

Gruppi di Coxeter e Gruppi Algebrici

Relazione sul relativo seminario tenuto nel percorso eccellenza
del secondo anno per la laurea triennale di matematica

Giacomo Borin

20 luglio 2020

Sommario

In questa relazione andremo a svolgere alcuni esercizi, uno sui gruppi Lie, uno sulle rappresentazioni dei gruppi come matrici e l'ultimo di algebra lineare. Poi andiamo a studiare particolari gruppi di simmetrie, detti di Coxeter e la loro classificazione, per poi ridurci a una sottofamiglia di questi, detti gruppi di Weil. Abbiamo dato anche molto importanza alla rappresentazione dei gruppi, tramite particolari diagrammi, detti di Dynkin (Coxeter) o come matrici. Poi ci siamo occupati della visualizzazione di questi gruppi, in particolare quelli di Weil, come simmetrie di un insieme di vettori, detto sistema di radici. Inoltre quest'ultimo fatto può essere usato per classificare un importante insieme di gruppi di Lie, detti semisemplici.

1 Esercizi sui gruppi

1.1 Esercizio 1

Dimostrare che (\mathbb{S}^1, \cdot) (dove la circonferenza è immersa in \mathbb{C}) è un gruppo di Lie reale.

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che è un gruppo, infatti il prodotto eredita l'associatività da quella di \mathbb{C} , l'elemento neutro è $1 \in \mathbb{S}^1$ e l'inverso di z è $1/z$, per il quale vale $|1/z| = 1/|z| = 1/1 = 1$ quindi sta sulla circonferenza. Per prima cosa dobbiamo dimostrare che è una varietà differenziabile. Un possibile atlante è dato dalle due funzioni:

$$\phi_1 : V_1 = (0, 1) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{1\} \quad \text{e} \quad \phi_2 : V_2 = (-1/2, 1/2) \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$$

Per le quali vale che $\phi_i(x) = e^{2\pi i x}$ ($i=1,2$). La prima mappa è rappresentata nella figura 1.1. Ovviamente questi sono diffeomorfismi dove l'inversa è la funzione logaritmo complesso (normalizzato per un fattore 2π), nel primo caso la branca è da $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ e nel secondo da $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (questo è essenziale perchè il logaritmo sia olomorfo). Si noti che ovviamente $|\phi_i(x)| = 1$ dato

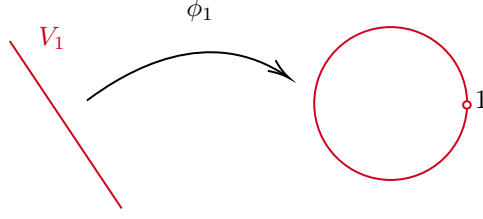


Figura 1: rappresentazione della carta (ϕ_1, V_1)

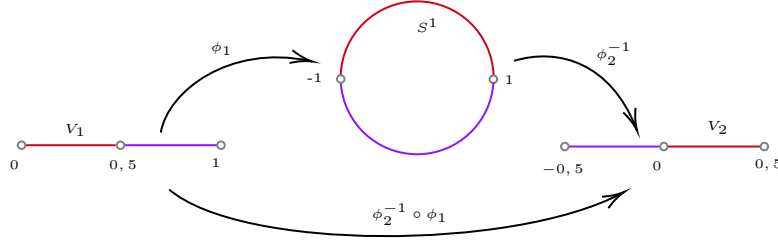


Figura 2: rappresentazione dell'induzione della funzione $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$

che siamo sulla circonferenza, quindi il logaritmo equivale alla funzione argomento. Dimostriamo ora la compatibilità tra le mappe, cioè che la funzione $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : \phi_1^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{\pm 1\}) \rightarrow \phi_2^{-1}(\mathbb{S}^1 \setminus \{\pm 1\})$ è un diffeomorfismo (rappresentata nella figura 1.1). Questo è molto semplice da dimostrare, infatti basta osservare come la funzione si comporta prima rispetto a $(0, 1/2)$, dove risulta essere l'identità, e poi rispetto a $(1/2, 1)$ dove $\theta \mapsto \theta - 1$. Dato che entrambe sono diffeomorfismi e ovviamente i due insiemi sono un ricoprimento aperto disgiunto del dominio allora lo è anche $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$. Rimane ora da mostrare che le funzioni¹ $\text{prod} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ e $\text{inv} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ sono differenziabili². Siano $x, y \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$, considero allora la mappa $(\phi_1 \times \phi_1)$ (se uno dei punti fosse 1 basterebbe prendere in considerazione una carta diversa), siano ora θ e η le rispettive controimmagini. Considero ora il prodotto $x \cdot y$, assumo che sia diverso da 1 (nel caso basta ripetere lo stesso ragionamento con ϕ_2), in questo caso prod è differenziabile in (x, y) se e solo se lo è la composizione $(\phi_1^{-1} \circ \text{prod} \circ (\phi_1 \times \phi_1))$ in (θ, η) , ma per questo basta svolgere il calcolo e notare che è localmente lineare:

$$\begin{aligned} (\phi_1^{-1} \circ \text{prod} \circ (\phi_1 \times \phi_1))(\theta, \eta) &= \phi_1^{-1}(e^{2\pi i \theta} \cdot e^{2\pi i \eta}) = \\ &= \text{Arg}(e^{2\pi i(\theta+\eta)}) = \begin{cases} \theta + \eta & \text{se } \theta + \eta < 1 \\ \theta + \eta - 1 & \text{se } \theta + \eta > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Invece per inv basta notare che $\text{inv}(z) = 1/z$ e che $0 \notin \mathbb{S}^1$, e ricordare dall'analisi

¹il prodotto e l'inversa

²si osservi che il dominio ha una struttura di varietà differenziabile dove la topologia è quella prodotto e l'atlante è dato dai prodotti cartesiani delle mappe dell'atlante di \mathbb{S}^1

complessa che

$$\begin{aligned} \text{inv}^* : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

è olomorfa, quindi in particolare parte reale e parte immaginaria sono differenziabili. Dato che la composizione di funzioni differenziabili è differenziabile. Quindi la struttura di gruppo e quella di varietà differenziabile sono compatibili. \square

1.2 Esercizio 2

Trovare 2 rappresentazioni per $\mathbb{D}_3 = \langle r, s | r^3 = s^2 = 1, rs = sr^2 \rangle$, una su $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ e una su $\text{GL}_3(\mathbb{R})$. Usare la seconda rappresentazione per dimostrare che $\mathbb{D}_3 \cong \mathbb{S}_3$.

Svolgimento. Una rappresentazione è un omomorfismo di gruppi $\psi_n : \mathbb{D}_3 \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Per la prima rappresentazione basta visualizzare \mathbb{D}_3 come gruppo di simmetrie del triangolo (figura 3), a questo punto basta scrivere r e s come trasformazioni lineari del piano, quindi r è la rotazione in senso antiorario di $2\pi/3$ e s la riflessione rispetto all'asse y . Allora definiremo ψ_2 tale che:

$$r \mapsto \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora basta verificare che $\text{Ker}(\psi_2)$ contiene le relazioni, ma questo viene dal calcolo diretto, quindi lo eseguo solo per la terza come esempio.

$$\psi_2(sr^2s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \psi_2(r)^T$$

Dato che le rotazioni sono trasformazioni ortogonali la trasposta è uguale all'inversa, e dato che ψ_2 omomorfismo $\psi_2(r)^{-1} = \psi_2(r^{-1})$ quindi $\psi_2(r^{-1}sr^2s) = 1$. Per la seconda rappresentazione possiamo immaginare di essere nel piano proiettivo, assegnando come base i tre punti A,B,C. Se scrivo ora la rotazione e la riflessione come proiettività appare ovvia la costruzione di ψ_3 :

$$r \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rimane ora solo da verificare che le relazioni sono contenute nel nucleo, ma questo segue dal calcolo diretto similmente a prima.

Possiamo osservare che le due matrici sono matrici di permutazione, i cui cicli di \mathbb{S}_3 corrispondenti sono (1,2,3) per r e (2,3) per s , i quali sono un ciclo di lunghezza massima e una trasposizione, per cui generano \mathbb{S}_3 , da cui segue che il gruppo simmetrico è isomorfo al gruppo generato dalle due matrici, uguale all'immagine $\psi_3(\{r, s\})$, perciò è isomorfo a \mathbb{D}_3 .

1.3 Esercizio 3

Sia \mathbb{V} un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione n , una filtrazione propria \mathbb{F} di \mathbb{V} è un serie di n spazi vettoriali $\{\mathbb{V}_i\}_{i=1}^n$ tali che $\mathbb{V}_i \subset \mathbb{V}_{i+1}$ e $\dim(\mathbb{V}_i) = i$. Siano ora $T_n(\mathbb{F}) = \{f \in \mathbb{GL}_n(\mathbb{V}) \mid f(\mathbb{V}_i) \subset \mathbb{V}_i\}$ e $T_n^+(\mathbb{K}) = \{\text{matrici di dimensione } n \text{ in } \mathbb{K} \text{ triangolari superiori invertibili}\}$, dimostrare che questi gruppi sono isomorfi.

Dimostrazione. Considero l'isomorfismo di gruppi noto tra le matrici invertibili e il gruppo lineare:

$$\begin{aligned}\psi_n^\beta : M_{inv}^n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{GL}_n(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto f_A\end{aligned}$$

Dove $f_A(\vec{v}) = A\vec{v}$. Non sarà sempre esplicitamente indicato ma questa mappa dipende dalla base β scelta che usiamo per scrivere il vettore \vec{v} . Dalla fibrazione \mathbb{F} possiamo definire una base di vettori $\xi = \{v_1, \dots, v_n\}$ tali che $\mathbb{V}_i = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$ in modo induttivo: v_1 è un vettore che genera \mathbb{V}_1 e otteniamo v_{i+1} completando v_1, \dots, v_i a base del sottospazio \mathbb{V}_{i+1} . Consideriamo ora l'isomorfismo ψ_n^ξ , per avere la tesi ci basta dimostrare che $\psi_n^\xi(T_n^+(\mathbb{K})) = T_n(\mathbb{F})$. Dimostriamo allora la doppia inclusione per avere la tesi:

- (\subset) Fissiamo n e procediamo per induzione su i , con l'ipotesi induttiva che per ogni matrice A valga $\psi_n^\xi(A)(\mathbb{V}_i) \subset \mathbb{V}_i$. Per $i = 0$ è banale. Assumiamo vero per $i < n$ e dimostriamolo per $i + 1$. Dato che $\mathbb{V}_{i+1} = \mathbb{V}_i \oplus \langle v_{i+1} \rangle$ e grazie all'ipotesi induttiva mi basta dimostrare che $\psi_n^\xi(A)(v_{i+1}) \in \mathbb{V}_{i+1}$. Dato che l'isomorfismo è rispetto alla base ξ $\psi_n^\xi(A)(v_{i+1})$ è uguale alla $(i+1)$ esima colonna della matrice A , la quale è triangolare superiore quindi è combinazione lineare dei vettori $\{v_1, \dots, v_{i+1}\}$ da cui segue la tesi.
- (\supset) Qui procediamo per induzione sulla dimensione n dello spazio vettoriale. Assumiamo che per qualsiasi filtrazione³ ogni mappa $g \in T_{n-1}(\mathbb{F}'_{n-1})$ ha come controimmagine una matrice triangolare superiore invertibile. Dimostriamolo per $f \in T_n(\mathbb{F}_n)$. Dalla definizione di f segue che $f|_{\mathbb{V}_{n-1}}$ (stiamo usando la notazione iniziale per gli insiemi della filtrazione) appartiene a $T_{n-1}(\mathbb{F}_{n-1})$ (dove la filtrazione ha gli stessi sottospazi tranne l'ultimo). Allora è rappresentabile come matrice triangolare superiore invertibile per l'ipotesi induttiva⁴, rimane solo da calcolare l'ultima colonna, la quale è

³Dato che cambiamo spazio vettoriale cambia anche la filtrazione

⁴Si osserva che $f(\mathbb{V}_{n-1}) \subset \mathbb{V}_{n-1}$, quindi la riga n -esima della matrice $n \times n$ associata deve essere nulla

data da $f(v_{i+1})$ grazie alla scelta di ξ come base. La matrice deve essere invertibile perchè è associata ad una mappa invertibile, quindi ogni elemento di $T_n(\mathbb{F})$ deve essere immagine di qualche elemento di $T_n^+(\mathbb{K})$

□

2 Gruppi di Coxeter

Lemma 2.1. *Siano r, t elementi di un gruppo con presentazione tali che $r^2 = t^2 = 1$ e sia $m \in \mathbb{Z}$, allora*

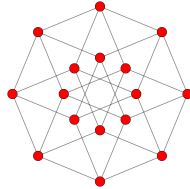
$$(rt)^m = 1 \iff (tr)^m = 1$$

Dimostrazione. Dato che $t^2 = 1$ ho che $(tr)^m = (tr)^m tt = t(rt)^m t = tt = 1$. L'altra implicazione segue in modo analogo. □

Definizione 2.1. I gruppi di Coxeter sono gruppi con la seguente presentazione:

$$G = \langle r_1, \dots, r_n \mid (r_i r_j)^{m_{i,j}} = 1 \rangle$$

Dove $m_{i,i} = 1$ e $m_{j,i} = m_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ per $i \neq j$. Nel caso di gruppi infiniti possiamo assumere anche eventualmente $m_{i,j} = +\infty$ per indicare che non vi è alcuna relazione, ma noi tralasceremo questa possibilità.



I gruppi di Coxeter sono astrazioni di gruppi di riflessioni, per questo si richiede che $r_i^2 = 1$. Dal lemma 2.1 ho l'uguaglianza $m_{j,i} = m_{i,j}$. Invece la richiesta $(r_i r_j)^{m_{i,j}} = 1$ equivale a richiedere $r_j r_i = (r_i r_j)^{m_{i,j}-1}$, che nel caso in cui $m_{i,j} = 2$ equivale alla commutatività.

2.1 Matrici di Coxeter

Possiamo rappresentare questi gruppi usando la matrice $M = (m_{i,j})_{i,j} \in M_n(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\})$ ⁵, che si dice matrice di Coxeter di G ed è simmetrica ed ha solo unità sulla diagonale.

Esempi.

- $\mathbb{S}_2 \cong \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = 1 \rangle$ quindi ha come rappresentazione $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

⁵nella nostra trattazione assumeremo che non vi sia infinito

- in generale vale che dato $m \geq 3$ il gruppo simmetrico \mathbb{S}_m ha matrice di Coxeter:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 3 \\ 2 & \dots & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- il gruppo $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ ha come matrice di Coxeter la seguente: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Un'altro esempio importante di gruppo di Coxeter sono i gruppi diedrali, infatti dato $\mathbb{D}_m = \langle r, s \mid r^m = s^2 = (rs)^2 = 1 \rangle$ con le trasformazioni di Tietze posso assegnare $r_2 = s$ e $r_1 = rs$, e dato che $r_1 r_2 = r s s = r$ la rappresentazione diventa $\mathbb{D}_m = \langle r_1, r_2 \mid r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^m = 1 \rangle$, quindi un gruppo di Coxeter con matrice: $\begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$

2.2 Diagrammi di Coxeter-Dynkin

Un altro modo di rappresentare questi gruppi è tramite dei particolari diagrammi, detti anche solo di Coxeter. Dato un gruppo $G = \langle r_1, \dots, r_n \mid (r_i r_j)^{m_{i,j}} = 1 \rangle$ allora per rappresentarlo come diagramma dobbiamo:

1. Inserire n punti che rappresentano i generatori r_1, \dots, r_n
2. Collegare i punti relativi a r_i e r_j se $m_{i,j} \geq 3$
3. Scrivere sopra il collegamento $m_{i,j}$ solo se è maggiore di 3

Dati due gruppi di Coxeter G e H allora $G \times H$ (prodotto diretto) è un gruppo di Coxeter e il suo diagramma è l'unione disgiunta dei diagrammi di G e H.

Esempi. Riprendendo gli esempi di prima abbiamo che:

- \mathbb{S}_2 ha diagramma $\bullet \bullet$
- \mathbb{S}_m per $m > 2$ ha diagramma $\bullet \cdots \bullet$ (con n punti)
- $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ ha come diagramma l'unione disgiunta di n punti: $\bullet \cdots \bullet$
- \mathbb{D}_m ha diagramma $\bullet \overset{m}{\cdots} \bullet$

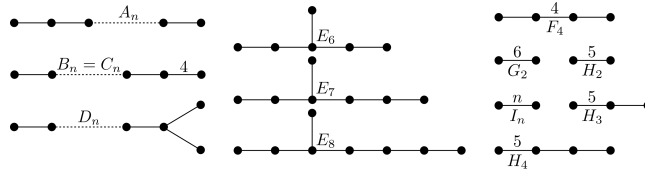


Figura 4: Classificazione dei gruppi di Coxeter finiti

2.3 Classificazione

Grazie ai precedenti diagrammi possiamo classificare i gruppi di Coxeter finiti, infatti ogni gruppo finito di Coxeter deve avere come diagramma l'unione disgiunta di un numero finito di diagrammi tra i seguenti della figura 4. Qui possiamo notare che vi sono quattro gruppi *parametrici* (A_n, B_n, D_n, I_n) e sei gruppi *eccezionali*. Come già accennato i gruppi di Coxeter sono gruppi di simmetrie ad esempio B_3 sono le simmetrie del cubo o dell'ottaedro, mentre H_3 sono quelle dell'icosaedro o del dodecaedro (figure 6 e 7). Questi poliedri hanno le stesse simmetrie perchè sono duali tra di loro. A seguire ecco i solidi platonici con i loro gruppi di simmetrie.

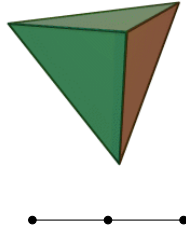


Figura 5: Il tetraedro ha come gruppo di simmetrie A_3

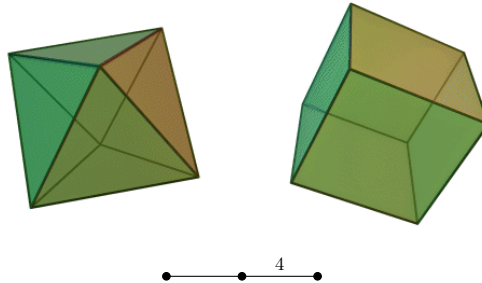


Figura 6: Ottaedro e cubo hanno come gruppo di simmetrie B_3

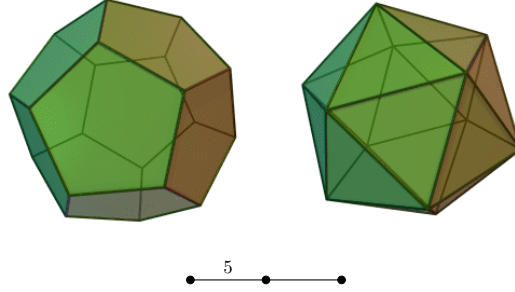


Figura 7: Dodecaedro e icosaedro hanno come gruppo di simmetrie H_3

3 Gruppi di Weil

A partire dalla matrice di Coxeter possiamo costruire la **matrice di Schläfli** come $C = (c_{i,j})_{i,j} = (-2 \cos(\pi/m_{i,j}))_{i,j}$, ad esempio per A_n a partire da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 3 \\ 2 & \dots & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{associa la matrice di Schläfli:} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Questi coefficienti derivano dalla struttura delle riflessioni in uno spazio euclideo, infatti ricordiamo che se \vec{a} è un vettore normale⁶ la riflessione rispetto all'iperpiano perpendicolare ad \vec{a} ha come legge $r(\vec{x}) = \vec{x} - 2\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a}$, se adesso assumiamo che anche \vec{x} sia normale l'angolo θ tra \vec{a} e \vec{x} deve essere tale che: $\langle \vec{x}, \vec{a} \rangle = \cos(\theta)$.

Possiamo usare questi coefficienti per visualizzare i gruppi di Coxeter, infatti per ogni gruppo G esistono n iperpiani $\{H_1, \dots, H_n\}$ passanti per l'origine tali che ogni generatore r_i possa essere visto come una riflessione del piano H_i e l'angolo tra gli iperpiani H_i e H_j è $\pi/m_{i,j}$. A questo punto osserviamo che comporre due riflessioni r_i e r_j equivale a fare una rotazione del doppio dell'angolo tra i due iperpiani, quindi se l'angolo è $\pi/m_{i,j}$ ho che $(r_i \circ r_j)^{m_{i,j}}$ è una rotazione di $m_{i,j}(2\pi/m_{i,j}) = 2\pi$, quindi è l'identità.

Assegniamo ora per ogni i il vettore normale $\vec{\alpha}_i$ perpendicolare all' i -esimo iperpiano, se adesso andiamo a riflettere $\vec{\alpha}_i$ rispetto ad $\vec{\alpha}_j$ otteniamo che $r_j(\vec{\alpha}_i) = \vec{\alpha}_i - 2\langle \vec{\alpha}_i, \vec{\alpha}_j \rangle \vec{\alpha}_j = \vec{\alpha}_i + c_{i,j} \vec{\alpha}_j$. Possiamo definire un sottoinsieme dei gruppi di Coxeter partendo da questa visualizzazione, in modo da tale che ogni vettore venga riflesso in una combinazione intera di altri vettori:

⁶cioè di norma 1

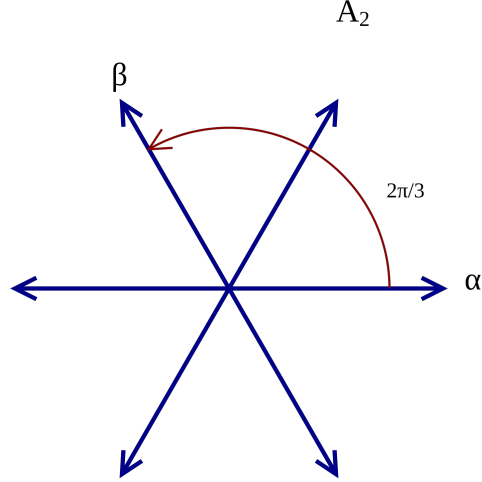


Figura 8: Rappresentazione di $(S)_3$ (isomorfo a A_2) come gruppo di Weil

Definizione 3.1. Un gruppo di Coxeter $G = \langle r_1, \dots, r_n \mid (r_i r_j)^{m_{i,j}} = 1 \rangle$ si dice di Weil se esistono dei vettori $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ indipendenti tali che:

- r_i può essere interpretato come la riflessione rispetto all'iperpiano $\langle \alpha_i \rangle^\perp$
- per ogni i, j ho che $-2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \in \mathbb{Z}$

Avere i coefficienti di riflessioni interi permette di fare in modo che le riflessioni dei vettori siano una combinazione lineare intera degli altri vettori, garantendo una struttura più simmetrica, come si vede nella figura 8.

3.1 Diagrammi di Dynkin

Sfruttando l'interpretazione geometrica dei gruppi di Weil posso definire la matrice di Cartan:

$$A = (a_{i,j})_{i,j} = \left(2 \frac{\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \right)_{i,j}$$

Si osservi che in generale non è simmetrica perchè dipende dalla lunghezza dei vettori α_i, α_j . A partire da questa matrice possiamo costruire i diagrammi di Dynkin con i seguenti passaggi:

1. Inserire n punti che rappresentano i vettori $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

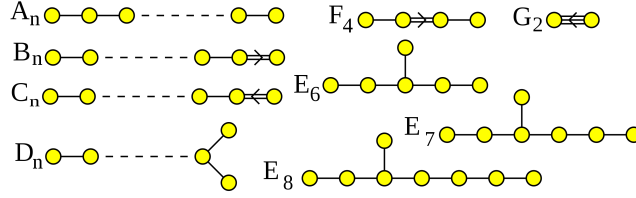


Figura 9: Classificazione dei gruppi finiti di Weil

2. Collegare i punti relativi a α_i e α_j con tante linee quante il massimo tra $a_{i,j}$ e $a_{j,i}$
3. Se $a_{i,j}$ e $a_{j,i}$ sono diversi inserire sopra il collegamento una freccia diretta dal più lungo al più corto

Come per i diagrammi di Coxeter il diagramma del prodotto di due gruppi di Weil si ottiene per unione disgiunta dei relativi diagrammi. Possiamo usare questi diagrammi per la classificazione, infatti si può dimostrare che i gruppi di Weil sono classificati dai diagrammi nella figura 9.

Esempio. Vediamo ora in quali casi \mathbb{D}_m (con grafo $\bullet^m \bullet$) è gruppo di Weil e come rappresentarlo. Siano ora h_1, h_2 vettori normali e sia θ l'angolo tra di loro. Assumiamo che $\alpha_1 = k_1 h_1$ e $\alpha_2 = k_2 h_2$. Cerchiamo di determinare le costanti k_1, k_2 e θ non nulle. Dalla seconda condizione di Weil calcolando i prodotti scalari e ricordando la definizione dell'angolo otteniamo che:

$$\frac{k_2}{k_1} 2 \cos(\theta) \in \mathbb{Z} \text{ e } \frac{k_1}{k_2} 2 \cos(\theta) \in \mathbb{Z}$$

moltiplicandoli ottengo la condizione $4 \cos^2(\theta) \in \mathbb{Z}$, quindi dato che $\cos^2(\theta) \in [0, 1]$ ho che $4 \cos^2(\theta) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dato che $\theta \neq 0$ posso escludere 4. Ora per ognuno di questi numeri possiamo calcolare i nostri vettori usando anche la condizione $\frac{k_2}{k_1} 2 \cos(\theta) \in \mathbb{Z}$ e otterremo condizioni sulle lunghezze relative sui vettori.

Numero	Angolo	Lunghezza relativa	Matrice di Cartan	Grafo di Dynkin	Gruppo
3 \Rightarrow	$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$	$\frac{k_1}{k_2} \sqrt{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$	$\bullet \Rightarrow \bullet$	$\Rightarrow \mathbb{D}_6$
2 \Rightarrow	$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$	$\frac{k_1}{k_2} \sqrt{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$	$\bullet \Leftarrow \bullet$	$\Rightarrow \mathbb{D}_4$
1 \Rightarrow	$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$	$\frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$	$\bullet \cdots \bullet$	$\Rightarrow \mathbb{D}_3$
0 \Rightarrow	$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$	$\frac{k_1}{k_2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$	$\bullet \bullet$	$\Rightarrow \mathbb{D}_2$

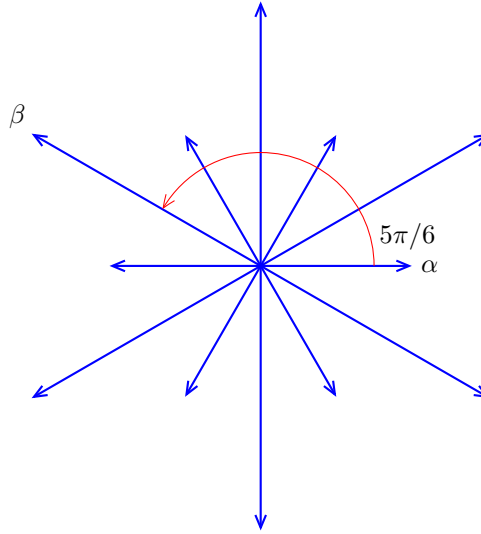


Figura 10: Sistema di radici associato a G_2 (\Longleftrightarrow)

3.2 Sistemi di radici

Osservazione. Possiamo osservare che è possibile lavorare in direzione opposta, cioè a partire da un gruppo di Weil W e associarvi un insieme di vettori $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sul quale possiamo costruire il gruppo W come nella definizione.

Possiamo ora allora definire un nuovo oggetto alternativo ai politopi per visualizzare i gruppi di Weil:

Definizione 3.2. Sia $(\mathbb{E}, \langle ; \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita, dato un insieme finito di vettori non nulli (detti radici) $\Phi \in \mathbb{E}$ si dice **sistema di radici** se soddisfa le seguenti condizioni:

1. Le radici generano \mathbb{E}
2. Per ogni coppia di radici α e β in Φ , $\lambda \in \mathbb{R}$, se $\alpha = \lambda\beta$ implica $\lambda \in \{+1, -1\}$
3. Per ogni coppia di radici α e β in Φ il vettore $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2 \frac{\langle \alpha; \beta \rangle}{\langle \alpha; \alpha \rangle} \alpha$ appartiene a Φ (chiusura del sistema di radici rispetto alla riflessione)
4. Per ogni coppia di radici α e β in Φ lo scalare $2 \frac{\langle \alpha; \beta \rangle}{\langle \alpha; \alpha \rangle}$ è un intero.

Si può dimostrare che un diagramma di Dynkin determina biunivocamente (a meno di una bigezione ortogonale) un sistema di radici.

4 Classificazione dei gruppi di Lie semisemplici

Studiamo ora una classe particolare di gruppi:

Definizione 4.1. Un gruppo di Lie G si dice **semplice** se è connesso⁷, non abeliano e non ha sottogruppi normali non banali (cioè se $H \trianglelefteq G$ allora $H = \{0\}$ o $H = G$). Mentre si dice **semisemplice** se è somma diretta di gruppi semplici.

Il nostro obbiettivo è di classificarli e per farlo avremo bisogno di un nuovo strumento:

Definizione 4.2. Un'algebra di Lie è un \mathbb{K} -spazio vettoriale \mathfrak{h} su cui è definito un'operatore $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ (detto prodotto di Lie) tale che:

1. è bilineare rispetto a entrambi i termini
2. soddisfa l'identità di Jacobi: $[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$
3. è nilpotente: per ogni $x \in \mathfrak{h}$ vale $[x, x] = 0$

Sia G un gruppo di Lie e associarvi $\mathfrak{g} = T_{G,e}$, cioè lo spazio tangente a G nell'elemento neutro e . A partire da dallo spazio tangente è possibile ricostruire G a meno di un ricoprimento, inoltre si può dimostrare che possiamo indurre su \mathfrak{g} un prodotto di Lie e quindi per classificare i gruppi di Lie è sufficiente classificare le Algebre di Lie. Si può dimostrare che un'algebra di Lie si può decomporre nella forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

Dove:

- \mathfrak{h} è un sottospazio di Cartan
- \mathfrak{g}_{α} è un autospazio associato ad α
- Φ è un sottoinsieme di vettori di uno spazio euclideo \mathbb{E} , il quale contiene tutte le informazioni necessarie per classificare la struttura di \mathfrak{g}

Nel caso in cui G fosse un gruppo semisemplice si dimostra che Φ è un sistema di radici, al quale è associato in modo biunivoco, come visto prima, un gruppo di Weil, che siamo in grado di classificare.

⁷si ricordi che un gruppo di Lie ha anche una struttura topologia associata