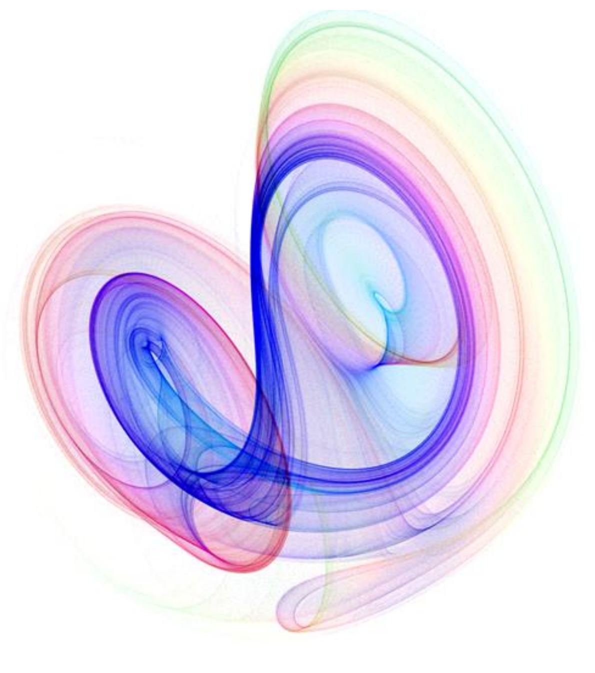
ISI Leonardo Da Vinci, Cerea (VR), classe V ASA

Il Caos deterministico

Il ruolo del caos nella cultura Classica, la fine del Determinismo, l'effetto farfalla e alcuni strumenti matematici necessari per studiarlo.



Giacomo Borin
Anno scolastico 2017/2018

Sommario

MAPPA CONCETTUALE

Il Caso deterministico

- Differenza tra *caso* e *caos*
- Il caos nella *Physis*
    - Democrito e il moto degli atomi
    - Epicuro e il clinamen
- La crisi della filosofia deterministica
    - Nietzsche e la storia come Caos
        - Riferimento alla *Seconda considerazione inattuale: sull'utilità e sul danno della storia per la vita* di F. Nietzsche
        - Riferimento a *La Storia* di E. Montale
- La teoria del Caos
    - Il problema dei tre corpi e la scoperta del Caos
    - Sistemi non risolvibili analiticamente
        - Calcolo iterativo delle traiettorie in Java
    - Lo spazio delle fasi
        - L'attrattore strano
    - Sistema aperiodico
    - L'effetto farfalla
    - Gli esponenti di Lyapunov
        - Calculation of Lyapunov exponent
    - La natura frattale del Caos
        - Le mappe di Poincarè
        - La dimensione frattale
        - La congettura di Kaplan-Yorke

Introduzione e Motivazioni

Da sempre l'uomo tenta di dare un ordine al reale, basti pensare che la stessa parola cosmo in greco indica *ordine*. È probabilmente una necessità umana, perché dare ordine alla realtà ci illude di controllarla. Il determinismo è l'estrema conseguenza di questo tentativo: trovare le leggi che determinano il *tutto*, un'equazione che comprenda passato e futuro dell'universo.
Personalmente ho avuto fiducia nell'esistenza di questa formula, confermatami sia da studi di materie scientifiche e sia da letture di filosofia. Sono arrivato però in questo ultimo anno ad accorgermi dei problemi alla base di una scoperta di questo tipo ed ho iniziato a riflettere sul valore delle nostre certezze, sia metafisiche che matematiche.
Se noi proviamo semplicemente a osservare con attenzione la realtà di tutti i giorni ci accorgeremo subito che tutto ha delle cause, le quali per la maggiore sono effettivamente conosciute, ma che sia impossibile nella vita conoscerle tutte. Ogni legge che conosciamo è solamente un'approssimazione di ciò che succede nella realtà. Ed anche se effettivamente oggi abbiamo uno strumento che ci permette di svolgere le quantità di calcoli necessari, il computer, non ci è possibile prevedere con certezza che tempo ci sarà fra una settimana o l'andamento di una popolazione in un habitat. La nostra vita è regolata dal Caos e non dall'ordine, anche nell'era del determinismo.
Il caos deterministico è quella parte di non-conoscenza nascosta all'interno della fisica e della vita, la stessa di cui abbiamo esperienza ogni giorno. Cercare di eliminarla è impossibile, mentre cercare di studiarla significa porre la matematica dove prima era esclusa, accettando i suoi limiti, ma scoprendone nuove potenzialità.

Precisazioni

Per comprendere al meglio il significato della tesi non bisogna confondere il significato tra le parole Caos e Caso, le quali possono essere usate come sinonimi, ma esiste una sottile differenza tra le due che può dare luogo a fraintendimenti e incomprensioni.
La parola *caos* deriva dal greco χάοζ, che significa "baratro" o "abisso", e sta a indicare il disordine primordiale nel quale stavano commisti gli elementi. All'interno di questo contesto considereremo il caos come l'insieme di tutti i componenti della realtà che, per diversi motivi, non ci permettono di averne una visione ordinata. Mentre *caso* deriva dal latino *casus*, caduta, ed è da intendere come avvenimento che sopravviene senza alcun motivo apparentemente logico, in modo accidentale. Il *caos* non è quindi casuale: siamo noi a non essere in grado di trovare l'ordine in esso, mentre in realtà ogni avvenimento ha una causa ed è determinato.
Si consideri ad esempio il lancio dei dadi, simbolo per eccellenza della casualità: noi non potremo mai sapere su quale lato si fermerà il cubo finché non si sarà fermato. Però effettivamente se noi conoscessimo ogni singola variabile riguardante il lancio (quantità di moto, posizione nello spazio e attrito dell'aria) potremmo determinare in anticipo il risultato. Questo è però impossibile semplicemente perché sarebbero troppe le informazioni da ricavare.
La teoria del caos studia una serie di fenomeni nei quali il *disordine esistenziale* in cui siamo immersi ci porta a considerarli casuali, sebbene siano ben conosciute le leggi fisiche che ne stanno alla base.

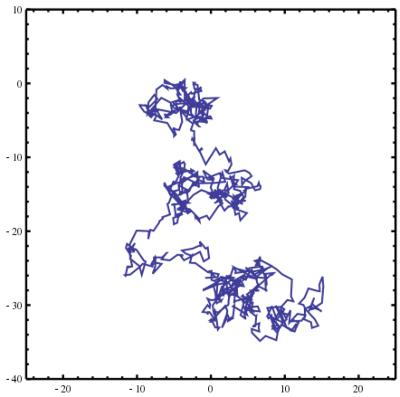
Il Caos nella Physis

Nella filosofia classica vari sapienti tentarono di trovare un ordine per il cosmo. Non è casuale che i due principali pensatori di due importanti teorie deterministiche, che escludevano l'intervento di divinità o esseri ultra-terreni, si ritrovarono costretti ad aggiungere una variabile caotica nel loro universo.

Democrito

Democrito fu un filosofo greco, contemporaneo di Socrate, che formulò, insieme a Leucippo di Mileto (la cui esistenza è incerta), la teoria atomistica, secondo la quale l'universo è formato dal vario aggregarsi di particelle indivisibili, dette "atomi" (dal greco *atomos*, "non divisibile"), qualitativamente identiche, ma differenti per forma, grandezza e posizione. L'esistenza di queste particelle è dedotta razionalmente a partire da una riflessione sul problema della divisibilità proposto da Zenone. Se noi continuassimo infatti a dividere all'infinito la materia essa si dissolverebbe nel nulla, per cui nella realtà devono esistere per forza dei costituenti ultimi della materia, i quali non possono più essere divisi ulteriormente. Questa teoria rappresenta la prima forma di materialismo e di causalismo, difatti tutta la materia formata da atomi costituisce l'unica sostanza e tutto ciò che avviene all'interno di questa sostanza è dato dall'interazione tra gli atomi. All'interno di questo determinismo è però presente ancora un moto caotico: difatti secondo Democrito gli atomi si muovono casualmente in tutte le direzioni, come è stato scoperto avvenire ad esempio nel moto browniano. Questo movimento è considerato una caratteristica inseparabile della materia e gli atomi sono quindi pensati semoventi. Il postulato del movimento originario degli atomi è quindi la base del pensiero atomista, perché è grazie a questo che avvengono le iterazioni che vanno a formare la realtà. Il filosofo e matematico Bentrand Russell chiarisce molto bene questo punto:

> "La casualità deve partire da qualcosa [il postulato atomista del movimento], e là dove essa parte non si può attribuire alcuna causa al dato iniziale."
> (B. Russel, *Storia della filosofia occidentale*, Longanesi, Milano 1966-1967)



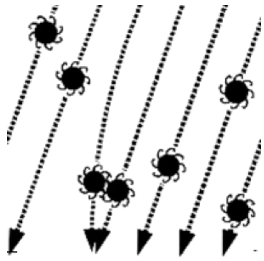
È interessante come il caos emerga inconsapevolmente da questa teoria e diventi il pilastro del reale 'ordinato'. Senza di esso non si spiegherebbe la molteplicità del mondo e il suo disordine. Esso diventa anche un limite gnoseologico: secondo Democrito noi possiamo trovare le cause di tutti gli avvenimenti (rinunciando alle spiegazioni religiose), ma queste andranno a ricadere (portando questa ricerca alle estreme conseguenze) nel moto casuale degli atomi.

Il caos è quindi origine dell'universo e limite della conoscenza. Su questo i teologi e i filosofi finalisti basarono la loro critica all'atomismo. Infatti Dante Alighieri si riferì a Democrito come colui che "il mondo a caso pone" (Inferno, IV, 136).

Epicuro e il Clinamen

Epicuro fu il fondatore di una scuola filosofica, l'epicureismo, diffusa in Grecia e a Roma fino al II secolo d.C.

Il poeta latino Tito Lucrezio Caro nella sua opera ***De rerum natura*** ha trascritto buona parte del pensiero epicureo, tramandandolo a noi.



Epicuro riprese la teoria atomistica di Democrito con il chiaro obiettivo di creare una fisica che escluda cause soprannaturali per spiegare la realtà, la quale deve essere quindi materialistica e deterministica. Apportò comunque alcune importanti modifiche, tra le quali propose una spiegazione diversa del moto degli atomi. Secondo Epicuro gli atomi, a causa del loro peso, cadono nel vuoto seguendo una linea retta e tutti con la stessa velocità. A seguito degli urti che avvengono tra di loro le particelle si vanno ad aggregare, creando la realtà concreta in cui viviamo. Risulta però necessario spiegare come sono possibili questi urti, dato che gli atomi cadono tutti seguendo la stessa direzione e alla stessa velocità, per cui la distanza tra di loro non cambia mai. Per questo il filosofo di Samo introdusse la teoria del *clinamen*, (in greco *parenclisi*, tradotto poi da Lucrezio in latino) cioè una deviazione della traiettoria degli atomi che avviene casualmente e permette la loro iterazione. Si riporterà a seguire la descrizione di Lucrezio relativa al movimento delle particelle.

> "A questo proposito voglio che tu sappia anche che, quando i corpi cadono diritti attraverso il vuoto per il loro peso, in qualche tempo e luogo non definiti deviano per un poco, tanto che appena può dirsi modificato il loro percorso"
>
> (Lucrezio, *Sulla natura* [II, 216-219], Trad. It. A. Perutelli, G. Paduano, E. Rossi, in *Storia e testi della letteratura latina*, Bologna, Zanichelli, 2010.)

Il *clinamen* oltre a motivare fisicamente l'esistenza del mondo ha anche delle conseguenze etiche. Difatti nella fisica di Democrito il caos è una caratteristica a *priori* degli atomi, una volta presa coscienza di questo, tutto il reale è determinato univocamente dalle leggi che regolano le iterazioni tra i corpi, per cui non vi è alcuna libertà ed è tutto necessario. Nella fisica epicurea, invece, una manifestazione del caso è sempre possibile, dato che queste deviazioni avvengono continuamente. Per cui trova una giustificazione alla libertà dell'uomo, dovuta dal movimento casuale e imprevisto degli atomi, che "spezza le leggi del fato" (Lucrezio). Riporto un estratto dall'opera citata, nel quale si afferma che:

> "La mente in tutto ciò che compie non abbia una necessità interna, che non sia sconfitta e costretta a sopportare, ciò nasce proprio dalla piccola inclinazione degli elementi che avviene in un momento e un punto indeterminati"
>
> (Lucrezio, *Sulla natura* [II, 289-294], Trad. It. A. Perutelli, G. Paduano, E. Rossi, in *Storia e testi della letteratura latina*, Bologna, Zanichelli, 2010)

La filosofia Moderna e l'anti-determinismo

Dal '700 in poi la filosofia e la cultura seguirono prevalentemente la via tracciata dalla scienza, cercando di illuminare il reale con la ragione, di descriverlo e di conoscerlo. La filosofia arrivò però ad esaurire questa spinta deterministica, data l'impossibilità di portarla alle estreme conseguenze.

Nietzsche e la storia come caos

Friedrich Nietzsche è considerato lo spartiacque tra la filosofia classica e la filosofia moderna, introducendo una nuova prospettiva della realtà, libera dai condizionamenti culturali e morali. Propose una nuova lettura della storia, in opposizione alla dialettica hegeliana e al mito del progresso positivista, che proponevano una lettura univoca e sicura del mondo, mentre Nietzsche inserì il germe del caos. Nella *Seconda considerazione inattuale, Sull'utilità e il danno della storia per la vita* (inattuale perché si oppone alle ideologie attuali) scrive:

> La storia, in quanto sia al servizio della vita, è al servizio di una forza non storica, e perciò non potrà ne dovrà diventare mai […] pura scienza, come per esempio lo è la matematica.
>
> (Friedrich Nietzsche, *Sull'utilità e il danno della storia per la vita*, Trad. It. Sossio Giametta, Milano, Adelphi, 2017)

Come per il caos deterministico (che analizzeremo successivamente) il problema dell'attività storiografica sta in una deficienza sperimentale: non è possibile avere una teoria che comprenda scientificamente il divenire storico, perché non possiamo avere una visione oggettiva, dato che ci troviamo a vivere all'interno della storia. Possiamo analizzare la realtà solo dalla nostra prospettiva, per cui la storiografia è solamente un'attività di ermeneutica.

La storia di Eugenio montale

La storia non si snoda
come una catena
di anelli ininterrotta.
In ogni caso
molti anelli non tengono.
La storia non contiene
il prima e il dopo,
nulla che in lei borbotti
a lento fuoco.
La storia non è prodotta
da chi la pensa e neppure
da chi l'ignora. La storia
non si fa strada, si ostina,
detesta il poco a poco, non procede
né recede, si sposta di binario
e la sua direzione
non è nell'orario.
La storia non giustifica
e non deplora,
la storia non è intrinseca

perché è fuori.
La storia non somministra
carezze o colpi di frusta.
La storia non è magistra
di niente che ci riguardi.
Accorgersene non serve
a farla più vera e più giusta.

Questa poesia di Montale è contenuta nella raccolta *Satura.* Da queste parole emerge una prospettiva antistorica molto radicale, simile a quella di Nietzsche: la storia non ha alcun ordine, alcun fine e non insegna nulla all'uomo.

La poesia si basa sull'anafora *La storia non* dato che Montale non è in grado di darne una definizione in positivo, ma solo in negativo. Questo perché nell'epoca del Relativismo e dell'Incertezza non è possibile conoscere il senso ultimo delle cose, ma solo averne una conoscenza limitativa. Inoltre utilizza il correlativo oggettivo per sostenere il pensiero (a)razionale del poeta.

Il poeta nega ogni prospettiva di una conoscenza in grado di dare una struttura ordinata e determinata alla storia, cioè tentare di renderla una *catena di anelli ininterrotta*. Proseguendo questa metafora spiega come ogni tentativo di fare questo è destinato al fallimento, perché *in ogni caso molti anelli non tengono*, dato che tutte le teorie che hanno provato a spiegare la storia arrivano ad un punto nel quale non sono più in grado di riuscirvi. La critica prosegue con un'altra metafora ironica: il passato è considerato da alcuni come una pietanza sul fuoco che *borbotta*. Questo ribollire a *lento fuoco*, rappresenta tutti quei processi che si crede avvengano e portino ad un risultato, i quali non esistono per Montale. La critica si rivolge poi all'Hegelismo (secondo il quale i fatti sono ordinati dallo Spirito secondo la dialettica tesi-antitesi-sintesi) ed al Marxismo (che interpreta la realtà a piacimento). La storia diventa allora un treno senza meta e senza orari (vv 15-17).

Una volta giunto a questa conclusione il ragionamento prosegue negando la possibilità di trovare valori morali e pedagogici nella storia: ella non è umana, non segue le nostre logiche e non agisce come noi: giustificando, punendo o insegnando.

LA TEORIA DEL CAOS

La teoria del Caos è il risultato scientifico dell'accettare la non conoscenza, di prendere in considerazione i limiti della matematica. Si occupa di studiare fenomeni che siamo in grado di descrivere dal punto di vista teorico, ma presentano difficoltà pratiche delle quali l'origine deriva direttamente dalle caratteristiche matematiche delle leggi fisiche e non dalla presenza di variabili aleatorie (ad esempio come in quantistica dove si conosce solo la probabilità di un evento), per questo si parla di caos deterministico.
Le caratteristiche matematiche necessarie, ma non sufficienti, perché si possa riscontrare questa tendenza sono:

- Il sistema deve essere non risolvibile analiticamente
- Lo spazio delle fasi deve essere ad almeno tre dimensioni
- La traiettoria dello spazio delle fasi deve essere una curva di lunghezza infinita contenuta in un volume finito (detto attrattore *strano*)

Un sistema si dice caotico se:

- Ha forte dipendenza dalle condizioni iniziali (il cosiddetto *Effetto farfalla*)
- Dimostra nel lungo termine una forte aperiodicità
- Ha almeno uno degli esponenti di Lyapunov positivo (i quali descrivono la divergenza esponenziale del sistema)

Spesso sistemi di questo tipo hanno un alto grado di libertà, cioè il sistema è determinato da una grande quantità di variabili, ma non necessariamente. Per studiare vengono utilizzati quindi sistemi che dipendono da un basso numero di variabili per ridurre il tempo necessario al calcolatore per svolgere i calcoli, ad esempio le equazioni di Lorenz e quelle di Rössler. Ad oggi il caos deterministico è ancora oggetto di studio da parte di fisici e matematici, però sono state fatte importanti scoperte:

- L'attrattore *strano* ha comportamento e dimensione frattale
- Esiste una relazione tra gli esponenti di Lyapunov e la dimensione dell'attrattore

LA *SCOPERTA* DEL CAOS

In seguito alla Rivoluzione Scientifica di Isaac Newton si diffuse nella coscienza degli scienziati europei, sempre con più certezza, l'ipotesi deterministica, secondo la quale date le condizioni iniziali e le caratteristiche di un sistema fisico, tramite le leggi della fisica è possibile calcolare le caratteristiche del sistema in funzione di un qualsiasi valore di tempo, anche tendente a infinito. Dato che non è possibile conoscere con precisione nulla (cioè pari a zero) le caratteristiche di un sistema (ad esempio la posizione), si è comunque assunto che data una incertezza iniziale l'incertezza finale non aumenti all'infinito (cioè abbia un valore finito), dato che per molti sistemi fisici questo è vero. Semplificando il concetto: da simili situazioni iniziali ci aspettiamo di ottenere simili risultati.
Un esempio perfetto di sistema deterministico è il pianeta Terra che ruota intorno al Sole, il quale si muove su un'orbita ellittica, parabolica o circolare (ciò dipende dalla velocità iniziale) e il suo moto è descritto interamente dalla legge di gravitazione universale e dalla seconda legge della dinamica

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad \vec{F} = m\vec{a}.$$

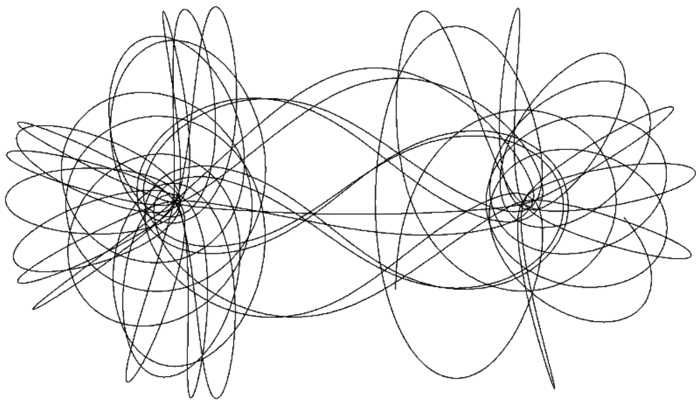
dalle quali si ottiene la posizione del corpo in funzione del tempo, data da equazioni della forma:

$$\begin{cases} x = a \cdot cos(\omega t) + c \\ y = b \cdot sin(\omega t) \end{cases}$$

ad eccezione del caso particolare in cui il corpo segua una traiettoria parabolica invece che ellittica.
Lo stesso Newton tentò di trovare la traiettoria di una Terra che si muove in un sistema con due Soli puntiformi distinti, invece che uno. Questo quesito divenne noto come il *problema dei tre corpi*, il quale (sebbene abbia le stesse leggi del precedente sistema) non è risolvibile analiticamente, cioè non è possibile arrivare ad una soluzione della forma:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Nel XVIII secolo si è inizialmente supposto che in realtà il problema fosse risolvibile per qualsiasi tempo t, ma in quel momento non fosse possibile farlo perché non erano ancora stati scoperti gli strumenti matematici necessari, per cui si è considerato un deficit algebrico e non fisico. Si è tentata allora una soluzione numerica al problema: data una massa con una posizione iniziale e una velocità iniziale si andava a calcolare lo spostamento e la variazione della velocità per un istante di tempo Δt prossimo allo 0 (ma pur sempre finito, ad esempio 0,001 s), ottenute le nuove coordinate e il nuovo vettore velocità si iterava il procedimento, ottenendo la traiettoria discreta del corpo dopo aver congiunto ordinatamente tutti i punti. Anche assumendo che la massa dei due soli sia tale da non subire l'effetto del corpo in movimento si arriva ad una traiettoria come quella in figura, la quale non ha nulla a che vedere con le equazioni precedenti. La Terra ruota intorno a uno dei due soli alternativamente senza seguire un ordine preciso. Inoltre se si prova a ripetere il calcolo per due situazioni iniziali molto simili (ad esempio con velocità differenti dell'1%) si noterà che dopo una fase iniziale nelle quali le traiettorie sono quasi adiacenti queste divergeranno fino a seguire due percorsi che non hanno nulla a che vedere tra loro. Nel 1987 i matematici Heinrich Bruns e Henri Poincaré, pionieri della teoria del caos, dimostrarono che non esistono soluzioni algebriche al problema dei tre corpi.



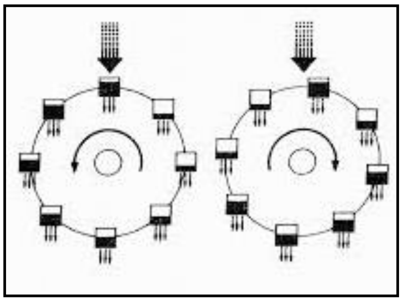
Oltre a questo anche altri sistemi semplici (ad esempio il pendolo doppio) mostrarono come l'algebra classica non sia in grado di sostenere l'ipotesi deterministica iniziale e sia quindi necessario esplorare nuove strade non convenzionali del mondo della matematica, che prevedano anche l'utilizzo di calcolatori, ormai indispensabili per svolgere questo tipo di calcoli. Lo studio di questi sistemi sarà ripreso in modo compiuto nel 1962 da Edward Lorenz, portando alla nascita effettiva della teoria del Caos.

SISTEMI NON RISOLVIBILI ANALITICAMENTE

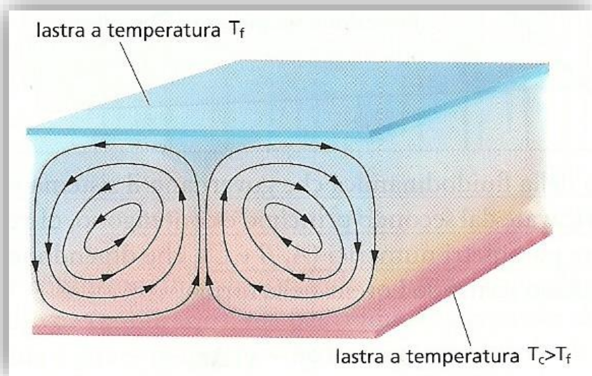
Sono sistemi dei quali, sebbene esista una descrizione dal punto di vista fisico, non è possibile ottenere una funzione analitica che risolva il sistema in funzione della variabile tempo. Per questi fenomeni è possibile arrivare solamente ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie, ad esempio le equazioni di Lorenz.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - x) - y \quad con\ \sigma, \rho, \beta \in \mathbb{R} \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

Queste descrivono, per istanza, due fenomeni:



- la ruota idraulica (in figura), messa in moto da un flusso d'acqua che va a riempire dei contenitori forati, i quali svuotandosi spostano il baricentro del corpo facendolo ruotare con diverse velocità angolari. Le tre variabili descrivono la velocità angolare (x) e le coordinate del centro di gravità (y,z). Mentre le costanti dipendono dall'attrito del perno della ruota e dal flusso d'acqua.
- il movimento termico di convezione di un fluido inserito in un contenitore del quale il bordo superiore e inferiore hanno una differenza di temperatura proporzionale a ρ, il quale va a formare dei vortici. Il parametro σ è il rapporto tra la viscosità del fluido e la sua conducibilità termica mentre β è il rapporto tra lunghezza e altezza della scatola. Le tre variabili rappresentano la velocità di rotazione (x), la differenza di temperatura tra correnti ascendenti e discendenti (y) e l'andamento della temperatura in relazione all'altezza (z).



Di queste equazioni è possibile solamente calcolare iterativamente la traiettoria risultante con il seguente procedimento. Dato che per ogni punto (x,y,z) noi conosciamo le tre componenti della derivata e data la definizione di questa:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

possiamo considerare un intervallo di tempo Δt molto piccolo (ad esempio 0.0001 s) e grazie a quello approssimare lo spostamento Δx per ognuna delle tre dimensioni, trasformando le tre equazioni del sistema in modo che per ogni punto diano il vettore spostamento approssimato.

$$\begin{cases} \Delta x = \sigma(y - x) \cdot \Delta t \\ \Delta y = (x(\rho - x) - y) \cdot \Delta t \quad con\ \sigma, \rho, \beta \in \mathbb{R} \\ \Delta z = (xy - \beta z) \cdot \Delta t \end{cases}$$

Data la grande quantità di calcoli necessari per ottenere una traiettoria attendibile si utilizzano dei calcolatori. Si riporta ad esempio il calcolo grafico delle equazioni di Lorenz scritto in linguaggio di programmazione Java che calcolerà la traiettoria per $t=100$ s, con un $\Delta t=0.0001$ s e le costanti ρ (B), σ (A), β (C) con i valori utilizzati da Lorenz[1].

GRAFICO ITERATIVO IN JAVA

La classe seguente è necessaria per creare il Frame sul quale verrà proiettato il grafico ottenuto

```
package Litium;
import java.awt.Container;
	//librerie necessarie
import javax.swing.JFrame;
public class GraficoGen {
	@SuppressWarnings("deprecation")
	public static void main(String[] args) {
		JFrame f = new JFrame("Attrattore Lorenz xyz"); //creazione del Frame
		f.setBounds( 0,0, 1000,700);
		Container c = f.getContentPane();	//creazione del contenitore
		PanelGen panel = new PanelGen();	//aggiunta oggetto PanelGen
		c.add(panel);
		f.show();				//presentazione del Frame
	}
}
```

Questa classe estende la superclasse JPanel ed è necessaria per inserire il grafico nel frame, all'interno di essa sono svolti tutti i calcoli necessari per ottenere i punti dello spazio delle fasi.

```
package Litium;
import java.awt.*;
import javax.swing.JPanel;
@SuppressWarnings("serial")
public class PanelGen extends JPanel{
	public void paintComponent(Graphics g){
		super.paintComponent(g);
```

Dichiarazione ed eventuale valorizzazione delle variabili necessarie per l'esecuzione

```
		double x=1,y=1,z=1,A=10,B=28,C=2.666667,dt=0.0001;
		double ix,iy,iz,dx,dy,dz,xf,yf;
		double lx=1000,ly=700,xc=200,yc=330,alfa=0.2,beta=0.1;
```

Creazione dell'oggetto grafico g e disegno degli assi cartesiani xyz

```
		g.setColor(Color.black);
		g.drawLine((int) xc,(int) (yc),(int) xc, 0);
		g.drawLine((int)xc,(int) (yc),(int) lx, (int) (yc+(lx-
xc)*Math.tan(beta)));
		g.drawLine((int)xc,(int) (yc), (int) (xc-(ly-
yc)*Math.tan(alfa)),(int) ly);
```

Ciclo for che andrà ad iterare il calcolo un milione di volte

```
		for (int i=0;i<1000000;i++) {
```

Calcolo spostamento approssimato per il punto (x,y,z)

```
			dx=A*(y-x)*dt;
			dy=(B*x-y-x*z)*dt;
			dz=(x*y-C*z)*dt;
```

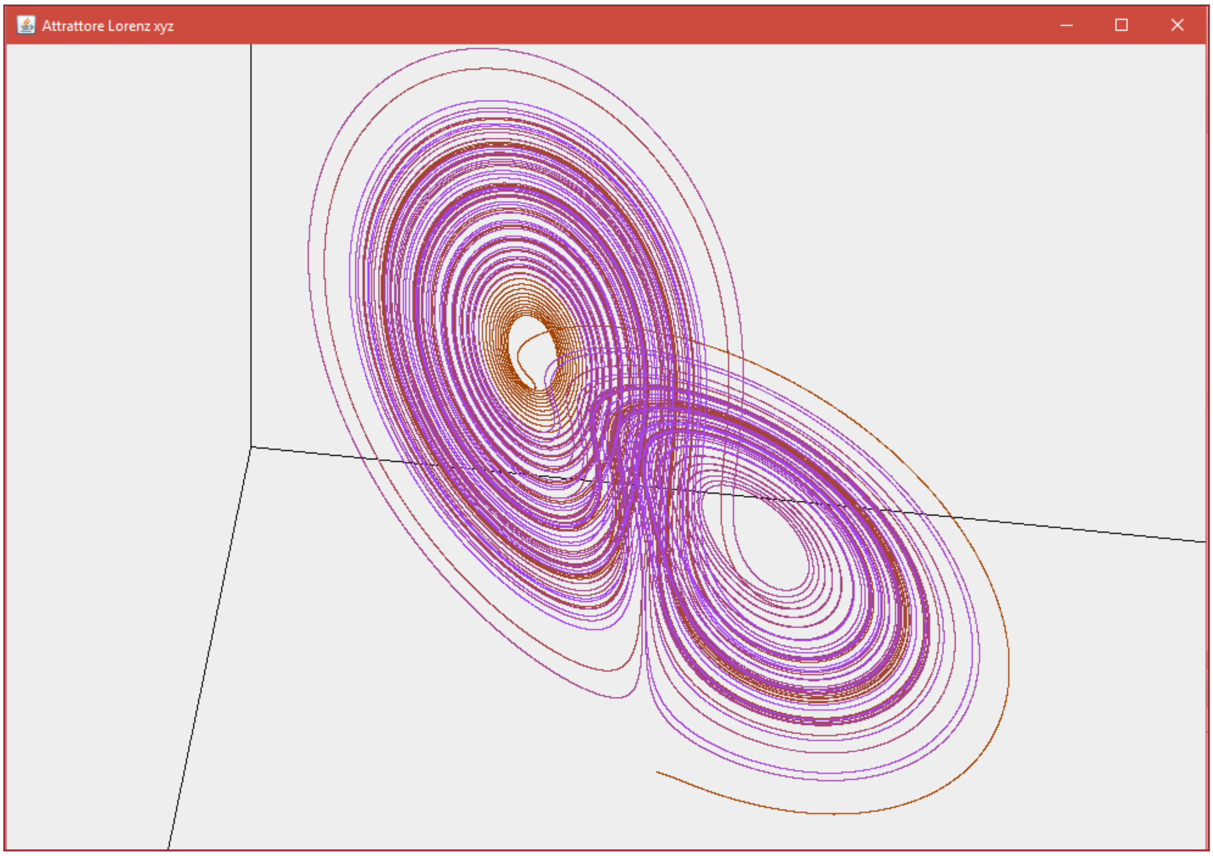
Spostamento del punto

```
			x=x+dx;
			y=y+dy;
			z=z+dz;
```

Funzioni per proiettare su tre dimensione la traiettoria utilizzando la trigonometria

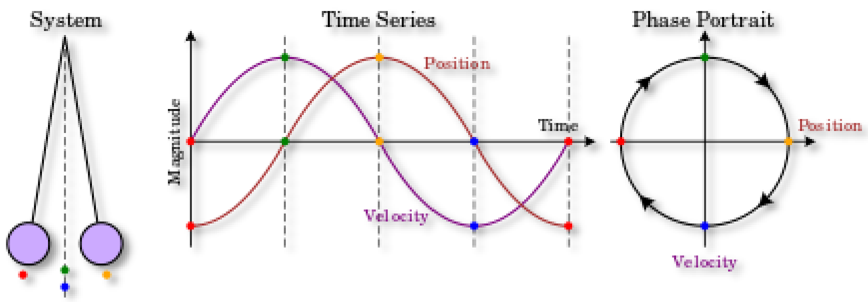
[1] $\rho=28$, $\sigma=10$, $\beta=8/3$. Durante questa tesi utilizzeremo questi come *valori standard*

```
                        ix=((x+30)/60)*400;
                        iy=((y+30)/60)*700;
                        iz=(z/50)*500;
                        xf=xc-Math.sin(beta)*ix+iy*Math.cos(alfa);
                        yf=yc+Math.cos(beta)*ix+iy*Math.sin(alfa)-iz;
                        int blu=((int) ((i*255/1000000)));
```
Colorazione progressiva dei punti del grafico (dal rosso al blu) e proiezione
```
                        Color cr = new Color(164,68,blu);
                        g.setColor(cr);
                        g.drawLine((int)xf,(int)yf,(int)xf,(int)yf);
                        }
               }
      }
```
Dopo aver eseguito il programma il computer mostrerà il seguente frame



LO SPAZIO DELLE FASI

Esso è lo spazio delle variabili che descrivono univocamente un sistema. Ogni punto rappresenta un possibile stato dinamico del sistema. Da uno stesso punto dello spazio delle fasi il sistema evolve sempre allo stesso modo, dato che la legge matematica è data solo in funzione delle variabili. La dimensione dello spazio equivale al numero di variabili minime dal quale dipende il sistema, ad esempio per una massa che si muove lungo una retta è necessario uno spazio a due dimensioni (posizione e quantità di moto) mentre per una massa che si muove su uno spazio bidimensionale sono necessarie quattro variabili (posizione su x e y, quantità di moto proiettata su x e y). Bisogna fare attenzione a distinguere tra la traiettoria dello spazio delle fasi e quella *fisica*. La seconda da informazioni solo sulla posizione nello



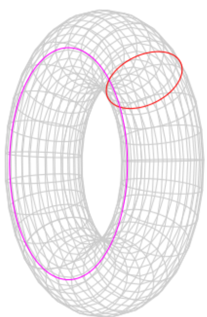
spazio, mentre la prima permette di conoscere tutte le informazioni fisiche sul sistema, dalle quali è possibile risalire anche alla posizione. Si può notare in figura la differenza tra le due traiettorie nel sistema del pendolo semplice:

- *System* equivale alla traiettoria effettiva nello spazio fisico del pendolo
- *Time Series* mostra la posizione e la velocità in funzione del tempo, cioè la traiettoria nello spazio-tempo
- *Phase Portrait* mostra l'andamento di posizione e velocità nello spazio delle fasi. Il verso della traiettoria rappresenta quello del tempo.

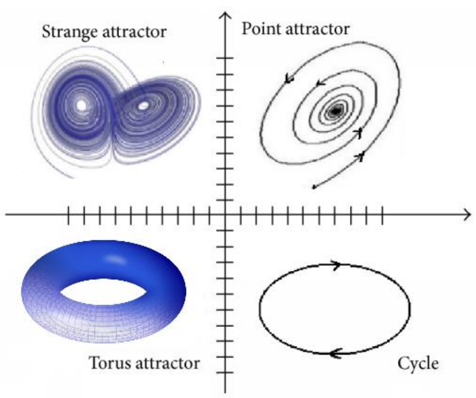
Le traiettorie dello spazio delle fasi non si possono mai incrociare (a differenza di quelle fisiche), perché ne seguirebbe che dal punto di intersezione il sistema potrebbe evolvere in due modo distinti da un solo stato identico, contraddicendo il determinismo.

ATTRATTORI DELLO SPAZIO DELLE FASI

Dato un sistema dissipativo (per il quale si intende un sistema termodinamicamente aperto che lavora in uno stato lontano dall'equilibrio termodinamico scambiando con l'ambiente energia, materia e/o entropia) questo evolverà nel tempo verso un insieme di stati finali: ad esempio un pendolo semplice con attriti tenderà a raggiungere il punto dove si annullano posizione e quantità di moto (cioè si fermerà). Se invece si considera come sistema un pendolo al quale viene fornita energia per continuare a oscillare questo tenderà ad un ciclo limite con oscillazioni isocrone, come quello del pendolo senza attriti, dato che l'energia dispersa è uguale a quella assorbita. In uno spazio a tre dimensioni gli attrattori sono rappresentati da una figura geometrica, per cui sono semplici da visualizzare. Oltre al punto e al ciclo limite può giungere ad un toroide a 2 dimensioni[2], il quale è una figura geometrica data dalla rotazione di una circonferenza intorno ad un asse appartenente al suo stesso piano, ma disgiunto. In questo caso la traiettoria si muove a spirale sulla superficie. I tre attrattori citati prima sono detti *normali*, dato che la distanza tra due traiettorie distinte rimane costante o diminuisce, ma non aumenta mai. Esiste un'altra famiglia di attrattori, detti *strani*, i quali sono curve di lunghezza infinita contenute in un volume finito, all'interno dei quali due traiettorie vicine tendono ad allontanarsi. Dato che la curva deve essere infinita la traiettoria passa sempre da punti distinti, altrimenti raggiungerebbe un ciclo limite,



Toro a 2 dimensioni



[2] La dimensione del toro è il numero di variabili necessarie per individuare un punto su di esso. Esistono toroidi a più di 2 dimensioni, ma dato che si sviluppano su più di 3 dimensioni non sono visualizzabili graficamente, ma comunque sono studiati in campo matematico.

e per fare questo è necessario che lo spazio delle fasi sia ad almeno tre dimensioni. All'interno di questo volume due traiettorie inizialmente vicine possono sia allontanarsi che avvicinarsi. La teoria del Caos studia anche le proprietà di questi attrattori, per i quali non valgono le normali leggi della matematica, anche se descrivono molti fenomeni.

SISTEMI APERIODICI

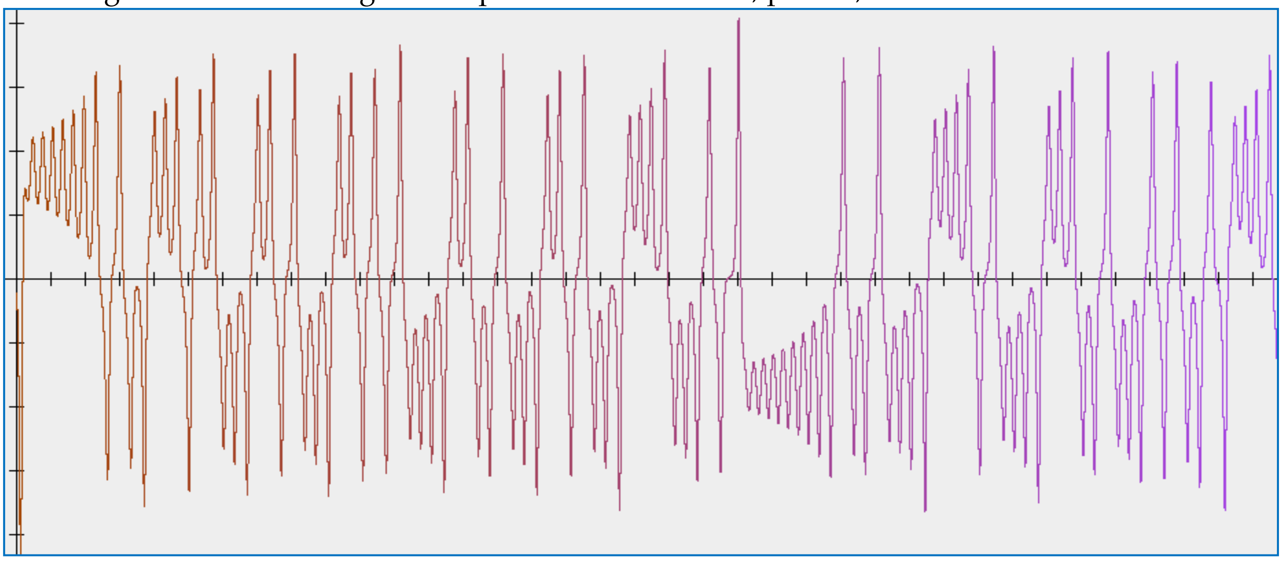
Se si considera il quoziente tra due numeri naturali si otterrà un numero razionale, il quale può essere scritto in forma frazionaria o in forma decimale. Per alcuni numeri (come 2/7) se si scrive il valore in forma decimale si otterrà una serie infinita di numeri:

$$2 \div 7 = 0{,}285714285714285714285714\ldots$$

Si può però notare che i numeri 285714 si ripetono in continuazione, perciò in questo caso si potrà parlare di periodicità e sarà possibile conoscere qualsiasi n-esima cifra semplicemente conoscendone le prime 9 che si ripetono.
Si consideri ora √2 oppure π, questi numeri hanno una serie infinita di cifre decimali:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887\ldots$$

Per le quali non esiste alcuna sequenza, alcun ordine che ci permetta di conoscere la n-esima cifra senza dover calcolare tutte quelle precedenti, nessun periodo. Sebbene vi sia un ordine secondo il quale i numeri vengono scritti sembrano procedere a *caso*. Questi numeri sono detti irrazionali aperiodici.
Anche i sistemi caotici presentano questo tipo di aperiodicità: si consideri il sistema *ruota idraulica* visto in precedenza e descritto dalle equazioni di Lorenz utilizzando i valori standard per le variabili. In questo sistema la variabile x rappresenta la velocità angolare con cui ruota il corpo centrale, quando questa è positiva la rotazione avviene in senso orario e quando è negativa antiorario. Si riporta al seguire il grafico, ottenuto in moto iterativo utilizzando Java, che riporta sull'asse delle ascisse il tempo t e su quello delle ordinate la velocità angolare x.
Ad ogni oscillazione del grafico equivale una rotazione, per cui, indicando con O la rotazione

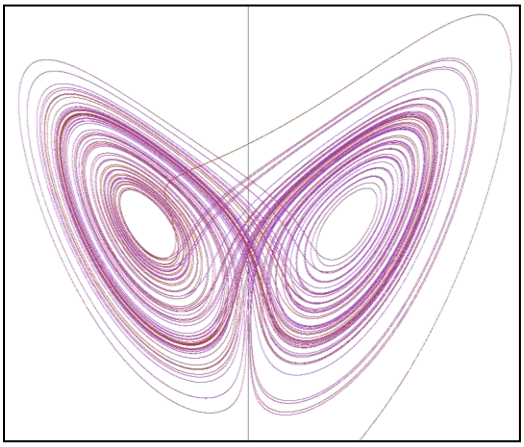


in senso orario e A quella in senso antiorario, si può scrivere il senso delle prime rotazioni:
AOOOOOOOOAOAAOOOAOOAAAOOAOAAAOOAOAOAAAAOOAAOAAAOOAO…
Si può notare con un'analisi veloce che in certi punti il grafico sembra ripetersi, però approfondendo l'analisi si noterà l'impossibilità di trovare un periodo stabile. Come per √2 da una sequenza di calcoli matematici deriva una sequenza di istanze che sembrano casuali. Questa è una caratteristica dei sistemi caotici che permette di distinguerli immediatamente da

quelli *tradizionali*. Emerge inoltre come il problema non stia nella presenza di variabili aleatorie, ma nella stessa matematica che va a risolvere il sistema.

EFFETTO FARFALLA ED ESPONENTI DI LYAPUNOV

Questa è la parte più celebre e importante della teoria del Caos. È stata proposta anche nel mondo dello spettacolo (come ad esempio nei film *Jurassic Park* e *The Butterfly Effect*), anche al di fuori del suo ambito prettamente matematico. Sfortunatamente in alcuni casi questo ha portato ad una sua incomprensione. Il nome deriva dal titolo di una conferenza del 1972 di Edward Lorenz: "*Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wing in Brasil set of a Tornado in Texas?*" (Predicibilità: può il battito d'ali di una farfalla causare un tornado in Texas?). Indica l'elevata *sensibilità alle condizioni iniziali* di un sistema dinamico, cioè ad una piccola differenza tra due valori seguirà, svolgendo i calcoli, una grande differenza tra i risultati. L'effetto farfalla venne scoperto da Lorenz nell'ambito di studi sulla meteorologia. Lo studioso aveva creato un modello a 12 variabili che serviva per approssimare il meteo terrestre, il quale sembrava funzionare: dava previsioni simili a quelle che si riscontravano in natura, come cicloni, anticicloni e perturbazioni. Dimostrava inoltre la stessa instabilità che notiamo noi nel tempo, anche se il numero di variabili da prendere in considerazione era ridotto. Dato che i tempi di calcolo erano molto lunghi (anche giornate intere) Lorenz decise un giorno di riprendere i dati del dì precedente, per prolungare le osservazioni. Copiò allora lo stato del sistema (cioè le 12 variabili) a metà del cammino. Notò che, dopo una fase iniziale nella quale non si notava alcuna differenza tra le due traiettorie computate, ad un certo punto i valori iniziarono a divergere. Cercando di capire dove si trovasse l'errore lo studioso si accorse che mentre il calcolatore svolgeva i calcoli con una precisione di 6 cifre significative mostrava alla console i risultati con un arrotondamento a 3 cifre significative, per cui lui inserendo il valore a video aveva inserito un numero diverso per massimo un millesimo da quello che la prima serie di calcoli aveva eseguito. Normalmente in fisica una precisione dell'1‰ è più che sufficiente per non influire sui calcoli, ma in questo caso aveva creato una grande differenza, fino a rendere il risultato inattendibile. Lorenz allora iniziò a studiare un sistema ancora più semplice: il moto di un fluido tra due superfici piane e parallele a temperature diverse (visto prima tra i sistemi non risolvibili analiticamente) e riscontrò lo stesso problema.



Si riporta un grafico (e prima il codice Java necessario per ottenerlo) che mostra l'andamento della distanza tra due traiettorie, tra le quali la differenza iniziale è di 0.001. La distanza è calcolata utilizzano il Teorema di Pitagora su 3 dimensioni.[3]

```
import java.awt.*;
import javax.swing.JPanel;
```

[3] Il Teorema di Pitagora può essere usato su più dimensioni nella forma seguente, dove n è il numero delle dimensioni e d_i la distanza nella proiezione sulla dimensione i-esima.

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + \cdots} = {\sum_{i=1}^{n} d_i^2}^{1/2}$$

```java
@SuppressWarnings("serial")
public class PanelN extends JPanel{
		public void paintComponent(Graphics g){
			super.paintComponent(g);
			double x1=8,y1=1,z1=1;
			double x2,y2=1,z2;
			double ix=50,iz,A=10,B=28,C=2.6666666666666667;
			double dx1,dy1,dz1,dx2,dy2,dz2,dt=0.001,d0=0.001,d,y,x;
			g.setColor(Color.black);
			g.drawLine(50, 0, 50, 650);
			g.drawLine(0, 600, 1200, 600);
			g.drawLine((int)ix,(int)650,(int)ix,(int)500);
			for(int l=0;l<100;l++)
				g.drawLine((int)45,(int)600-l*100,(int)55,(int)600-
l*100);
			for(int t=0;t<100;t++)
				g.drawLine((int)50+25*t,(int)605,(int)25*t+50,(int)595);
			g.setColor(Color.blue);
			for (int j=0;j<100000;j++) {
				x=dt*j;
				y=d0*Math.exp(x*0.9057);
				g.drawLine((int)(50+25*x),(int)(600-
10*y),(int)(50+25*x),(int)(600-10*y));
			}
```

Esecuzione delle prime 10000 iterazioni, in modo da ottenere un valore all'interno dell'attrattore, come avvenne per Lorenz.

```java
			for (int i=0;i<10000;i++) {
				dx1=A*(y1-x1)*dt;
				dy1=(B*x1-y1-x1*z1)*dt;
				dz1=(x1*y1-C*z1)*dt;
				x1=x1+dx1;
				y1=y1+dy1;
				z1=z1+dz1;}
```

Perturbazione dell'orbita di d0

```java
			x2=x1+d0;
			y2=y1;
			z2=z1;
			g.setColor(Color.black);
```

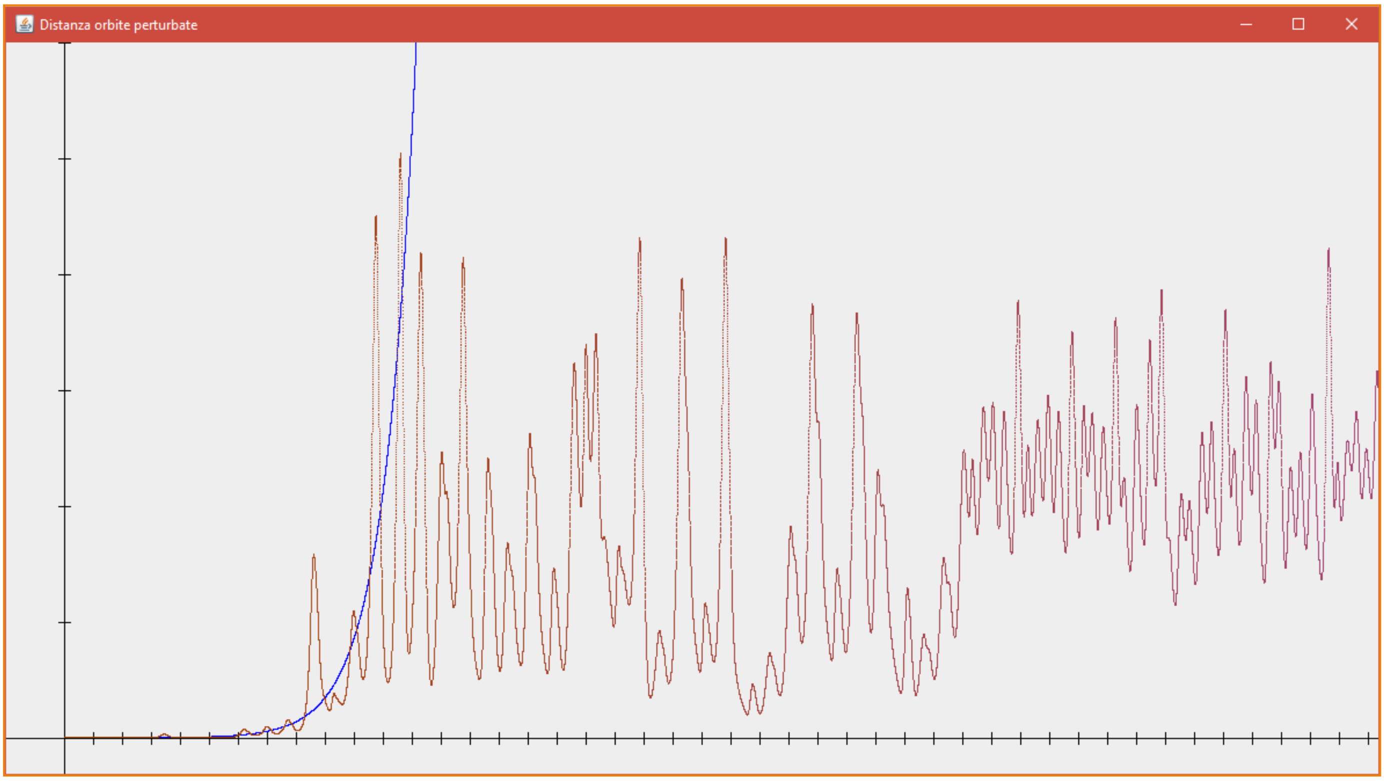
Calcolo delle due traiettorie e della loro distanza

```java
			for (int i=0;i<100000;i++) {
				dx1=A*(y1-x1)*dt;
				dy1=(B*x1-y1-x1*z1)*dt;
				dz1=(x1*y1-C*z1)*dt;
				x1=x1+dx1;
				y1=y1+dy1;
				z1=z1+dz1;
				dx2=A*(y2-x2)*dt;
				dy2=(B*x2-y2-x2*z2)*dt;
				dz2=(x2*y2-C*z2)*dt;
				x2=x2+dx2;
				y2=y2+dy2;
				z2=z2+dz2;
```

Calcolo della loro distanza utilizzando il Teorema di Pitagora su 3 dimensioni.

```java
			d=Math.sqrt((x1-x2)*(x1-x2)+(y1-y2)*(y1-y2)+(z1-z2)*(z1-z2));
				ix=ix+25*dt;
				iz=600-10*d;
				int blu=((int) ((i*255/100000)));
				Color cr = new Color(164,68,blu);
```

```
                    if(ix<1200 && iz<650 && iz>0) {
                        g.setColor(cr);
                        g.drawLine((int)ix,(int)iz,(int)ix,(int)iz);
                    }
                }
            }
        }
```



Si può notare come inizialmente la distanza sia quasi nulla, poi aumenti esponenzialmente, fino ad arrivare ad un punto nel quale oscilla tra dei minimi e dei massimi (i quali rappresentano valori agli estremi dell'attrattore) che non seguono alcun ordine.
Perciò quando si vuole calcolare l'evoluzione di sistemi caotici bisogna mettere in conto che anche la più minima differenza nelle condizioni iniziali, come il battito d'ali di una farfalla in una corrente, dopo tempi relativamente lunghi può influire pesantemente nel risultato finale, spostando ad esempio un uragano dal Sudamerica al Texas. L'unica parte attendibile del nostro calcolo è quella iniziale dove la distanza è quasi nulla, la quale può essere calcolata attraverso gli esponenti di Lyapunov.
Inoltre dobbiamo porre anche un punto di domanda sui nostri calcoli. I sistemi caotici devono presentare necessariamente un termine non lineare (altrimenti sarebbero risolvibili analiticamente), perciò ad ogni iterazione dei calcoli le cifre decimali del risultato aumenteranno. Dato che il computer, per quanto potente che sia, memorizzerà sempre variabili con un numero definito di cifre significative, esso dovrà arrotondare necessariamente i valori durante il calcolo. Quindi anche supponendo di avere un dato con incertezza nulla (il che è impossibile sia per ovvi problemi sperimentali, sia per la legge dell'indeterminazione di Heisenberg) la deviazione minima dovuta all'arrotondamento porterà ad una grande deviazione dopo tempi lunghi.

GLI ESPONENTI DI LYAPUNOV

Gli esponenti di Lyapunov misurano la velocità media di allontanamento o avvicinamento di due orbite dello spazio delle fasi infinitesimamente vicine per tempi sufficientemente lunghi in un sistema dinamico. Ad un punto nello spazio delle fasi sono associati un numero di esponenti di Lyapunov pari alla dimensione dello spazio, dei quali ognuno misura la velocità media di distensione del modulo di uno dei vettori ortonormali al punto. L'insieme $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\}$ degli esponenti ordinati in ordine crescente è detto spettro di Lyapunov. Questi numeri permettono di conoscere molte informazioni sul sistema al quale appartengono.

Il più importante di questi è λ_1 (detto anche MLE, Maximal Lyapunov Exponent), perché date due traiettorie qualsiasi di distanza iniziale molto piccola d_0 in un sistema dinamico, la distanza tra esse in funzione del tempo potrà essere approssimata come:

$$d(t) \approx d_0 \cdot e^{\lambda_1 t}$$

Se questo esponente è positivo due traiettorie inizialmente vicine divergeranno esponenzialmente, quindi il sistema manifesterà una forte sensibilità alle condizioni iniziali. Perciò viene assunta la presenza di almeno un esponente di Lyapunov positivo come condizione affinché un sistema si possa definire caotico.

Dal grafico mostrato precedentemente si può notare la sovrapposizione tra la distanza computata tra i due punti e quella prevista dall'esponente di Lyapunov (in questo caso λ=0.9057). Si può notare come, fino a che il sistema non entra in un regime totalmente caotico, vi sia una somiglianza tra i due grafici. La distanza non può aumentare all'infinito dato che la traiettoria rimane sempre all'interno dell'attrattore.

Grazie all'MLE è anche possibile calcolare il tempo caratteristico come T=$(\lambda_1)^{-1}$, considerato il tempo oltre il quale un sistema dinamico diventa caotico. Ad esempio il tempo caratteristico del Sistema Solare è di 50 milioni di anni.

Inoltre moltiplicando il tempo caratteristico per ln(10) è possibile conoscere il tempo nel quale la distanza aumenterà il suo ordine di grandezza (cioè diventerà 10 volte tanto), inserendo infatti nell'equazione precedente il tempo $\tau = ln(10) \cdot (\lambda_1)^{-1}$ si otterrà:

$$d(t) \approx d_0 \cdot e^{\lambda_1 ln(10) \cdot (\lambda_1)^{-1}} \approx d_0 \cdot e^{ln(10)} \approx d_0 \cdot 10$$

Ad esempio per il sistema della ruota idraulica dopo 2.55 s una incertezza dell'1‰ sarà diventata dell'1%. Con un procedimento simile, ponendo k la distensione massima della distanza iniziale che tolleriamo, possiamo calcolare entro quale tempo t_k tollerare la divergenza dei valori ottenuti dal calcolatore:

$$k \cdot d_0 \approx d_0 \cdot e^{\lambda_1 t_k} \Rightarrow t_k \approx ln(k) \cdot (\lambda_1)^{-1}$$

Inoltre sommando tutti i valori dello spettro di Lyapunov possiamo sapere se il sistema al quale si riferiscono è dissipativo o conservativo:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 0 \Rightarrow dissipativo$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0 \Rightarrow conservativo$$

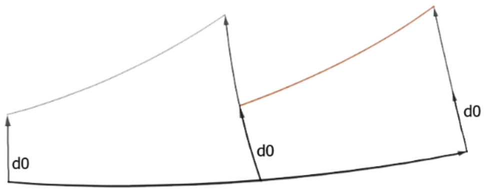
CALCULATION OF LYAPUNOV EXPONENTS

Due to the non-linear characteristics of a chaotic system, we can calculate the Lyapunov exponents only through numerical methods using a calculator in order to perform a great number of results and obtaining an average value. In this thesis we will use the *Orbit*

Separation algorithm, that calculates the largest Lyapunov exponent for an n-dimensional system of ordinary differential equations in the form:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \dots) \\ \dot{y} = g(x, y, \dots) \\ \dots \end{cases}$$

1. Initialize the system in a random starting point and iterate the calculation several times, in order to obtain a point of the phase-space that is contained in the strange attractor.
2. Perturb one of the n coordinate of a δ factor, so the initial distance between the two orbits is δ.
   $x_0^* = x_0 + \delta$
3. Continue to calculate the two systems for a fixed time step Δt
4. Calculate the distance between the two points obtained using the n-dimension version of Pythagorean Theorem
$$d_k = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + \cdots} = \sum_{i=1}^{n} d_i^2{}^{1/2}$$
5. Take the natural logarithm of the ratio between d and δ and store the obtained value
$$L_k = ln\left(\frac{d_k}{\delta}\right) = \lambda \cdot \Delta t$$
$$L_{s=}L_s + L_k$$
6. Normalize the distance vector $\vec{d}$ between the two points in order to obtain a same verse and direction vector with an absolute value $|\vec{d}| = \delta$ using a proportion. Thanks to this passage, all the second orbits will be uniformly perturbed from the principal orbit.
$$\frac{(x_{k+1}^* - x_{k+1})}{(x_k^* - x_k)} = \frac{\delta}{d_k}$$
$$x_{k+1}^* = \frac{\delta \cdot (x_k^* - x_k)}{d_k} + x_{k+1}$$



7. Iterate the cycle from point 3 for k times
8. Now calculate the largest Lyapunov exponent with the formula:
$$\lambda = \frac{L_k}{k \cdot \Delta t}$$

In order to obtain a more precise Lyapunov exponent we should use a high k value and a small time step. Also we can repeat more times the algorithm with more random starting points and take the average value for having a more performing result.
That Java code calculate the largest Lyapunov exponent for the Lorenz equation.

```
import java.util.Random;
public class Lorenz {
	public static void main(String[] args) {
		double l,t=0,d0=0.000000001,d1=1,j=0,x1=1,y1=1,z1=0,x2=0,y2=0,z2=0;
		double A=10,B=28,C=(2.666666666666666666666666666667);
		double dx1,dy1,dz1,dx2,dy2,dz2,dt=0.0001;
		double le,Le=0;
		int it=10000,nl=100;
		Random q=new Random();
			for (int c=1;c<=nl;c++) {
```

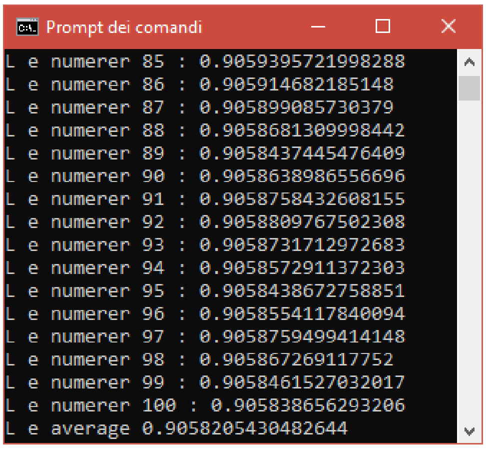
Initialization for 3 random values of x,y,z

```
				x1=q.nextDouble();
				y1=q.nextDouble();
				z1=q.nextDouble();
```

```
for (int i=0;i<11000;i++) {
```
Iteration needed for obtaining a point in the attractor
```
        if(i<1000) {
            dx1=A*(y1-x1)*dt;
            dy1=(B*x1-y1-x1*z1)*dt;
            dz1=(x1*y1-C*z1)*dt;
            x1=x1+dx1;
            y1=y1+dy1;
            z1=z1+dz1;
            }
```
Perturbation of the orbit and calculation of an exponent
```
        else if (i==1000) {
            x2=x1+d0;
            y2=y1;
            z2=z1;
            for(int k=0;k<it;k++) {
                dx1=A*(y1-x1)*dt;
                dy1=(B*x1-y1-x1*z1)*dt;
                dz1=(x1*y1-C*z1)*dt;
                x1=x1+dx1;
                y1=y1+dy1;
                z1=z1+dz1;
                dx2=A*(y2-x2)*dt;
                dy2=(B*x2-y2-x2*z2)*dt;
                dz2=(x2*y2-C*z2)*dt;
                x2=x2+dx2;
                y2=y2+dy2;
                z2=z2+dz2;
                }
            d1=Math.sqrt((x1-x2)*(x1-x2)+(y1-y2)*(y1-
y2)+(z1-z2)*(z1-z2));

            l=Math.log(d1/d0);
```
Storing of the exponent
```
            t=t+l;
            j++;
            }
        else {
```
Normalization of the distance vector and iteration of the process of calculation
```
            x2 = x1 + d0*(x2-x1)/d1;
            y2 = y1 + d0*(y2-y1)/d1;
            z2 = z1 + d0*(z2-z1)/d1;
            for(int k=0;k<it;k++) {
                dx1=A*(y1-x1)*dt;
                dy1=(B*x1-y1-x1*z1)*dt;
                dz1=(x1*y1-C*z1)*dt;
                x1=x1+dx1;
                y1=y1+dy1;
                z1=z1+dz1;
                dx2=A*(y2-x2)*dt;
                dy2=(B*x2-y2-x2*z2)*dt;
                dz2=(x2*y2-C*z2)*dt;
                x2=x2+dx2;
                y2=y2+dy2;
                z2=z2+dz2;
                }
            d1=Math.sqrt((x1-x2)*(x1-x2)+(y1-y2)*(y1-
y2)+(z1-z2)*(z1-z2));

            l=Math.log(d1/d0);
```

```
                        t=t+l;
                        j++;
                        }
                }
```
Calculation of Lyapunov exponent and storing
```
                le=t/(j*dt*it);
                System.out.println("L e numerer "+c+" : "+le);
                Le=Le+le;
                }
```
Printing the average value of the calculated Lyapunov exponents
```
        System.out.println("L e average "+(Le/nl));
        }
    }
```


After the execution of the program on the prompt, we obtain an average value for the largest Lyapunov exponent of

$$\lambda \cong 0.9058205430482644$$

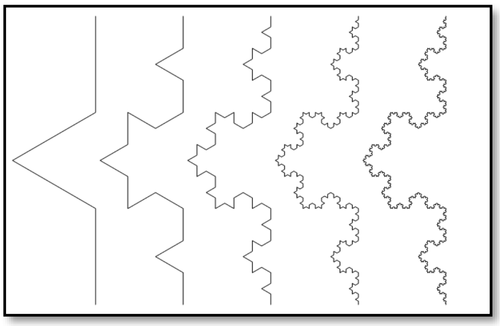
that is very close to the published value (λ=0.9056).
Due to the high number of the iteration process the execution of the program needed almost 5 minutes of time, for obtaining a better value we need more time and a more powerful computer.
For obtaining all the n Lyapunov exponents we have to use the Continuos Gram-Schmidt orthonormalization, that use orthonormal frames, Jacombian matrixes and stabilized matrixes for calculating the stretching in all the n dimension of the system.

LA NATURA FRATTALE DEL CAOS

I FRATTALI E LE LORO CARATTERISTICHE

Un frattale è un oggetto geometrico dotato di omotetia interna: si ripete nella sua forma allo stesso modo su scale diverse, e dunque ingrandendo una qualunque sua parte si ottiene una figura simile all'originale, questa proprietà è anche detta autosomiglianza. In natura esistono molti esempi nei quali uno stesso motivo si ripete su scale diverse, ad esempio negli alberi. Matematicamente i frattali non sono definiti da una funzione, bensì da un algoritmo che viene ripetuto un numero di volte tendente ad infinito. Perciò visivamente è possibile averne solamente una soluzione numerica. Un esempio di frattale è la curva di Koch, ottenuta partendo da un segmento di determinata lunghezza dal seguente algoritmo:

1. Dividere il segmento in tre segmenti uguali;
2. Cancellare il segmento centrale, sostituendolo con due segmenti identici che costituiscono i due lati di un triangolo equilatero;
3. Tornare al punto 1 per ognuno degli attuali segmenti.

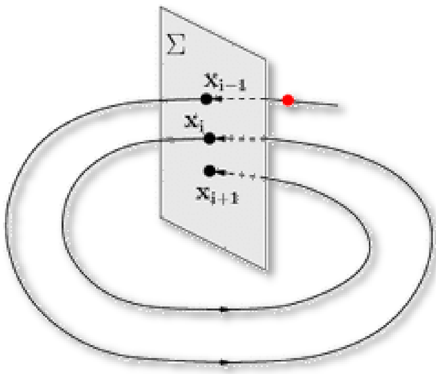


Il processo può essere iterato anche partendo da un triangolo ed applicandolo ad ognuno dei suoi lati. La figura a fianco mostra i primi cinque passaggi per la formazione della curva di Koch. Ingrandendo una parte qualsiasi della curva si otterranno sempre nuovi triangoli, simili ai precedenti, perciò la lunghezza di questa è infinita. Se si considera infatti una lunghezza iniziale di 1, dopo una iterazione sarà di 4/3 (dato che ognuno dei 4 segmenti ha lunghezza 1/3), dopo due passaggi di 16/9 e dopo n passaggi di $(4/3)^n$. Dato che il processo deve essere iterato all'infinito:

$$l \approx \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty$$

In una superficie finita è contenuta quindi una linea di lunghezza infinita. Questa non è una caratteristica solo di questo frattale, ma di molti altri. Ciò avviene anche in un attrattore strano (una curva di lunghezza infinita in un volume finito). Questo ci suggerisce che potrebbe esistere una relazione tra queste due realtà matematiche.

LE MAPPE DI POINCARÈ



Intersecando la traiettoria di un sistema nello spazio delle fasi e un piano otterremo una sezione di Poincarè considerando tutti i punti di intersezione tra piano e traiettoria. Si consideri l'attrattore di Lorenz e il piano z=25, data una porzione finita di questo piano (ad esempio $x, y \in [0,10]$) è possibile calcolare in modo approssimato la sua mappa con il seguente programma in Java.

```
public class PanelFr extends JPanel{
      public void paintComponent(Graphics g){
            super.paintComponent(g);
            double x=1,y=1,z=1,A=10,B=28,C=2.666667,dt=0.0001;
            double dx,dy,dz,xf=0,yf=0;
            g.setColor(Color.black);
```

Creazione griglia

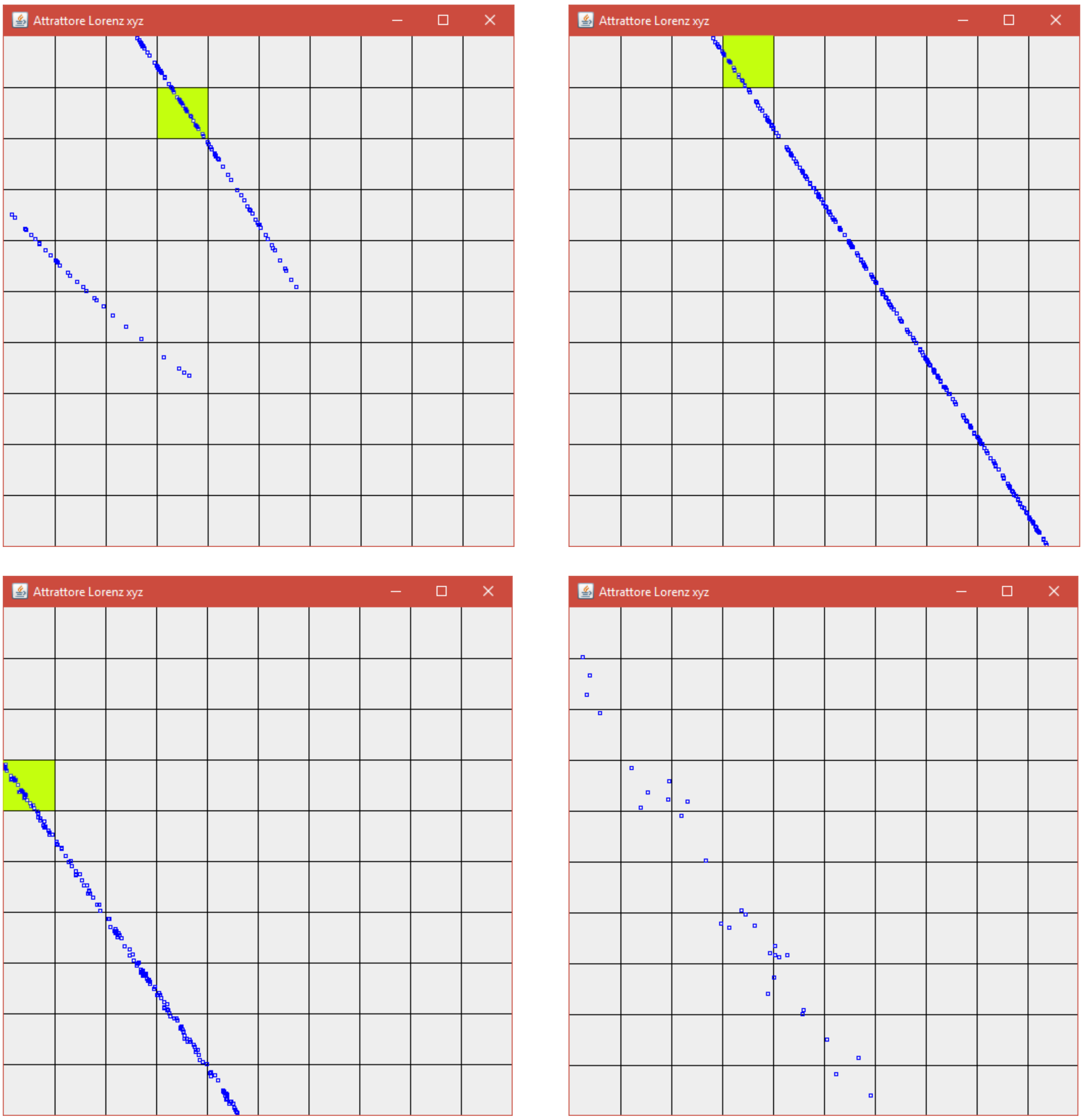
```
            for(int l=10;l>0;l--)
                  g.drawLine((int)0,(int)l*50,(int)500,(int)l*50);
            for(int t=10;t>0;t--)
                  g.drawLine((int)50*t,(int)0,(int)50*t,(int)500);
            g.setColor(Color.blue);
            for (int i=0;i<10000000;i++) {
                  dx=A*(y-x)*dt;
                  dy=(B*x-y-x*z)*dt;
                  dz=(x*y-C*z)*dt;
                  x=x+dx;
                  y=y+dy;
                  z=z+dz;
```

Selezione dei punti che intersecando il piano nella porzione desiderata e proiezione di essi

```
                  if (z>=24.999 && z<=25.001 && y>=0 && y<=10 && x>=0 && x<=10){
                        yf=(y)*50;
                        xf=(x)*50;
```

```
                    g.drawRect((int)xf -1,(int)yf -1,3,3);
                    }
                }
            }
        }
```
Una volta eseguito il programma è possibile scegliere una porzione inferiore del piano nella quale eseguire ancora l'intersezione, aumentando la precisione. Ecco il risultato della ripetizione di questo processo per 4 porzioni diverse, ognuna 10 volte più precisa dell'altra (la porzione di piano che viene zoomata ad ogni ripetizione è indicata in verde). Il processo non può essere iterato più volte per una incapacità del computer di eseguire un numero minimo di dati per avere la mappa con una adeguata precisione.

Come si può notare i punti della quarta mappa sembrano disporsi ancora su due linee distinte come nella prima mappa. Questa somiglianza tra varie scale è stata provata dal matematico indiano Divakar Viswanath anche per altri attrattori strani, oltre a quello di Lorenz. Data la grande precisione richiesta per fare questo (fino a 10^{-11}) è stato necessario utilizzare metodi di calcolo numerici inusuali. Perciò, dato che è presente autosomiglianza nell'attrattore strano, esso ha natura frattale. Questo è molto importante sia per avere informazioni aggiuntive sulla



traiettoria di un sistema caotico, sia per la possibilità di trovare relazioni tra la teoria del Caos e i molti oggetti che presentano natura frattale (come ad esempio le coste marine). Si è anche dimostrato che ogni punto dell'attrattore sulla mappa è anche un punto di accumulazione.

La dimensione frattale

Delle grandezze, quella che ha una dimensione è linea,
quella che ne ha due è superficie, quella che ne ha tre è corpo,
e al di fuori di queste non si hanno altre grandezze….
Aristotele

Nel saggio "gli oggetti frattali: forma, caso e dimensione" di Mandelbrot il matematico polacco affronta il problema di individuare una dimensione a questi oggetti. Se si considera ad esempio la curva di Koch vista prima appare ovvio che non possa avere la stessa dimensione di una linea (quindi D>1) perché ha una lunghezza infinita, però non può neanche essere considerato una superficie con area (quindi D<2). Per riuscire a risolvere questo problema Mandelbrot diede prima una definizione di dimensione dal punto di vista matematico adatta a descrivere la dimensione D di un oggetto in uno spazio a n dimensioni:

$$D = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{ln(N(\varepsilon))}{ln(\varepsilon)}$$

dove N(ε) è il numero di n-cubi[4] di lato ε e n è la dimensione minima necessaria per comprendere tutti i punti dell'oggetto negli ipercubi. Questa concezione di dimensione equivale ad una sorta di *peso* dell'oggetto nello spazio. È detta anche dimensione capacitiva o di Hausdorff.

Se si divide ad esempio un quadrato di lato l in quadrati più piccoli di lato ε il numero di questi quadrati sarà uguale al rapporto tra l'area di questo quadrato e l'area di un quadratino, perciò (utilizzando le regole dei logaritmi e svolgendo il limite) risulterà:

$$D = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{ln(^{S}/_{\varepsilon^2}))}{ln(\varepsilon)} = -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{ln(S)}{ln(\varepsilon)} - \frac{2ln(\varepsilon)}{ln(\varepsilon)} \right) = 2$$

Può essere fatta una simile dimostrazione per tutti gli oggetti che hanno dimensione 1,2 o 3, come segmenti, sfere e trapezi.

Invece per la curva di Koch bisogna seguire una logica diversa. Considerando $\varepsilon = 3^{-n}$, si otterrà che il numero dei segmenti in funzione di n (quindi per ε={1/3, 1/9, 1/27, …}) sarà 4^n. Dato che per n→+∞ risulta ε→0, si può scrivere:

$$D = -\lim_{n \to +\infty} \frac{ln(4^n)}{ln(3^{-n})} = -\lim_{n \to +\infty} -\frac{n \cdot ln(4)}{n \cdot ln(3)} = \frac{ln(4)}{ln(3)} \sim 1{,}2618595 \ldots$$

È possibile seguire un simile ragionamento pure per calcolare la dimensione di un attrattore strano in uno spazio delle fasi n-dimensionale, utilizzando una matrice n-dimensionale che permetta di contare gli n-cubi attraversati dalla traiettoria. Consideriamo ad esempio quello di Lorenz già visto, il quale è una linea di lunghezza infinita contenuta in un volume finito (perciò D<3), inoltre all'interno di questo vi sono i piani formati dalle traiettorie che trascorrono vicine, come per le fibre di un tessuto (si può notare dalle mappe di Poincarè), dato che zoomando si nota che essi si dividono in due superfici parallele (perciò D>2).

Una volta calcolata iterativamente la dimensione dell'attrattore si otterrà un valore prossimo a 2, ma maggiore, come aspettato, di circa D≈2,06±0,01.

---

[4] L'n-cubo o ipercubo è il concetto generalizzato di forma geometrica regolare inserita in uno spazio n-dimensionale. Per le dimensioni 0,1,2 e 3 diventa punto, segmento, quadrato e cubo.

LA CONGETTURA DI KAPLAN-YORKE

Secondo questa congettura esiste una relazione tra la dimensione di un attrattore in uno spazio delle fasi n dimensionale e lo spettro di Lyapunov che lo descrive. Ordinando tutti gli esponenti in ordine decrescente in modo tale che $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ e sia j l'indice tale che:

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \geq 0 \;\; e \;\; \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0$$

La dimensione D dell'attrattore sarà data dalla formula:

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}$$

Per l'attrattore di Lorenz con i valori delle costanti standard:

$$D = 2 + \frac{0.91}{|-14,6|} \approx 2.062 \ldots$$

Risulta quindi un valore simile a quello computato.
Se questa congettura fosse dimostrata sarebbe possibile, partendo dagli esponenti di Lyapunov, riuscire a conoscere molte caratteristiche di un sistema caotico senza la necessità di dover calcolare la traiettoria, oppure viceversa.

IL CAOS E LA VITA

> "La potenza di calcolo ormai accessibile agli uomini ne cambia l'universo. Trasforma il loro ambiente, la loro società e loro stessi, trasforma la loro scienza. La teoria del caos non è una fine, ma un inizio."
>
> (Ivar Ekeland, *Come funziona il caos, dal moto dei pianeti all'effetto farfalla*, Trad. It. Andrea Migliori, Torino, Bollati Boringhieri, 2017)

L'uomo, per descrivere la realtà, necessita di creare dei modelli, delle approssimazioni analitiche, le quali non servono solo a fare previsioni, ma a darci la sicurezza che domani il Sole sorgerà sempre e a illuderci di controllare il mondo. Un modello può durare anche per migliaia di anni prima che diventi obsoleto: il sistema geocentrico degli epicicli e dei deferenti di Tolomeo, per quanto fosse un moto bizzarro, esaudiva la nostra necessità di crederci al centro del mondo e di conoscere la posizione dei pianeti. Furono scoperte scientifico-matematiche (come il telescopio) a renderlo lentamente inadeguato ed a superarlo. Anche oggi l'invenzione dei calcolatori ci costringe a trasformare i nostri modelli, ad adeguarli. Come accennato prima anche il Sistema Solare, simbolo della perfezione astrofisica, manifesta comportamento caotico dopo periodi di calcolo molto lunghi, data la grande quantità di variabili (una stella e 8 pianeti maggiori, di cui ogni corpo ha 3 variabili spaziali e 3 componenti della quantità di moto, per un totale di 63 variabili, escludendo masse minori come Plutone e gli asteroidi).
Però questo ci porta anche ad allargare i nostri orizzonti. Applicazioni della teoria del caos sono state trovate nella borsa e nell'organizzazione di grandi aziende, ambiti solitamente esclusi dalla matematica tradizionale. È uno studio ancora aperto, vivo e pronto a evolversi.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

Meador, Clyde-Emmanuel Estorninho, *Numerical Calculation of Lyapunov Exponents for Three-Dimensional Systems of Ordinary Differential Equations* (2011). Theses, Dissertations and Capstones. Paper 107.

Friedrich Nietzsche, *Sull'utilità e il danno della storia per la vita*, Trad. It. Sossio Giametta, Milano, Adelphi, 2017

Ivar Ekeland, *Come funziona il caos, dal moto dei pianeti all'effetto farfalla*, Trad. It. Andrea Migliori, Torino, Bollati Boringhieri, 2017

Benoít B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali, Forma, caso e dimensione*, Trad. It. Roberto Pignoni, Torino, Einaudi Paperbacks Scienza, 1987

Ugo Amaldi, *La fisica del caos, Dall'effetto farfalla ai frattali*, Bologna, Zanichelli, 2011

Nicola Abbagnano, Giovanni Fornero, *L'ideale e il reale, corso di storia della filosofia,* Vol. 1 *dalle origini alla scolastica,* Milano-Torino, Pearson, 2014

www.wikipedia.com

www.mathworld.wolfram.com

http://www.agentgroup.unimore.it/Zambonelli/didattica/reti/Java/JavaSwing.pdf

www.youmath.it

http://www.scholarpedia.org