

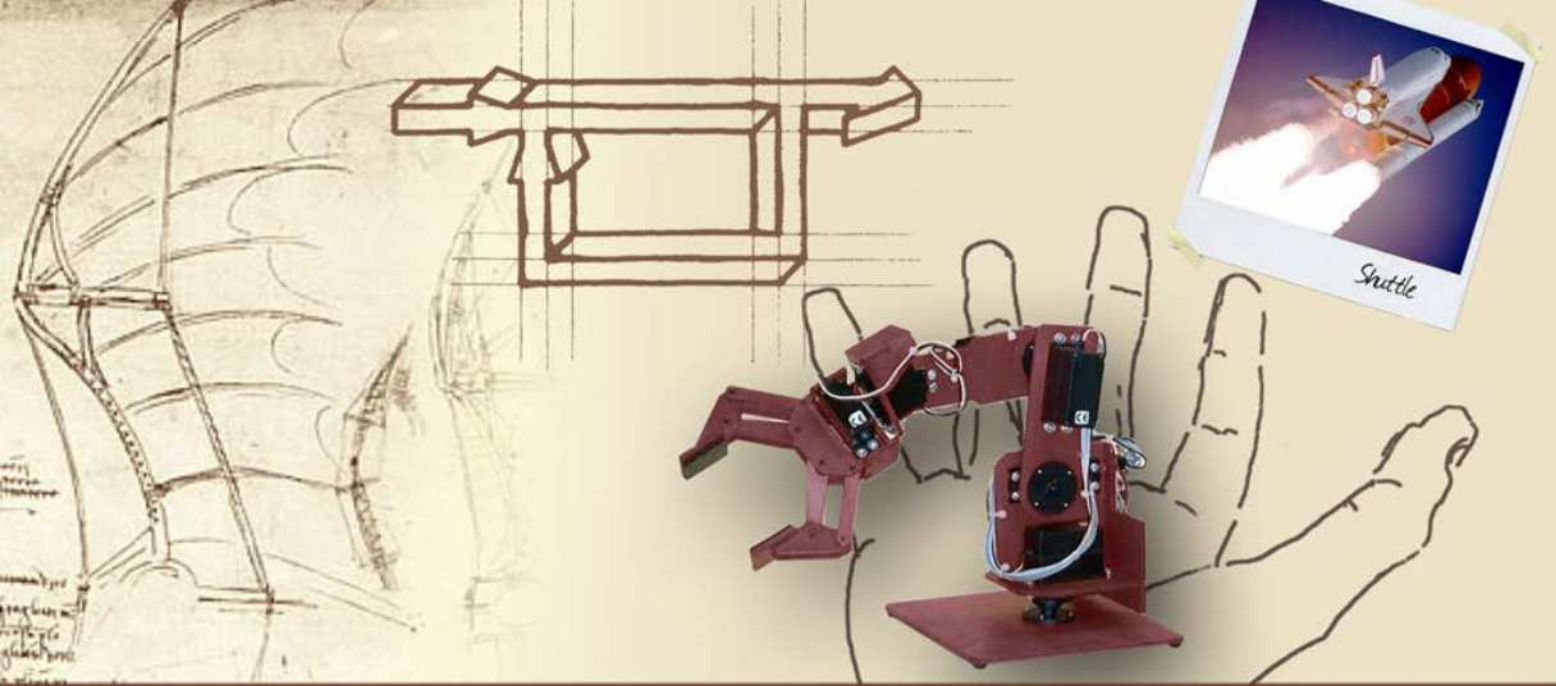
# Stabilità dei sistemi di controllo in retroazione

**Margini di stabilità**



# Margini di stabilità

- Indicatori di robustezza della stabilità
- Margine di guadagno
- Margine di fase
- Stabilità regolare e marginale ed estensioni delle definizioni dei margini
- $M_r$  come margine di stabilità: i luoghi a modulo (e a fase) costante

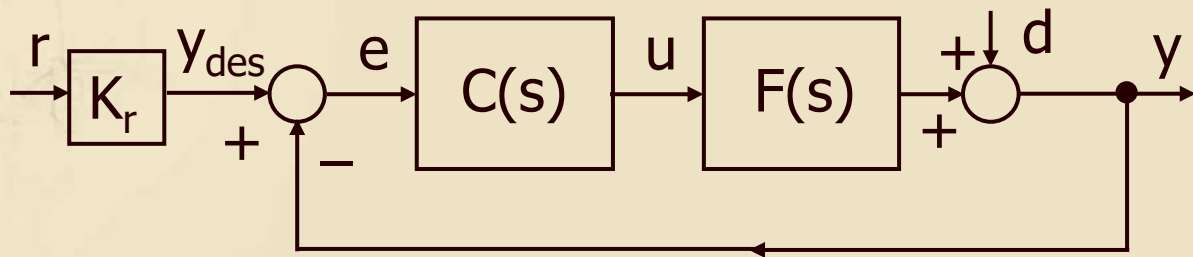


## **Margini di stabilità**

**Indicatori di robustezza  
della stabilità**

## Stabilità e stabilità robusta (1/3)

- Il criterio di Nyquist permette di valutare l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa  $W(s)$  a partire dalla funzione d'anello  $G_a(s)$



- L'analisi della stabilità e l'effettiva correttezza dei risultati si basano sull'ipotesi che il **sistema** sia **in condizioni nominali**, cioè che la **conoscenza** di  $G_a(s)$  sia **esatta**



## Stabilità e stabilità robusta (2/3)

- Nella pratica si hanno sempre **discrepanze fra** il comportamento del **sistema vero e** quello del **modello** utilizzato per rappresentarlo

Variazioni dei parametri della  $F(s)$ ; scarsa accuratezza del modello del processo



Variazioni dei parametri della  $C(s)$ ; problemi nella realizzazione pratica del compensatore



**Variazioni della funzione d'anello  $G_a(s)$**



## Stabilità e stabilità robusta (3/3)

- È fondamentale garantire il mantenimento dell'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa anche in condizioni perturbate, a causa di variazioni di  $G_a(s)$  o di incertezze nella sua conoscenza: si parla in tal caso di **stabilità robusta**
- Per valutare il **grado di robustezza** del sistema a fronte di variazioni del suo modello nominale è necessario introdurre opportuni **indicatori di robustezza**



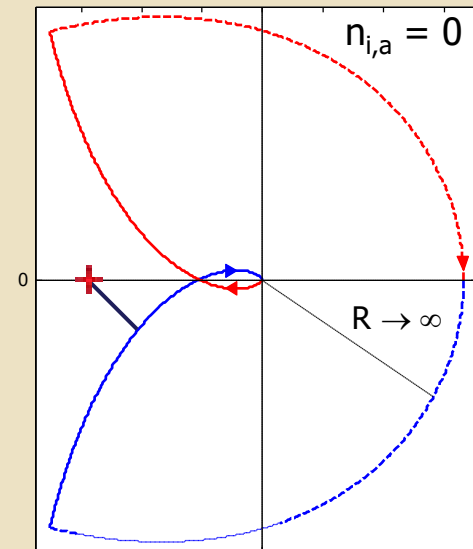


## Indicatori di robustezza (1/3)

- Gli indicatori di robustezza devono permettere di **quantificare l'ampiezza delle massime perturbazioni** sul modello che garantiscono il mantenimento dell'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa
- Intuitivamente la robustezza è tanto maggiore quanto più il sistema è "lontano" dalla condizione per cui si avrebbe il passaggio dalla stabilità all'instabilità

## Indicatori di robustezza (2/3)

- Dall'applicazione del criterio di Nyquist possiamo intuire un modo "geometrico" per caratterizzare il grado di robustezza della stabilità di un sistema: la **distanza** del diagramma polare di  $G_a(j\omega)$  **dal punto critico** di Nyquist
- Se la distanza è elevata, limitate variazioni di  $G_a(s)$  non sono sufficienti a far sì che il diagramma scavalchi il punto critico, rendendo il sistema instabile ( $N=2 \longrightarrow n_{i,c}=2$ )



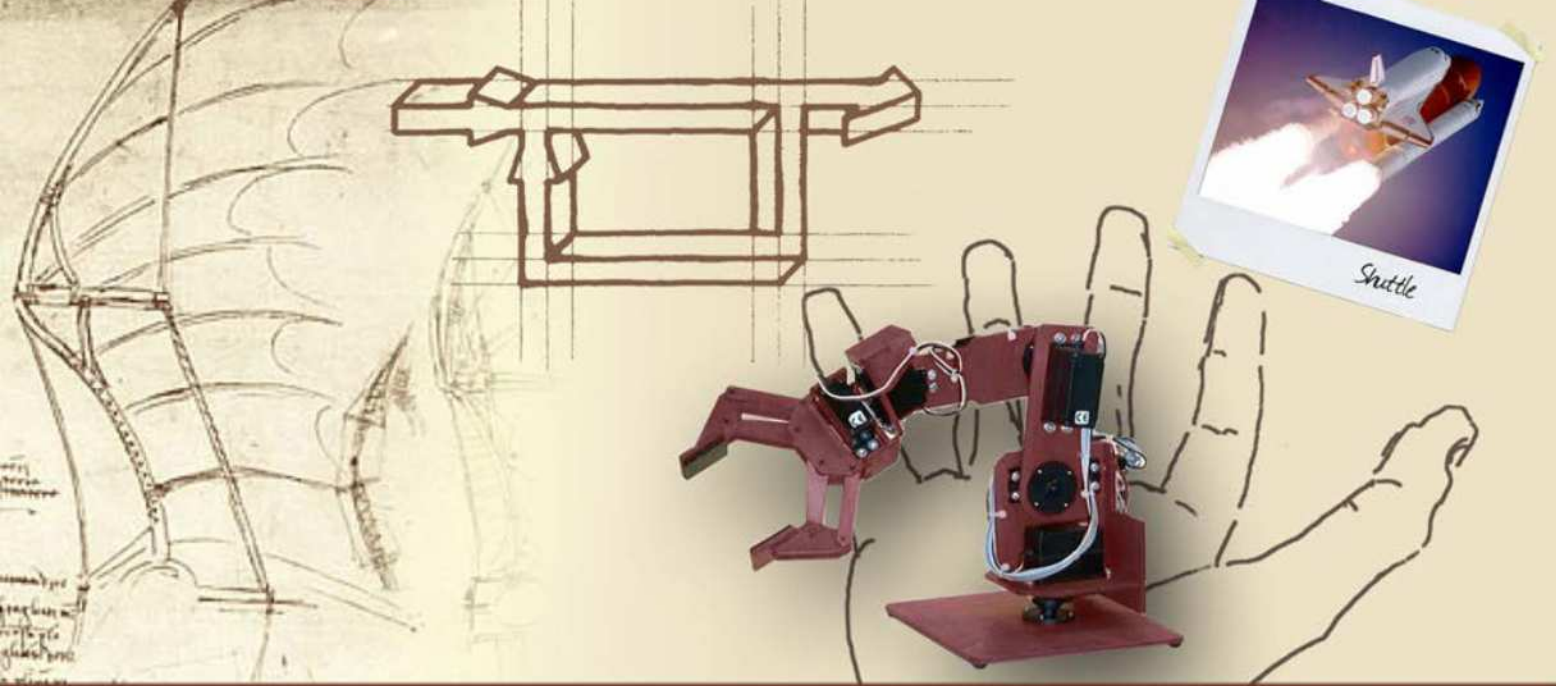




## Indicatori di robustezza (3/3)

- La distanza minima del diagramma polare di  $G_a(j\omega)$  dal punto critico di Nyquist, detta **margin di stabilità vettoriale**, è un buon indicatore di robustezza ma **non è di facile lettura**
- Risulta opportuno introdurre come indicatori di robustezza i **margini di guadagno e di fase** che, tenendo conto separatamente degli effetti di variazioni del modulo e della fase della fdt d'anello, possono essere valutati agevolmente sia dal diagramma di Nyquist, sia dai diagrammi di Bode e di Nichols





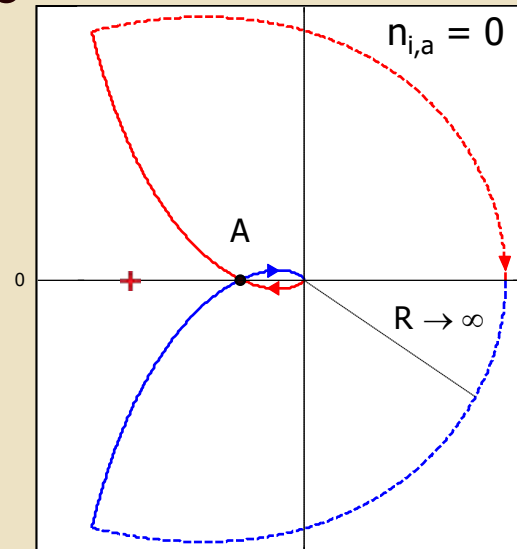
**Margini di stabilità**

**Margine di guadagno**

## Margine di guadagno (1/4)

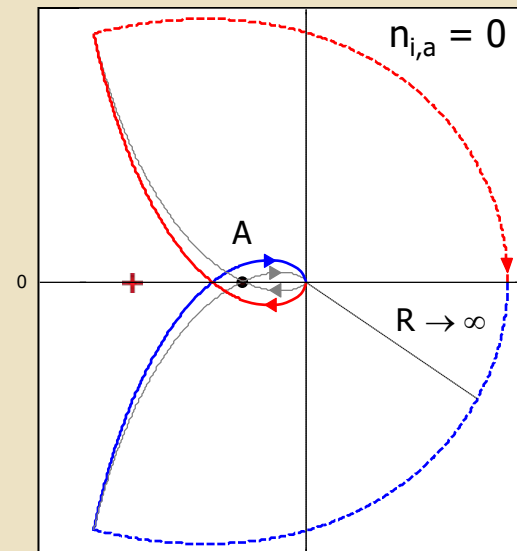
- Sia  $G_a(j\omega) = K_c G_{a,f}(j\omega)$ , con  $G_{a,f}(j\omega)$  a guadagno positivo, priva di poli a parte reale positiva, e sia il suo diagramma polare tale da attraversare una sola volta il semiasse reale negativo in un punto A alla destra del punto critico

Per  $K_c = 1$ , il sistema in catena chiusa risulta asintoticamente stabile ( $N=0 \rightarrow n_{i,c} = 0$ )



## Margine di guadagno (2/4)

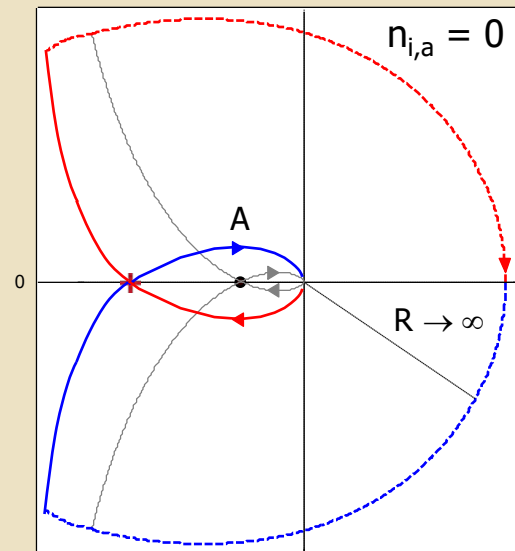
- Aumentando  $K_c$ , il modulo della funzione d'anello aumenta ed il punto di attraversamento del semiasse reale negativo si sposta verso sinistra



## Margine di guadagno (2/4)

- Aumentando  $K_c$ , il modulo della funzione d'anello aumenta ed il punto di attraversamento del semiasse reale negativo si sposta verso sinistra

Il sistema in catena chiusa continua ad essere asintoticamente stabile fino a quando il punto di attraversamento non viene a coincidere con il punto critico



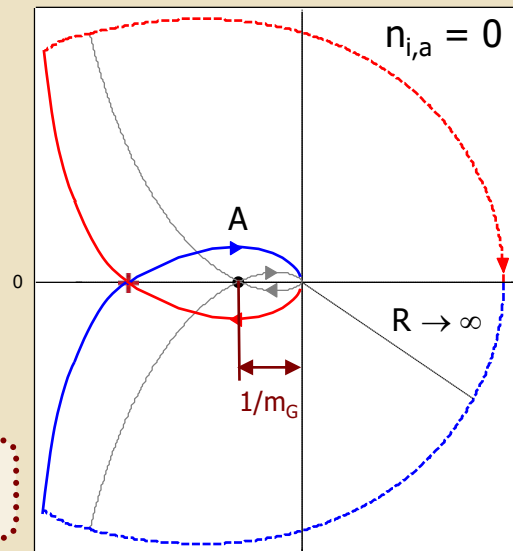
## Margine di guadagno (3/4)

- Il valore di  $K_c$  ( $m_G$ ) per cui la funzione d'anello passa proprio per il punto critico rappresenta il fattore moltiplicativo massimo che non deve essere raggiunto per preservare l'asintotica stabilità in catena chiusa

Tale valore è detto  
**margin di guadagno**

$$m_G = \frac{1}{|x_A|}$$

$x_A$  = ascissa di A





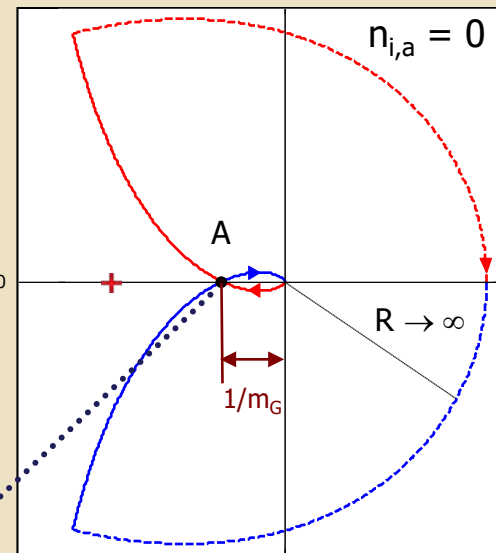
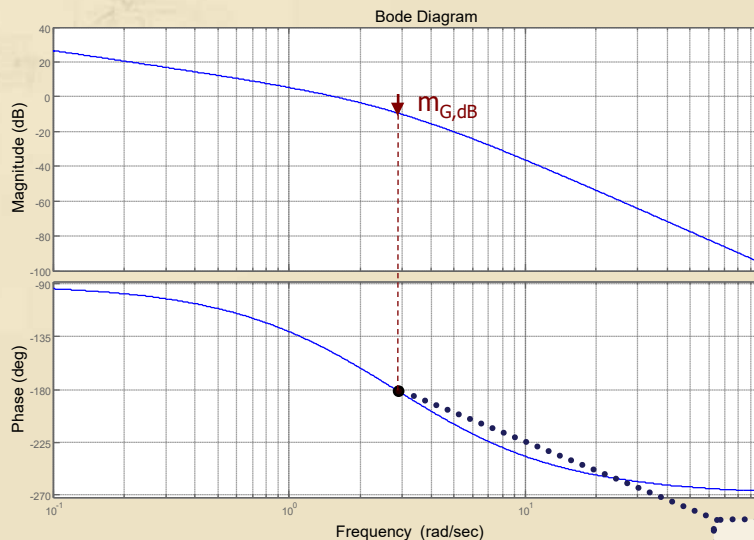


## Margine di guadagno (4/4)

- Il **margine di guadagno** è un **indicatore del grado di robustezza** della stabilità del sistema in catena chiusa **a fronte di possibili incertezze o variazioni del guadagno** della funzione d'anello

# Lettura di $m_G$ sui DdB (1/2)

- Il margine di guadagno può essere letto agevolmente sui diagrammi di Bode di  $G_a(j\omega)$ , osservando che il punto A viene raggiunto alla pulsazione ( $\omega_\pi$ ) alla quale  $\varphi_{G_a}(j\omega_\pi) = -180^\circ$



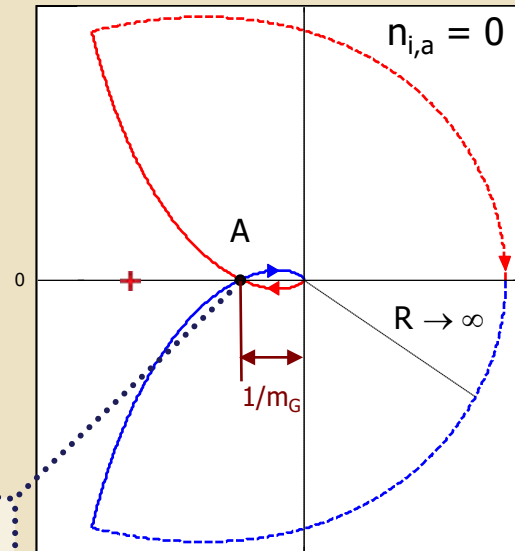
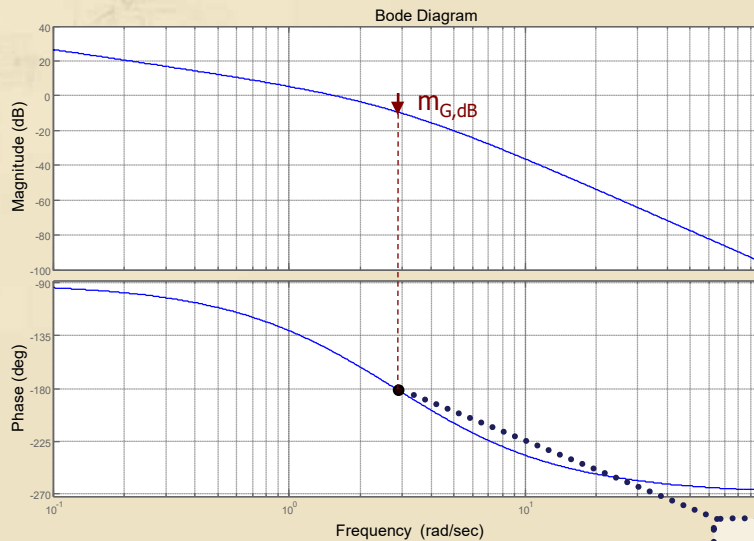
# Lettura di $m_G$ sui DdB (2/2)

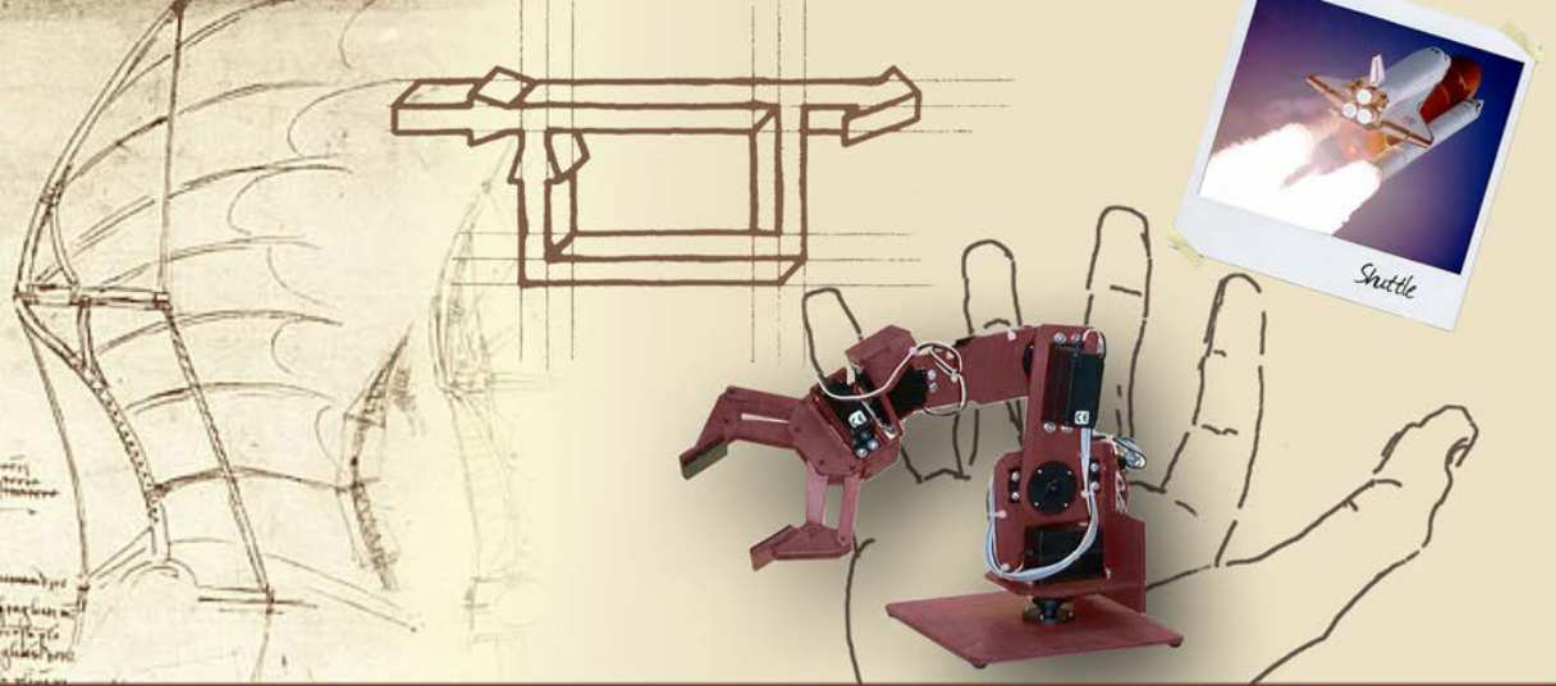
➤ Sui DdB:

$$m_{G,dB} = -|G_a(j\omega_\pi)|_{dB}$$

➤ Sul DdN:

$$m_G = \frac{1}{|x_A|}$$





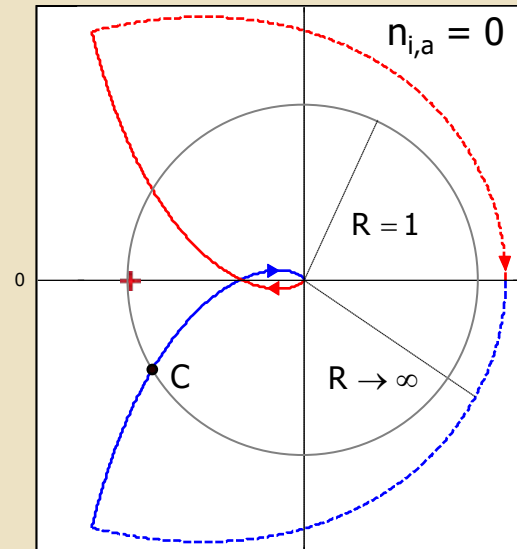
**Margini di stabilità**

**Margine di fase**

## Margine di fase (1/4)

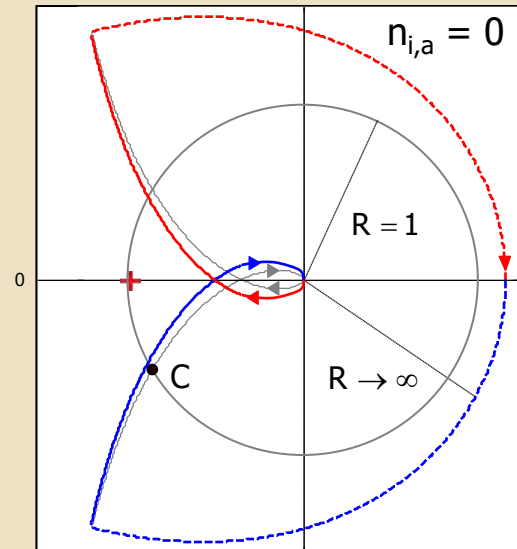
- Sia  $G_a(j\omega)$  a guadagno positivo, priva di poli a parte reale positiva, e sia il suo diagramma polare tale da attraversare una sola volta la circonferenza di raggio unitario, centrata nell'origine, in un punto C
- Sia  $\varphi_{G_a}(j\omega_c) > -180^\circ$  ove  $\omega_c$  è la pulsazione relativa al punto C (**N.B.**  $|G_a(j\omega_c)| = 1$ )

Il sistema in catena chiusa è asintoticamente stabile



## Margine di fase (2/4)

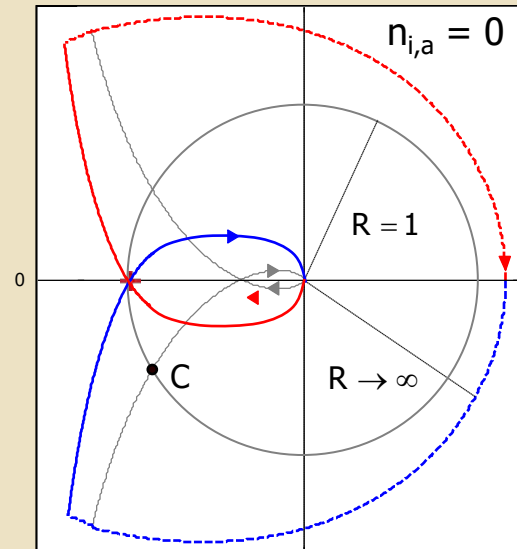
- Una **perdita di fase** alla pulsazione  $\omega_c$  (ad esempio a causa della presenza di un ritardo nell'anello di retroazione) fa spostare il punto di intersezione con la circonferenza unitaria verso il punto critico di Nyquist





## Margine di fase (2/4)

- Una **perdita di fase** alla pulsazione  $\omega_c$  (ad esempio a causa della presenza di un ritardo nell'anello di retroazione) fa spostare il punto di intersezione con la circonferenza unitaria verso il punto critico di Nyquist
- Il sistema in catena chiusa rimane asintoticamente stabile fino a quando la perdita di fase è tale da portare il punto di intersezione a coincidere con il punto critico

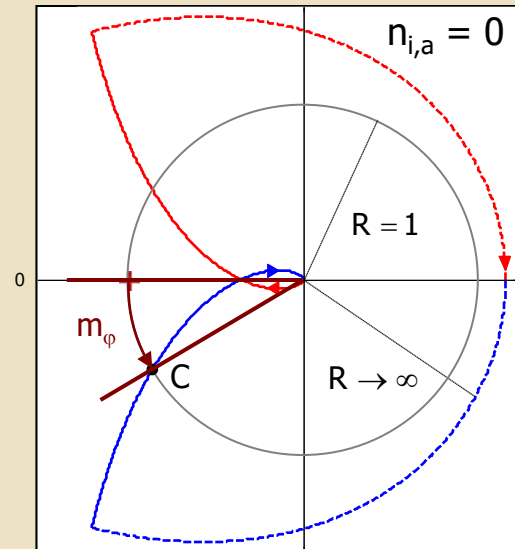


## Margine di fase (3/4)

- Tale perdita di fase (alla pulsazione  $\omega_c$ ) costituisce il **margine di fase** ( $m_\varphi$ )

$$m_\varphi \doteq 180^\circ + \angle G_a(j\omega_c)$$

- $m_\varphi$  indica la **massima perdita di fase** sopportabile in  $\omega_c$  **senza perdere l'asintotica stabilità in catena chiusa**



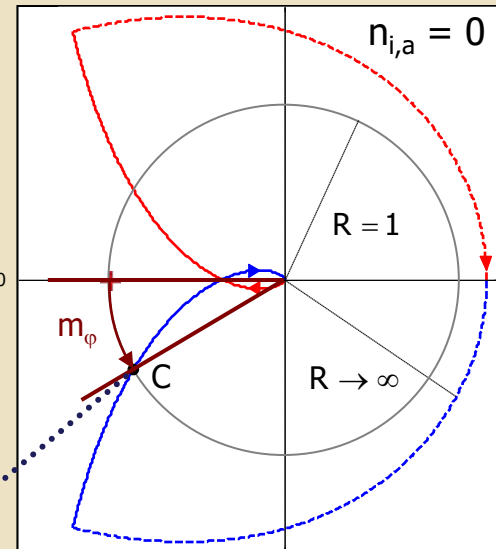
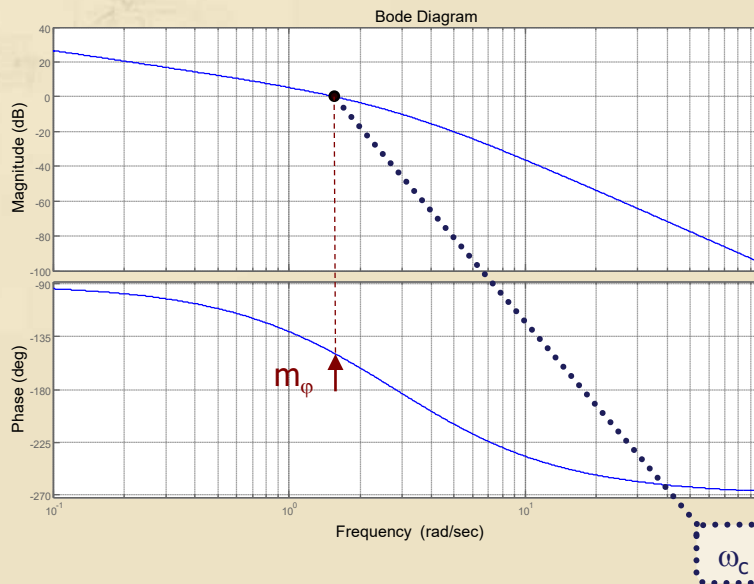


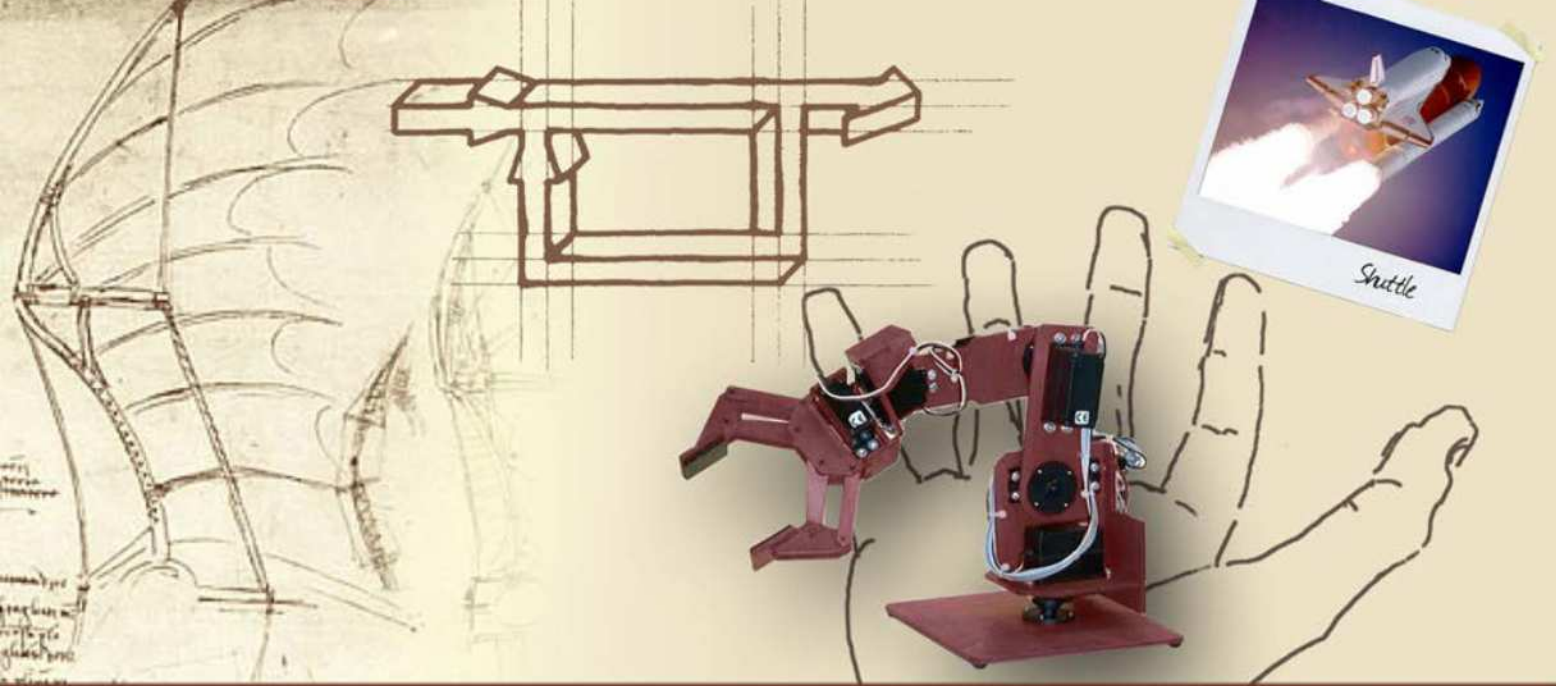
## Margine di fase (4/4)

- Il **margine di fase** è un **indicatore del grado di robustezza** della stabilità del sistema in catena chiusa a **fronte di possibili incertezze o variazioni della fase** della funzione d'anello alla pulsazione  $\omega_c$  o **a fronte della presenza di eventuali ritardi di tempo**
- La pulsazione  $\omega_c$  è detta **pulsazione critica** oppure anche **pulsazione di cross-over** (o **di taglio**), perché è la pulsazione alla quale il diagramma di Bode del modulo di  $G_a(j\omega)$  attraversa l'asse a 0 dB (essendo  $|G_a(j\omega_c)| = 1$ )

# Lettura di $m_\phi$ sui DdB

- Tale osservazione permette di leggere agevolmente il margine di fase sui diagrammi di Bode di  $G_a(j\omega)$





## **Margini di stabilità**

**Stabilità regolare e marginale ed  
estensioni delle definizioni dei margini**



## Stabilità dalla valutazione dei margini (1/2)

- I **margini di stabilità** (di guadagno e di fase) sono stati definiti sotto l'ipotesi che la funzione d'anello godesse di particolari proprietà
- In tali casi la condizione di asintotica stabilità in catena chiusa equivale alla condizione di **positività dei margini letti sui diagrammi di Bode**

Per questi sistemi è possibile determinare l'asintotica stabilità in catena chiusa direttamente dalla lettura dei margini di guadagno e di fase sui diagrammi di Bode





## Stabilità dalla valutazione dei margini (2/2)

➤ È possibile affermare in particolare che se la funzione di anello  $G_a(s)$  soddisfa le seguenti proprietà:

- Ha guadagno positivo
- È a minima rotazione di fase
- Esiste una sola pulsazione per cui il modulo risulta unitario
- Esiste una sola pulsazione di valore finito per cui la sua fase vale  $-180^\circ$

Non ha singolarità a parte reale positiva

allora il sistema è asintoticamente stabile in catena chiusa se e solo se i **margini di guadagno e di fase sui DdB** sono **positivi**



## Sistemi a stabilità regolare

- In particolare, un sistema che risulti **asintoticamente stabile** in catena chiusa **per qualunque valore positivo del guadagno non superiore alla soglia massima determinata da  $m_G$**  è detto **a stabilità regolare**



## Estensioni delle definizioni dei margini (1/2)

- Se non tutte le condizioni prima elencate sono soddisfatte, è necessario
  - Applicare il criterio di Nyquist per studiare correttamente la stabilità in catena chiusa
  - “Estendere” i concetti di margini di guadagno e di fase in modo opportuno



## Estensioni delle definizioni dei margini (2/2)

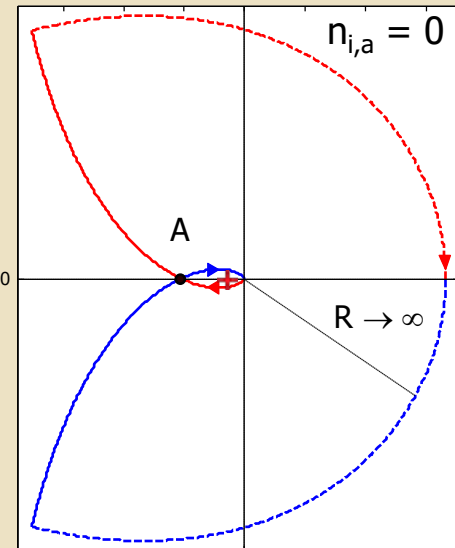
- I principali casi di interesse riguardano:
  - L'esistenza di più pulsazioni per cui la fase di  $G_a(s)$  vale  $-180^\circ$  ( $\Rightarrow$  il diagramma polare di  $G_a(s)$  attraversa più volte l'asse reale)
  - L'esistenza di più pulsazioni per cui il modulo di  $G_a(s)$  risulta unitario ( $\Rightarrow$  il diagramma polare di  $G_a(s)$  interseca più volte la circonferenza unitaria)
  - $G_a(s)$  è instabile (o, più in generale, non è a minima rotazione di fase)

## Attraversamenti multipli dell'asse reale (1/2)

- Nella definizione del margine di guadagno era stato ipotizzato che il diagramma polare di  $G_a(s)$  fosse tale da **attraversare una sola volta il semiasse reale negativo** in un punto A posto alla destra del punto critico

Ipotesi necessaria per l'asintotica stabilità in catena chiusa per  $G_a(s)$  a guadagno positivo con  $n_{i,a} = 0$

Se A fosse a sinistra, il diagramma polare scavalcherebbe il punto critico  
 $\Rightarrow N > 0 \Rightarrow n_{i,c} > 0$





## Attraversamenti multipli dell'asse reale (2/2)

- Che cosa succede se **il diagramma polare di  $G_a(s)$  è tale da attraversare più volte il semiasse reale negativo?**
  - Il sistema non è a stabilità regolare: è necessario applicare il criterio di Nyquist
  - Possono presentarsi casi diversi, a seconda dei valori di  $n_{i,a}$  e di  $N$  prima e dopo gli attraversamenti
  - Di particolare interesse sono i **sistemi a stabilità marginale (o condizionata)**, per i quali si può avere **instabilità sia per valori troppo elevati del guadagno sia per valori troppo piccoli**



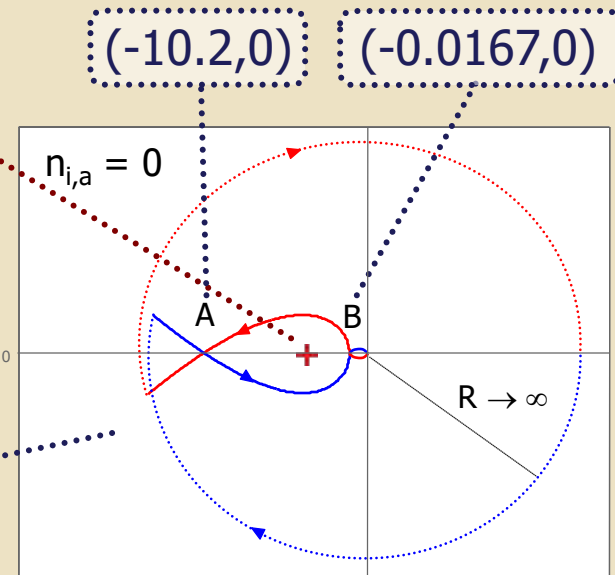
# Un sistema a stabilità marginale (1/3)

► Sia

$$G_a(s) = 10^6 K_c \frac{(s+2)(s+20)}{s^2(s+1)(s+200)(s+500)}$$

Per  $K_c = 1$  il sistema in catena chiusa è asintoticamente stabile:  $N = 0 \Rightarrow n_{i,c} = 0$

Diagramma  
per  $K_c = 1$



# Un sistema a stabilità marginale (1/3)

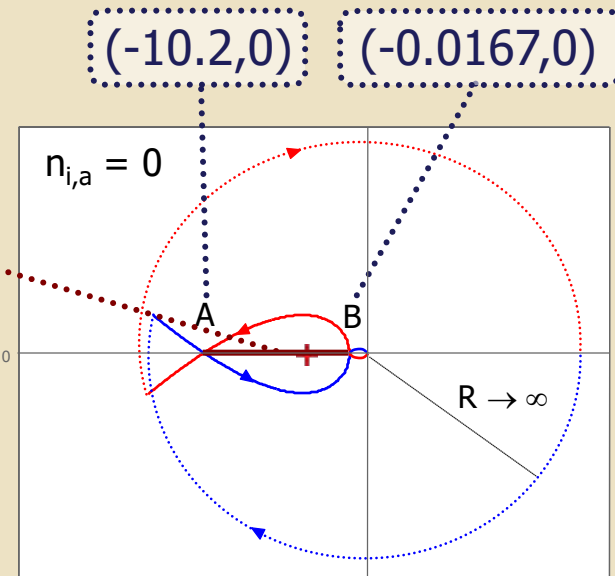
► Sia

$$G_a(s) = 10^6 K_c \frac{(s+2)(s+20)}{s^2(s+1)(s+200)(s+500)}$$

Il sistema in catena chiusa rimane asintoticamente stabile per tutti i valori di  $K_c$  per cui  $(-1/K_c, 0)$  risulta compreso fra A e B, cioè per  $0.098 < K_c < 59.9$

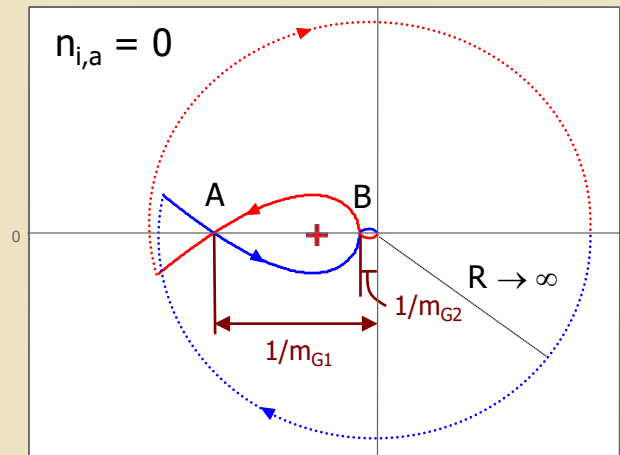
$m_{G1}$  "inferiore"  
(margine di attenuazione)

$m_{G2}$  "superiore"  
(margine di amplificazione)



## Un sistema a stabilità marginale (2/3)

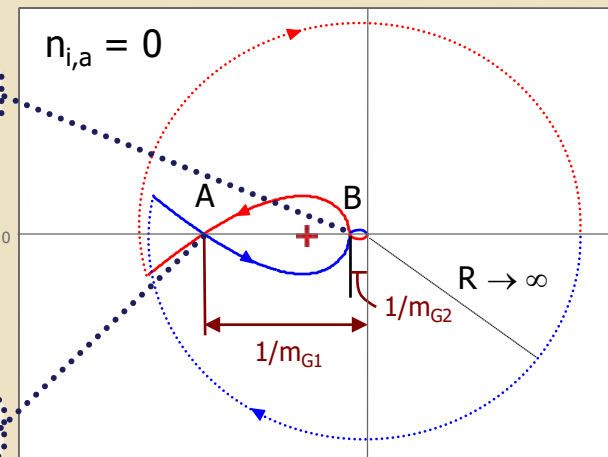
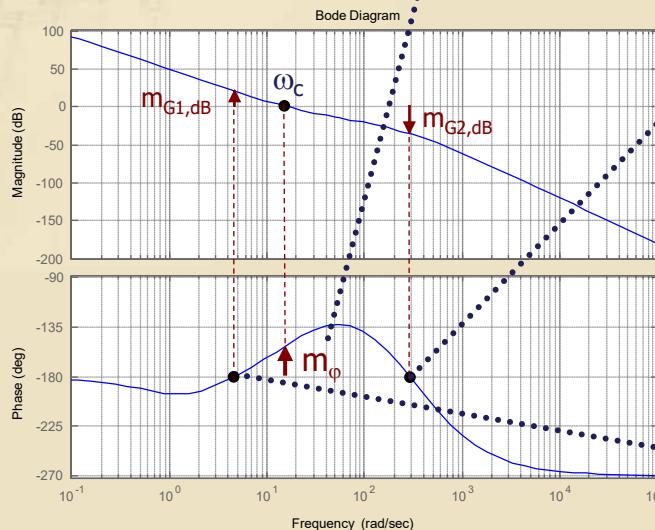
- L'esistenza di  $m_{G1}$  (non nullo) indica la necessità di garantire un guadagno minimo della fdt d'anello
- $m_{G2}$  è coerente con la precedente definizione di margine di guadagno



# Un sistema a stabilità marginale (3/3)

- I due margini di guadagno possono essere ritrovati facilmente sui diagrammi di Bode della funzione d'anello:

N.B.: Non ci sono ambiguità nella lettura di  $m_\varphi$ , che è **positivo** a conferma della stabilità del sistema in catena chiusa





## Molteplici punti a modulo unitario (1/6)

- Nella definizione del margine di fase era stato ipotizzato che il diagramma polare di  $G_a(j\omega)$  fosse tale da **intersecare una sola volta la circonferenza di raggio unitario**
- L'ipotesi non è soddisfatta se esistono più valori di  $\omega$  per cui il modulo di  $G_a(j\omega)$  è unitario
- Le principali conseguenze riguardano:
  - La necessità di individuare l'effettiva  $\omega_c$  a cui leggere  $m_\varphi$
  - La possibilità di avere due margini di fase, corrispondenti alla perdita di stabilità sia per una perdita sia per un aumento della fase



## Molteplici punti a modulo unitario (2/6)

- Per un sistema il cui diagramma polare interseca più volte la circonferenza unitaria in punti **a fase maggiore di  $-180^\circ$ , il margine di fase** (secondo la definizione precedentemente data di **massima perdita di fase** tollerabile senza andare in instabilità) deve essere letto **in corrispondenza del punto di intersezione più vicino all'asse reale**
- La pulsazione corrispondente a tale punto è l'effettiva pulsazione di cross-over

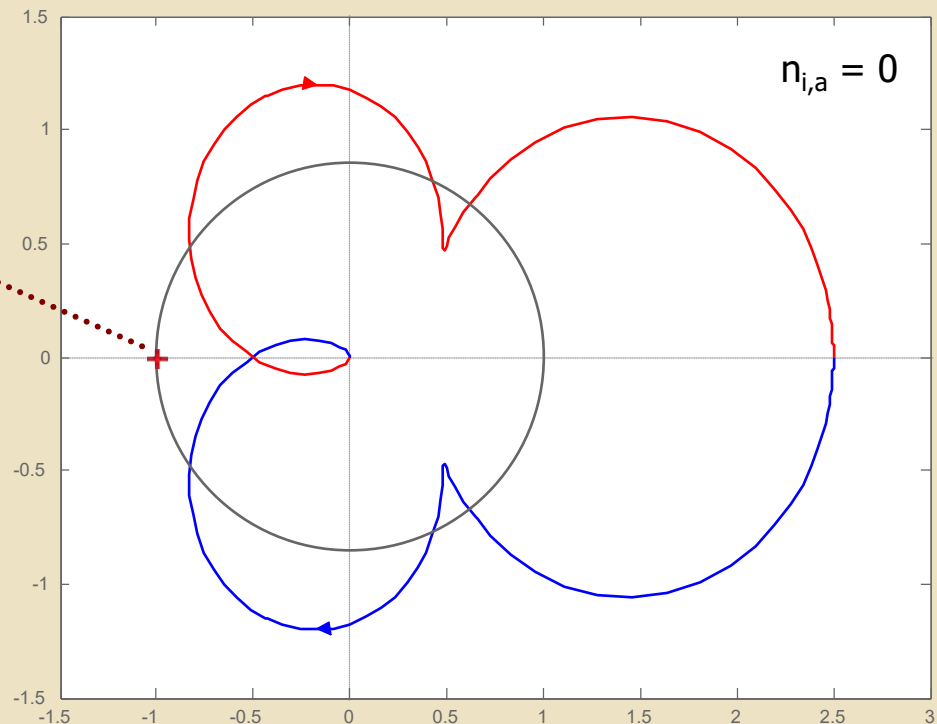


## Molteplici punti a modulo unitario (3/6)

► Esempio: 
$$G_a(s) = \frac{10000(s + 5)}{(s + 1)(s^2 + 8s + 400)(s + 50)}$$

Il sistema in  
catena chiusa è  
asintoticamente  
stabile:

$$N = 0 \Rightarrow n_{i,c} = 0$$



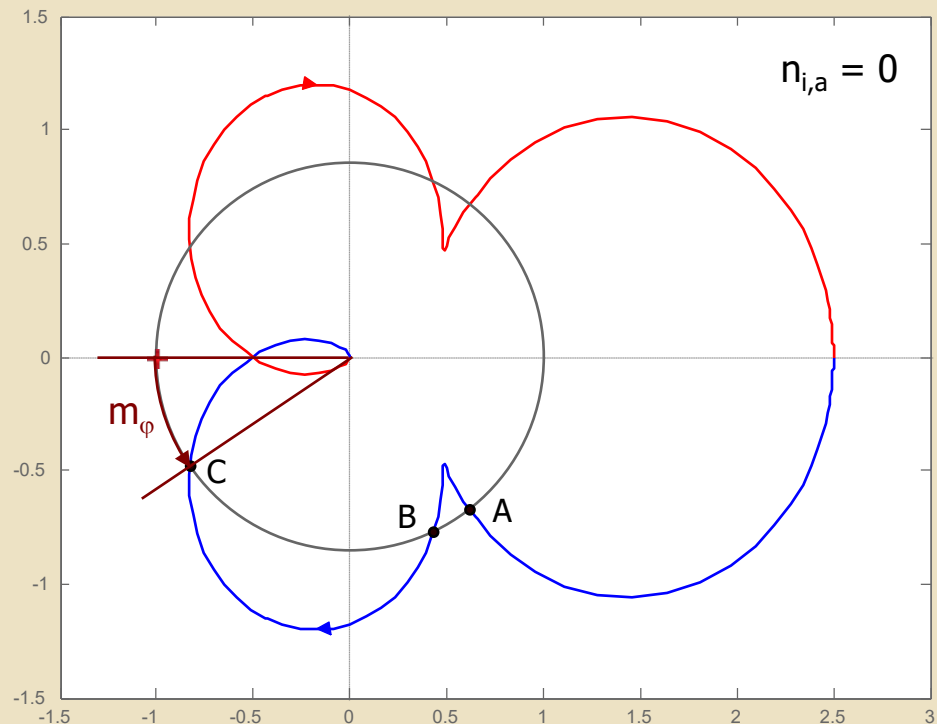
# Molteplici punti a modulo unitario (3/6)

➤ Esempio:

$$G_a(s) = \frac{10000(s + 5)}{(s + 1)(s^2 + 8s + 400)(s + 50)}$$

Tre punti di intersezione con la circonferenza unitaria (A, B, C) a fase  $> -180^\circ$

Il corretto margine di fase è leggibile in C:  $m_\varphi = 33.7^\circ$

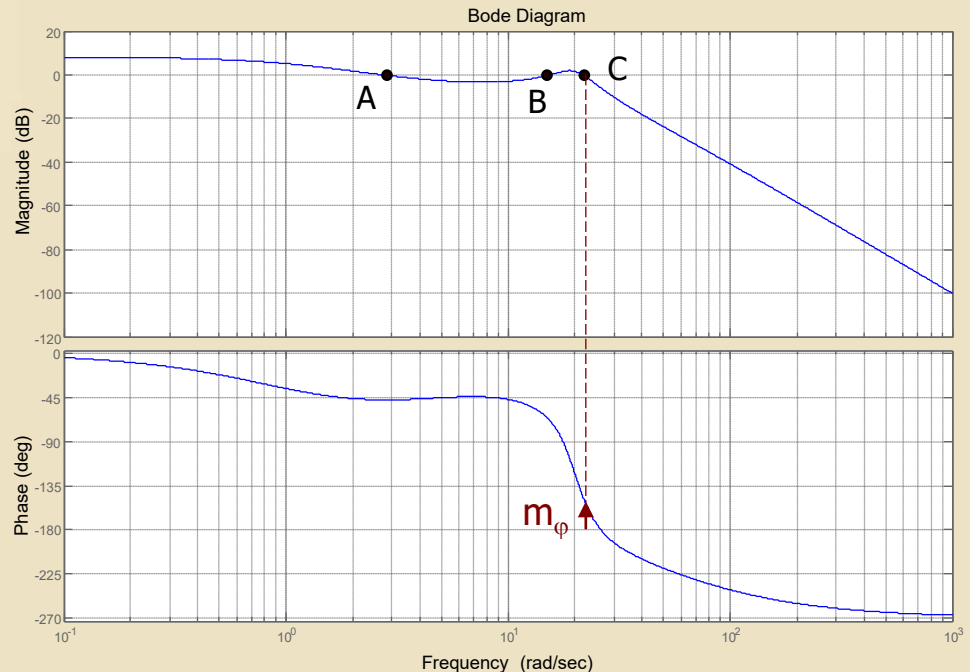


# Molteplici punti a modulo unitario (4/6)

► Esempio:

$$G_a(s) = \frac{10000(s + 5)}{(s + 1)(s^2 + 8s + 400)(s + 50)}$$

Sui DdB A, B, C  
sono i punti di  
attraversamento  
dell'asse a 0 dB



Si può leggere  
anche sui DdB il  
margine di fase  
in C:  $m_\phi = 33.7^\circ$



## Molteplici punti a modulo unitario (5/6)

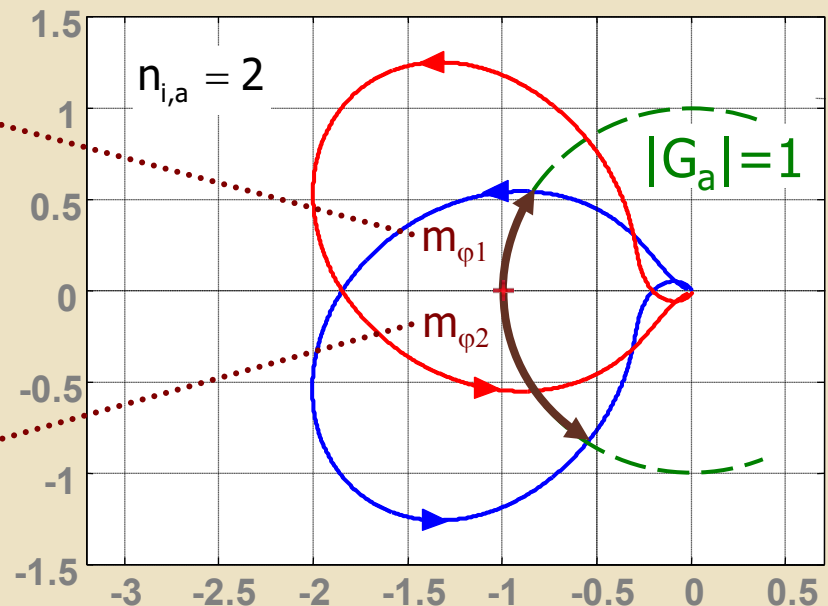
- Per un sistema il cui diagramma polare interseca più volte la circonferenza unitaria in punti **non tutti a fase maggiore di  $-180^\circ$** , si potrebbe avere **instabilità** in catena chiusa **sia per una perdita** (come nella definizione base di  $m_\varphi$ ) **sia per un eccessivo aumento di fase**
- In tale caso si possono definire **due margini di fase**, uno di perdita massima ed uno di aumento massimo di fase, ad indicare le massime variazioni di fase tollerabili mantenendo l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa

# Molteplici punti a modulo unitario (6/6)

- Un esempio di sistema con due margini di fase è dato da un **pendolo montato su di un carrello**, con opportuno controllore

Massimo  
**aumento** di fase

Massima  
**perdita** di fase





## $G_a(s)$ a non minima rotazione di fase

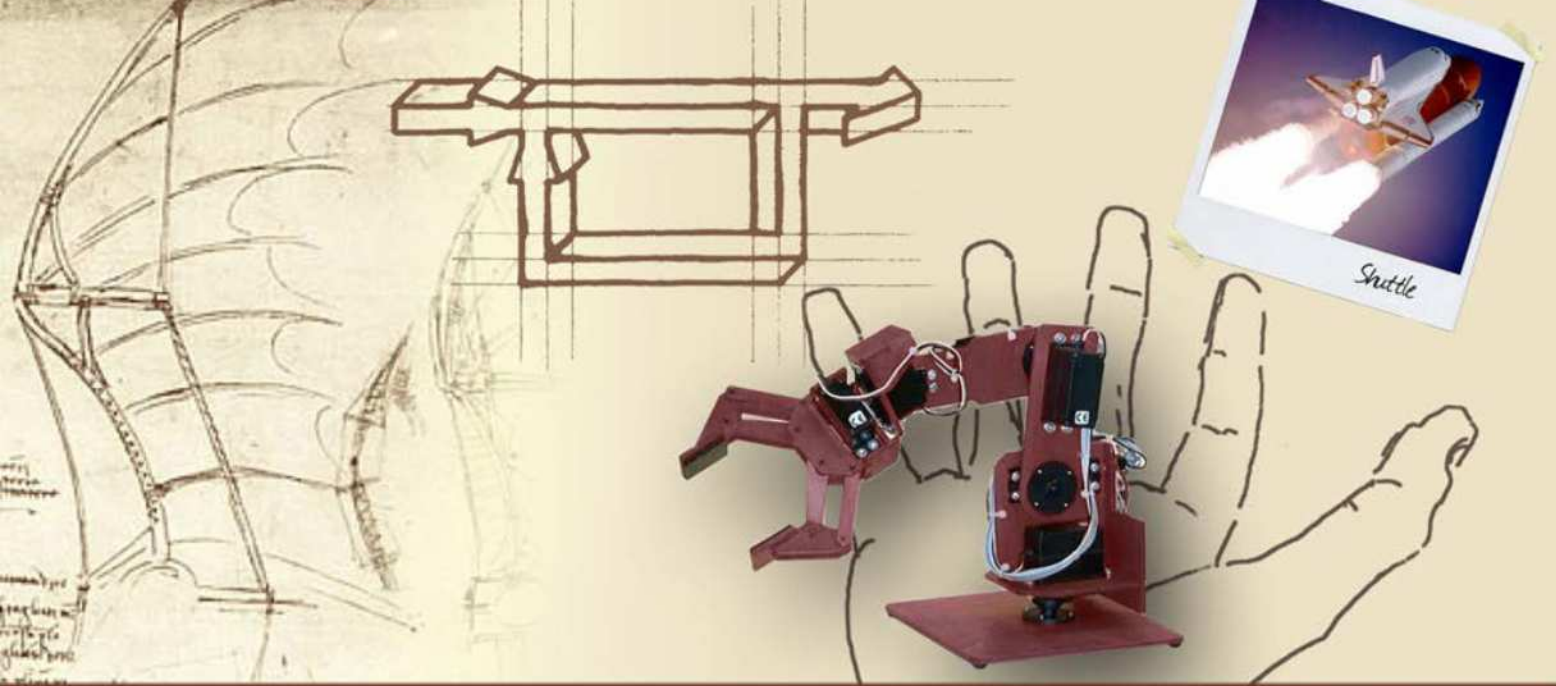
- Se  $G_a(s)$  ha **almeno una singolarità a parte reale positiva (sistema a non minima rotazione di fase)**, possono presentarsi diverse situazioni, fra cui:
  - Sistemi a stabilità marginale (ad es. il pendolo inverso stesso)
  - Sistemi **stabili solo per valori elevati del guadagno** ( $K_c > K_{c, \min}$ ) o **per valori negativi**
  - Sistemi con uno o due margini di fase (il pendolo)
- Per questi sistemi **è indispensabile applicare il criterio di Nyquist** per analizzarne la stabilità e definire opportunamente i margini



## Lettura dei margini di stabilità su Matlab

- Il comando **margin** (per la sintassi consultare il relativo help o il manuale breve fornito a parte) applicato alla fdt d'anello fornisce il risultato della **lettura dei margini di guadagno e di fase sui diagrammi di Bode**
- **Attenzione:** l'informazione è sicuramente corretta solo per i sistemi per i quali è possibile dedurre la stabilità in catena chiusa dalla sola lettura dei margini sui DdB, senza la necessità di svolgere un'analisi completa della stabilità con il criterio di Nyquist





## Margini di stabilità

$M_r$  come margine di stabilità: i luoghi a modulo (e a fase) costante



## Legami fra $M_r$ e stabilità (1/4)

- È possibile ricavare **indicatori di robustezza della stabilità "indiretti"** a partire da caratteristiche della fdt in catena chiusa, in particolare dalla presenza di un picco di risonanza  $M_r$  di ampiezza "significativa"

$$M_r = W_r / |W(0)|$$

ove  $W_r = \max \{|W(j\omega)|\} \rightarrow$  valore del modulo della fdt in catena chiusa alla (pulsazione di) risonanza



## Legami fra $M_r$ e stabilità (2/4)

- Se  $W(j\omega)$  presenta una risonanza “evidente” in banda ( $W_r > |W(0)|$ ) è lecito pensare alla presenza di almeno due poli complessi coniugati (dominanti) a smorzamento “piccolo”

Per una coppia di poli complessi coniugati si ha:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \text{per} \quad 0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$$

Valori tipici:  $1 \text{ dB} < M_r < 5 \text{ dB} \leftrightarrow 0.5 > \zeta > 0.3$



## Legami fra $M_r$ e stabilità (3/4)

- Se  $W(j\omega)$  presenta una risonanza “evidente” in banda ( $W_r > |W(0)|$ ) è lecito pensare alla presenza di almeno due poli complessi coniugati (dominanti) a smorzamento “piccolo”
- Più piccolo è tale smorzamento più la coppia di poli è vicina all’asse immaginario, cioè al semipiano di destra

**Quanto più è significativa l’entità del picco di risonanza tanto più il sistema è “vicino” alla condizione di instabilità**



## Legami fra $M_r$ e stabilità (4/4)

- Al contrario, una “buona lontananza” dalla condizione di instabilità (**robustezza della stabilità**) si ha per una fdt in catena chiusa con poli complessi dominanti a smorzamento “non piccolo”, ovvero con  $M_r$  “piccolo”

**$M_r$  può essere visto come un “indiretto” margine di stabilità: per una buona stabilità robusta  $M_r$  deve essere “piccolo” (qualche dB)**



## Legame fra $M_r$ e funzione d'anello

► Facendo riferimento alla consueta struttura di controllo, in cui  $W_y = y/y_{des} = G_a/(1+G_a)$  e  $W = y/r = K_r W_y$ , si noti che:

- $W_r/|W(0)|$  coincide con  $W_{y,r}/|W_y(0)|$ ,  
ove  $W_{y,r} = \max \{|W_y(j\omega)|\}$
- Se  $G_a$  presenta almeno un polo nell'origine:  
 $W_y(0) = 1 \Rightarrow M_r = W_{y,r}$
- Se  $G_a$  non ha poli nell'origine:  
 $W_y(0) \approx 1 \Rightarrow M_r \approx W_{y,r}$

$M_r$  è (esattamente o con buona approssimazione)  
il massimo di  $|W_y|$  ovvero di  $|G_a/(1+G_a)|$



## I luoghi a modulo costante (1/3)

- La funzione

$$M(j\omega) = |W_y(j\omega)| = \left| \frac{G_a(j\omega)}{1 + G_a(j\omega)} \right|$$

esprime la variazione del modulo di  $W_y(j\omega)$  al variare di  $\omega$

- Per  $G_a(j\omega) \doteq \Re + j\Im$  (omettendo  $\omega$  per semplicità), si ha

$$M = \left| \frac{\Re + j\Im}{1 + \Re + j\Im} \right| \Rightarrow M^2 = \left| \frac{\Re + j\Im}{1 + \Re + j\Im} \right|^2$$





## I luoghi a modulo costante (2/3)

- Con alcuni passaggi si ottiene

$$(\Re - \Re_0)^2 + \Im^2 = \rho^2$$

con

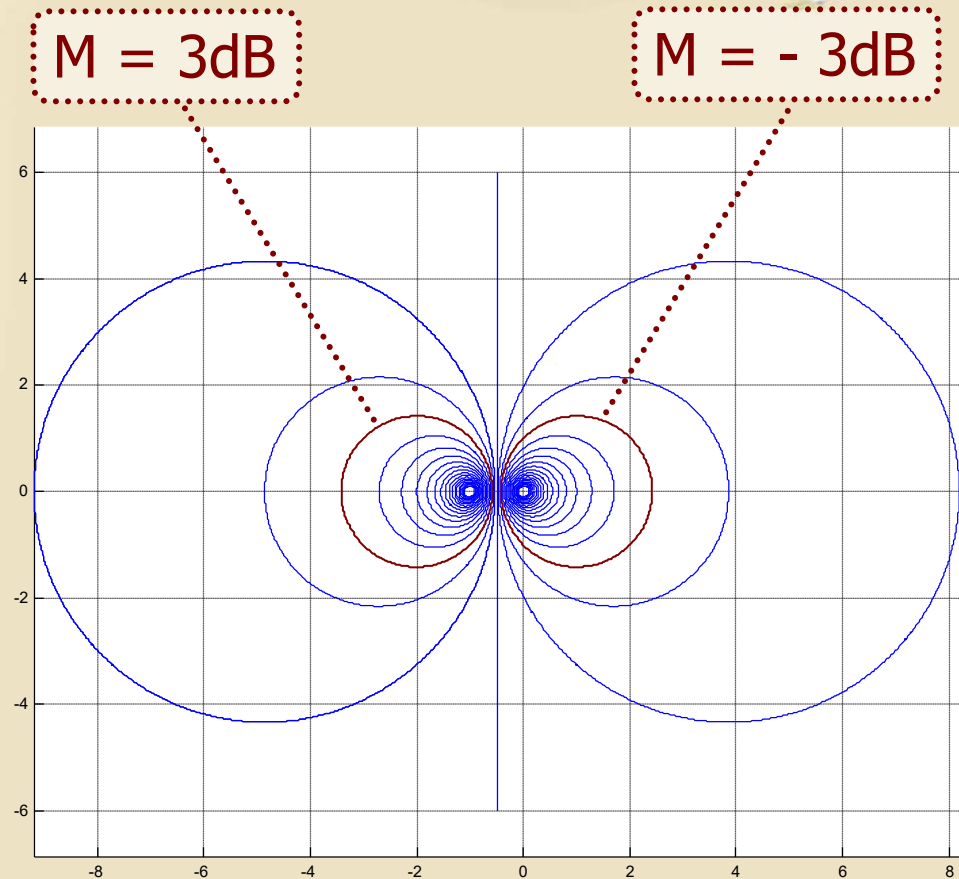
$$\Re_0 = \frac{M^2}{1 - M^2}, \quad \rho = \frac{M}{|1 - M^2|}$$

**Circonferenza sul piano complesso**  
di raggio  $\rho$  e centro in  $(\Re_0, 0)$

- Le circonferenze tracciate sul piano complesso per diversi valori di  $M$  rappresentano i **luoghi a modulo costante della fdt in catena chiusa**

## I luoghi a modulo costante (3/3)

- $M=0$ :  
origine
- $M=1$ : retta  
verticale in  
 $-0.5$
- $M \rightarrow \infty$ :  
punto critico  
 $(-1,0)$





## Robustezza della stabilità da $M_r$ (1/2)

- Si ha **robustezza della stabilità** in catena chiusa se  $M_r$  è piccolo:

$$M_r \leq M_{r,\text{lim}}$$

- Affinché tale relazione sia soddisfatta, il diagramma di Nyquist di  $G_a(j\omega)$  deve essere **esterno alla circonferenza corrispondente a  $M_{r,\text{lim}}$**  per tutti i valori di  $\omega$

# Robustezza della stabilità da $M_r$ (2/2)

➤ Esempio:  $G_{a1}(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}$ ,  $G_{a2}(s) = 1.5 G_{a1}(s)$

$$M_{r1} = 1.99 \text{ dB}$$

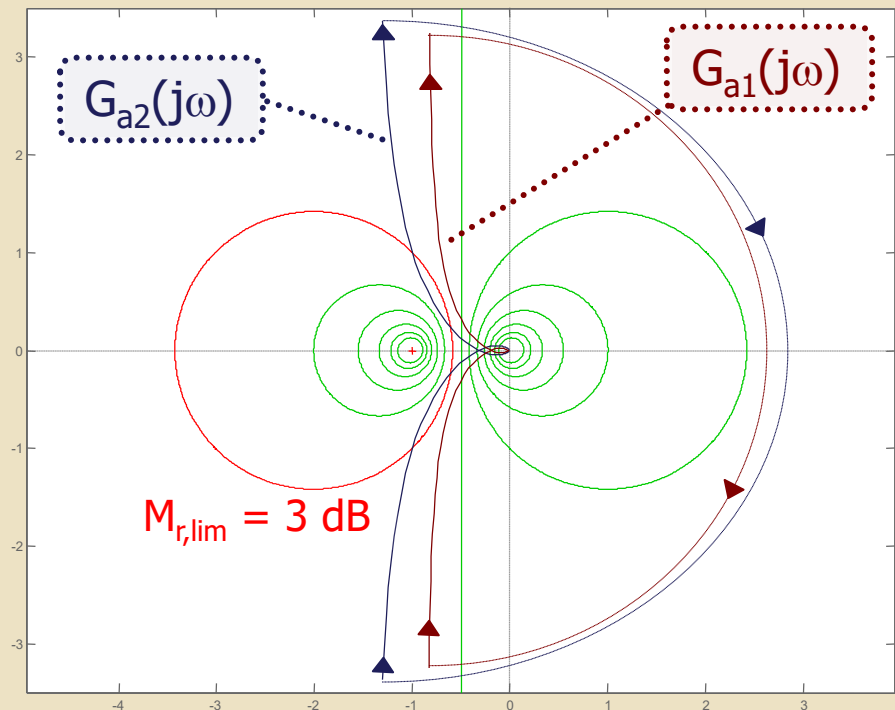
$$m_{G1} = 13.6 \text{ dB}$$

$$m_{\phi1} = 47^\circ$$

$$M_{r2} = 4.74 \text{ dB}$$

$$m_{G2} = 10.1 \text{ dB}$$

$$m_{\phi2} = 34.6^\circ$$



## Determinazione di $|W_y(j\omega)|$ (1/2)

- Sovrapponendo al diagramma polare di  $G_a(j\omega)$  i luoghi a  $M$  costante, è possibile ricavare il valore del modulo di  $W_y(j\omega)$  per ogni  $\omega$

$$M = 4 \text{ dB}$$

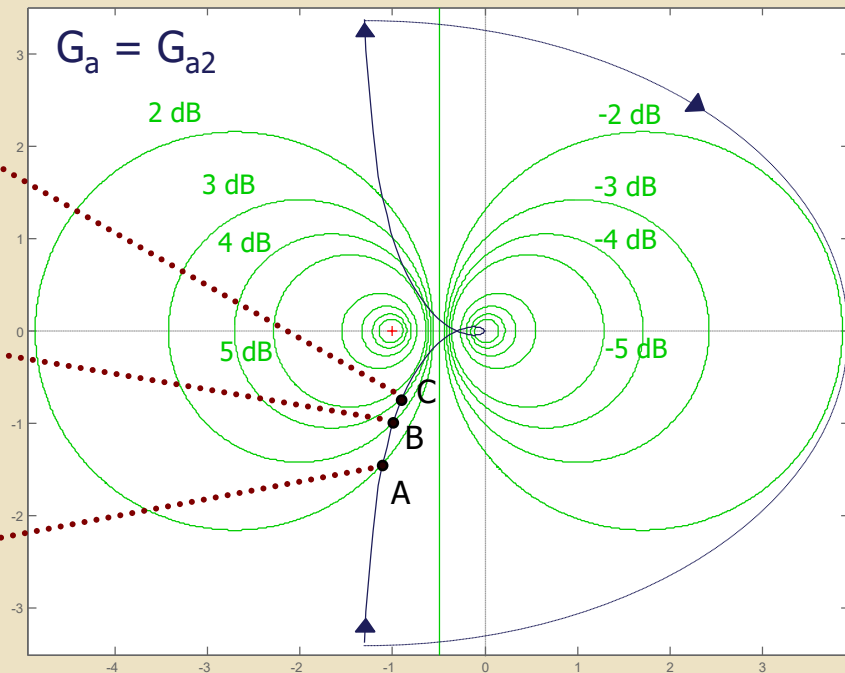
$$\omega = 1.31 \text{ rad/s}$$

$$M = 3 \text{ dB}$$

$$\omega = 1.12 \text{ rad/s}$$

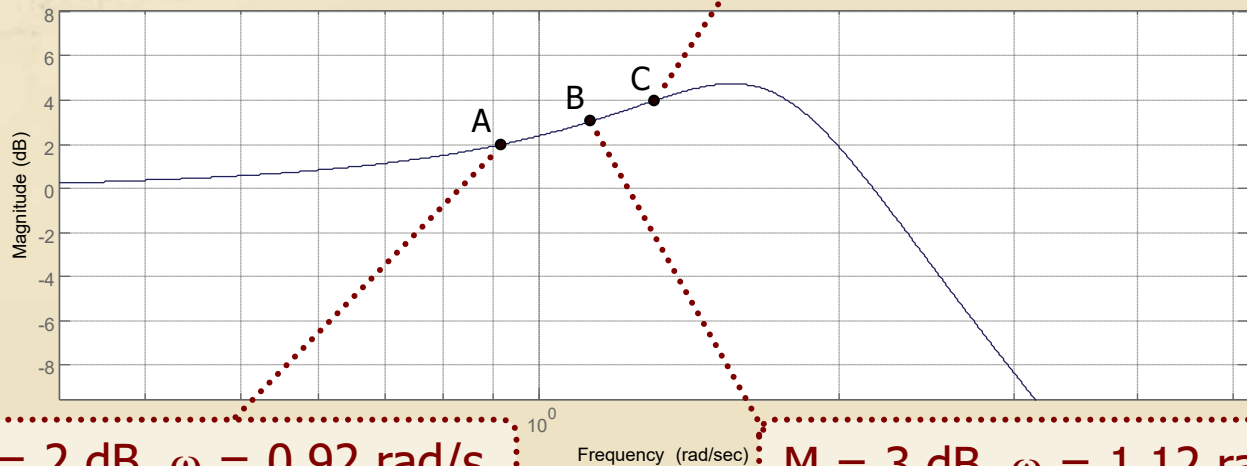
$$M = 2 \text{ dB}$$

$$\omega = 0.92 \text{ rad/s}$$



## Determinazione di $|W_y(j\omega)|$ (2/2)

- Il DdB del modulo della fdt in catena chiusa può essere costruito a partire dai valori di  $|W(j\omega)|$  letti dalle intersezioni di  $G_a(j\omega)$  con i cerchi M



$M = 2 \text{ dB}, \omega = 0.92 \text{ rad/s}$

$M = 3 \text{ dB}, \omega = 1.12 \text{ rad/s}$

$M = 4 \text{ dB}, \omega = 1.31 \text{ rad/s}$



## I luoghi a fase costante

- Con procedimento analogo, è possibile determinare sul piano complesso i **luoghi a fase costante** della fdt in catena chiusa
- Posto  $N = \tan \arg (W_y(j\omega))$ , si dimostra che tali luoghi sono dati dalle **circonferenze** aventi:

- Centro in  $(-1/2, 1/(2N))$ , Raggio  $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{N^2 + 1}{N^2}}$

Non si ritiene opportuno trattare i cerchi N con maggiori dettagli, in quanto di limitato interesse per gli obiettivi del corso