

01AYS - FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Trasformata unilatera di Laplace

proff. Marina Indri e Michele Taragna

Dip. di Automatica e Informatica

Politecnico di Torino

Anno Accademico 2001/2002

Versione 1.1

Definizione di Trasformata unilatera di Laplace \mathcal{L}

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \doteq \int_{0_-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = F(s), \quad s \in \mathbb{C}; \quad \underset{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}{f(t)} \xrightleftharpoons[\mathcal{L}^{-1}]{\mathcal{L}} \underset{\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}}{F(s)}$$

Proprietà fondamentali della Trasformata unilatera di Laplace

Proprietà	Tempo t	Frequenza s
Linearità	$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$	$k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$
Amplificazione	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$
Traslazione nel tempo	$f(t - \tau)$	$e^{-\tau s} F(s)$
Traslazione nella frequenza	$e^{at} f(t)$	$F(s - a)$
Derivazione	$\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt}$	$sF(s) - f(t = 0_-)$
Doppia derivazione	$\ddot{f}(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$s^2 F(s) - s f(t = 0_-) - \dot{f}(t = 0_-)$
Integrazione	$\int_{0_-}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
Convoluzione	$f(t) * g(t)$	$F(s) \cdot G(s)$
Teorema del valore iniziale	$f(t = 0_+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$
Teorema del valore finale	$f(t \rightarrow \infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$

Tabella delle principali Trasformate unilatera di Laplace

	$f(t), t \geq 0_-$	$F(s), s \in \mathbf{C}$
impulso unitario	$\delta(t)$	1
gradino unitario	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$
segnale polinomiale o canonico	$\frac{t^k}{k!}, k \geq 0$	$\frac{1}{s^{k+1}}$
esponenziale associato al polo semplice p di $F(s)$	$e^{pt}, p \in \mathbf{C}$	$\frac{1}{s-p}$
esponenziale associato al polo multiplo p di $F(s)$	$\frac{t^k}{k!} e^{pt}, k > 0, p \in \mathbf{C}$	$\frac{1}{(s-p)^{k+1}}$
	$\sin(\omega_0 t), \omega_0 \in \mathbf{R}$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
	$\cos(\omega_0 t), \omega_0 \in \mathbf{R}$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
esponenziale di matrice	$e^{At}, A \in \mathbf{R}^{n \times n}$	$(sI_n - A)^{-1}$

Decomposizione in fratti semplici di funzioni razionali fratte

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)/a_n}{D(s)/a_n} = \\
 &= \frac{N'(s)}{D'(s)} = \frac{N'(s)}{s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + \dots + a'_1 s + a'_0} = \\
 &= \frac{N'(s)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{N'(s)}{\prod_{i=1}^{n'} (s - p_i)^{\mu_i}} = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{k=1}^{\mu_i} \underbrace{\frac{R_{ik}}{(s - p_i)^k}}_{\text{fratto semplice}}
 \end{aligned}$$

$N(s), D(s)$: polinomi in s , di grado m ed n rispettivamente ($m < n$)

n : numero di radici di $D(s)$ e $D'(s)$ = numero di poli di $F(s)$

n' : numero di radici distinte di $D(s)$ e $D'(s)$ =
numero di poli non coincidenti di $F(s)$

p_i : i -esima radice di $D(s)$ e $D'(s) = i$ -esimo polo di $F(s)$

μ_i : molteplicità dell' i -esimo polo di $F(s)$

R_{ik} : k -esimo residuo associato a p_i mediante il fratto semplice $\frac{R_{ik}}{(s - p_i)^k}$

$$R_{ik} = \lim_{s \rightarrow p_i} \frac{1}{(\mu_i - k)!} \frac{\partial^{\mu_i - k}}{\partial s^{\mu_i - k}} [(s - p_i)^{\mu_i} F(s)], \quad 1 \leq k \leq \mu_i$$

Se p_i è un polo semplice, con $\mu_i = 1$, allora ha associato soltanto il fratto semplice $\frac{R_i}{s - p_i}$, dove

$$R_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i) F(s)$$

Antitrasformata unilatera di Laplace di funzioni razionali fratte

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{N(s)}{D(s)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n'} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k} \right\} = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{k=1}^{\mu_i} \frac{R_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{p_i t} \varepsilon(t)$$

Se $F(s)$ ha un polo complesso $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ con molteplicità μ_i , allora $F(s)$ presenta anche il polo complesso $p_l = p_i^* = \sigma_i - j\omega_i$ con molteplicità $\mu_l = \mu_i$. In tal caso, è opportuno antitrasformare a coppie i fratti semplici di $F(s)$ associati a p_i e p_l , poiché $R_{lk} = R_{ik}^*$ e quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k} + \frac{R_{lk}}{(s-p_l)^k} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k} + \frac{R_{ik}^*}{(s-p_i^*)^k} \right\} = \\ &= \frac{2 |R_{ik}|}{(k-1)!} t^{k-1} e^{\sigma_i t} \sin \left(\omega_i t + \angle R_{ik} + \frac{\pi}{2} \right) \varepsilon(t) \end{aligned}$$

con $\angle R_{ik} = \arctan \left(\frac{\Im(R_{ik})}{\Re(R_{ik})} \right)$

Esercizi

1) Calcolare la trasformata unilatera di Laplace di

$$f(t) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) e^{pt} + b \sin(\omega_1 t) + c \cos(\omega_2 t)$$

$$\text{Soluzione: } F(s) = \frac{a_0}{s-p} + \frac{a_1}{(s-p)^2} + \frac{2a_2}{(s-p)^3} + \frac{6a_3}{(s-p)^4} + b \frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2} + c \frac{s}{s^2 + \omega_2^2}$$

2) Calcolare l'antitrasformata unilatera di Laplace di

$$F(s) = \frac{(s+2)(s-5)}{(s+1)(s-3)(s+7)}$$

$$\text{Soluzione: } f(t) = [0.25e^{-t} - 0.25e^{3t} + e^{-7t}] \varepsilon(t)$$

3) Calcolare l'antitrasformata unilatera di Laplace di

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$\text{Soluzione: } f(t) = [-e^{-t} + 2te^{-t} + e^{-2t}] \varepsilon(t)$$