01AYS - FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Trasformata unilatera Zeta

proff. Marina Indri e Michele Taragna
Dip. di Automatica e Informatica
Politecnico di Torino

Anno Accademico 2001/2002

Versione 1.0

Definizione di Trasformata unilatera Zeta $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\left\{f(k)\right\} \doteq \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\ z^{-k} = F(z)\,, \qquad z \in \mathbf{C}; \qquad \underset{\mathbf{Z}\to\mathbf{R}}{f(k)} \ \underset{\mathcal{Z}^{-1}}{\overset{\mathcal{Z}}{\rightleftarrows}} \ \underset{\mathbf{C}\to\mathbf{C}}{F(z)}$$

Proprietà fondamentali della Trasformata unilatera Zeta

Proprietà	**Tempo k**	**Frequenza z**
Linearità	$k_1 f_1(k) + k_2 f_2(k)$	$k_1 F_1(z) + k_2 F_2(z)$
Traslazione a sinistra	$f(k+1)$	$zF(z) - z \cdot f(k=0)$
Traslazione a destra di n passi	$f(k-n)$	$\frac{1}{z^n} \cdot F(z)$
Somma	$\sum_{l=0}^{k} f(l)$	$\frac{z}{z-1} \cdot F(z)$
Convoluzione	$f(k) * g(k) = \sum_{l=0}^{k} f(l)\, g(k-l)$	$F(z) \cdot G(z)$
Teorema del valore iniziale	$f(k=0)$	$\lim_{z\to\infty} F(z)$
Teorema del valore finale	$f(k\to\infty)$	$\lim_{z\to 1} (z-1) \cdot F(z)$

Tabella delle principali Trasformate unilatere Zeta

	$f(k)\,,\ k \geq 0$	$F(z)\,,\ z \in \mathbf{C}$
impulso unitario	$\delta(k)$	1
gradino unitario	$\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
polinomio fattoriale di grado l	$\binom{k}{l} \doteq \dfrac{k\,(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!},\ l > 0$	$\dfrac{z}{(z-1)^{l+1}}$
esponenziale associato al polo semplice p di $F(z)$	$p^k,\ p \in \mathbf{C}$	$\dfrac{z}{z-p}$
polinomio fattoriale * esponenziale associato al polo multiplo p di $F(z)$	$\binom{k}{l}\ p^{k-l},\ p \in \mathbf{C},\ l > 0$	$\dfrac{z}{(z-p)^{l+1}}$
	$\sin(k\theta)\,,\ \theta \in \mathbf{R}$	$\dfrac{z\sin\theta}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$
	$\cos(k\theta)\,,\ \theta \in \mathbf{R}$	$\dfrac{z\,(z-\cos\theta)}{z^2 - 2z\cos\theta + 1}$
potenza di matrice	$A^k,\ A \in \mathbf{R}^{n\times n}$	$z \cdot (zI_n - A)^{-1}$

Decomposizione in fratti semplici di funzioni razionali fratte

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$$

$N(z)$, $D(z)$: polinomi in z, di grado m ed n rispettivamente ($m \leq n$)

Caso #1: $b_0 = 0$

$$\begin{aligned}
F(z) \;&=\; \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = z \cdot \frac{\dfrac{N(z)}{a_n z}}{\dfrac{D(z)}{a_n}} = \\
&=\; z \cdot \frac{N'(z)}{D'(z)} = z \cdot \frac{N'(z)}{z^n + a'_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a'_1 z + a'_0} = \\
&=\; z \cdot \frac{N'(z)}{\prod_{i=1}^{n} (z - p_i)} = z \cdot \frac{N'(z)}{\prod_{i=1}^{n'} (z - p_i)^{\mu_i}} = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} R_{ij} \underbrace{\frac{z}{(z - p_i)^j}}_{\text{fratto semplice}}
\end{aligned}$$

n : numero di radici di $D(z)$ e $D'(z)$ = numero di poli di $F(z)$

n' : numero di radici distinte di $D(z)$ e $D'(z)$ = numero di poli non coincidenti di $F(z)$

p_i : i-esima radice di $D(z)$ e $D'(z)$ = i-esimo polo di $F(z)$

μ_i : molteplicità dell'i-esimo polo di $F(z)$

R_{ij} : j-esimo residuo associato a p_i mediante il fratto semplice $\dfrac{R_{ij}\, z}{(z-p_i)^j}$

$$R_{ij} = \lim_{z \to p_i} \frac{1}{(\mu_i - j)!} \frac{\partial^{\mu_i - j}}{\partial z^{\mu_i - j}} \left[(z-p_i)^{\mu_i} \frac{N'(z)}{D'(z)} \right], \quad 1 \leq j \leq \mu_i$$

Se p_i è un polo semplice, con $\mu_i = 1$, allora ha associato soltanto il fratto semplice $\dfrac{R_i\, z}{z-p_i}$, dove

$$R_i = \lim_{z \to p_i} (z-p_i) \frac{N'(z)}{D'(z)}$$

Caso #2: $b_0 \neq 0$, $m < n$

$$\begin{aligned}
F(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} = \frac{\dfrac{N(z)}{a_n}}{\dfrac{D(z)}{a_n}} = \\
&= \frac{N'(z)}{D'(z)} = \frac{N'(z)}{z^n + a'_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a'_1 z + a'_0} = \\
&= \frac{N'(z)}{\prod_{i=1}^{n} (z - p_i)} = \frac{N'(z)}{\prod_{i=1}^{n'} (z - p_i)^{\mu_i}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} \underbrace{R_{ij} \frac{z}{(z - p_i)^j}}_{\text{fratto semplice}}
\end{aligned}$$

n, n', p_i, μ_i, R_{ij} : come nel caso #1 ($b_0 = 0$)

Antitrasformata unilatera Zeta di funzioni razionali fratte

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$$

Caso #1: $b_0 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{R_{ij}\ z}{(z-p_i)^j}\right\} = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} R_{ij} \binom{k}{j-1} p_i^{k-j+1}\, \varepsilon(k)$$

Caso #2: $b_0 \neq 0 \quad \Rightarrow$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z} \cdot \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{R_{ij}\ z}{(z-p_i)^j}\right\} = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} R_{ij} \binom{k-1}{j-1} p_i^{k-j} \varepsilon(k-1)$$

Se $F(z)$ ha un polo complesso p_i con molteplicità μ_i, allora $F(z)$ presenta anche il polo complesso $p_l = p_i^*$ con molteplicità $\mu_l = \mu_i$. In tal caso, è opportuno antitrasformare a coppie i fratti semplici di $F(z)$ associati a p_i e p_l, poiché $R_{lj} = R_{ij}^*$ e quindi:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{R_{ij}\ z}{(z-p_i)^j}+\frac{R_{lj}\ z}{(z-p_l)^j}\right\}=\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{R_{ij}\ z}{(z-p_i)^j}+\frac{R_{ij}^*\ z}{\left(z-p_i^*\right)^j}\right\}=$$

$$= 2\left|R_{ij}\right|\binom{k}{j-1}|\,p_i|^{k-j+1}\cos\Big((k-j+1)\,\angle p_i+\angle R_{ij}\Big)\,\varepsilon(k)$$

con $\angle p_i = \arctan\left(\frac{\Im m\,(p_i)}{\Re e\,(p_i)}\right)$, $\angle R_{ij} = \arctan\left(\frac{\Im m\left(R_{ij}\right)}{\Re e\left(R_{ij}\right)}\right)$

Esercizi

1) Calcolare l'antitrasformata unilatera Zeta di

$$F(z) = \frac{z^3 + 3z^2 + 2z}{(z+3)(z+4)(z+5)}$$

Soluzione: $f(k) = \left[(-3)^k - 6(-4)^k + 6(-5)^k\right] \varepsilon(k)$

2) Calcolare l'antitrasformata unilatera Zeta di

$$F(z) = \frac{1}{z^3 + z}$$

Soluzione: $f(k) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(k-2)\right) \varepsilon(k-2) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \varepsilon(k-2)$