

Introduzione e modellistica dei sistemi

Modellistica dei sistemi elettromeccanici



$y(t) = Cx(t)$

Modellistica dei sistemi elettromeccanici

- Principi fisici di funzionamento
- Motore elettrico in corrente continua (DC-motor)
- DC-motor con comando di armatura
- DC-motor con comando di eccitazione
- Esempio di rappresentazione in variabili di stato



Modellistica dei sistemi elettromeccanici

Principi fisici di funzionamento

$$y(t) = Cx(t)$$

Introduzione

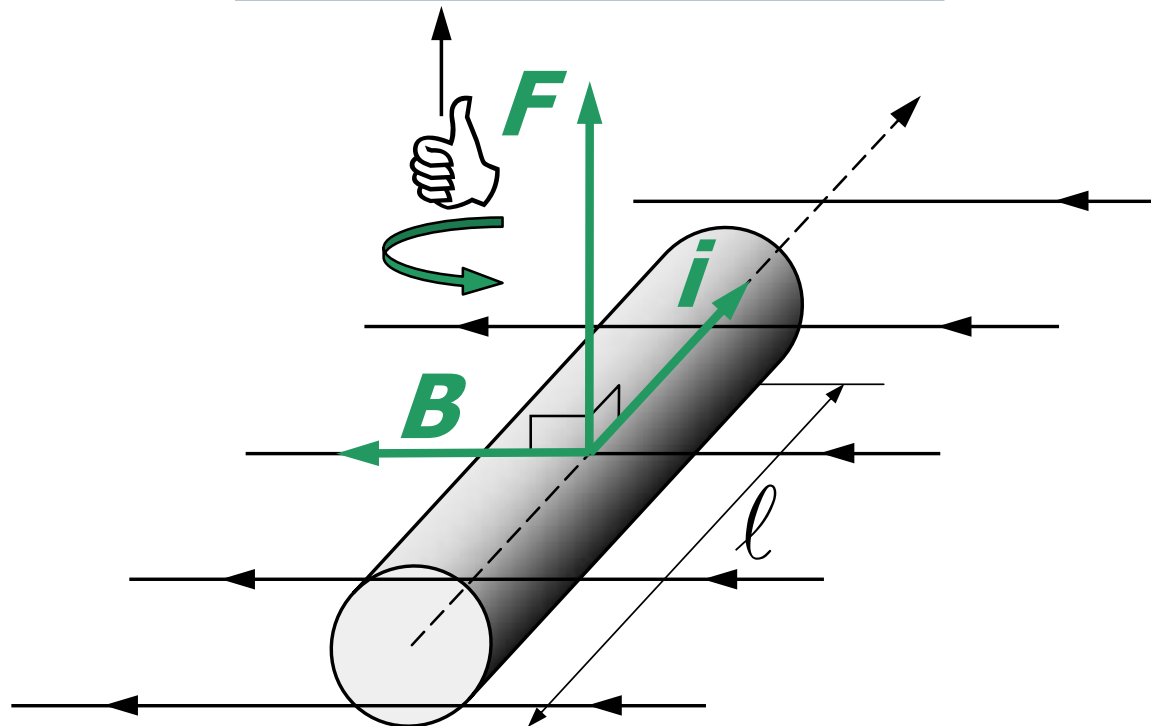
- I **sistemi elettromeccanici** operano una conversione elettromeccanica di energia:
 - Conversione di energia elettrica in energia meccanica
⇒ **motori elettrici**
 - Conversione di energia meccanica in energia elettrica
⇒ **generatori elettrici** o **dinamo elettriche**
- Per esigenze di brevità, in questo modulo saranno considerati soltanto i motori elettrici e in particolare quelli alimentati in corrente continua, noti più semplicemente come **DC-motor**
- Saranno ora richiamati i principi fisici che sono alla base del funzionamento dei sistemi elettromeccanici

$$y(t) = Cx(t)$$

Forza di Lorentz

- Un conduttore elettrico di lunghezza ℓ percorso da una corrente $i(t)$ e immerso in un campo magnetico d'intensità $B(t)$ è sottoposto alla **forza di Lorentz**

$$\vec{F}(t) = \ell \vec{i}(t) \wedge \vec{B}(t)$$

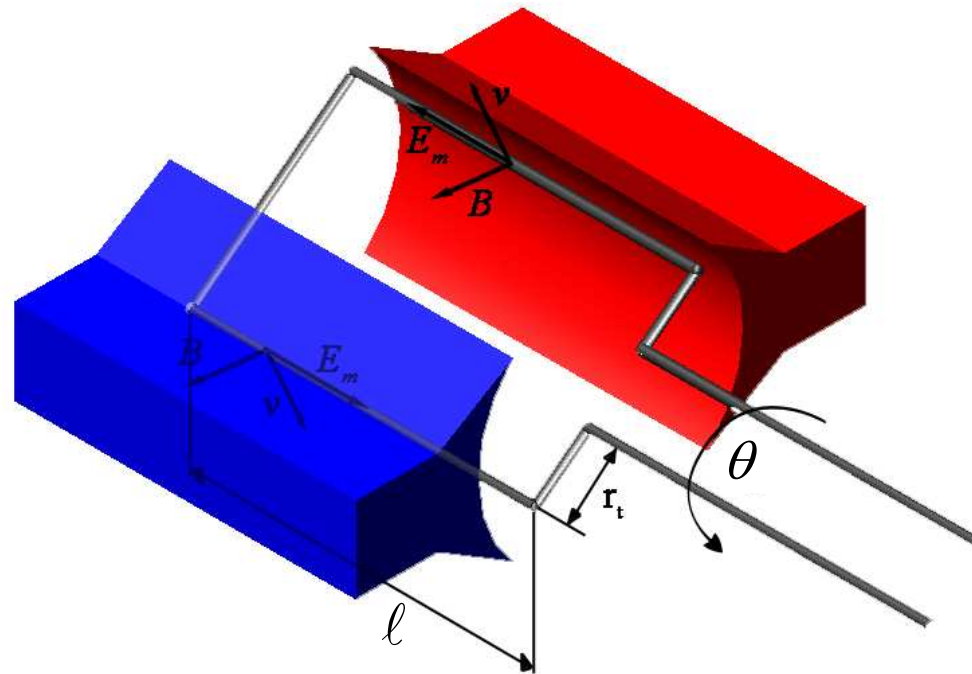


$$y(t) = Cx(t)$$

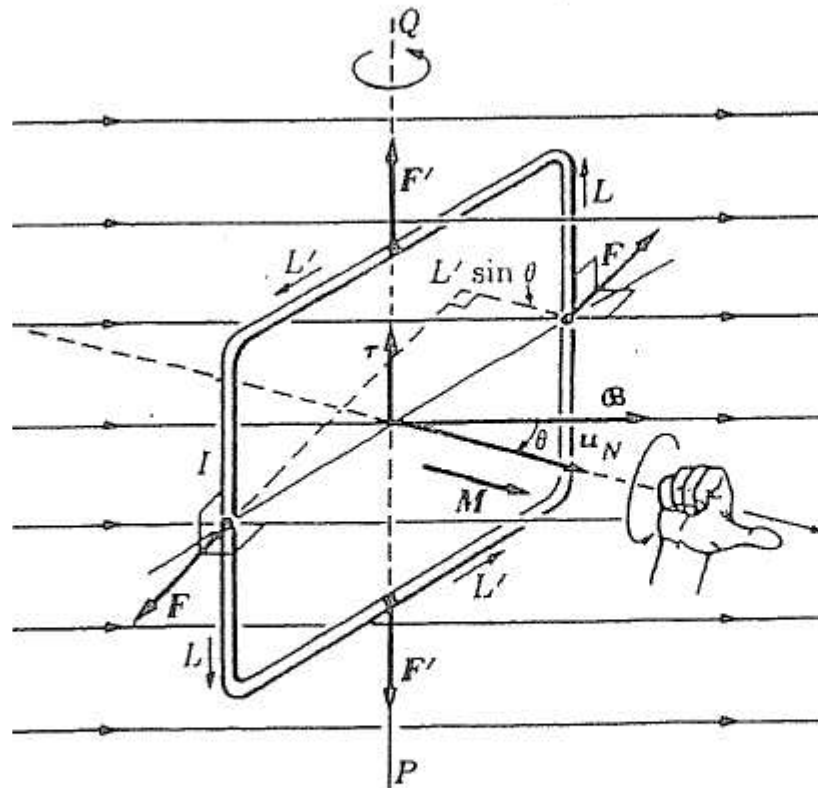
Coppia di Lorentz

- Una spira conduttrice di superficie A percorsa da una corrente $i(t)$ e immersa in un campo magnetico d'intensità $B(t)$ è sottoposta alla **coppia di Lorentz**

$$T(t) = i(t) A B \sin \theta(t)$$



Interazioni magn./eletttr.



$$\boldsymbol{\tau} = I S \mathbf{u}_N \times \mathbf{B}$$

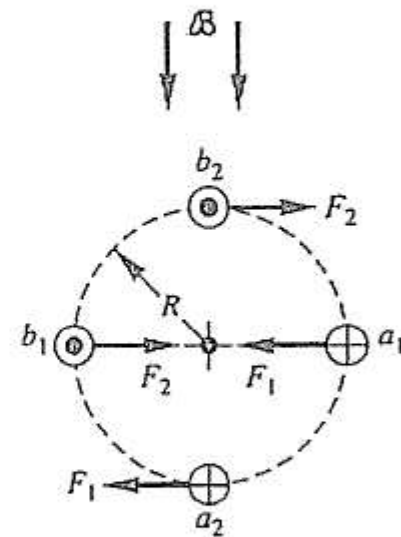
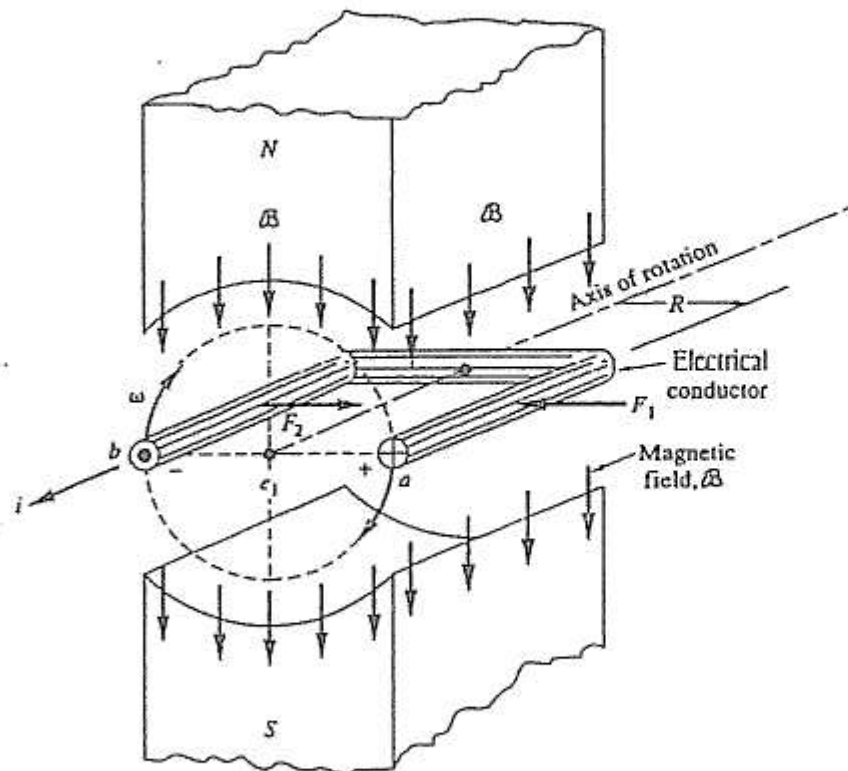
dove

S = superficie ($= LL'$)

$$|\boldsymbol{\tau}| = I S B \sin(\theta)$$

Alonso/Finn, "Elementi di fisica per l'università", Addison-Wesley

Interazioni magn./elettr.



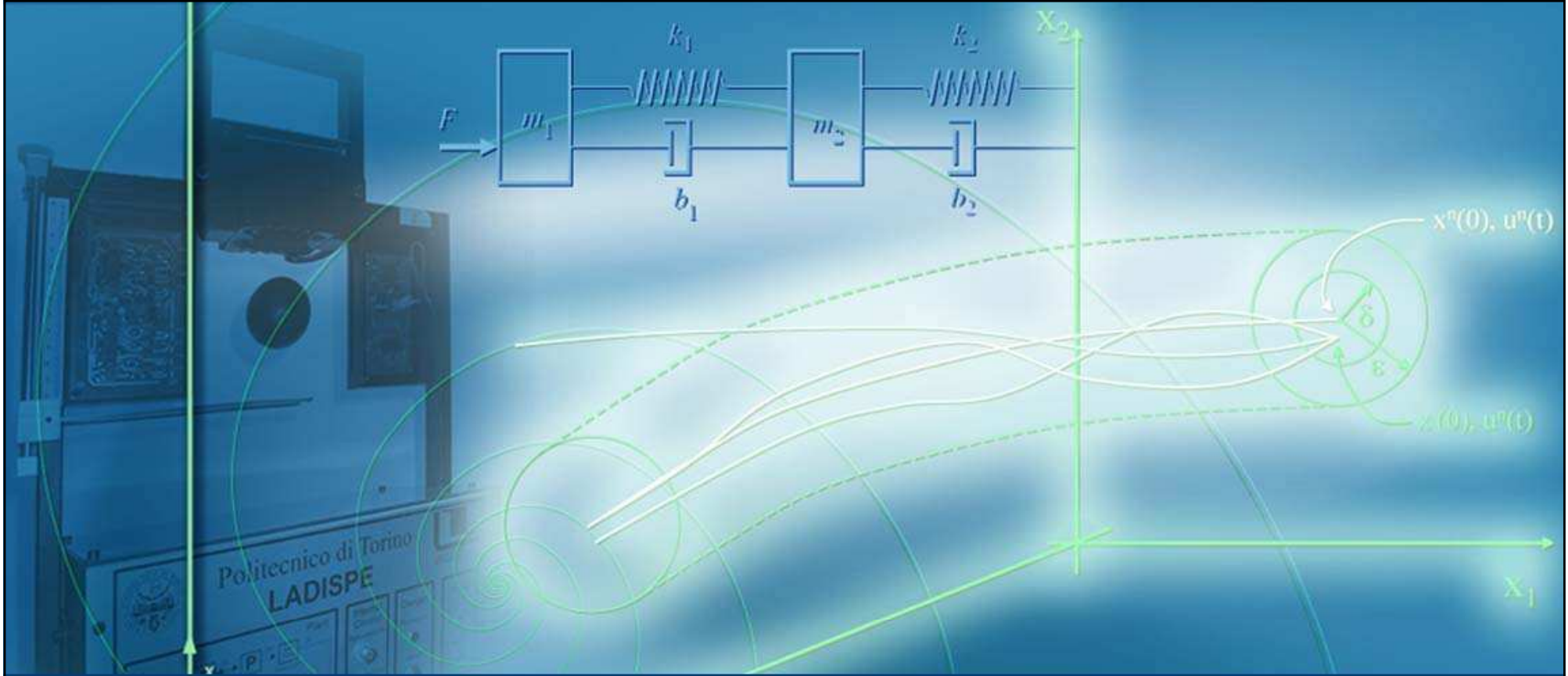
Bateson, "Introduction to control system technology", Prentice Hall



Legge dell'induzione elettromagnetica

- Se un conduttore elettrico forma un circuito chiuso e concatena un flusso $\Phi(t)$ di un campo magnetico, per la legge di Faraday – Henry – Lenz dell'induzione elettromagnetica viene a crearsi nel conduttore una tensione nota come **forza elettromotrice indotta** (o **f.e.m. indotta**)

$$e(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$



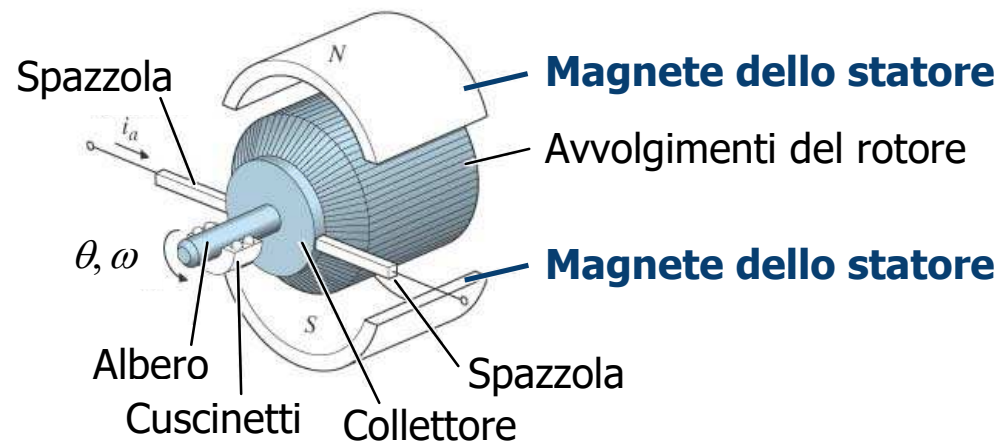
Modellistica dei sistemi elettromeccanici

Motore elettrico in corrente continua (DC-motor)

$$y(t) = Cx(t)$$

Parti principali di un DC-motor (1/4)

- Un motore elettrico alimentato in corrente continua è costituito da

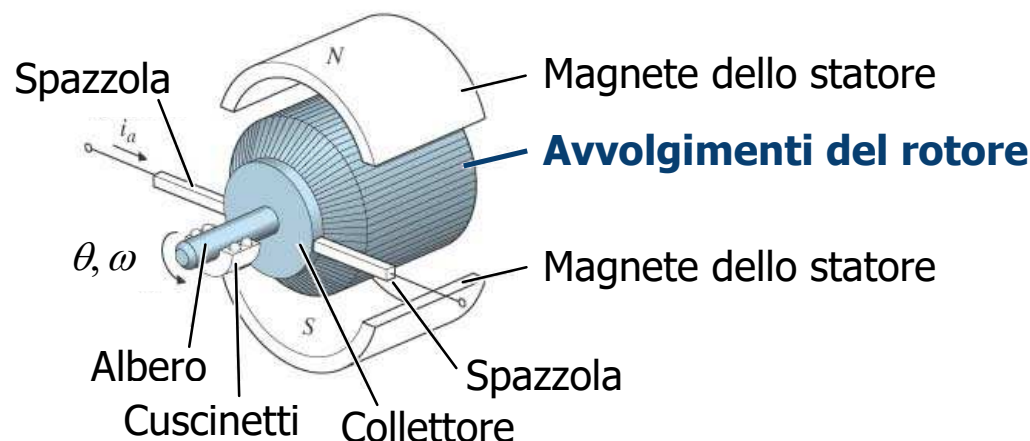


- Uno **statore** : è la parte più esterna e non rotante, responsabile della generazione del campo magnetico mediante
 - Semplici magneti permanenti e/o
 - Una serie opzionale di avvolgimenti alimentati in corrente continua, costituenti il **circuito di eccitazione**

$$y(t) = Cx(t)$$

Parti principali di un DC-motor (2/4)

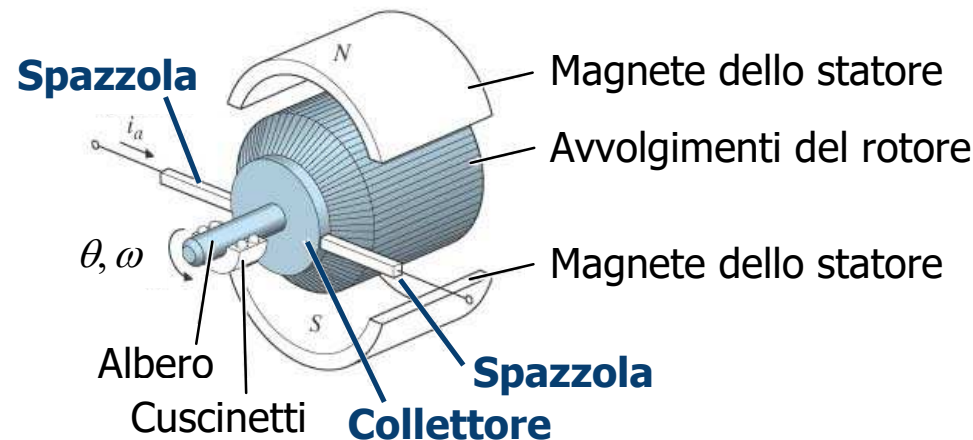
- Un motore elettrico alimentato in corrente continua è costituito da



- Un **rotore** : è la parte più interna e mobile, costituita da un cilindro di materiale ferromagnetico lamellato e opportunamente sagomato, su cui sono posti numerosi avvolgimenti che formano il **circuito di armatura**; tale circuito genera un campo magnetico concatenato con quello dello statore

Parti principali di un DC-motor (3/4)

- Un motore elettrico alimentato in corrente continua è costituito da

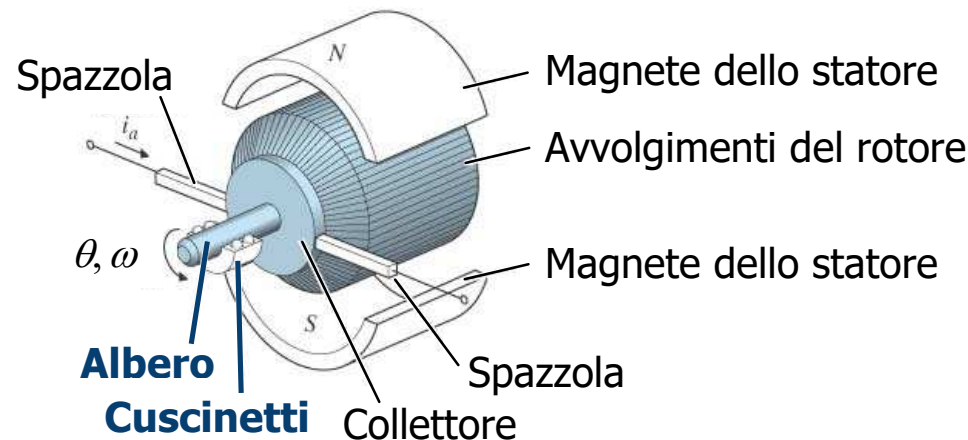


- Un interruttore rotante detto **collettore a spazzole** o **anello di Pacinotti** : permette al circuito di armatura di entrare in contatto elettrico con due **spazzole**, attraverso le quali il motore riceve energia elettrica sotto forma di corrente di armatura

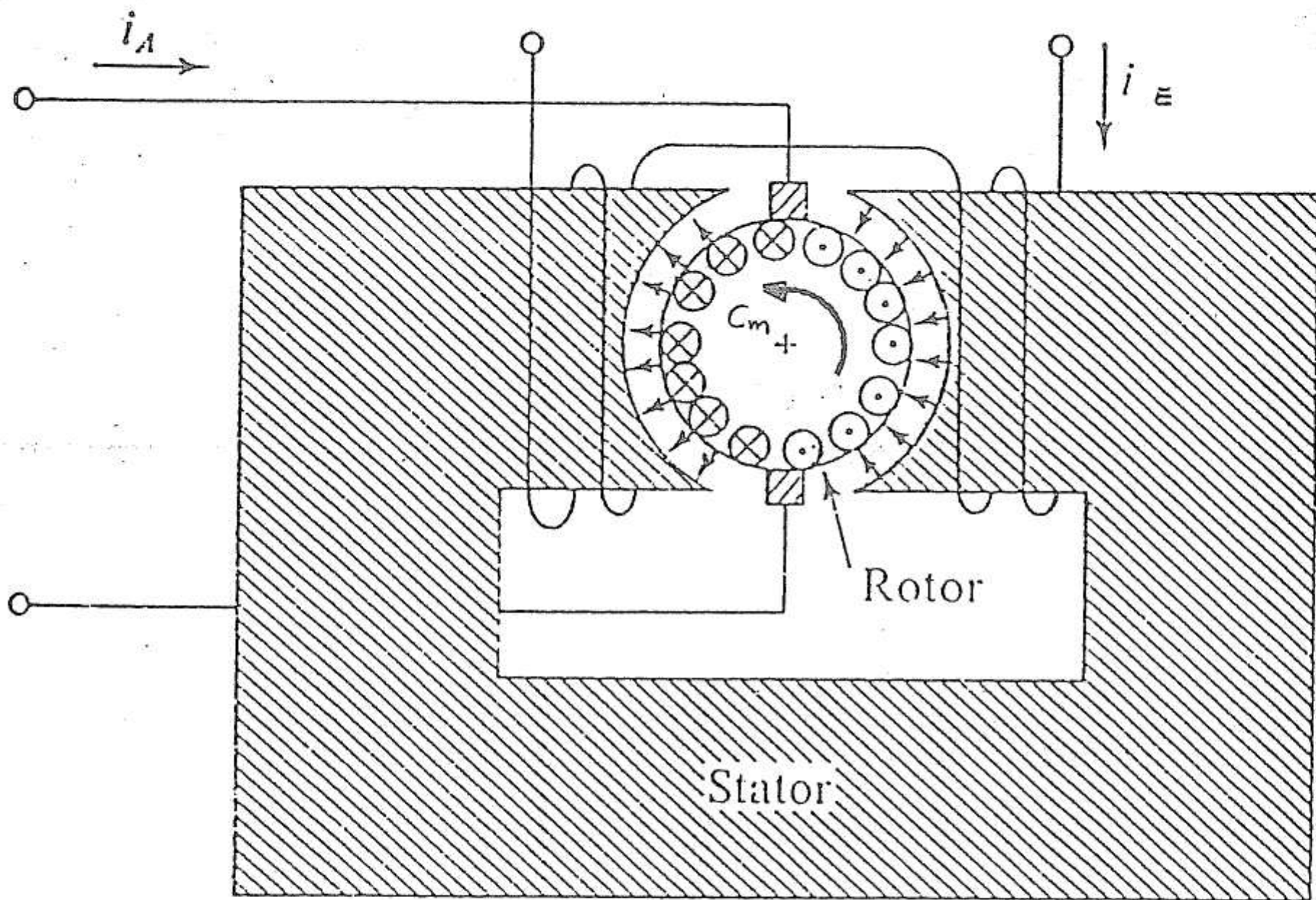
$$y(t) = Cx(t)$$

Parti principali di un DC-motor (4/4)

- Un motore elettrico alimentato in corrente continua è costituito da

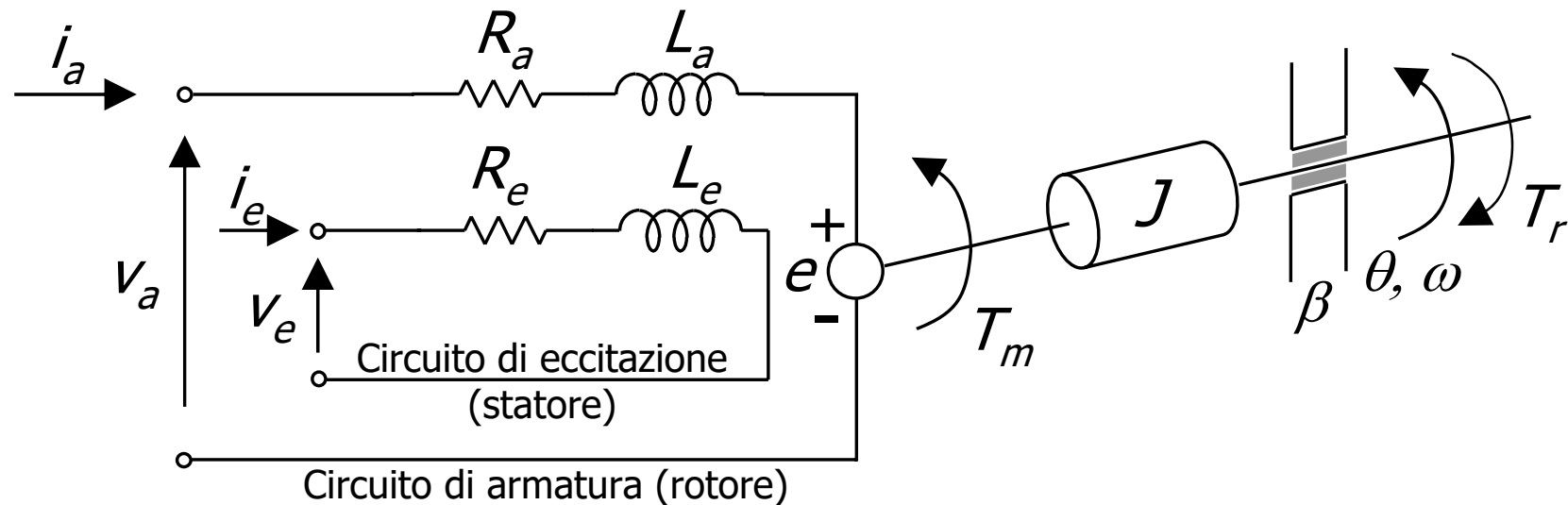


- Un **albero motore** : solidale con il rotore e dotato di un proprio momento d'inerzia, è di solito collegato meccanicamente alla carcassa del motore mediante uno o più **cuscinetti a sfera**



Modello di un DC-motor (1/6)

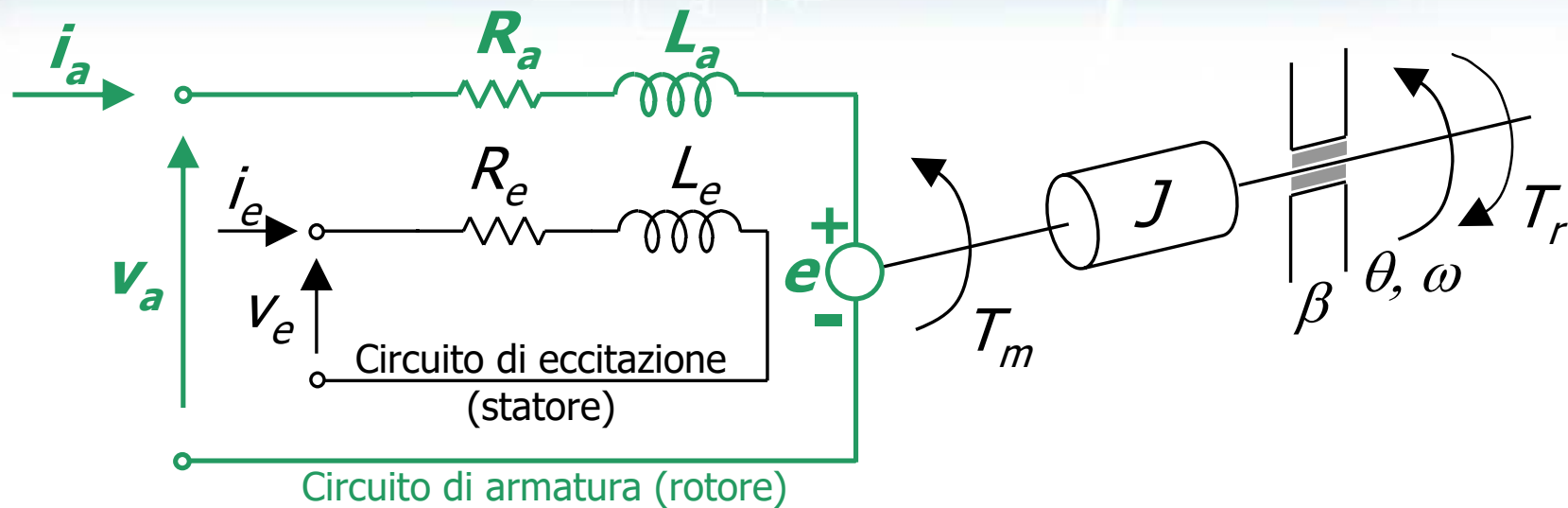
- Il modello del DC-motor è di natura ibrida:



Infatti è costituito da:

- Un modello di tipo elettrico del rotore e dello statore (nel caso in cui siano presenti avvolgimenti statorici)
- Un modello di tipo meccanico del rotore e dell'eventuale carico applicato

Modello di un DC-motor (2/6)



- Il modello elettrico del rotore è descritto da

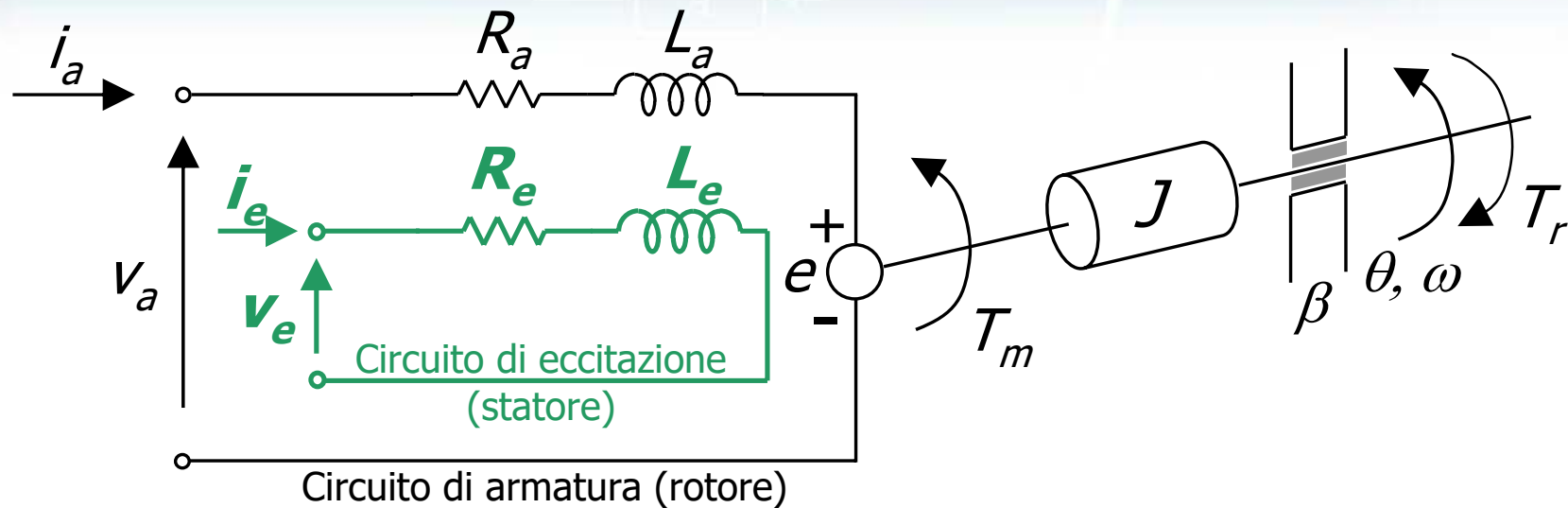
$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + e(t)$$

v_a, i_a = tensione e corrente di armatura

R_a, L_a = resistenza ed induttanza equivalenti di armatura
(proporzionali al numero di spire del rotore)

e = forza elettromotrice indotta (f.e.m. indotta del rotore)

Modello di un DC-motor (3/6)



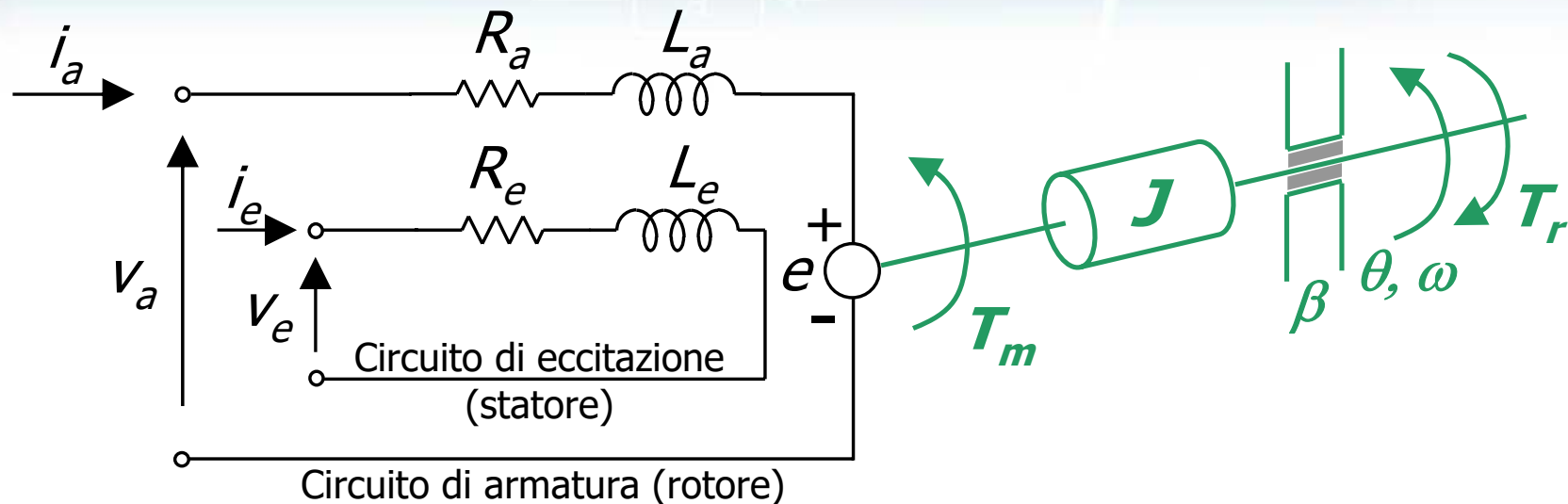
- Se sono presenti avvolgimenti sullo statore \Rightarrow il modello elettrico dello statore è descritto da

$$v_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}$$

v_e, i_e = tensione e corrente di eccitazione

R_e, L_e = resistenza ed induttanza equivalenti di eccitazione (proporzionali al numero di spire dello statore)

Modello di un DC-motor (4/6)



► Il modello meccanico del rotore è descritto da

$$J\ddot{\theta}(t) = J\dot{\omega}(t) = T_m(t) - T_r(t) - \beta\omega(t)$$

- J = inerzia dell'albero motore, avente posizione angolare θ
- T_m = coppia motrice del motore
- T_r = coppia resistente (dovuta al carico applicato al motore)
- β = coefficiente d'attrito equivalente (tiene conto dei vari fenomeni d'attrito, fra cui quelli dovuti ai cuscinetti)

Modello di un DC-motor (5/6)

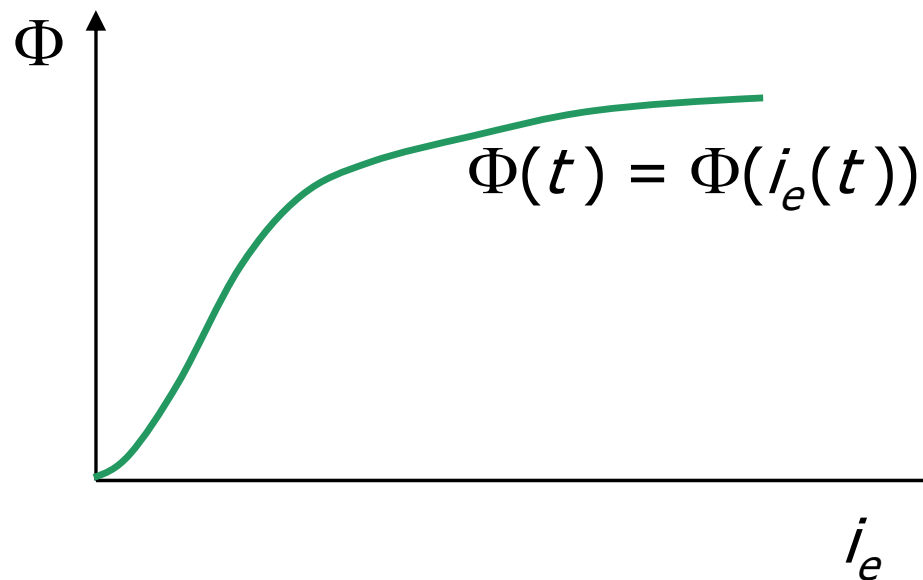
- Il fenomeno della conversione elettromeccanica di energia è descritto dalle relazioni:

$$\begin{aligned} e(t) &= K \Phi(t) \omega(t) \\ T_m(t) &= K \Phi(t) i_a(t) \end{aligned}$$

e = forza elettromotrice indotta (f.e.m. indotta), $[e] = \text{V}$
 K = costante caratteristica del motore, $[K] = \text{V T}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s/rad}$
 Φ = flusso del vettore di induzione magnetica, $[\Phi] = \text{T m}^2$
 ω = velocità angolare dell'albero motore, $[\omega] = \text{rad/s}$
 T_m = coppia motrice del motore, $[T_m] = \text{N m}$
 i_a = corrente di armatura, $[i_a] = \text{A}$

Modello di un DC-motor (6/6)

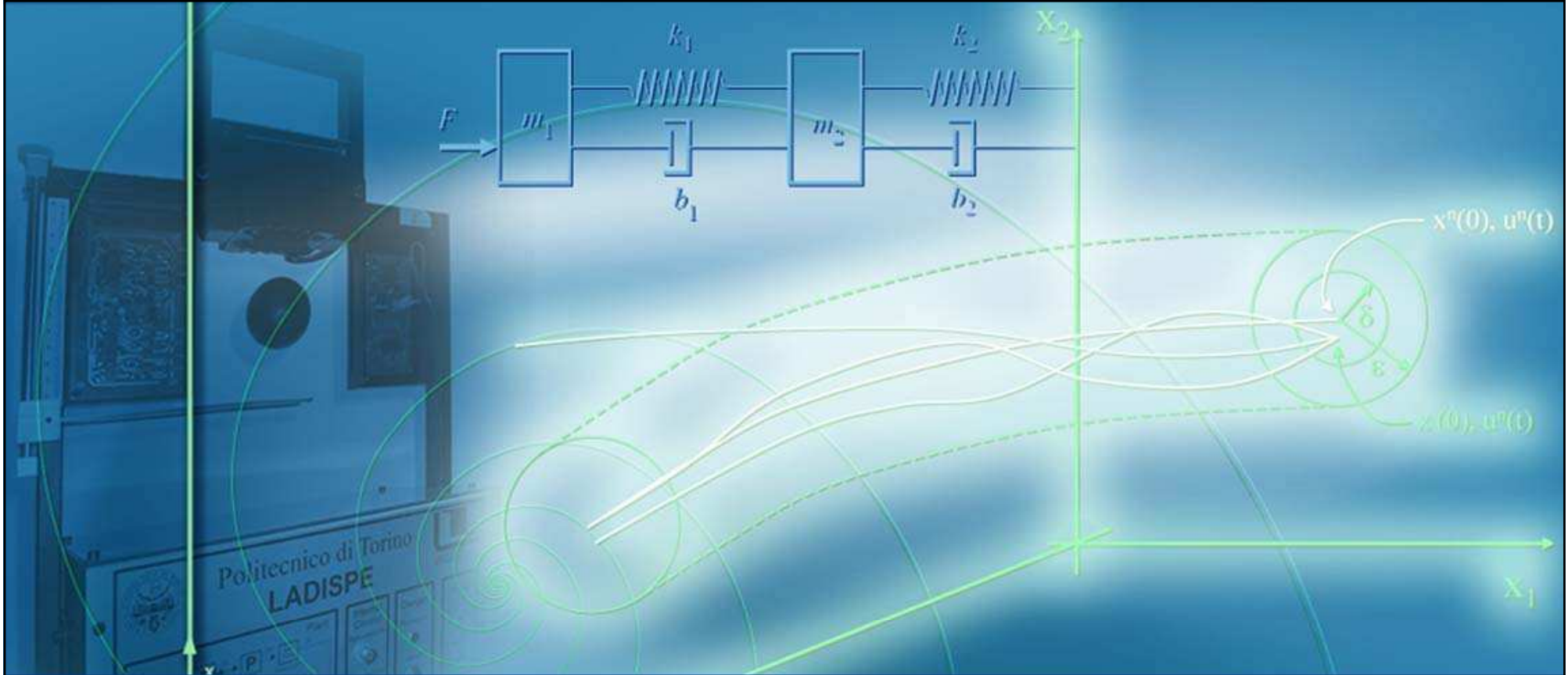
- Se il flusso magnetico dello statore è generato da magneti permanenti $\Rightarrow \Phi(t) = \bar{\Phi} = \text{costante}, \forall t$
- Se il flusso magnetico dello statore è generato da spire percorse dalla corrente di eccitazione $i_e(t) \Rightarrow \Phi(t)$ risulta essere una funzione non lineare di $i_e(t)$ del tipo:





Modalità di funzionamento di un DC-motor

- Nel caso di DC-motor con **comando di armatura**
 - Il flusso magnetico dello statore è tenuto costante, utilizzando magneti permanenti e/o alimentando il circuito di eccitazione con una corrente costante
 - Il comando del motore è la tensione variabile $v_a(t)$ applicata al circuito di armatura del rotore
- Nel caso di DC-motor con **comando di eccitazione**
 - La corrente di armatura nel rotore è tenuta costante
 - Il comando del motore è la tensione variabile $v_e(t)$ applicata al circuito di eccitazione dello statore \Rightarrow variano sia la corrente di eccitazione $i_e(t)$ sia il flusso magnetico dello statore $\Phi(t) = \Phi(i_e(t))$



Modellistica dei sistemi elettromeccanici

DC-motor con comando di armatura

DC-motor con comando di armatura (1/2)

- Il flusso magnetico dello statore è tenuto costante

$$\Phi(t) = \bar{\Phi}, \quad \forall t$$

utilizzando magneti permanenti e/o alimentando le spire dello statore con una corrente costante $\bar{i}_e \Rightarrow$ l'equazione del circuito di eccitazione è di tipo statico:

$$v_e(t) = R_e \bar{i}_e + L_e \cancel{\frac{d\bar{i}_e}{dt}} = R_e \bar{i}_e = \bar{v}_e, \quad \forall t$$

- Le equazioni dinamiche si riducono quindi a:

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K \bar{\Phi} \omega(t)$$

$$J\ddot{\theta}(t) = J\dot{\omega}(t) = K \bar{\Phi} i_a(t) - T_r(t) - \beta\omega(t)$$

DC-motor con comando di armatura (2/2)

- Poiché le equazioni dinamiche sono:

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K \bar{\Phi} \omega(t)$$

$$J \ddot{\theta}(t) = J \dot{\omega}(t) = K \bar{\Phi} i_a(t) - T_r(t) - \beta \omega(t)$$

le variabili di stato sono, in generale:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

mentre le variabili di ingresso sono:

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$v_a(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K \bar{\Phi} \dot{\theta}(t)$$

$$J \ddot{\theta}(t) = J \dot{\omega}(t) = K \bar{\Phi} i_a(t) - T_r(t) - \beta \omega(t)$$

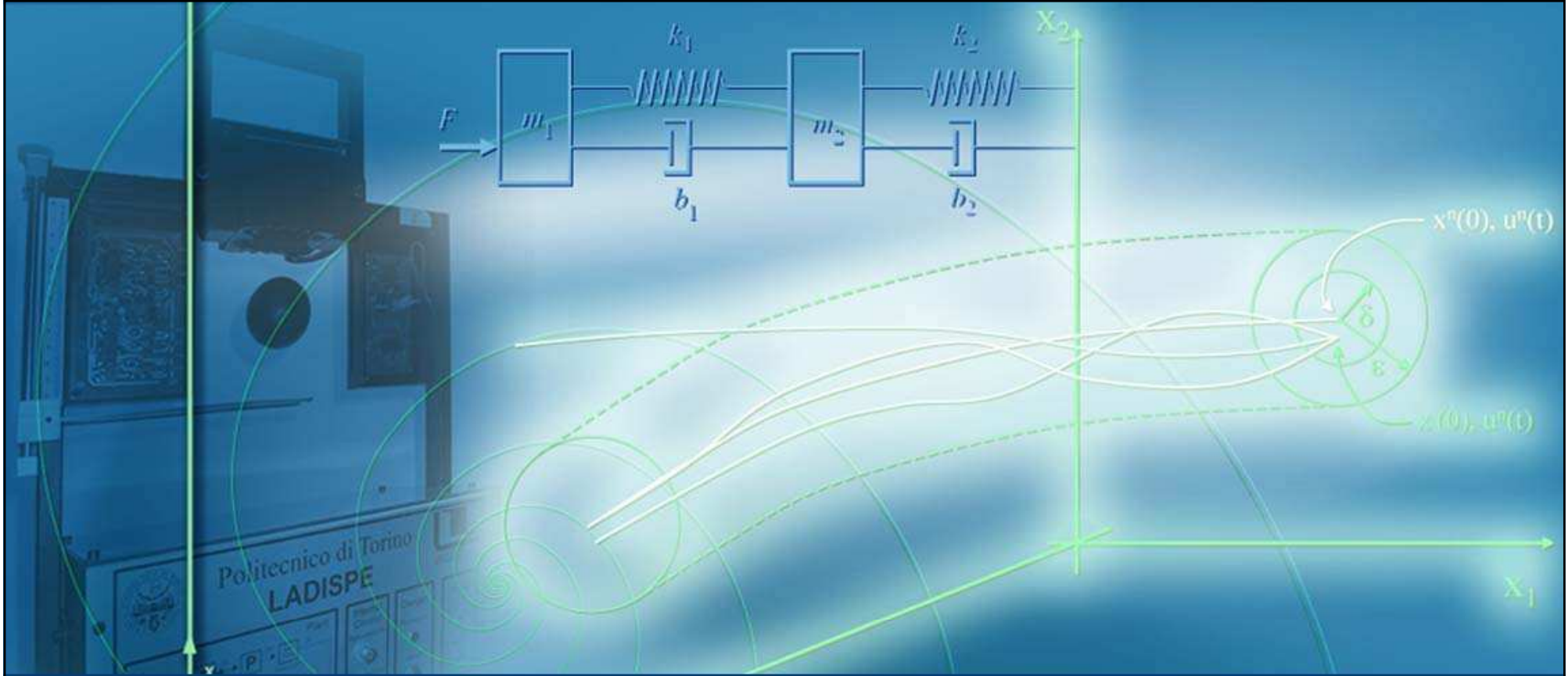
$$x = \begin{bmatrix} i_a \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} v_a \\ T_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = \theta$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{di_a}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{K \bar{\Phi}}{L_a} \omega + \frac{v_a}{L_a} = -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{K \bar{\Phi}}{L_a} x_3 + \frac{1}{L_a} u_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} = \omega = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{K \bar{\Phi}}{J} i_a - \frac{\beta}{J} \omega - \frac{T_r}{J} = \frac{K \bar{\Phi}}{J} x_1 - \frac{\beta}{J} x_3 - \frac{1}{J} u_2 \end{cases}$$

$$y = \theta = x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & 0 & -K \bar{\Phi}/L_a \\ 0 & 0 & 1 \\ K \bar{\Phi}/J & 0 & -\beta/J \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/L_a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/J \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Modellistica dei sistemi elettromeccanici

DC-motor con comando di eccitazione

DC-motor con comando di eccitazione (1/4)

- La corrente di armatura del rotore è tenuta costante

$$i_a(t) = \bar{i}_a, \quad \forall t$$

utilizzando un generatore ideale di corrente $\bar{i}_a \Rightarrow$
l'equazione del circuito di armatura è di tipo statico:

$$v_a(t) = R_a \bar{i}_a + L_a \cancel{\frac{d\bar{i}_a}{dt}} + K \Phi(t) \omega(t) = R_a \bar{i}_a + K \Phi(t) \omega(t), \quad \forall t$$

- Le equazioni dinamiche si riducono quindi a:

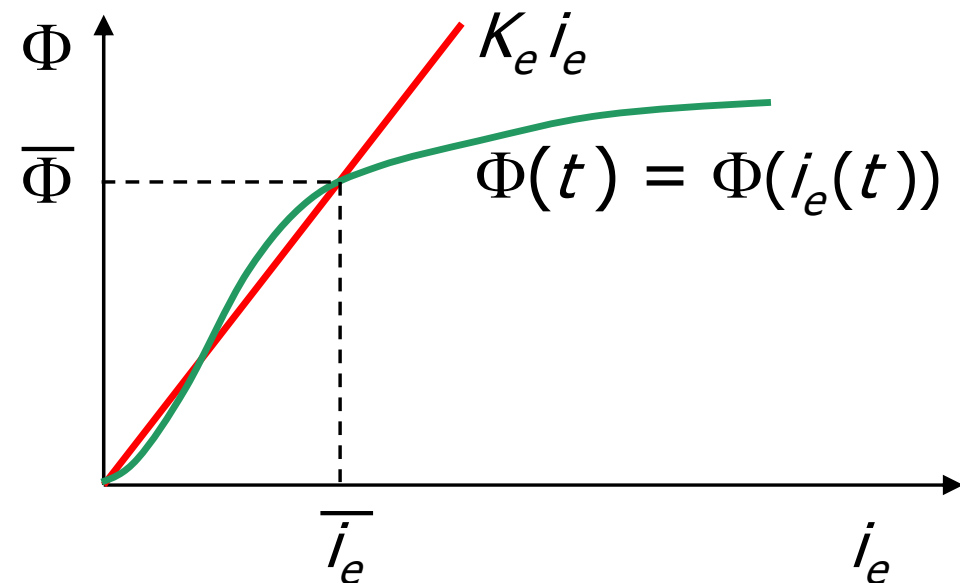
$$v_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}$$

$$J\ddot{\theta}(t) = J\dot{\omega}(t) = K \Phi(t) \bar{i}_a - T_r(t) - \beta\omega(t)$$

DC-motor con comando di eccitazione (2/4)

- La corrente di eccitazione dello statore $i_e(t)$ varia nell'intorno del punto di funzionamento $\bar{i}_e \Rightarrow$ il flusso magnetico dello statore varia a sua volta nell'intorno del valore $\Phi(i_e(t)) = \Phi(\bar{i}_e) = \bar{\Phi} = K_e \bar{i}_e \Rightarrow$ si può approssimare la caratteristica non lineare di Φ con la legge lineare

$$\Phi(t) \cong K_e i_e(t)$$



DC-motor con comando di eccitazione (4/4)

- Poiché le equazioni dinamiche sono:

$$v_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}$$

$$J\ddot{\theta}(t) = J\dot{\omega}(t) \cong K^* i_e(t) - T_r(t) - \beta\omega(t)$$

le variabili di stato sono, in generale:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_e(t) \\ \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

mentre le variabili di ingresso sono:

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_e(t) \\ T_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

$$v_e(t) = R_e i_e(t) + L_e \frac{di_e(t)}{dt}$$

$$J\ddot{\theta}(t) = J\dot{\omega}(t) = \kappa^* i_e(t) - T_r(t) - \beta\omega(t)$$

$$x = \begin{bmatrix} i_e \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} v_e \\ T_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = \theta$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{di_e}{dt} = -\frac{R_e}{L_e} i_e + \frac{v_e}{L_e} = -\frac{R_e}{L_e} x_1 + \frac{1}{L_e} u_1 \\ \dot{x}_2 = \dot{\theta} = \omega = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dot{\omega} = \ddot{\theta} = \frac{\kappa^*}{J} i_e - \frac{\beta}{J} \omega - \frac{T_r}{J} = \frac{\kappa^*}{J} x_1 - \frac{\beta}{J} x_3 - \frac{1}{J} u_2 \end{cases}$$

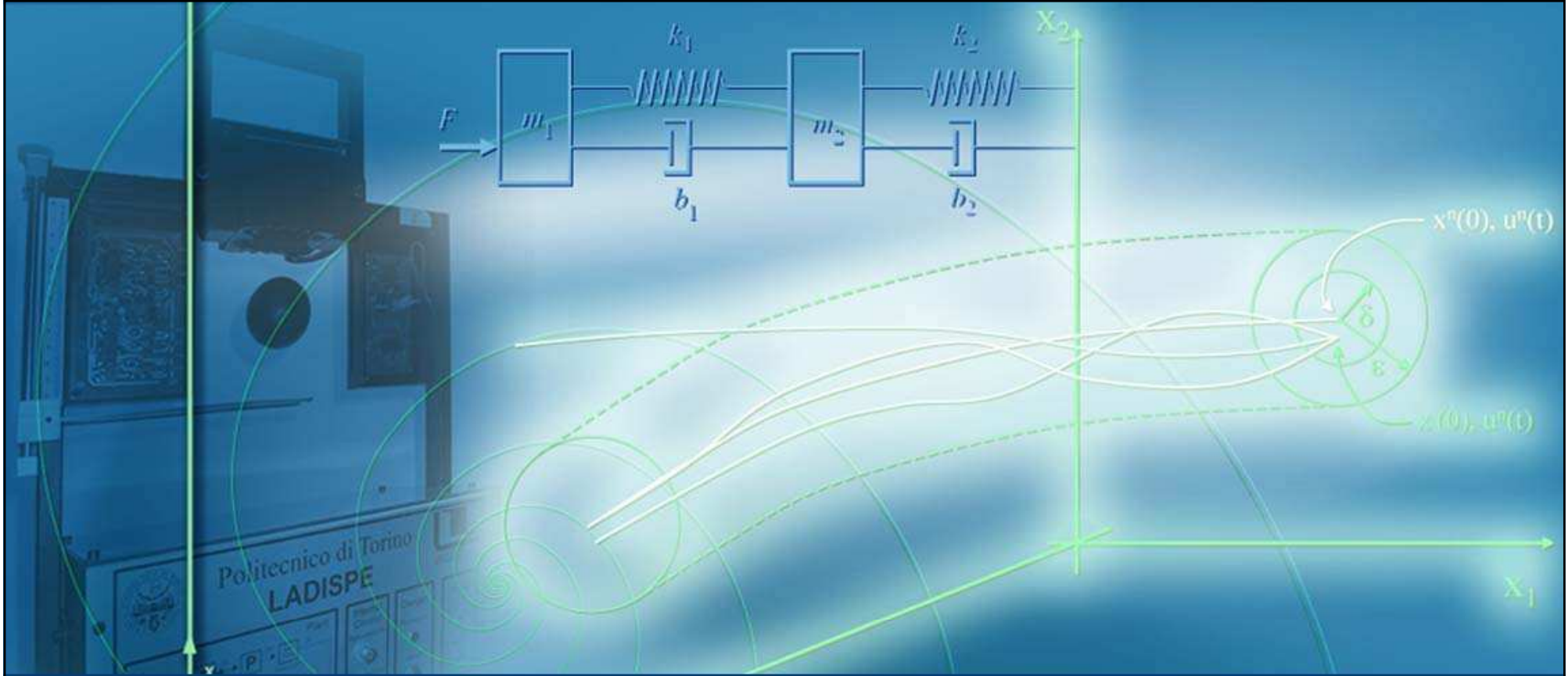
$$y = \theta = x_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -R_e/L_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \kappa^*/J & 0 & -\beta/J \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/L_e & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1/J \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$



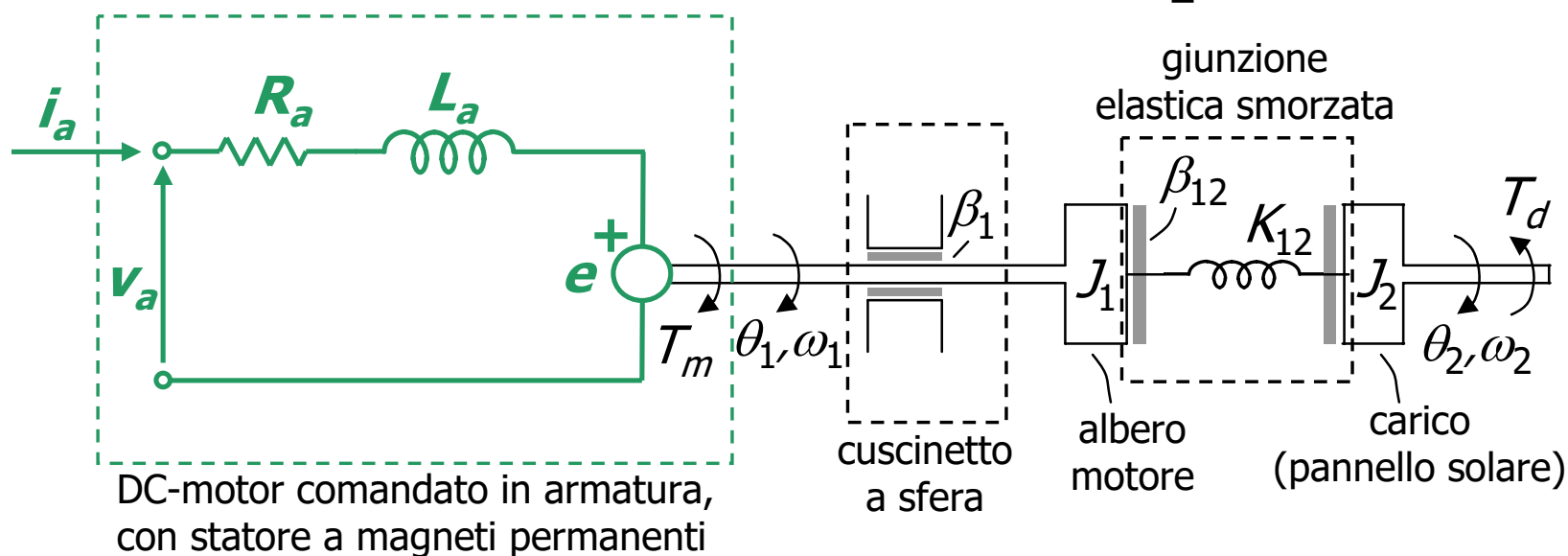
Modellistica dei sistemi elettromeccanici

**Esempio di rappresentazione
in variabili di stato**



Esempio di rappresentazione (1/12)

- Ricavare la rappresentazione di stato del seguente sistema elettromeccanico, in cui $y = \theta_2$



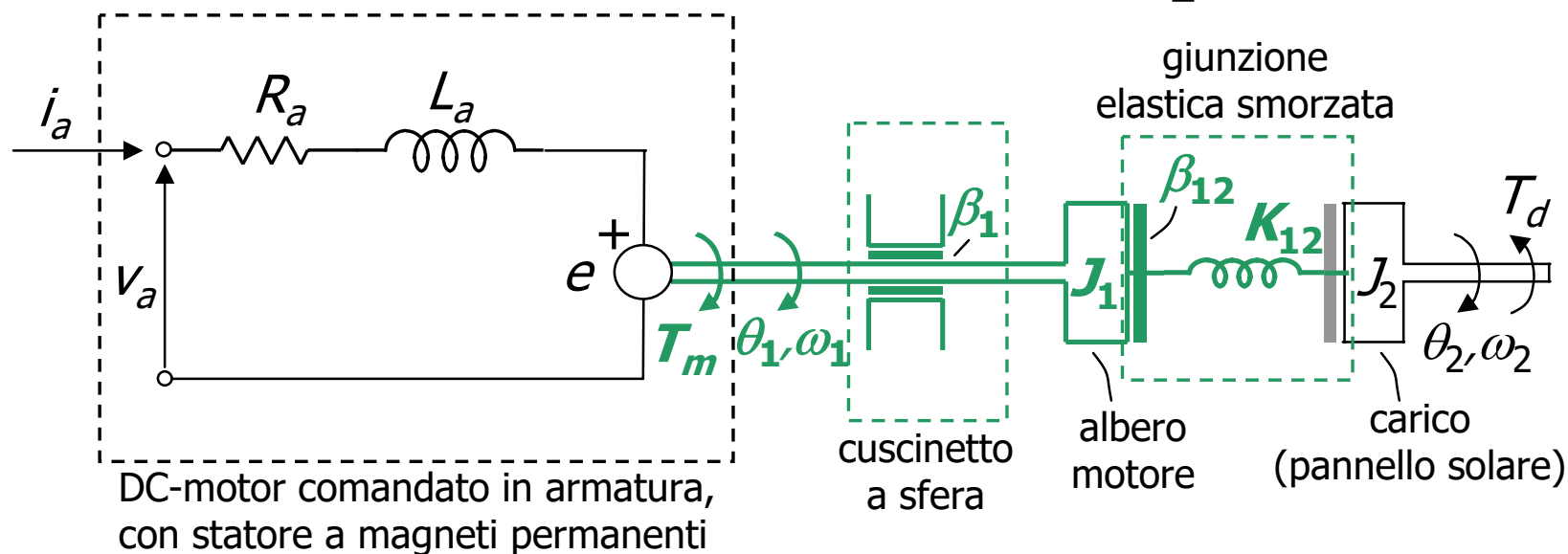
- Equazione dinamica della maglia di armatura:

$$1) v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + \underbrace{K \bar{\Phi}}_e \omega_1$$



Esempio di rappresentazione (2/12)

- Ricavare la rappresentazione di stato del seguente sistema elettromeccanico, in cui $y = \theta_2$



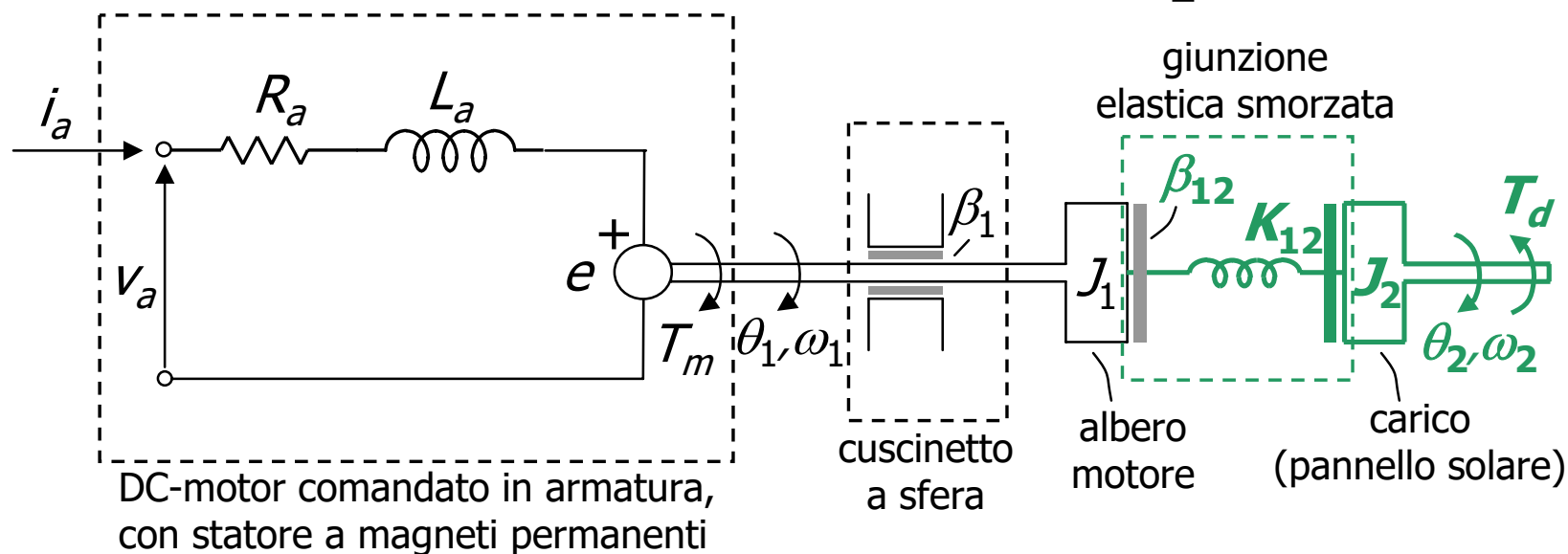
- Equazione del moto dell'albero motore d'inerzia J_1 :

$$2) J_1 \ddot{\theta}_1 = \underbrace{K \bar{\Phi} i_a}_{T_m} - \beta_1 \omega_1 - K_{12} (\theta_1 - \theta_2) - \beta_{12} (\omega_1 - \omega_2)$$



Esempio di rappresentazione (3/12)

- Ricavare la rappresentazione di stato del seguente sistema elettromeccanico, in cui $y = \theta_2$



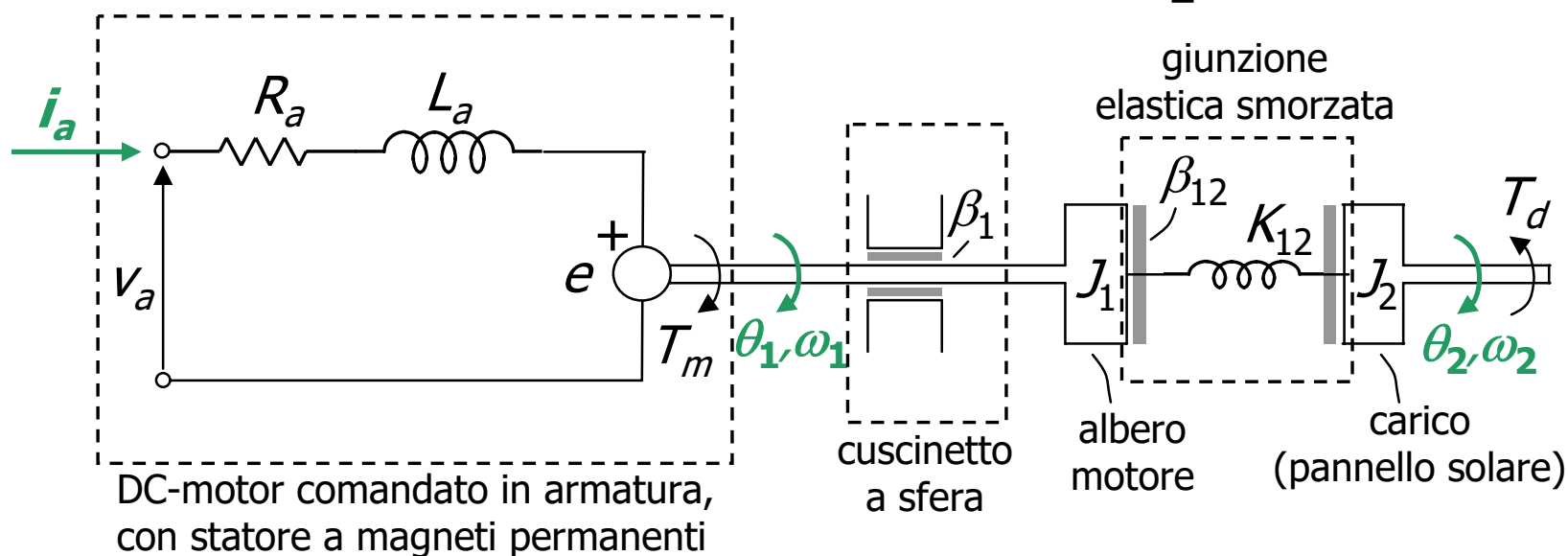
- Equazione del moto del pannello solare d'inerzia J_2 :

$$3) J_2 \ddot{\theta}_2 = -T_d - K_{12}(\theta_2 - \theta_1) - \beta_{12}(\omega_2 - \omega_1)$$



Esempio di rappresentazione (4/12)

- Ricavare la rappresentazione di stato del seguente sistema elettromeccanico, in cui $y = \theta_2$



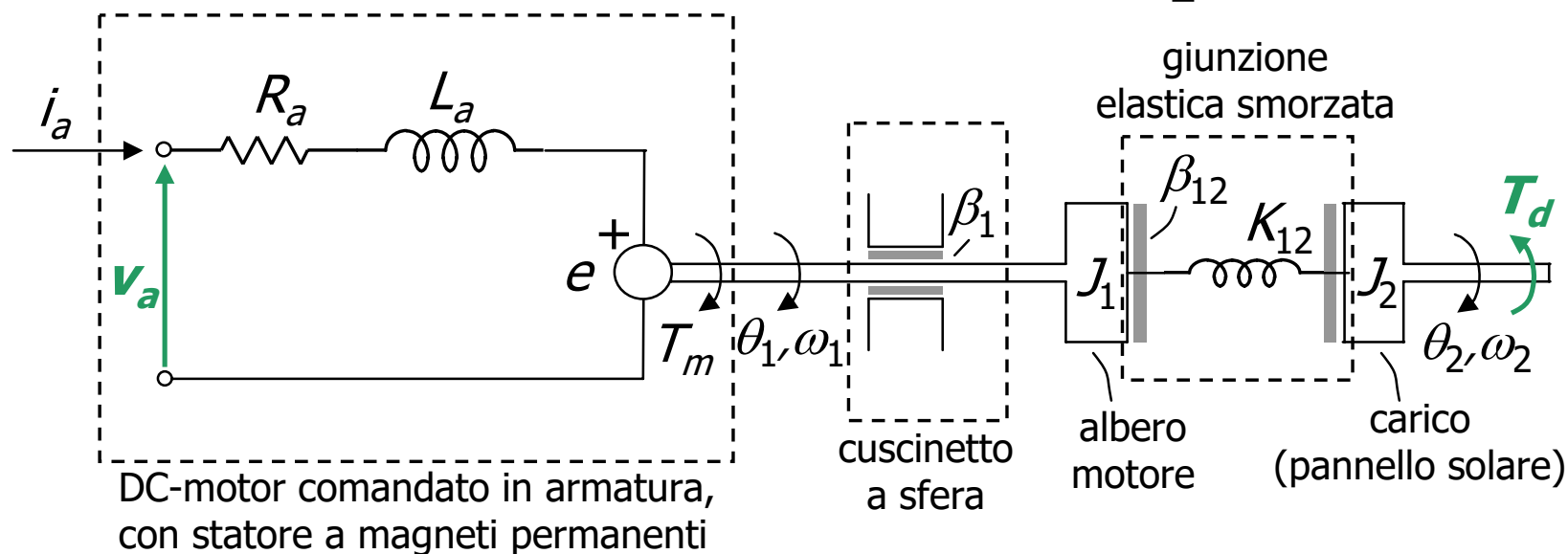
- Variabili di stato:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}$$



Esempio di rappresentazione (5/12)

- Ricavare la rappresentazione di stato del seguente sistema elettromeccanico, in cui $y = \theta_2$



- Variabili di ingresso:

$$u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ T_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$



Esempio di rappresentazione (6/12)

► Equazioni dinamiche:

$$1) \quad v_a = R_a i_a + L_a di_a/dt + K\bar{\Phi}\omega_1$$

$$2) \quad J_1 \ddot{\theta}_1 = K\bar{\Phi} i_a - \beta_1 \omega_1 - K_{12}(\theta_1 - \theta_2) - \beta_{12}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$3) \quad J_2 \ddot{\theta}_2 = -T_d - K_{12}(\theta_2 - \theta_1) - \beta_{12}(\omega_2 - \omega_1)$$

► Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ T_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

► Equazioni di stato:

$$\dot{x}_1 = di_a/dt = \frac{v_a}{L_a} - \frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{K\bar{\Phi}}{L_a} \omega_1 = -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{K\bar{\Phi}}{L_a} x_4 + \frac{u_1}{L_a} = f_1(t, x, u)$$



Esempio di rappresentazione (7/12)

► Equazioni dinamiche:

$$1) \quad v_a = R_a i_a + L_a di_a/dt + K\bar{\Phi}\omega_1$$

$$2) \quad J_1 \ddot{\theta}_1 = K\bar{\Phi} i_a - \beta_1 \omega_1 - K_{12}(\theta_1 - \theta_2) - \beta_{12}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$3) \quad J_2 \ddot{\theta}_2 = -T_d - K_{12}(\theta_2 - \theta_1) - \beta_{12}(\omega_2 - \omega_1)$$

► Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ T_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

► Equazioni di stato:

$$\dot{x}_2 = d\theta_1/dt = \omega_1 = x_4 = f_2(t, x, u)$$

$$\dot{x}_3 = d\theta_2/dt = \omega_2 = x_5 = f_3(t, x, u)$$



Esempio di rappresentazione (8/12)

► Equazioni dinamiche:

$$1) \quad v_a = R_a i_a + L_a di_a/dt + K\bar{\Phi}\omega_1$$

$$2) \quad J_1 \ddot{\theta}_1 = K\bar{\Phi} i_a - \beta_1 \omega_1 - K_{12}(\theta_1 - \theta_2) - \beta_{12}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$3) \quad J_2 \ddot{\theta}_2 = -T_d - K_{12}(\theta_2 - \theta_1) - \beta_{12}(\omega_2 - \omega_1)$$

► Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ T_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

► Equazioni di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= d\omega_1/dt = \ddot{\theta}_1 = [K\bar{\Phi} i_a - \beta_1 \omega_1 - K_{12}(\theta_1 - \theta_2) - \beta_{12}(\omega_1 - \omega_2)]/J_1 = \\ &= \frac{K\bar{\Phi}}{J_1} x_1 - \frac{K_{12}}{J_1} x_2 + \frac{K_{12}}{J_1} x_3 - \frac{\beta_1 + \beta_{12}}{J_1} x_4 + \frac{\beta_{12}}{J_1} x_5 = f_4(t, x, u) \end{aligned}$$



Esempio di rappresentazione (9/12)

► Equazioni dinamiche:

$$1) \quad v_a = R_a i_a + L_a di_a/dt + K\bar{\Phi}\omega_1$$

$$2) \quad J_1 \ddot{\theta}_1 = K\bar{\Phi} i_a - \beta_1 \omega_1 - K_{12}(\theta_1 - \theta_2) - \beta_{12}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$3) \quad J_2 \ddot{\theta}_2 = -T_d - K_{12}(\theta_2 - \theta_1) - \beta_{12}(\omega_2 - \omega_1)$$

► Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ T_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

► Equazioni di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_5 = d\omega_2/dt = \ddot{\theta}_2 &= [-T_d - K_{12}(\theta_2 - \theta_1) - \beta_{12}(\omega_2 - \omega_1)]/J_2 = \\ &= \frac{K_{12}}{J_2}x_2 - \frac{K_{12}}{J_2}x_3 + \frac{\beta_{12}}{J_2}x_4 - \frac{\beta_{12}}{J_2}x_5 - \frac{u_2}{J_2} = f_5(t, x, u) \end{aligned}$$



Esempio di rappresentazione (10/12)

► Equazioni dinamiche:

$$1) \quad v_a = R_a i_a + L_a di_a/dt + K\bar{\Phi}\omega_1$$

$$2) \quad J_1 \ddot{\theta}_1 = K\bar{\Phi} i_a - \beta_1 \omega_1 - K_{12}(\theta_1 - \theta_2) - \beta_{12}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$3) \quad J_2 \ddot{\theta}_2 = -T_d - K_{12}(\theta_2 - \theta_1) - \beta_{12}(\omega_2 - \omega_1)$$

► Variabili di stato e di ingresso:

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} v_a(t) \\ T_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

► Equazione di uscita:

$$y = \theta_2 = x_3 = g(t, x, u)$$



Esempio di rappresentazione (11/12)

- Equaz. di stato:
- $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{K\bar{\Phi}}{L_a} x_4 + \frac{1}{L_a} u_1 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = x_5 \\ \dot{x}_4 = \frac{K\bar{\Phi}}{J_1} x_1 - \frac{K_{12}}{J_1} x_2 + \frac{K_{12}}{J_1} x_3 - \frac{\beta_1 + \beta_{12}}{J_1} x_4 + \frac{\beta_{12}}{J_1} x_5 \\ \dot{x}_5 = \frac{K_{12}}{J_2} x_2 - \frac{K_{12}}{J_2} x_3 + \frac{\beta_{12}}{J_2} x_4 - \frac{\beta_{12}}{J_2} x_5 - \frac{1}{J_2} u_2 \end{cases}$$
- Equaz. di uscita: $y = x_3$
- Se $J_1, J_2, K_{12}, \beta_1, \beta_{12}, R_a, L_a, K$ e $\bar{\Phi}$ sono costanti \Rightarrow il sistema è LTI \Rightarrow ha come rappresentazione di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$



Esempio di rappresentazione (12/12)

- Se $J_1, J_2, K_{12}, \beta_1, \beta_{12}, R_a, L_a, K$ e $\bar{\Phi}$ sono costanti \Rightarrow il sistema è LTI \Rightarrow ha come rappresentazione di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & 0 & -\frac{K\bar{\Phi}}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K\bar{\Phi}}{J_1} & -\frac{K_{12}}{J_1} & \frac{K_{12}}{J_1} & -\frac{\beta_1 + \beta_{12}}{J_1} & \frac{\beta_{12}}{J_1} \\ 0 & \frac{K_{12}}{J_2} & -\frac{K_{12}}{J_2} & \frac{\beta_{12}}{J_2} & -\frac{\beta_{12}}{J_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_2} \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0], D = [0 \ 0]$$