

Proprietà strutturali e leggi di controllo

Osservabilità e rilevabilità



Osservabilità e rilevabilità

- Definizioni ed esempi introduttivi
- Analisi dell'osservabilità di sistemi dinamici LTI
- Esempi di studio dell'osservabilità
- Osservabilità e realizzazione
- Il principio di dualità



Osservabilità e rilevabilità

Definizioni ed esempi introduttivi



$y(t) = Cx(t)$

Introduzione

- Le proprietà di **osservabilità** e di **rilevabilità** descrivono le possibilità di stimare lo stato del sistema $x(\cdot)$ tramite la misura del movimento dell'uscita $y(\cdot)$ e dell'ingresso $u(\cdot)$
- La proprietà di **osservabilità** descrive la possibilità di stimare lo stato iniziale del sistema mediante la misura dell'uscita $y(\cdot)$ e dell'ingresso $u(\cdot)$ su un dato intervallo di tempo
- La proprietà di **rilevabilità** descrive la possibilità di stimare lo stato finale del sistema mediante la misura dell'uscita $y(\cdot)$ e dell'ingresso $u(\cdot)$ su un dato intervallo di tempo

$$y(t) = Cx(t)$$

Definizione di stato non osservabile

- Per studiare la proprietà di **osservabilità** è opportuno definire dapprima il concetto di stato **non osservabile**

- Uno stato $x^* \neq 0$ si dice **non osservabile** (nell'intervallo $[t_0, t^*]$) se, qualunque sia $t^* \in [t_0, \infty)$, detto $y_\ell(t)$ il movimento libero dell'uscita conseguente allo stato iniziale $x(t_0) = x^* \neq 0$, risulti:

$$y_\ell(t) = 0, \forall t \in [t_0, t^*]$$

- Senza perdere generalità, si può assumere: $t_0 = 0$

Lo spazio di non osservabilità

- L'insieme di tutti gli stati non osservabili (nell'intervallo $[t_0, t^*]$) è dato dall'**insieme di non osservabilità** $X_{NO}(t^*)$ al tempo t^*
- L'insieme $X_{NO}(t^*)$ costituisce un sottospazio lineare dello spazio di stato X
- Il **sottospazio di non osservabilità** X_{NO} è definito come l'insieme di non osservabilità $X_{NO}(t)$ di dimensione minima:

$$X_{NO} = \min_{t \in [t_0, \infty)} X_{NO}(t)$$

La completa osservabilità

- Si definisce **il sottospazio di osservabilità** X_O come il complemento ortogonale di X_{NO} :

$$X_O = X_{NO}^\perp$$

e quindi $X_O \cap X_{NO} = \emptyset$, $X_O + X_{NO} = X$

- Un sistema è **completamente osservabile** se

$$X_O = X$$

Definizione di stato non rilevabile

- Uno stato x^* si dice **non rilevabile** (nell'intervallo $[t_0, t^*]$) se, qualunque sia $t^* \in [t_0, \infty)$, detto $y_\ell(t)$ il movimento libero dell'uscita che ha come stato finale $x(t^*) = x^* \neq 0$, risulti:

$$y_\ell(t) = 0, \forall t \in [t_0, t^*]$$

- L'insieme di tutti gli stati non rilevabili (nell'intervallo $[t_0, t^*]$) è dato dall'**insieme di non rilevabilità** $X_{ND}(t^*)$ al tempo t^*

$$y(t) = Cx(t)$$

La completa rilevabilità

- Si definisce **il sottospazio di non rilevabilità** X_{ND} come l'insieme di non rilevabilità $X_{ND}(t)$ di dimensione minima:

$$X_{ND} = \min_{t \in [t_0, \infty)} X_{ND}(t)$$

- Si definisce **il sottospazio di rilevabilità** X_D come il complemento ortogonale di X_{ND} :

$$X_D = X_{ND}^{\perp}$$

- Un sistema è **completamente rilevabile** se

$$X_D = X$$

Relazioni tra osservabilità e rilevabilità

- Per i sistemi LTI TC si ha:

$$X_O = X_D$$

- Per i sistemi LTI TD si ha in generale:

$$X_O \subseteq X_D$$

- Se la matrice A è non singolare

$$X_O = X_D$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Studio dell'osservabilità

- Per i sistemi LTI si ha quindi in generale:

$$X_o \subseteq X_D$$

- Quindi, se un sistema LTI è completamente osservabile è anche completamente rilevabile
- Pertanto, si studieranno sempre le proprietà di osservabilità

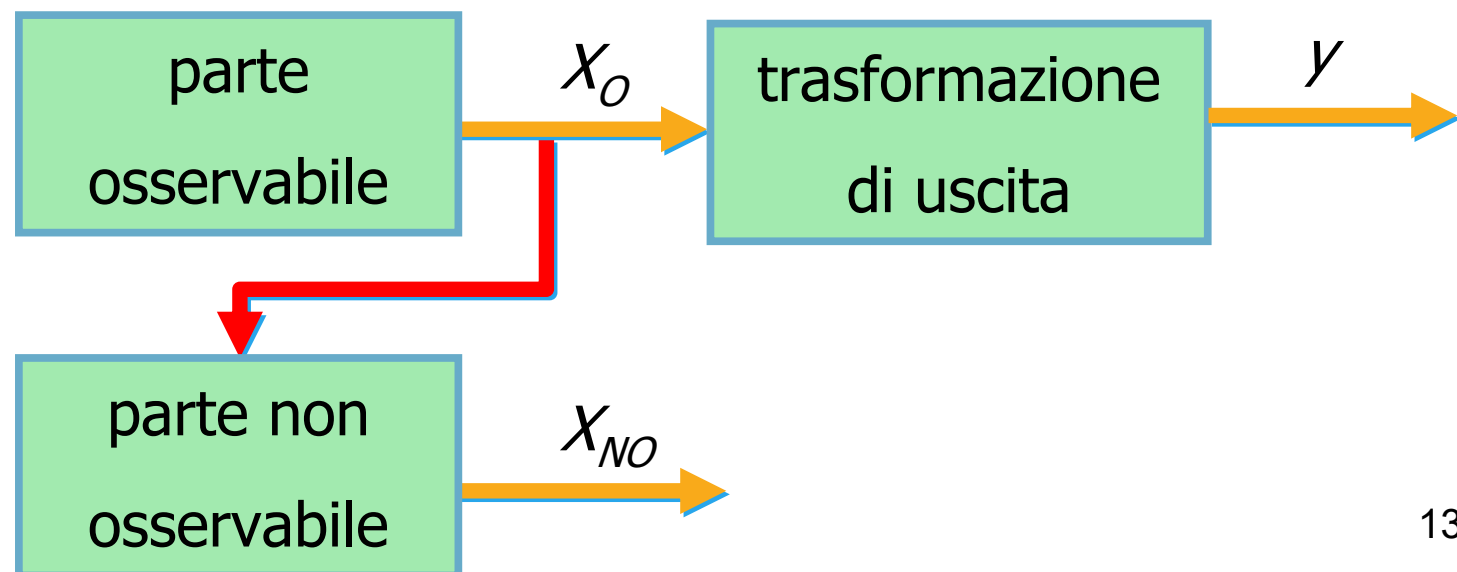
Parte osservabile e non osservabile

- In un sistema LTI con dimensione finita n e non completamente osservabile sono stati definiti:
 - Il **sottospazio di osservabilità** X_o
($\dim(X_o) = o < n$) → **parte osservabile**
 - Il **sottospazio di non osservabilità** X_{no}
($\dim(X_{no}) = n - o$) → **parte non osservabile**
 - Al **sottospazio di osservabilità** sono associati o degli n autovalori della matrice A
 - Al **sottospazio di non osservabilità** sono associati $n - o$ degli n autovalori della matrice A

$$y(t) = Cx(t)$$

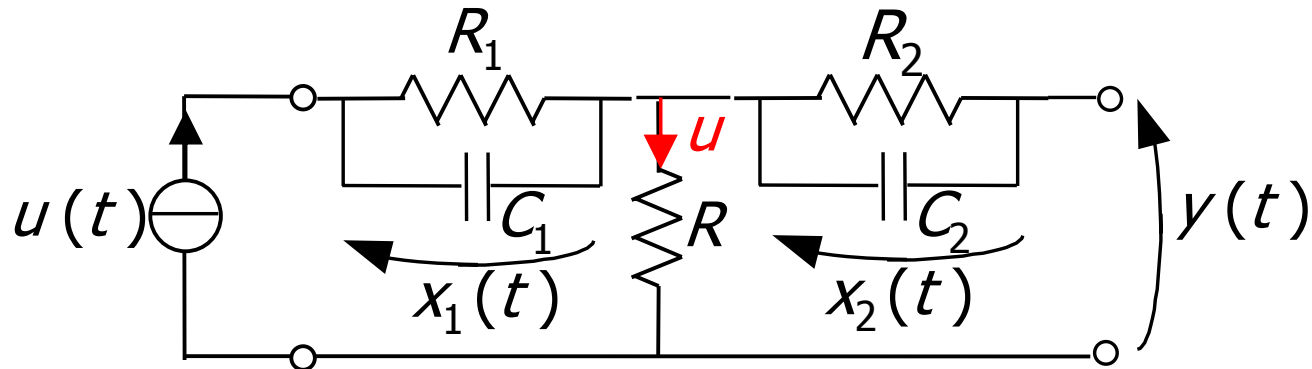
Parte osservabile e non osservabile

- L'uscita è influenzata dalla sola parte osservabile
- Gli stati osservabili possono influenzare la parte non osservabile, ma non il viceversa



Esempio introduttivo 1

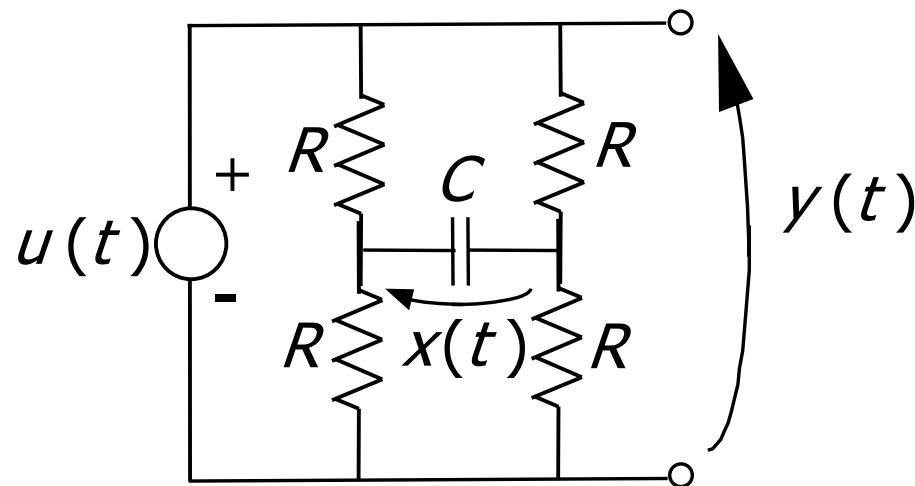
- Consideriamo il seguente sistema dinamico:



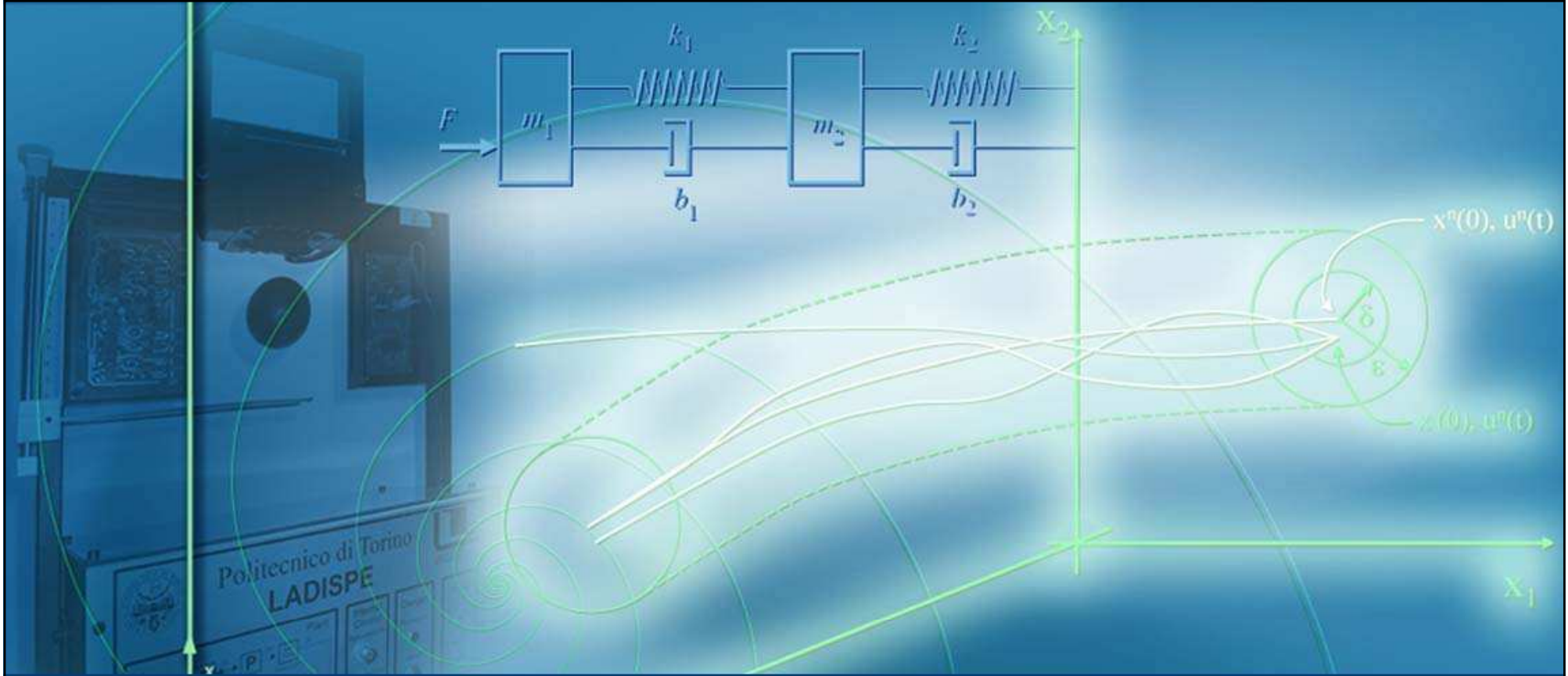
- Supponiamo $x_1(0) \neq 0, x_2(0) = 0$
- A causa del circuito aperto su $y(t)$, la corrente nella resistenza R è sempre pari all'ingresso $u(t)$
 $\rightarrow y(t) = R u(t), \forall t \geq 0$
- L'effetto di $x_1(0) \neq 0$ non compare su $y(t)$
- Lo stato $x_1(0)$ non è **osservabile** dall'uscita $y(t)$

Esempio introduttivo 2

- Consideriamo il seguente sistema dinamico:



- Supponiamo $u(t) = 0 \forall t$, $x(0) \neq 0$
 $y(t) = u(t) = 0, \forall t \geq 0$
 $\rightarrow x(0) \neq 0$ non ha nessun effetto su $y(t)$
- Lo stato $x(0)$ non è **osservabile** dall'uscita $y(t)$



Osservabilità e rilevabilità

Analisi dell'osservabilità di sistemi dinamici LTI

$$y(t) = Cx(t)$$

Determinazione di X_o per sistemi LTI TD (1/7)

- Consideriamo un sistema dinamico LTI TD descritto dalle equazioni di ingresso – stato – uscita :

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}$$

- Vogliamo trovare:
 - L'insieme di non osservabilità $X_{NO}(\ell)$ al tempo ℓ
 - Il sottospazio di non osservabilità X_{NO}
 - Il sottospazio di osservabilità X_o
 - Una condizione necessaria e sufficiente per la completa osservabilità del sistema

$$y(t) = Cx(t)$$

Determinazione di X_0 per sistemi LTI TD (2/7)

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

➤ Consideriamo, per semplicità, il caso in cui:

- Il sistema abbia una sola uscita ($q = 1 \rightarrow C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$)

- L'ingresso sia nullo: $u(k) = 0, \forall k$

➤ Si ha:

$$y(0) = y_\ell(0) = Cx(0)$$

$$y(1) = y_\ell(1) = Cx(1) = CAx(0)$$

$$y(2) = y_\ell(2) = Cx(2) = CAx(1) = CA^2x(0)$$

$$\vdots$$

$$y(\ell) = y_\ell(\ell) = Cx(\ell) = CAx(\ell-1) = \dots = CA^\ell x(0)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Determinazione di X_0 per sistemi LTI TD (3/7)

► Si può compattare l'espressione

$$y(0) = Cx(0)$$

$$y(1) = CAx(0)$$

$$y(2) = CA^2x(0)$$

$$\vdots$$

$$y(\ell) = CA^\ell x(0)$$

nella forma matriciale:



$$\underbrace{\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(\ell) \end{bmatrix}}_{Y(\ell)} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^\ell \end{bmatrix}}_{M_o(\ell)} x(0) = M_o(\ell) x(0)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Determinazione di X_0 per sistemi LTI TD (4/7)

- La matrice

$$M_o(\ell) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^\ell \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$$

rappresenta il legame tra la sequenza $[y(0), y(1), \dots, y(\ell)]$ e lo stato iniziale $x(0)$

- L' **insieme di non osservabilità** $X_{NO}(\ell)$ al tempo ℓ corrisponde allo **spazio nullo** $\mathcal{N}(\cdot)$ della matrice $M_o(\ell)$, che è proprio l'insieme degli stati iniziali che danno risposta libera nulla

$$y(t) = Cx(t)$$

Determinazione di X_o per sistemi LTI TD (5/7)

$$X_{no}(\ell) = \mathcal{N}(M_o(\ell)) = \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^\ell \end{bmatrix} \right)$$

- La dimensione di $\mathcal{N}(M_o(\ell))$ è minima quando il rango di $M_o(\ell)$ è massimo e cioè quando:
 $\ell = n - 1$

$$y(t) = Cx(t)$$

Determinazione di X_o per sistemi LTI TD (6/7)

- Definendo la **matrice di osservabilità** M_o come la matrice $M_o(n-1)$

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

si ha $\rightarrow X_{NO} = \mathcal{N}(M_o)$

- Quindi, essendo $X_o = X_{NO}^\perp$, come proprietà dell'algebra lineare, si ottiene:

$$X_o = X_{NO}^\perp = \left(\mathcal{N}(M_o) \right)^\perp = \mathcal{R}(M_o^T)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Determinazione di X_o per sistemi LTI TD (7/7)

- Pertanto, la dimensione del **sottospazio di osservabilità** X_o è pari al rango o della **matrice di osservabilità** M_o

$$\dim(X_o) = \rho(M_o) = o$$

- Un sistema dinamico LTI TD è quindi **completamente osservabile** (e anche rilevabile) se e soltanto se il rango della **matrice di osservabilità** M_o è pari alla dimensione n del sistema:

$$\rho(M_o) = n$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Generalizzazione

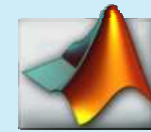
- Il risultato appena enunciato vale anche:
- Nel caso di sistemi dinamici LTI TC del tipo

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

per cui la matrice di osservabilità M_o è definita allo stesso modo

- Per i sistemi LTI TC e TD a più uscite ($q > 1$) nei quali la matrice M_o assume la forma più generale

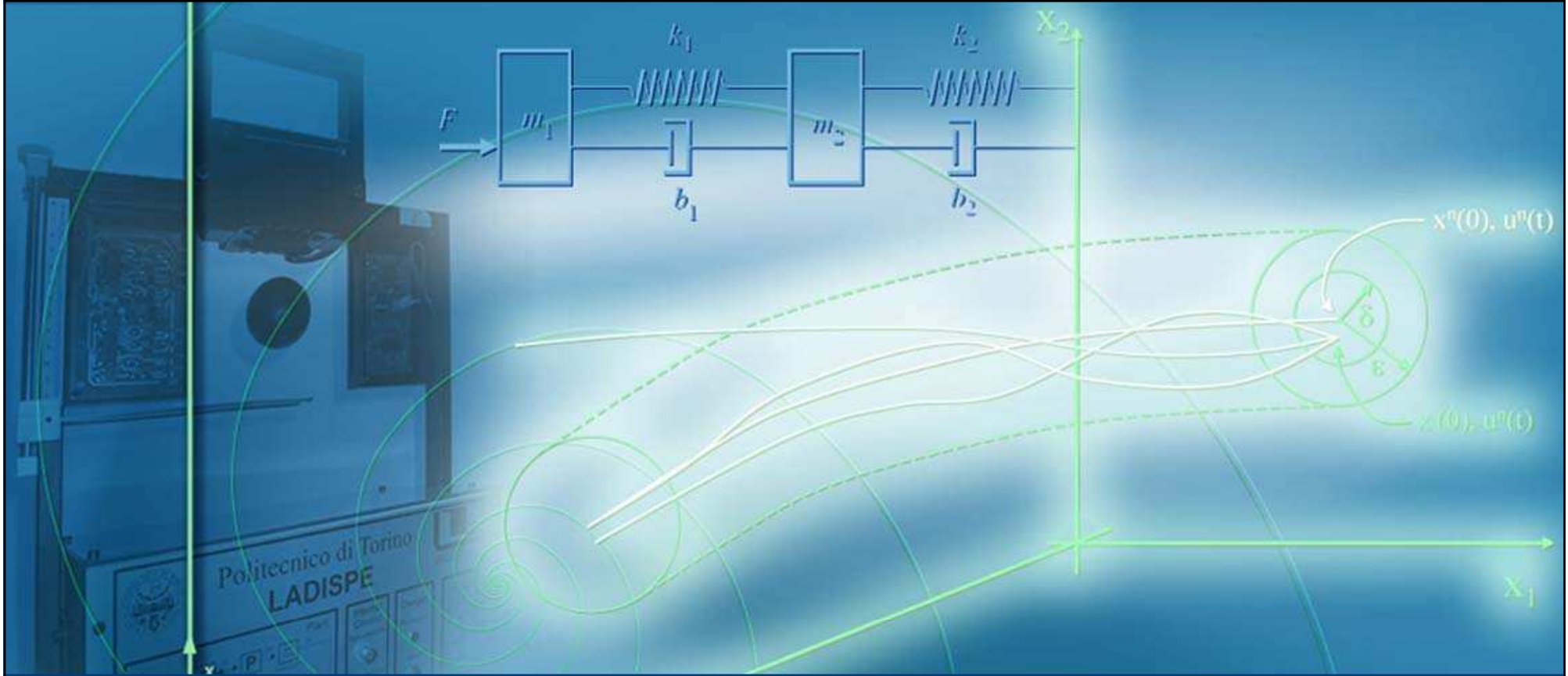
$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-c} \end{bmatrix}, c = \rho(C)$$



- La matrice di osservabilità M_o di un sistema dinamico LTI può essere calcolata in MatLab mediante l'istruzione: $M_O = \text{obsv}(A, C)$
 - A, C : matrici della rappresentazione di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) & x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) & y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

- Il rango o della matrice di osservabilità può essere calcolato con l'istruzione: $o = \text{rank}(M_O)$
- Per maggiori dettagli sulle istruzioni, digitare `help obsv`, `help rank` al prompt di MatLab



Osservabilità e rilevabilità

Esempi di studio dell'osservabilità



Esempio 1: formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TC:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

- Studiarne le proprietà di osservabilità

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 1: procedimento di soluzione

- Per analizzare le proprietà di osservabilità occorre:
 - Calcolare la matrice di osservabilità M_o a partire dalle matrici A e C delle equazioni di stato
 - Valutare il rango o di M_o e confrontarlo con la dimensione n del sistema; in particolare
 - Se $o = n$ allora il sistema risulta completamente osservabile
 - Se $o < n$ allora il sistema non è completamente osservabile

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 1: calcolo di M_o

- Le matrici A e C del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 1 \quad 0]$$

- Il sistema è a un'uscita $q = 1$ e di ordine $n = 3$
- La matrice di osservabilità è quindi del tipo:

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 1: procedura di calcolo di M_o

- Per calcolare M_o conviene procedere alla sua costruzione "per righe" come segue:
 - Si parte dalla riga C
 - Si calcola la seconda riga eseguendo il prodotto CA
 - Si calcola la terza riga CA^2 eseguendo il prodotto $(CA)A$

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 1: calcolo di M_o (1/3)

- Nel primo passaggio riporto la matrice C come prima riga di M_o :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{matrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{matrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 1: calcolo di M_o (2/3)

- Nel secondo passaggio costruisco la seconda riga di M_o con il prodotto righe per colonne CA :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{matrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 1: calcolo di M_o (3/3)

- Nel terzo passaggio costruisco la terza riga di M_o con il prodotto righe per colonne CA^2 eseguito tramite il prodotto $(CA)A$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{matrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 1: analisi dell'osservabilità

- Si ottiene la matrice di osservabilità:

$$M_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

- Poiché:

$$\det(M_o) = 1 \neq 0$$

- Si ha:

$$\rho(M_o) = 3 = n$$

- Il sistema risulta **completamente osservabile**



Esempio 2: formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TD:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

- Studiarne le proprietà di osservabilità

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 2: procedimento di soluzione

- Per analizzare le proprietà di osservabilità occorre:
 - Calcolare la matrice di osservabilità M_o a partire dalle matrici A e C delle equazioni di stato
 - Valutare il rango o di M_o e confrontarlo con la dimensione n del sistema; in particolare
 - Se $o = n$ allora il sistema risulta completamente osservabile
 - Se $o < n$ allora il sistema non è completamente osservabile

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 2: calcolo di M_o

- Le matrici A e C del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1 \quad 0]$$

- Il sistema è a un'uscita $q = 1$ e di ordine $n = 3$
- La matrice di osservabilità è quindi del tipo:

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio 2: analisi dell'osservabilità (1/2)

- La matrice di osservabilità è:

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Si ha

$$\det(M_o) = 0 \Rightarrow \rho(M_o) < 3$$

- Notiamo che M_o ha una colonna nulla mentre le altre due sono linearmente indipendenti

$$\rho(M_o) = 2$$

$$y(t) = Cx(t)$$

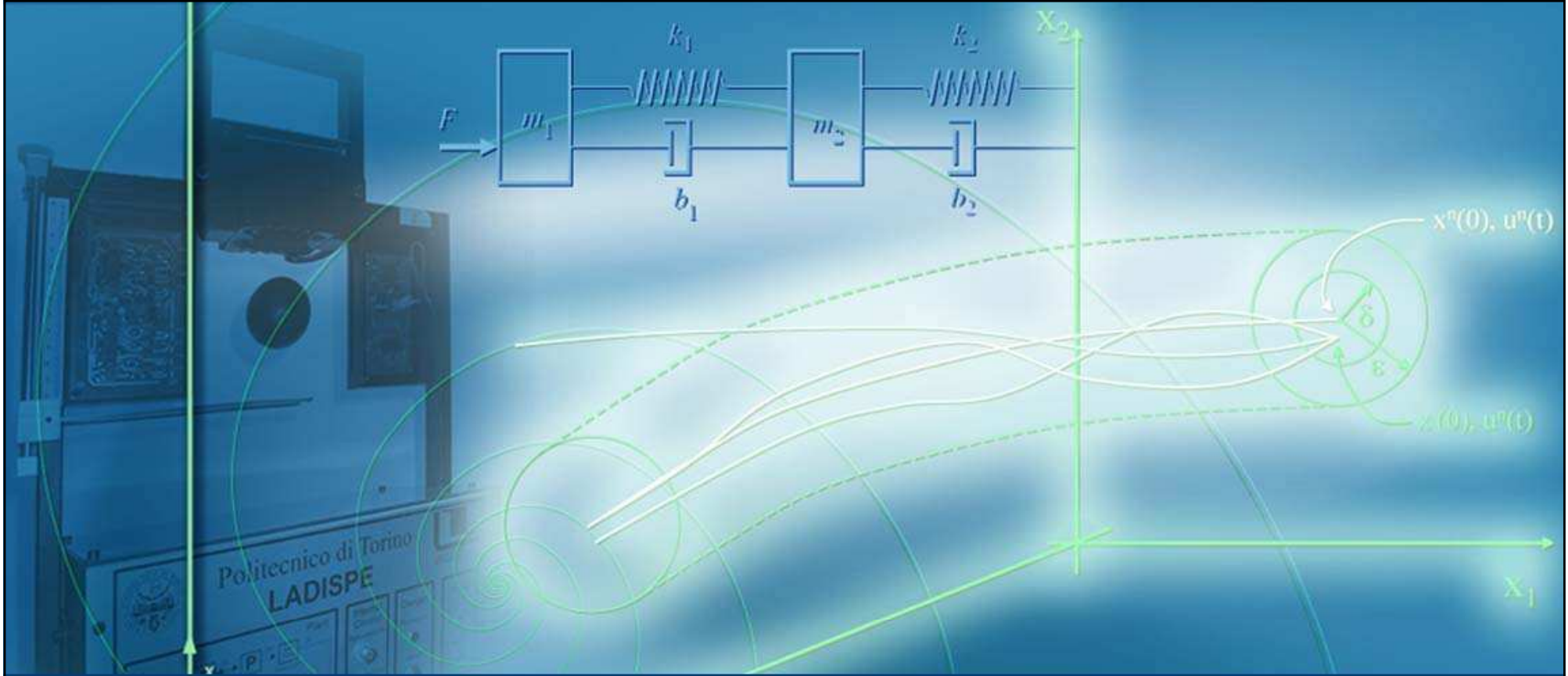


Esempio 2: analisi dell'osservabilità (2/2)

$$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \rho(M_o) = 2$$

- Il sistema risulta **non completamente osservabile**
- Inoltre:

$$\dim(X_o) = \rho(M_o) = 2$$



Osservabilità e rilevabilità

Osservabilità e realizzazione



$y(t) = Cx(t)$

Richiami sul problema della realizzazione

- Ricordiamo che la determinazione di una rappresentazione in variabili di stato a partire dalla funzione di trasferimento di un sistema dinamico SISO LTI va sotto il nome di problema della **realizzazione**
- La soluzione del problema della realizzazione non è unica
- In precedenza è stata introdotta una possibile soluzione tramite la **forma canonica di raggiungibilità**
- Studieremo ora un'altra possibile soluzione

Richiami sul problema della realizzazione

- Ricordiamo che, nel caso in cui la funzione di trasferimento $H(s)$ non sia strettamente propria (cioè $m = n$), prima di procedere alla **realizzazione** occorre compiere la divisione (polinomiale) tra il numeratore e il denominatore:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \\ &= \frac{b'_{n-1} s^{n-1} + \dots + b'_1 s + b'_0}{s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + \dots + a'_1 s + a'_0} + b'_n \end{aligned}$$

La forma canonica di osservabilità

► Data la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{b'_{n-1}s^{n-1} + \dots + b'_1s + b'_0}{s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \dots + a'_1s + a'_0} + b'_n$$

la **forma canonica di osservabilità**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a'_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & -a'_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a'_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ \vdots \\ b'_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} b'_n \end{bmatrix}$$

costituisce una sua possibile **realizzazione**

Forma canonica di osservabilità: proprietà

➤ Nella **forma canonica di osservabilità**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a'_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & -a'_1 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a'_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \\ \vdots \\ b'_{n-1} \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \quad D = [b'_n]$$

- La matrice A è in forma compagna destra \rightarrow il polinomio caratteristico è: $\lambda^n + \dots + a'_1\lambda + a'_0$
 - Il sistema dinamico individuato dalle matrici A, B, C, D è sempre completamente osservabile
- Il medesimo procedimento si applica a sistemi TD₄₄



Esempio: formulazione del problema

- Data la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z + 0.1}{z^2 - 0.5z + 0.06}$$

- Determinarne la realizzazione secondo la forma canonica di osservabilità



Esempio: realizzazione

- La funzione di trasferimento data è di ordine $n = 2$:

$$H(z) = \frac{z + 0.1}{z^2 - 0.5z + 0.06} = \frac{b'_1 z + b'_0}{z^2 + a'_1 z + a'_0} + b'_2$$

- La sua realizzazione secondo la forma canonica di osservabilità è quindi della forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a'_0 \\ 1 & -a'_1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \end{bmatrix} C = [0 \quad 1] D = [b'_2]$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio: calcolo della realizzazione (1/2)

$$H(z) = \frac{z + 0.1}{z^2 - 0.5z + 0.06} = \frac{b'_1 z + b'_0}{z^2 + a'_1 z + a'_0} + b'_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b'_0 \\ b'_1 \end{bmatrix} \quad C = [0 \quad 1] \quad D = [b'_2]$$

$$a'_1 = -0.5$$

$$a'_0 = 0.06$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio: calcolo della realizzazione (2/2)

$$H(z) = \frac{z + 0.1}{z^2 - 0.5z + 0.06} = \frac{b'_1 z + b'_0}{z^2 + a'_1 z + a'_0} + b'_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$b'_1 = 1$$

$$b'_0 = 0.1$$

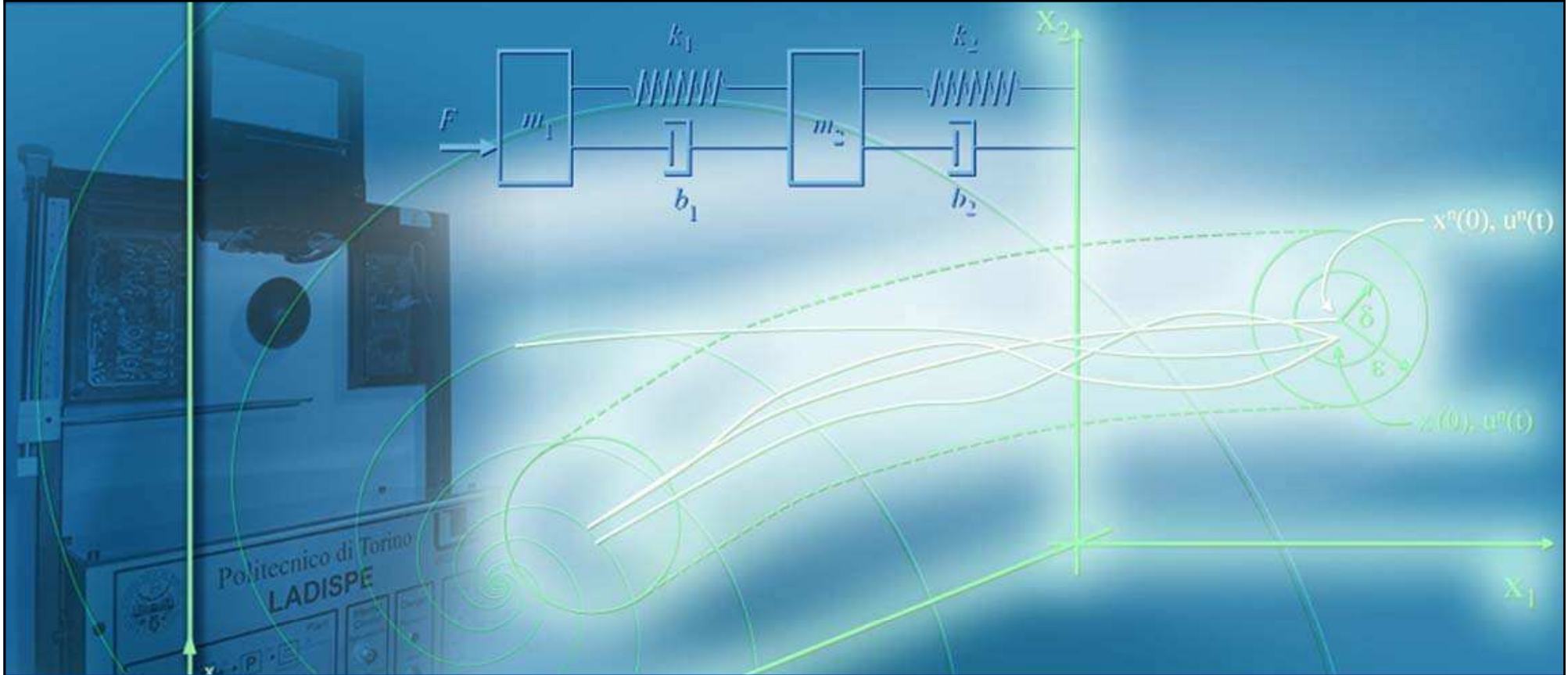
$$b'_2 = 0$$



Esempio: risultato

- La realizzazione secondo la forma canonica di osservabilità della funzione di trasferimento data è quindi:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & -0.06 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(k)\end{aligned}$$



Osservabilità e rilevabilità

Il principio di dualità


$$y(t) = Cx(t)$$

Introduzione

- Lo studio delle proprietà di **raggiungibilità** e di **osservabilità** svolto sino ad ora permette di mettere in evidenza una stretta analogia tra queste due proprietà
- Tale analogia va sotto il nome di **principio di dualità**
- Per definire il **principio di dualità** occorre definire il concetto di **sistema duale** di un sistema dinamico LTI

Il sistema duale

- Si consideri il sistema LTI TC (**sistema primale**)
→ $S^P(A, B, C, D)$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}, x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^p, y(t) \in \mathbb{R}^q$$

- Operando la sostituzione

$$A \leftrightarrow A^T, B \leftrightarrow C^T, C \leftrightarrow B^T, D \leftrightarrow D^T$$

si ottiene il **sistema duale** $S^D(A^T, C^T, B^T, D^T)$ definito come il sistema dinamico LTI TC:

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= A^T w(t) + C^T v(t) \\ z(t) &= B^T w(t) + D^T v(t)\end{aligned}, w(t) \in \mathbb{R}^n, v(t) \in \mathbb{R}^q, z(t) \in \mathbb{R}^p$$

Sistema duale e spazi X_R e X_O

- Consideriamo il **sottospazio di raggiungibilità** X_R^P del sistema **primale** $S^P(A, B, C, D)$ definito come:

$$X_R^P = \mathcal{R}(M_R^P) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right)$$

- Applichiamo quindi la definizione del **sottospazio di osservabilità** X_O

$$X_O = \mathcal{R}(M_O^T) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}\right)$$

al sistema **duale** $S^D(A^T, C^T, B^T, D^T) \rightarrow A^T \leftrightarrow A, C^T \leftrightarrow B$

$$X_O^D = \mathcal{R}\left(\left(M_O^D\right)^T\right) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = X_R^P$$

Il principio di dualità

- Possiamo quindi concludere che:
Il sottospazio di raggiungibilità X_R^P del sistema **primale** $S^P(A, B, C, D)$ coincide con il sottospazio di osservabilità X_O^D del sistema **duale** $S^D(A^T, C^T, B^T, D^T)$

$$X_R^P = X_O^D$$

- In modo analogo si può dimostrare che:
Il sottospazio di osservabilità X_O^P del sistema **primale** $S^P(A, B, C, D)$ coincide con il sottospazio di raggiungibilità X_R^D del sistema **duale** $S^D(A^T, C^T, B^T, D^T)$

$$X_O^P = X_R^D$$



Il principio di dualità: enunciato

- Possiamo quindi enunciare il **Principio di dualità**

Il sistema **primale** $S^P(A, B, C, D)$ è completamente raggiungibile (osservabile) se e soltanto se il sistema **duale** $S^D(A^T, C^T, B^T, D^T)$ è completamente osservabile (raggiungibile)

$$y(t) = Cx(t)$$

Schema riassuntivo

- Il principio di dualità può essere schematicamente riassunto:

| Sistema primale $S^P(A, B, C, D)$ | | Sistema duale $S^D(A^T, C^T, B^T, D^T)$ |
|--------------------------------------|-------------------|--|
| (A, B) raggiungibile | \Leftrightarrow | (A^T, B^T) osservabile |
| (A, C) osservabile | \Leftrightarrow | (A^T, C^T) raggiungibile |



Osservazione finale

- Grazie al principio è possibile trattare problematiche legate all'osservabilità (raggiungibilità) con tecniche simili (duali) viste per la raggiungibilità (osservabilità)



Esempio: formulazione del problema

- Dato il seguente sistema dinamico LTI TC:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix} x(t)\end{aligned}$$

- Studiarne le caratteristiche di osservabilità applicando il principio di dualità e non il metodo diretto visto negli Esempi 1 e 2 visti in questa lezione



Esempio: procedimento di soluzione

- Per lo studio della proprietà di osservabilità tramite il principio di dualità ricordiamo che:
“Il sistema **primale** $S^P(A, B, C, D)$ è completamente osservabile se e soltanto se il sistema **duale** $S^D(A^T, C^T, B^T, D^T)$ è completamente raggiungibile”
- Possiamo quindi procedere come segue:
 - Determinazione del sistema duale
 - Studio della raggiungibilità del sistema duale

Esempio: determinazione del sistema duale

- A partire dal sistema primale:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

effettuando la sostituzione:

$$A \leftrightarrow A^T, B \leftrightarrow C^T, C \leftrightarrow B^T, D \leftrightarrow D^T$$

si ottiene il sistema duale

$$\begin{aligned}\dot{w}(t) &= A^T w(t) + C^T v(t) \\ z(t) &= B^T w(t) + D^T v(t)\end{aligned}$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Esempio: calcolo del sistema duale

- Poiché le matrici del sistema primale dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 2], D = 0$$

- Le matrici del sistema duale sono quindi:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, B^T = [1 \quad 1], D^T = 0$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Esempio: raggiungibilità del sistema duale

$$\dot{w}(t) = A^T w(t) + C^T v(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} v(t)$$

$$\Rightarrow w(t) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow n = 2$$

- Si può procedere utilizzando la seguente matrice di raggiungibilità del sistema duale:

$$M_R^D = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ n=2}}{=} \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T \end{bmatrix}$$

- Con i dati del problema si ha:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow M_R^D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Esempio: conclusioni

$$M_R^D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_R^D) = 2 = n$$

- Il sistema **duale** è **completamente raggiungibile** e quindi, per il principio di dualità, il **sistema di partenza** (sistema **primale**) risulta **completamente osservabile**



Esempio: nota finale

- Questo esempio ha solo lo scopo di illustrare, in un caso numerico, le reazioni tra sistema primale e sistema duale
- Lo studio dell'osservabilità condotto con l'applicazione del principio di dualità costituiva solo lo spunto per effettuare i calcoli
- È bene ricordare che **per lo studio delle proprietà di raggiungibilità ed osservabilità di sistemi LTI bisogna sempre seguire i metodi diretti** introdotti in questa e nella lezione precedente nei rispettivi Esempi 1 e 2