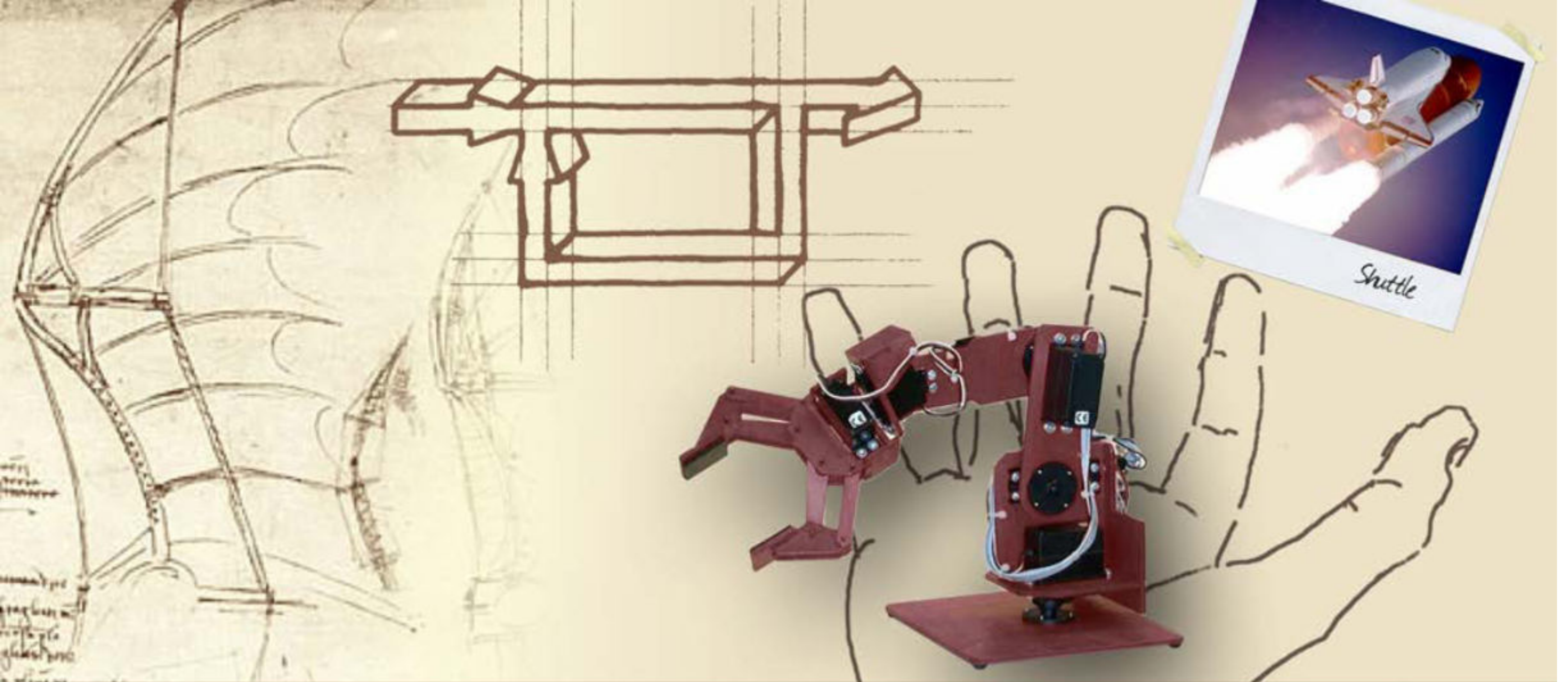
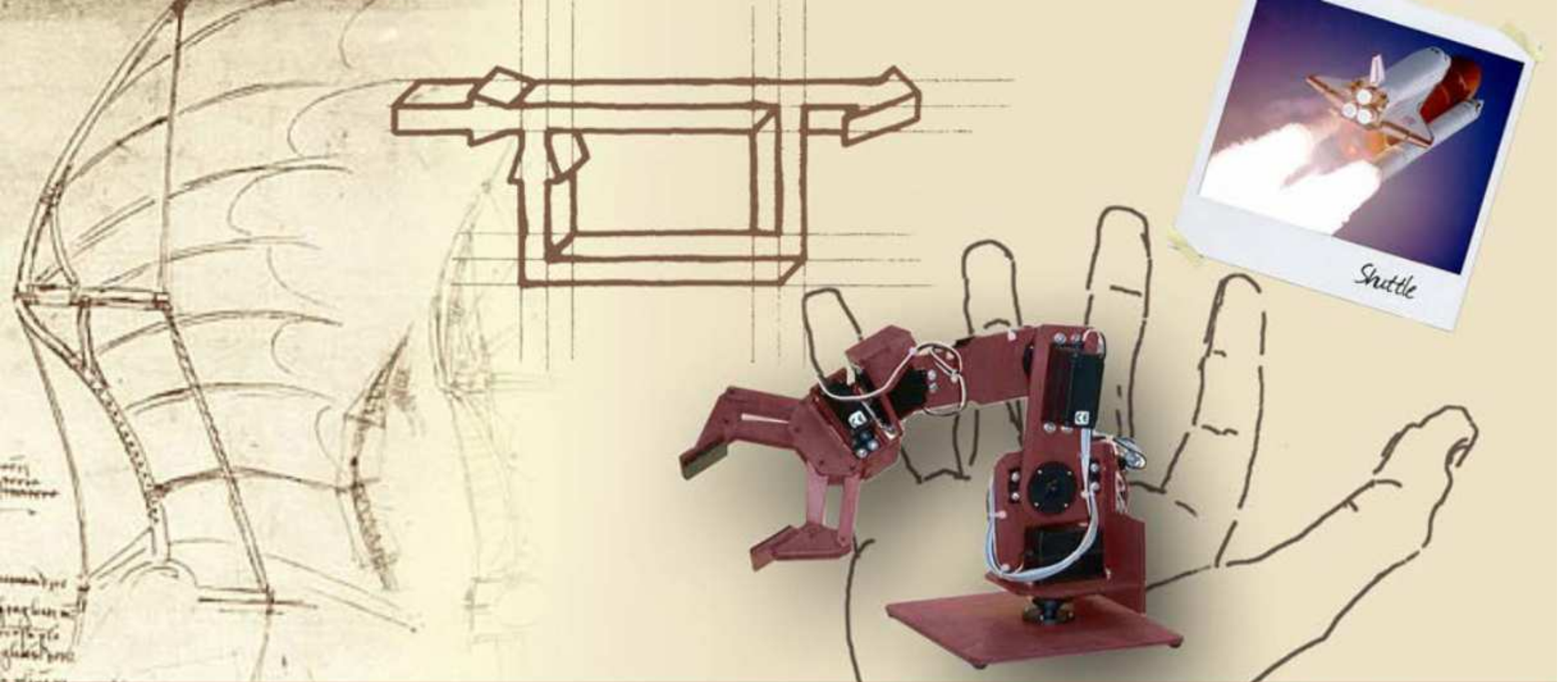


Progetto del controllore

Funzione di sensibilità

Funzione di sensibilità

- Sensibilità parametrica
- Andamento e significati della funzione di sensibilità S(s)
- Implicazioni sul progetto del controllore



Funzione di sensibilità

Sensibilità parametrica

Sensibilità alle variazioni parametriche (1/3)

- **Obiettivo**: valutare l'**influenza di variazioni dei parametri** che definiscono le fdt del sistema da controllare e del controllore stesso **sulla risposta del sistema controllato**
  - Per valutare la robustezza della **stabilità** del sistema controllato rispetto a variazioni della fdt d'anello sono già stati introdotti i margini di stabilità
  - Obiettivo di questa lezione è lo studio dell'influenza di variazioni parametriche sulla **fedeltà di risposta** del sistema controllato

Sensibilità alle variazioni parametriche (2/3)

- Le **funzioni di sensibilità** (o **sensitività**) formalizzano il concetto di "reattività" del sistema alle variazioni, intesa come rapporto tra la variazione relativa di una grandezza (come conseguenza di una variazione parametrica) e la variazione relativa del parametro stesso
- Si definisce **funzione di sensibilità** $S_p^{W_y}$ della fdt in catena chiusa $W_y(s)$ rispetto ad un parametro p la seguente funzione:

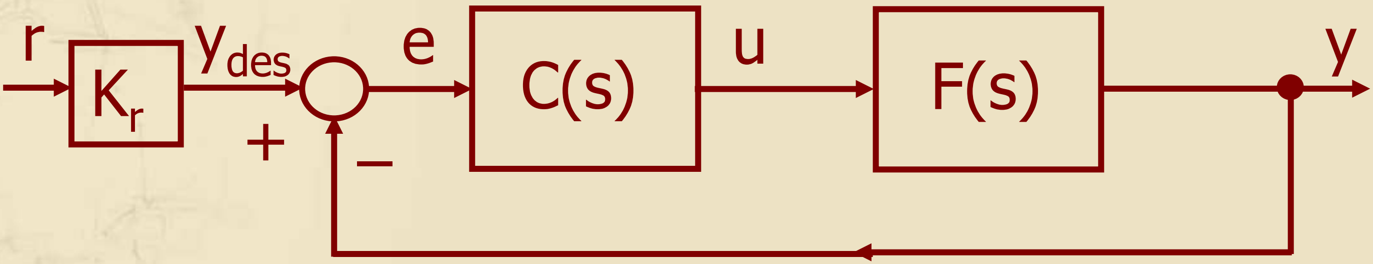
$$\boxed{S_p^{W_y} = \frac{\partial W_y(s)}{W_y(s)} \Big/ \frac{\partial p}{p} = \frac{\partial W_y(s)}{\partial p} \cdot \frac{p}{W_y(s)}}$$

Sensibilità alle variazioni parametriche (3/3)

- Se **la funzione di sensibilità** $S_p^{W_y}$ **assume valori piccoli** (molto minori di 1), la fdt $W_y(s)$ risulta poco sensibile alle variazioni del parametro p e quindi **la risposta del sistema non si modifica significativamente** al variare di p
- Se **la funzione di sensibilità** $S_p^{W_y}$ **assume valori prossimi a 1 o maggiori**, la fdt $W_y(s)$ subisce variazioni relative di entità pari o maggiore di quelle del parametro p e quindi anche **la risposta del sistema varia pesantemente** al variare di p

La funzione di sensibilità (1/7)

- Si consideri il consueto schema di controllo:



- Sia p un parametro variabile in $G_a(s) = C(s)F(s)$
  - Il parametro p potrebbe comparire nell'espressione della fdt del sistema da controllare, F(s), così come nella realizzazione C(s) del controllore: si considera genericamente $G_a(s) = G_a(s;p)$

La funzione di sensibilità (2/7)

- La funzione di sensibilità di $W_y(s)$ rispetto a p può essere riscritta come

$$S_p^{W_y} = \underbrace{\frac{\partial W_y(s)}{\partial G_a(s)} \cdot \frac{\partial G_a(s)}{\partial p}}_{\frac{\partial W_y(s)}{\partial p}} \cdot \frac{p}{W_y(s)}$$

W_y è una funzione composta: $W_y = G_a/(1+G_a)$ in cui l'espressione di G_a dipende da p

La funzione di sensibilità (3/7)

- La funzione di sensibilità di $W_y(s)$ rispetto a p può essere riscritta come

$$S_p^{W_y} = \frac{\partial W_y(s)}{\partial G_a(s)} \cdot \frac{\partial G_a(s)}{\partial p} \cdot \frac{p}{W_y(s)} \cdot \frac{G_a(s)}{G_a(s)}$$

Moltiplicando e dividendo per $G_a(s)$ non si altera il valore della funzione

La funzione di sensibilità (4/7)

- La funzione di sensibilità di $W_y(s)$ rispetto a p può essere riscritta come

$$S_p^{W_y} = \frac{\partial W_y(s)}{\partial G_a(s)} \cdot \frac{\partial G_a(s)}{\partial p} \cdot \frac{p}{W_y(s)} \cdot \frac{G_a(s)}{G_a(s)}$$

$$\boxed{S_p^{W_y} = \frac{\partial W_y(s)}{\partial G_a(s)} \cdot \frac{G_a(s)}{W_y(s)} \cdot \frac{\partial G_a(s)}{\partial p} \cdot \frac{p}{G_a(s)}}$$

$S_{G_a}^{W_y}$: Sensibilità di W_y rispetto a G_a

$S_p^{G_a}$: Sensibilità di G_a rispetto a p

La funzione di sensibilità (5/7)

- La sensibilità $S_{G_a}^{W_y}$ di $W_y(s)$ rispetto a $G_a(s)$ riveste grande importanza, perché **indica come variazioni della fdt d'anello si ripercuotono sul comportamento del sistema ad anello chiuso**
- Le variazioni della $G_a(s)$ possono riguardare:
  - Il controllore C(s) nella sua realizzazione analogica o digitale
  - Il sistema da controllare, descritto da F(s)

La funzione di sensibilità (6/7)

- Se le variazioni parametriche riguardano C(s), la sensibilità del sistema in catena chiusa può essere contenuta sia agendo sulla "qualità realizzativa" del controllore per ridurre $S_p^{G_a}$, sia garantendo una bassa $S_{G_a}^{W_y}$
- Se le variazioni parametriche riguardano la F(s) del sistema da controllare, nulla può essere fatto per ridurre la sensibilità $S_p^{G_a}$ di $G_a(s)$ rispetto a p
  - In questo caso la possibilità di attenuare gli effetti di variazioni parametriche sul sistema controllato è affidata alla sola $S_{G_a}^{W_y}$

La funzione di sensibilità (7/7)

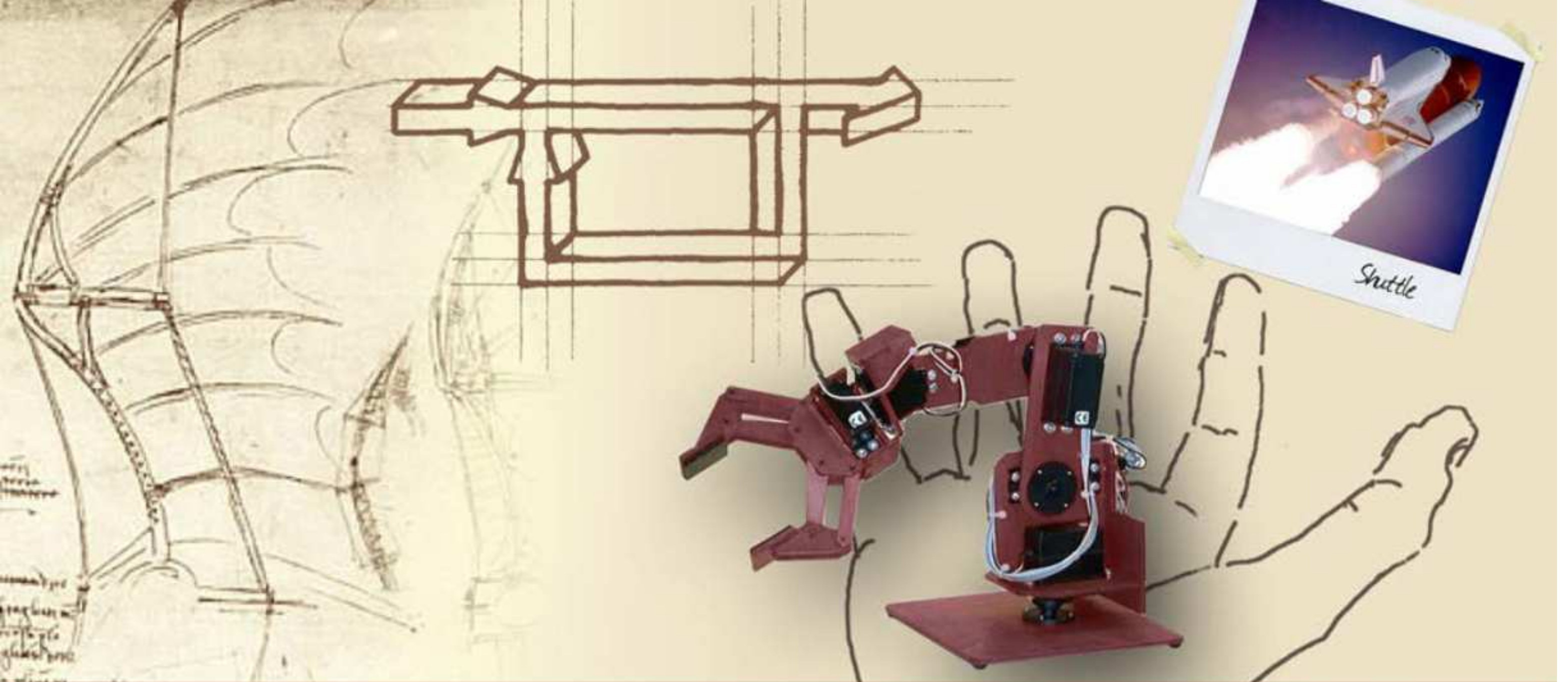
- La sensibilità $S_{G_a}^{W_y}$ di $W_y(s)$ rispetto a $G_a(s)$ è indicata semplicemente come (funzione di) **sensibilità S(s)** del sistema
- Tenendo conto che $W_y(s) = G_a(s)/(1 + G_a(s))$, la sensibilità risulta data da

$$\boxed{S(s) = \frac{\partial W_y(s)}{\partial G_a(s)} \cdot \frac{G_a(s)}{W_y(s)} = \frac{1}{1 + G_a(s)}}$$

N.B.: $S(s) = S_{G_a}^{W_y} = S_{G_a}^{W}$, essendo $W(s) = K_r W_y(s)$

Altre funzioni di sensibilità

- È possibile definire **altre funzioni di sensibilità**, ad esempio per valutare direttamente la sensibilità dell'uscita o del comando rispetto ad un disturbo agente sul sistema
- La stessa funzione S(s) può assumere **altri significati**, oltre a quello legato alla sensibilità parametrica, come verrà illustrato nel seguito della lezione



Funzione di sensibilità

Andamento e significati della funzione di sensibilità S(s)

Andamento di $S(j\omega)$ (1/3)

- L'andamento della funzione di sensibilità $S(j\omega) = 1/(1 + G_a(j\omega))$ può essere approssimato tenendo conto di alcune caratteristiche generali di $G_a(j\omega)$
  - Per inseguire correttamente (almeno) i riferimenti costanti ed annullare (almeno) gli effetti di disturbi costanti (offset) sull'uscita, $G_a(j\omega)$ presenta solitamente (almeno) un polo nell'origine:

    $$G_a(j\omega) \to \infty \text{ per } \omega \to 0 \;\Rightarrow S(j\omega) \to 0 \text{ per } \omega \to 0$$
  - In BF, per $\omega \ll \omega_c$

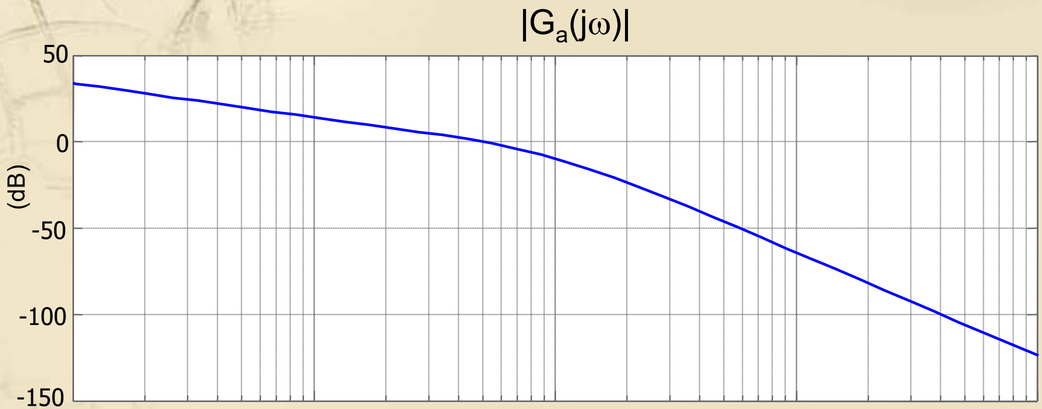
    $$|G_a(j\omega)| \gg 1 \;\Rightarrow |S(j\omega)| \simeq \frac{1}{|G_a(j\omega)|}$$

Andamento di $S(j\omega)$ (2/3)

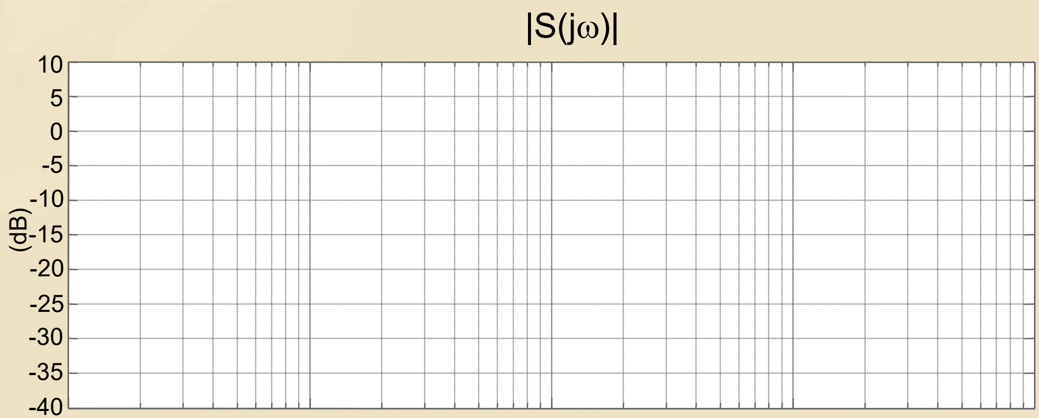
- $|G_a(j\omega)| = 1$ per $\omega = \omega_c$
  $\Rightarrow$ Per pulsazioni ω prossime a ω_c, $|S(j\omega)|$ assume valori di ordine di grandezza pari all'unità
- La fdt $G_a(j\omega)$ è sicuramente propria, essendo relativa ad un sistema fisico:
  $G_a(j\omega) \to 0$ per $\omega \to \infty \;\; \Rightarrow S(j\omega) \to 1$ per $\omega \to \infty$

- Sulla base di queste proprietà è possibile tracciare l'andamento qualitativo tipico del DdB di $|S(j\omega)|$

Andamento di S(jω) (3/3)

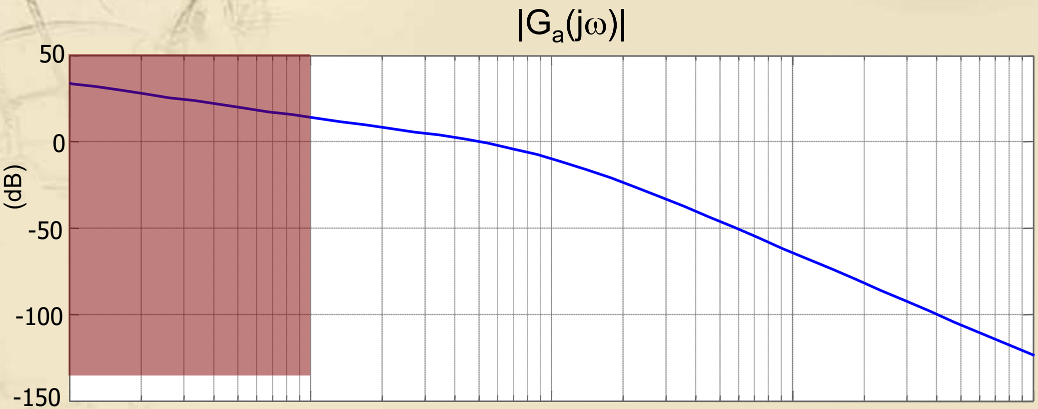


Andamento qualitativo tipico del DdB di $|G_a(j\omega)|$



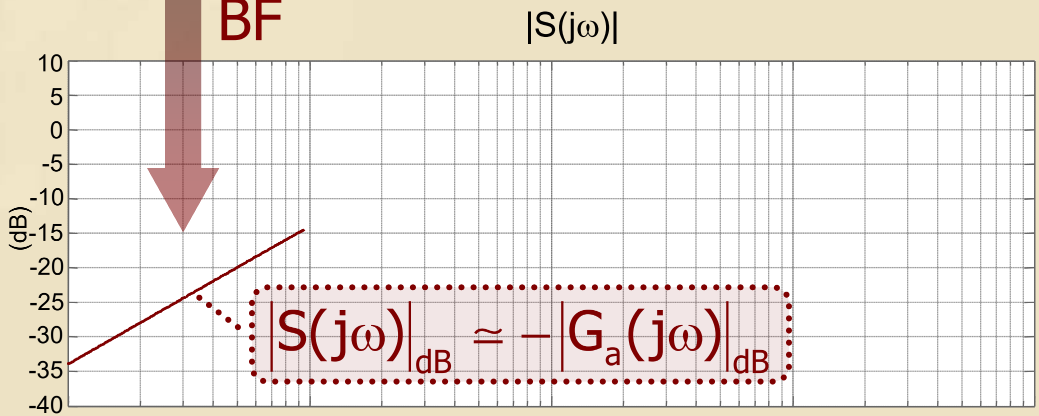
Costruzione dell'andamento qualitativo del DdB di $|S(j\omega)|$

Andamento di $S(j\omega)$ (3/3)



Andamento qualitativo tipico del DdB di $|G_a(j\omega)|$

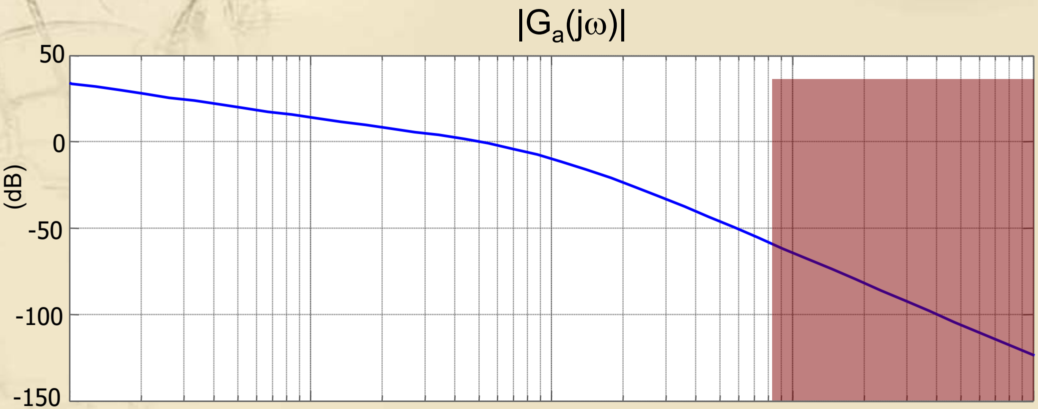
BF



$$\left|S(j\omega)\right|_{dB} \simeq -\left|G_a(j\omega)\right|_{dB}$$

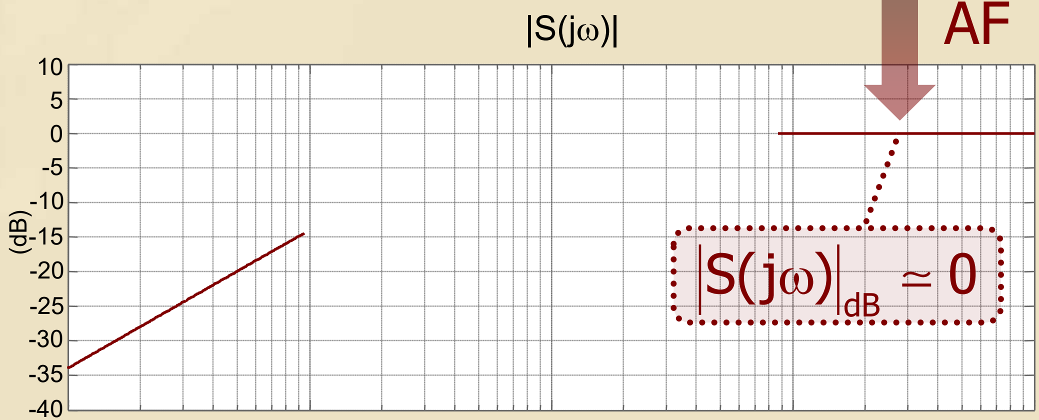
Costruzione dell'andamento qualitativo del DdB di $|S(j\omega)|$

Andamento di S(jω) (3/3)



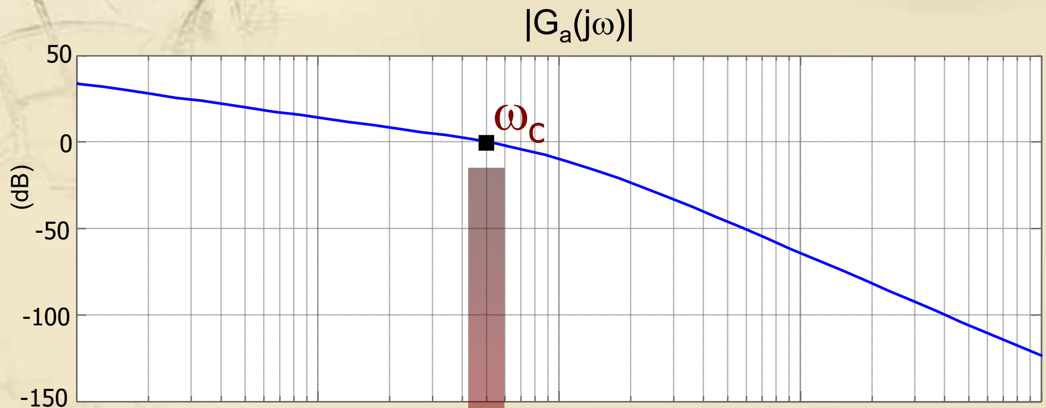
Andamento qualitativo tipico del DdB di $|G_a(j\omega)|$

AF



Costruzione dell'andamento qualitativo del DdB di $|S(j\omega)|$

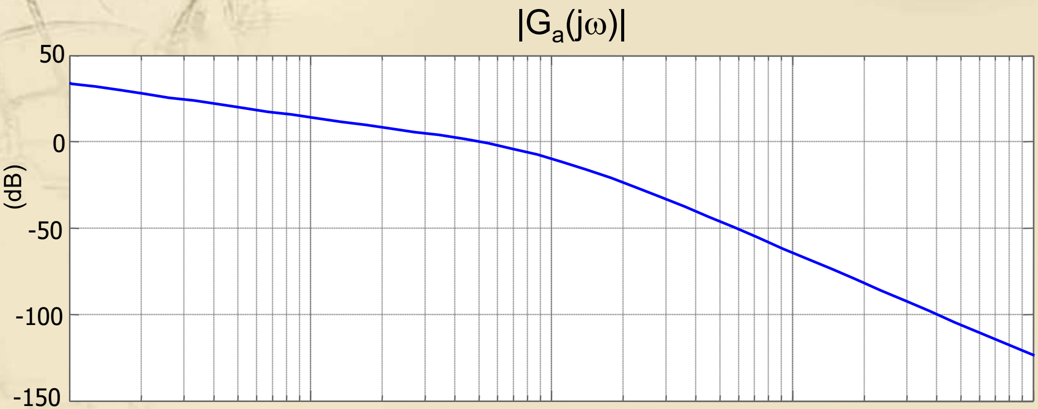
Andamento di S(jω) (3/3)



Andamento qualitativo tipico del DdB di $|G_a(j\omega)|$

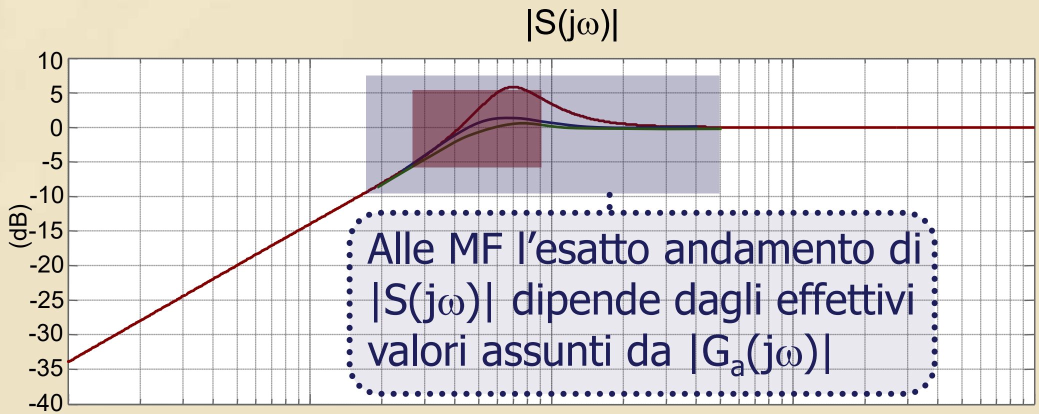
Costruzione dell'andamento qualitativo del DdB di $|S(j\omega)|$

Andamento di S(jω) (3/3)



Andamento qualitativo tipico del DdB di $|G_a(j\omega)|$

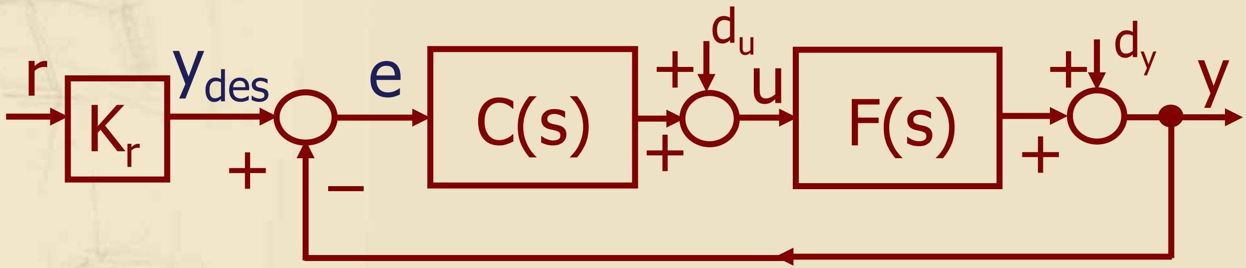
Costruzione dell'andamento qualitativo del DdB di $|S(j\omega)|$



Alle MF l'esatto andamento di $|S(j\omega)|$ dipende dagli effettivi valori assunti da $|G_a(j\omega)|$

Significati della funzione S(s) (1/4)

- Per il consueto schema di controllo:

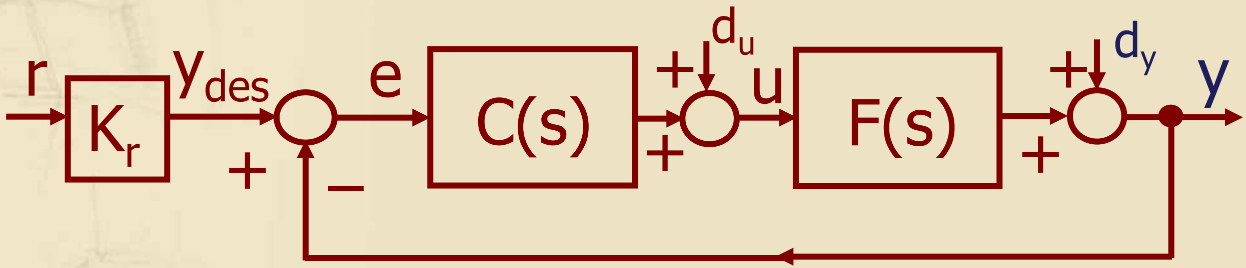


la funzione di sensibilità coincide

- Con la fdt d'errore: $S(s) \equiv W_{e,y_{des}}(s) = \dfrac{e(s)}{y_{des}(s)}$

Significati della funzione S(s) (1/4)

- Per il consueto schema di controllo:

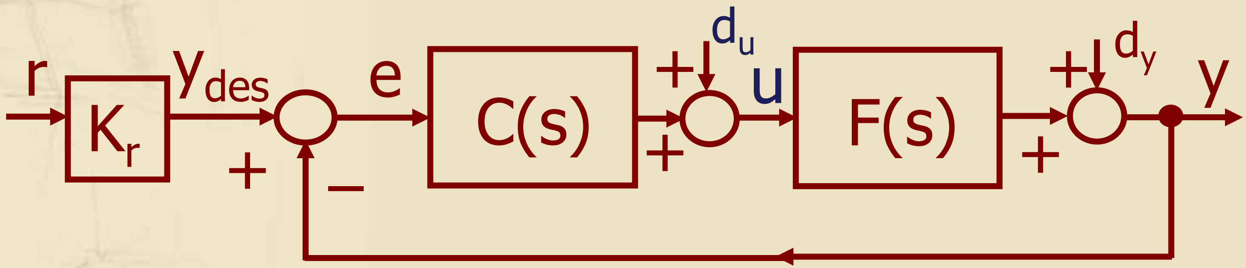


la funzione di sensibilità coincide

- Con la fdt d'errore: $S(s) \equiv W_{e,y_{des}}(s) = \dfrac{e(s)}{y_{des}(s)}$
- Con la fdt fra d_y e y: $S(s) \equiv W_{y,dy}(s) = \dfrac{y(s)}{d_y(s)}$

Significati della funzione S(s) (1/4)

- Per il consueto schema di controllo:

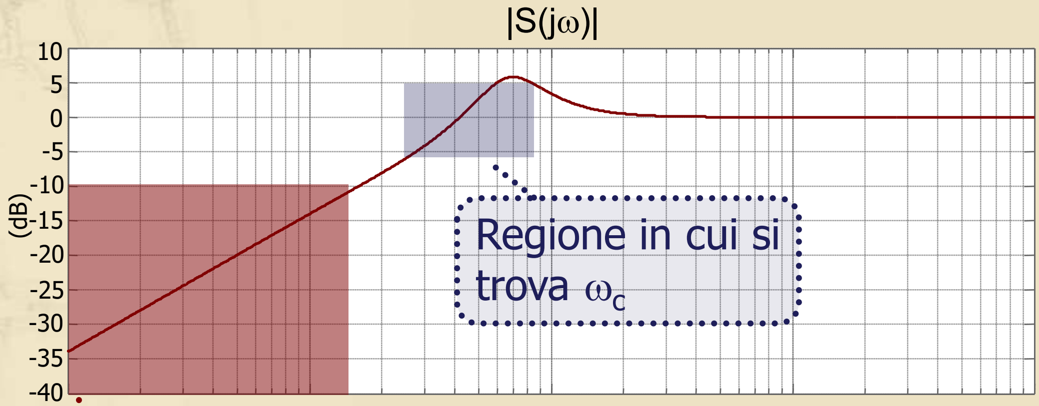


la funzione di sensibilità coincide

- Con la fdt d'errore: $S(s) \equiv W_{e,y_{des}}(s) = \dfrac{e(s)}{y_{des}(s)}$
- Con la fdt fra d_y e y: $S(s) \equiv W_{y,dy}(s) = \dfrac{y(s)}{d_y(s)}$
- Con la fdt fra d_u e u: $S(s) \equiv W_{u,du}(s) = \dfrac{u(s)}{d_u(s)}$

Significati della funzione S(s) (2/4)

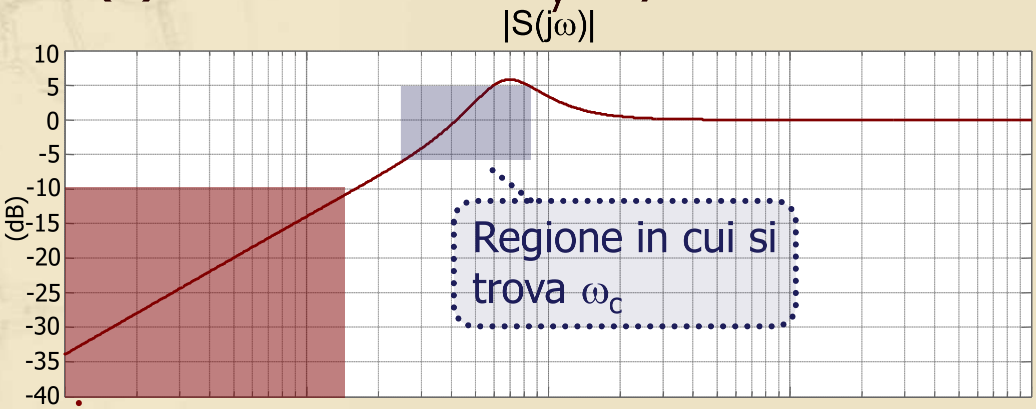
- S(s) come fdt d'errore:



- L'errore di inseguimento massimo in regime permanente a $r(t) = \sin(\omega_0 t)$ vale $E = |W_e(j\omega_0)|$, ove $W_e(s) = K_r\, S(s) \Rightarrow$ Il sistema riesce ad inseguire con buona precisione i segnali sinusoidali per cui $|S(j\omega_0)|$ è molto piccolo, cioè **interni alla banda passante** ($\omega_0 < \omega_c < \omega_B$)

Significati della funzione S(s) (3/4)

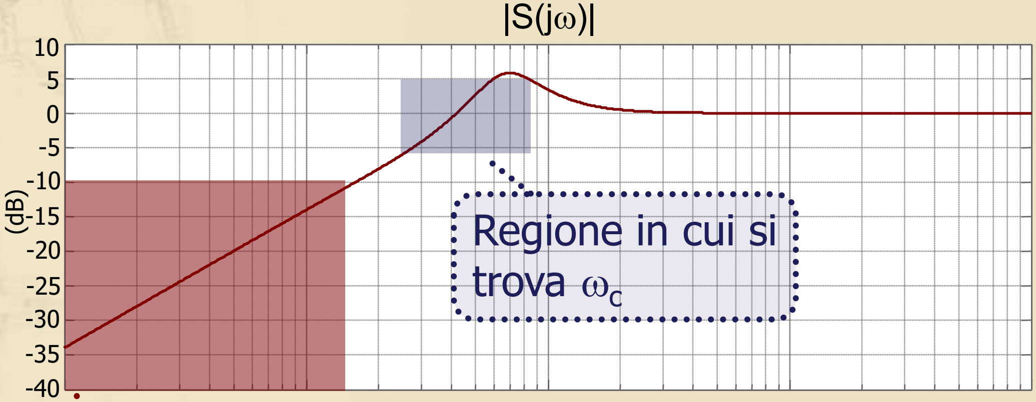
- S(s) come fdt fra d_y e y:



- L'effetto massimo sull'uscita in regime permanente di $d_y(t) = D_s \sin(\omega_d t)$ vale $Y_{d,p} = D_s\,|S(j\omega_d)|$
$\Rightarrow$ La risposta del sistema è poco sensibile a disturbi su y per cui $|S(j\omega_d)|$ è molto piccolo, cioè **di bassa frequenza rispetto alla banda passante** ($\omega_d < \omega_c < \omega_B$)

Significati della funzione S(s) (4/4)

- S(s) come fdt fra d_u e u:



- L'effetto massimo sul comando in regime permanente di $d_u(t) = D_s \sin(\omega_d t)$ vale $Y_{d,p} = D_s |S(j\omega_d)|$
  $\Rightarrow$ Il comando risulta poco sensibile a disturbi su u per cui $|S(j\omega_d)|$ è molto piccolo, cioè **di bassa frequenza rispetto alla banda passante** ($\omega_d < \omega_c < \omega_B$)

Relazione fra $S(s)$ e $W_y(s)$ (1/2)

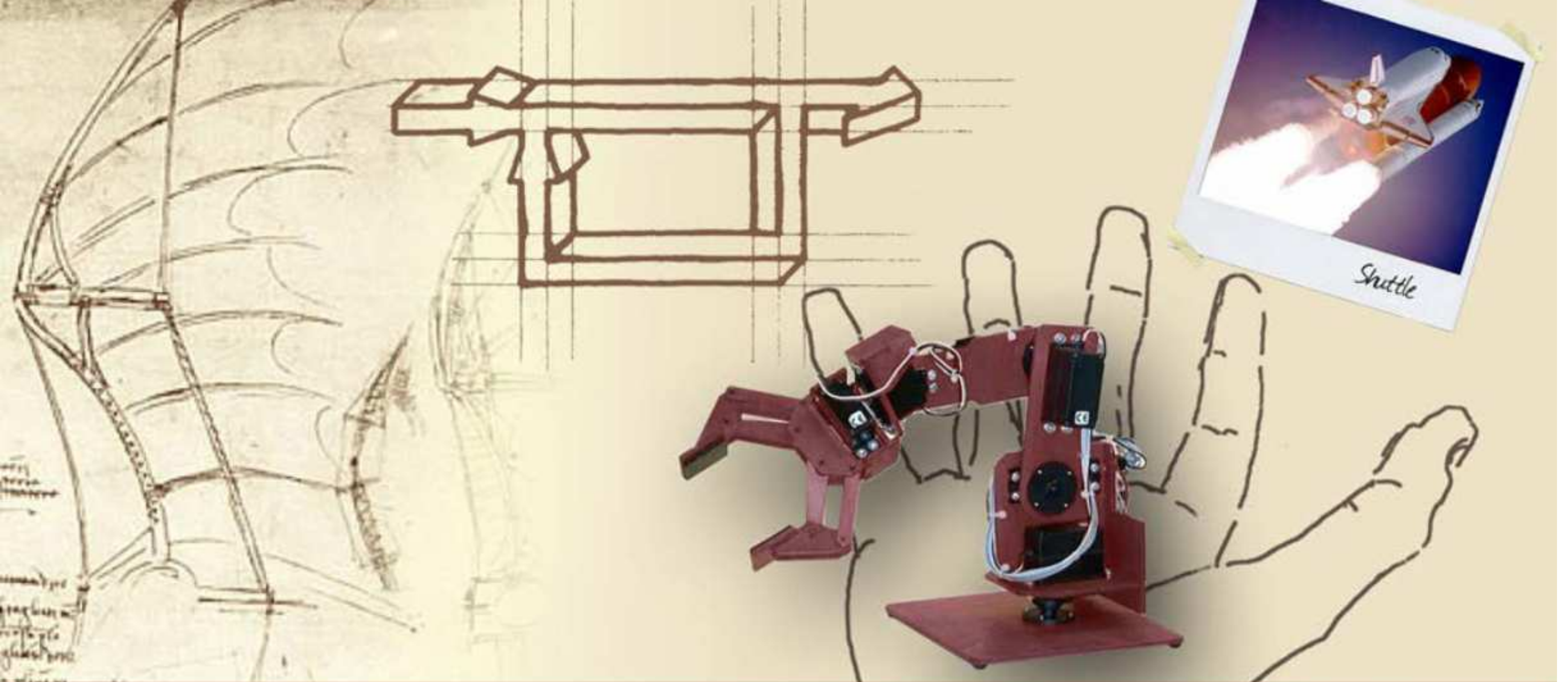
- Appare evidente l'**impossibilità di imporre specifiche sulla sensibilità in modo indipendente** da eventuali requisiti imposti sul comportamento del sistema in catena chiusa descritto da $W_y(s) = y(s)/y_{des}(s)$ (o da $W(s) = y(s)/r(s)$)
- Qualunque specifica formulata su $S(s)$ (per garantire una soddisfacente robustezza della fedeltà della risposta, secondo i significati discussi) determina **implicazioni sull'andamento di $G_a(s)$ e sulla banda passante del sistema**

Relazione fra S(s) e $W_y(s)$ (2/2)

- Per qualunque sistema controllato secondo lo schema ad un grado di libertà considerato, vale la seguente **relazione fra S(s) e $W_y(s)$**:

$$\boxed{S(s) + W_y(s) = 1}$$

- In virtù di tale relazione, la fdt del sistema in catena chiusa $W_y(s)$ è detta anche **sensibilità complementare**
- L'**imposizione e** l'**analisi delle specifiche** svolta su $W_y(s)$ (o su W(s)) può essere condotta in modo **equivalente su S(s)**



Funzione di sensibilità

Implicazioni sul progetto del controllore

Specifiche sulla sensibilità (1/5)

- **Specifiche sull'andamento della funzione di sensibilità** possono essere formulate per
  - Mantenere complessivamente inalterate le prestazioni del sistema controllato a fronte di variazioni parametriche
  - Garantire un buon inseguimento di segnali sinusoidali ed in generale di segnali aventi contenuto in frequenza all'interno della banda passante del sistema
  - Garantire una bassa sensibilità dell'uscita e del comando a disturbi di BF rispettivamente su y e su u

Specifiche sulla sensibilità (2/5)

- La specifica più "semplice" che può essere formulata in merito alla sensibilità è della forma

$$\boxed{|S(j\omega)| < 1 \text{ per } \omega < \omega_M} \Rightarrow \omega_c > \omega_M$$

  - La specifica è **equivalente ad un requisito di banda passante minima**
  - Si può imporre come valore desiderato per ω_c (per non allargare eccessivamente la banda)

$$\boxed{\omega_{c,des} = 1.5 \cdot \omega_M}$$

verificando successivamente che sia sufficiente al soddisfacimento della specifica su S(s)

Specifiche sulla sensibilità (3/5)

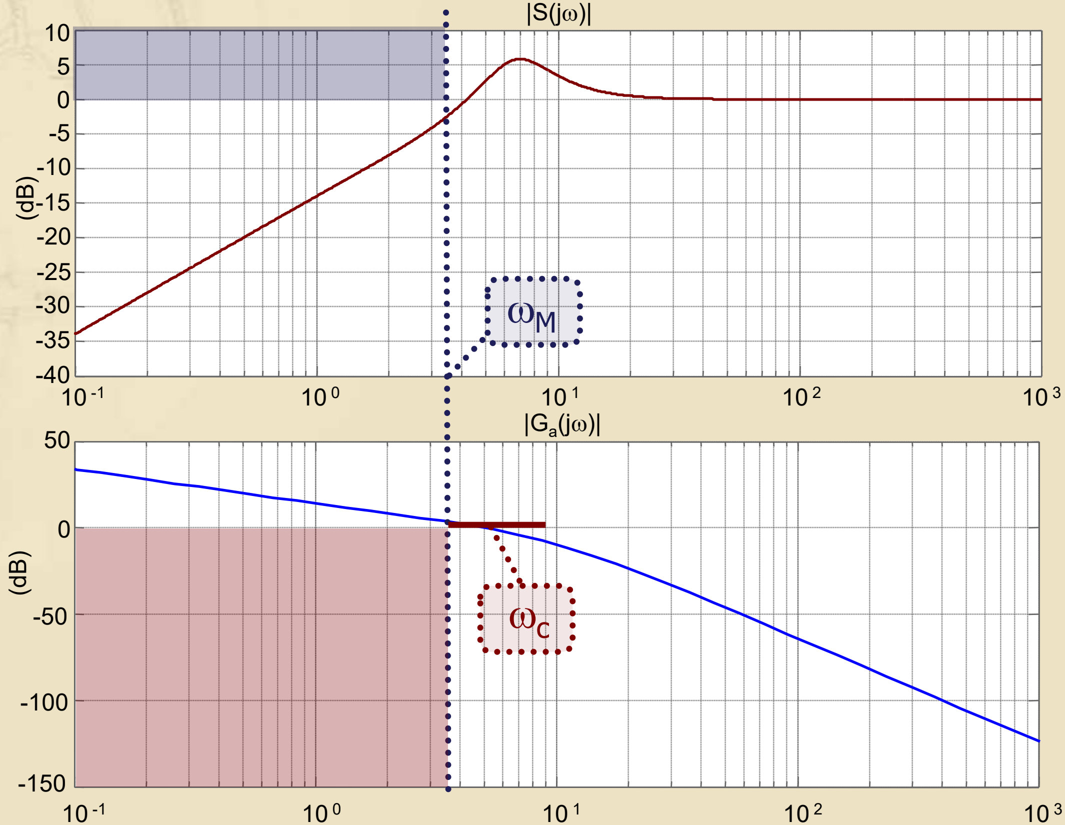
- Specifiche più restrittive, della forma

$$\boxed{|S(j\omega)| < S_M \text{ (con } S_M < 1) \text{ per } \omega < \omega_M \text{ o } \omega_m < \omega < \omega_M}$$

  possono essere imposte per garantire una desiderata fedeltà della risposta a riferimenti collocati in una certa banda e/o per ottenere una prefissata attenuazione di disturbi, ed in generale per assicurare una adeguata "insensibilità" alle variazioni parametriche
- Specifiche di questo tipo pongono **vincoli sulle caratteristiche di $G_a(s)$**

Specifiche sulla sensibilità (4/5)

- Interpretazione grafica delle specifiche su S(jω)



$$|S(j\omega)| < 1$$

per $\omega < \omega_M$

$$|G_a(j\omega)| > 1$$

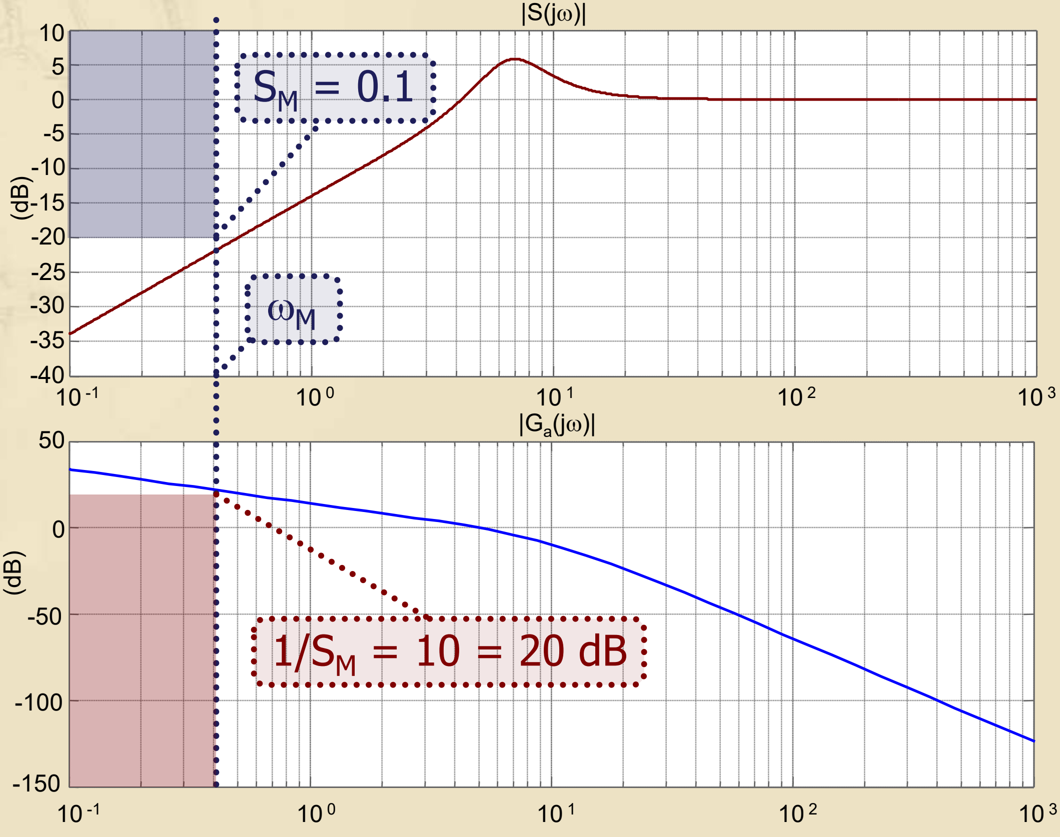
per $\omega < \omega_M$

$$\Downarrow$$

$$\omega_c > \omega_M$$

Specifiche sulla sensibilità (5/5)

- Interpretazione grafica delle specifiche su S(jω)



$$\left|S(j\omega)\right| < S_M$$

per $\omega < \omega_M$

$$\left|G_a(j\omega)\right| > \frac{1}{S_M}$$

per $\omega < \omega_M$

Implicazioni sulle scelte progettuali (1/2)

- Una specifica della forma $|S(j\omega)| < 1$ per $\omega < \omega_M$ determina un **vincolo sul valore minimo di ω_c** e può essere trattata utilizzando le opportune reti di compensazione in modo che la ω_c soddisfi tale requisito
- Una specifica della forma $|S(j\omega)| < S_M$ con $S_M < 1$ per $\omega < \omega_M$ (o $\omega_m < \omega < \omega_M$) impone che le scelte progettuali fatte per soddisfare i requisiti su m_φ e su $\omega_{c,des}$ (sicuramente con $\omega_{c,des} > \omega_M$) siano tali da garantire che **$|G_a(j\omega)|$** sia **sufficientemente elevato in BF**

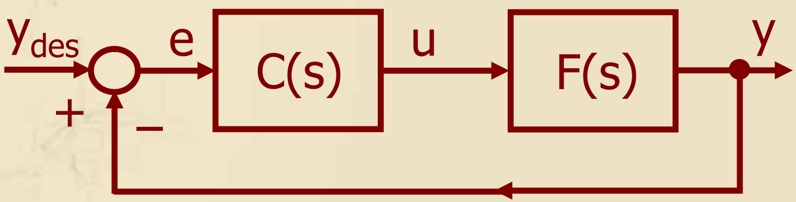
Implicazioni sulle scelte progettuali (2/2)

- Particolare attenzione deve essere prestata ogni volta in cui altre specifiche richiedano l'inserimento in C(s) di una **rete attenuatrice**:
  - Il **modulo di $G_a(s)$** viene **attenuato a partire dalla pulsazione del polo** della rete attenuatrice
  - Affinché la perdita di fase associata sia "tollerabile" in corrispondenza di $\omega_{c,des}$, tale polo è sempre **di bassa frequenza**

Per soddisfare specifiche su S(s), è necessario **evitare l'inserimento di reti attenuatrici collocate a pulsazioni troppo basse**

Esempio (1/5)

- Si riconsideri l'esempio 3 della lezione "Principali reti di compensazione"



$$F(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+4)}$$

$$C(s) = 4 \cdot \frac{1+11.1s}{1+55.5s}$$

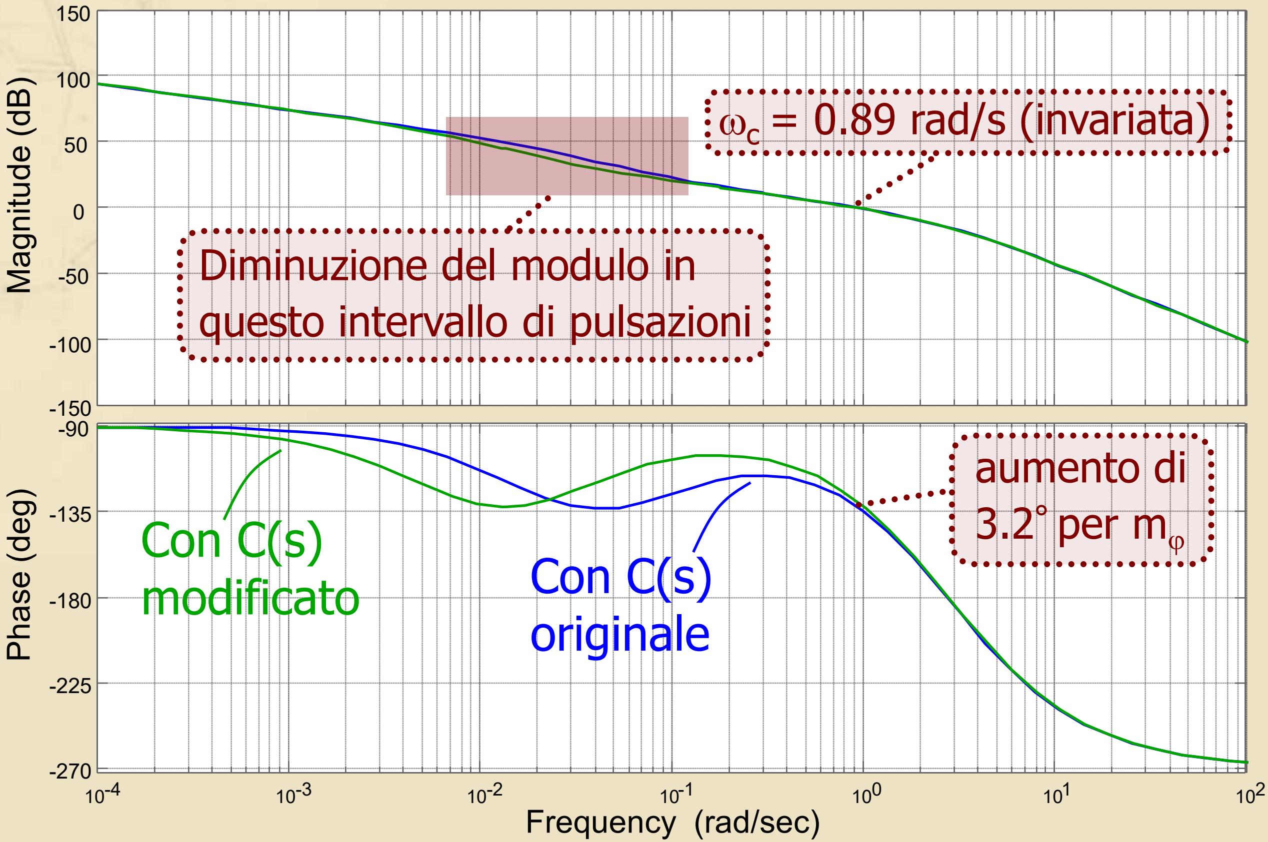
- Il controllore C(s) progettato in tale lezione soddisfa le specifiche date con
  - $\left|e_{r,\infty}\right| = 0.2$ per $r(t) = t$ (≤ 0.2)
  - $\hat{s} = 22.9\%$ ($< 25\%$)
  - $\omega_B = 1.61$ rad/s (< 1.8 rad/s)

Esempio (2/5)

- Il controllore utilizzato è costituito dal guadagno (K_c = 4) e da una rete attenuatrice avente le seguenti caratteristiche:
  - $m_i = 5$, $\omega_{c,des}\tau_i = 50 \Rightarrow \tau_i = 55.5$ ($\Rightarrow$ polo in 0.018 rad/s)
- Si supponga ora di collocare la **rete a pulsazioni molto basse** (ad esempio per ridurre la perdita di fase ed abbassare ulteriormente la sovraelongazione):
  - $m_i = 5$, $\omega_{c,des}\tau_i = \mathbf{150} \Rightarrow \tau_i = 166.7$ ($\Rightarrow$ polo in 0.006 rad/s)

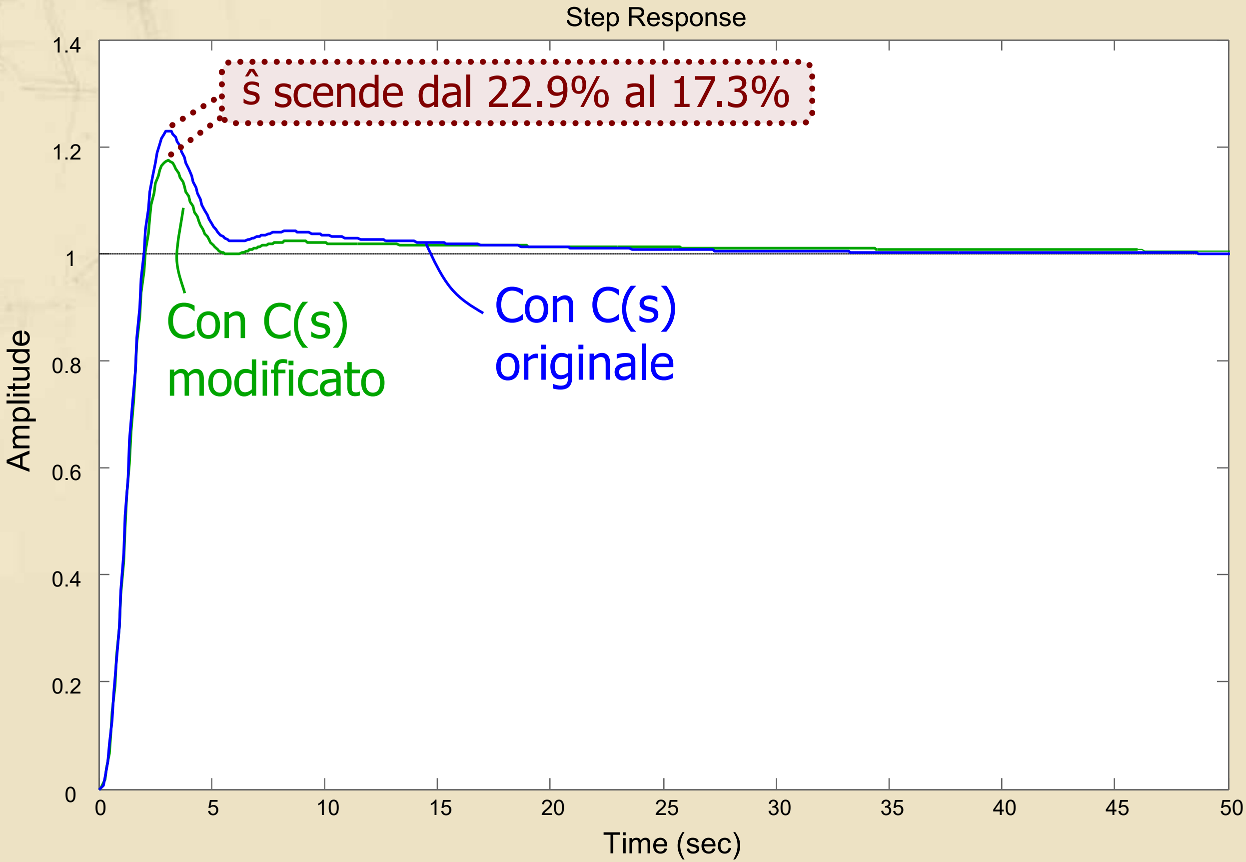
Esempio (3/5)

- DdB di $G_a(s)$: confronto



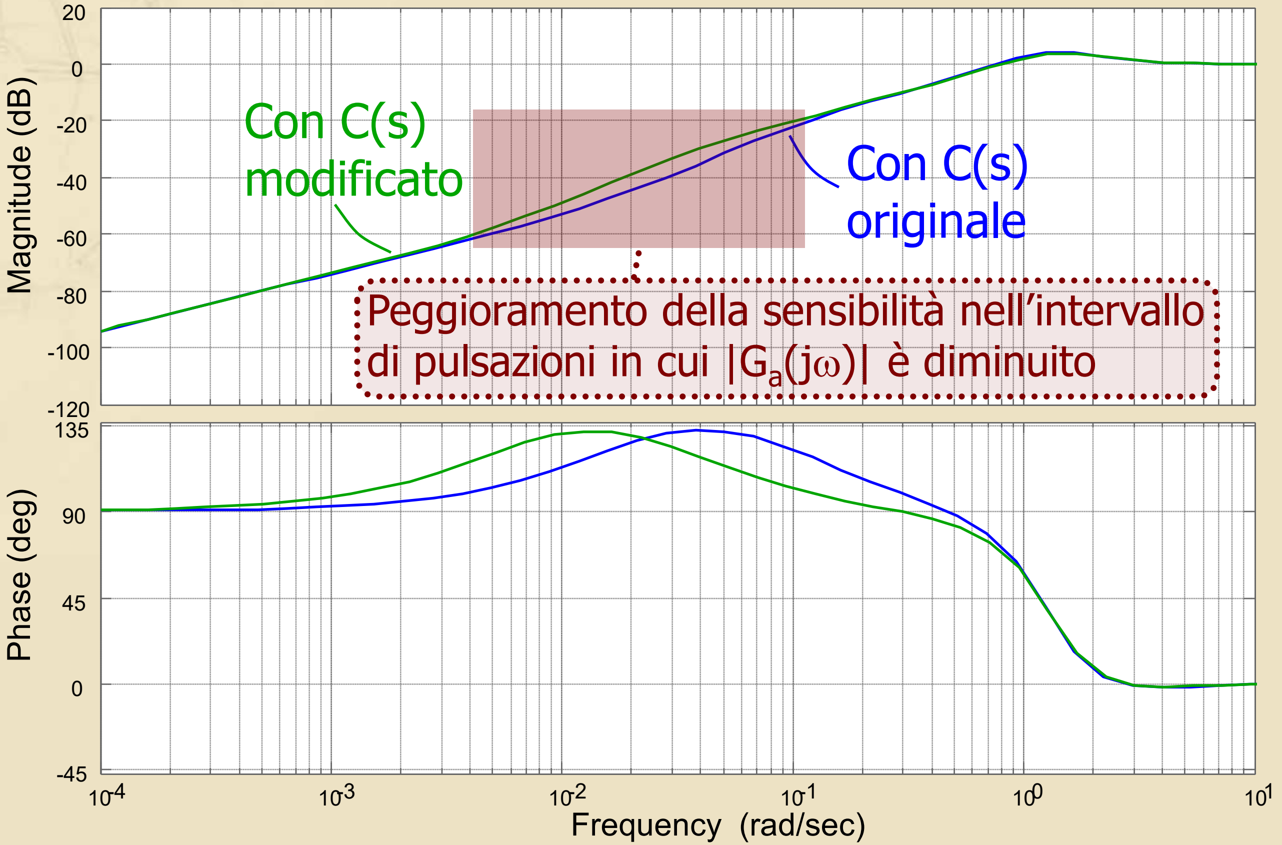
Esempio (4/5)

- Risposta al gradino: confronto



Esempio (5/5)

- Sensibilità: confronto



Osservazioni finali (1/3)

- L’utilizzo di un certo **tipo di rete** di compensazione (anticipatrice o attenuatrice) è dettato dall’azione “principale” di controllo ad essa associata, necessaria per il soddisfacimento delle specifiche prioritarie
- Nel progetto delle reti è opportuno però tenere conto degli “effetti collaterali” di ciascuna tipologia di rete, che potrebbero influenzare le **prestazioni generali** del sistema controllato

Osservazioni finali (2/3)

- L'utilizzo di **reti anticipatrici** fa aumentare l'**attività sul comando**
  - Quando è necessario introdurre una forte azione anticipatrice, è fondamentale confrontare l'attività sul comando richiesta con i vincoli tecnologici del sistema
  - Per ridurre l'attività sul comando è opportuno contenere per quanto possibile il valore del parametro m_d delle reti anticipatrici (soprattutto se non accompagnate dall'inserimento di reti attenuatrici); in caso di più reti anticipatrici, la scelta dovrà essere fatta in modo da minimizzare il prodotto dei loro parametri m_d

Osservazioni finali (3/3)

- L'utilizzo di **reti attenuatrici** rende in generale il **sistema più sensibile** alle variazioni parametriche e fa peggiorare la capacità di attenuazione dei disturbi di BF
  - È opportuno evitare di collocare le reti attenuatrici a pulsazioni eccessivamente basse, non solo per ridurre l'effetto coda nella risposta al gradino, ma anche per ridurre la sensibilità del sistema controllato