



**POLITECNICO  
DI TORINO**

Dipartimento  
di Automatica e Informatica

# Gli algoritmi di visita dei grafi

## Gianpiero Cabodi e Paolo Camurati

---

# Algoritmi di visita

Visita di un grafo  $G=(V, E)$ :

- a partire da un vertice dato, seguendo gli archi con una certa strategia, elencare i vertici incontrati, eventualmente aggiungendo altre informazioni.

Algoritmi:

- in profondità (depth-first search, DFS)
- in ampiezza (breadth-first search, BFS).

## Visita in profondità (versione base)

Dato un grafo (connesso o non connesso), a partire da un vertice  $s$ , visita **tutti** i vertici del grafo (raggiungibili da  $s$  e non).

Principio base della visita in profondità: espandere l'ultimo vertice scoperto che ha ancora vertici non ancora scoperti adiacenti.

Scoperta di un vertice: prima volta che si incontra nella visita (discesa ricorsiva, visita in pre-order). Il vettore `pre` gioca il ruolo del vettore `mark` nel Calcolo Combinatorio, ma contiene i tempi crescenti di scoperta.

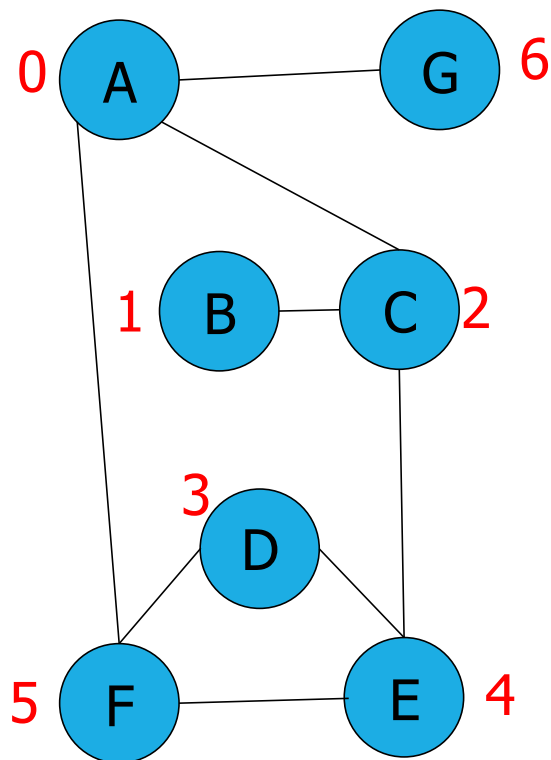
## Algoritmo

wrapper

- `GRAPHsimpleDfs`: funzione che, a partire da un vertice dato, visita tutti i vertici di un grafo, richiamando la procedura ricorsiva `SimpleDfsR`. Termina quando tutti i vertici sono stati visitati.
- `SimpleDfsR`: funzione che visita in profondità a partire da un vertice `id` identificato con un arco fittizio `EDGEcreate(id, id)` utile in fase di visualizzazione. Termina quando ha visitato in profondità tutti i nodi raggiungibili da `id`.

B: alcuni autori chiamano visita in profondità la sola `SimpleDfsR`.

## Esempio



in.txt

```

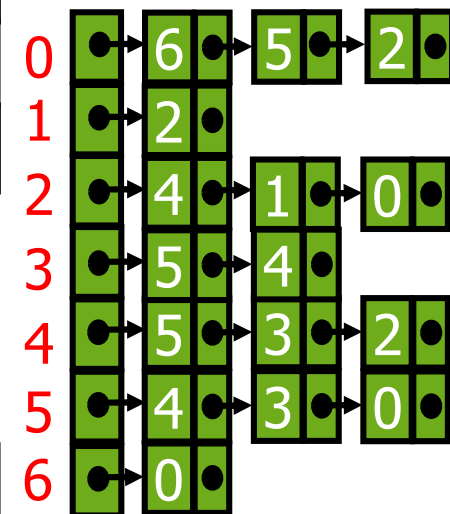
A C
A F
A G
B C
C E
D E
D F
F E

```

ST

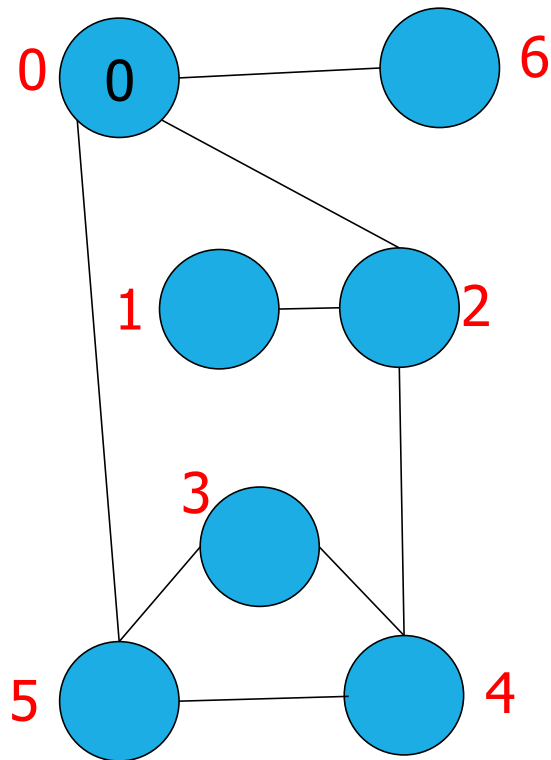
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F
6	G

Lista delle  
adiacenze

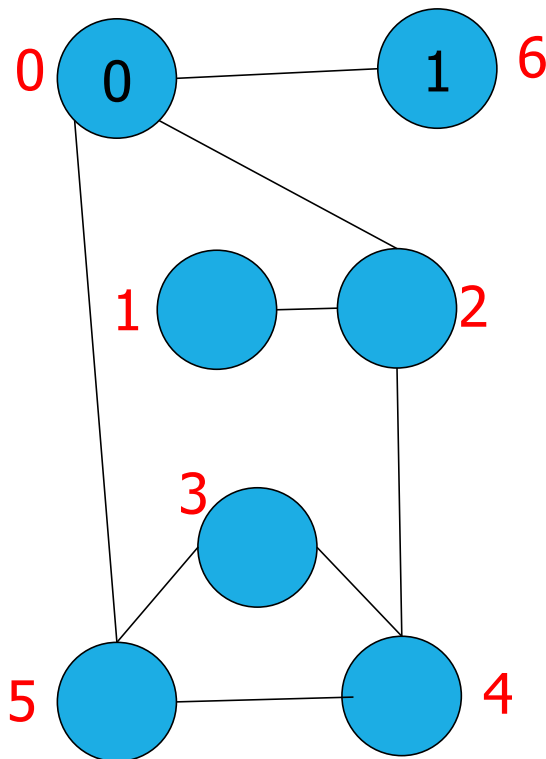


## Esempio

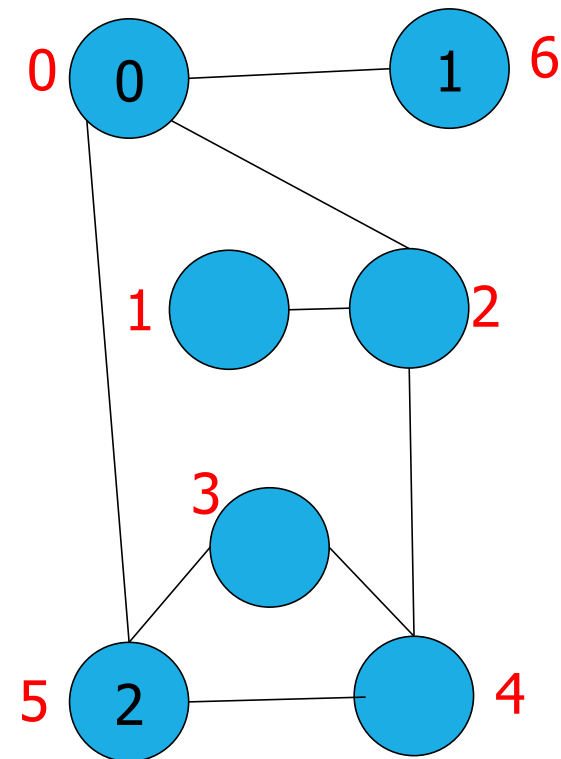
cnt = 0



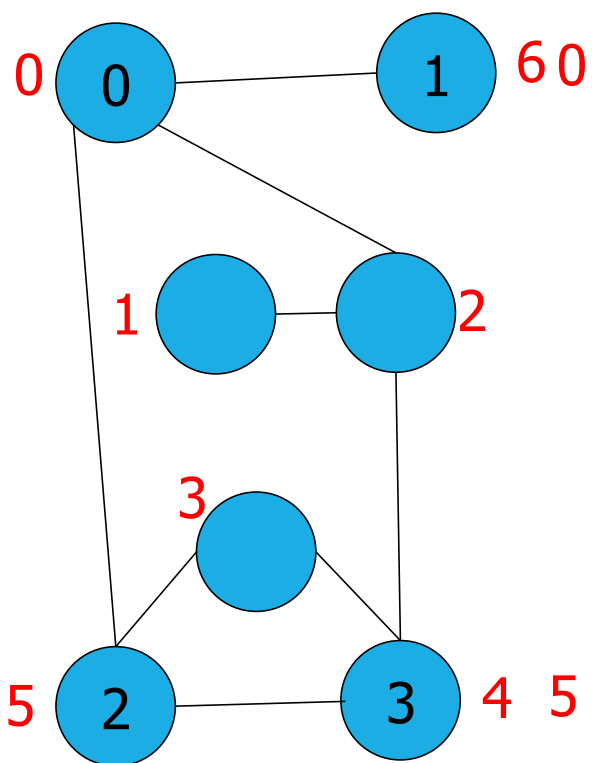
cnt = 1



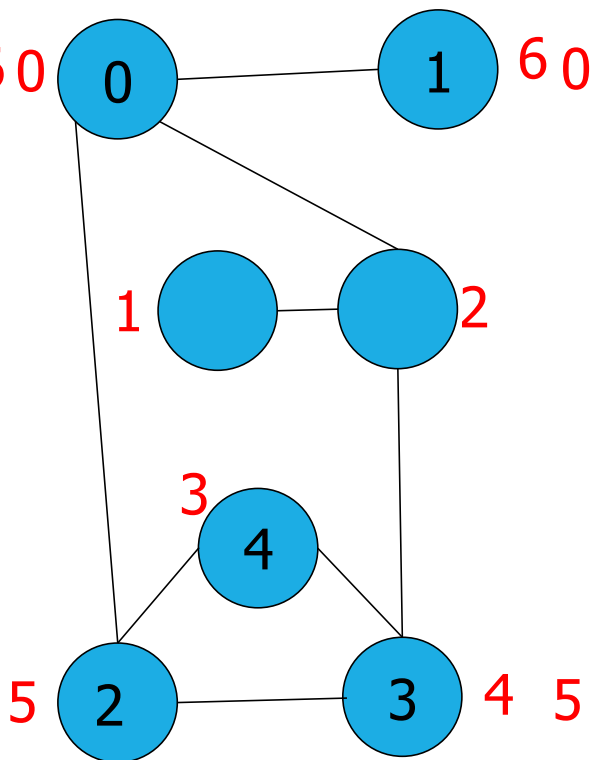
cnt = 2



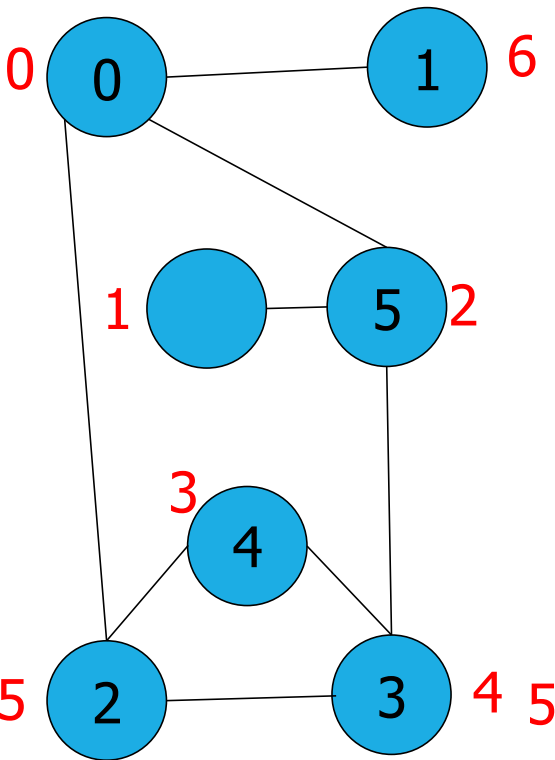
cnt = 3



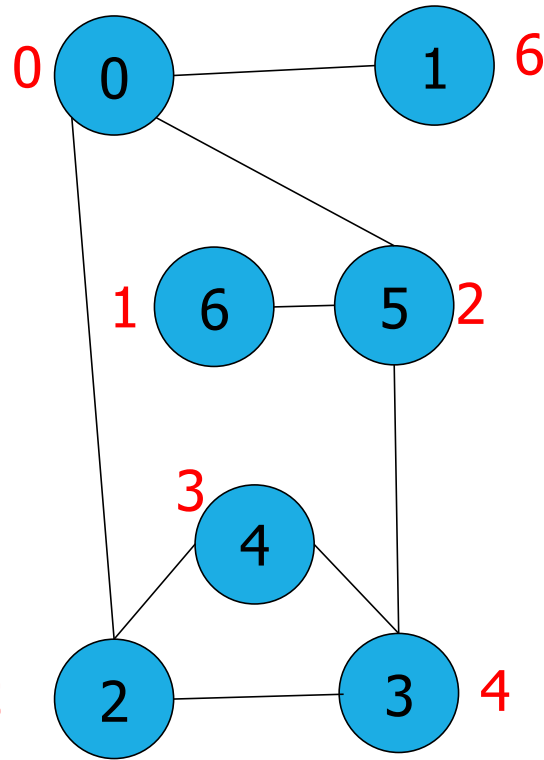
cnt = 4



cnt = 5



cnt = 6



## Strutture dati

- grafo non pesato come lista delle adiacenze
- vettore `pre[i]` dove per ciascun vertice si registra il tempo di scoperta (numerazione in preordine dei vertici)
- contatore `cnt` per tempi di scoperta

`cnt` e `*pre` sono locali alla funzione `GRAPHsimpleDfs` e passati by reference alla funzione ricorsiva `SimpleDfsR`.



```

void GRAPHsimpleDfs(Graph G, int id) {
    int v, cnt=0, *pre;
    pre = malloc(G->V * sizeof(int));
    if ((pre == NULL)) return;
    for (v=0;v<G->V;v++) pre[v]=-1;
    simpleDfsR(G, EDGEcreate(id,id), &cnt, pre);

    for (v=0; v < G->V; v++)
        if (pre[v]== -1)
            simpleDfsR(G, EDGEcreate(v,v), &cnt, pre);

    printf("discovery time labels \n");
    for (v=0; v < G->V; v++)
        printf("vertex %s : %d \n", STsearchByIndex(G->tab, v), pre[v]);
}

```

visita a partire da id

visita dei nodi non ancora visitati

```
static void simpleDfsR(Graph G, Edge e, int *cnt, int *pre) {  
    link t; int w = e.w;  
    pre[w] = (*cnt)++;  
    for (t = G->ladj[w]; t != G->z; t = t->next)  
        if (pre[t->v] == -1)  
            simpleDfsR(G, EDGEcreate(w, t->v), cnt, pre);  
}
```

terminazione implicita  
della ricorsione

## Visita in profondità (versione estesa)

Estensione:

- nodi etichettati con etichetta tempo di scoperta / tempo di completamento
- foresta di alberi della visita in profondità, memorizzata in un vettore.

Scoperta di un vertice: prima volta che si incontra nella visita (discesa ricorsiva, visita in pre-order), vettore  $pre[i]$ .

Completamento: fine dell'elaborazione del vertice (uscita dalla ricorsione, visita in post-order) vettore  $post[i]$ .

Scoperta/Completamento: tempo discreto che avanza mediante contatore  $time$ . Avanzamento quando si scopre o si completa.

Identificazione del padre nella visita in profondità: vettore  $st[i]$ .

# Algoritmo

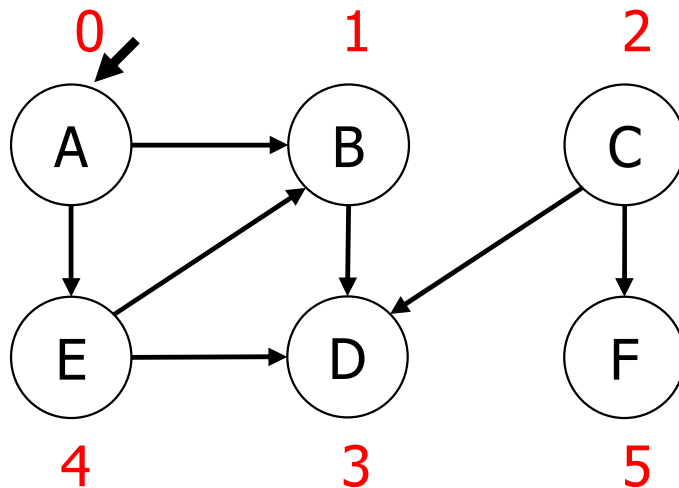
wrapper

- `GRAPHextendedDfs`: funzione che, a partire da un vertice dato, visita tutti i vertici di un grafo, richiamando la procedura ricorsiva `ExtendedDfsR`. Termina quando tutti i vertici sono stati visitati.
- `ExtendedDfsR`: funzione che visita in profondità a partire da un vertice `id` identificato con un arco fittizio `EDGEcreate(id, id)` utile in fase di visualizzazione. Termina quando ha visitato in profondità tutti i nodi raggiungibili da `id`.

B: alcuni autori chiamano visita in profondità la sola `ExtendedDfsR`.

# Esempio

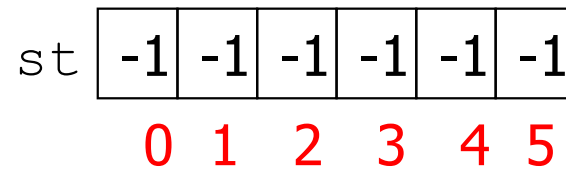
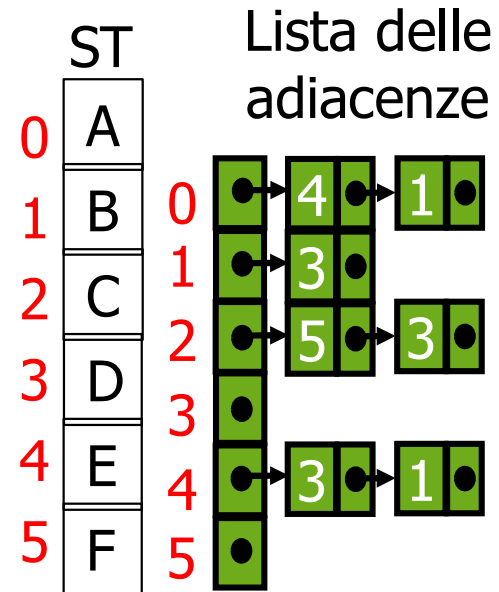
time =0      st



in.txt

```

A B
C D
A E
C F
B D
E B
E D
  
```

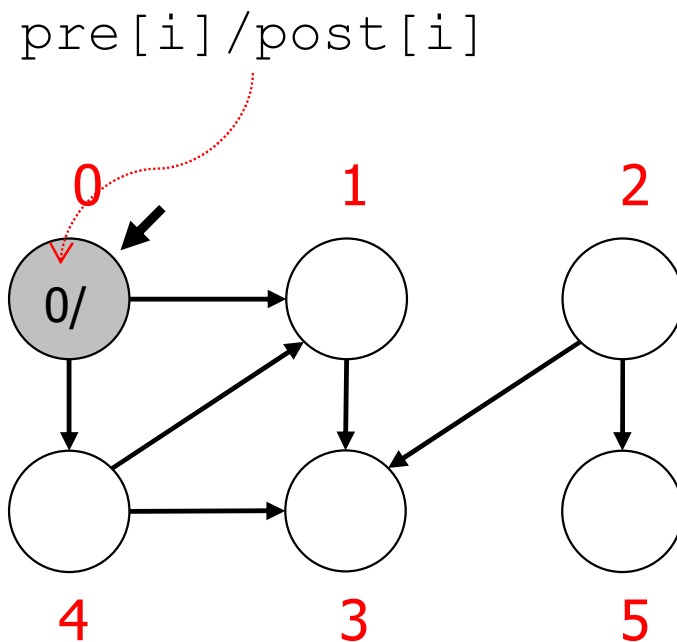


Convenzione grafica:

- nodo bianco: non ancora scoperto
- nodo grigio: scoperto ma non terminato
- nodo nero: terminato

time = 0

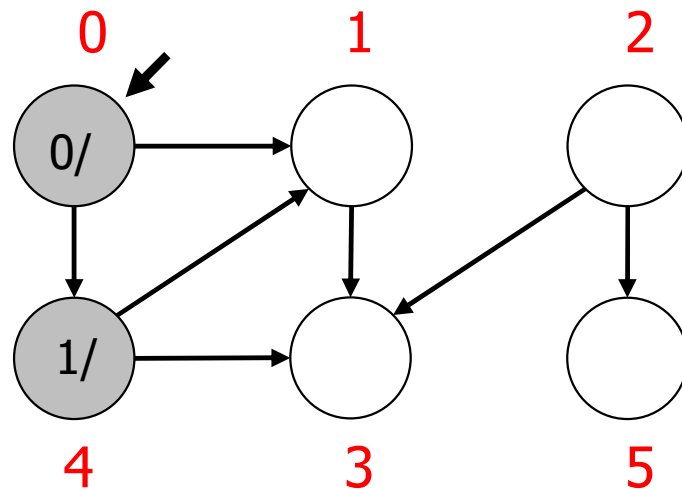
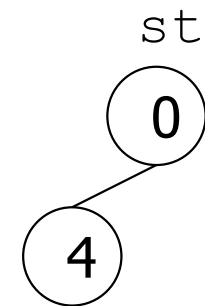
st  
0



st

0	-1	-1	-1	-1	-1
0	1	2	3	4	5

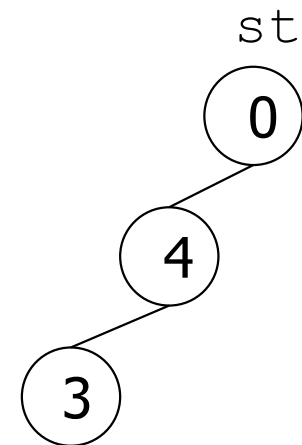
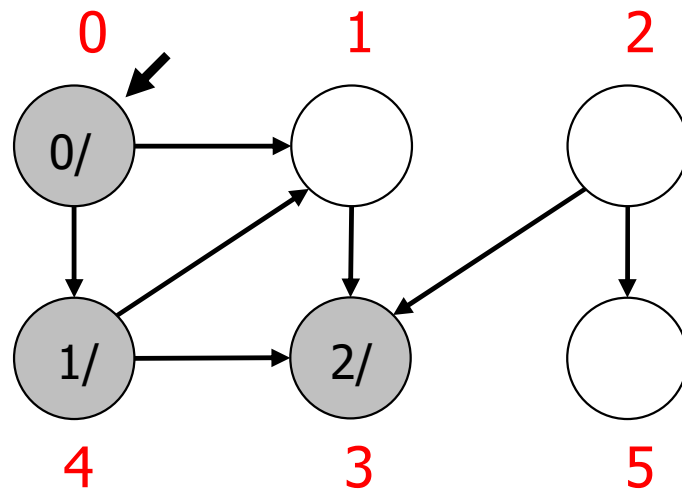
time = 1



st

0	-1	-1	-1	0	-1
0	1	2	3	4	5

time = 2

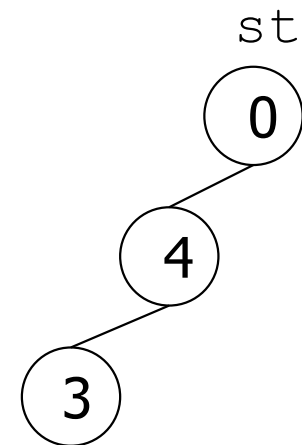
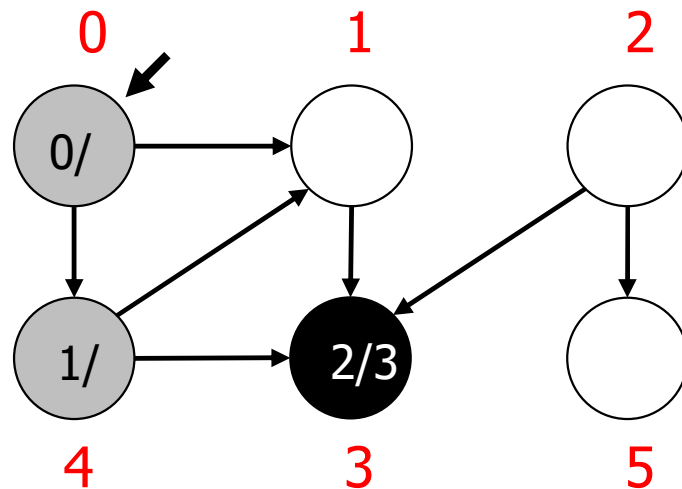


st

0	-1	-1	4	0	-1
0	1	2	3	4	5

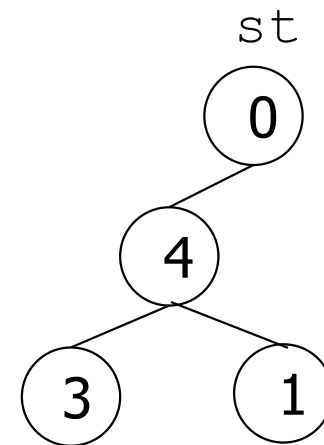
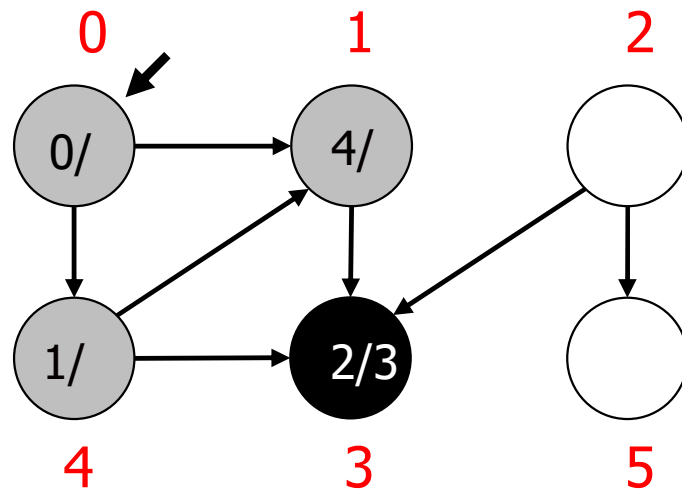


time = 3



st	0	-1	-1	4	0	-1
	0	1	2	3	4	5

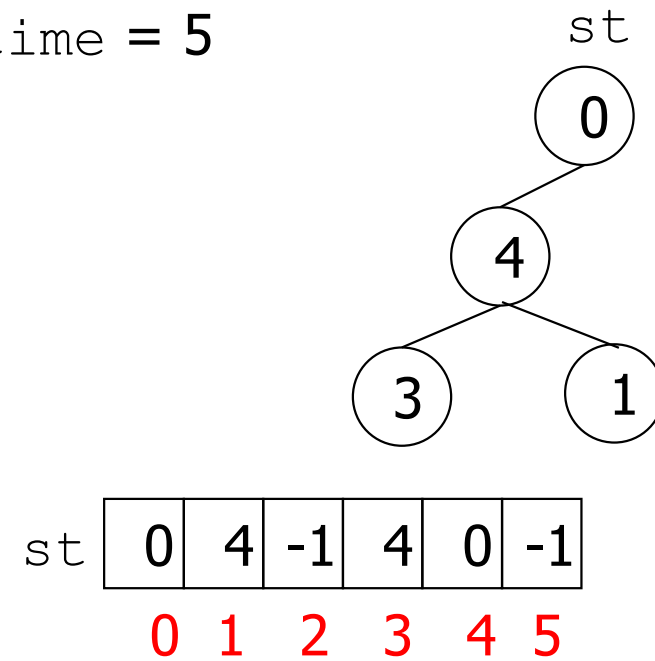
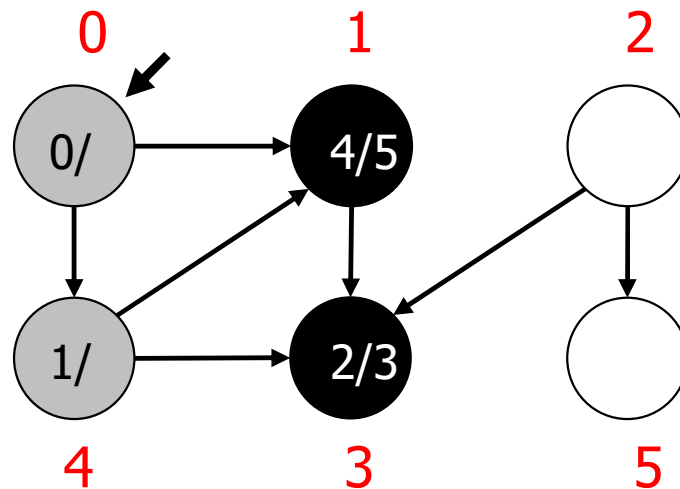
time = 4



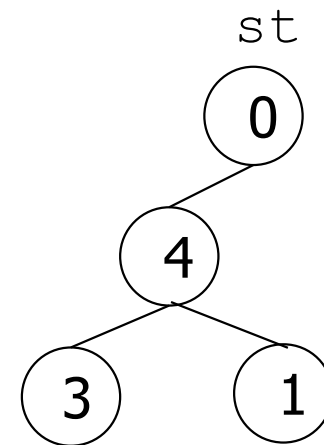
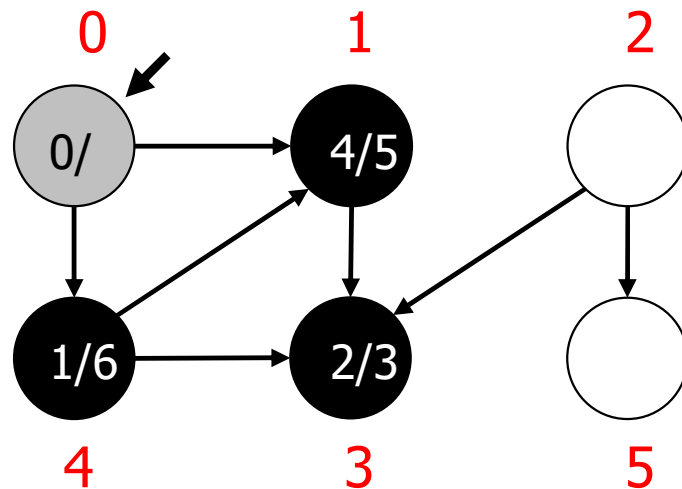
st

0	4	-1	4	0	-1
0	1	2	3	4	5

time = 5



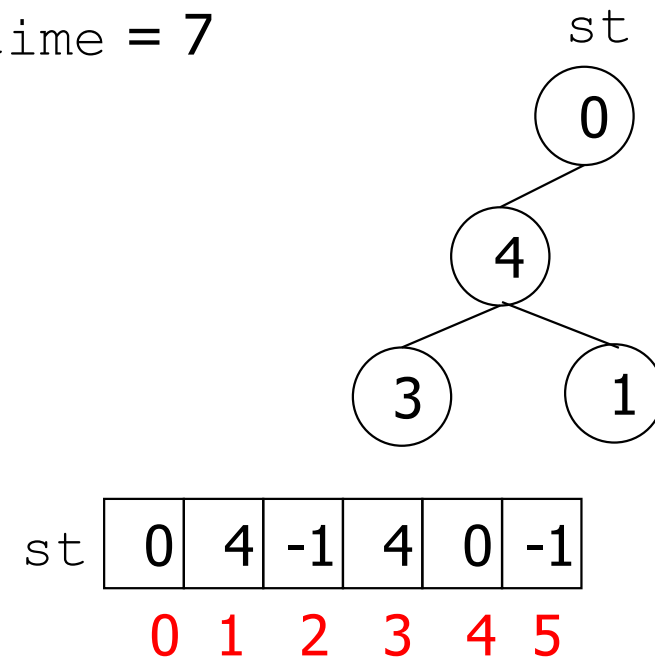
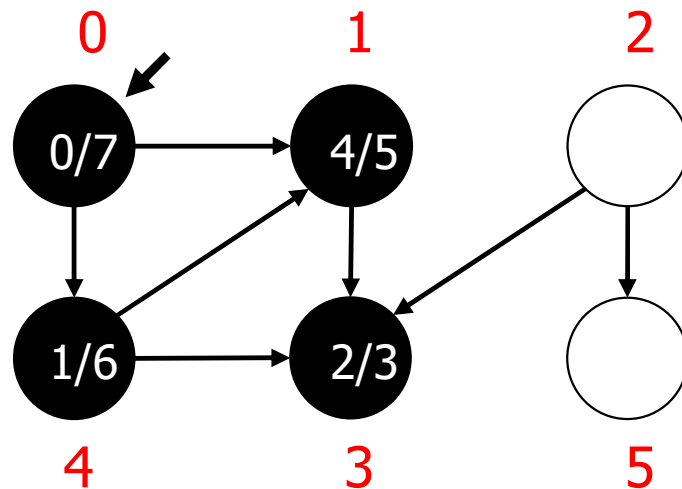
time = 6



st

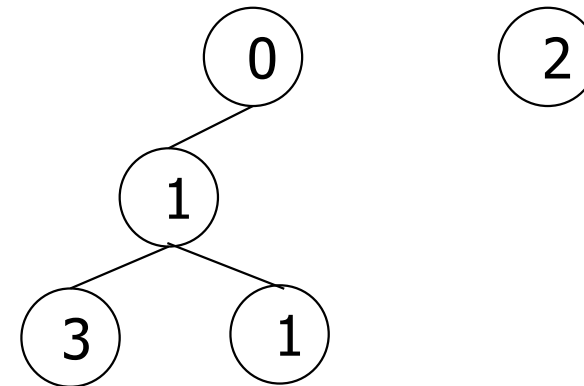
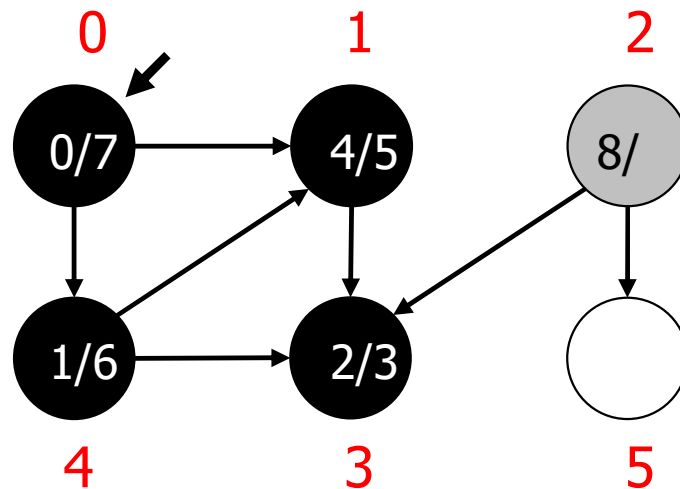
0	4	-1	4	0	-1
0	1	2	3	4	5

time = 7



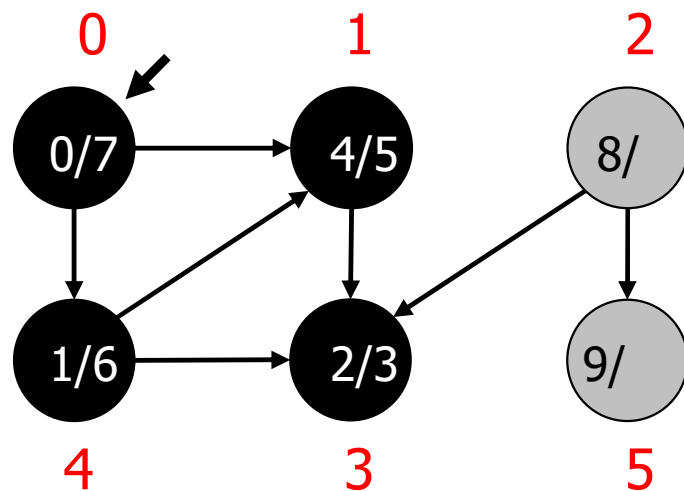
time = 8

st

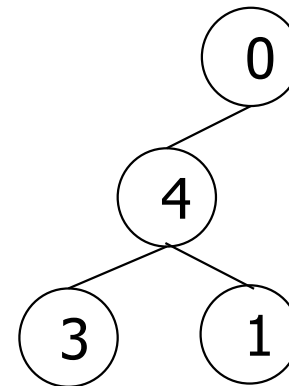


st

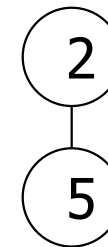
0	4	2	4	0	-1
0	1	2	3	4	5



time = 9

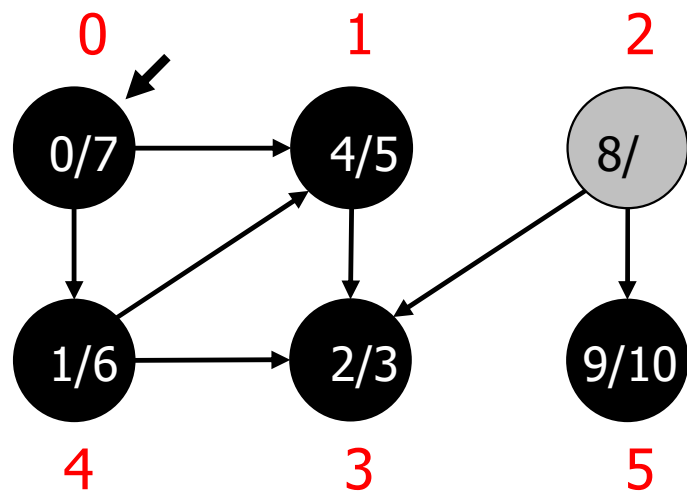


st

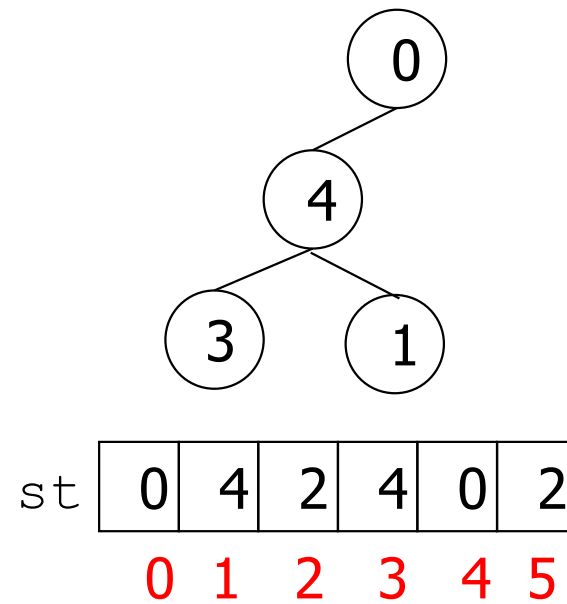


st

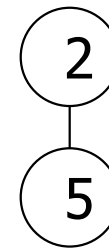
0	4	2	4	0	2
0	1	2	3	4	5



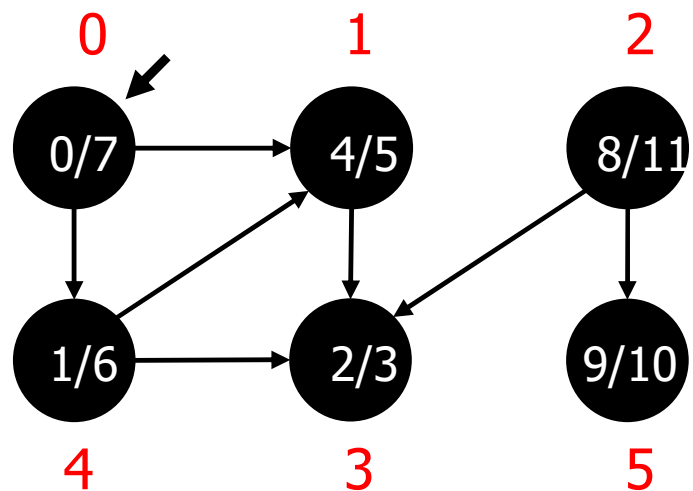
time = 10



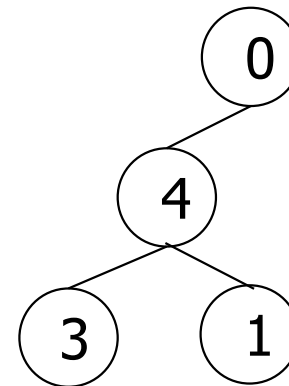
st



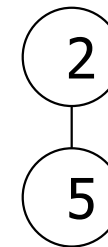




time = 11



st



st

0	4	2	4	0	2
0	1	2	3	4	5

# Strutture dati

- grafo non pesato come lista delle adiacenze
  - vettori dove per ciascun vertice:
    - si registra il tempo di scoperta (numerazione in preordine dei vertici) `pre[i]`
    - si registra il tempo di completamento (numerazione in postordine dei vertici) `post[i]`
    - si registra il padre per la costruzione della foresta degli alberi della visita in profondità: `st[i]`
  - contatore `time` per tempi di scoperta/completamento
- `time`, `*pre`, `*post` e `*st` sono locali alla funzione `GRAPHextendedDfs` e passati by reference alla funzione ricorsiva `ExtendedDfsR`.

```

void GRAPHextendedDfs(Graph G, int id) {
    int v, time=0, *pre, *post, *st;
    pre/post/st = malloc(G->V * sizeof(int));
    for (v=0;v<G->V;v++) {
        pre[v]=-1; post[v]=-1; st[v]=-1;}
    extendedDfsR(G, EDGEcreate(id,id), &time, pre, post, st);
    for (v=0; v < G->V; v++)
        if (pre[v]==-1)
            extendedDfsR(G,EDGEcreate(v,v),&time,pre,post,st);
    printf("discovery/endprocessing time labels \n");
    for (v=0; v < G->V; v++)
        printf("%s:%d/%d\n",STsearchByIndex(G->tab,v),pre[v],post[v]);
    printf("resulting DFS tree \n");
    for (v=0; v < G->V; v++)
        printf("%s's parent: %s \n",STsearchByIndex (G->tab, v),
            STsearchByIndex (G->tab, st[v]));
}

```

```

static void ExtendedDfsR(Graph G, Edge e, int *time, int *pre,
                        int *post, int *st) {
    link t;
    int w = e.w;
    st[e.w] = e.v;
    pre[w] = (*time)++;
    for (t = G->ladj[w]; t != G->z; t = t->next)
        if (pre[t->v] == -1)
            ExtendedDfsR(G, EDGEcreate(w, t->v), time, pre, post, st);
    post[w] = (*time)++;
}

```

terminazione implicita  
della ricorsione

## Visita in profondità (versione completa)

Si etichetta ogni arco:

- grafi orientati: T(tree), B(backward), F(forward), C(cross)
- grafi non orientati: T(tree), B(backward)

# Classificazione degli archi

Grafo orientato:

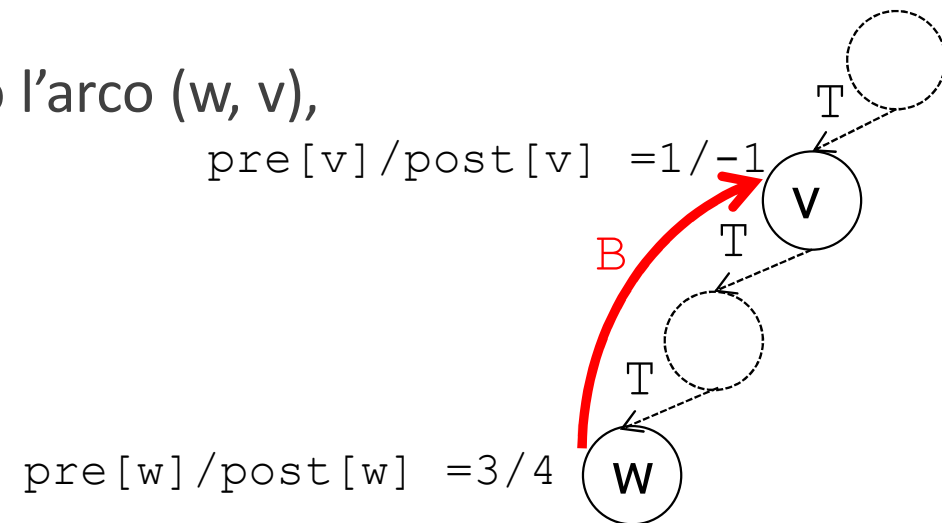
- **T**: archi dell'albero della visita in profondità
- **B**: connettono un vertice  $w$  ad un suo antenato  $v$  nell'albero:

tempo di fine elaborazione di  $v$  **sarà**  $>$  tempo di fine elaborazione di  $w$ .

Equivale a testare se, quando scopro l'arco  $(w, v)$ ,

$\text{post}[v] == -1$

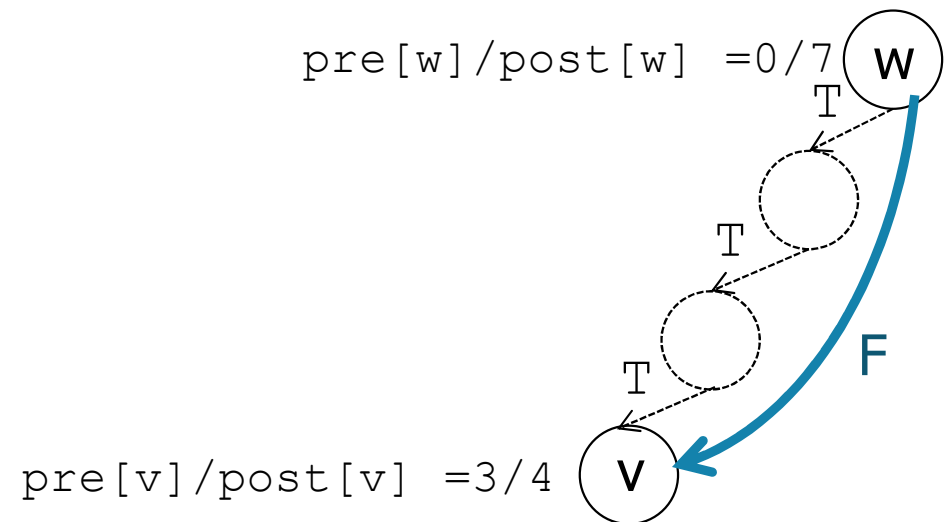
$\text{pre}[v] / \text{post}[v] = 1 / -1$



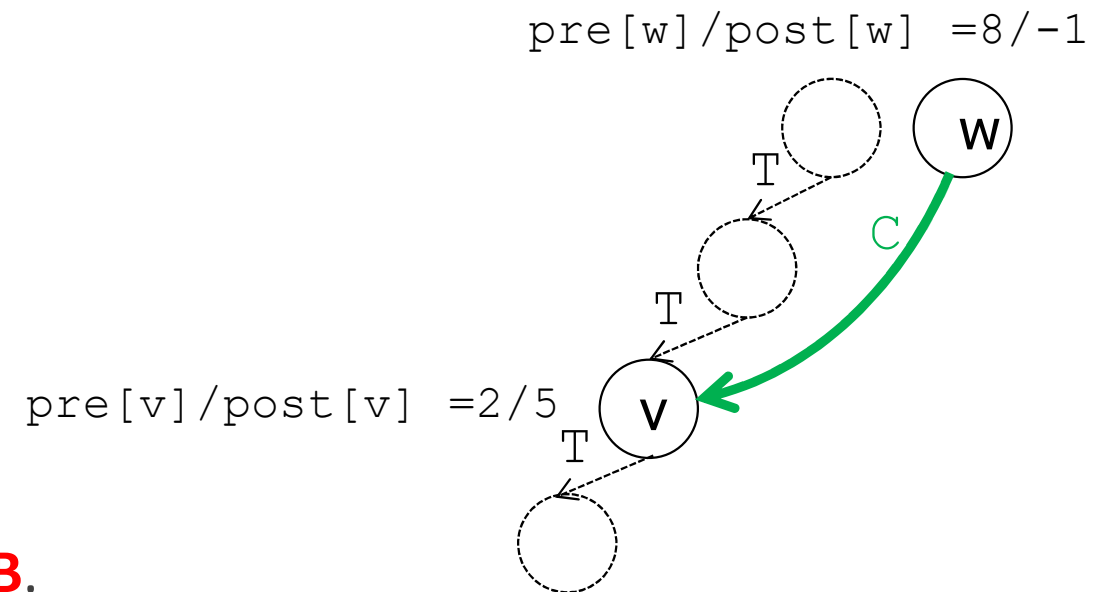
- **F**: connettono un vertice  $w$  ad un suo discendente  $v$  nell'albero:

tempo di scoperta di  $v$  **è**  $>$  tempo di scoperta di  $w$  quando scopro l'arco  $(w, v)$

$$\text{pre}[v] > \text{pre}[w]$$



- **C**: archi rimanenti, per cui  
tempo di scoperta di  $w$  **è**  $>$  tempo di scoperta di  $v$  quando scopro  
l'arco  $(w, v)$   
 $pre[w] > pre[v]$



Grafo non orientato: solo archi **T** e **B**.



## Algoritmo

wrapper

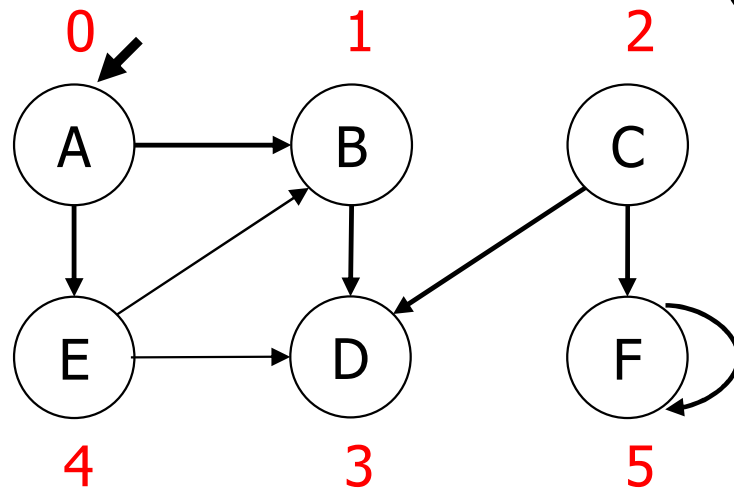
- `GRAPHdfs`: funzione che, a partire da un vertice dato, visita tutti i vertici di un grafo, richiamando la procedura ricorsiva `dfsR`. Termina quando tutti i vertici sono stati visitati.
- `dfsR`: funzione che visita in profondità a partire da un vertice `id` identificato con un arco fittizio `EDGEcreate(id, id)` utile in fase di visualizzazione. Termina quando ha visitato in profondità tutti i nodi raggiungibili da `id`.

NB: alcuni autori chiamano visita in profondità la sola `dfsR`.

Strutture dati: come nella versione estesa. Codice della `GRAPHdfs` identico a quello della `GRAPHextendedDfs`.

# Esempio

time = 0      st



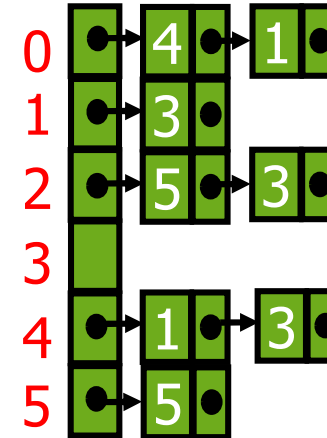
Lista archi

A	B
C	D
A	E
C	F
B	D
E	D
E	B
F	F

ST

0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F

Lista delle  
adiacenze

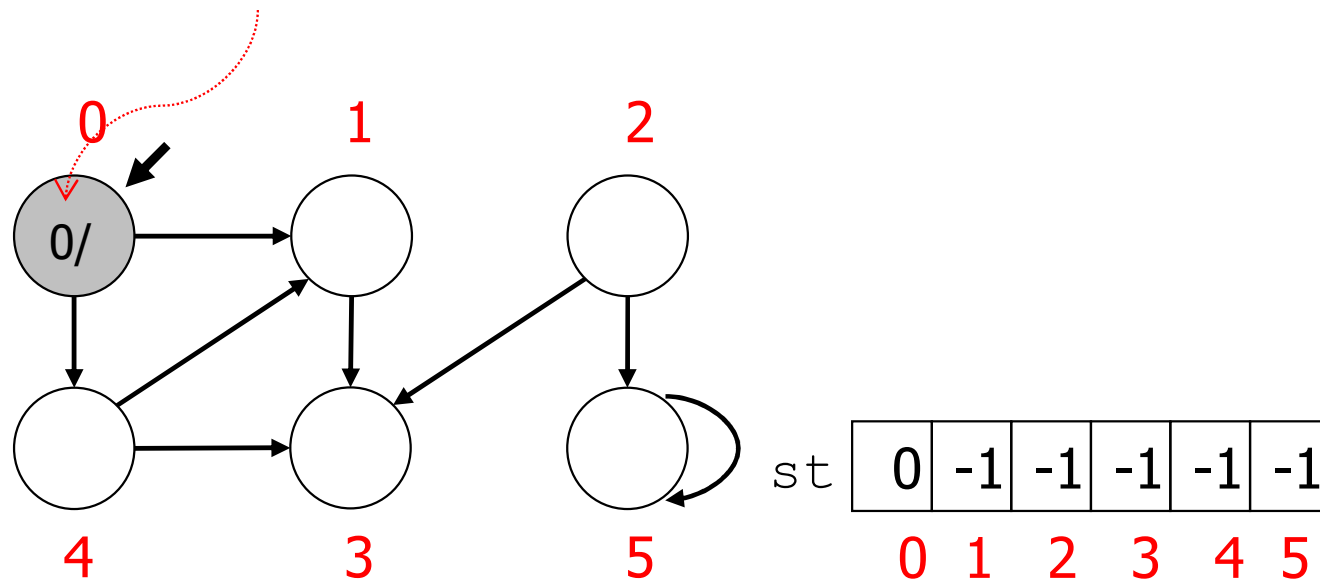


st	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	0	1	2	3	4	5

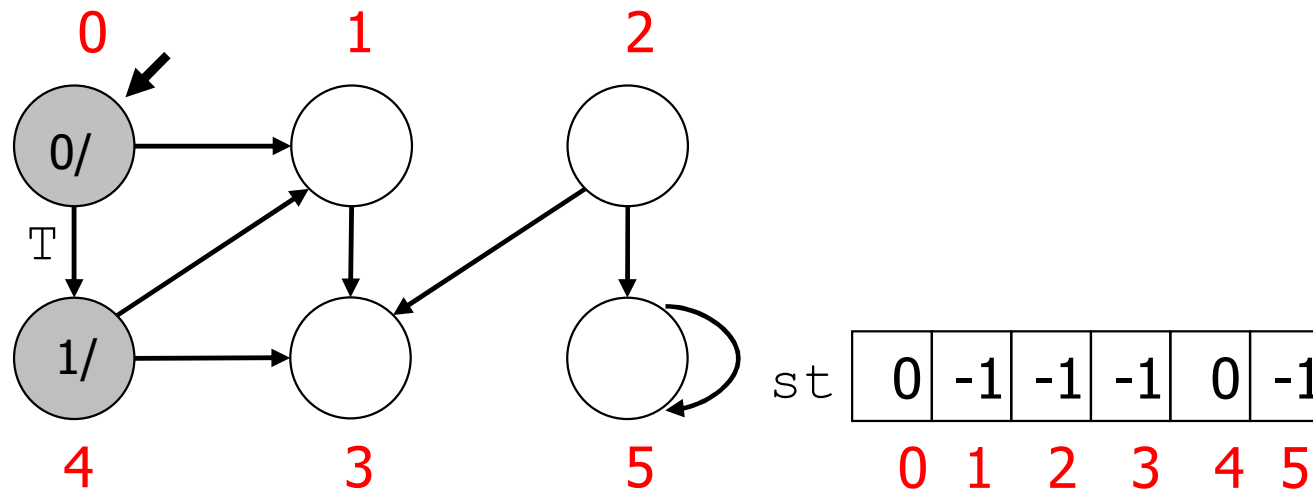
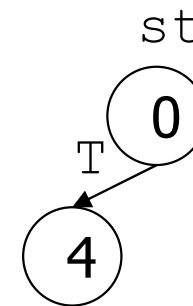
time = 0

st  
0

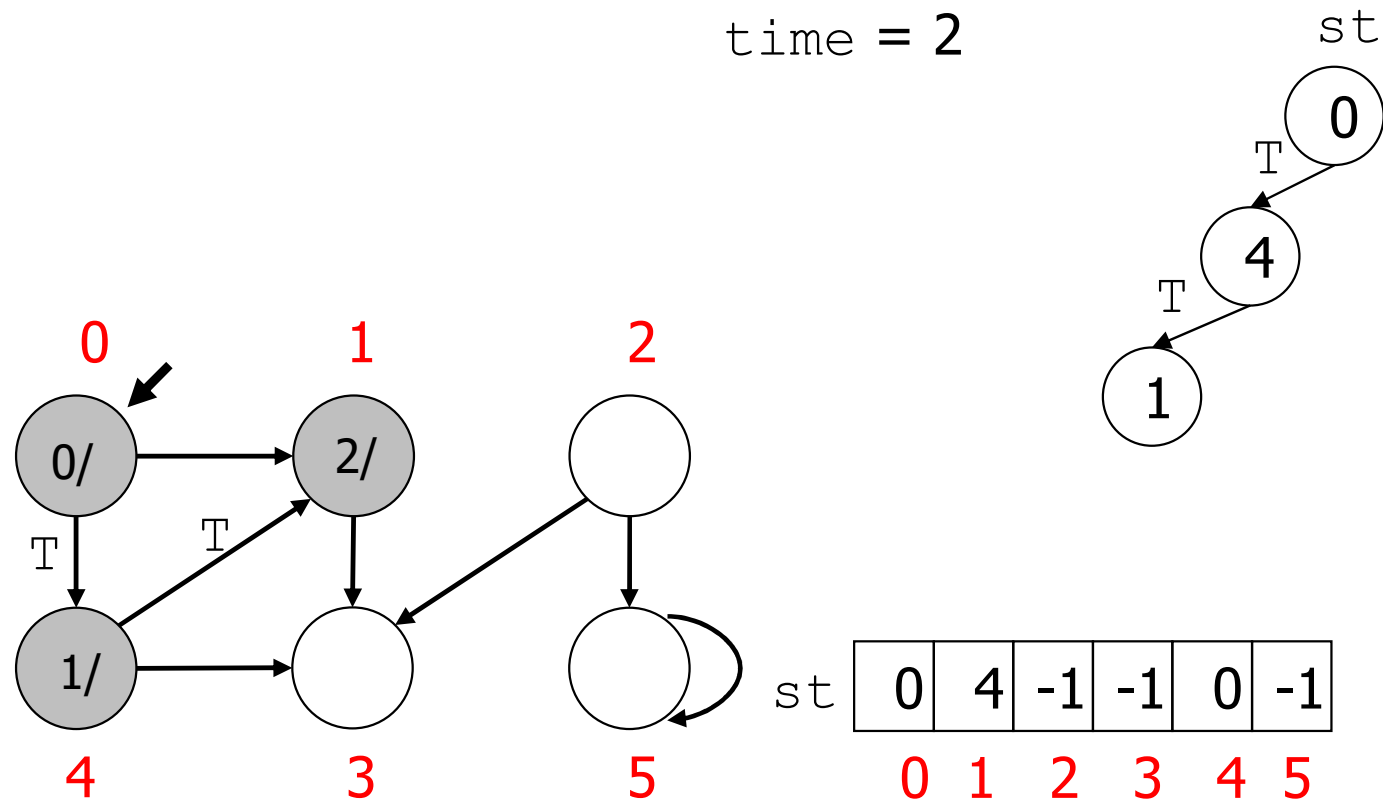
pre[i]/post[i]



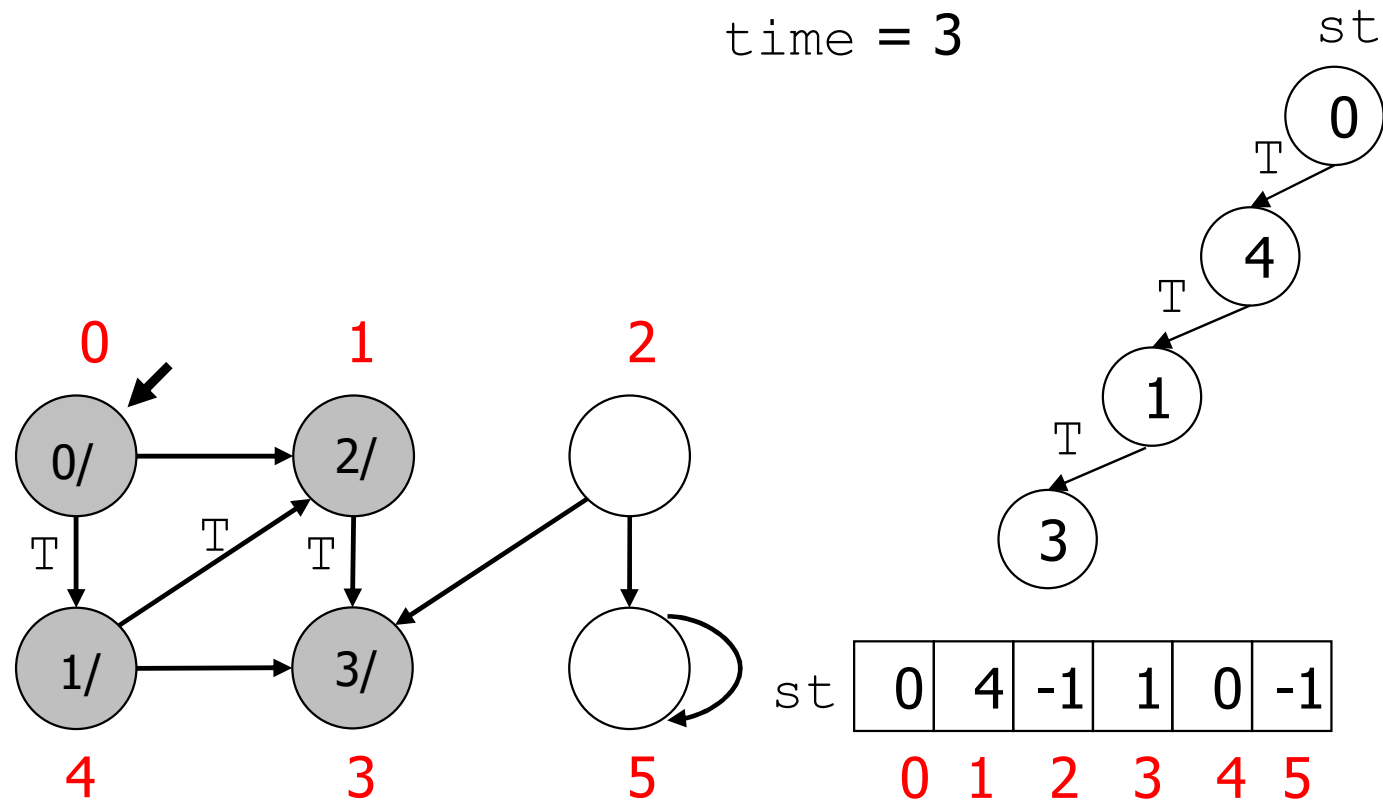
time = 1



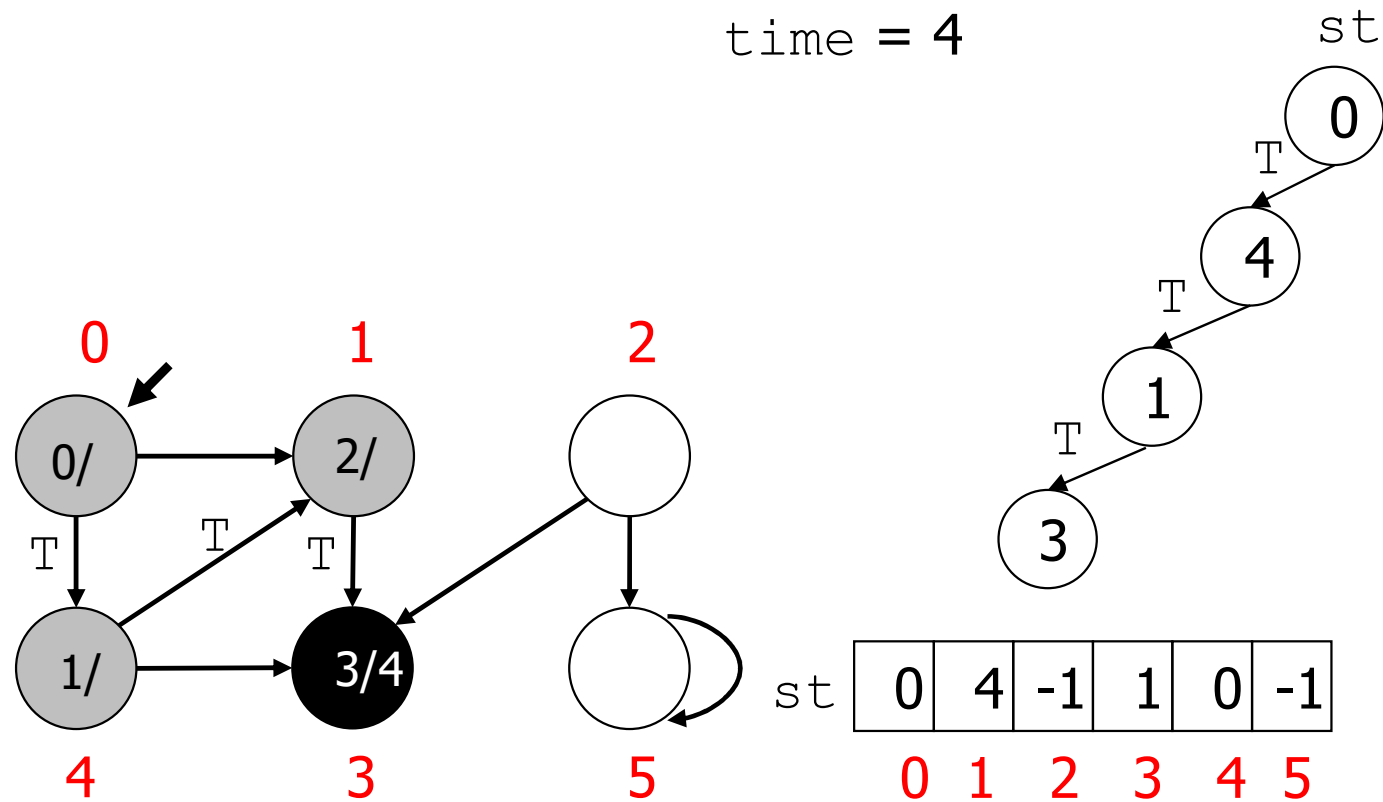
time = 2



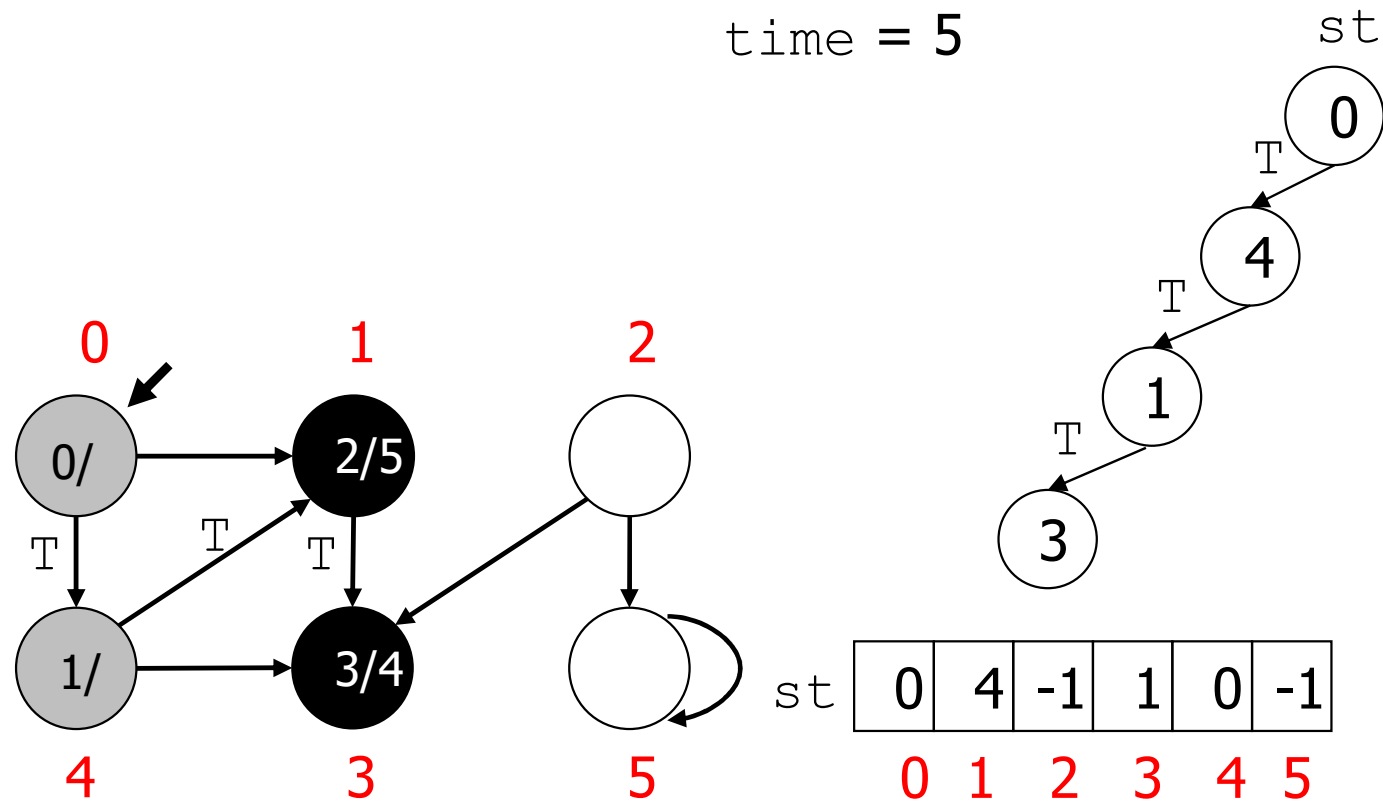
time = 3



time = 4

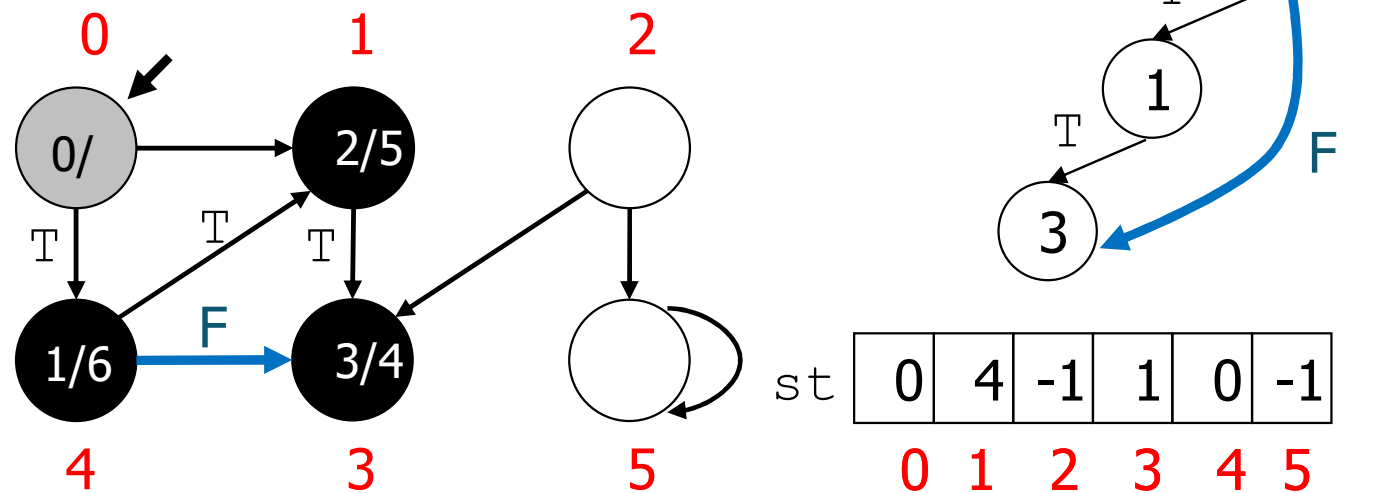


time = 5

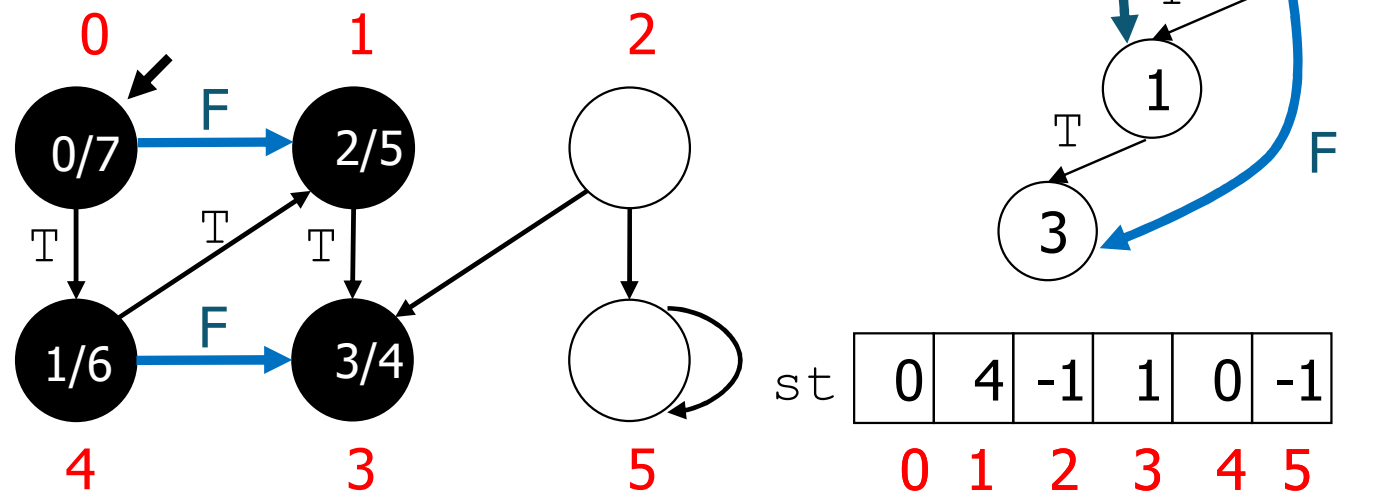




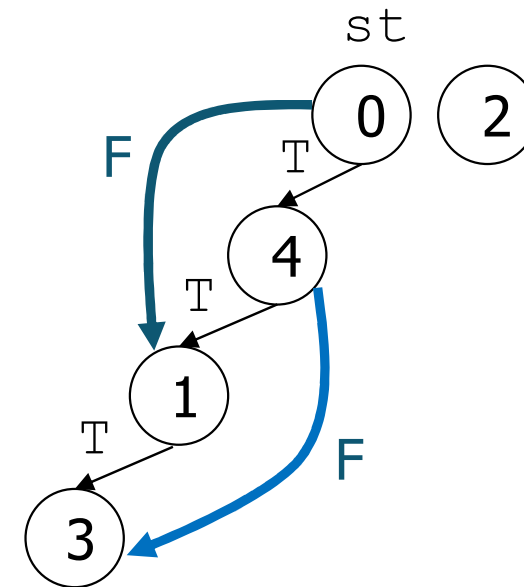
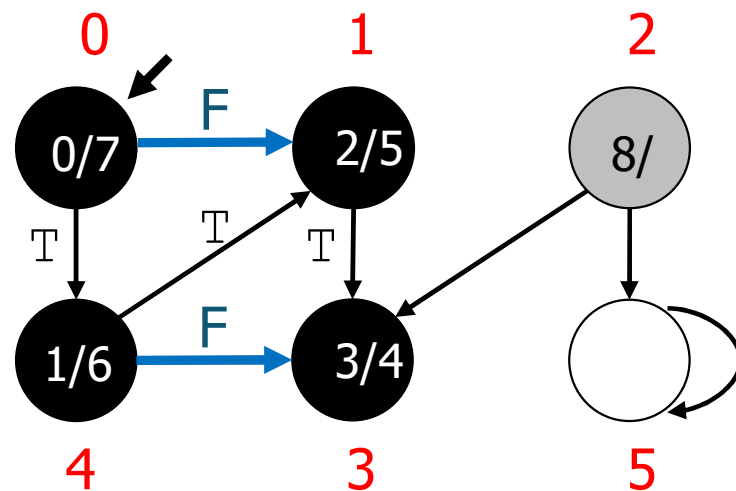
time = 6



time = 7



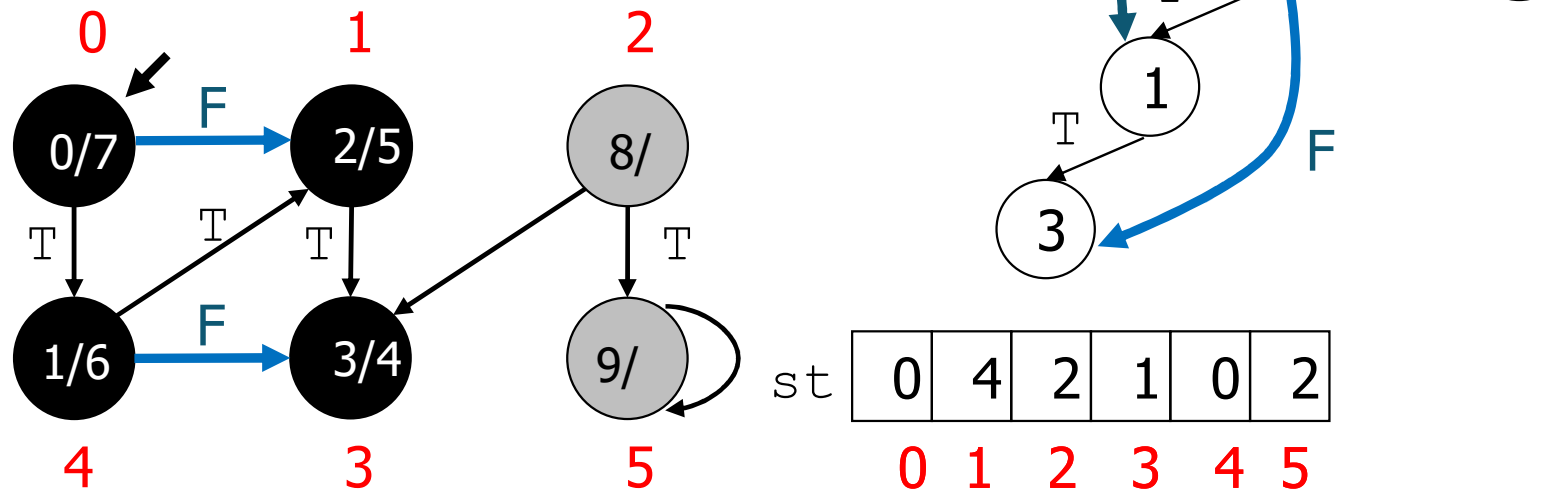
time = 8



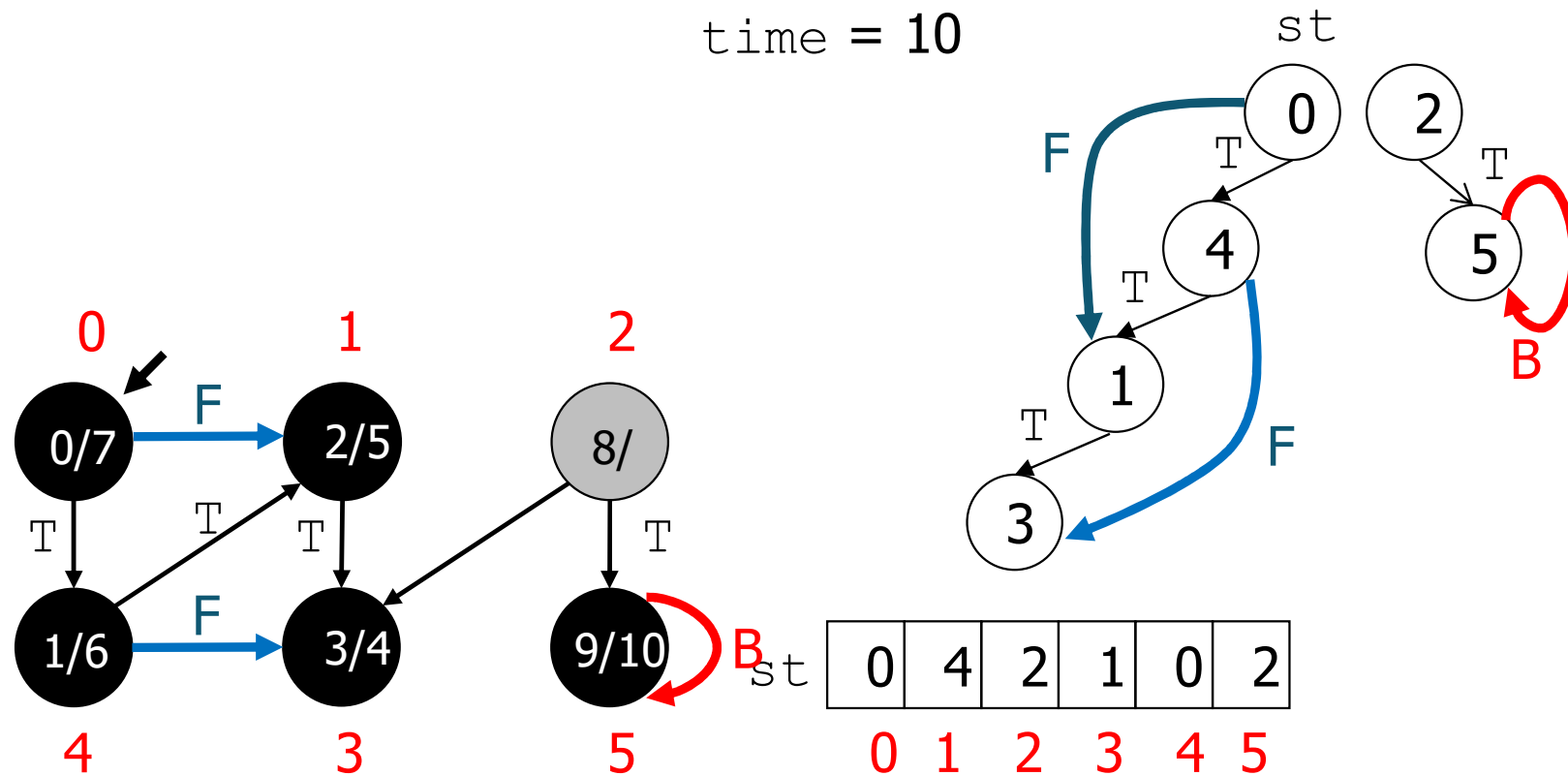
st

0	4	2	1	0	-1
0	1	2	3	4	5

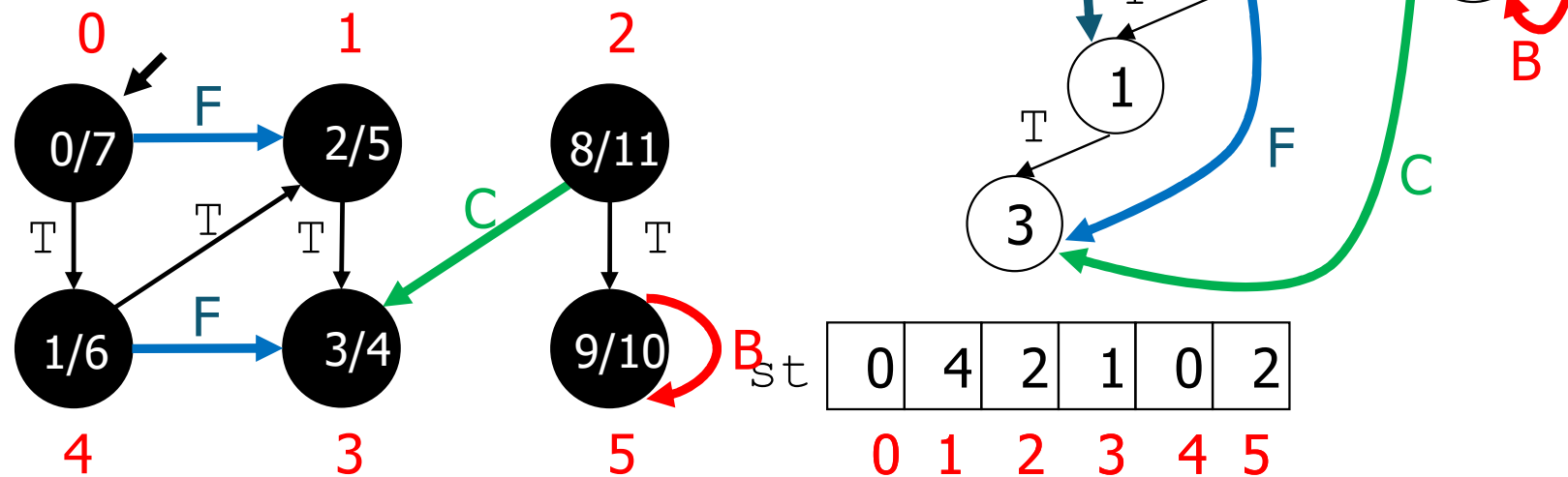
time = 9



time = 10



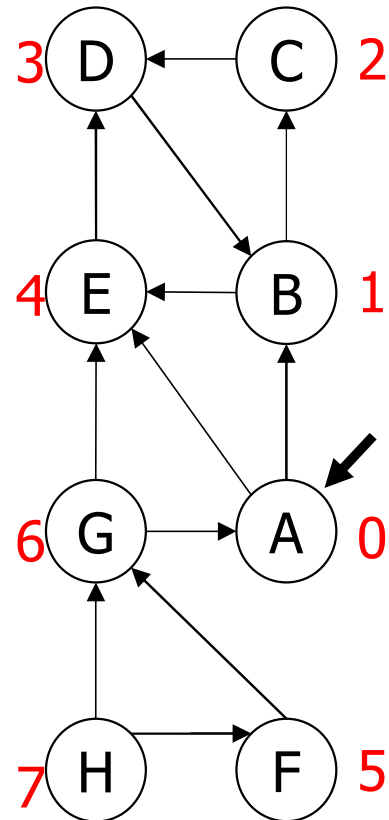
time = 11



# Esempio

Lista archi

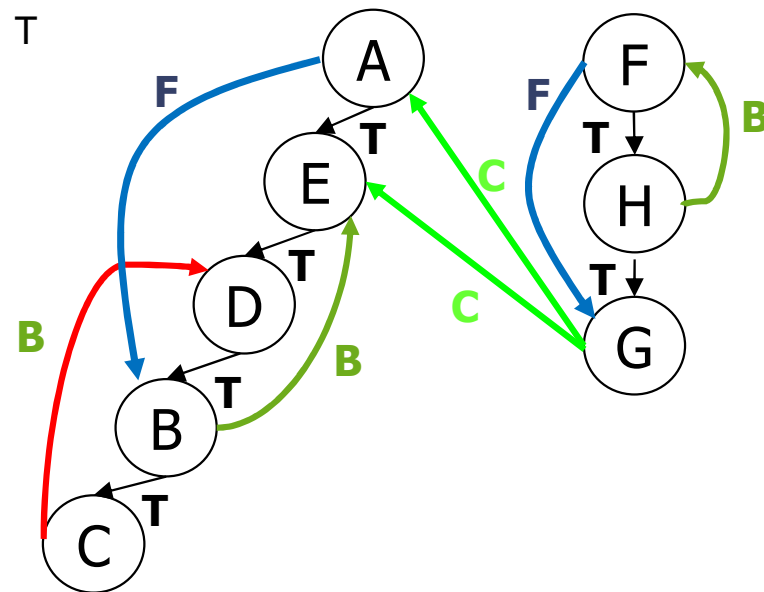
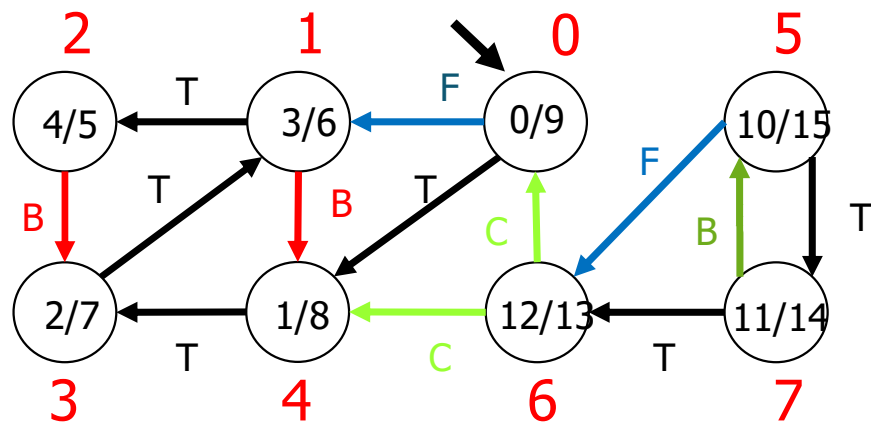
A	B
B	C
C	D
A	E
F	G
F	H
D	B
E	D
B	E
G	E
H	G
H	F
G	A



	ST
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F
6	G
7	H

Lista delle  
adiacenze

0	●	→	4	●	→	1	●
1	●	→	4	●	→	2	●
2	●	→	3	●			
3	●	→	1	●			
4	●	→	3	●			
5	●	→	7	●	→	6	●
6	●	→	0	●	→	4	●
7	●	→	5	●	→	6	●





```
void dfsR(Graph G, Edge e, int *time,  
          int *pre, int *post, int *st){
```

```
    link t;
```

```
    int v, w = e.w;
```

```
    Edge x;
```

```
    if (e.v != e.w)
```

escludi arco fittizio

```
        printf("(%s, %s):  T \n", STsearchByIndex(G->tab, e.v),  
                STsearchByIndex(G->tab, e.w));
```

```
    st[e.w] = e.v;
```

```
    pre[w] = (*time)++;
```

```
    for (t = G->ladj[w]; t != G->z; t = t->next)
```

terminazione implicita  
della ricorsione

```
        if (pre[t->v] == -1)
```

```
            dfsR(G, EDGEcreate(w, t->v), time, pre, post, st);
```

```
        else {
```

```
            v = t->v;
```

```
            x = EDGEcreate(w, v);
```

test per non considerare gli archi 2 volte

grafi non orientati

```
if (pre[w] < pre[v])
    printf("(s, s): B\n", STsearchByIndex(G->tab, x.v),
        STsearchByIndex(G->tab, x.w)) ;
if (post[v] == -1)
    printf("(s, s): B\n", STsearchByIndex(G->tab, x.v),
        STsearchByIndex(G->tab, x.w));
else
    if (pre[v] > pre[w])
        printf("(s,s):F\n",STsearchByIndex(G->tab, x.v),
            STsearchByIndex(G->tab, x.w));
    else
        printf("(s,s):C\n",STsearchByIndex(G->tab, x.v),
            STsearchByIndex(G->tab, x.w));
}
post[w] = (*time)++;
}
```

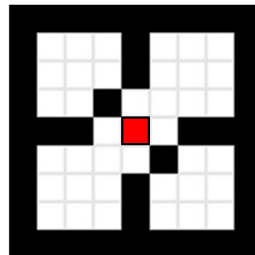
grafi orientati

## Complessità (lista adiacenze)

- Inizializzazione  $\Theta(|V|)$
- visita ricorsiva da u  $\Theta(|E|)$
- $T(n) = \Theta(|V| + |E|)$ .
- con la matrice delle adiacenze:  $T(n) = \Theta(|V|^2)$ .

## Applicazione: flood fill

- Scopo: colorare un'intera area di pixel connessi con lo stesso colore (Bucket Tool)
- DFS a partire dal pixel sorgente (seed), terminazione quando si incontra una frontiera (boundary):



<http://en.wikipedia.org>

Sedgewick, Wayne, Algorithms Part I & II, [www.coursera.org](http://www.coursera.org)

## Visita in ampiezza

A partire da un vertice  $s$ :

- determina tutti i vertici raggiungibili da  $s$ , quindi non visita necessariamente tutti i vertici a differenza della DFS
- calcola la distanza minima da  $s$  di tutti i vertici da esso raggiungibili.
- genera un albero della visita in ampiezza.

Ampiezza: espande tutta la frontiera tra vertici già scoperti/non ancora scoperti.

## Principi base

Scoperta di un vertice: prima volta che si incontra nella visita raggiungendolo percorrendo un arco.

Il vettore  $\text{pre}[v]$  registra il tempo di scoperta di  $v$ .

Dato un vertice  $v$ , il vettore  $\text{st}[v]$  registra il padre di  $v$  nell'albero della visita in ampiezza.

Non appena il vertice viene scoperto, si registra il tempo di scoperta e il padre nell'albero, concludendo così l'elaborazione del vertice stesso.

## Strutture dati

- grafo non pesato come matrice delle adiacenze
- coda  $Q$  di archi  $e = (v, w)$
- vettore `st` dei padri nell'albero di visita in ampiezza
- vettore `pre` dei tempi di scoperta dei vertici
- contatore `time` del tempo

`time`, `*pre` e `*st` sono locali alla funzione `GRAPHbfs`  
e passati by reference alla funzione `bfs`.



wrapper

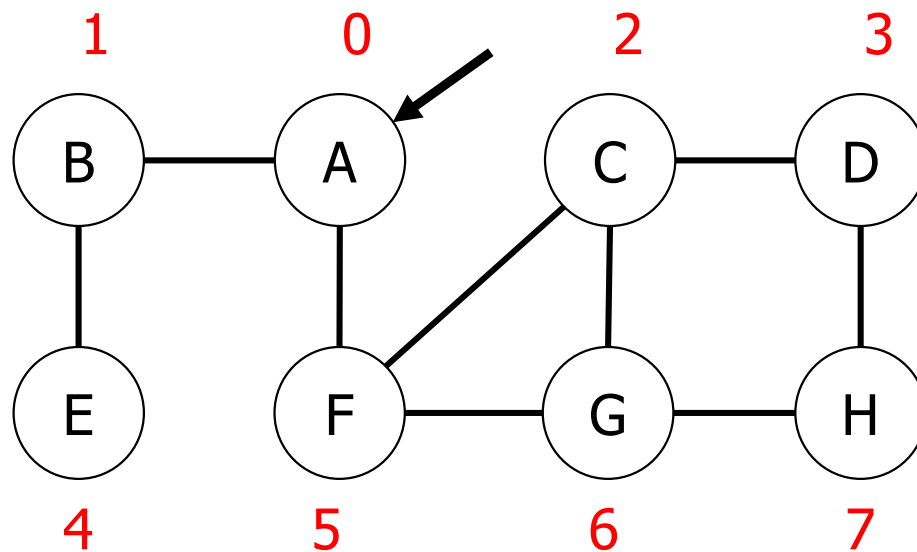
## Algoritmo

- metti l'arco fittizio di partenza  $e = (id, id)$  nella coda
- ripeti fintanto che la coda non si svuota
  - estrai dalla coda un arco  $e = (v, w)$
  - se  $e.w$  è un vertice non ancora scoperto ( $pre[e.w] == -1$ )
    - indica che  $e.v$  è padre di  $e.w$  nella BFS ( $st[e.w] = e.v$ )
    - marca  $e.w$  come scoperto al tempo  $time$  ( $pre[e.w] = time++$ ) e incrementa il tempo
    - trova i vertici non ancora scoperti  $x$  adiacenti a  $e.w$  e metti in coda tutti gli archi che connettono  $e.w$  ad essi.

`bfs`: funzione che visita in ampiezza a partire da un vertice di partenza `id`.



# Esempio



Lista archi

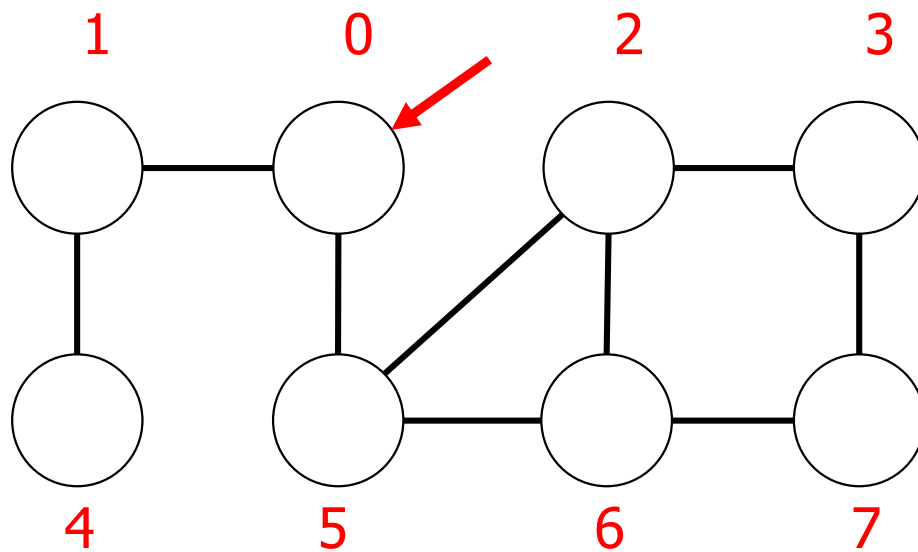
A	B
C	D
B	E
C	F
F	G
D	H
A	F
C	G
G	H

	ST
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F
6	G
7	H

st							
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	1	2	3	4	5	6	7

Q (0,0)

st

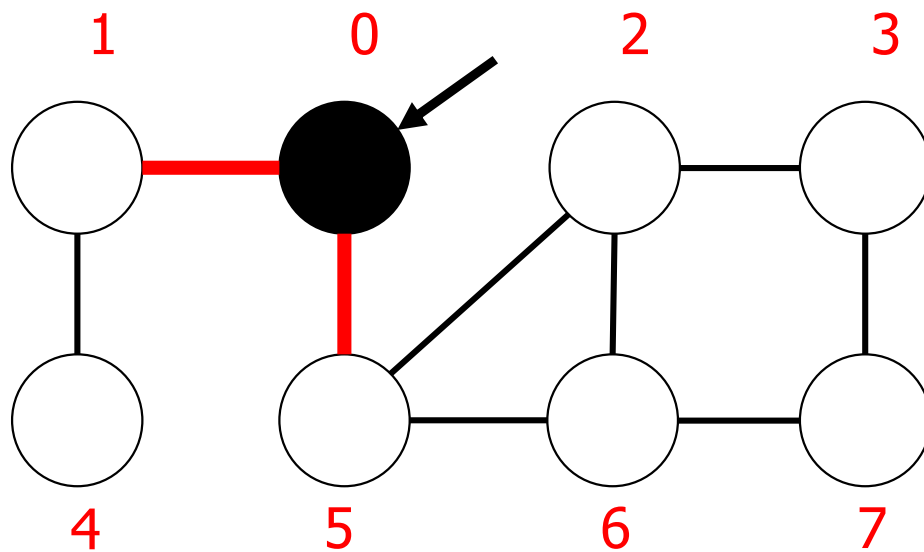


st

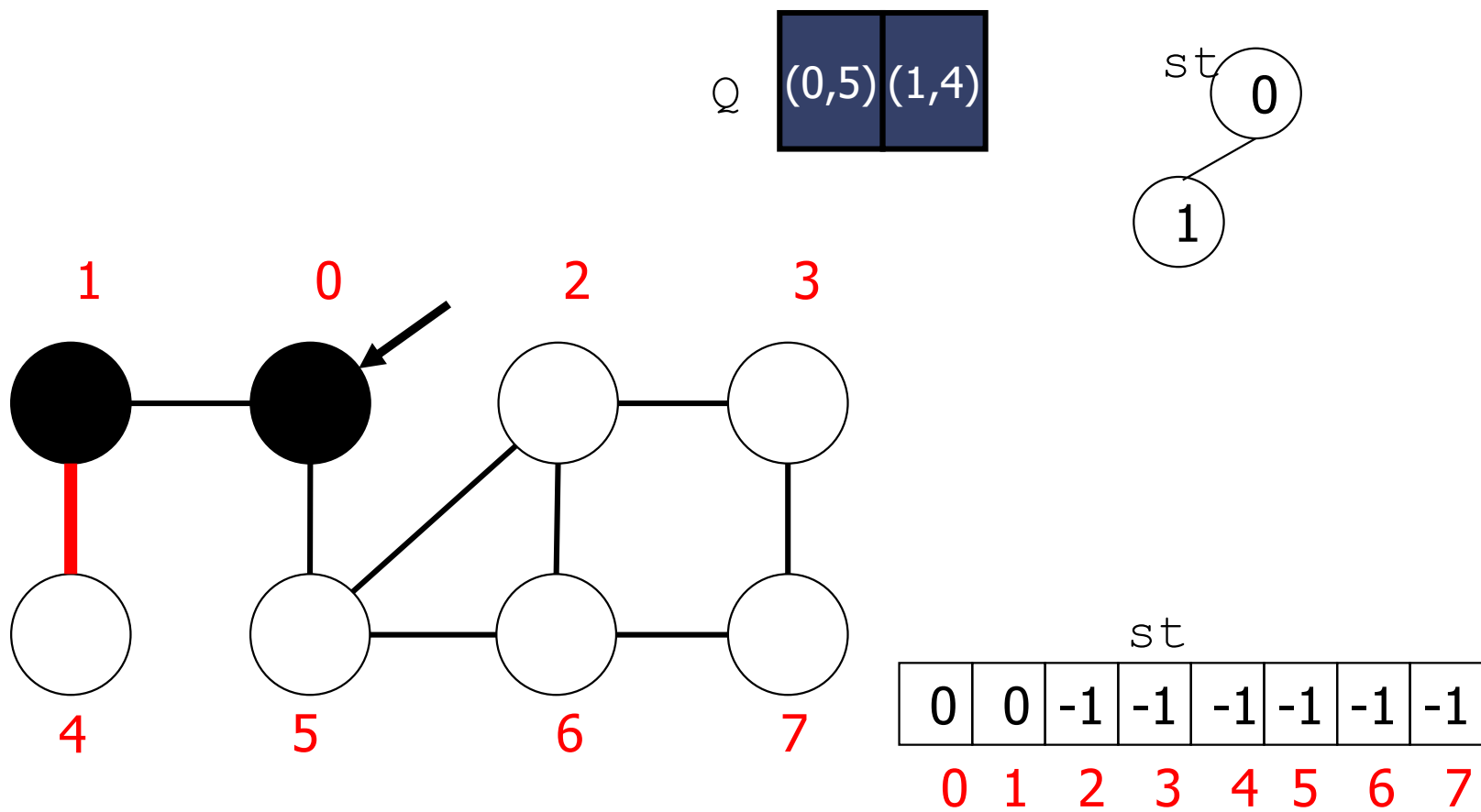
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	1	2	3	4	5	6	7

Q (0,1) (0,5)

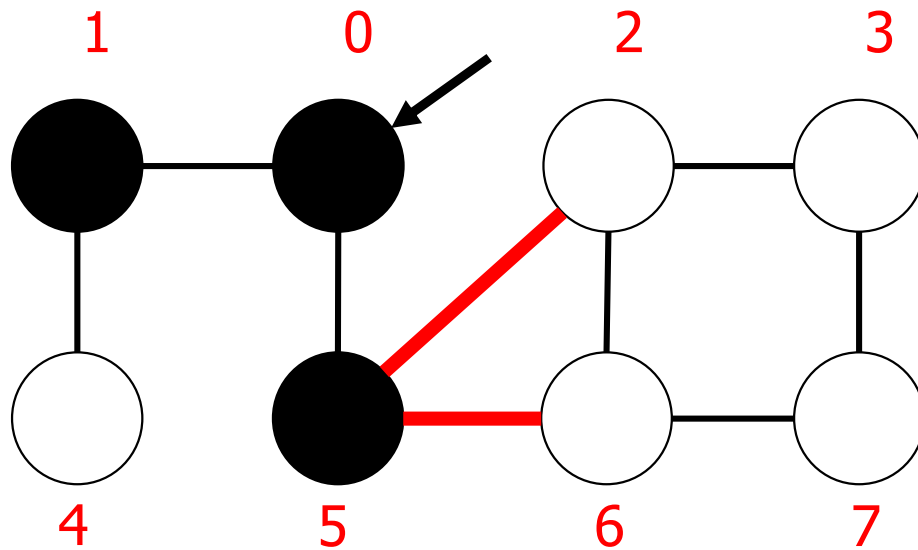
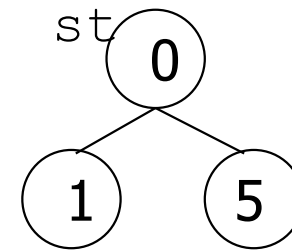
st 0



st							
0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
0	1	2	3	4	5	6	7

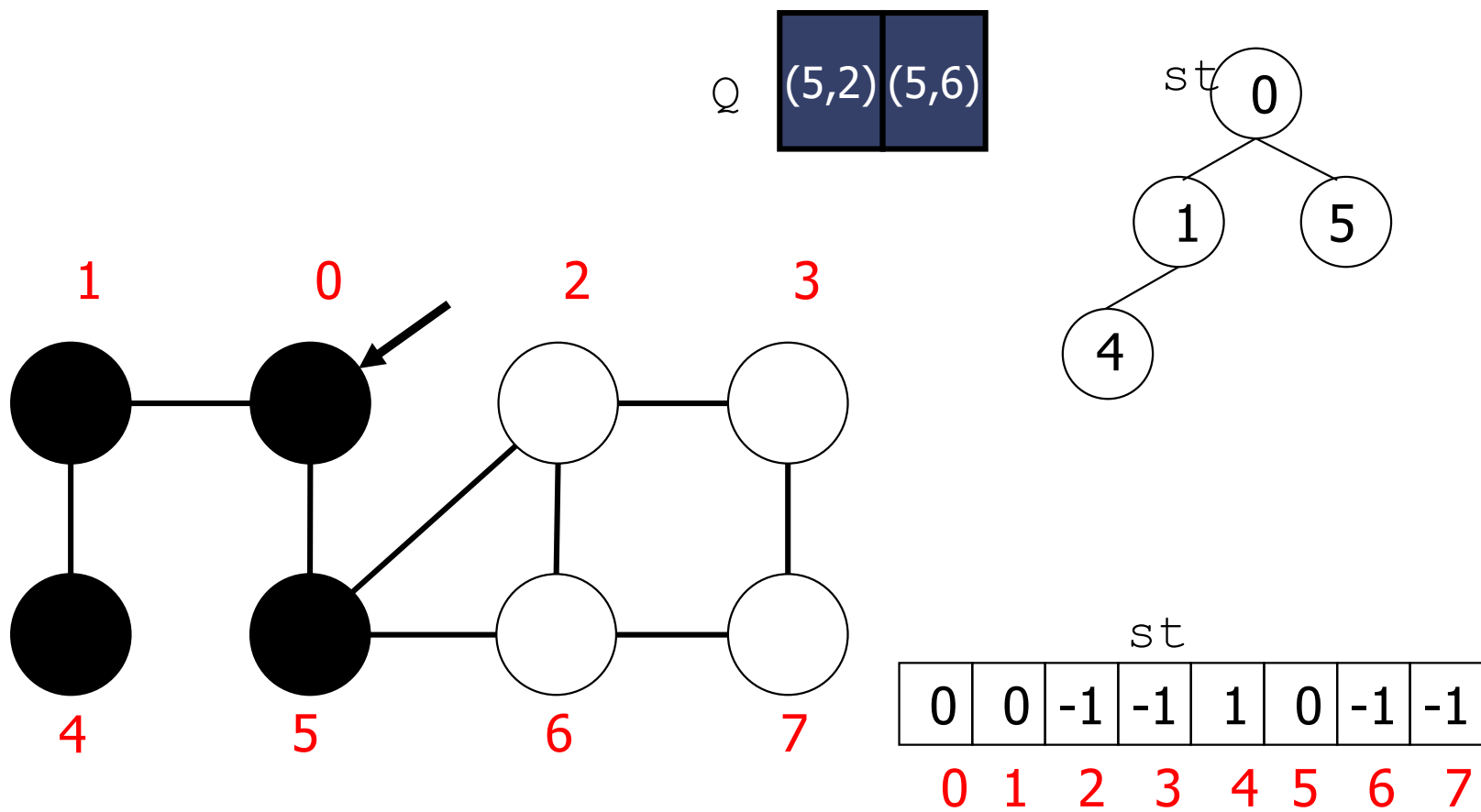


Q (1,4) (5,2) (5,6)



st

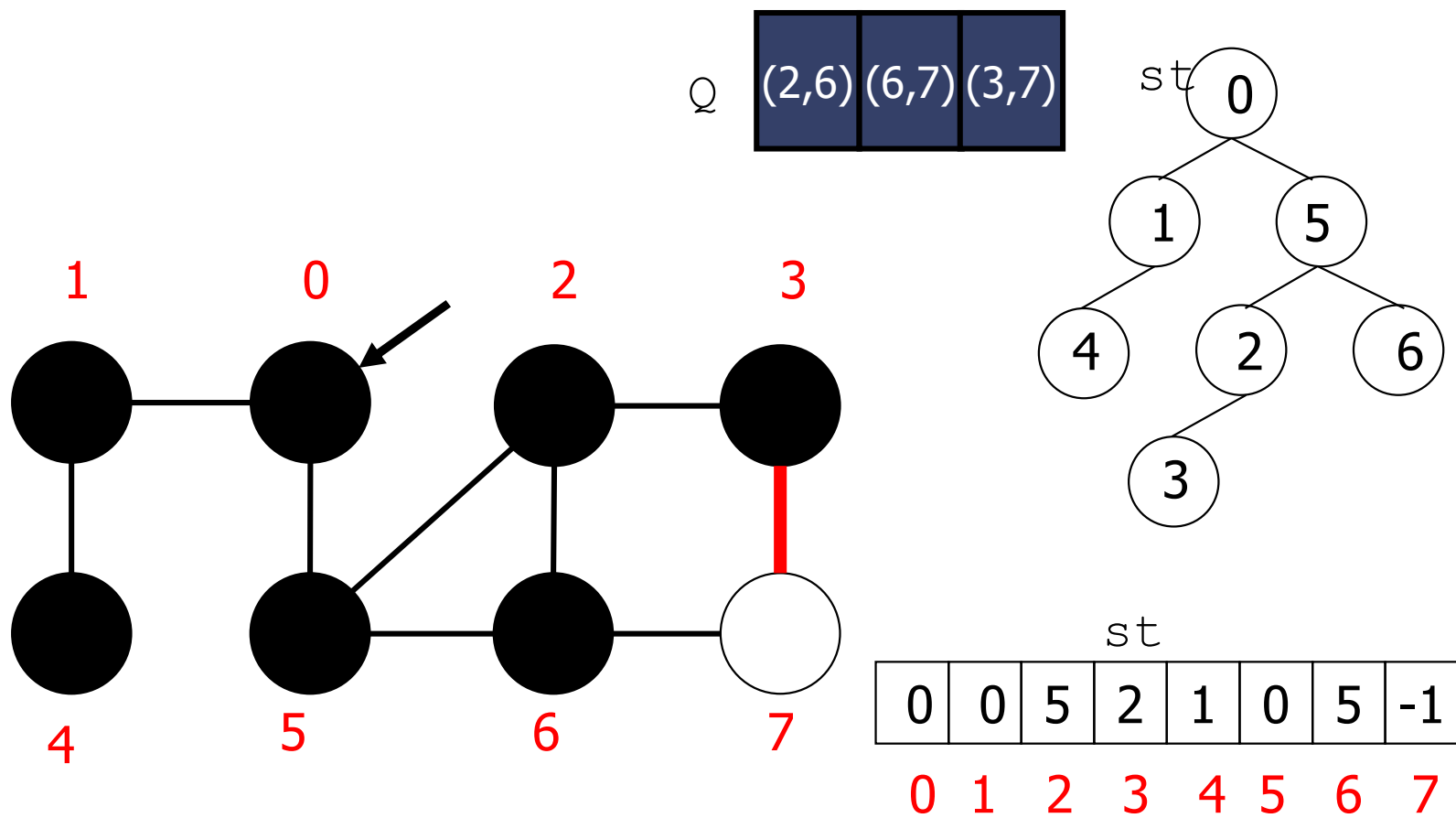
0	0	-1	-1	-1	0	-1	-1
0	1	2	3	4	5	6	7



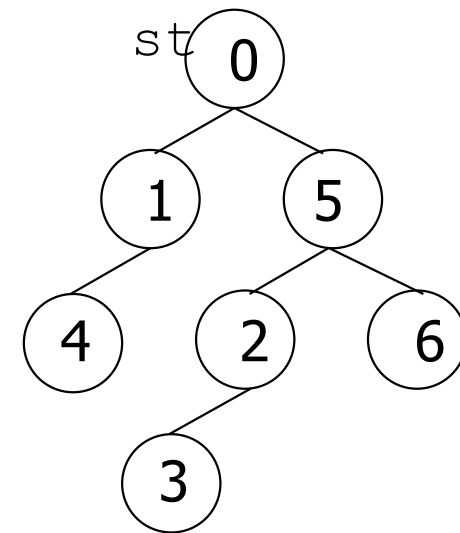
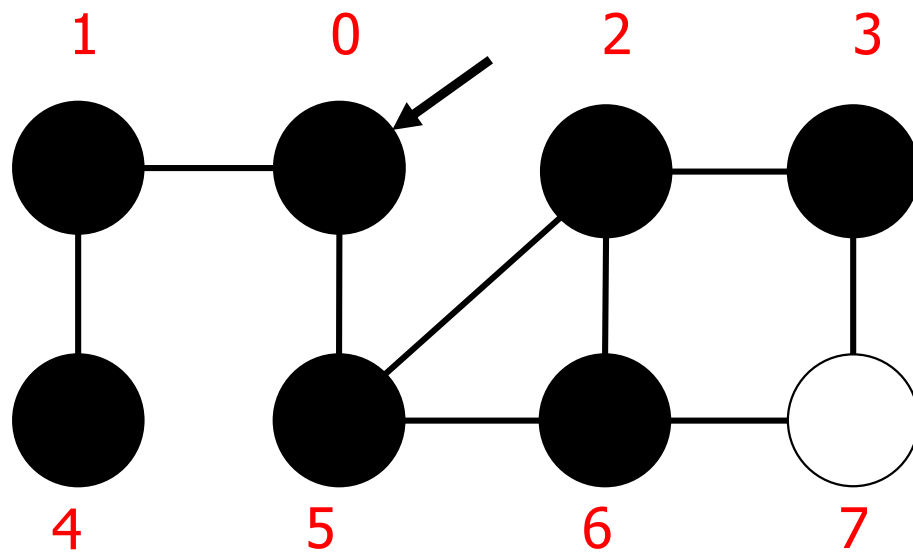






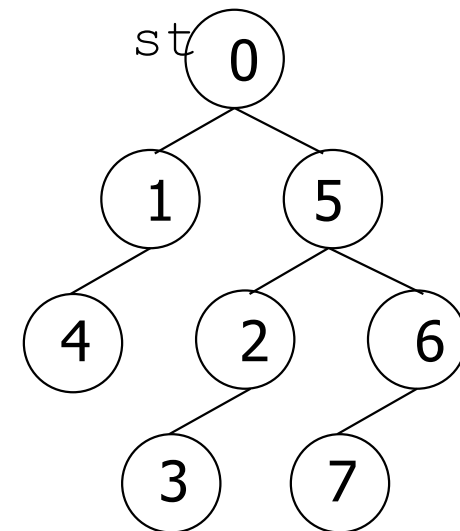
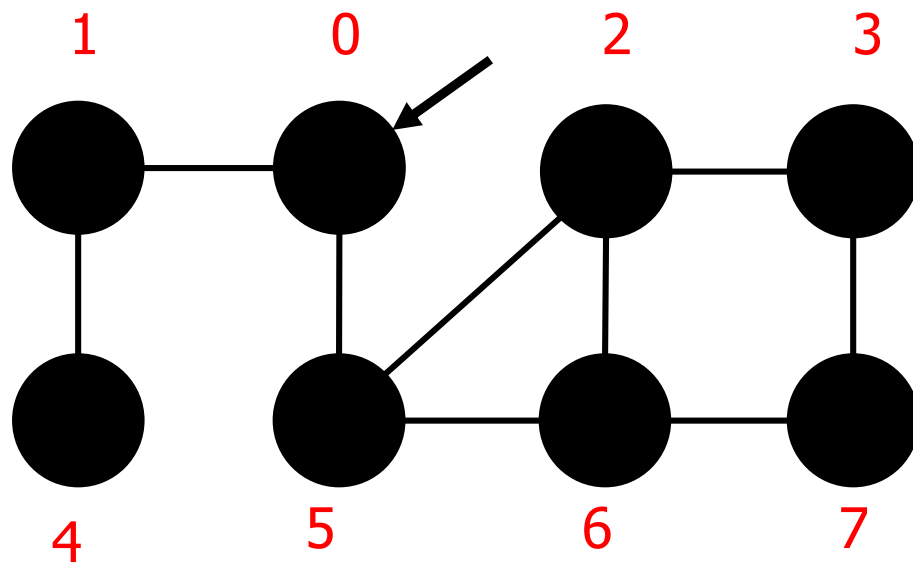


Q (6,7) (3,7)



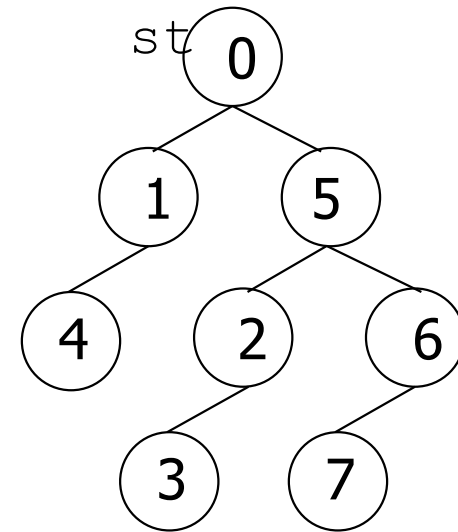
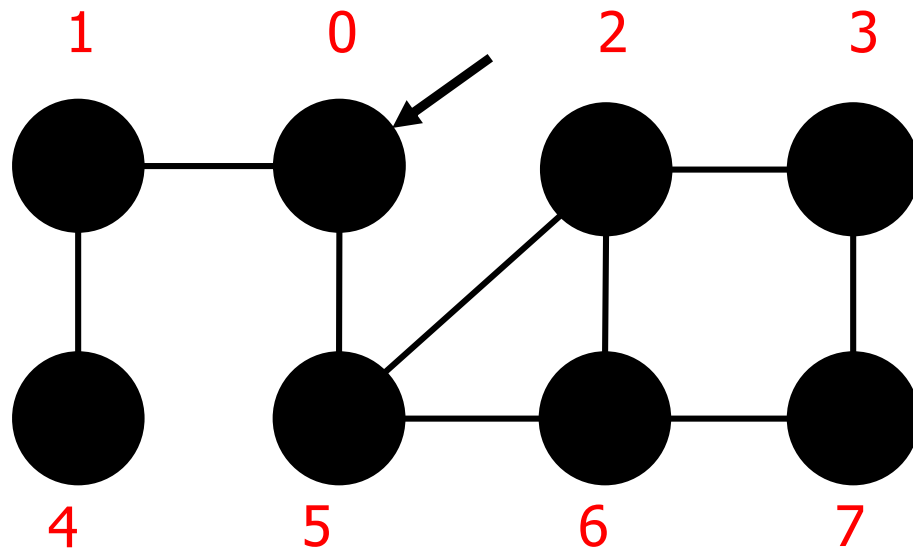
st							
0	0	5	2	1	0	5	-1
0	1	2	3	4	5	6	7

Q (3,7)



st							
0	0	5	2	1	0	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7

Q



st							
0	0	5	2	1	0	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7

```

void GRAPHbfs(Graph G, int id) {
    int v, time=0, *pre, *st, *dist;
    /* allocazione di pre, st e dist */
    for (v=0; v < G->V; v++) {
        pre[v] = -1; st[v] = -1; dist[v] = INT_MAX;
    }
    bfs(G, EDGEcreate(id,id), &time, pre, st, dist);
    printf("\n Resulting BFS tree \n");
    for (v=0; v < G->V; v++)
        if (st[v] != -1)
            printf("%s's parent is:%s\n",STsearchByIndex(G->tab, v),
                STsearchByIndex(G->tab, st[v]));
    printf("\n Levelizing \n");
    for (v=0; v < G->V; v++)
        if (st[v] != -1)
            printf("%s: %d \n",STsearchByIndex(G->tab,v),dist[v]);
}

```

```

void bfs(Graph G, Edge e, int *time, int *pre, int *st,
        int *dist) {
    int x;
    Q q = Qinit();
    Qput(q, e);
    dist[e.v]=-1;
    while (!Qempty(q))
        if (pre[(e = Qget(q)).w] == -1) {
            pre[e.w] = (*time)++;
            st[e.w] = e.v;
            dist[e.w] = dist[e.v]+1;
            for (x = 0; x < G->V; x++)
                if (G->madj[e.w][x] == 1)
                    if (pre[x] == -1)
                        Qput(q, EDGEcreate(e.w, x));
        }
}

```

matrice delle  
adiacenze

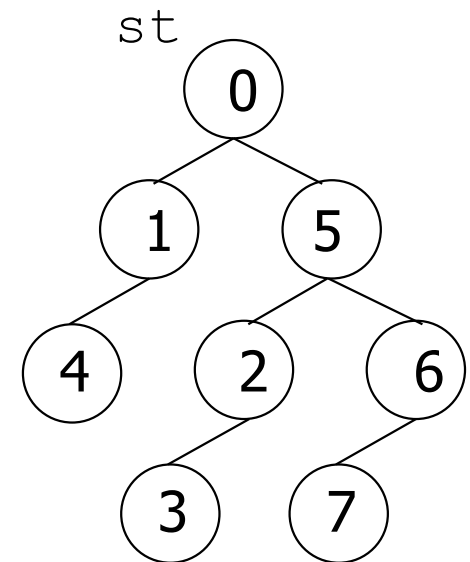
## Complessità

- Operazioni sulla coda
- Scansione della matrice delle adiacenze  $T(n) = \Theta(|V|^2)$ .
- Con la lista delle adiacenze:  $T(n) = O(|V| + |E|)$ .

## Proprietà

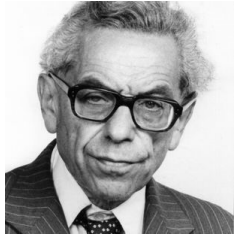
Cammini minimi: la visita in ampiezza determina la minima distanza tra  $s$  e ogni vertice raggiungibile da esso.

Cammino minimo da 0 a 3:  
0, 5, 2, 3  
lunghezza = 3

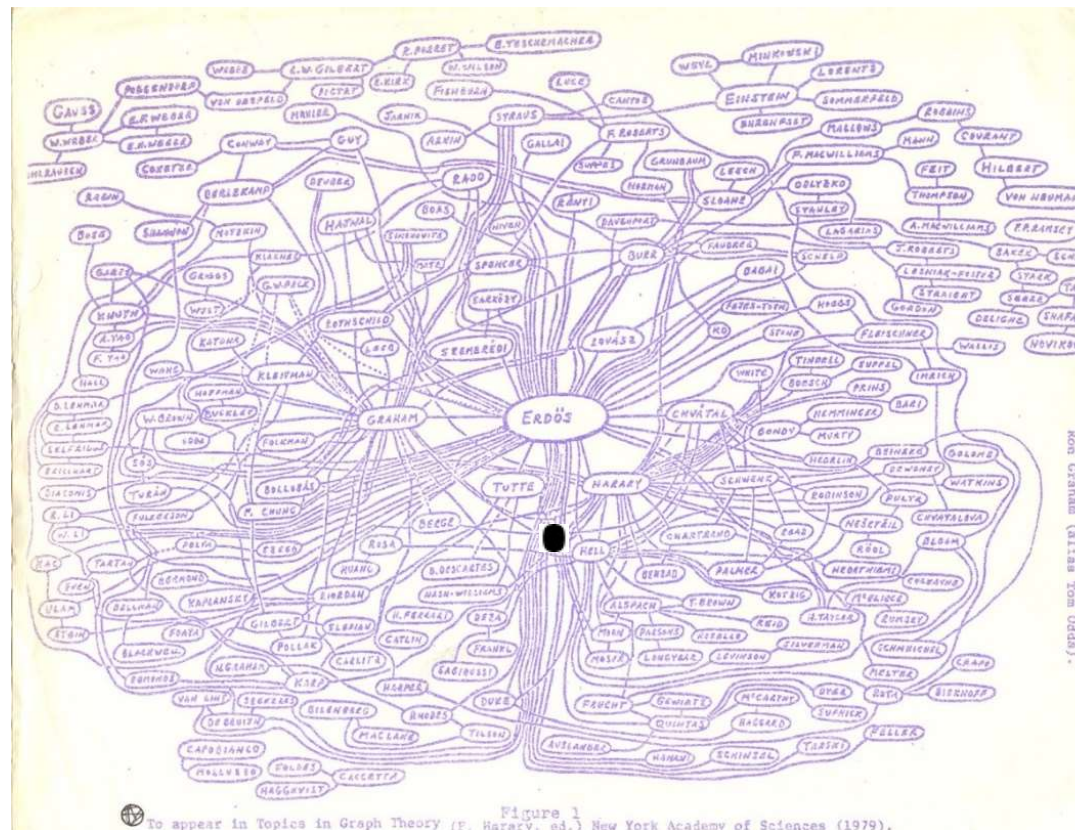




## Applicazione: I numeri di Erdős



- Paul Erdős (1913-1996): matematico ungherese «itinerante»: pubblicazioni con moltissimi coautori
- Grafo non orientato:
  - vertici: matematici
  - arco: unisce 2 matematici che hanno una pubblicazione in comune
- numero di Erdős: distanza minima di ogni matematico da Erdős
- BFS



<http://www.oakland.edu/upload/images/Erdos%20Number%20Project/cgraph.jpg>  
Sedgewick, Wayne, Algorithms Part I & II, [www.coursera.org](http://www.coursera.org)

## Riferimenti

- Visita in profondità:
  - Sedgewick Part 5 18.2, 18.3, 18.4
  - Cormen 23.3
- Visita in ampiezza:
  - Sedgewick Part 5 18.7
  - Cormen 23.2
- Numero di Erdős:
  - Bertossi 9.5.2

# Esercizi di teoria

- 10. Visite dei grafi e applicazioni
  - 10.2 Visita in ampiezza
  - 10.3 Visita in profondità

