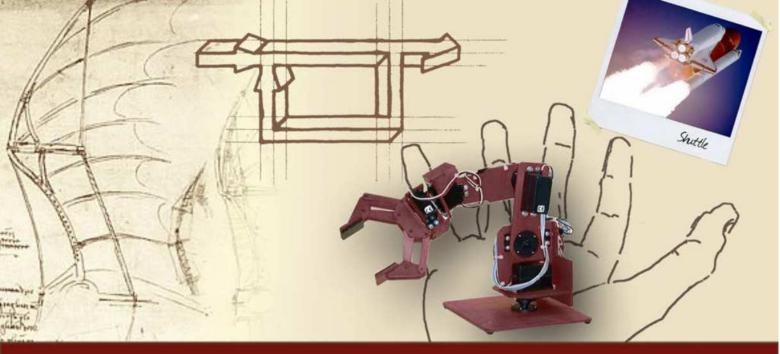


Progetto del controllore

Principali reti di compensazione

Principali reti di compensazione

- "Loop shaping" e sintesi per tentativi
- Reti anticipatrici
- Reti attenuatrici
- Reti integro-derivative
- Implicazioni sull'attività sul comando

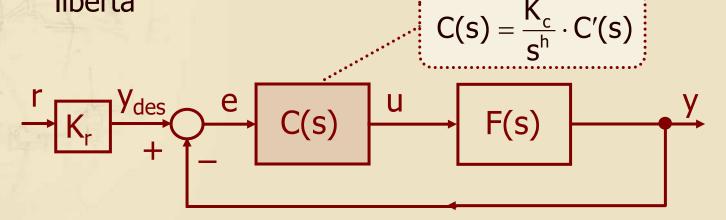


Principali reti di compensazione

"Loop shaping" e sintesi per tentativi

Il concetto del "loop shaping" (1/3)

Nel consueto schema di controllo ad un grado di libertà



il controllore C(s) deve essere progettato in modo che la funzione d'anello $G_a(s) = C(s)F(s)$ presenti le caratteristiche necessarie per il soddisfacimento delle specifiche date

Il concetto del "loop shaping" (2/3)

- L'analisi delle principali specifiche permette infatti di individuare una serie di vincoli su C(s) e su alcune caratteristiche di G_a(s); in particolare
 - Le specifiche statiche impongono vincoli sul guadagno K_c e sul numero h di poli in s=0
 - Le specifiche sulla prontezza di risposta del sistema (tempo di salita) o sulla banda passante portano ad individuare un valore desiderato $(\omega_{c,des})$ per la pulsazione di taglio
 - Le specifiche sulla sovraelongazione massima o sul picco di risonanza determinano un valore minimo di margine di fase (m_{o,min})

Il concetto del "loop shaping" (3/3)

Una volta determinato il blocco della parte statica del controllore K_c/s^h a partire dalle specifiche statiche, la parte dinamica C'(s) viene costruita in modo che G_a(s) presenti

$$\omega_{c} \simeq \omega_{c,des}$$
 $m_{\phi} \geq m_{\phi,min}$

Si parla di loop shaping proprio perché C(s) viene progettata in modo da assegnare alla funzione d'anello la "forma" idonea al soddisfacimento delle specifiche

La costruzione dell'anello (1/2)

Si definisce la funzione d'anello "di partenza" contenente il sistema dato e la parte statica del controllore già definita

$$G_{a1}(s) = \frac{K_c}{s^h}F(s)$$

La costruzione dell'anello (2/2)

- Si valutano $arg(G_{a1}(j\omega_{c,des})) e |G_{a1}(j\omega_{c,des})| e si calcolano$
 - La variazione di fase $\Delta \phi$ necessaria per ottenere $m_{\phi} > m_{\phi,min}$ alla pulsazione $\omega_{c,des}$
 - Solitamente il sistema viene stabilizzato mediante un anticipo di fase in $\omega_{c,des}$ ($\Delta \phi \geq 0$); solo in alcuni casi particolari è necessario introdurre invece un opportuno ritardo di fase
 - La variazione di modulo Δm (o Δm_{dB} in decibel) necessaria per portare ω_c in $\omega_{c,des}$

$$\Delta m_{dB} = - \left| G_{a1}(j\omega_{c,des}) \right|_{dB}$$

Reti di compensazione (1/2)

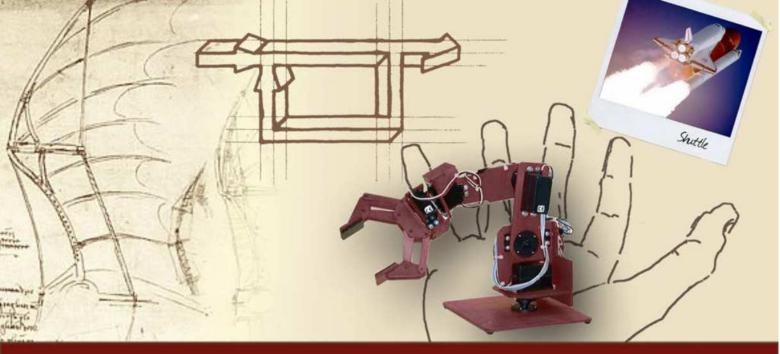
- Nel caso di sistemi stabilizzabili per mezzo di un controllore stabile, il desiderato "loop shaping" per la risultante G_a(s) = C'(s) G_{a1}(s) può essere ottenuto costruendo C'(s) come prodotto di reti di compensazione elementari
 - Ogni rete viene progettata in modo da apportare una modifica "ad hoc" nelle caratteristiche della funzione d'anello (modulo e/o fase)
 - L'effetto complessivo di tutte le reti introdotte deve portare la $G_a(s)$ risultante a presentare le caratteristiche necessarie per il soddisfacimento delle specifiche (in particolare ω_c e m_{ϕ})

Reti di compensazione (2/2)

- A seconda delle più significative modifiche apportate all'andamento della funzione d'anello (in termini di variazione di fase e/o di modulo), si distinguono fra le principali reti di compensazione
 - Reti anticipatrici o derivative
 - Reti attenuatrici o integrative
 - Reti integro-derivative o lead-lag (formate dall'unione di reti dei due tipi precedenti)

Sintesi per tentativi

- Questa tecnica di progetto è indicata anche come sintesi per tentativi, perché l'effettivo soddisfacimento di tutte le specifiche avviene spesso per correzioni successive (tentativi) nella definizione delle reti di compensazione
- Il soddisfacimento dei vincoli individuati su G_a(s) non garantisce infatti l'automatico soddisfacimento delle specifiche sul sistema in catena chiusa
- ▶ È fondamentale, dopo aver determinato C(s) tale da soddisfare i vincoli su G_a(s), procedere ad una completa verifica delle specifiche su W(s)



Principali reti di compensazione

Reti anticipatrici

Caratteristiche delle reti anticipatrici (1/6)

Una rete anticipatrice o derivativa è descritta da una fdt della forma

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau_d s}{1 + \frac{\tau_d}{m_d} s}$$

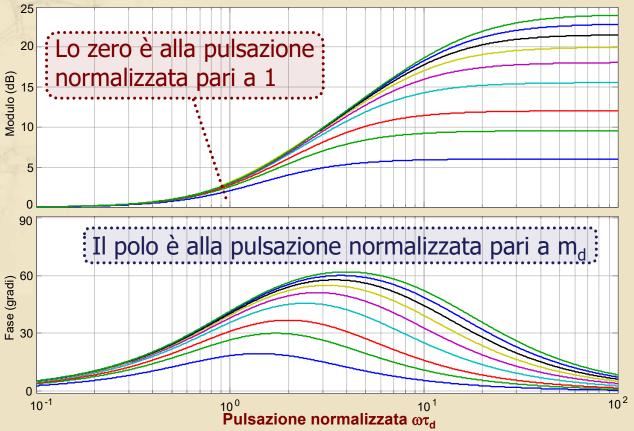
$$con \tau_d > 0, m_d > 1$$

- La rete presenta
 - Uno zero in -1/τ_d
 - Un polo in $-m_d/\tau_d$

Essendo m_d > 1, il **polo** si trova sempre **ad una pulsazione** m_d **volte maggiore** di quella **dello zero**

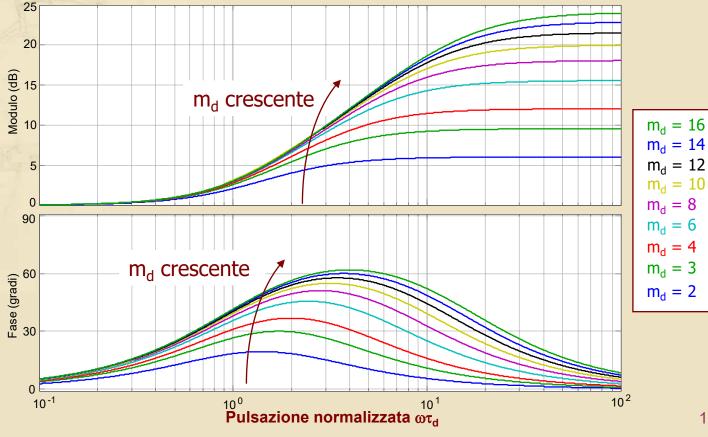
Caratteristiche delle reti anticipatrici (2/6)

DdB delle reti anticipatrici normalizzati rispetto a τ_d



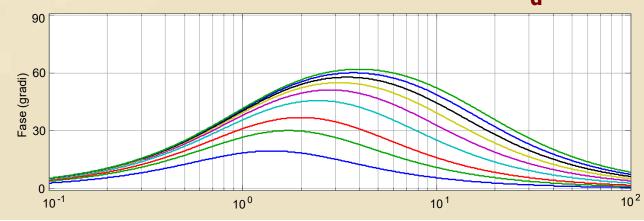
Caratteristiche delle reti anticipatrici (3/6)

DdB delle reti anticipatrici normalizzati rispetto a τ_d



Caratteristiche delle reti anticipatrici (4/6)

- Una rete anticipatrice introduce un aumento (anticipo) di fase di entità massima nell'intervallo compreso fra la pulsazione dello zero e quella del polo
- L'entità di tale aumento e l'ampiezza dell'intervallo di pulsazioni corrispondente crescono al crescere del valore di m_d



Caratteristiche delle reti anticipatrici (5/6)

- Una rete anticipatrice introduce un aumento (anticipo) di fase di entità massima nell'intervallo compreso fra la pulsazione dello zero e quella del polo
- L'entità di tale aumento e l'ampiezza dell'intervallo di pulsazioni corrispondente crescono al crescere del valore di m_d

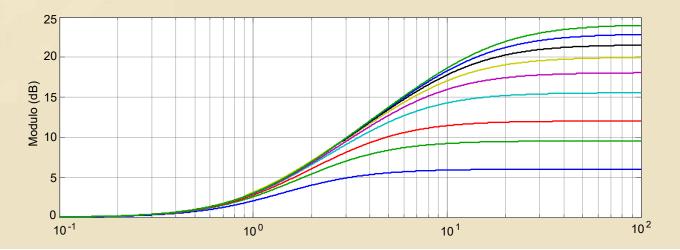
N.B.: Nel caso limite di m_d molto elevato (tendente all'infinito) il comportamento di una rete anticipatrice è assimilabile a quello di uno **zero** con 90° di recupero massimo di fase

Caratteristiche delle reti anticipatrici (6/6)

- L'incremento di recupero di fase all'aumentare di m_d di qualche unità è significativo però solo per valori non eccessivamente elevati di m_d (all'incirca non superiori a 16)
 - Non è opportuno pertanto utilizzare reti anticipatrici con m_d troppo elevati: quando è necessario aumentare molto la fase, è preferibile impiegare più reti

Utilizzo delle reti anticipatrici (1/2)

- Le reti anticipatrici sono utilizzate ogni volta in cui è necessario **recuperare fase** in corrispondenza della pulsazione di taglio desiderata $\omega_{c,des}$ per ottenere il margine di fase richiesto ($m_{\phi} > m_{\phi,min}$)
- L'inserimento di una rete anticipatrice in C(s) introduce anche un aumento di modulo



Utilizzo delle reti anticipatrici (2/2)

- Le reti anticipatrici sono utilizzate ogni volta in cui è necessario **recuperare fase** in corrispondenza della pulsazione di taglio desiderata $\omega_{c,des}$ per ottenere il margine di fase richiesto ($m_{\phi} > m_{\phi,min}$)
- L'inserimento di una rete anticipatrice in C(s) introduce anche un aumento di modulo

L'utilizzo di sole reti anticipatrici è indicato quando è necessario **aumentare** il valore di ω_c e recuperare fase per soddisfare i vincoli su $G_a(s)$

Procedura "base" di progetto di R_d(s) (1/4)

Si sceglie m_d in modo da garantire il recupero di fase necessario, sfruttando il **massimo** recupero di fase ϕ_{max} consentito dalla rete

$$\phi_{\text{max}} = \text{arcsin}\bigg(\frac{m_{\text{d}}-1}{m_{\text{d}}+1}\bigg) \Rightarrow m_{\text{d}} = \frac{1+\text{sin}\big(\phi_{\text{max}}\big)}{1-\text{sin}\big(\phi_{\text{max}}\big)}$$

Si determina τ_d dai DdB normalizzati delle reti imponendo che ϕ_{max} sia raggiunto **proprio in**

$$\omega = \omega_{c,des}$$

$$\omega_{c,des} au_d = \sqrt{m_d}$$

Ascissa normalizzata del punto di massimo recupero di fase

Procedura "base" di progetto di $R_d(s)$ (2/4)

- Se il recupero di fase $\Delta \varphi$ che deve essere introdotto non è troppo elevato (non superiore a circa 60°), è sufficiente utilizzare una sola rete anticipatrice con m_d corrispondente a $\varphi_{max} = \Delta \varphi$
- Se $\Delta \phi$ è elevato (> 60°), si introducono due (o più) reti anticipatrici $R_{d,i}(s)$, scelte in modo che

$$\Delta\phi = \sum_{\text{i}} \phi_{\text{max,i}}$$

Procedura "base" di progetto di $R_d(s)$ (3/4)

L'inserimento di ciascuna rete anticipatrice determina un **aumento di modulo in** $\omega = \omega_{c,des} \text{ leggibile sul DdB normalizzato del modulo in corrispondenza della pulsazione } \omega \tau_d = \sqrt{m_d} \text{ (ascissa di } \phi_{max} \text{) e pari a}$

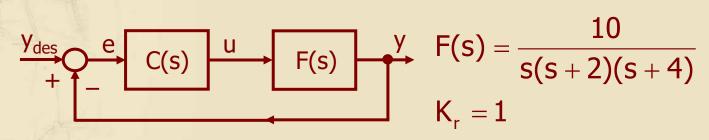
$$\left|R_d\left(j\frac{\sqrt{m_d}}{\tau_d}\right)\right|_{dB}$$

Procedura "base" di progetto di $R_d(s)$ (4/4)

- Nella scelta delle reti anticipatrici è necessario verificare che tale aumento di modulo sia
 "compatibile" con l'aumento di ω_c richiesto
- In particolare, la procedura "base" di progetto presuppone che l'aumento di modulo inserito sia non significativamente superiore a ∆m_{dB}
 - Se l'aumento di modulo apportato dalla rete risulta inferiore a Δm_{dB} , è sufficiente successivamente aumentare il guadagno stazionario K_c , in modo da ottenere $|G_a(j\omega)| = 1$ (= 0 dB) per $\omega = \omega_{c,des}$

Esempio 1 (1/12)

Dato il seguente schema di controllo:



progettare C(s) in modo che il sistema in catena chiusa soddisfi le seguenti specifiche

- $\left| \mathbf{e}_{\mathbf{r},\infty} \right| \leq \mathbf{0.2} \text{ per } \mathbf{r(t)} = \mathbf{t}$
- Tempo di salita t_s della risposta al gradino unitario pari a circa 0.4 s (con tolleranza di $\pm 15\%$)
- Sovraelongazione massima della risposta al gradino unitario non superiore al 25%

Esempio 1 (2/12)

- Si considera la specifica "statica"
 - $\left| \mathbf{e}_{\mathbf{r},\infty} \right| \leq 0.2 \text{ per r(t)} = \mathbf{t}$
 - Poiché il sistema è di tipo 1 ed il riferimento è di primo grado, non è necessario introdurre poli in s = 0
 - Essendo K_F = 1.25, la specifica implica

$$\left| e_{r,\infty} \right| = \left| \frac{K_r}{K_c K_F} \right| \le 0.2 \implies \left| K_c \right| \ge 4$$

Si sceglie K_c di **segno positivo** per garantire la stabilizzabilità del sistema (con C(s) stabile)

Già discussa nella lezione precedente

Esempio 1 (3/12)

- Si considerano le specifiche "dinamiche"
 - Tempo di salita t_s della risposta al gradino unitario pari a circa 0.4 s (con tolleranza di $\pm 15\%$)

$$\Rightarrow \omega_{\text{B}} \cong 7.5 \text{ rad/s} \Rightarrow \omega_{\text{c,des}} \cong 4.7 \text{ rad/s}$$

$$0.34 \leq t_{\text{s}} \leq 0.46 \text{ s}$$

$$3/t_{\text{s}}$$

$$0.63 \cdot \omega_{\text{B}}$$

Esempio 1 (3/12)

- Si considerano le specifiche "dinamiche"
 - Tempo di salita t_s della risposta al gradino unitario pari a circa 0.4 s (con tolleranza di $\pm 15\%$)

$$\Rightarrow \omega_{\mathsf{B}} \cong \mathsf{7.5} \; \mathsf{rad/s} \Rightarrow \omega_{\mathsf{c,des}} \cong \mathsf{4.7} \; \mathsf{rad/s}$$

 Sovraelongazione massima della risposta al gradino unitario non superiore al 25%

$$\Rightarrow M_{r} \le 1.39 = 2.85 \text{ dB} \Rightarrow m_{\phi, \text{min}} \cong 43^{\circ} \div 45^{\circ}$$

$$\frac{1 + \hat{s}}{2.00} \qquad \qquad 60^{\circ} / M_{r, \text{max}} \cong 60^{\circ} - 5 \cdot (M_{r, \text{max}})_{\text{dB}}$$

Esempio 1 (4/12)

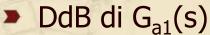
Si assume C(s) della forma

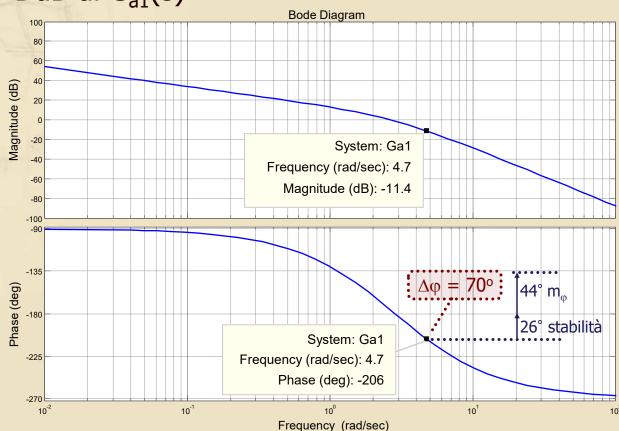
$$C(s) = K_cC'(s)$$

con $K_c = 4$ (minimo valore ammissibile, eventualmente aumentabile successivamente) e si definisce conseguentemente la funzione d'anello di partenza

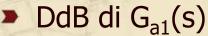
$$G_{a1}(s) = K_c \cdot F(s) = \frac{40}{s(s+2)(s+4)}$$

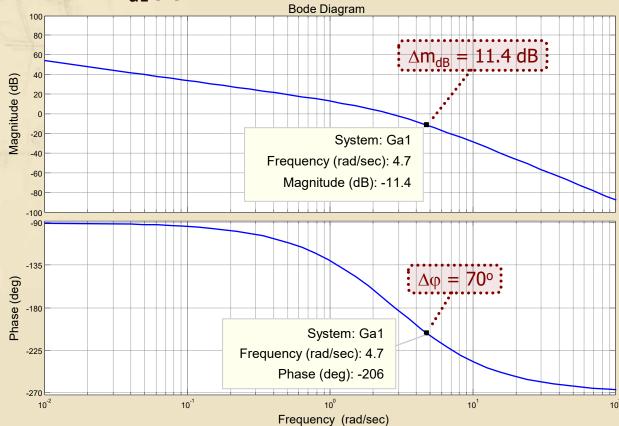
Esempio 1 (5/12)





Esempio 1 (5/12)





Esempio 1 (6/12)

Per soddisfare le specifiche dinamiche (garantendo asintotica stabilità in catena chiusa) è necessario **recuperare fase** (almeno 70°) ed **aumentare** la ω_c da 2.57 rad/s (valore attuale) a $\omega_{c,des}$ = 4.7 rad/s (aumentando il modulo in $\omega_{c,des}$ di circa 11.4 dB)

Il problema di controllo può essere risolto introducendo solo **reti anticipatrici**

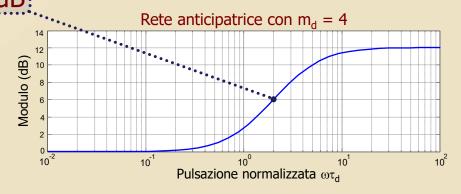
Esempio 1 (7/12)

- Per ottenere un recupero totale di fase di (almeno) 70° è necessario utilizzare due reti anticipatrici
- Soluzione proposta: due reti con $m_d = 4$
 - Ogni rete permette di recuperare circa 36.9° nel suo punto di massimo (ωτ_d = 2), in corrispondenza del quale si ha un aumento del modulo di circa del del del del del Pari a arcsin(3/5)



Esempio 1 (7/12)

- Per ottenere un recupero totale di fase di (almeno) 70° è necessario utilizzare due reti anticipatrici
- Soluzione proposta: due reti con $m_d = 4$
 - Ogni rete permette di recuperare circa 36.9° nel suo punto di massimo (ωτ_d = 2), in corrispondenza del quale si ha un aumento del modulo di circa
 6 dB



Esempio 1 (7/12)

- Per ottenere un recupero totale di fase di (almeno) 70° è necessario utilizzare due reti anticipatrici
- Soluzione proposta: due reti con $m_d = 4$
 - Ogni rete permette di recuperare circa 36.9° nel suo punto di massimo ($\omega \tau_d = 2$), in corrispondenza del quale si ha un aumento del modulo di circa 6 dB
 - L'aumento totale del modulo è di poco superiore a $\Delta m_{dB} \implies$ Ci si aspetta di ottenere ω_c leggermente superiore al valore desiderato

Esempio 1 (8/12)

- Imponendo $ω_{c,des}τ_d = 2$, si ricava $τ_d = 0.425$
- La rete anticipatrice prescelta è quindi

$$R_{d}(s) = \frac{1 + 0.425s}{1 + \frac{0.425}{4}s}$$

$$C'(s) = R_d^2(s) = \left(\frac{1 + 0.425s}{1 + \frac{0.425}{4}s}\right)^2$$

Controllore risultante

$$C(s) = K_c \cdot C'(s)$$
$$= 4 \cdot R_d^2(s)$$

Esempio 1 (9/12)

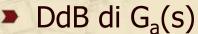
- Si verifica il rispetto dei "requisiti operativi" su ω_c e m_{φ} sul DdB di $G_a(s) = C(s)F(s)$
- Si determina il sistema in catena chiusa W(s) e se ne valuta il comportamento per verificare il soddisfacimento delle specifiche date (in questo caso la risposta al gradino unitario)
 - Se qualcuna delle specifiche dinamiche non risulta soddisfatta, è necessario "correggere" il progetto di C'(s) (ed eventualmente il valore di K_c)

Ad esempio se t_s risultasse troppo elevato, si dovrebbe aumentare ω_c per far aumentare ω_B

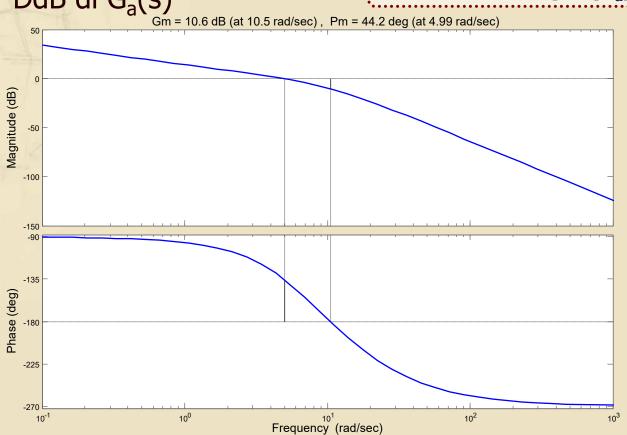
Esempio 1 (9/12)

- Si verifica il rispetto dei "requisiti operativi" su ω_c e m_{φ} sul DdB di $G_a(s) = C(s)F(s)$
- Si determina il sistema in catena chiusa W(s) e se ne valuta il comportamento per verificare il soddisfacimento delle specifiche date (in questo caso la risposta al gradino unitario)
 - Se qualcuna delle specifiche dinamiche non risulta soddisfatta, è necessario "correggere" il progetto di C'(s) (ed eventualmente il valore di K_c)
 - Il mancato soddisfacimento di una specifica statica indicherebbe la presenza di un errore progettuale!

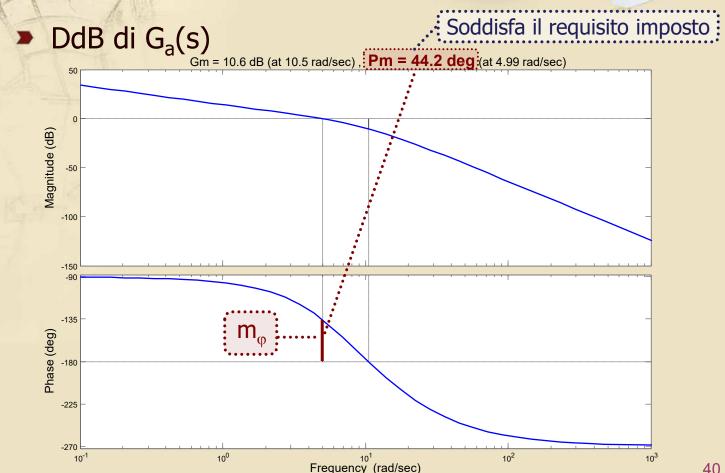
Esempio 1 (10/12)



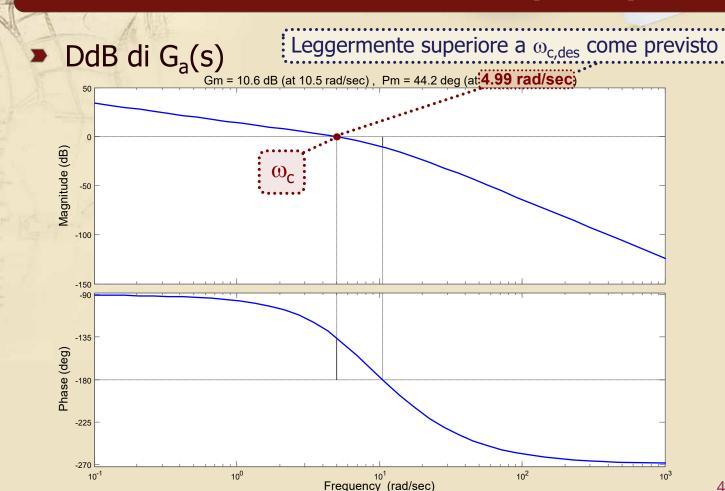
Ottenuto con margin (G_a)



Esempio 1 (10/12)

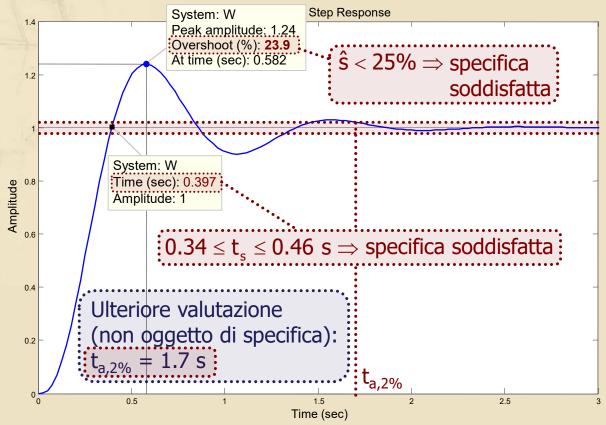


Esempio 1 (10/12)



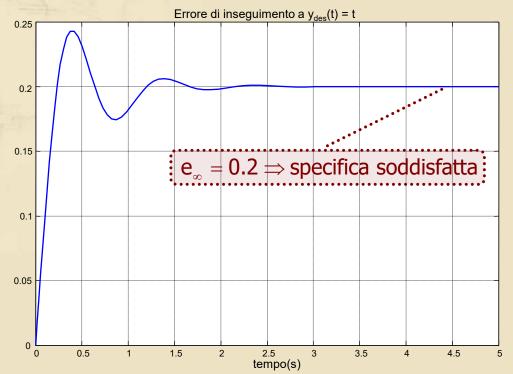
Esempio 1 (11/12)

Risposta al gradino di W(s)



Esempio 1 (12/12)

Per completezza si verifica anche la specifica statica sull'errore di inseguimento alla rampa



e_∞ è pari al valore max consentito perché è stato scelto per K_c il valore minimo ammissibile

Come contenere l'aumento di modulo (1/4)

- Nella procedura "standard" di progetto di una rete anticipatrice, m_d viene scelto in modo da massimizzare il recupero di fase consentito dalla rete, sotto l'ipotesi che l'aumento di modulo introdotto non sia (significativamente) superiore al ∆m_{dB} richiesto
- Per contenere l'aumento di modulo introdotto dalle reti anticipatrici, qualora richiesto dalle specifiche, è possibile seguire una linea "alternativa" di progetto, che prevede l'impiego di reti con parametro m_d maggiore

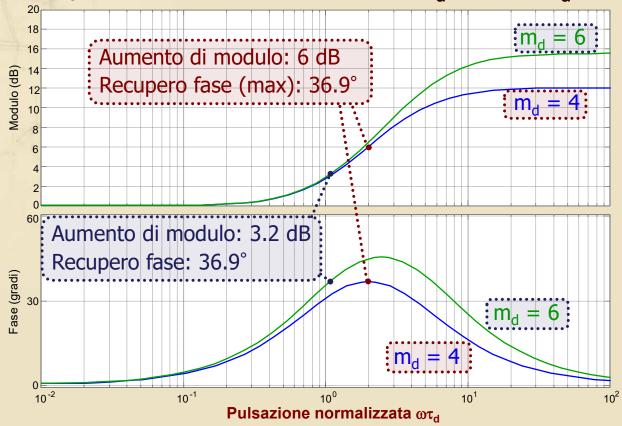
Come contenere l'aumento di modulo (2/4)

- Si sceglie un valore di $\mathbf{m_d}$ più elevato del minimo necessario, corrispondente ad una rete tale da introdurre il $\Delta \varphi$ richiesto prima del punto di massimo recupero di fase, in un punto di ascissa normalizzata $\omega \tau_d = x_d$ in cui si abbia congiuntamente l'aumento di modulo Δm_{dB} desiderato
- Si determina τ_d dai DdB normalizzati delle reti anticipatrici imponendo

$$\omega_{c,des} \tau_{d}^{} = \mathbf{X}_{d}^{}$$

Come contenere l'aumento di modulo (3/4)

Esempio: confronto fra reti con $m_d = 4 e m_d = 6$

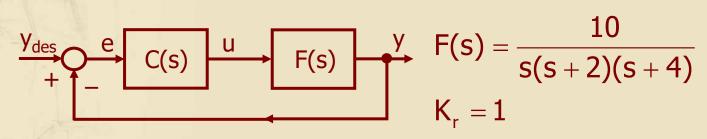


Come contenere l'aumento di modulo (4/4)

- Il principale svantaggio associato all'utilizzo di reti anticipatrici con m_d elevato consiste in un aumento dell'attività sul comando, come verrà analizzato in dettaglio nell'ultima parte della lezione
 - È possibile utilizzare questa procedura di progetto previa verifica che il sistema reale sia in grado di "sopportare" tale maggiore attività sul comando oppure quando l'inserimento di successive reti di altro tipo in C'(s) determini una riduzione dell'effettiva attività sul comando

Esempio 2 (1/14)

Per il sistema precedentemente considerato



progettare C(s) in modo che il sistema in catena chiusa soddisfi le seguenti specifiche

- $|e_{r,\infty}| \le 0.2$ per r(t) = t Specifiche invariate
- Sovraelongazione massima della risposta al gradino unitario non superiore al 25%
- Banda passante pari a circa 6 rad/s (con tolleranza di $\pm 15\%$) Nuova specifica

Esempio 2 (2/14)

La specifica statica è invariata e quindi anche in questo caso C(s) sarà della forma

$$C(s) = K_cC'(s)$$

con K_c = 4 (minimo valore ammissibile, eventualmente aumentabile successivamente) e la funzione d'anello di partenza è nuovamente data da

$$G_{a1}(s) = K_c \cdot F(s) = \frac{40}{s(s+2)(s+4)}$$

Esempio 2 (3/14)

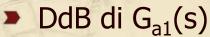
- Si considerano le specifiche "dinamiche"
 - La specifica sulla sovraelongazione massima della risposta al gradino unitario (invariata) implica

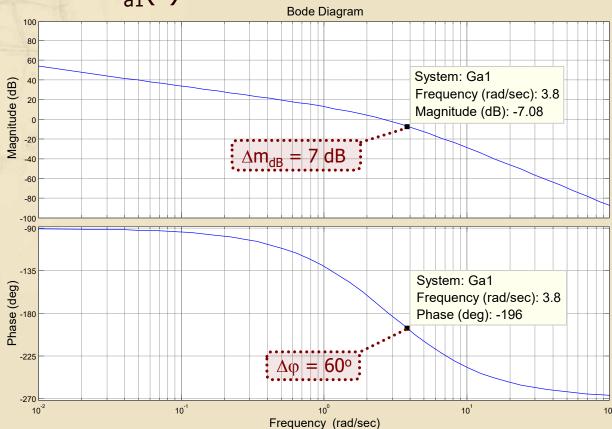
$$m_{\varphi,min} \cong 43^{\circ} \div 45^{\circ}$$

 La nuova specifica (banda passante pari a circa 6 rad/s) implica

$$\omega_{c,des} \cong 0.63 \cdot \omega_{B,des} \cong 3.8 \text{ rad/s}$$

Esempio 2 (4/14)





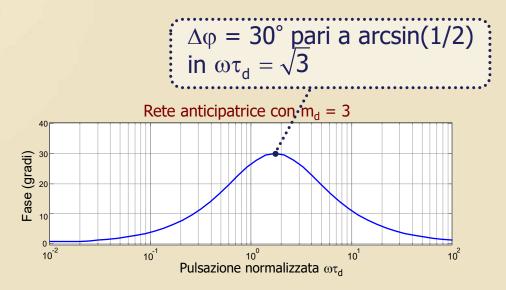
Esempio 2 (5/14)

Per soddisfare le specifiche dinamiche (garantendo asintotica stabilità in catena chiusa) è necessario **recuperare fase** (circa 60°) ed **aumentare** la ω_c da 2.57 rad/s (valore attuale) a $\omega_{c,des}$ = 3.8 rad/s (aumentando il modulo in $\omega_{c,des}$ di soli 7 dB)

Il problema di controllo può essere risolto introducendo sole **reti anticipatrici** progettate in modo da **contenere l'aumento di modulo**

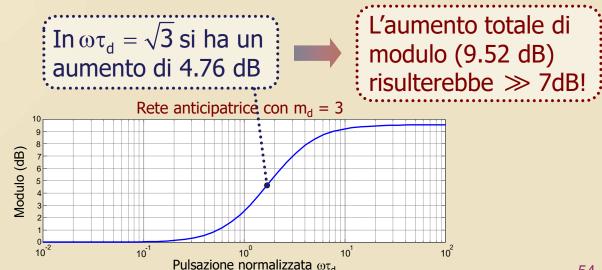
Esempio 2 (6/14)

Per ottenere un recupero totale di fase di 60° sarebbe possibile utilizzare due reti anticipatrici con m_d = 3, sfruttandone il max recupero di fase possibile, ma l'aumento di modulo risulterebbe troppo elevato!



Esempio 2 (6/14)

Per ottenere un recupero totale di fase di 60° sarebbe possibile utilizzare due reti anticipatrici con m_d = 3, sfruttandone il max recupero di fase possibile, ma l'aumento di modulo risulterebbe troppo elevato!

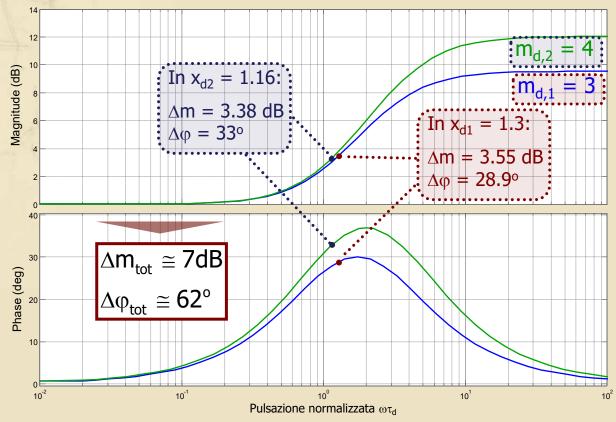


Esempio 2 (7/14)

- La soluzione proposta prevede l'utilizzo di due reti anticipatrici, una con m_{d,1} = 3 e l'altra con m_{d,2} = 4, progettate entrambe in modo da combinare il recupero di fase richiesto (60°) con un aumento complessivo di modulo non superiore a 7 dB
- Le reti vengono progettate facendo riferimento a due pulsazioni normalizzate x_{d1} e x_{d2} inferiori a quelle corrispondenti ai rispettivi punti di massimo recupero di fase

Esempio 2 (8/14)

▶ DdB normalizzati delle reti con $m_{d,1} = 3$ e $m_{d,2} = 4$



Esempio 2 (9/14)

- Le reti anticipatrici sono così definite
 - $R_{d1}(s)$ con $m_{d,1} = 3$, $\omega_{c,des}\tau_{d1} = 1.3 \implies \tau_{d1} = 0.34$

$$R_{d1}(s) = \frac{1 + 0.34s}{1 + \frac{0.34}{3}s}$$

• $R_{d2}(s)$ con $m_{d,2} = 4$, $\omega_{c,des}\tau_{d2} = 1.16 \implies \tau_{d2} = 0.3$

$$R_{d2}(s) = \frac{1 + 0.3s}{1 + \frac{0.3}{4}s}$$

Esempio 2 (10/14)

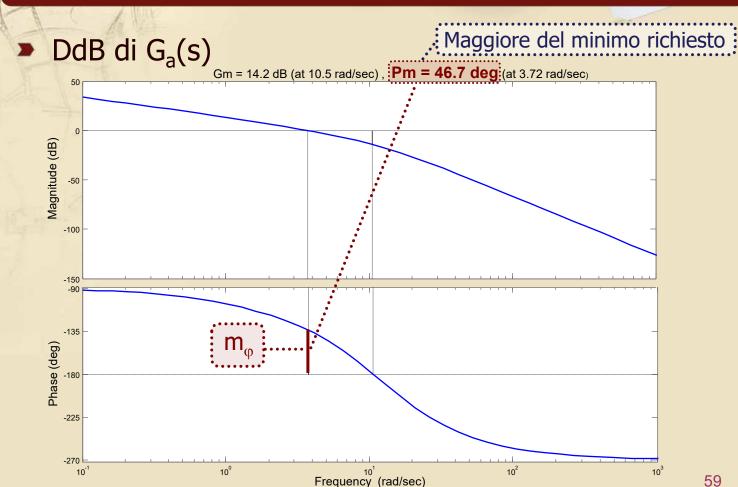
R_{d1}(s) e R_{d2}(s) definiscono la parte dinamica C'(s) del controllore, che risulta quindi dato da

$$C(s) = K_c \cdot R_{d1}(s) \cdot R_{d2}(s)$$

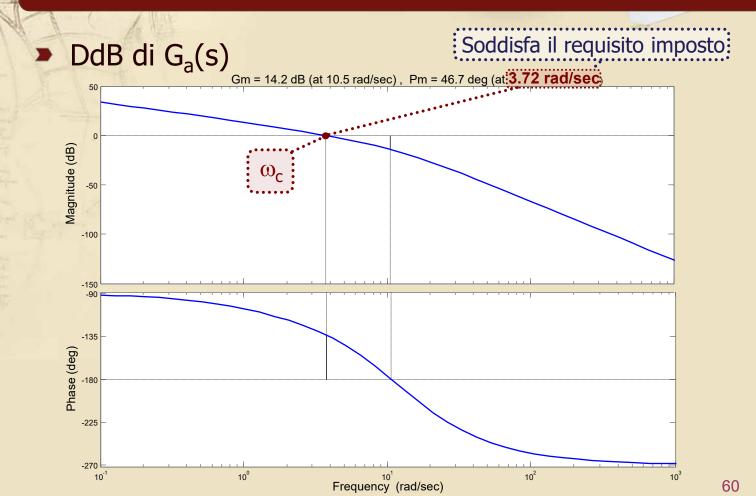
in cui K_c è rimasto pari al valore assegnato inizialmente ($K_c = 4$)

Si verifica il rispetto dei "requisiti operativi" su ω_c e m_φ sul DdB di G_a(s) = C(s)F(s), prima di passare alla verifica delle specifiche sul sistema in catena chiusa W(s)

Esempio 2 (11/14)

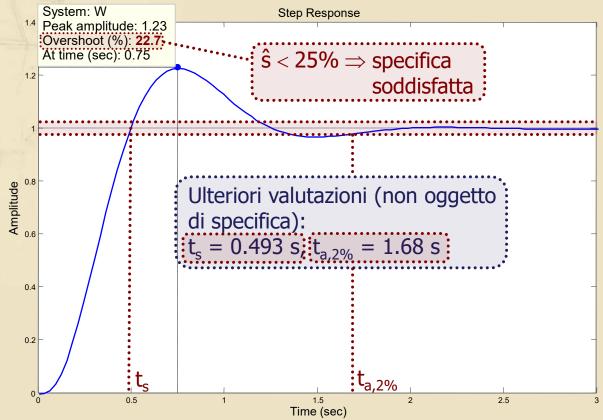


Esempio 2 (11/14)



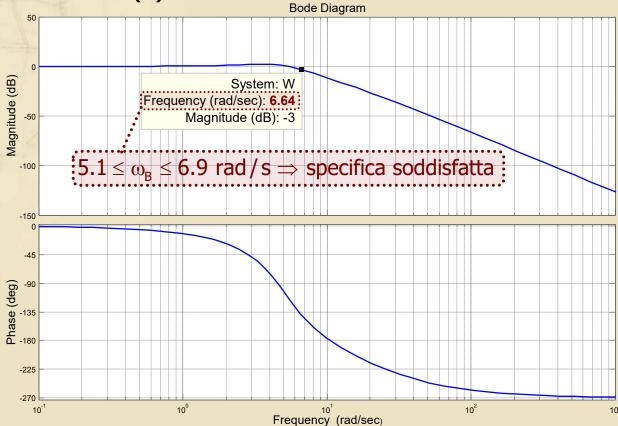
Esempio 2 (12/14)

Risposta al gradino di W(s)



Esempio 2 (13/14)

DdB di W(s)



Esempio 2 (14/14)

- Il controllore C(s) progettato garantisce l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa ed il soddisfacimento di tutte le specifiche dinamiche
- ightharpoonup È facile verificare che anche la **specifica statica** è soddisfatta, con e_∞ = 0.2, avendo scelto per K_c il valore minimo (come nel caso precedente)