemi che prendono il nome di *eventi*.

In ogni esperimento casuale non sappiamo mai se un determinato evento si presenterà oppure no. Per misurare questa *probabilità* è conveniente assegnarle un numero compreso fra 0 e 1. Se siamo sicuri che l'evento si presenterà, diremo che la sua probabilità è pari al 100% o ad 1. Se, invece, siamo sicuri che l'evento non si verificherà, diremo che la sua probabilità è zero.

Esistono due importanti procedure mediante le quali è possibile stimare la probabilità di un evento:

— *approccio classico o a priori*. Se un evento si può verificare in h modi diversi su n possibili, essendo questi tutti ugualmente possibili, allora la probabilità di questo evento è h/n .

— *approccio frequentistico o a posteriori*. Se dopo aver ripetuto n volte un esperimento (con n molto grande) un evento si è verificato h volte, allora la probabilità di questo evento è h/n . Questa è anche chiamata *probabilità empirica* di un evento.

A ciascun punto dello spazio dei campioni appartenente ad un evento può essere assegnata una probabilità, che può variare da 0 ad 1.

Supponiamo, ora, che lo spazio dei campioni sia costituito dai possibili risultati di un esperimento (o di una misura). A ciascun punto k dello spazio dei campioni si può associare un numero reale $x(k)$ tra $-\infty$ e $+\infty$, che rappresenta il k -esimo risultato dell'esperimento o della misura. La $x(k)$ è una funzione definita nello spazio dei campioni ed è detta *variabile casuale*.

Quando la variabile casuale è continua si può definire la *funzione densità di probabilità* attraverso la seguente relazione differenziale:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\text{Prob}[x < x(k) \leq x + \Delta x]}{\Delta x} \right].$$

Valgono per la $p(x)$ le seguenti proprietà:

$$p(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

Il *valore medio* di una variabile casuale continua, definita da $-\infty$ a $+\infty$, può essere ottenuto, con passaggi al limite, mediante l'espressione

$$E[x(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx = \mu_x$$

dove il simbolo $E[\]$ rappresenta il valore atteso del termine entro parentesi.

Per una variabile aleatoria discreta, supponendo di fare n osservazioni della variabile aleatoria e costruendo una tabella nella quale in corrispondenza di ogni evento si riporti la frequenza corrispondente:

Valore osservato	Frequenza
x_1	f_1
x_2	f_2
\vdots	\vdots
x_k	f_k
totale eventi	n

si può definire una *media del campione* come la somma di tutte le n osservazioni divisa per n . Tale somma può essere costruita prendendo f_1 volte il valore x_1 , f_2 volte il valore x_2 e così via. Si ottiene:

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \dots + f_k \cdot x_k}{n}$$

dove $n = \sum_{r=1}^k f_r = f_1 + f_2 + \dots + f_k$.

Possiamo anche riscrivere l'espressione di \bar{x} nel modo seguente:

$$\bar{x} = \frac{f_1}{n} \cdot x_1 + \frac{f_2}{n} \cdot x_2 + \dots + \frac{f_k}{n} \cdot x_k.$$

Il valore della media \bar{x} ottenuta da un singolo campione fatto di n osservazioni è caratteristico di *quel campione* e fluttuerà da un campione ad un altro. Tuttavia, se si aumenta la dimensione n del campione, ci si può attendere una *stabilizzazione* del valore medio \bar{x} . Al crescere di n il rapporto f_r / n , che esprime la *frequenza relativa*, tende alla *probabilità* $p_r = P(x = x_r)$ e la media tende ad una costante caratteristica della distribuzione detta *valore atteso della variabile aleatoria*, $E(x)$:

$$E(x) = \sum_{r=1}^{\infty} p_r \cdot x_r.$$

Se la variabile aleatoria è continua, come può essere il risultato di un esperimento fisico, l'espressione del valore atteso diventa:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx$$

In modo del tutto analogo, il valore atteso o valor medio di ogni funzione reale, continua, ad un sol valore della variabile casuale $x(k)$, è dato da:

$$E[g(x(k))] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot p(x) dx.$$

In particolare, per $g(x) = x^2$, si ha il *valore quadratico medio* ψ_x^2 di $x(k)$:

$$E[x^2(k)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p(x) dx = \psi_x^2.$$

La radice quadrata di Ψ_x^2 è chiamata *valore efficace* o *valore rms* (root mean squared value).

La *varianza* è definita come il valore quadratico medio degli scarti di $x(k)$ rispetto al valore medio. In questo caso è $g(x) = (x - \mu_x)^2$:

$$E[(x(k) - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \cdot p(x) dx = \psi_x^2 - \mu_x^2 = \sigma_x^2.$$

Per definizione, la *deviazione standard* σ_x di $x(k)$ è la radice quadrata positiva della varianza. La deviazione standard è misurata nella stessa unità di misura del valore medio.

La funzione densità di probabilità rappresenta uno strumento di grande importanza per lo studio dei processi casuali. In particolare, ciò è vero nel caso delle vibrazioni casuali, dove il problema fondamentale consiste nel trovare come le caratteristiche statistiche (medie) del moto del sistema eccitato in modo casuale dipendano dai valori statistici dell'eccitazione e dalle caratteristiche dinamiche del sistema, ossia massa, rigidità e smorzamento.

Vediamo, dunque, come il concetto di funzione di densità di probabilità possa essere interpretato, da un punto di vista ingegneristico, nel caso delle vibrazioni casuali. Consideriamo una generica funzione campione rappresentante la storia temporale di un sistema sottoposto a vibrazioni casuali. Poiché il moto è casuale, non si può prevedere il valore esatto che assumerà la X ad ogni istante prescelto $t = t_0$. Ciò che possiamo fare, al massimo, è trovare la *probabilità* che X all'istante t_0 sia compreso entro certi limiti.

Se consideriamo, dapprima, una storia temporale deterministica del tipo $x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$, in questo caso, per ogni dato valore di t , possiamo prevedere esattamente il valore assunto da $x(t)$. Possiamo pertanto calcolare il tempo durante il quale la $x(t)$ assume i valori compresi tra due dati livelli della X ; durante un ciclo completo, la $x(t)$ giace nella banda da X a $x + dx$ per due intervalli di tempo, ciascuno di durata dt . Si ha:

$$dx = x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) dt$$

e quindi

$$dt = \frac{dx}{x_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)} = \frac{dx}{x_0 \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - \sin^2(\omega \cdot t)}} = \frac{dx}{x_0 \cdot \omega \cdot \sqrt{1 - x^2/x_0^2}}$$

La percentuale di tempo trascorso nella banda da X a $x + dx$ per ogni ciclo di durata T è:

$$\frac{2 \cdot (dt)}{T} = \frac{2 \cdot dx}{\omega \cdot T \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{dx}{\pi \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2}}$$

essendo $T = 2\pi/\omega$.

Se viene specificato un dato istante di tempo $t = t_0$, dato che la funzione è deterministica, possiamo calcolarne il corrispondente valore $x(t_0)$. Ma se supponiamo che t possa assumere un valore arbitrario, anziché poter prevedere il valore di X , potremo, al massimo, calcolare la probabilità che $x(t)$ sia compreso tra X e $x + dx$. Tale probabilità dipende dal tempo durante il quale, in un ciclo, la $x(t)$ si trova nell'intervallo indicato. La probabilità che sia $x \leq x(t_0) \leq x + dx$ è quindi data da:

$$\text{Prob}(x \leq x(t_0) \leq x + dx) = \frac{2 \cdot (dt)}{T} = \frac{dx}{\pi \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2}} \quad \text{per } -x_0 \leq x \leq x_0$$

La funzione densità di probabilità $p(x)$ può essere definita in modo tale che risulti

$$\text{Prob}(x \leq x(t_0) \leq x + dx) = p(x) dx$$

Pertanto, segue che

$$p(x) = \frac{1}{\pi \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2}} \quad \text{per } -x_0 \leq x \leq x_0$$

Si noti che l'area sottesa dalla curva della *densità di probabilità* fornisce il valore della probabilità.

Supponiamo, ora, che la $x(t)$ non sia più una funzione sinusoidale (deterministica), ma sia piuttosto la realizzazione di un processo casuale. Ciò significa che non possiamo conoscere in anticipo i valori che la $x(t)$ assumerà. Possiamo, al più, registrare tali valori in una storia temporale che si estende solo fino al momento attuale. Nell'ipotesi di un processo casuale stazionario, possiamo calcolare la funzione densità di probabilità con lo stesso procedimento seguito per una funzione deterministica.

Se in una storia temporale di una manifestazione di un processo casuale vengono determinate le frazioni temporali durante le quali si ha $x \leq x(t) \leq x + dx$, si potrà affermare che nel periodo di tempo T analizzato la $x(t)$ si trova

nell'intervallo da x a $x + dx$ per un tempo totale dato dalla somma di esse ($dt_1 + dt_2 + dt_3 + dt_4$). Pertanto, se T è sufficientemente lungo, possiamo dire che la densità di probabilità soddisfa la relazione

$$p(x) dx = \frac{(dt_1 + dt_2 + dt_3 + L)}{T} = \frac{\sum dt}{T}$$

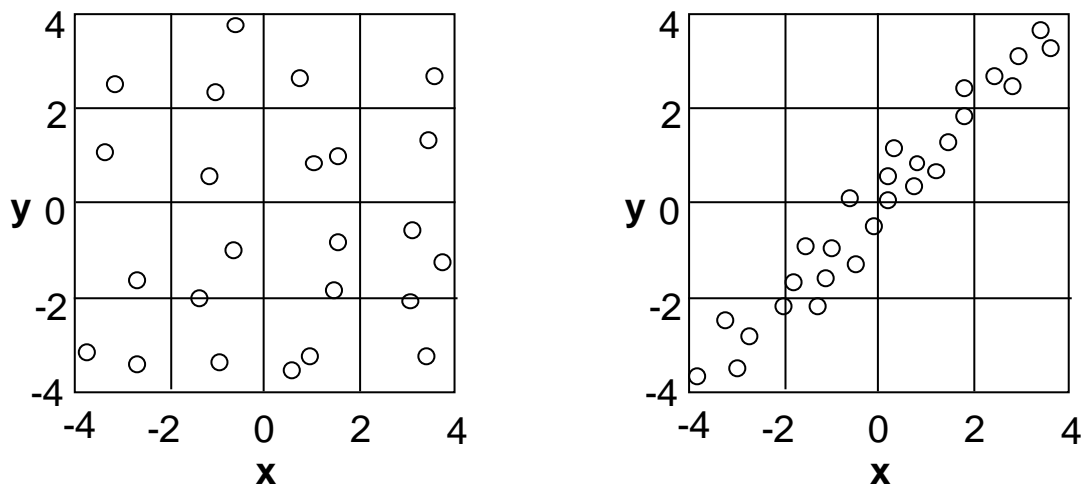
Affinché la suddetta espressione possa ritenersi matematicamente corretta, occorre pensare che l'intervallo T tenda all'infinito, mentre il processo si mantiene stazionario. Per una data registrazione campione, $p(x)$ potrebbe essere calcolata suddividendo la registrazione in tanti livelli diversi, misurando il tempo durante il quale la $x(t)$ si trova all'interno di ciascun intervallo. Alternativamente, si potrebbe campionare la registrazione ad intervalli uguali di tempo, molto piccoli, ottenendo N valori discreti della funzione. Detto h_x il numero dei campioni compresi nell'intervallo da x a $x + dx$, la densità di probabilità deve soddisfare la relazione

$$p(x) dx = \frac{h_x}{N}$$

E' interessante osservare che molti fenomeni naturali di vibrazioni casuali hanno una densità di probabilità di tipo gaussiano.

Correlazione

Consideriamo un insieme di coppie di valori di due variabili casuali x e y e supponiamo che ciascuna coppia sia rappresentata da un punto in un diagramma cartesiano.



Nella figura sinistra i valori di ciascuna coppia non evidenziano alcun andamento particolare, mentre quelli della figura destra mostrano una certa tendenza a disporsi in un modo definito. Infatti a grandi valori di x corrispondono grandi valori di y ed a piccoli valori di x corrispondono piccoli valori di y . Per tale ragione si dice che le variabili della figura destra sono *correlate*, mentre si dice che quelle della figura sinistra sono *non correlate*.

Se, desideriamo esprimere un legame funzionale tra x e y nella forma di una retta, possiamo rendere minimo lo scostamento dei valori effettivi della y da quelli forniti dalla approssimazione lineare. Se supponiamo, per semplicità, che i valori medi della x e della y siano nulli:

$$E[x] = E[y] = 0$$

allora la linea retta che approssima il legame funzionale tra i dati passa per l'origine e la sua equazione può essere scritta come:

$$y = m \cdot x$$

Lo scostamento di ogni valore y da quello approssimato mx è pertanto:

$$\Delta = y - m \cdot x$$

e il valore medio del quadrato dello scostamento vale:

$$E[\Delta^2] = E[(y - m \cdot x)^2] = E[y^2] + m^2 \cdot E[x^2] - 2 \cdot m \cdot E[x \cdot y]$$

che raggiunge il minimo quando si annulla la sua derivata rispetto ad m :

$$2 \cdot m \cdot E[x^2] - 2 \cdot E[x \cdot y] = 0$$

da cui si ricava

$$m = \frac{E[x \cdot y]}{E[x^2]}$$

Sostituendo il valore di m così ricavato, si ottiene:

$$y = \frac{E[x \cdot y]}{E[x^2]} \cdot x$$

D'altra parte, se $E[x] = E[y] = 0$, valgono le seguenti relazioni:

$$E[x^2] = \sigma_x^2 \quad E[y^2] = \sigma_y^2$$

e, pertanto:

$$\frac{y}{\sigma_y} = \left\{ \frac{E[x \cdot y]}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \right\} \cdot \frac{x}{\sigma_x}$$

che è l'equazione della *retta di regressione di y su x*. Alternativamente, se avessimo calcolato lo scostamento di x rispetto al valore approssimato dalla retta, avremmo ottenuto l'equazione della *retta di regressione di x su y*:

$$\frac{x}{\sigma_x} = \left\{ \frac{E[x \cdot y]}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \right\} \cdot \frac{y}{\sigma_y}$$

Se i valori medi di x e y sono diversi da zero, le suddette equazioni diventano

$$\frac{y - \mu_y}{\sigma_y} = \left\{ \frac{E[(x - \mu_x) \cdot (y - \mu_y)]}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \right\} \cdot \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} = \left\{ \frac{E[(x - \mu_x) \cdot (y - \mu_y)]}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \right\} \cdot \frac{y - \mu_y}{\sigma_y}$$

dove si è posto $E[x] = \mu_x$, $E[y] = \mu_y$; il parametro $\rho_{xy} = \frac{E[(x - \mu_x) \cdot (y - \mu_y)]}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$ è detto *coefficiente di correlazione* o anche *covarianza normalizzata*.

Le suddette espressioni rappresentano la stessa retta solo se $\rho_{xy} = \pm 1$, e in tal caso si ha una perfetta correlazione.

Se $\rho_{xy} = 0$ non c'è alcuna correlazione e le rette di regressione sono parallele agli assi x e y .

Autocorrelazione

La *funzione di autocorrelazione* per un processo casuale $\{x(t)\}$ è definita come il valor medio del prodotto $x(t) \cdot x(t + \tau)$. Il processo è campionato all'istante t e quindi di nuovo all'istante $t + \tau$, e il valor medio del prodotto $E[x(t) \cdot x(t + \tau)]$ è calcolato attraverso l'insieme. Se il processo è stazionario, il valore di $E[x(t) \cdot x(t + \tau)]$ è indipendente dal valore dell'istante t e dipende solo dal tempo di separazione τ . Pertanto si può porre:

$$E[x(t) \cdot x(t + \tau)] = f(\tau) = R_{xx}(\tau)$$

dove si è indicata con $R_{xx}(\tau)$ la funzione di autocorrelazione per $\{x(t)\}$.

Possiamo subito evidenziare alcune proprietà della funzione di autocorrelazione. Innanzitutto, se il processo casuale $\{x(t)\}$ è stazionario, il valor medio e la deviazione standard sono indipendenti da t :

$$E[x(t)] = E[x(t + \tau)] = \mu$$

$$\sigma_{x(t)} = \sigma_{x(t + \tau)} = \sigma$$

Il coefficiente di correlazione per $x(t)$ e $x(t + \tau)$ vale

$$\rho = \frac{E[\{x(t) - \mu\} \cdot \{x(t + \tau) - \mu\}]}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{E[x(t) \cdot x(t + \tau)] - \mu \cdot E[x(t + \tau)] - \mu \cdot E[x(t)] + \mu^2}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{R_{xx}(\tau) - \mu^2}{\sigma^2}$$

Essendo $-1 \leq \rho \leq 1$, si deduce che deve essere

$$-\sigma^2 + \mu^2 \leq R_{xx}(\tau) \leq \sigma^2 + \mu^2.$$

Quando τ tende a zero, la funzione di autocorrelazione tende al valore $E[x^2] = \psi^2$, valore quadratico medio.

Quando τ tende all'infinito, il coefficiente di correlazione ρ tende a zero, perché per un processo casuale non esiste alcuna relazione tra i valori di $x(t)$ e $x(t+\tau)$. Pertanto, se τ tende all'infinito, $R_{xx}(\tau)$ tende al quadrato del valor medio μ^2 . Infine, si può osservare che, se il processo è stazionario, è

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t) \cdot x(t+\tau)] = E[x(t-\tau) \cdot x(t)] = R_{xx}(-\tau)$$

e pertanto la $R_{xx}(\tau)$ è una funzione pari di τ .

Correlazione incrociata

Le funzioni di correlazione incrociata tra due diversi processi casuali stazionari $x(t)$ e $y(t)$ sono definite nel modo seguente:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t) \cdot y(t+\tau)]$$

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t) \cdot x(t+\tau)]$$

Poiché i processi sono stazionari, si ha:

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t) \cdot y(t+\tau)] = E[x(t-\tau) \cdot y(t)] = R_{yx}(-\tau)$$

$$R_{yx}(\tau) = E[y(t) \cdot x(t+\tau)] = E[y(t-\tau) \cdot x(t)] = R_{xy}(-\tau)$$

Ma, in generale, $R_{xy}(\tau)$ e $R_{yx}(\tau)$ non sono uguali e, pertanto, le funzioni di correlazione incrociata non sono funzioni pari rispetto a τ .

Analogamente a quanto visto per la funzione di autocorrelazione, le funzioni di correlazione incrociata si possono esprimere in termini di covarianza normalizzata:

$$R_{xy}(\tau) = \sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \rho_{xy}(\tau) + \mu_x \cdot \mu_y$$

$$R_{yx}(\tau) = \sigma_y \cdot \sigma_x \cdot \rho_{yx}(\tau) + \mu_y \cdot \mu_x$$

dove:

$$\rho_{xy} = \frac{E[(x(t) - \mu_x) \cdot (y(t+\tau) - \mu_y)]}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$\rho_{yx} = \frac{E[(y(t) - \mu_y) \cdot (x(t+\tau) - \mu_x)]}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

e poiché i valori limite della covarianza sono ± 1 , si ottiene

$$-\sigma_x \cdot \sigma_y + \mu_x \cdot \mu_y \leq R_{xy}(\tau) \leq \sigma_x \cdot \sigma_y + \mu_x \cdot \mu_y$$

Per la maggior parte dei processi casuali è logico attendersi che non vi sia alcuna correlazione quando il tempo di separazione τ tende all'infinito. Pertanto si ha:

$$R_{xy}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow \mu_x \cdot \mu_y$$

$$R_{yx}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow \mu_y \cdot \mu_x$$

Potenza

Il valore quadratico medio di un processo casuale $\{x_k(t)\}$ viene anche indicato come *potenza* del processo:

$$\bar{P} = E[x^2(t)]$$

Densità spettrale

La storia temporale $x(t)$ di una funzione campione, appartenente ad un processo casuale che si svolge in modo naturale, non è periodica e pertanto non può essere rappresentata mediante una serie di Fourier. D'altra parte, se il processo è stazionario, la $x(t)$ procede indefinitamente e la condizione

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

non è soddisfatta. In generale, quindi, non è possibile valutare la trasformata di Fourier della $x(t)$ al fine di ottenere informazioni sul contenuto in frequenza del processo casuale. Questa difficoltà può essere superata eseguendo la

trasformata di Fourier non della funzione campione del processo medesimo, ma della sua funzione di autocorrelazione $R_{xx}(\tau)$, che, indirettamente, contiene le informazioni sulle frequenze presenti nel processo.

Se lo zero del processo casuale è normalizzato o adattato in modo tale che il valor medio del processo $\mu = E[x(t)]$ sia uguale a zero, allora, purché la $x(t)$ non abbia componenti periodiche, si ha:

$$R_{xx}(\tau \rightarrow \infty) = 0$$

e risulta, pertanto, verificata la condizione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{xx}(\tau)| d\tau < \infty.$$

Si possono, quindi, applicare alla $R_{xx}(\tau)$ le trasformate diretta e inversa di Fourier:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega$$

o, in termini di frequenza:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) \cdot e^{i2\pi f\tau} df$$

La funzione $S_{xx}(\omega)$ o $S_{xx}(f)$ è detta *funzione di densità spettrale* o *autospettro* della $x(t)$.

Una delle più importanti proprietà della $S_{xx}(f)$ si deduce ponendo $\tau = 0$:

$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df = E[x^2] = \Psi_x^2$$

Il valore quadratico medio di un processo casuale stazionario è pertanto dato dall'area compresa sotto la curva rappresentante la $S_{xx}(f)$ in funzione di f . Si può anche osservare che, essendo la $R_{xx}(\tau)$ una funzione pari, la S_{xx} risulta essere una funzione reale e pari nella ω o nella f . Si può, inoltre, dimostrare che la S_{xx} non è mai negativa.

E' conveniente definire una funzione definita solo nell'intervallo di frequenze compreso tra 0 e $+\infty$:

$$G_{xx}(f) = 2 \cdot S_{xx}(f) \quad \text{per } 0 \leq f < \infty$$

Procedendo in modo analogo, date due funzioni campione $x(t)$ e $y(t)$ appartenenti a due processi casuali stazionari, si possono definire *funzioni di densità spettrale incrociata* o *spettri incrociati* (cross-spettri) a partire dalle funzioni di correlazione incrociata $R_{xy}(\tau)$ e $R_{yx}(\tau)$. Si ha:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$S_{yx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$R_{yx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_{yx}(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega$$

o, in termini di frequenza:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) \cdot e^{i2\pi f\tau} df$$

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{yx}(f) \cdot e^{i2\pi f\tau} df$$

La *densità di potenza spettrale incrociata* (cross spettro) è definita come:

$$G_{xy}(f) = 2 \cdot S_{xy}(f) = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \cdot e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (0 \leq f < \infty)$$

La $G_{xy}(f)$ è una quantità complessa.

Poiché l'area sottesa dalla funzione densità di potenza spettrale $G_{xx} = 2S_{xx}$ è uguale al valore quadratico medio Ψ_x^2 , si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$G_{xx}(f) \cdot \Delta f = \Psi_x^2(f)$$

$$G_{xx}(\omega) \cdot \Delta \omega = \Psi_x^2(\omega)$$

dove $\Psi_x^2(f)$, per Δf o $\Delta \omega$ sufficientemente piccoli, rappresenta il valore quadratico medio associato alla sola generica frequenza f , ossia $\Psi_x^2(f)$ rappresenta la quota parte di valore quadratico medio filtrato alla frequenza f di banda.

Si può dimostrare che la $G_{xx} = 2 \cdot S_{xx}$ è una grandezza reale. Si ha infatti:

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau$$

ossia

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot [\cos(\omega \cdot \tau) - i \cdot \sin(\omega \cdot \tau)] d\tau$$

Ma l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) d\tau$$

può essere sviluppato nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) d\tau &= \int_{-\infty}^0 R_{xx}(\tau) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) d\tau + \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 R_{xx}(\tau) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) d\tau - \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 R_{xx}(\tau) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) d\tau + \int_{-\infty}^0 R_{xx}(-\tau) \cdot \sin(\omega \cdot (-\tau)) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^0 R_{xx}(\tau) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) d\tau - \int_{-\infty}^0 R_{xx}(\tau) \cdot \sin(\omega \cdot \tau) d\tau = 0 \end{aligned}$$

Resta pertanto il termine reale

$$S_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau = 2 \cdot \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

ossia

$$G_{xx}(\omega) = 2 \cdot S_{xx}(\omega) = 4 \cdot \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

Mentre per una generica funzione periodica $x(t)$ è possibile definire uno spettro a righe complesso, in cui la generica armonica è costante in ampiezza e fase, per una funzione casuale la funzione densità di potenza spettrale definisce soltanto il valore quadratico medio delle ampiezze delle singole armoniche, senza poter fornire alcuna informazione relativa alla fase.

Note le funzioni di densità di potenza spettrale e di densità spettrale incrociata, è possibile definire la funzione *coerenza* (densità spettrale incrociata adimensionalizzata) nel modo seguente:

$$\gamma_{xy}^2 = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f) \cdot G_{yy}(f)}$$

Il valore della funzione è sempre compreso tra 0 e 1: $0 \leq \gamma_{xy}^2 \leq 1$.

Gli autospettri e gli spettri incrociati trovano frequente utilizzazione nello studio del comportamento dinamico dei sistemi lineari e, particolarmente, nella stima della Funzione di Risposta in Frequenza $H(f)$: per i sistemi fisici ideali, ove siano completamente note l'eccitazione $x(t)$ e la risposta $y(t)$ del sistema, la funzione risposta in frequenza è definita da:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}.$$

In presenza di rumore, la misura dei segnali di ingresso e di uscita del sistema non fornisce i valori effettivi dell'eccitazione e della risposta: è però possibile pervenire ad una stima della $H(f)$ attraverso la conoscenza degli autospettri G_{xx} e G_{yy} e degli spettri incrociati G_{xy} e G_{yx} .

Per un sistema ideale possiamo scrivere:

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

moltiplicando entrambi i membri per gli i coniugati degli spettri $X^*(f)$ oppure per $Y^*(f)$, si ottengono le seguenti relazioni tra autospettri e spettri incrociati:

$$G_{xy} = H \cdot G_{xx}$$

e

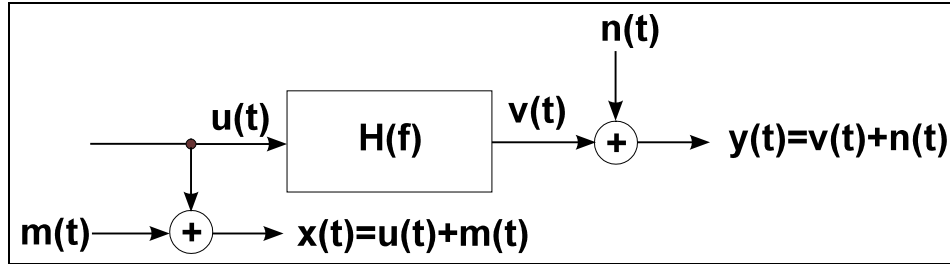
$$G_{yy} = H \cdot G_{yx}.$$

Consideriamo, ora, un sistema fisico lineare a parametri costanti sottoposto ad una eccitazione $u(t)$ alla quale corrisponde una risposta $v(t)$, note le quali si può definire la risposta in frequenza $H(f)$ come:

$$H(f) = \frac{V(f)}{U(f)}$$

essendo $U(f)$ e $V(f)$ le trasformate di Fourier di $u(t)$ e $v(t)$.

Supponiamo che le misure dell'eccitazione e della risposta, indicate rispettivamente con $x(t)$ e $y(t)$, siano affette da errore per la presenza di rumore all'ingresso e all'uscita.



In generale, nei sistemi reali si riesce a limitare notevolmente il rumore in ingresso, ottenendo così una misura dell'eccitazione molto prossima a quella reale. In uscita le cose non vanno altrettanto bene, in quanto di solito risulta difficile sia controllare il rumore generato nel sistema sia tener conto delle eventuali non linearità. Si avrà, pertanto:

$$x(t) = u(t)$$

e

$$y(t) = v(t) + n(t)$$

Si ricavano le seguenti relazioni tra autospettri e spettri incrociati:

$$\begin{aligned} G_{xx} &= G_{uu} \\ G_{yy} &= G_{vv} + G_{nn} + G_{vn} + G_{nv} \\ G_{xy} &= G_{uv} + G_{un} \end{aligned}$$

Se supponiamo che il rumore in uscita sia correlato solo con se stesso, gli spettri incrociati G_{vn} , G_{nv} e G_{un} sono nulli e pertanto le equazioni precedenti diventano:

$$\begin{aligned} G_{xx} &= G_{uu} \\ G_{yy} &= G_{vv} + G_{nn} \\ G_{xy} &= G_{uv} \end{aligned}$$

Ricordando la (3.12.19), la funzione risposta in frequenza può essere espressa come:

$$H = \frac{G_{uv}}{G_{uu}} = \frac{G_{xy}}{G_{xx}}.$$

ACQUISIZIONE ED ELABORAZIONE DEI DATI

Le tecniche di acquisizione ed elaborazione dei dati dipendono in larga misura dal fenomeno fisico che li genera e dal fine che si vuole conseguire attraverso l'elaborazione. In generale, però, le operazioni richieste si possono raggruppare in quattro categorie principali: acquisizione, registrazione, preparazione e analisi.

Acquisizione

L'elemento fondamentale che interviene in questa operazione è il *trasduttore*. In generale, con tale termine si designa ogni dispositivo che opera una trasformazione tra grandezze fisiche diverse. In particolare, esso ha lo scopo di trasformare la misura di un fenomeno fisico di interesse in un segnale analogico, secondo una relazione nota tra le quantità in ingresso e in uscita. La trasformazione può comprendere tre operazioni fondamentali: a) conversione della quantità fisica di interesse in una quantità meccanica intermedia; b) conversione della quantità meccanica intermedia in una quantità elettrica intermedia; c) conversione della quantità elettrica intermedia in una quantità elettrica finale, di solito una tensione.

Il trasduttore dovrebbe eseguire le operazioni sopra indicate senza modificare la storia temporale della grandezza in ingresso. In altri termini, detta $x(t)$ la storia temporale in ingresso e $y(t)$ quella in uscita, se c è una costante di calibrazione, si dovrebbe avere $y(t) = c x(t)$. Sfortunatamente questa è solo una situazione ideale, perché in pratica si ha sempre a che fare con non linearità e distorsioni che rappresentano una sorgente di errore in ogni acquisizione.

Registrazione

La maggior parte dei registratori commerciali ha il seguente principio di funzionamento: un film plastico rivestito di materiale magnetico scorre sopra una testina di registrazione. Se una corrente passa attraverso l'avvolgimento della testina, si genera un flusso magnetico che magnetizza le particelle depositate sul nastro. Quando il nastro passa davanti alla testina di riproduzione, si genera una tensione proporzionale alla velocità di variazione del flusso magnetico.

La registrazione magnetica dei dati può anche essere eseguita con il metodo PCM (*pulse code modulation*). In questo caso il segnale analogico è immediatamente convertito in un codice digitale, che viene registrato come una sequenza di impulsi corrispondenti al valore dei bit di quantizzazione del segnale campionato. In fase di riproduzione, opportuni dispositivi elettronici ricostruiscono il segnale analogico a partire dal codice digitale.

Preparazione

L'operazione più importante in questa fase è la conversione del segnale analogico, proveniente dal trasduttore o dal registratore, in un segnale digitale (*digitalizzazione*). La digitalizzazione avviene in due fasi; a) il campionamento e b) la quantizzazione. Il campionamento consiste nel definire gli istanti di tempo in corrispondenza dei quali i dati devono essere osservati, mentre la quantizzazione è la conversione del valore dei dati in una forma numerica.

Per effettuare correttamente il campionamento occorre considerare due teoremi fondamentali, detti *teoremi del campionamento nel dominio delle frequenze e nel dominio del tempo*.

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE

Consideriamo una registrazione campione $x(t)$, realizzazione fisica di un processo casuale $\{x_k(t)\}$, e supponiamo che sia definita nell'intervallo $0 \leq t \leq T$, mentre sia uguale a zero altrove. Esiste, allora, la trasformata di Fourier della $x(t)$

$$X(f) = \int_0^T x(t) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

Supponiamo, ora, di ripetere indefinitamente la $x(t)$ nel tempo: otteniamo una funzione periodica di periodo T , che può essere espressa mediante la serie di Fourier con frequenza fondamentale $f_0 = 1/T$:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t}$$

dove

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t} dt$$

Se sono noti i valori della trasformata di Fourier della $x(t)$ in corrispondenza di multipli interi della frequenza fondamentale $f_0 = 1/T$, si può scrivere:

$$X(n \cdot f_0) = \int_0^T x(t) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t} dt = T \cdot c_n$$

Per ricostruire la $x(t)$ è dunque sufficiente conoscere la $X(f)$ in corrispondenza di valori della frequenza distanti tra loro della quantità $f_0 = 1/T$. L'intervallo $f_0 = 1/T$ è detto *cointervallo di Nyquist*.

TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO NEL DOMINIO DEL TEMPO

Consideriamo una registrazione campione $x(t)$ per la quale esista la trasformata di Fourier, definita solo nell'intervallo $-B \leq f \leq B$. La $X(f)$ è allora data dalla trasformata inversa di Fourier

$$x(t) = \int_{-B}^B X(f) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

Supponiamo di ripetere indefinitamente la $X(f)$ nel dominio delle frequenze in modo da ottenere una funzione periodica della f , con periodo $2B$. Tale funzione potrà essere sviluppata in serie di Fourier secondo la seguente espressione:

$$X(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{d}_n e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f / (2 \cdot B)}$$

con

$$\underline{d}_n = \frac{1}{2 \cdot B} \cdot \int_{-B}^B X(f) e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot f / (2 \cdot B)} df$$

Se la $x(t)$ è nota in corrispondenza di istanti di tempo separati dall'intervallo $1/(2 \cdot B)$, per un generico istante $t_n = n / (2 \cdot B)$ si ha:

$$x\left(\frac{n}{2 \cdot B}\right) = \int_{-B}^B X(f) \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n / (2 \cdot B)} df = 2 \cdot B \cdot \underline{d}_n$$

Per ricostruire la $X(f)$ è quindi sufficiente conoscere la $x(t)$ in corrispondenza di punti separati dall'intervallo $1/2B$. Tale intervallo prende il nome di *intervallo di Nyquist*.

In conclusione, se $x(t)$ e $X(f)$ esistono e sono definite, rispettivamente, negli intervalli $0 \leq t \leq T$ e $-B \leq f \leq B$, allora è sufficiente campionare una delle funzioni in un numero limitato N di punti per conoscere completamente l'altra. Si ha, infatti:

campionamento nel dominio del tempo: $N = \frac{T}{1/(2 \cdot B)} = 2 \cdot B \cdot T$

campionamento nel dominio delle frequenze: $N = \frac{2 \cdot B}{1/T} = 2 \cdot B \cdot T$

La condizione che la $x(t)$ sia definita nell'intervallo $0 \leq t \leq T$ e che, contemporaneamente, la sua trasformata di Fourier sia limitata al campo di frequenze $-B \leq f \leq B$ non è teoricamente possibile. Tuttavia, nella pratica è possibile avvicinarsi a questa condizione utilizzando filtri passa banda.

Il campionamento dei segnali analogici è di solito eseguito ad uguali intervalli di tempo Δt .

Il numero minimo di campioni discreti necessari per descrivere una registrazione temporale di lunghezza T e di banda passante B è $N=2 \cdot B \cdot T$. Ne deriva che il massimo intervallo di campionamento è $\Delta t = T/N = 1/(2 \cdot B)$. Se si utilizzano punti di campionamento distanziati meno di $1/2B$ si ottengono campioni ridondanti con un inutile aggravio di calcolo.

Un importante aspetto del processo di digitalizzazione è quello indicato con il termine di *aliasing*. Esso costituisce una sorgente potenziale di errore che non si presenta nell'analisi diretta dei dati analogici, ma è inerente a tutti i processi digitali preceduti da una conversione analogico-digitale. Si può osservare che, per $t = 1/f_s$, si ha:

$$\cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_s}\right) = \cos\left(n \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{f_s}{f_s} \pm 2 \cdot \pi \cdot \frac{f}{f_s}\right) = \cos\left(2 \cdot \pi \cdot (n \cdot f_s \pm f) \cdot \frac{1}{f_s}\right)$$

Ciò dimostra che i dati aventi frequenza f possono essere confusi con dati aventi le frequenze $n \cdot f_s \pm f$.

Il fenomeno può alterare la forma reale degli autospettri, quando questi si estendono a frequenze superiori alla metà di quella di campionamento, valore che viene indicato come *frequenza di Nyquist*.

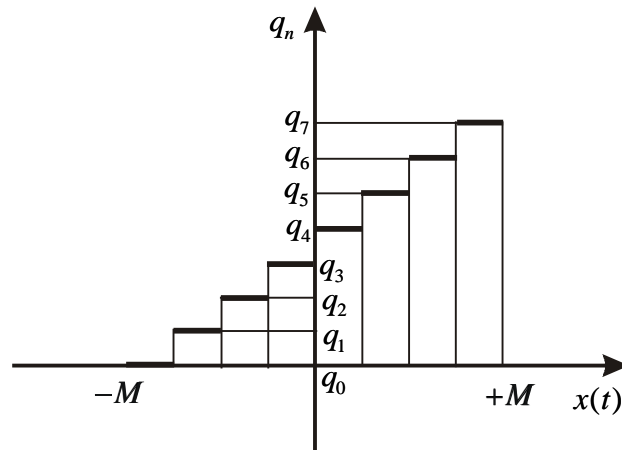
Il solo modo pratico per evitare l'errore di aliasing è quello di eliminare dai dati analogici tutte le informazioni a frequenze superiori a $f_s/2$. Ciò si fa utilizzando filtri analogici passa basso, detti anche *filtri antialiasing*, che eliminano il contenuto di segnale di frequenza superiore a quella di Nyquist. Siccome, poi, la funzione di risposta dei filtri non è mai di tipo rettangolare, ma presenta una certa pendenza in corrispondenza della frequenza di taglio, si suole porre quest'ultima ad un valore pari a circa il 70÷80 % della frequenza di Nyquist.

La seconda operazione fondamentale nella preparazione dei dati è la *quantizzazione*. Con questa operazione l'intervallo di variabilità $(-M, M)$ della funzione $x(t)$ viene suddiviso in un numero L finito di intervalli, detti *intervalli di quantizzazione*, a ciascuno dei quali viene fatto corrispondere un valore q_n . A tutti i valori x_n campionati dalla $x(t)$ e compresi nel generico intervallo i -esimo viene assegnato il valore q_i corrispondente all'intervallo stesso. La quantizzazione,

per quanto grande sia il numero dei livelli impiegati, introduce sempre un errore, detto *errore di quantizzazione*. Ovviamente tale errore è tanto più piccolo quanto più grande è il numero dei livelli.

L'errore di quantizzazione e_q varia nell'intervallo $-0.5\Delta x \leq e_q \leq 0.5\Delta x$, dove con Δx si è indicato l'incremento di quantizzazione. Se supponiamo, come è lecito, che l'errore di quantizzazione sia uniformemente distribuito nel suddetto intervallo, la sua funzione densità di probabilità vale

$$p(e_q) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} & (-0.5 \cdot \Delta x \leq e_q \leq 0.5 \cdot \Delta x) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Dato che la densità di probabilità è simmetrica rispetto ad $e_q = 0$, il valore medio di e_q è uguale a zero e la sua varianza vale

$$\sigma_{e_q}^2 = \int_{-0.5\Delta x}^{0.5\Delta x} (e_q - 0)^2 \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot de_q = \frac{1}{12} \cdot (\Delta x)^2$$

La deviazione standard dell'errore vale

$$\sigma_{e_q} = \sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \Delta x \approx 0.289 \cdot \Delta x$$

Poiché il valore medio di e_q è zero, la precedente equazione fornisce il valore rms dell'errore, che può essere considerato come un rumore sovrapposto al segnale desiderato, corrispondente al valore esatto della funzione nell'istante del campionamento. Se si indica con L il numero dei livelli di quantizzazione, il rapporto tra il valore di picco del segnale ed il rumore, così definito, vale

$$\frac{L \cdot \Delta x}{0.289 \cdot \Delta x}$$

La maggior parte dei convertitori analogico-digitali (ADC) produce un'uscita digitale in forma binaria e quindi il numero di livelli può essere espresso in funzione dei valori binari (bit) prodotti. Ad esempio, se un convertitore produce 12 bit, significa che il numero di livelli disponibili è $2^{12} = 4096$.

In pratica, l'errore di quantizzazione è di solito trascurabile rispetto ad altre sorgenti di errore nelle procedure di acquisizione e quantizzazione. E' opportuno, comunque, che il campo di variazione della variabile continua occupi il più ampiamente possibile il campo dei livelli disponibili al fine di avere la massima risoluzione possibile.

Una caratteristica importante dei convertitori ADC è la massima frequenza di campionamento. Attualmente sono disponibili convertitori commerciali con frequenze dell'ordine di varie centinaia di kHz. Si tenga presente, però, che se il convertitore opera su più canali, tale frequenza deve essere divisa per il numero dei canali. Inoltre, poichè il campionamento e la quantizzazione eseguita sequenzialmente su più canali introdurrebbe un inevitabile sfasamento, si opera usualmente su valori campionati contemporaneamente e memorizzati da opportuni circuiti *sample-hold*.

Analisi dei dati digitalizzati

I dati digitalizzati si presentano sotto forma di una serie temporale discreta $\{x_n\}$, che supporremo provenire da un processo stazionario ergodico. Siano N i dati della serie, uniformemente distanziati nel tempo di un intervallo Δt . Ciascuno dei valori della serie

$$\{x_n\} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

può essere associato ad un istante di tempo

$$t_n = t_0 + n \cdot \Delta t \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$$

La durata della registrazione rappresentata dai dati campionati è quindi $T_{\text{tot}} = (N-1) \cdot \Delta t$ e la frequenza di Nyquist è $\frac{f_s}{2} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t}$.

Una delle trasformazioni più frequentemente operate sui dati digitalizzati è la trasformata di Fourier. Consideriamo una serie temporale discreta $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ di N dati ottenuti campionando una registrazione temporale di lunghezza T con N punti. Supponiamo, ora, di replicare la registrazione campione indefinitamente nel tempo. Si otterrà una funzione periodica di periodo T , che potrà essere espressa in serie di Fourier.

I coefficienti dello sviluppo $x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t / T}$ valgono:

$$c_n = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t / T} dt$$

e, per la serie discreta

$$c_n = \frac{1}{N \cdot \Delta t} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot k \cdot \Delta t / T} \cdot \Delta t = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot e^{-i \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot k / N}$$

Il prodotto $X_n = N \cdot c_n$ viene indicato con il termine *Trasformata Discreta di Fourier* (DFT).

Si può osservare che i coefficienti c_n , per la registrazione campione continua, sono esprimibili anche come:

$$c_n = \frac{a_n - i \cdot b_n}{2}$$

$$\text{dove } a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t / T) dt \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t / T) dt.$$

Essendo, poi, $F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ l'ampiezza della componente n -esima della serie di Fourier, si ricava:

$$|c_n| = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{4}} = \frac{F_n}{2}$$

e quindi l'ampiezza della componente n -esima della DFT risulta essere:

$$|X_n| = N \cdot |c_n| = N \cdot \frac{F_n}{2}$$

A partire dal 1965, Cooley e Tukey introdussero un algoritmo, denominato "Fast Fourier Transform" o FFT, che riduce notevolmente il numero delle operazioni necessarie.

Si noti che, essendo $X(f_n) = X(f_{n-N})$, per $n > N/2$ vengono forniti, in ordine inverso, i valori della trasformata corrispondente alle frequenze negative. L'informazione sul contenuto in frequenza dei dati non si spinge oltre il valore $X(f_{N/2})$, corrispondente alla frequenza di Nyquist e i risultati sono unici solo per $n \leq N/2$.

Il numero N di dati usati per il calcolo della trasformazione (detto anche, con termine anglosassone, *block size*) è il parametro fondamentale per determinare la risoluzione dell'analisi, data da:

$$\Delta f = 1/T = 1/(N \cdot \Delta t)$$

Si noti che per una corretta applicazione della procedura FFT, è necessario prendere per N un numero pari ad una potenza di 2, ossia $N = 2^p$.

Una registrazione campione ha, come si è visto precedentemente, una durata finita. La sua trasformazione nel dominio delle frequenze implica una replica della registrazione nel dominio del tempo, così da ottenere una funzione periodica esprimibile mediante la serie di Fourier. La scelta della durata della registrazione, ossia del periodo della funzione, è determinante ai fini della rappresentazione nel dominio della frequenza. Infatti, se il periodo è tale da introdurre delle discontinuità nel dominio del tempo, queste daranno luogo, nel dominio delle frequenze, a numerose componenti vicine a quelle effettivamente presenti nel segnale. Tale fenomeno prende il nome di *leakage*, ossia dispersione.

L'inconveniente ora evidenziato può essere ridotto cercando di eliminare le discontinuità del segnale periodico. Ciò si ottiene moltiplicando la registrazione per una finestra temporale di forma generalmente cosinusoidale. Molto usata è la finestra di Hanning, ma vengono frequentemente impiegate anche la Hamming e la Blackman. Le citate finestre sono definite dalle seguenti espressioni:

$$\text{Hanning:} \quad w_{\text{hn}}(t) = 0.5 \cdot \left(1 - \cos \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T} \right) \right) \quad (0 < t < T)$$

$$\text{Hamming: } w_{\text{hm}}(t) = 0.54 - 0.46 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}\right) \quad (0 < t < T)$$

$$\text{Blackman: } w_{\text{bk}}(t) = 0.42 - 0.5 \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}\right) + 0.08 \cdot \cos\left(4 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}\right) \quad (0 < t < T)$$

Tecniche di analisi addizionali

Il prevalente impiego dell'analisi spettrale dei segnali, dovuta alle sempre maggiori potenzialità dei calcolatori elettronici e all'efficacia degli algoritmi su essi implementati, non deve far sottovalutare alcune importanti tecniche di analisi operanti nel dominio del tempo.

Fra queste, una delle più importanti è la *media sincrona*, che può essere usata sia per ridurre l'influenza del rumore, sia per mettere in evidenza talune componenti del segnale.

Vediamo, anzitutto, cosa si ottiene eseguendo una media temporale di campioni successivi di un segnale periodico, aventi lunghezza T_0 diversa da quella del periodo fondamentale o dei suoi multipli. I vari campioni di lunghezza T_0 possono essere considerati come estratti da un processo stocastico $\{y_r\}$ nel quale la variabile aleatoria è rappresentata dalla fase φ_r : la media stimata, quando il numero di medie tende all'infinito, tenderà a zero.

Quando la lunghezza del campione è uguale al periodo fondamentale o ad un suo multiplo la tecnica prende il nome di *media sincrona*: i segmenti successivi di segnale risultano tutti in fase e la media stimata su qualsiasi numero di campioni risulta uguale al segnale originale.

Nel caso in cui il segnale sia disturbato dalla presenza di rumore, che generalmente è caratterizzato da uno spettro a larga banda — e quindi senza periodicità caratteristiche —, la procedura sopra indicata permette di ridurne progressivamente l'influenza all'aumentare del numero delle medie.

La media sincrona permette anche di evidenziare talune componenti del segnale di frequenza uguale ad un valore prefissato o ad un suo multiplo.

Se la componente che interessa ha una frequenza *costante e nota* i campioni possono essere prelevati *consecutivamente*, con la condizione che essi siano di lunghezza pari ad un *multiplo intero* del periodo della componente stessa.

Se la frequenza della componente può variare nel tempo, come può accadere nel caso di organi rotanti con velocità angolare non rigorosamente costante, è necessario *sincronizzare* l'inizio dell'acquisizione con la componente in questione. Ciò si può fare utilizzando opportuni riferimenti collegati all'organo rotante.

Uno strumento operante nel dominio del tempo e particolarmente utile nell'analisi dell'involuppo è la *trasformata di Hilbert*.

Detta $x(t)$ una generica funzione del tempo, la sua trasformata di Hilbert, $\tilde{x}(t)$, è definita come:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \frac{1}{t - \tau} d\tau$$

essa equivale, a meno di $1/\pi$, alla convoluzione di $x(t)$ e $\frac{1}{t}$.

Utilizzando la trasformata di Hilbert si può costruire la cosiddetta *funzione analitica*, definita come:

$$\hat{x}(t) = x(t) + i \cdot \tilde{x}(t)$$

La funzione analitica è dunque una funzione complessa del tempo, con parte reale uguale al segnale reale $x(t)$ e parte immaginaria uguale alla trasformata di Hilbert del segnale.

L'ampiezza del segnale analitico vale:

$$|\hat{x}(t)| = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)}$$

e rappresenta l'*inviluppo* del segnale reale, che può essere determinato per estrapolare eventuali modulazioni indotte nel segnale vibratorio da particolari malfunzionamenti od imperfezioni.

La fase istantanea $\mathcal{G}(t)$ è data da:

$$\mathcal{G}(t) = \tan^{-1} \frac{\tilde{x}(t)}{x(t)}$$

mentre la sua derivata rispetto al tempo rappresenta la frequenza istantanea

$$f_i = \frac{d\mathcal{G}(t)}{dt}$$

Da un punto di vista diagnostico il segnale analitico permette di ricostruire le modulazioni di ampiezza e di fase.

Detta metodologia viene generalmente applicata sulla media sincrona della storia temporale allo scopo di eliminare eventuali periodicità non coinvolte nella modulazione: ciò avviene in applicazioni con ingranaggi, nelle quali la periodicità

della portante è multiplo di quella della modulante, perchè legate rispettivamente all'ingranamento ed alla rotazione di una delle ruote (la costante di proporzionalità è il numero di denti della ruota).

Se si indica con f_p la periodicità della portante, la media sincrona di un segnale non modulato può essere espressa come:

$$x_0(t) = \sum_{m=1}^M X_m \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_p \cdot t + \Phi_m)$$

dove X_m e Φ_m sono rispettivamente l'ampiezza e la fase dell' m -esima armonica della portante.

In caso di modulazioni di ampiezza $a_m(t)$ e di fase $b_m(t)$ con periodicità pari ad f_r , esprimibili analiticamente come segue:

$$a_m(t) = \sum_{n=1}^N A_{m_n} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_r \cdot t + \alpha_{m_n})$$

$$b_m(t) = \sum_{n=1}^N B_{m_n} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_r \cdot t + \beta_{m_n})$$

con A_{m_n} , B_{m_n} , α_{m_n} e β_{m_n} ampiezze e fasi della n -esima armonica della modulante della m -esima armonica della portante, la media sincrona del segnale modulato può essere espressa come:

$$x(t) = \sum_{m=0}^M X_m \cdot (1 + a_m(t)) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot m \cdot f_p \cdot t + \Phi_m + b_m(t))$$

Lo spettro nel dominio della frequenza mostra le armoniche della portante circondate da bande laterali di modulazione. Applicando un filtro passabanda attorno all' m -esima armonica della portante in modo da includere anche le rispettive bande laterali di modulazione, il segnale si riduce al seguente:

$$z(t) = X_k \cdot (1 + a_k(t)) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_p \cdot t + \Phi_k + b_k(t)).$$

Il segnale analitico corrispondente:

$$c_k(t) = z(t) + i \cdot \tilde{z}(t) = X_k \cdot (1 + a_k(t)) \cdot e^{i \cdot [2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_p \cdot t + \Phi_k + b_k(t)]}.$$

Le funzioni di modulazione di ampiezza e di fase si ricavano direttamente dalla parte reale e da quella complessa del segnale analitico:

$$a_k(t) = \frac{|c_k(t)|}{X_k} - 1$$

$$b_k(t) = \arg(c_k(t)) - (2 \cdot \pi \cdot k \cdot f_p \cdot t + \Phi_k)$$

A partire dagli anni '60 è stata sviluppata una nuova tecnica di analisi spettrale, assai potente, denominata *cepstrum* (anagramma di *spectrum*). Originariamente essa venne definita come "lo spettro di potenza dello spettro di potenza logaritmico", ossia come

$$c(\tau) = |F\{\log_{10} G_{xx}(f)\}|^2$$

dove il simbolo $F\{\}$ indica la trasformata di Fourier della funzione compresa entro le parentesi graffe e τ , indicato talvolta come "quefrenzy" (anagramma di "frequency"), ha le dimensioni di un tempo.

Esistono altre definizioni del *cepstrum*, come

$$c_p(\tau) = F^{-1}\{\log_{10} G_{xx}(f)\}$$

dove si definisce il *cepstrum* come la trasformata inversa di Fourier dello spettro di potenza logaritmico (*cepstrum di potenza*), oppure come

$$c_c(\tau) = F^{-1}\{\log_{10} F\{x(t)\}\}$$

ossia come l'antitrasformata di Fourier del logaritmo della trasformata di Fourier della funzione (*cepstrum complesso*). Nel caso in cui debbano essere mantenute le informazioni sulla fase è necessario utilizzare il *cepstrum complesso*.

Una delle peculiarità del *cepstrum* è la possibilità di mettere in evidenza le strutture periodiche contenute negli spettri, come, ad esempio, le armoniche e le bande laterali: questa caratteristica è molto utile in campo diagnostico.

Osservazione: il segnale vibratorio $y(t)$ – risposta di un sistema fisico ad un segnale di ingresso $x(t)$ – può essere ottenuto, come detto, operando una convoluzione tra il segnale di ingresso e la risposta $h(t)$ del sistema ad un impulso unitario:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t).$$

La convoluzione diviene un prodotto se si passa al dominio di frequenza:

$$Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

e quindi:

$$\left[Y(f)^* \cdot Y(f) \right] = \left[X(f)^* \cdot X(f) \right] \cdot |H(f)|^2$$

L'applicazione del logaritmo trasforma il prodotto in un'operazione di somma:

$$\log_{10} \left(\left[Y(f) \cdot Y(f) \right] \right) = \log_{10} \left(\left[X(f) \cdot X(f) \right] \right) + 2 \cdot \log_{10} \left(|H(f)| \right).$$

La linearità della *trasformata di Fourier* – e quindi della sua *inversa* – mantiene la somma anche nel dominio del *cepstrum di potenza*:

$$F^{-1} \left\{ \log_{10} \left(\left[Y(f) \cdot Y(f) \right] \right) \right\} = F^{-1} \left\{ \log_{10} \left(\left[X(f) \cdot X(f) \right] \right) \right\} + F^{-1} \left\{ 2 \cdot \log_{10} \left(|H(f)| \right) \right\}$$

e del *cepstrum complesso*:

$$F^{-1} \left\{ \log_{10} \left(Y(f) \right) \right\} = F^{-1} \left\{ \log_{10} \left(X(f) \right) \right\} + F^{-1} \left\{ \log_{10} \left(H(f) \right) \right\}$$

Dalle suddette espressioni risulta evidente che il *cepstrum* opera una separazione degli effetti dovuti alla sorgente $x(t)$ ed alla trasmissione $h(t)$: compiendo una semplice operazione di sottrazione e ripercorrendo a ritroso i calcoli si ha la possibilità di eliminare dalla risposta $y(t)$ una delle due componenti.

ANALISI SPERIMENTALE DELLE VIBRAZIONI

Da un punto di vista generale, la catena di misura è costituita dai seguenti elementi posti in successione:

- trasduttore;
- preamplificatore;
- condizionatore di segnale;
- convertitore analogico digitale;
- analizzatore di segnale.

La catena di misura può essere completata da altri dispositivi di visualizzazione dei risultati quali videoterminali, plotter e stampanti.

L'interposizione di un registratore magnetico o digitale tra preamplificatore e condizionatore di segnale permette di registrare i dati per effettuare analisi multiple con tecniche diverse.

Trasduttori

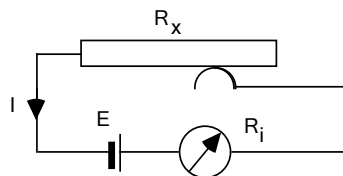
I trasduttori possono essere raggruppati in due grandi categorie: *trasduttori attivi* e *trasduttori passivi*.

— i *trasduttori attivi* convertono l'energia meccanica in ingresso in energia elettrica, senza bisogno di alcuna altra sorgente di energia esterna;

— i *trasduttori passivi* hanno bisogno di una sorgente esterna di energia.

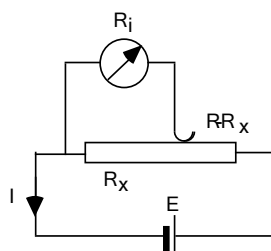
Trasduttori passivi

Trasduttori a resistenza variabile. Nei trasduttori a resistenza variabile uno spostamento in ingresso produce la variazione di una resistenza elettrica, che, a sua volta, determina una variazione di tensione o di corrente. La resistenza, che può essere costituita da un reostato, da un semiconduttore o da un estensimetro, è inserita in un circuito alimentato da una sorgente esterna.



Trasduttori potenziometrici. Per misurare spostamenti relativamente grandi si può usare un trasduttore potenziometrico, nel quale un cursore scorre su un resistore intercettando una tensione proporzionale allo spostamento. La tensione U_i misurata dal voltmetro, se la resistenza R del resistore è molto minore di quella dell'indicatore R_i , risulta proporzionale alla resistenza R_x , e quindi allo spostamento x del cursore.

I trasduttori potenziometrici sono usati, normalmente, per misurare vibrazioni a bassa frequenza e con grandi spostamenti (dell'ordine dei centimetri).



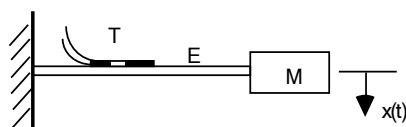
Estensimetri. Gli estensimetri sono costituiti da un elemento conduttore la cui resistenza elettrica varia quando viene sottoposto ad una deformazione. Essi, di solito, sono realizzati con una griglia di filo sottile incollata su un supporto isolante, che, a sua volta, viene cementato sulla superficie di cui si vuole misurare la deformazione.

La variazione relativa di resistenza dell'estensimetro $\Delta R/R$ risulta proporzionale, secondo un fattore k , alla deformazione ε :

$$\frac{\Delta R}{R} = k \cdot \varepsilon$$

Il fattore k è, di solito, fornito dal fabbricante e varia da 1.8 a 2.6, per estensimetri a filo metallico, fino a circa 150 per estensimetri a semiconduttore.

Incollando un estensimetro T sull'elemento flessibile E di un sistema massa-molla, si ottiene un rilevatore di vibrazioni, nel quale lo spostamento $x(t)$ della massa risulta proporzionale alla deformazione dell'elemento elastico e, quindi, alla variazione di resistenza ΔR dell'estensimetro. Tale variazione può, poi, essere misurata utilizzando un circuito a ponte di Wheatstone.



Sul principio sopra esposto si basa il trasduttore di accelerazione piezoresistivo.

Gli estensimetri, disposti a due a due sulla faccia superiore e su quella inferiore della mensola, sono collegati in un ponte di Wheatstone, che genera una tensione elettrica proporzionale alla deformazione della trave, a sua volta proporzionale al carico applicato. Questo, poi, essendo esclusivamente di natura inerziale, è proporzionale all'accelerazione della massa m .

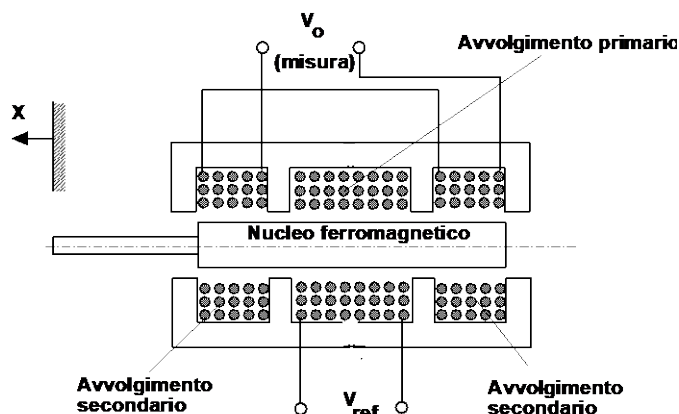
Uno dei principali vantaggi dell'accelerometro piezoresistivo risiede nella possibilità di misurare accelerazioni costanti.

Trasduttori capacitivi. Sono dispositivi costituiti sostanzialmente da un condensatore in cui la distanza tra le armature varia in conseguenza di uno spostamento meccanico (ingresso). Poiché la capacità di un condensatore, a parità di altre condizioni, è inversamente proporzionale alla distanza delle armature, si devono predisporre opportuni circuiti elettrici per ottenere una tensione di uscita proporzionale allo spostamento.

Trasduttori induttivi o a induttanza variabile. Questi dispositivi utilizzano il principio dell'induzione elettromagnetica. Quando la concatenazione di flusso magnetico attraverso un conduttore varia, nel conduttore stesso viene indotta una tensione, che, a sua volta, genera un campo magnetico opposto al primo. Per sostenere la variazione di flusso è necessario applicare una forza e, pertanto, si ha la conversione diretta di una energia meccanica in un'energia elettrica.

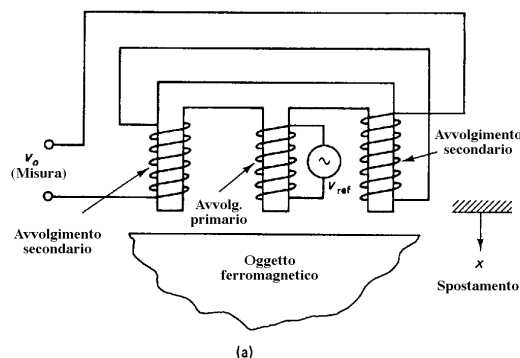
Esistono vari tipi di trasduttori induttivi. Tra i principali ricordiamo i *trasduttori a riluttanza variabile*, nei quali la riluttanza (resistenza magnetica) viene variata mediante materiali ferromagnetici non magnetizzati. Molto diffusi sono i trasformatori differenziali lineari variabili (LVDT) ed i trasduttori di prossimità. Entrambi sono costituiti, fondamentalmente, da due avvolgimenti, il *primario* ed il *secondario*. L'avvolgimento primario viene alimentato con una tensione alternata che induce una tensione alternata nel secondario. Il livello, ad esempio in termini di valore rms, della tensione indotta dipende dalla concatenazione di flusso tra i due avvolgimenti. La variazione di quest'ultimo viene ottenuta muovendo un oggetto di materiale ferromagnetico entro il flusso.

LVDT (Linear Variable Differential Transformer). Nella sua realizzazione più semplice l'LVDT è costituito da un involucro cilindrico, di materiale isolante non magnetico, che contiene un avvolgimento primario nella sezione centrale e due avvolgimenti secondari alle estremità.



L'avvolgimento primario è alimentato con una tensione alternata V_{ref} , che, per mutua induzione, genera una tensione alternata con la stessa frequenza negli avvolgimenti secondari. Il concatenamento del flusso magnetico avviene attraverso un nucleo ferromagnetico centrale, che può spostarsi assialmente. Poiché i due avvolgimenti secondari sono collegati in opposizione, quando il nucleo ferromagnetico si trova in posizione di simmetria la tensione indotta in questi due avvolgimenti è complessivamente nulla. Quando il nucleo si sposta di una quantità x la tensione misurata V_o risulta approssimativamente proporzionale allo spostamento, almeno fintanto che questo è piccolo.

Trasduttore di prossimità. Un nucleo ferromagnetico isolato a forma di E porta l'avvolgimento primario sul suo ramo centrale, mentre sui due rami esterni si hanno gli avvolgimenti secondari. Diversamente da quanto accade nell'LVDT, le tensioni degli avvolgimenti secondari in questo caso si sommano.



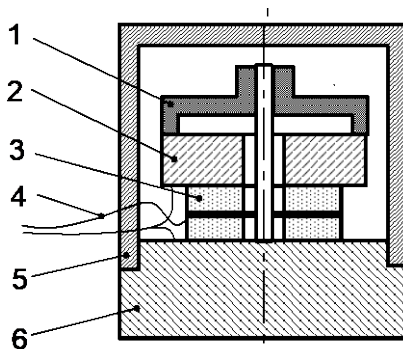
Il materiale che si trova affacciato agli avvolgimenti deve essere ferromagnetico, in modo che il suo spostamento possa produrre una variazione del flusso magnetico e quindi una variazione della tensione indotta negli avvolgimenti secondari. Si noti che mentre l'LVDT ha una configurazione di spostamento "assiale", il trasduttore di prossimità ha una configurazione di spostamento "trasversale" e quindi è particolarmente adatto per rilevare il movimento trasversale di travi, alberi, ecc.

Trasduttori attivi

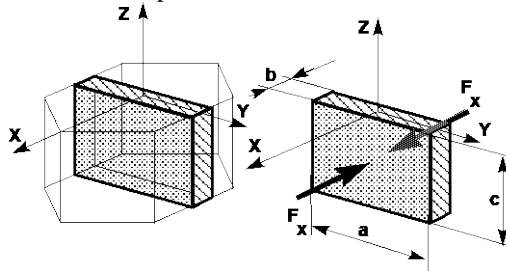
I principali trasduttori attivi usati nella misura delle vibrazioni sono quelli di tipo piezoelettrico.

Trasduttori piezoelettrici. Alcuni materiali, naturali o ceramici, hanno la proprietà di generare cariche elettriche quando vengono sottoposti a sollecitazioni meccaniche. I trasduttori operanti in base a questa proprietà, indipendentemente dal tipo di materiale usato (cristallo naturale o ceramica ferroelettrica polarizzata), vengono indicati con il termine di *trasduttori piezoelettrici*.

Un trasduttore piezoelettrico a massa sismica è costituito da una molla di precarico 1, una massa sismica 2, i dischi piezoelettrici 3, i terminali collegati alle superfici metalliche 4, tra le quali sono compressi i dischi, una lamina metallica intermedia, un involucro 5 ed una base 6.



Se si considera una lamina tagliata da un cristallo di quarzo e sottoposta ad una forza di compressione F_x nella direzione x perpendicolare alla faccia di massima ampiezza:



la carica q_x generata in seguito all'applicazione della forza F_x vale:

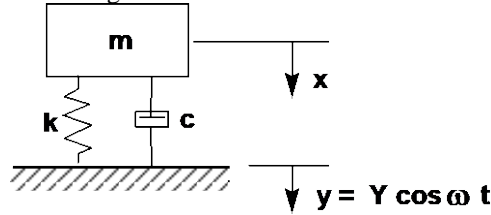
$$q_x = k \cdot F_x$$

La carica generata da una forza F_y parallela alla direzione y vale:

$$q_y = k \cdot \frac{a}{b} \cdot F_y$$

I trasduttori piezoelettrici sono *strumenti sismici*, ossia si basano sul moto relativo di una massa sospesa alla struttura vibrante mediante un elemento elastico.

Consideriamo un sistema vibrante ad 1 g.d.l.:



Lo spostamento relativo $s = x - y$ della massa rispetto alla base, che si muove con moto armonico $y = Y \cdot \cos(\omega \cdot t)$, è dato, a regime, da:

$$s = S \cdot \cos(\omega \cdot t - \psi)$$

dove:

$$S = \frac{Y \cdot \omega^2 / \omega_n^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad \tan \psi = \frac{2 \cdot \zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

avendo posto $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\zeta = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega_n}$.

Supponiamo, ora, che l'elemento viscoelastico interposto tra la massa e la base rappresenti il materiale piezoelettrico. La forza $f(t)$ ad esso applicata vale:

$$f(t) = k \cdot s + c \cdot \dot{s} = k \cdot S \cdot \cos(\omega \cdot t - \psi) - \omega \cdot c \cdot S \cdot \sin(\omega \cdot t - \psi) = F \cdot \cos(\omega \cdot t - \varepsilon)$$

Come abbiamo già visto, la carica elettrica generata è proporzionale a tale forza. Si può, ora, cercare il rapporto tra l'ampiezza della forza suddetta e quella dell'accelerazione della base $\ddot{y} = -\omega^2 Y \cos \omega t$, moltiplicata per la massa m . Indicato con η tale rapporto, si ha:

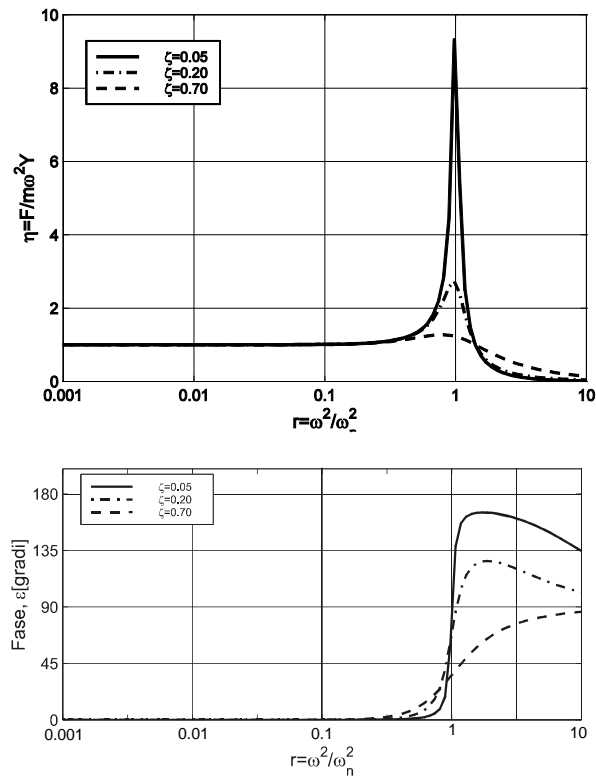
$$\eta = \frac{F}{m \cdot \omega^2 \cdot Y} = \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega / \omega_n)^2}}{\sqrt{(1 - \omega^2 / \omega_n^2)^2 + (2 \cdot \zeta \cdot \omega / \omega_n)^2}}$$

Lo sfasamento ε tra la forza e l'opposto dell'accelerazione è dato da

$$\varepsilon = \psi - \tan^{-1} (2 \cdot \zeta \cdot \omega / \omega_n)$$

Come si può osservare, il rapporto η è pressoché costante e uguale ad 1 per $\omega / \omega_n = f / f_n \ll 1$. Anche lo sfasamento, in tale campo, ha valori molto prossimi a zero.

La relazione tra forza, e quindi carica, ed accelerazione è solo approssimativamente lineare. Se fissiamo un errore massimo di linearità del 5%, possiamo vedere che il campo di frequenze utili si estende fino a circa 1/4 della frequenza naturale f_n .



L'accelerometro piezoelettrico è considerato, attualmente, il miglior trasduttore disponibile per la misura assoluta delle vibrazioni. Il suo largo impiego è giustificato dalle seguenti proprietà:

- può essere usato in campi di frequenza molto ampi
- ha una buona linearità su un campo dinamico esteso
- il segnale di accelerazione può essere integrato elettronicamente per ottenere la velocità e lo spostamento
- può essere usato in varie condizioni ambientali mantenendo una buona accuratezza
- è un trasduttore attivo e quindi non necessita di alimentazione
- non ha parti in movimento e quindi è estremamente robusto
- ha un ingombro molto contenuto.

Dal punto di vista costruttivo, gli accelerometri piezoelettrici possono essere di due tipi: accelerometri funzionanti a compressione ed accelerometri funzionanti a taglio.

L'accelerometro piezoelettrico può essere considerato sia come generatore di cariche elettriche, sia come generatore di tensione. Nel primo caso, la *sensibilità* dell'accelerometro, indicata con S_Q , viene espressa come la quantità di carica generata per unità di accelerazione e misurata in pC/ms^{-2} . Nel secondo caso, la sensibilità, indicata con S_V , viene espressa come la tensione generata per unità di accelerazione e misurata in mV/ms^{-2} .

Generalmente è conveniente considerare l'accelerometro come generatore di carica ed amplificare il segnale con un amplificatore di carica, perché in tal modo la sensibilità del sistema risulta indipendente dalla capacità dei cavi di collegamento.

Il campo di impiego di un accelerometro piezoelettrico è limitato verso le alte frequenze, come abbiamo visto, per problemi di linearità. Tale campo è però limitato anche inferiormente per problemi legati alla dispersione della carica nel trasduttore e nell'amplificatore. Il limite inferiore è tuttavia sempre piuttosto basso, dell'ordine di qualche frazione di hertz.

Il comportamento del sistema di misura costituito da accelerometro e preamplificatore in corrispondenza di transitori caratterizzati da livelli elevati, breve durata ed ampio contenuto in frequenza, come, ad esempio gli urti, può presentare non linearità nei campi delle basse e delle alte frequenze.

In corrispondenza di un impulso semisinusoidale, il sistema di misura può rispondere alle basse frequenze dando origine ad uno spostamento dello zero ("zero shifting"), dovuto sia a non linearità del preamplificatore, sia al trasduttore, che tende a trattenere le cariche dopo essere stato assoggettato ad urti di livello elevato. Il fenomeno si manifesta quando l'accelerometro è sollecitato a livelli prossimi a quelli massimi sopportabili. In tal caso, poiché gli elementi piezoelettrici non sono materiali perfettamente elastici quando la forza agente su di essi diminuisce rapidamente, le molecole possono non ritornare tutte contemporaneamente nello stato in cui si trovavano prima dell'applicazione della forza. Pertanto, anche quando la sollecitazione non è più presente, gli elementi continuano a produrre cariche che si disperdono lentamente nel tempo. Il fenomeno avviene in modo casuale e con segno casuale. Il tempo necessario affinché lo spostamento dello zero si annulli può essere anche 1000 volte più lungo del tempo dell'impulso originale e ciò può determinare sensibili errori se vengono effettuate operazioni di integrazione del segnale.

Per ovviare all'inconveniente sopra descritto si possono usare opportuni filtri meccanici. Tali dispositivi sono costituiti da una base meccanica, da collegare alla struttura vibrante, e da un corpo, da collegare all'accelerometro. Le due parti sono unite tramite un'anima di gomma ed il tutto funziona come un filtro passa-basso, che abbassa notevolmente il picco risonante dell'accelerometro a livelli di circa 3 o 4 dB al di sopra della sensibilità nominale.

In corrispondenza dello stesso tipo di eccitazione testé descritto, le componenti in frequenza più elevate possono eccitare la risonanza del trasduttore ("ringing").

Per un corretto funzionamento dell'accelerometro piezoelettrico è necessario che siano rispettate alcune essenziali condizioni ambientali.

Una di queste riguarda la temperatura. Un tipico accelerometro di impiego generale può sopportare temperature fino a 250 °C. A temperature superiori la ceramica piezoelettrica inizierà a depolarizzarsi, causando una perdita permanente di sensibilità. Se la temperatura non va oltre i 300 °C, il deterioramento è reversibile e vi si può porre rimedio con una ricalibrazione. Al di sopra di tale limite si ha la completa distruzione dell'elemento piezoelettrico. Esistono, tuttavia, accelerometri speciali adatti per temperature fino a 400 °C.

Quando l'accelerometro deve essere montato su una superficie che si trovi a temperatura superiore a quella massima consentita, si può utilizzare un dissipatore di calore ed una rondella di mica.

Possibili disturbi al segnale dell'accelerometro possono derivare dal cavo di collegamento con il preamplificatore. Le loro cause sono attribuibili solitamente a correnti di ritorno a terra, effetti tribologici, campi magnetici.

Le correnti di ritorno a terra si generano nella schermatura del cavo quando l'accelerometro e lo strumento di misura sono collegati a terra separatamente e fra le due masse esiste una differenza di potenziale.

Si può interrompere l'anello di corrente isolando l'accelerometro con una rondella di mica ed una vite isolata.

Gli effetti tribologici sono dovuti a movimenti del cavo durante la misurazione. Tali movimenti possono causare una separazione della schermatura dal rivestimento isolante del conduttore centrale e determinare, così, un campo elettrico variabile che genera un piccolo flusso di corrente nella schermatura. Si può ovviare all'inconveniente bloccando i cavi con nastro adesivo.

Infine, il cavo di collegamento può essere sede di disturbi elettromagnetici, provocati dalla vicinanza di macchine elettriche in funzione. In questi casi è opportuno adottare cavi a doppia schermatura.

Se l'accelerometro è montato su una superficie che si deforma sotto l'azione dei carichi applicati, è possibile che anche la base del trasduttore partecipi alla deformazione, trasmettendola all'elemento sensibile. Di conseguenza, saranno presenti all'uscita del trasduttore segnali spuri dovuti alla deformazione della base. Tale effetto viene minimizzato realizzando basi rigide ed elementi sensibili funzionanti a taglio e collegati non direttamente alla base, ma ad un perno ad essa solidale.

Altri fattori ambientali che possono influenzare la risposta dell'accelerometro sono le radiazioni nucleari, i campi magnetici, l'umidità, le sostanze corrosive, il rumore acustico. In generale, la sensibilità a tali fenomeni è trascurabile in condizioni normali. In condizioni estreme è opportuno ricorrere a soluzioni particolari suggerite dal fabbricante.

Montaggio dell'accelerometro. Il metodo di montaggio dell'accelerometro sul punto di misura rappresenta uno dei fattori più critici per l'accuratezza della misura. Un montaggio non corretto dà luogo ad una riduzione della frequenza di risonanza del trasduttore montato, che può limitare notevolmente il campo di frequenza utile dello strumento. Il montaggio ideale è quello che utilizza un grano filettato con il quale l'accelerometro viene avvitato su una superficie piana e liscia. Un leggero strato di grasso applicato sulle superfici di montaggio prima di serrare il collegamento filettato di solito migliora la rigidità dell'accoppiamento. Il foro filettato nella superficie di misura deve essere sufficientemente profondo per evitare forzamenti del grano nella base dell'accelerometro.

Un montaggio alternativo, comunemente usato, fa uso di un sottile strato di cera d'api mediante il quale l'accelerometro viene fissato alla superficie: la frequenza di risonanza viene ridotta di poco. La cera d'api può essere usata fino alla temperatura di 40 °C, oltre la quale rammollisce, e per accelerazioni fino a circa 100 m/s².

Come già accennato in precedenza, un altro possibile montaggio utilizza un grano filettato isolato ed una rondella di mica: questo metodo è seguito quando occorre isolare l'accelerometro per evitare correnti di ritorno a terra.

Quando su una macchina devono essere predisposti punti di misura fissi e non è possibile praticare fori filettati, si può ricorrere a grani filettati con piastrina di base che viene incollata alla superficie di misura. I collanti consigliati sono di tipo epossidico o cianoacrilico, perché forniscono uno strato sufficientemente rigido. Altri collanti molli sono da evitare, perché, essendo meno rigidi, riducono la frequenza di risonanza.

Si può usare un nastro doppio adesivo in presenza di superfici piane e lisce, ma in questo caso la frequenza di risonanza può diminuire notevolmente e tanto più quanto più spesso è il nastro.

Un magnete permanente costituisce un metodo di fissaggio estremamente semplice quando si ha una superficie di misura piana e ferromagnetica. Tale sistema isola elettricamente l'accelerometro e riduce notevolmente la frequenza di risonanza, per cui il suo campo di impiego deve essere limitato. La forza di serraggio del magnete garantisce l'accoppiamento fino a livelli di accelerazione di 1000÷2000 m/s², a seconda del tipo di accelerometro.

Infine, l'accelerometro può essere tenuto manualmente utilizzando un'astina appuntita che viene premuta contro la superficie di misura. Il metodo si presta per eseguire rapidi sondaggi, ma comporta il rischio di commettere errori grossolani.

L'accelerometro piezoelettrico ha una elevata impedenza e, pertanto, non può essere collegato direttamente agli strumenti di misura e di analisi. E' necessario interporre un preamplificatore con ingresso ad alta impedenza e uscita a bassa impedenza. Tale strumento, oltre alla funzione di conversione dell'impedenza, presenta, di solito, altre caratteristiche aggiuntive, quali l'amplificazione variabile, la possibilità di integrazione, la presenza di filtri passabanda, ecc.

I preamplificatori usati con gli accelerometri piezoelettrici sono di due tipi: preamplificatori di carica e preamplificatori di tensione. I preamplificatori di carica producono una tensione di uscita proporzionale alla carica in ingresso; i preamplificatori di tensione producono una tensione di uscita proporzionale alla tensione in ingresso.

DIAGNOSTICA

Nel campo della diagnostica gli indicatori maggiormente utilizzati sono quelli che derivano dall'analisi delle vibrazioni, condotta sia nel dominio del tempo che in quello della frequenza. Pertanto varie normative nazionali ed internazionali fanno riferimento al livello di vibrazione.

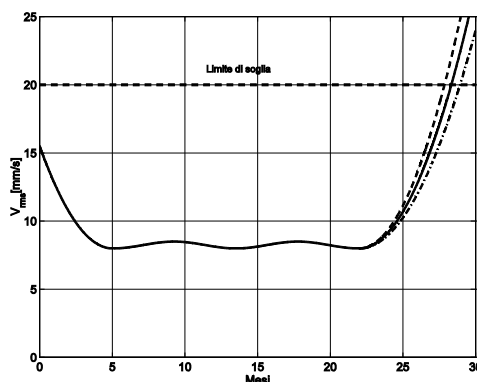
La ISO (International Organization for Standardization) si riferisce alla *severità di vibrazione*, che viene calcolata come il valore r.m.s. della velocità di vibrazione nell'intervallo da 10 a 1000 Hz:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T v^2(t) dt}$$

I punti di misurazione delle vibrazioni della macchina vanno scelti nelle zone di trasmissione dell'energia vibratoria: nelle macchine rotanti i trasduttori vengono posti sui supporti dei cuscinetti e nei punti di collegamento del basamento.

In generale, mediante una analisi condotta nel dominio del tempo è possibile riconoscere la progressione di un deterioramento in atto, ma non risulta agevole determinarne la natura. Se si assume come indicatore il valore efficace della velocità di vibrazione, v_{rms} , si può osservare che, dopo un primo breve periodo durante il quale si nota una leggera diminuzione del valore del parametro, dovuto ad un progressivo adattamento degli elementi cinematici delle coppie nuove, la velocità di vibrazione si mantiene quasi costante per un certo tempo, per aumentare, poi, con la progressione delle usure e la nascita dei primi danneggiamenti.

Predisponendo una serie di misure successive, ad intervalli fissi di tempo, è possibile, in base a queste, costruire una *curva di tendenza*: dalla curva di tendenza, mediante estrapolazione, si può prevedere il momento in cui il parametro in osservazione raggiungerà un valore di soglia e in corrispondenza del quale occorrerà adottare le opportune misure manutentive. Risulta evidente che l'estrapolazione può portare a risultati non univoci, con anticipo o ritardo rispetto al vero istante in cui sarà raggiunto il limite di soglia.



Questo tipo di manutenzione, detta *manutenzione predittiva*, racchiude in sé una incertezza legata al tipo di analisi sviluppata sui dati vibratorii: la semplice estrapolazione può condurre a risultati diversi e non sempre cautelativi. Infatti, essendo il parametro osservato di tipo globale, l'insorgere ed il progredire di taluni difetti può venir mascherato dalla presenza di componenti che si manifestano con maggiore intensità ma meno significative dal punto di vista diagnostico.

Maggiori informazioni, utili per la rilevazione dei difetti nascenti, si possono ottenere da un'analisi in frequenza. Infatti lo spettro delle vibrazioni di una macchina contiene sempre componenti associate a difetti, più o meno rilevanti, tipici dei vari organi che compongono il sistema (cuscinetti, alberi, ruote dentate, ecc.). In caso di funzionamento normale l'ampiezza di queste componenti si mantiene costante; ma in presenza di un difetto, quando questo progredisce, le componenti spettrali ad esso relative tendono ad aumentare in ampiezza. Pertanto, l'osservazione ed il confronto degli spettri ottenuti in istanti successivi permettono di rilevare la presenza di inconvenienti, anche quando il livello complessivo della vibrazione non risulta sensibilmente alterato.

Sono stati prodotti e commercializzati sistemi di monitoraggio che eseguono, in modo integrato, le funzioni di misura e registrazione delle vibrazioni, elaborazione degli spettri in frequenza, confronto degli spettri, analisi della tendenza e memorizzazione dei dati. I dati misurati vengono acquisiti direttamente sul calcolatore o registrati sul campo mediante registratori magnetici portatili, che devono avere campo di frequenze e dinamica sufficientemente elevati per poter catturare tutte le informazioni necessarie alla rilevazione dei difetti. Successivamente, il segnale viene trasformato nel dominio delle frequenze, per determinare l'autospettro.

L'analisi può essere fatta sia in *banda stretta*, sia in *banda percentuale costante*: nel primo caso la distanza tra le linee spettrali è costante e pari alla risoluzione dello spettro, ossia

$$f_0 = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N \cdot \Delta t}$$

con f_s frequenza di campionamento, N numero dei punti e Δt risoluzione temporale di campionamento; nel secondo caso, il campo di frequenza viene suddiviso in bande per le quali sia costante il rapporto tra l'ampiezza di banda e il valore della frequenza centrale. Ad esempio, si può fare in modo che gli estremi delle bande corrispondano a frequenze che stiano tra loro nel rapporto 1:2, ottenendo così le *bande di ottave*, ciascuna delle quali è identificata dalla propria *frequenza centrale* f_m , pari alla media geometrica degli estremi f_1 e f_2 :

$$f_2 = 2 \cdot f_1 \quad (\text{ottava})$$

$$f_m = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$$

L'intervallo di ottava può essere ulteriormente diviso, ottenendo, ad esempio, i *terzi di ottava*, nei quali il rapporto tra gli estremi di banda è pari a $\sqrt[3]{2} \approx 1.26$.

Il rapporto tra l'ampiezza di banda e la frequenza centrale vale

$$\rho = \frac{f_2 - f_1}{f_m} = \frac{f_2/f_1 - 1}{\sqrt{f_2/f_1}}$$

ed è ovviamente costante, dato che è costante il rapporto f_2/f_1 .

Nel confronto automatico di spettri un problema non trascurabile è rappresentato dalle variazioni più o meno piccole della velocità della macchina, che danno luogo a variazioni delle frequenze caratteristiche del sistema. Un semplice rimedio consiste nell'utilizzare spettri con scala logaritmica delle ascisse, per i quali una variazione di velocità si traduce in una semplice traslazione di tutte le frequenze proporzionali alla velocità della macchina: fissata una determinata frequenza nello spettro di riferimento, basta allineare con questa l'analoga frequenza rilevata nello spettro corrente.

Cuscinetti volventi

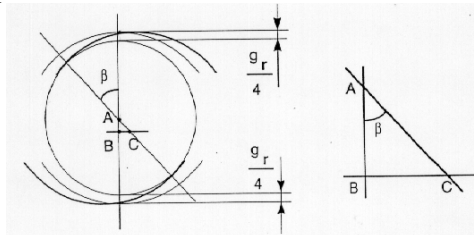
La *fatica superficiale* è sicuramente la causa principale di malfunzionamento dei cuscinetti volventi: la formazione di cricche subsuperficiali porta, in seguito ad una progressione di esse verso la superficie, al distacco di squame di materiale con formazione di butterature e crateri (fenomeno del *pitting*).

Il passaggio di una sfera su un cratere superficiale dà luogo ad un urto che si manifesta sotto forma di impulso sul segnale accelerometrico.

Gli accelerometri devono essere disposti adeguatamente dove la funzione di trasferimento risulta migliore (teste dei bulloni piuttosto che sui coperchi) in direzione coincidente con quella del carico (radiale per cuscinetti caricati radialmente; assiale per cuscinetti obliqui o caricati assialmente).

La frequenza degli urti dipende dal numero di corpi volventi e dalla velocità relativa degli anelli.

L'esistenza di un gioco radiale e di spinte assiali inducono il contatto tra sfere ed anelli su una retta inclinata dell'*angolo di pressione* β . Se la sfera ha raggio r e i profili degli anelli sono costituiti da archi di cerchio di raggio r_a , separati dalle sfere in posizione scarica da gioco radiale equivalente a $g_r/4$, può essere calcolato il valore dell'angolo di pressione sotto carico in funzione dei parametri costruttivi.



Ragionando sulla configurazione geometrica dell'accoppiamento, risultano evidenti le seguenti relazioni:

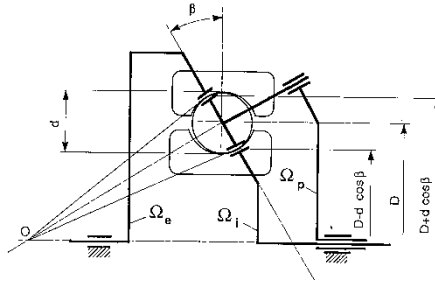
$$AB = r_a - r - \frac{g_r}{4}$$

$$AC = r_a - r$$

perciò si ricava direttamente:

$$\cos \beta = 1 - \frac{g_r}{4 \cdot (r_a - r)}$$

Il moto relativo degli anelli, delle sfere e della gabbia si può studiare facendo riferimento ad un meccanismo equivalente composto da ruote di frizione coniche: la configurazione è quella di un rotismo epicicloidale, nel quale la ruota esterna rappresenta l'anello esterno, il solare rappresenta l'anello interno, il satellite rappresenta la sfera ed il portasatellite rappresenta la gabbia.



Applicando la formula di Willis al rotismo ordinario corrispondente, si determina la formula seguente:

$$\frac{\Omega_e - \Omega_p}{\Omega_i - \Omega_p} = \tau_0 \quad \text{ma anche} \quad \tau_0 = - \frac{D - d \cdot \cos\beta}{D + d \cdot \cos\beta} = - \frac{1 - \lambda \cdot \cos\beta}{1 + \lambda \cdot \cos\beta}$$

dove:

$$\lambda = \frac{d}{D}$$

Il difetto sull'anello interno viene incontrato da ciascuna delle sfere con una frequenza pari ad $f_{i,1}$ riportata qui di seguito, quindi considerando tutte le z sfere la frequenza risulta essere z volte maggiore.

$$f_{i,1} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot (\Omega_i - \Omega_p) \quad \Rightarrow \quad f_i = \frac{z}{2 \cdot \pi} \cdot (\Omega_i - \Omega_p)$$

Partendo dall'espressione di Willis, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \Omega_i - \Omega_p &= - (\Omega_e - \Omega_p + \Omega_i - \Omega_i) \cdot \frac{1 + \lambda \cdot \cos\beta}{1 - \lambda \cdot \cos\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \Omega_i - \Omega_p &= - (\Omega_e - \Omega_i) \cdot \frac{1 + \lambda \cdot \cos\beta}{2} \end{aligned}$$

sostituendo nell'equazione precedente la frequenza di rotazione relativa f_r tra anello interno ed esterno:

$$f_r = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot |\Omega_e - \Omega_i|$$

l'espressione della frequenza caratteristica del difetto sull'anello interno vale:

$$f_i = \frac{z}{2} \cdot f_r \cdot (1 + \lambda \cdot \cos\beta)$$

La frequenza caratteristica del difetto sull'anello esterno può essere calcolata seguendo lo stesso metodo, infatti la frequenza di passaggio delle sfere su di esso vale:

$$f_e = \frac{z}{2 \cdot \pi} \cdot (\Omega_e - \Omega_p)$$

che, espressa mediante i parametri costruttivi può essere scritta come:

$$f_e = \frac{z}{2} \cdot f_r \cdot (1 - \lambda \cdot \cos\beta)$$

Un difetto sulla sfera, per ogni rotazione di essa attorno al proprio asse, incontra una volta l'anello interno ed una volta quello esterno, provocando due urti rilevati dal trasduttore con ampiezze diverse: diversa è l'intensità degli urti e diverso è il percorso del segnale.

La frequenza caratteristica del difetto sulla sfera corrisponde al doppio della frequenza f_v di rotazione di essa attorno al proprio asse:

$$f_v = \frac{1}{2 \cdot \pi} (\Omega_v - \Omega_p)$$

espressione che si può scrivere in funzione dei parametri costruttivi come:

$$f_v = f_r \cdot \frac{1 - (\lambda \cdot \cos\beta)^2}{2 \cdot \lambda}$$

La gabbia può presentare eccentricità, avere gioco eccessivo con gli elementi volventi oppure presentare rotture: la frequenza caratteristica dei difetti sulla gabbia è coincidente con quella di rotazione di essa attorno all'asse del cuscinetto.

$$f_g = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \Omega_p$$

La velocità di rotazione della gabbia può essere scritta in funzione di quelle degli anelli interno ed esterno come:

$$\Omega_p = \frac{\Omega_e + \Omega_i}{2} + \frac{\Omega_e - \Omega_i}{2} \cdot \lambda \cdot \cos\beta$$

Modulazione di ampiezza

La presenza di bande laterali sta ad indicare una modulazione del segnale ad una frequenza pari alla differenza esistente tra le frequenze corrispondenti alle linee spettrali.

Per meglio chiarire il fenomeno della modulazione si prenda in esame la seguente funzione:

$$y = [1 + B \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t)] \cdot A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)$$

Posto, per semplicità, $\alpha = 2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t$ e $\beta = 2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t$, si ha:

$$\begin{aligned} y &= (1 + B \cdot \cos\beta) \cdot A \cdot \cos\alpha = \\ &= A \cdot \cos\alpha + A \cdot B \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta = \\ &= A \cdot \cos\alpha + A \cdot B \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \right) = \\ &= A \cdot \cos\alpha + A \cdot B \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta + \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta - \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \right) = \\ &= A \cdot \cos\alpha + \frac{A \cdot B}{2} \cdot \cos(\alpha + \beta) + \frac{A \cdot B}{2} \cdot \cos(\alpha - \beta) = \\ &= A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + \frac{A \cdot B}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (f_1 + f_2) \cdot t) + \frac{A \cdot B}{2} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot (f_1 - f_2) \cdot t) \end{aligned}$$

Pertanto, il segnale modulato può essere espresso come somma di un segnale di frequenza pari a quella del segnale non modulato e di segnali con frequenze uguali alla somma e alla differenza della frequenza originale e di quella della modulante.

ANALISI SPETTRALE DEI DIFETTI SUI CUSCINETTI

- La presenza di un difetto su un cuscinetto viene rilevata da una linea spettrale alla frequenza corrispondente a quella caratteristica del difetto. La presenza di strisciamento tra gli elementi può giustificare un leggero abbassamento del valore in frequenza.
- Nel caso di difetto sugli anelli, la presenza di armoniche superiori a quella caratteristica, può evidenziare la presenza di detriti metallici, provenienti dal distacco di squame per fatica, saldati sulla superficie difettosa.
- Generalmente l'ampiezza delle linee spettrali corrispondenti a difetti sull'anello interno sono di entità minore a quelle corrispondenti a difetti sull'anello esterno: infatti, prima di essere trasformata in segnale elettrico, la vibrazione dell'anello interno deve superare il meato lubrificante tra anello interno e sfera, tra sfera ed anello esterno e l'interfaccia tra anello esterno e supporto, mentre la vibrazione nata sull'anello esterno deve solo superare l'interfaccia tra anello esterno e supporto. Inoltre, un difetto sull'anello esterno è in posizione fissa rispetto al carico, mentre quello sull'anello interno passa dalla zona caricata una volta per giro dell'albero, e può anche non generare segnale al di fuori di tale zona.
- Se i difetti in un corpo volvente sono numerosi, si può avere una distribuzione di linee spettrali a larga banda, per effetto della modulazione della frequenza di rotazione della gabbia.
- La corrosione acida, che attacca cuscinetti che lavorano in atmosfera umida e salina o acida, è evidenziata da linee spettrali particolarmente basse: nonostante la presenza dei difetti, le frequenze caratteristiche possono non essere presenti, alzandosi solo le armoniche superiori fino ed oltre i 2000 Hz.
- Il passaggio di corrente tra parte fissa e parte mobile delle macchine elettriche e le scariche possono danneggiare i cuscinetti: lo spettro caratteristico è costituito da molte linee spettrali ad alta frequenza (da 900 a 5000 Hz) armoniche delle frequenze caratteristiche dei difetti sugli anelli.
- L'effetto sirena consiste nella generazione del suono dovuto al passaggio delle barre rotoriche davanti a quelle statoriche nei motori elettrici: lo spettro caratteristico genera tre o quattro linee spettrali armoniche della frequenza di rotazione. La differenza di frequenza tra le linee equivale al doppio o al triplo della frequenza di rotazione.
- Se la lubrificazione è insufficiente, si può avere la rottura del meato lubrificante nella zona maggiormente caricata del cuscinetto, in corrispondenza dell'anello interno dotato di minore curvatura. Lo spettro caratteristico genera alcune linee spettrali, modulate da bande equivalenti alla frequenza caratteristica del difetto sull'anello interno: tali frequenze sono quelle naturali dell'anello interno.
- La presenza delle linee spettrali corrispondenti alla frequenza di rotazione e alle sue armoniche indica l'esistenza di gioco tra anello interno ed albero. La successione degli urti può generare frequenze frazionali di quella fondamentale di rotazione: se si ha un urto di ampiezza maggiore ogni n giri, si genera una frequenza pari ad un n -esimo della frequenza di rotazione. Sono state osservate frequenze fino ad un settimo di quella fondamentale di rotazione.

Vita residua

1) La durata residua del cuscinetto sarà proporzionale al periodo di servizio trascorso prima della scoperta del difetto: se, ad esempio, il cuscinetto ha lavorato per diversi anni, allora probabilmente durerà ancora per alcuni mesi; mentre,

all'estremo opposto, se il cuscinetto è stato in funzione solo per alcune settimane, ci si può attendere una vita residua di qualche ora o di qualche giorno.

2) La durata dipende dal tipo di difetto diagnosticato. Un difetto sulle piste può significare una vita residua di alcune settimane, mentre un difetto rilevato sui corpi volventi o sulla gabbia può portare alla messa fuori servizio entro poche ore. Ciò vale anche per la mancanza di lubrificazione.

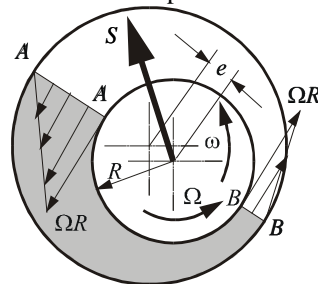
3) La velocità di rotazione è un fattore importante che influenza la durata residua: quanto più è elevata, tanto più rapido è il deterioramento del cuscinetto.

Data la difficoltà di prevedere la durata residua del cuscinetto, è opportuno provvedere alla sua sostituzione il più presto possibile dopo che il difetto è stato identificato. A titolo indicativo, quando si osserva un aumento del deterioramento entro le 24 ore, è segno che la vita residua è di pochi giorni. Tuttavia, è possibile che il difetto sia identificato alcuni mesi prima che se ne renda necessaria la sostituzione. Ciò dà tempo per la necessaria programmazione degli interventi, consentendo un risparmio di denaro in termini di mancata produzione, manodopera e materiali.

Cuscinetti a strisciamento

Una frequenza caratteristica di particolari condizioni di funzionamento dei cuscinetti a strisciamento lubrificati è quella nota con il nome di *half-frequency whirl*.

Il fenomeno che la genera può essere spiegato, in termini elementari, considerando un modello semplificato di coppia rotoidale lubrificata, non caricata, di larghezza infinita e con perno ruotante a velocità angolare costante Ω .



Se, a causa di un disturbo, il perno si sposta dalla posizione di equilibrio di una quantità e , nasce, per carichi bassi, in accordo con la teoria della lubrificazione idrodinamica, una forza S che tende a far ruotare il perno attorno all'asse della sede. Il centro del perno viene così a descrivere una traiettoria che può tendere ad estinguersi oppure ad amplificarsi, dando origine, in quest'ultimo caso, ad instabilità.

Per valutare la velocità angolare ω con la quale il perno descrive la suddetta traiettoria, consideriamo le portate di fluido — supposto incompressibile — attraverso le sezioni A-A e B-B.

Poiché abbiamo considerato un cuscinetto di larghezza infinita, la portata assiale è nulla. La portata attraverso la sezione A-A, Q_A , sarà uguale a quella attraverso la sezione B-B, Q_B , aumentata della variazione di volume che il meato subisce nell'unità di tempo per effetto dello spostamento del perno con velocità $\omega \cdot e$:

$$Q_A = Q_B + 2 \cdot \omega \cdot e \cdot R$$

avendo indicato con R il raggio del perno.

Le portate Q_A e Q_B possono essere calcolate utilizzando i risultati della teoria elementare della lubrificazione fluidodinamica, che forniscono l'andamento della velocità del fluido nel meato in funzione della coordinata radiale y e della coordinata circonferenziale $R \cdot \theta$.

Se lo spostamento e è piccolo rispetto al gioco radiale δ , la velocità periferica dipende solo dal moto di trascinamento e le portate valgono:

$$Q_A \approx \frac{\Omega \cdot R}{2} \cdot (\delta + e)$$

$$Q_B \approx \frac{\Omega \cdot R}{2} \cdot (\delta - e)$$

Pertanto si potrà scrivere:

$$\omega \approx \frac{\Omega}{2}$$

Il pericolo del *whirl* può essere allontanato aumentando il carico gravante sul cuscinetto o modificando le condizioni di simmetria del flusso circonferenziale del lubrificante. Provvedimenti utili in questo senso sono l'adozione di cuscinetti più stretti, di scanalature assiali, di pattini oscillanti.

Disallineamento

Negli impianti industriali la trasmissione di potenza tra macchine è frequentemente realizzata mediante alberi nominalmente coassiali opportunamente collegati fra loro. La perfetta collinearità degli assi non è tuttavia praticamente

raggiungibile né a macchina ferma né, tantomeno, a macchina in esercizio per diversi motivi, quali le deformazioni elastiche e termiche dei supporti e i difetti geometrici delle superfici di accoppiamento.

Gli errori di allineamento possono essere classificati come:

disallineamento angolare, quando gli assi sono complanari e formano tra loro un angolo non nullo;

disallineamento parallelo, quando gli assi sono complanari, paralleli e non coincidenti;

disallineamento assiale, quando l'asse è il medesimo, ma gli estremi degli alberi sono separati;

disallineamento combinato, quando sono presenti più di una tipologia di disallineamento.

Per collegare alberi che possono essere soggetti ad errori di allineamento devono essere utilizzati opportuni dispositivi, detti giunti mobili e giunti flessibili, in grado di consentire la rotazione degli organi della trasmissione senza sovraccaricare pericolosamente i supporti.

Tali giunti possono essere realizzati con membri praticamente rigidi, cioè con deformazioni trascurabili rispetto agli spostamenti dovuti al disallineamento, come il giunto di Cardano o il giunto a denti.

Alternativamente, i giunti flessibili possono essere costituiti da membri metallici o in elastomero che sono dotati di notevole cedevolezza, come, ad esempio, i giunti a nastro metallico, oppure i giunti elastomerici.

La presenza di un giunto mobile o di un giunto flessibile, tuttavia, non elimina le forze che si scaricano sui supporti per effetto del disallineamento. Tali forze hanno andamento periodico ed eccitano la struttura facendola vibrare. L'analisi in frequenza delle vibrazioni, rilevate ad esempio mediante accelerometri in corrispondenza dei supporti vicini al giunto, permette di diagnosticare con sufficiente, ma non assoluta, sicurezza la presenza di un disallineamento. A tale scopo, occorre precisare che è opportuno disporre di misure effettuate sia in direzione radiale che in direzione assiale.

Lo spettro caratteristico delle vibrazioni prodotte dal disallineamento dipende dal tipo di giunto considerato e, per uno stesso tipo, può differire passando da un esemplare ad un altro. L'ampiezza delle varie componenti spettrali, poi, è difficilmente correlabile all'entità del disallineamento.

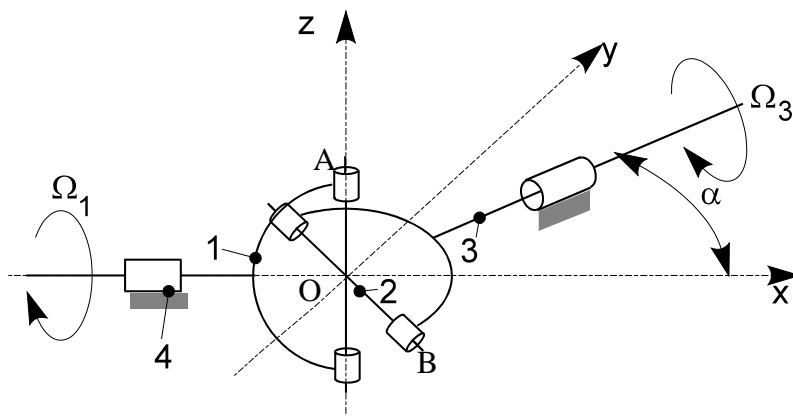
I giunti come quello di Cardano e come quello a denti producono spettri in cui compare la componente $2X$, di frequenza doppia rispetto a quella di rotazione, e varie armoniche superiori.

I giunti con elementi elastici producono spettri con componenti $1X$, alla frequenza di rotazione dell'albero, e varie armoniche superiori, multiple di quella fondamentale. Se il disallineamento è angolare prevalgono le componenti assiali alla frequenza di rotazione. Se il disallineamento è parallelo prevalgono le componenti radiali a frequenza doppia di quella di rotazione. Se il disallineamento è combinato si ha la sovrapposizione dei due effetti caratteristici.

In ogni caso, le vibrazioni misurate da parti opposte del giunto presentano uno sfasamento di 180° .

Le caratteristiche del segnale vibratorio rilevato in prossimità dei giunti dipendono, a parità di altre condizioni, dal tipo di dispositivo impiegato.

Giunto di Cardano. Il giunto di Cardano consente di trasmettere il moto rotatorio tra assi incidenti e formanti tra loro angoli α anche piuttosto rilevanti.



Il rapporto tra le velocità angolari dell'albero condotto e dell'albero motore non è costante, ma dipende sia dal disallineamento angolare α sia dalla posizione angolare ϕ_1 dell'albero motore. Se si suppone costante la velocità angolare dell'albero motore, quella dell'albero condotto varia tra due valori massimo e minimo con una frequenza fondamentale doppia di quella di rotazione.

Imponendo una rotazione ϕ_1 all'albero motore, si ottiene una conseguente rotazione ϕ_3 dell'albero condotto, pertanto i braccetti OA ed OB della crociera assumeranno due nuove posizioni angolari OA' ed OB' individuate dai seguenti coseni direttori:

	x	y	z
OA'	0	$-\sin \phi_1$	$\cos \phi_1$
OB'	$\sin \alpha \cdot \cos \phi_3$	$-\cos \alpha \cdot \cos \phi_3$	$-\sin \phi_3$

Dalla condizione di ortogonalità tra i braccetti OA' ed OB' si ottiene la seguente equazione:

$$\tan \phi_3 = \tan \phi_1 \cdot \cos \alpha$$

Dalla quale, derivando rispetto al tempo, risulta:

$$\frac{\Omega_3}{\Omega_1} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2(\Omega_1 \cdot t)}$$

Corrispondentemente, l'accelerazione angolare dell'albero condotto non è nulla, ma subisce oscillazioni periodiche, con frequenza fondamentale pari al doppio di quella di rotazione. Se si suppone Ω_1 costante, si ottiene:

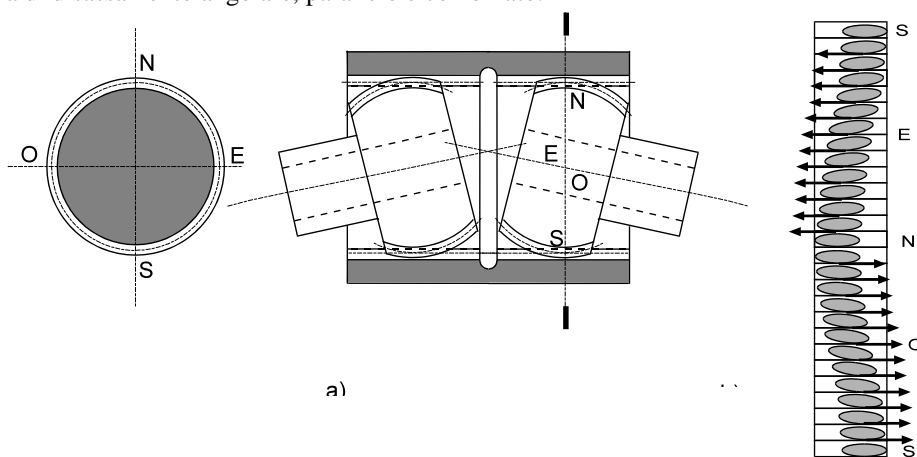
$$\frac{\dot{\Omega}_3}{\Omega_1^2} = \frac{\sin(2 \cdot \Omega_1 \cdot t) \cdot \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{[1 - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2(\Omega_1 \cdot t)]^2}$$

L'accelerazione angolare non nulla dell'albero condotto determina la presenza di una azione inerziale che si manifesta come una coppia di intensità variabile proporzionalmente all'accelerazione angolare e che si sovrappone al momento resistente applicato all'albero. Tale coppia è equilibrata da forze variabili generate dai supporti, che generano una coppia tale da equilibrare i momenti agenti secondo gli assi degli alberi motore e condotto.

Poiché l'andamento dell'accelerazione è periodico con frequenza fondamentale doppia di quella di rotazione del movente, lo spettro delle reazioni dei supporti conterrà componenti alla frequenza $2X$, doppia di quella di rotazione, e alle armoniche superiori $4X$, $6X$, ecc.

Giunto a denti. Il giunto a denti è comunemente costituito da due mozzi dentati, collegati agli alberi, che si accoppiano ad un manicotto pure dentato.

I denti ricavati sui mozzi hanno asse curvo e sono rastremati in modo tale da consentire l'inclinazione del mozzo rispetto al manicotto, che, al contrario, ha denti diritti non rastremati. La presenza di due mozzi consente l'impiego del giunto in presenza di disassamento angolare, parallelo e combinato.

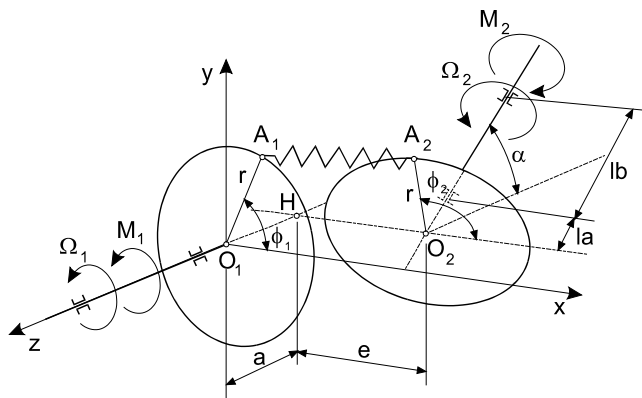


La periodicità delle forze che questo tipo di giunto trasmette ai supporti è dovuta principalmente alle componenti di attrito che nascono nel contatto fra i denti: il punto di contatto di una coppia di denti si sposta, durante un giro, lungo l'asse del dente, per un semigiorno in una direzione e per un semigiorno in direzione opposta. Ne consegue che le forze di attrito hanno verso opposto su due lati del giunto.

Ciascuna di tali forze genera un momento che varia con legge periodica con frequenza doppia di quella di rotazione, ma se si considera il contributo di N denti si ottiene una periodicità caratteristica corrispondente a quella di rotazione diviso il numero di denti.

In definitiva, lo spettro presenterà un picco a frequenza doppia di quella di rotazione e delle armoniche della frequenza di passaggio dei denti.

Giunto con elementi deformabili. Gli elementi deformabili sono generalmente lamine di acciaio o elementi in elastomero, con rigidità molto minore di quella delle altre parti del giunto. Il dispositivo può essere modellato mediante due dischi rigidi collegati da una molla.



Con riferimento alla figura precedente, l'equazione di chiusura dell'anello $O_1A_1A_2O_2HO_1$ può essere scritta:

$$\overline{O_1 A_1} + \overline{A_1 A_2} + \overline{A_2 O_2} + \overline{O_2 H} + \overline{H O_1} = 0$$

e da essa può essere ricavato il valore di $\overline{A_1 A_2}$ e del suo modulo g :

$$\overline{A_1 A_2} = [r \cdot (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1) + e] \bar{i} + r \cdot (\cos \alpha \cdot \sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1) \bar{j} + (r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \vartheta_2 - a) \bar{k}$$

$$g = \left| \overline{A_1 A_2} \right|$$

dove \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} sono i versori degli assi x, y, z.

La forza applicata dalla molla al disco condotto è:

$$\overline{F_{12}} = k(g - g_0) \frac{\overline{A_1 A_2}}{\left| \overline{A_1 A_2} \right|}$$

dove k è la rigidità della molla e g_0 è la lunghezza della molla scarica.

Considerando l'equilibrio alla rotazione dell'albero condotto, possiamo scrivere la seguente espressione:

$$\overline{M_2} = \left(\overline{F_{12}} \times \overline{A_2 O_2} \right) \cdot \bar{u}$$

dove $\bar{u} = (0, \sin \alpha, -\cos \alpha)$ è il versore dell'asse dell'albero condotto.

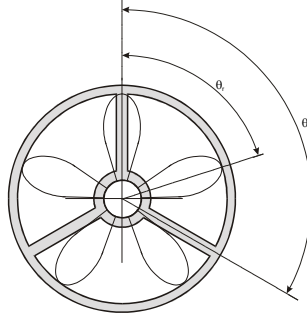
Risolvendo numericamente tale equazione si calcola $\overline{F_{12}}$, per ciascun valore dell'angolo di ingresso ϕ_1 . Imponendo le condizioni di equilibrio, si calcolano le componenti assiale e radiale delle forze agenti sul cuscinetto adiacente al disco condotto.

A causa degli errori di allineamento, la lunghezza della molla varia durante la rotazione, dando origine nei supporti a reazioni variabili periodicamente. La presenza di più elementi elastici disposti simmetricamente e con caratteristiche identiche darebbe luogo ad andamenti periodici complessi delle forze, dai quali si potrebbero evidenziare la periodicità della rotazione insieme con le sue armoniche superiori.

In realtà, gli elementi elastici del sistema non sono perfettamente simmetrici ed inoltre le caratteristiche meccaniche delle molle non sono identiche. Come conseguenza, le reazioni dei cuscinetti ed i relativi spettri rivelano forti componenti alla frequenza di rotazione, nella direzione assiale, ed alla frequenza doppia di quella di rotazione nella direzione radiale.

Periodicità nei sistemi rotore-statore

Consideriamo un sistema rotore-statore come quello rappresentato nella figura



Siano Z_s e Z_r il numero delle pale statoriche e quello delle pale rotoriche. Detta f_o la frequenza di rotazione, si individuano immediatamente la frequenza con la quale le pale rotoriche passano davanti ad una pala statorica, f_r , e la frequenza con la quale una pala rotorica incontra le pale statoriche, f_s . Si ha, infatti:

$$f_r = Z_r \cdot f_o$$

$$f_s = Z_s \cdot f_o$$

Una terza periodicità si individua calcolando l'intervallo di tempo, t_{rs} , che intercorre tra due sovrapposizioni consecutive delle pale rotoriche con quelle statoriche. L'intervallo t_{rs} dipende dal valore minimo dell'angolo che due generiche pale rotoriche e statoriche formano tra di loro nell'istante in cui si verifica la sovrapposizione tra altre due pale. Detto $\theta_{rs \min}$ tale angolo, si ha:

$$\theta_{rs \min} = [m \cdot \theta_s - n \cdot \theta_r]_{\min}$$

con m ed n interi. Pertanto, possiamo anche scrivere:

$$\theta_{rs\min} = 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{m}{Z_s} - \frac{n}{Z_r} \right]_{\min} = 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{m \cdot Z_r - n \cdot Z_s}{Z_r \cdot Z_s} \right]_{\min}$$

I numeri interi Z_s e Z_r possono essere espressi in funzione di un fattore comune C (C è uguale ad 1 se Z_s e Z_r sono primi fra loro) moltiplicato per altri due interi, p e q :

$$Z_s = C \cdot p$$

e

$$Z_r = C \cdot q$$

Si ottiene:

$$\theta_{rs\min} = 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{m \cdot C \cdot p - n \cdot C \cdot q}{p \cdot q \cdot C^2} \right]_{\min} = 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{m \cdot p - n \cdot q}{m.c.m.(Z_s, Z_r)} \right]_{\min}$$

Ma, essendo m , n , p e q numeri interi, il valore minimo dell'espressione che compare al numeratore, se si esclude il caso $mp-nq=0$ (corrispondente ad un ugual numero di pale rotoriche e statoriche e quindi alla contemporanea sovrapposizione delle pale rotoriche e statoriche, ossia $\theta_{rs\min} = 0$), si ha quando $m \cdot p - n \cdot q = 1$.

Si ha, così:

$$f_{rs} = \frac{1}{t_{rs}} = \frac{\Omega_0}{\theta_{rs\min}} = \frac{\Omega_0}{2 \cdot \pi} \cdot m.c.m.(Z_s, Z_r) = f_0 \cdot m.c.m.(Z_s, Z_r)$$

Ingranaggi

Il rapporto di trasmissione τ di un ingranaggio costituito da una ruota motrice di z_1 denti ed una ruota condotta di z_2 denti si calcola come:

$$\tau = \frac{z_1}{z_2}$$

Gli errori inevitabili di costruzione delle ruote e le deformazioni dei denti sotto carico fanno variare il rapporto di trasmissione, che dovrebbe essere costante, in funzione della posizione angolare delle ruote: lo scostamento del rapporto di trasmissione effettivo da quello teorico viene definito *errore di trasmissione*.

Il rapporto di trasmissione si definisce *proprio* o *improprio*, a seconda che i numeri di denti delle ruote siano primi tra loro oppure abbiano un fattore comune.

Le frequenze caratteristiche degli ingranaggi sono:

- le frequenze di rotazione delle due ruote;
- la frequenza di ingranamento;
- le componenti fantasma;
- la frequenza di ripetizione;
- la frequenza frazionaria di quella di ingranamento (per rapporti di trasmissione impropri);
- le modulazioni di ampiezza e di fase.

Le frequenze di rotazione f_1 ed f_2 sono equivalenti al numero di giri delle ruote al secondo.

La frequenza di ingranamento f_g è quella alla quale avviene il contatto tra due coppie successive di denti delle due ruote: si valuta come il prodotto della frequenza di rotazione di una delle due ruote per il numero dei suoi denti.

$$f_g = f_1 \cdot z_1 = f_2 \cdot z_2$$

Le componenti fantasma sono linee spettrali legate alla periodicità dei difetti della ruota che comanda la tavola portapezzo della macchina utensile durante il processo di taglio della dentatura.

La frequenza di ripetizione f_{gr} è quella di ingranamento della stessa coppia di denti. Questo tipo di ingranamento avviene dopo un numero di ingranamenti equivalente al minimo comune multiplo (*m.c.m.*) dei numeri di denti delle due ruote. Pertanto la frequenza di ripetizione si calcola come:

$$f_{gr} = \frac{f_g}{m.c.m.(z_1, z_2)}$$

La frequenza frazionaria rispetto a quella di ingranamento è una periodicità caratteristica presente nel segnale delle ruote con rapporto di trasmissione improprio, se esiste un'eccentricità in una delle due ruote.

L'eccentricità, costituita da un dente più sporgente degli altri, di una delle due ruote modifica il dente coniugato dell'altra ruota durante l'ingranamento. Ad ogni giro della ruota eccentrica, il dente coniugato dell'altra ruota cambia. Dopo che hanno ingranato un numero di coppie di denti pari al minimo comune multiplo fra z_1 e z_2 , la sporgenza ritorna in corrispondenza del primo dente modificato.

La distanza tra i denti che vengono modificati, in definitiva, equivale al fattore comune C tra z_1 e z_2 , quindi la periodicità di ingranamento dei denti modificati (frequenza frazionaria) f_{fr} si calcola con la seguente formula:

$$f_{fr} = \frac{f_g}{C}$$

Oltre a *modulazione in ampiezza*, presente anche nel segnale dei cuscinetti volventi, negli spettri delle ruote dentate si può riscontrare anche *modulazione di fase*, dovuta a variazione di velocità. La presenza contemporanea di questi due tipi di modulazione può determinare incremento o diminuzione dell'entità delle bande laterali dello spettro in frequenza: si osserva che nel caso di modulazione di ampiezza, la banda laterale destra – a frequenza maggiore di quella fondamentale – risulta più alta di quella di sinistra, viceversa nel caso di modulazione di fase.

Le bande laterali che compaiono attorno alla frequenza di ingranamento ed alle sue armoniche, essendo dovute ad una modulazione con periodicità pari alla frequenza di rotazione di una od entrambe le ruote, sono distanziate tra loro in frequenza di una quantità pari ad f_1 od f_2 .

Per una migliore definizione del segnale vibratorio, il posizionamento dei trasduttori per la diagnostica deve essere effettuato molto vicino alla ruota in esame, con asse verticale in direzione radiale per ruote a denti dritti o in direzione assiale per ruote a denti elicoidali.

I principali malfunzionamenti negli ingranaggi sono dovuti ad errori di costruzione o a danni insorti durante funzionamento, quali:

- eccentricità;
- gioco eccessivo;
- usura;
- denti rotti, criccati o scheggiati.

L'eccentricità può essere dovuta ad errori di realizzazione delle ruote, alberi piegati, o fenomeni di dilatazione nelle ruote munite di razze (maggiore espansione per effetti termici).

Le eccentricità provocano modulazione di ampiezza del segnale, perciò lo spettro caratteristico presenta delle bande laterali attorno alle armoniche della frequenza di ingranamento di entità maggiore a destra (frequenze più alte). La distanza tra le bande laterali è equivalente alla frequenza di rotazione della ruota che presenta eccentricità (nel caso di eccentricità dovuta a dilatazione di razze, la distanza equivale al prodotto della frequenza di rotazione per il numero di razze).

Il gioco eccessivo tra i denti o sull'albero danno luogo a modulazione di fase del segnale: spettri con armoniche della frequenza di ingranamento modulate da bande laterali di entità più elevata a sinistra (frequenze più basse).

L'usura è un fenomeno che normalmente coinvolge tutti i denti di una delle due ruote (o di entrambe), nella zona di maggiore strisciamento (perciò lontano dalla circonferenza primitiva: in prossimità delle teste e delle basi dei denti).

L'usura provoca una distorsione del segnale con l'innalzamento delle armoniche superiori della frequenza d'ingranamento fino almeno alla terza. La seconda armonica presenta entità minore della prima; in caso contrario può esservi gioco eccessivo nella dentatura.

I denti rotti, criccati o scheggiati, quando ingranano, danno origine ad urti che si traducono in impulsi in grado di eccitare alcune frequenze proprie delle ruote: nel dominio della frequenza si possono alzare linee spettrali non correlate alle frequenze di rotazione o di ingranamento. Essendo un fenomeno che si ripete una volta al giro, nello spettro appare evidente anche la frequenza di rotazione della ruota danneggiata.

Se i rotismi sono complessi, l'identificazione delle frequenze caratteristiche e delle bande laterali per la ruota in esame diviene molto difficile: in questi casi deve essere applicata la tecnica della *media sincrona*, che consiste nel sincronizzare il campionamento dei dati vibratori con la rotazione della ruota analizzata e nell'effettuare successivamente una media. Questa procedura permette di eliminare i contributi vibratori delle ruote aventi velocità differenti da quella di sincronizzazione.

ANALISI MODALE SPERIMENTALE

Ogni sistema fisico ha delle frequenze proprie di vibrazione f_n e dei modi di vibrare che possono essere descritti dalla matrice degli autovettori $[\Phi]$. I modi propri di vibrare sono ortogonali ed indipendenti tra loro, a condizione che:

- il sistema sia lineare;
- lo smorzamento sia proporzionale.

Se si considera l'espressione matriciale dell'equazione di moto, trascurando lo smorzamento:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\}$$

nel caso di eccitazione periodica e quindi di risposta periodica:

$$\begin{aligned}\{F(t)\} &= \{F\} \cdot e^{i\omega \cdot t} \\ \{x(t)\} &= \{X\} \cdot e^{i\omega \cdot t}\end{aligned}$$

sostituendo alla prima espressione:

$$[-\omega^2[M] + [K]]\{X\} = \{F\}$$

ponendo:

$$[\alpha(\omega)] = [K] - \omega^2[M]^{-1}$$

si può scrivere:

$$\{X\} = [\alpha(\omega)]\{F\}$$

Se $[\Phi]$ è la matrice modale normalizzata rispetto alla massa (tale che: $[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$): se si pre-moltiplica e post-moltiplica per la matrice rigidezza si ottiene una matrice diagonale i cui elementi sono gli autovalori ω_r del sistema; se si pre-moltiplica e post-moltiplica per la matrice massa si ottiene la matrice identità.

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\omega_r^2]$$

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I]$$

Pertanto:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi]^T [\omega_r^2 - \omega^2]^{-1} [\Phi]$$

Sviluppando i prodotti tra matrici, il termine generico $\alpha_{jk}(\omega)$ vale:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{X_j^r X_k^r}{\omega_r^2 - \omega^2}$$

Se si considera l'equazione di moto, compreso l'effetto dello smorzamento proporzionale:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{F(t)\}$$

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{X_j^r X_k^r}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i \cdot (2 \cdot \xi_r \cdot \omega_r \cdot \omega)}$$

Nell'intorno della generica pulsazione propria ω_s i termini $\alpha_{jk}(\omega)$ valgono:

$$\alpha_{jk}(\omega_s) = \sum_{r=1}^N \frac{X_j^r X_k^r}{(\omega_r^2 - \omega_s^2) + i \cdot (2 \cdot \xi_r \cdot \omega_r \cdot \omega_s)}$$

In questa sommatoria il termine che si ottiene per $r = s$ è molto superiore agli altri, che si possono trascurare, quindi si può scrivere:

$$\alpha_{jk}(\omega_s) = \frac{X_j^s X_k^s}{i \cdot (2 \cdot \xi_s \cdot \omega_s^2)}$$

Perciò se si considera la risposta del sistema nel punto generico j ad un'eccitazione data nel punto generico k , il sistema, in un intorno di una generica pulsazione propria si comporta come se fosse ad 1 grado di libertà.

L'analisi modale sperimentale si effettua pertanto scegliendo sulla struttura da esaminare una serie di punti che possano caratterizzarla geometricamente.

Introdotta nel calcolatore la geometria, si applica un'eccitazione, mediante martello strumentato o generatore di vibrazioni, nel punto generico k misurando la risposta del sistema negli altri punti j .

Si ricavano in questo modo tutte le frequenze proprie ω_s del sistema e gli smorzamenti ξ_s (ad es. con il metodo della banda di frequenze di mezza potenza).

Per ciascuna pulsazione propria si determina quindi il valore della risposta X_k^s , unica incognita dell'equazione:

$$\alpha_{kk}(\omega_s) = \frac{X_k^s X_k^s}{i \cdot (2 \cdot \xi_s \cdot \omega_s^2)}$$

ed i valori delle risposte X_j^s , uniche incognite delle equazioni:

$$\alpha_{jk}(\omega_s) = \frac{X_j^s X_k^s}{i \cdot (2 \cdot \xi_s \cdot \omega_s^2)}$$

In questo modo si ottengono gli autovettori corrispondenti a ciascuna pulsazione propria, che definiscono le deformazioni corrispondenti della struttura.

Metodo della banda di frequenze di mezza potenza

L'ampiezza dell'oscillazione in condizioni di risonanza ($\frac{\omega}{\omega_n} = 1$):

$$X_n = \frac{F_0}{2 \cdot \xi n \cdot m \cdot \omega_n^2}$$

Se ci si propone di trovare i valori ω_i della pulsazione della forza eccitatrice per i quali l'ampiezza X_i valga:

$$X_i = \frac{X_n}{\sqrt{2}}$$

si avrà:

$$X_i = \frac{\frac{F_0}{m \cdot \omega_n^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2 \cdot \xi n \cdot \frac{\omega_i}{\omega_n}\right)^2}} = \frac{\frac{F_0}{m \cdot \omega_n^2}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \xi n}$$

da cui, posto $r_i = \frac{\omega_i^2}{\omega_n^2}$, si ricaverà:

$$r_i^2 - 2 \cdot (1 - 2 \cdot \xi n^2) \cdot r_i + 1 - 8 \cdot \xi n^2 = 0$$

Le radici dell'equazione di secondo grado, saranno:

$$r_{1,2} = 1 - 2 \cdot \xi n^2 \pm 2 \cdot \xi n \cdot \sqrt{1 + \xi n^2}$$

Se $\xi n^2 \ll 1$:

$$r_{1,2} \approx 1 \pm 2 \cdot \xi n$$

$$r_2 - r_1 = \frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{\omega_n^2} \approx 2 \cdot \frac{(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_n} \approx 4 \cdot \xi n$$

da cui si ottiene:

$$\xi n = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 \cdot \omega_n}$$