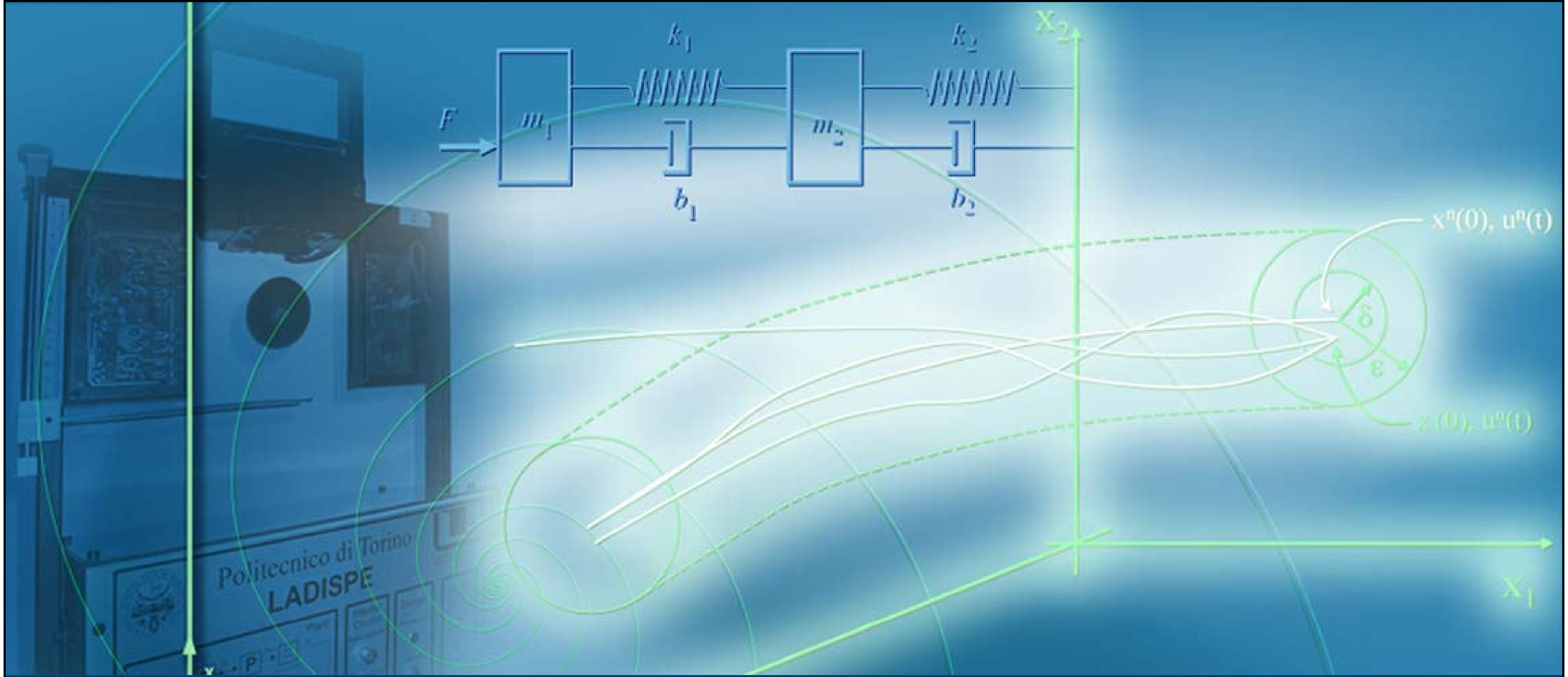
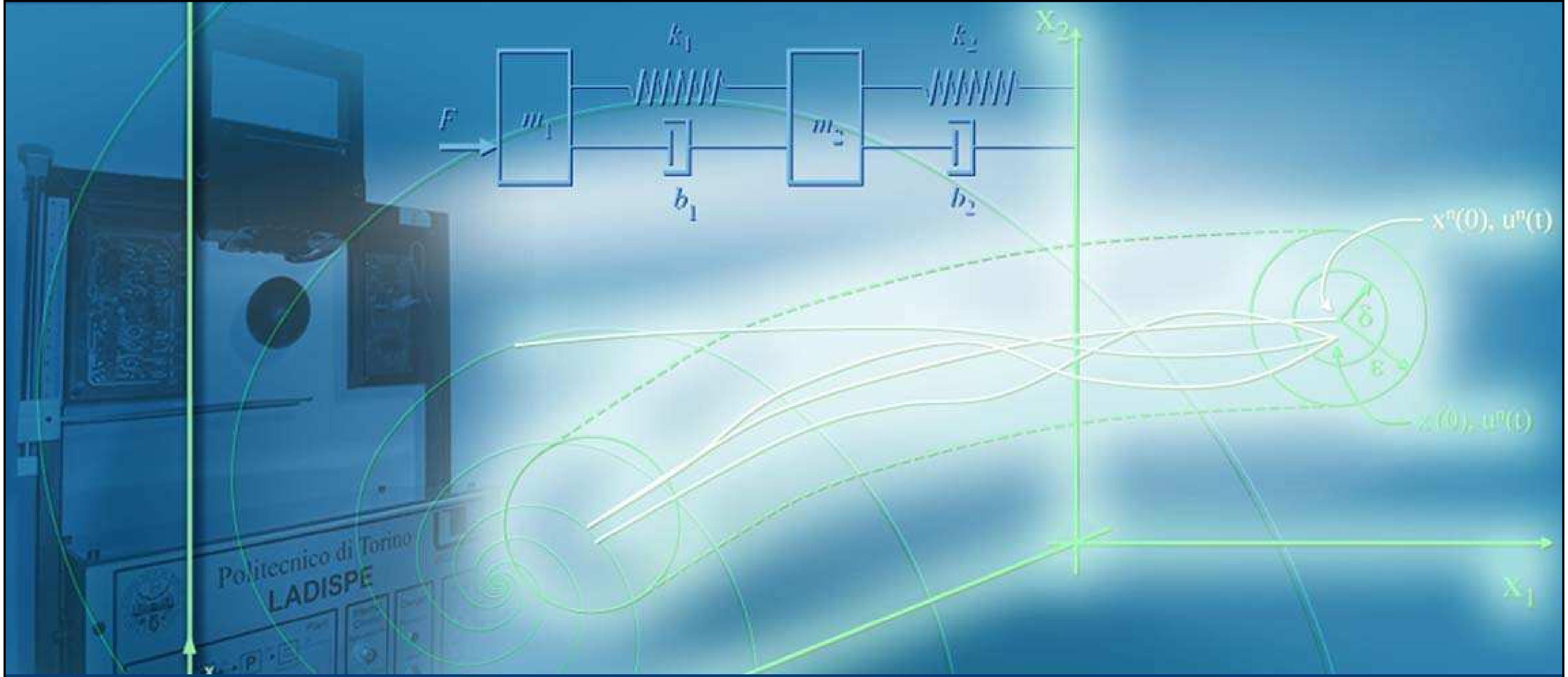


Fondamenti di Automatica

Unità 4
Proprietà strutturali e leggi di controllo

Proprietà strutturali e leggi di controllo

- Raggiungibilità e controllabilità
- Retroazione statica dallo stato
- Osservabilità e rilevabilità
- Stima dello stato e regolatore dinamico

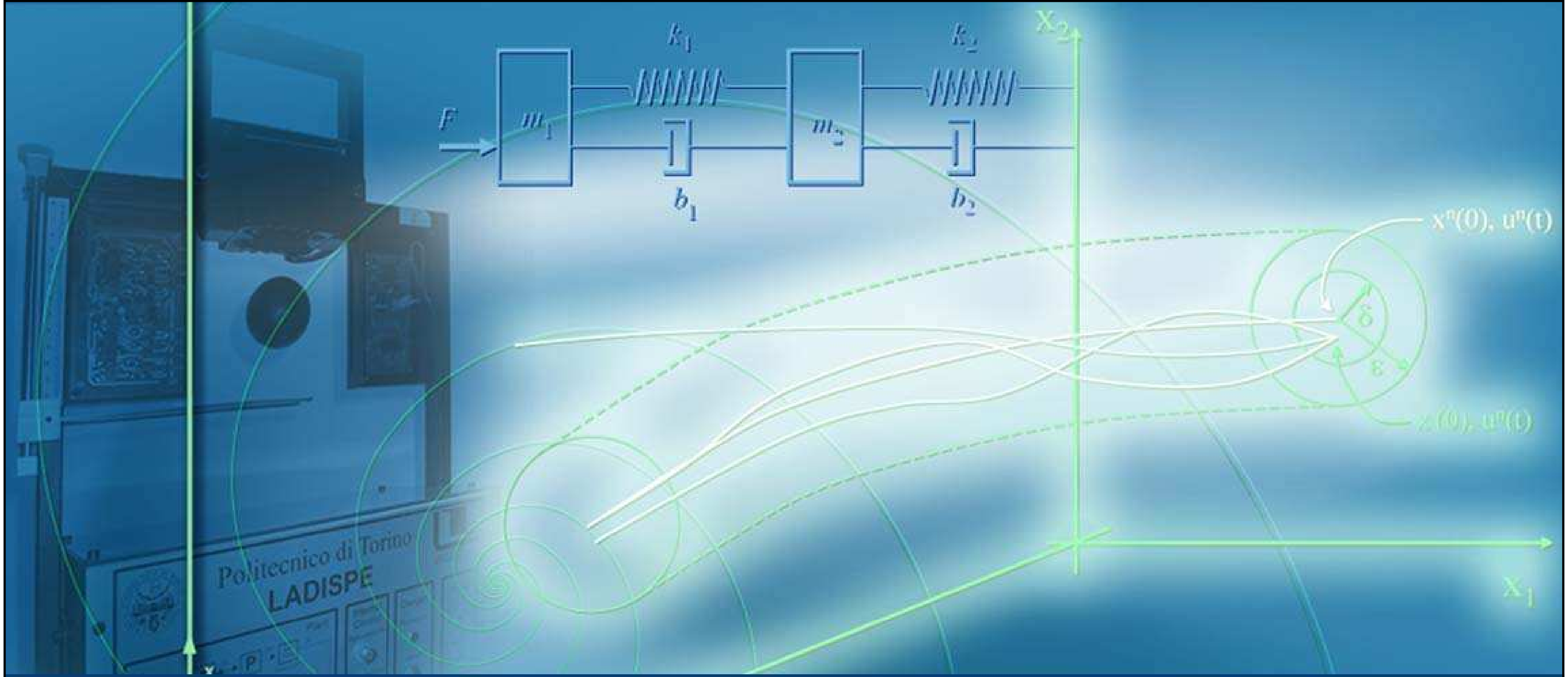


Proprietà strutturali e leggi di controllo

Raggiungibilità e controllabilità

Raggiungibilità e controllabilità

- Definizioni ed esempi introduttivi
- Analisi della raggiungibilità di sistemi dinamici LTI
- Esempi di studio della raggiungibilità
- Il problema della realizzazione



Raggiungibilità e controllabilità

Definizioni ed esempi introduttivi

Introduzione

- Le proprietà di **raggiungibilità** e di **controllabilità** descrivono le possibilità di azione della funzione di ingresso $u(\cdot)$ al fine di influenzare il movimento dello stato
- La proprietà di **raggiungibilità** descrive le possibilità di modificare lo stato del sistema a partire da un particolare stato iniziale prefissato agendo opportunamente sull'ingresso $u(\cdot)$
- La proprietà di **controllabilità** descrive le possibilità di trasferire lo stato del sistema ad un particolare stato finale prefissato agendo opportunamente sull'ingresso $u(\cdot)$

Definizione di stato raggiungibile

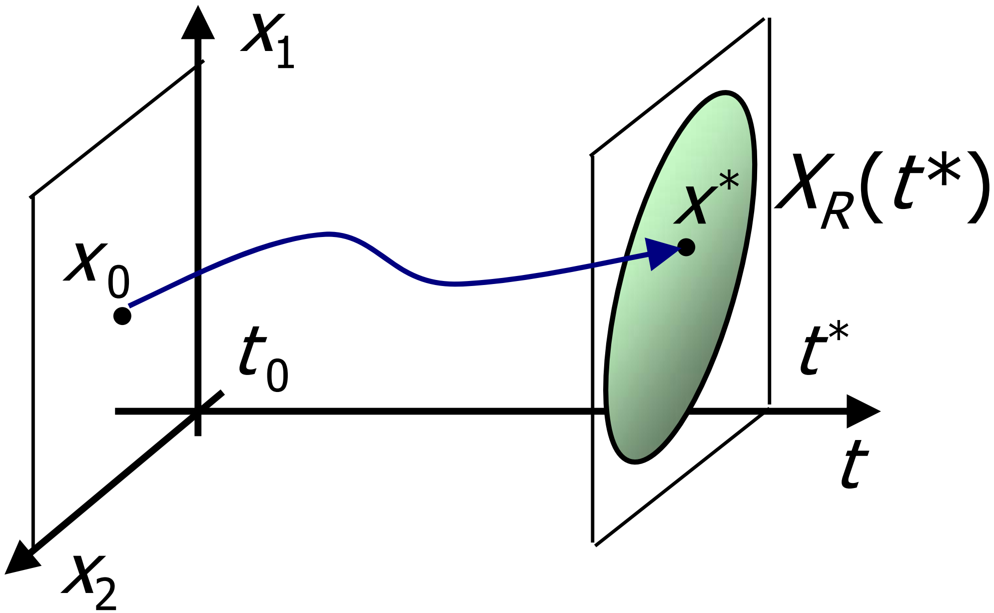
- Uno stato x^* si dice **raggiungibile** (dallo stato zero x_0 al tempo t^*) se esistono:
  - Un istante di tempo $t^* \in [t_0, \infty)$
  - Una funzione di ingresso $u^*(t)$ definita in $t \in [t_0, t^*]$

  tali che, detto $x(t)$, $t \in [t_0, t^*]$ il movimento dello stato generato da $u^*(t)$ a partire dallo stato x_0 ($x(t_0) = x_0$), risulti:

$$\boxed{x(t^*) = x^*}$$

L'insieme di raggiungibilità

- L'insieme di tutti gli stati raggiungibili (dallo stato zero x_0 al tempo t^*) rappresenta **l'insieme di raggiungibilità** $X_R(t^*)$ al tempo t^*
- L'insieme $X_R(t^*)$ costituisce un sottospazio lineare dello spazio di stato X



La completa raggiungibilità

- Si definisce **il sottospazio di raggiungibilità** X_R come l'insieme di raggiungibilità $X_R(t)$ di dimensione massima:

$$\boxed{X_R = \max_{t \in [t_0, \infty)} X_R(t)}$$

- Un sistema è **completamente raggiungibile** se

$$\boxed{X_R = X}$$

- Per i sistemi non completamente raggiungibili si definisce **il sottospazio di non raggiungibilità** X_{NR} come il complemento ortogonale di X_R:

$$\boxed{X_{NR} = X_R^{\perp}}$$

Definizione di stato controllabile

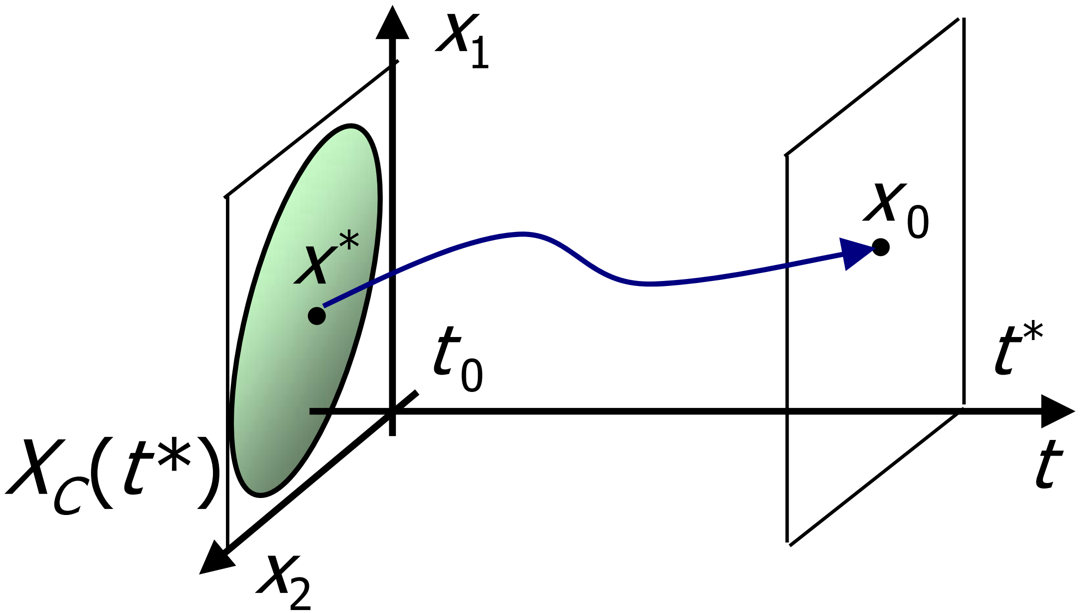
- Uno stato x^* si dice **controllabile** (allo stato zero x_0 al tempo t^*) se esistono:
  - Un istante di tempo $t^* \in [t_0, \infty)$
  - Una funzione di ingresso $u^*(t)$ definita in $t \in [t_0, t^*]$

  tali che, detto $x(t)$, $t \in [t_0, t^*]$ il movimento dello stato generato da $u^*(t)$ a partire dallo stato x^* ($x(t_0) = x^*$), risulti:

$$\boxed{x(t^*) = x_0}$$

L'insieme di controllabilità

- L'insieme di tutti gli stati controllabili (allo stato zero x_0 al tempo t^*) rappresenta **l'insieme di controllabilità** $X_C(t^*)$ al tempo t^*
- L'insieme $X_C(t^*)$ costituisce un sottospazio lineare dello spazio di stato X



La completa controllabilità

- Si definisce **il sottospazio di controllabilità** X_C come l'insieme di controllabilità $X_C(t)$ di dimensione massima:

$$\boxed{X_C = \max_{t \in [t_0, \infty)} X_C(t)}$$

- Un sistema dinamico è **completamente controllabile** se

$$\boxed{X_C = X}$$

- Per i sistemi non completamente controllabili si definisce **il sottospazio di non controllabilità** X_{NC} come il complemento ortogonale di X_C:

$$\boxed{X_{NC} = X_C^{\perp}}$$

Il concetto di stato zero

- Lo **stato zero** x_0 è uno stato prefissato considerato come "obiettivo"
- Tipicamente si tratta di uno stato di equilibrio non coincidente, in generale, con l'origine dello spazio di stato: $x_0 \neq 0$
- Tuttavia, per semplicità di trattazione e senza perdere generalità, si assumerà x_0 coincidente con lo stato nullo
- In modo analogo, si può assumere: $t_0 = 0$

Relazioni tra raggiungibilità e controllabilità

- Per i sistemi LTI TC si ha:

$$\boxed{X_R = X_C}$$

- Per i sistemi LTI TD si ha in generale:

$$\boxed{X_R \subseteq X_C}$$

  - Se la matrice A è non singolare

$$\boxed{X_R = X_C}$$

Studio della raggiungibilità

- Per i sistemi LTI si ha quindi in generale:

$$\boxed{X_R \subseteq X_C}$$

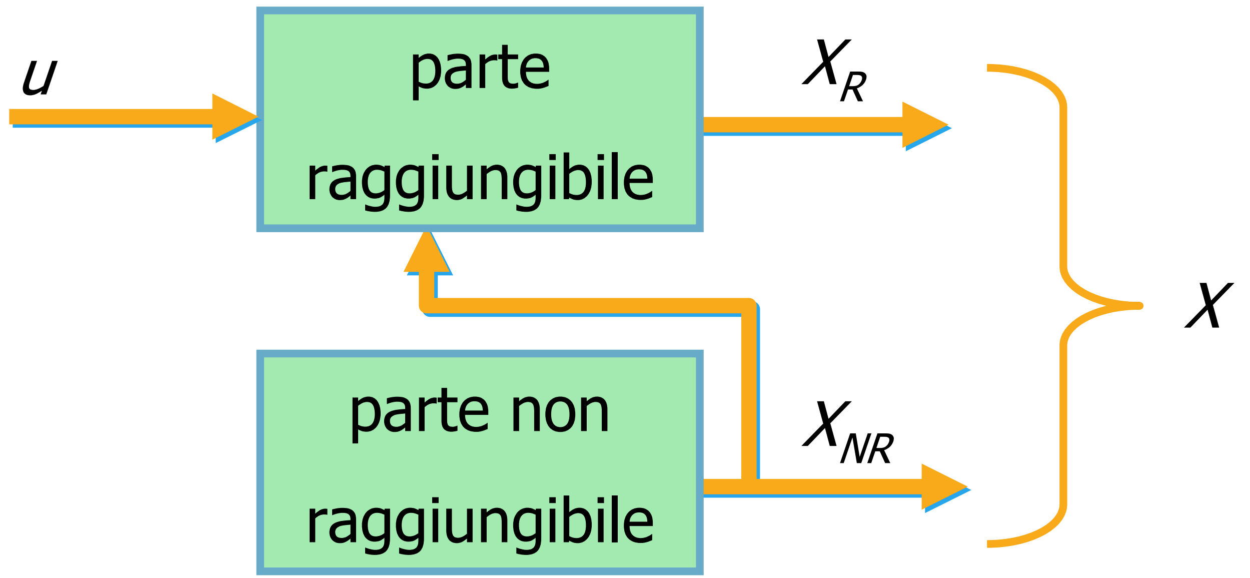
- Quindi, se un sistema LTI è completamente raggiungibile è anche completamente controllabile
- Pertanto, si studieranno sempre le proprietà di raggiungibilità

Parte raggiungibile e non raggiungibile

- In un sistema LTI con dimensione finita n e non completamente raggiungibile sono stati definiti:
  - Il **sottospazio di raggiungibilità** X_R ($\dim(X_R) = r < n$) → **parte raggiungibile**
  - Il **sottospazio di non raggiungibilità** X_{NR} ($\dim(X_{NR}) = n - r$) → **parte non raggiungibile**
  - Al **sottospazio di raggiungibilità** sono associati $\boldsymbol{r}$ degli n autovalori della matrice A
  - Al **sottospazio di non raggiungibilità** sono associati $\boldsymbol{n-r}$ degli n autovalori della matrice A

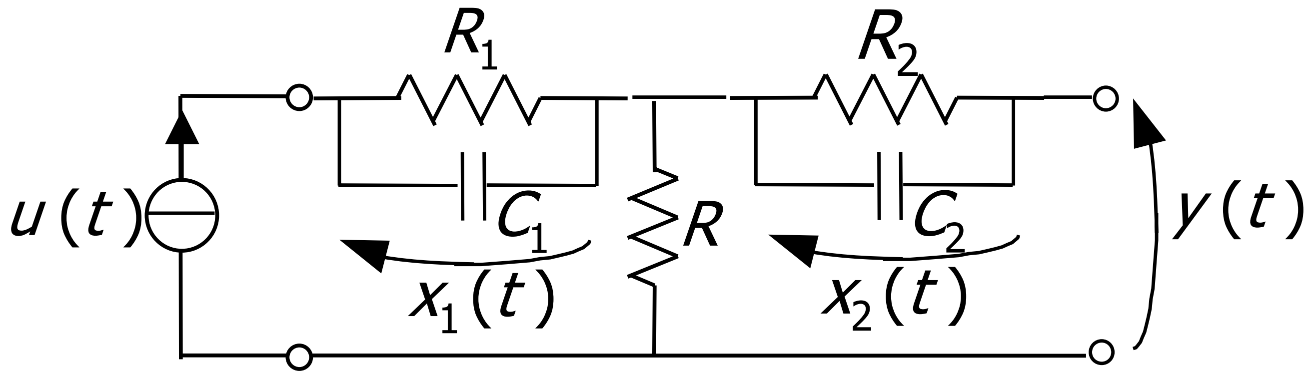
Parte raggiungibile e non raggiungibile

- L'ingresso $u(\cdot)$ agisce sulla sola **parte raggiungibile**
- Gli stati raggiungibili non influenzano la parte non raggiungibile
- Gli stati non raggiungibili possono influenzare la parte raggiungibile

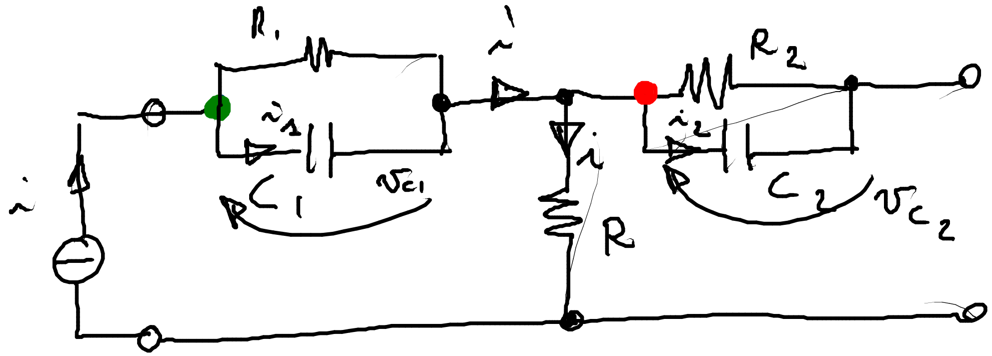


Esempio introduttivo 1

- Consideriamo il seguente sistema dinamico:



- Il circuito aperto su $y(t)$ impedisce all'ingresso $u(t)$ di agire sulla variabile di stato $x_2(t)$
- La variabile di stato $x_2(t)$ non è **controllabile** dall'ingresso $u(t)$



$$\text{①}\quad i_1 = C_1 \frac{dv_{c_1}}{dt} \qquad\qquad x = \begin{bmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{③}\quad i_2 = C_2 \frac{dv_{c_2}}{dt}$$

$$\text{④}\quad 0 = i_2 + \frac{v_{c_2}}{R_2} \qquad\qquad u = [i]$$

$$\text{②}\quad i = i_1 + \frac{v_{c_1}}{R_1}$$

$$\boxed{\dot{x}_1 = \dot{v}_{c_1} \overset{①}{=} \frac{i_1}{C_1} \overset{②}{=} \frac{1}{C_1}\left[u - \frac{x_1}{R_1}\right] = -\frac{1}{R_1 C_1} x_1 + \frac{1}{C_1} u}$$

$$\boxed{\dot{x}_2 = \dot{v}_{c_2} \overset{③}{=} \frac{i_2}{C_2} \overset{④}{=} \frac{1}{C_2}\left(-\frac{x_2}{R_2}\right) = -\frac{1}{R_2 C_2} x_2} \Leftarrow$$

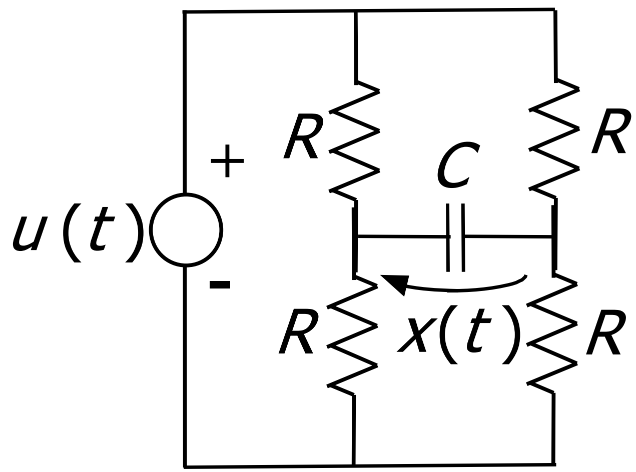
$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1/C_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1/C_1 & -\frac{1}{R_1 C_1^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_R) = 1 < n = 2$$

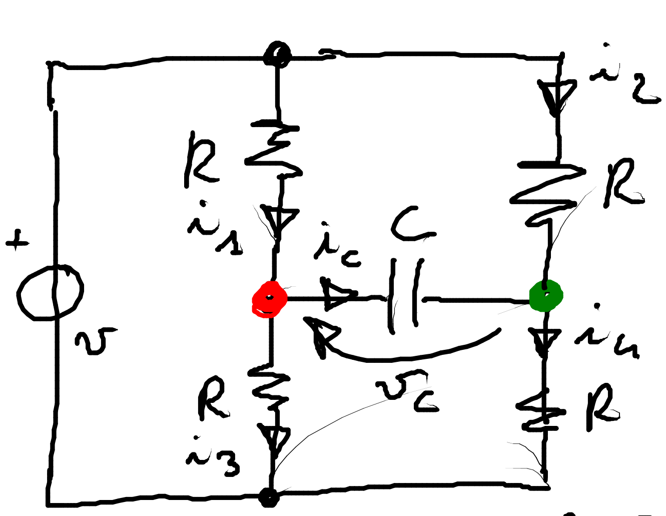
$$x_2(t) = x_2(t = 0_-)\, e^{-t/R_2 C_2}$$

Esempio introduttivo 2

- Consideriamo il seguente sistema dinamico:



- Il circuito rappresenta un ponte simmetrico
- Se $x(0) = 0 \rightarrow x(t) = 0\ \forall t, \forall u(t)$
- $u(t)$ non ha nessun effetto su $x(t)$ $\rightarrow$ $x(t)$ non è **controllabile** dall'ingresso $u(t)$



(1) $i_C = C \dfrac{dv_C}{dt}$

(3) $\cancel{R} i_1 + \cancel{R} i_3 = \cancel{R} i_2 + \cancel{R} i_4 = \dfrac{v}{R}$

(5) $R i_3 = v_C + R i_4$

(2) $i_1 = i_C + i_3$

(4) $i_2 + i_C = i_4$

$x = [v_C]$, $u = [v]$

$\dot{x} = \dot{v}_C \overset{(1)}{=} \boxed{\dfrac{i_C}{C}} \overset{(2)}{=} \dfrac{1}{C}(i_1 - i_3) \overset{(3)}{=} \dfrac{1}{C}(-i_3 + i_2 + i_4 - i_3) =$

$\overset{(4)}{=} \dfrac{1}{C}(i_4 - i_C + i_4 - 2i_3) = \dfrac{1}{C}(2i_4 - i_C - 2i_3) =$

$\overset{(5)}{=} \dfrac{1}{C}\left(2\left(\cancel{i_3} - \dfrac{v_C}{R}\right) - i_C - \cancel{2i_3}\right) = \dfrac{1}{C}\left(-\dfrac{2}{R}x - i_C\right) =$

$\boxed{= -\dfrac{2}{RC}x - \dfrac{1}{C}i_C} \Rightarrow \dfrac{\cancel{2} i_C}{\cancel{C}} = -\dfrac{\cancel{2}}{R\cancel{C}}x \Rightarrow$

$i_C = -\dfrac{x}{R} \Rightarrow \boxed{\dot{x} = \dfrac{i_C}{C} = -\dfrac{1}{RC}x} \Rightarrow$

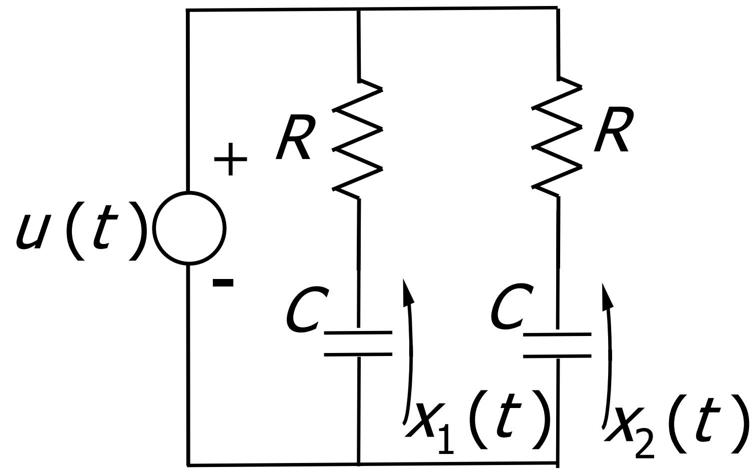
$\Rightarrow x(t) = x(t = 0_-)\, e^{-t/RC} \quad \forall u(t)$

$A = \left[-\dfrac{1}{RC}\right]$, $B = [0]$, $n = 1$

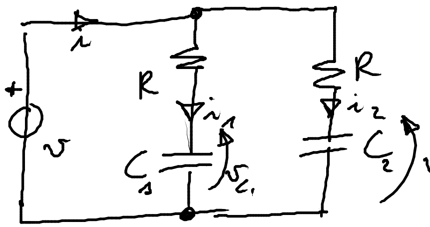
$M_R = [B] = 0 < n = 1$

Esempio introduttivo 3

- Consideriamo il seguente sistema dinamico:



- Nel circuito sono presenti due impedenze identiche in parallelo ad un generatore di tensione
- Se $x_1(0) = x_2(0) = 0 \rightarrow x_1(t) = x_2(t)\ \forall t, \forall u(t)$
- Mediante $u(t)$ posso imporre qualsiasi valore a $x_1(t)$ e $x_2(t)$ con il vincolo che siano identici
- La variabile $x_1(t) - x_2(t)$ non è **controllabile**



① $i_1 = C_1 \dfrac{dv_{C_1}}{dt}$

③ $i_2 = C_2 \dfrac{dv_{C_2}}{dt}$

② $R i_1 + v_{C_1} = v$

④ $R i_2 + v_{C_2} = v$

$i = i_1 + i_2$

$$x = \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad u = [v]$$

$$\boxed{\dot{x}_1} = \dot{v}_{C_1} \overset{①}{=} \frac{i_1}{C_1} \overset{②}{=} \frac{1}{C_1}\left(\frac{v}{R} - \frac{1}{R} v_{C_1}\right) = \boxed{-\frac{1}{RC_1} x_1 + \frac{1}{RC_1} u}$$

$$\boxed{\dot{x}_2} = \dot{v}_{C_2} \overset{③}{=} \frac{i_2}{C_2} \overset{④}{=} \frac{1}{C_2}\left(\frac{v}{R} - \frac{1}{R} v_{C_2}\right) = \boxed{-\frac{1}{RC_2} x_2 + \frac{1}{RC_2} u}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}. \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ \frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}$$

$$M_R = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} & -\frac{1}{R^2C_1^2} \\ \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{R^2C_2^2} \end{bmatrix}$$

Se $C_1 = C_2 \Rightarrow$ $M_R = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{R^2C^2} \\ \frac{1}{RC} & \frac{1}{R^2C^2} \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\rho(M_R) = 1 < n = 2$$

$$z = \begin{bmatrix} x_1 = v_{C_1} \\ x_1 - x_2 = \\ = v_{C_1} - v_{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

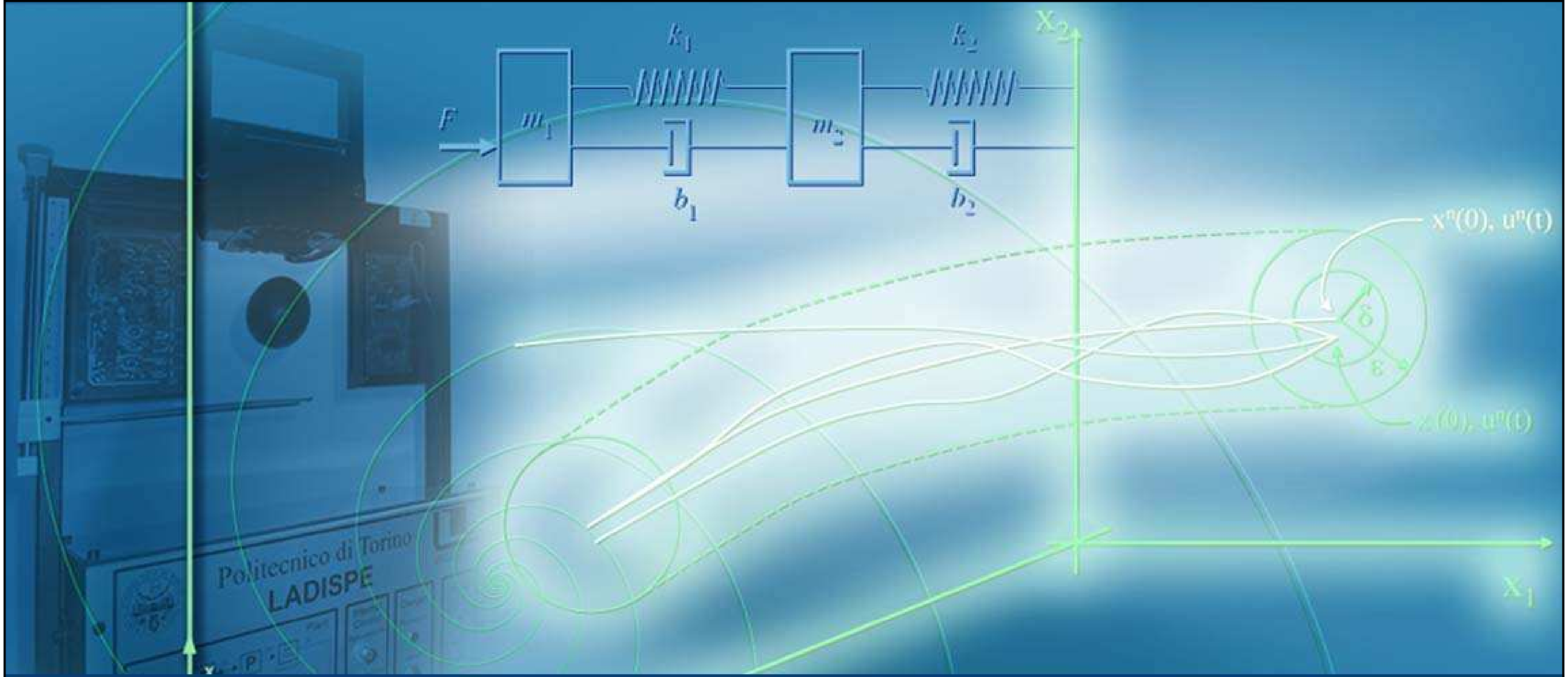
$$\boxed{\dot{z}_1} = \dot{x}_1 = -\frac{1}{RC} x_1 + \frac{1}{RC} u = \boxed{-\frac{1}{RC} z_1 + \frac{1}{RC} u}$$

$$\boxed{\dot{z}_2} = \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 =$$

$$= -\frac{1}{RC} x_1 + \cancel{\frac{1}{RC} u} - \left[-\frac{1}{RC} x_2 + \cancel{\frac{1}{RC} u}\right] =$$

$$= -\frac{1}{RC} \underbrace{(x_1 - x_2)}_{z_2} = \boxed{-\frac{1}{RC} z_2} \Rightarrow$$

$$z_2(t) = z_2(t = 0_-)\, e^{-t/RC}$$



Raggiungibilità e controllabilità

Analisi della raggiungibilità di sistemi dinamici LTI

Determinazione di X_R per sistemi LTI TD (1/6)

- Consideriamo un sistema dinamico LTI TD descritto dalle equazioni di stato:

$$\boxed{x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)}$$

- Vogliamo determinare:
  - L'insieme di raggiungibilità $X_R(\ell)$ al tempo ℓ
  - Il sottospazio di raggiungibilità X_R
  - Una condizione necessaria e sufficiente per la completa raggiungibilità del sistema

Determinazione di X_R per sistemi LTI TD (2/6)

$$\boxed{x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)}$$

- Consideriamo, per semplicità, il caso in cui:
  - Il sistema abbia un solo ingresso ($p = 1 \rightarrow B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$)
  - La condizione iniziale sia nulla: $x_0 = x(0) = 0$
- Si ha:

$$\begin{aligned}
x(1) &= Ax(0) + Bu(0) = Bu(0) \\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1) \\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\
&\vdots \\
x(\ell) &= A^{\ell-1}Bu(0) + \cdots + ABu(\ell-2) + Bu(\ell-1)
\end{aligned}$$

Determinazione di X_R per sistemi LTI TD (3/6)

$$\boxed{x(\ell) = A^{\ell-1}Bu(0) + \cdots + ABu(\ell-2) + Bu(\ell-1)}$$

- Si può compattare l'espressione in forma matriciale:

$$x(\ell) = \underbrace{\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{\ell-1}B \end{bmatrix}}_{M_R(\ell)} \underbrace{\begin{bmatrix} u(\ell-1) \\ u(\ell-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}}_{U(\ell)} =$$

$$x(\ell) = M_R(\ell)U(\ell)$$

Determinazione di X_R per sistemi LTI TD (4/6)

- La matrice

$$M_R(\ell) = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{\ell-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,\ell}$$

rappresenta il legame tra la sequenza di ingresso $[u(0), u(1), \ldots, u(\ell - 1)]$ e lo stato $x(\ell)$ raggiunto al tempo ℓ

- Pertanto, l' **insieme di raggiungibilità** $X_R(\ell)$ al tempo ℓ corrisponde allo **spazio immagine** $\mathcal{R}(\cdot)$ generato dalle colonne della matrice $M_R(\ell)$:

$$X_R(\ell) = \mathcal{R}\left(M_R(\ell)\right) = \mathcal{R}\left(\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{\ell-1}B \end{bmatrix}\right)$$

Determinazione di X_R per sistemi LTI TD (5/6)

- Per determinare il **sottospazio di raggiungibilità** X_R bisogna trovare l'**insieme di raggiungibilità** $X_R(\ell)$ avente dimensione massima:

$$\boxed{X_R = \max_{\ell \in [0,\infty)} X_R(\ell)}$$

- Questo corrisponde a determinare per quale istante ℓ la matrice $M_R(\ell)$ ha rango massimo
- A tal fine, ricordiamo che nel caso considerato ($p = 1$), $M_R(\ell)$ viene costruita affiancando le ℓ colonne: B, AB, … , $A^{\ell-1}B$

$$\boxed{M_R(\ell) = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{\ell-1}B \end{bmatrix}}$$

Determinazione di X_R per sistemi LTI TD (6/6)

- Ogni volta che viene aggiunta una colonna del tipo $A^{j-1}B$ ($j = 1, \ldots, \ell$) il rango della matrice $M_R(\ell)$ aumenta di una unità o rimane costante
- Gli eventuali aumenti di rango possono avvenire solo fino a quando il numero delle colonne aggiunte ℓ eguaglia il numero n di righe di $M_R(\ell)$ e cioè coincide con la dimensione del sistema
- Pertanto:

$$\boxed{X_R = X_R(n)}$$

La matrice di raggiungibilità

- Definiamo la **matrice di raggiungibilità** M_R come la matrice $M_R(n)$

$$\boxed{M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}}$$

- Il sottospazio di raggiungibilità è quindi definito come:

$$\boxed{X_R = \mathcal{R}(M_R)}$$

La condizione di completa raggiungibilità

- Pertanto, la dimensione del **sottospazio di raggiungibilità** X_R è pari al rango r della **matrice di raggiungibilità** M_R

$$\boxed{\dim(X_R) = \rho(M_R) = r}$$

- Un sistema dinamico LTI TD è quindi **completamente raggiungibile** (e anche controllabile) se e soltanto se il rango della **matrice di raggiungibilità** M_R è pari alla dimensione n del sistema:

$$\boxed{\rho(M_R) = n}$$

Generalizzazione

- Il risultato appena enunciato vale anche:
  - Nel caso di sistemi dinamici LTI TC del tipo

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)}$$

    per cui la matrice di raggiungibilità è definita allo stesso modo
  - Nel caso di sistemi LTI TC e TD a più ingressi ($p > 1$) nei quali la matrice di raggiungibilità M_R assume la forma più generale:

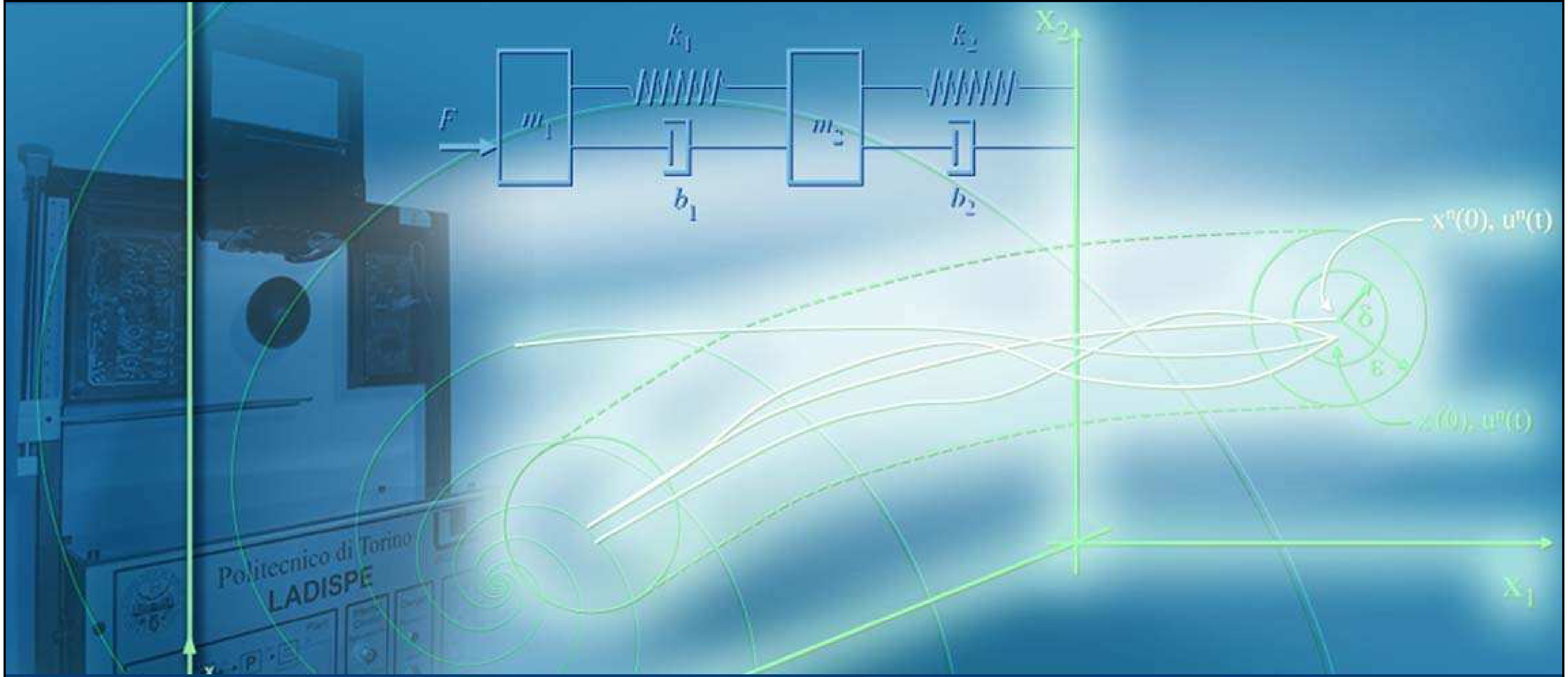
$$\boxed{M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-b}B \end{bmatrix}, b = \rho(B)}$$

MatLab

- La matrice di raggiungibilità M_R di un sistema dinamico LTI può essere calcolata in MatLab mediante l'istruzione: `M_R = ctrb(A,B)`
  - `A, B`: matrici della rappresentazione di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

- Il rango r della matrice di raggiungibilità può essere calcolato con l'istruzione: `r = rank(M_R)`
- Per maggiori dettagli sulle istruzioni, digitare `help ctrb`, `help rank` al prompt di MatLab



Raggiungibilità e controllabilità

Esempi di studio della raggiungibilità

Esempio 1: formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

- Studiarne le proprietà di raggiungibilità

Esempio 1: procedimento di soluzione

- Per analizzare le proprietà di raggiungibilità occorre:
  - Calcolare la matrice di raggiungibilità M_R a partire dalle matrici A e B delle equazioni di stato
  - Valutare il rango r di M_R e confrontarlo con la dimensione n del sistema; in particolare
    - Se $r = n$ allora il sistema risulta completamente raggiungibile
    - Se $r < n$ allora il sistema non è completamente raggiungibile

Esempio 1: calcolo di M_R

- Le matrici A e B del sistema dato sono:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\, B=\begin{bmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$$

- Il sistema è a un ingresso $p = 1$ e di ordine $n = 3$
- La matrice di raggiungibilità è quindi del tipo:

$$M_R=\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}$$

Esempio 1: procedura di calcolo di M_R

- Per calcolare M_R conviene procedere alla sua costruzione "per colonne" come segue:
  - Si parte dalla colonna B:

$$\boxed{M_R = \begin{bmatrix} B & \cdots & \cdots \end{bmatrix}}$$

  - Si calcola la seconda colonna eseguendo il prodotto AB:

$$\boxed{M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots \end{bmatrix}}$$

  - Si calcola la terza colonna A^2B eseguendo il prodotto $A(AB)$:

$$\boxed{M_R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}}$$

Esempio 1: calcolo di M_R (1/3)

- Nel primo passaggio si riporta la matrice B come prima colonna di M_R:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} -1 & & \\ 2 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} B & AB & A^2B \end{array}$$

Esempio 1: calcolo di M_R (2/3)

- Nel secondo passaggio si costruisce la seconda colonna di M_R con il prodotto righe per colonne AB:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} -1 & \color{red}{5} & \\ 2 & \color{red}{0} & \\ 0 & \color{red}{2} & \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} B & \color{red}{AB} & A^2B \end{array} \end{array}$$

Esempio 1: calcolo di M_R (3/3)

- Nel terzo passaggio si costruisce la terza colonna di M_R con il prodotto righe per colonne A^2B eseguito tramite il prodotto $A(AB)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R = \begin{array}{ccc} & & \\ \left[\begin{array}{ccc} -1 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 30 \\ 0 & 2 & -2 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc} B & AB & A^2B \end{array} \end{array}$$

Esempio 1: analisi della raggiungibilità

- Si ottiene la matrice di raggiungibilità:

$$\boxed{M_R = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 30 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}}$$

- Poiché:

$$\boxed{\det(M_R) = 116 \neq 0}$$

- Si ha:

$$\boxed{\rho(M_R) = 3 = n}$$

- Il sistema risulta **completamente raggiungibile**

Esempio 2: formulazione del problema

- Si consideri il seguente sistema LTI TD:

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0\\ 2\\ 2\end{bmatrix}u(k)$$

- Studiarne le proprietà di raggiungibilità

Esempio 2: procedimento di soluzione

- Per analizzare le proprietà di raggiungibilità occorre:
  - Calcolare la matrice di raggiungibilità M_R a partire dalle matrici A e B delle equazioni di stato
  - Valutare il rango r di M_R e confrontarlo con la dimensione n del sistema; in particolare
    - Se $r = n$ allora il sistema risulta completamente raggiungibile
    - Se $r < n$ allora il sistema non è completamente raggiungibile

Esempio 2: calcolo di M_R

- Le matrici A e B del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Il sistema è a un ingresso $p = 1$ e di ordine $n = 3$
- La matrice di raggiungibilità è quindi del tipo:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

Esempio 2: analisi della raggiungibilità (1/2)

- La matrice di raggiungibilità è:

$$\boxed{M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -10 \\ 2 & -10 & 26 \end{bmatrix}}$$

- Si ha

$$\boxed{\det(M_R) = 0 \Rightarrow \rho(M_R) < 3}$$

- Si nota che M_R ha una riga nulla mentre le altre due sono linearmente indipendenti

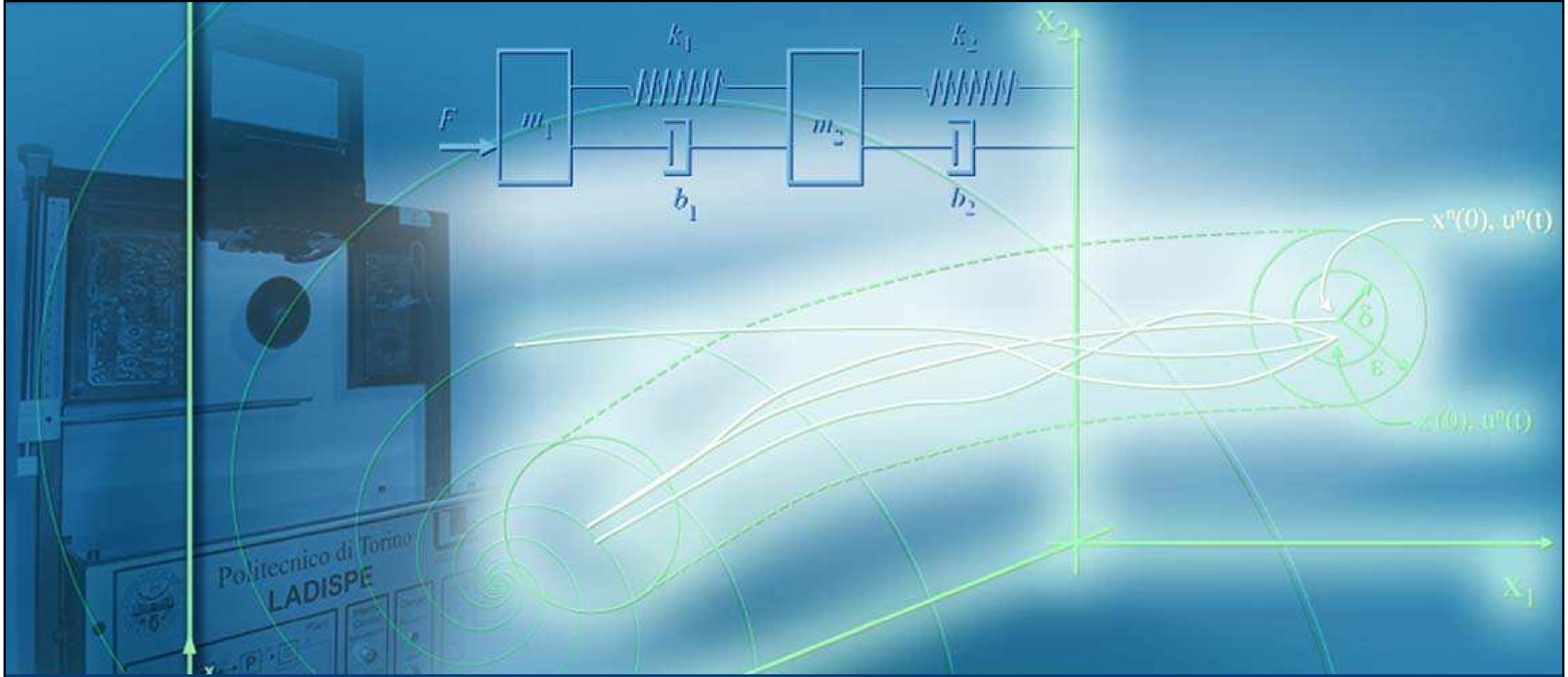
$$\boxed{\rho(M_R) = 2}$$

Esempio 2: analisi della raggiungibilità (2/2)

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -10 \\ 2 & -10 & 26 \end{bmatrix}, \rho(M_R) = 2$$

- Il sistema risulta
  non completamente raggiungibile
- Inoltre:

$$\dim(X_R) = \rho(M_R) = 2$$



Raggiungibilità e controllabilità

Il problema della realizzazione

Rappresentazioni di sistemi dinamici SISO

- Un sistema dinamico SISO LTI si può rappresentare con
  - **Equazioni di stato**
    (rappresentazione ingresso – stato – uscita)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$

  - **Funzione di trasferimento**
    (rappresentazione ingresso – uscita)

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} \qquad H(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0}$$

Il problema della realizzazione (1/3)

- Vogliamo studiare come è possibile passare dalla rappresentazione in equazioni di stato a quella in funzione di trasferimento e viceversa.
- **Equazioni di stato → → Funzione di trasferimento**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \qquad H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

- La soluzione è unica

Il problema della realizzazione (2/3)

- **Funzione di trasferimento →**
  → Equazioni di stato

$$H(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0} \qquad H(z)=\frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_0}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$A=??,B=??,C=??,D=?? \qquad A=??,B=??,C=??,D=??$$

- Il problema di determinare un insieme di equazioni di stato a partire da una funzione di trasferimento non ha soluzione unica ed è detto problema della **realizzazione**

Il problema della realizzazione (3/3)

- Nel caso in cui la funzione di trasferimento $H(s)$ non sia strettamente propria (cioè $m = n$), prima di procedere alla **realizzazione** occorre compiere la divisione (polinomiale) tra il numeratore e il denominatore:

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} =$$
$$= \frac{b'_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b'_1 s + b'_0}{s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a'_1 s + a'_0} + b'_n$$

La forma canonica di raggiungibilità

- Data la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{b'_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b'_1 s + b'_0}{s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a'_1 s + a'_0} + b'_n$$

la **forma canonica di raggiungibilità**

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a'_0 & -a'_1 & \cdots & -a'_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} b'_0 & b'_1 & \cdots & b'_{n-1} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} b'_n \end{bmatrix}$$

costituisce una sua possibile **realizzazione**

Forma canonica di raggiungibilità: proprietà

- Nella **forma canonica di raggiungibilità**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a'_0 & -a'_1 & \cdots & -a'_{n-1} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} b'_0 & b'_1 & \cdots & b'_{n-1} \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b'_n \end{bmatrix}$$

  - La matrice A è in forma compagna inferiore → il polinomio caratteristico è: $\lambda^n + \ldots + a'_1\lambda + a'_0$
  - Il sistema dinamico individuato dalle matrici A, B, C, D è sempre completamente raggiungibile
- Il medesimo procedimento si applica a sistemi TD

Esempio: formulazione del problema

- Data la seguente funzione di trasferimento:

$$\boxed{H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1}}$$

- Determinarne la realizzazione secondo la forma canonica di raggiungibilità

Esempio: realizzazione

- La funzione di trasferimento data è di ordine $n = 3$:

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{b_2' s^2 + b_1' s + b_0'}{s^3 + a_2' s^2 + a_1' s + a_0'} + b_3'$$

- La sua realizzazione secondo la forma canonica di raggiungibilità è quindi della forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0' & -a_1' & -a_2' \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} b_0' & b_1' & b_2' \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b_3' \end{bmatrix}$$

Esempio: calcolo della realizzazione (1/3)

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{b_2' s^2 + b_1' s + b_0'}{s^3 + a_2' s^2 + a_1' s + a_0'} + b_3'$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} b_0' & b_1' & b_2' \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b_3' \end{bmatrix}$$

$a_2' = 1$ $\quad$ $a_1' = 1$ $\quad$ $a_0' = 1$

Esempio: calcolo della realizzazione (2/3)

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{b_2' s^2 + b_1' s + b_0'}{s^3 + a_2' s^2 + a_1' s + a_0'} + b_3'$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} b_3' \end{bmatrix}$$

$$\boxed{b_2' = 1} \quad \boxed{b_1' = 3} \quad \boxed{b_0' = 1}$$

Esempio: calcolo della realizzazione (3/3)

$$H(s) = \frac{s^2 + 3s + 1}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{b_2' s^2 + b_1' s + b_0'}{s^3 + a_2' s^2 + a_1' s + a_0'} + b_3'$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$b_3' = 0$$

Esempio: risultato

- La realizzazione secondo la forma canonica di raggiungibilità della funzione di trasferimento data è quindi:

$$
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} x(t)
$$