

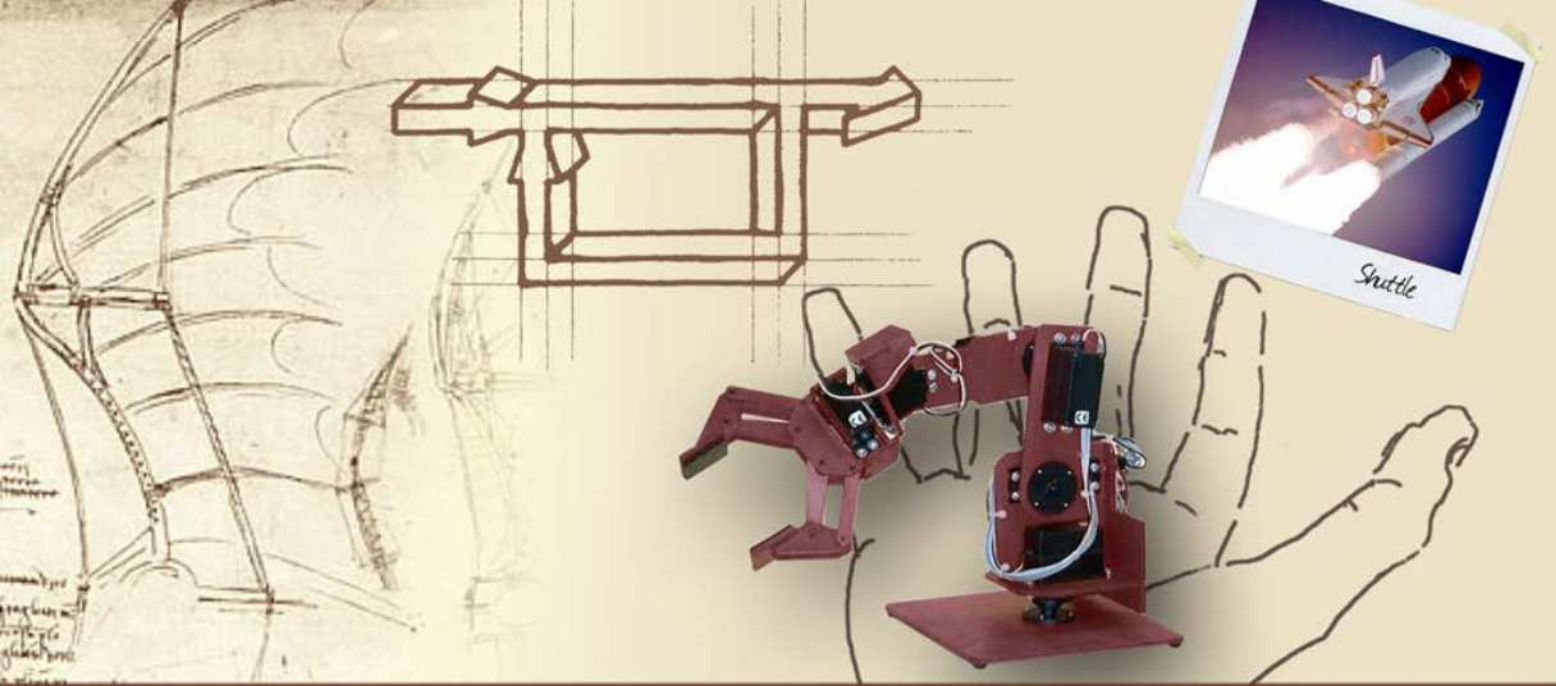
Stabilità dei sistemi di controllo in retroazione

Criterio di Nyquist



Criterio di Nyquist

- Il criterio di Nyquist
- Estensione a $G_a(s)$ con guadagno variabile
- Applicazione a sistemi con retroazione positiva

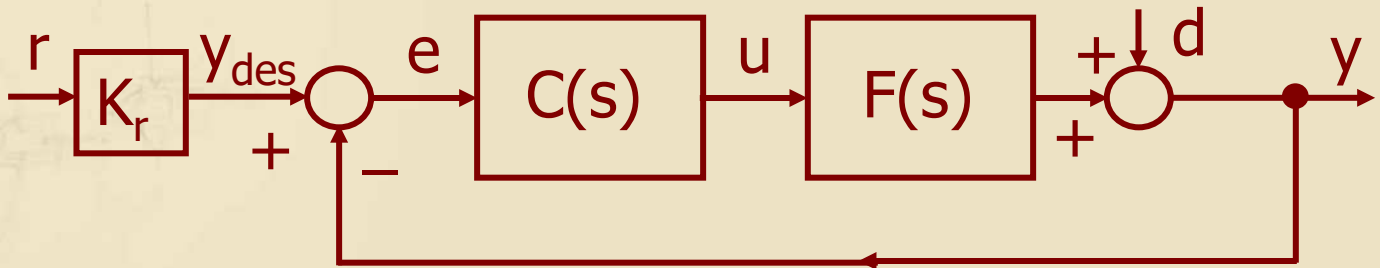


Criterio di Nyquist

Il criterio di Nyquist

Stabilità della catena chiusa (1/3)

- Il problema fondamentale: **analizzare la stabilità della catena chiusa data la fdt d'anello (catena aperta)**



$$G_a(s) = C(s) \cdot F(s)$$

Fdt d'anello

$$W(s) = \frac{y(s)}{r(s)}; \quad W_y(s) = \frac{y(s)}{y_{des}(s)}$$

Fdt in catena chiusa



Stabilità della catena chiusa (2/3)

- La stabilità del sistema in catena chiusa può essere valutata mediante il **calcolo diretto dei poli di $W(s)$** oppure studiando il segno della loro parte reale mediante strumenti quali il **criterio di Routh**

- Si ha una “risposta immediata”



- Non si ha la percezione del modo in cui le scelte progettuali del controllore $C(s)$ possano influenzare la stabilità del sistema in catena chiusa



- Non si hanno informazioni sulla robustezza del controllo



Stabilità della catena chiusa (3/3)

- È fondamentale l'introduzione di uno "strumento" in grado di:
 - Analizzare la stabilità in catena chiusa a partire dalle caratteristiche dinamiche della fdt d'anello, **senza richiedere il calcolo esplicito della $W(s)$ della catena chiusa**
 - Fornire **indicazioni utili per la sintesi** del controllore
 - Permettere di **valutare la proprietà di stabilità robusta** del sistema controllato

Il criterio di Nyquist



Legami fra D_a e D_w (1/3)

► Ricordiamo che:

$$G_a(s) \doteq \frac{N_a(s)}{D_a(s)}$$

Con retroazione
negativa unitaria

$$W_y(s) = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} = \frac{N_a(s)}{D_a(s) + N_a(s)} \doteq \frac{N_w(s)}{D_w(s)}$$

N.B.: $W(s)$ e $W_y(s)$ hanno lo stesso denominatore $D_w(s)$

► Si osserva che:

$$D_w(s) = D_a(s)(1 + G_a(s))$$



Legami fra D_a e D_w (2/3)

- Tale relazione esprime il **legame** esistente **fra il polinomio caratteristico della fdt d'anello e quello della fdt in catena chiusa**

$$\frac{D_w(s)}{D_a(s)} = 1 + G_a(s)$$

- È possibile ricavare conseguentemente una **relazione** fra le radici di tali polinomi, cioè **fra i poli della catena aperta e quelli della catena chiusa**, in particolare fra quelli **instabili**



Legami fra D_a e D_w (3/3)

- Il legame fra il numero di poli instabili della $G_a(s)$ ed il numero di poli instabili della $W_y(s)$ è dato dal numero di giri che il vettore $(1 + G_a(j\omega))$ compie attorno all'origine del piano complesso, al variare di ω da $-\infty$ a $+\infty$
- Il numero di tali giri è pari a quello dei giri compiuti dal vettore $G_a(j\omega)$ attorno al punto $(-1,0)$
- I giri compiuti da tale vettore possono essere valutati agevolmente dal diagramma di Nyquist di $G_a(j\omega)$



Il criterio di Nyquist (1/2)

► Siano:

- $n_{i,a}$ = numero di poli instabili di $G_a(s)$ (fdt d'anello)
- $n_{i,c}$ = numero di poli instabili di $W(s)$ (fdt in catena chiusa)
- N = numero dei **giri** compiuti **in senso orario** da $G_a(j\omega)$ attorno al punto $(-1,0)$ al variare di ω
(**N.B.**: I giri anti-orari sono da conteggiarsi come negativi)

► Si può dimostrare che
$$N = n_{i,c} - n_{i,a}$$

N.B.: $n_{i,a}$ e $n_{i,c}$ non possono **mai** assumere **valori negativi**



Il criterio di Nyquist (2/2)

Criterio di Nyquist

Condizione necessaria e sufficiente per l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa è

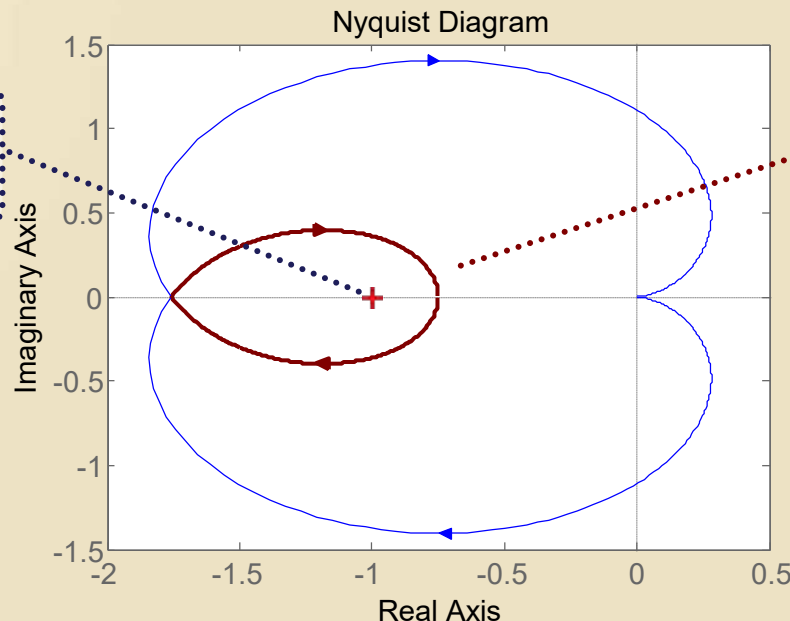
$$n_{i,c} = 0 \quad \Rightarrow \quad N = -n_{i,a}$$

sotto l'ipotesi che N sia "ben definito"

- N è ben definito (ovvero è definito senza ambiguità) se il diagramma di Nyquist non passa per il punto $(-1,0)$, detto **punto critico di Nyquist**

Calcolo del numero N di giri (1/2)

- **Primo metodo:** N è pari al numero di giri compiuti in senso orario attorno al punto critico, percorrendo l'intero diagramma di Nyquist di $G_a(j\omega)$ nel verso in cui ω cresce

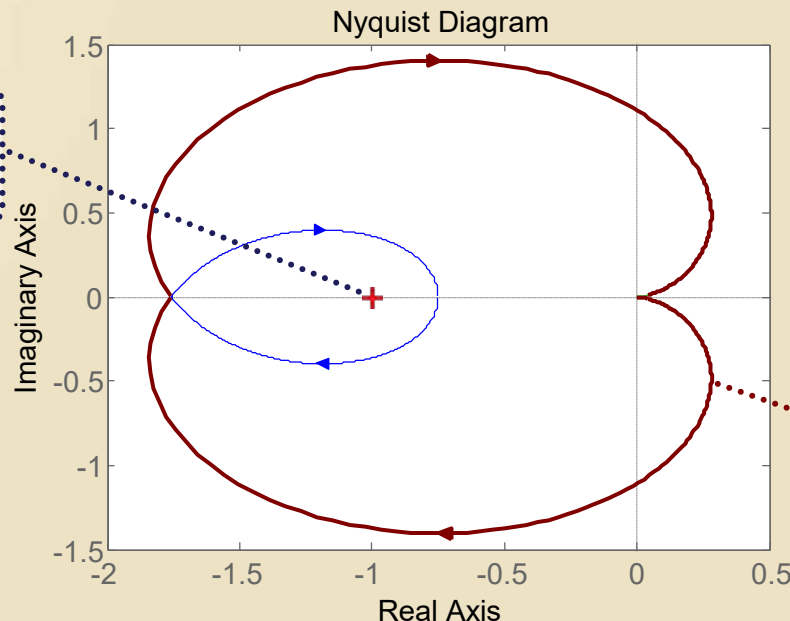


Punto critico
(-1,0)

Primo
giro
orario

Calcolo del numero N di giri (1/2)

- **Primo metodo:** N è pari al numero di giri compiuti in senso orario attorno al punto critico, percorrendo l'intero diagramma di Nyquist di $G_a(j\omega)$ nel verso in cui ω cresce

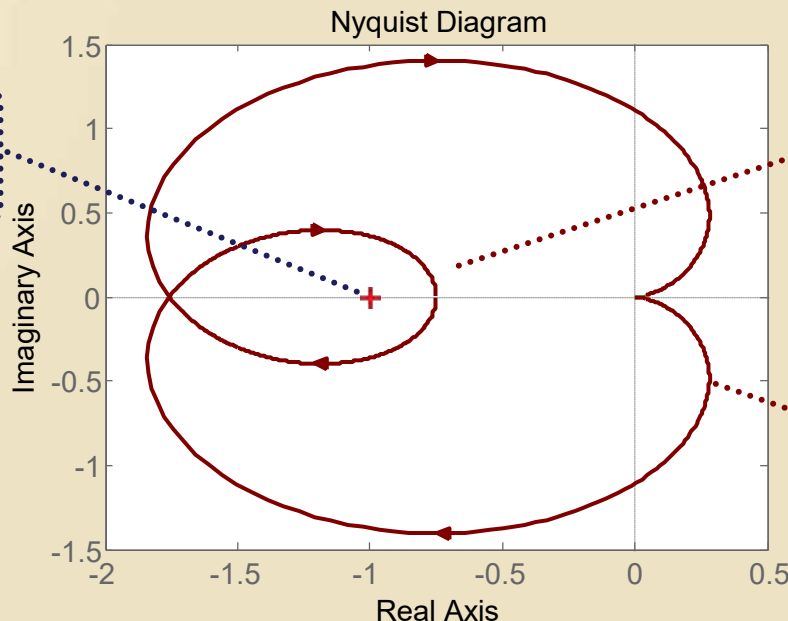


Punto critico
(-1,0)

Secondo
giro
orario

Calcolo del numero N di giri (1/2)

- **Primo metodo:** N è pari al numero di giri compiuti in senso orario attorno al punto critico, percorrendo l'intero diagramma di Nyquist di $G_a(j\omega)$ nel verso in cui ω cresce



Punto critico
(-1,0)

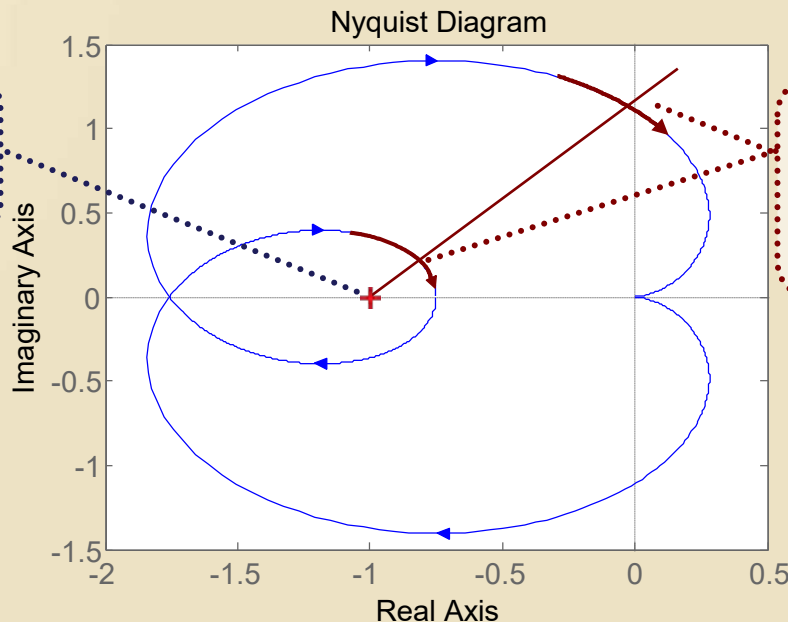
$$N = 2$$

Primo
giro
orario

Secondo
giro
orario

Calcolo del numero N di giri (2/2)

- **Secondo metodo:** N è pari al numero di intersezioni fra una qualsiasi semiretta uscente dal punto critico ed il diagramma di Nyquist di $G_a(j\omega)$, contate tenendo conto del verso del diagramma



Punto critico
(-1,0)

$$N = 2$$

Due
intersezioni
"orarie"



Analisi della stabilità con il criterio di Nyquist

- Si valuta il numero $n_{i,a}$ di poli instabili di $G_a(j\omega)$
- Si traccia il diagramma di Nyquist di $G_a(j\omega)$, determinando la posizione corretta del punto critico
- Si valuta il numero N di giri compiuti in senso orario da $G_a(j\omega)$ attorno al punto critico, verificando che esso sia ben definito
- Si calcola $n_{i,c} = N + n_{i,a}$ e si applica il criterio di Nyquist, determinando l'asintotica stabilità del sistema in catena chiusa se $n_{i,c} = 0$ o la sua instabilità (con $n_{i,c}$ poli instabili) se $n_{i,c} > 0$

Un esempio di applicazione del criterio

➤ Sia $G_a(s)$ data dalla fdt

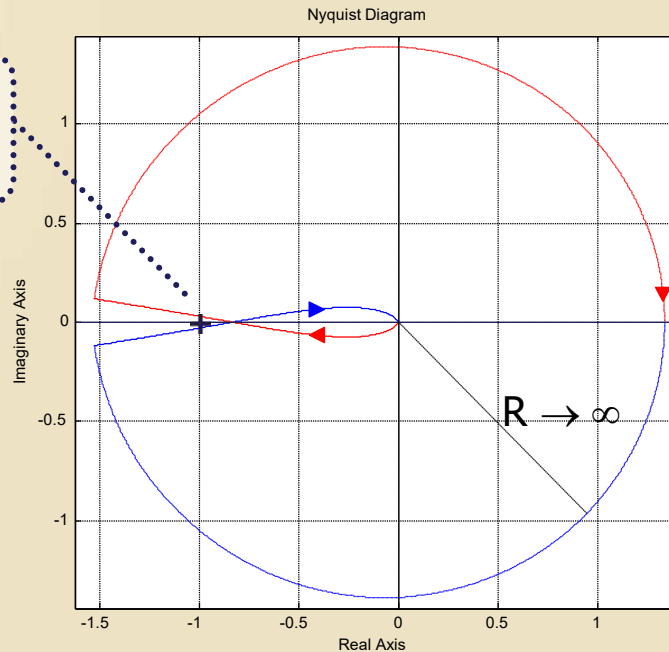
$$G_a(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$

$$\rightarrow n_{i,a} = 0$$

Punto critico
(-1,0)

$$N = 0$$

$$n_{i,c} = 0$$



Sistema asint.
stabile in
catena chiusa

Osservazione

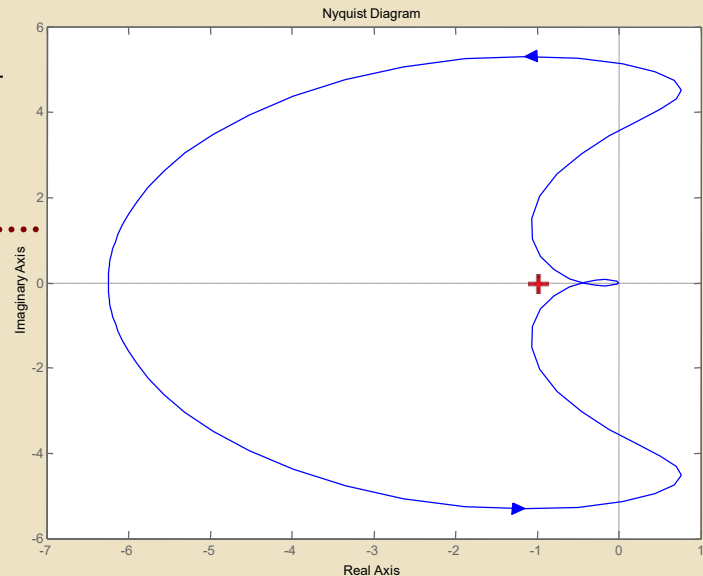
- Se $G_a(j\omega)$ è instabile ($n_{i,a} \geq 1$), la condizione di asintotica stabilità in catena chiusa ($n_{i,c} = 0$) può essere ottenuta solo in presenza di **giri antiorari** (cioè **negativi**) di $G_a(j\omega)$ attorno al punto critico

$$G_a(s) = \frac{10000(s+1)}{(s-0.8)(s+5)(s+20)^2}$$

$$n_{i,a} = 1$$

$$N = -1$$

$$n_{i,c} = 0$$



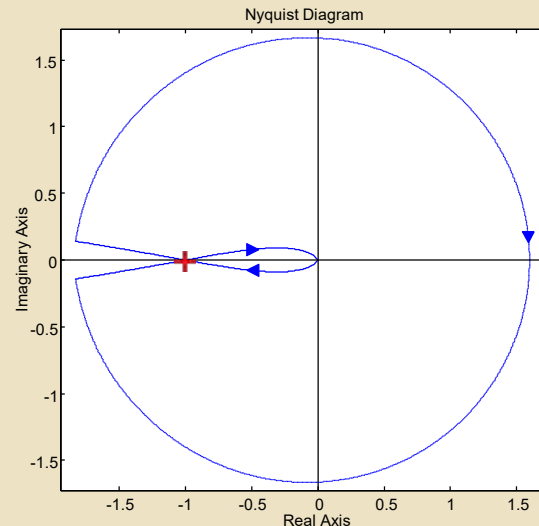
Passaggio di $G_a(j\omega)$ per il punto critico (1/2)

► Se esiste una pulsazione ω^* per cui:

$$\left| G_a(j\omega^*) \right| = 1 \quad \mathbf{e} \quad \angle G_a(j\omega^*) = -180^\circ$$

il diagramma di $G_a(j\omega^*)$ passa per il punto critico di Nyquist per $\omega = \omega^*$

$$G_a(s) = \frac{12(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$$



Passaggio di $G_a(j\omega)$ per il punto critico (1/2)

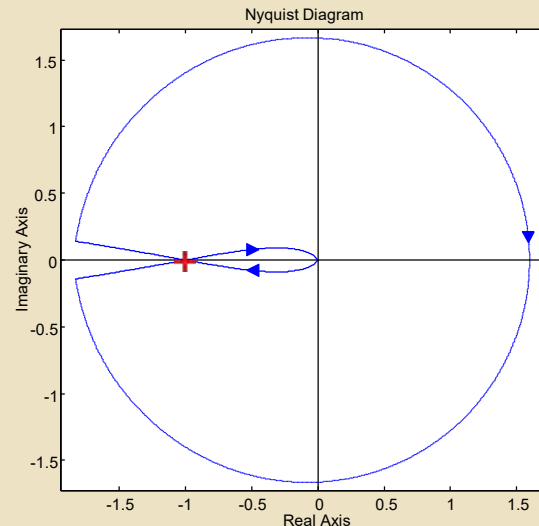
- Se esiste una pulsazione ω^* per cui:

$$\left| G_a(j\omega^*) \right| = 1 \quad \mathbf{e} \quad \angle G_a(j\omega^*) = -180^\circ$$

il diagramma di $G_a(j\omega^*)$ passa per il punto critico di Nyquist per $\omega = \omega^*$

➡ **N non risulta ben definito**

➡ **Il criterio di Nyquist non è applicabile**



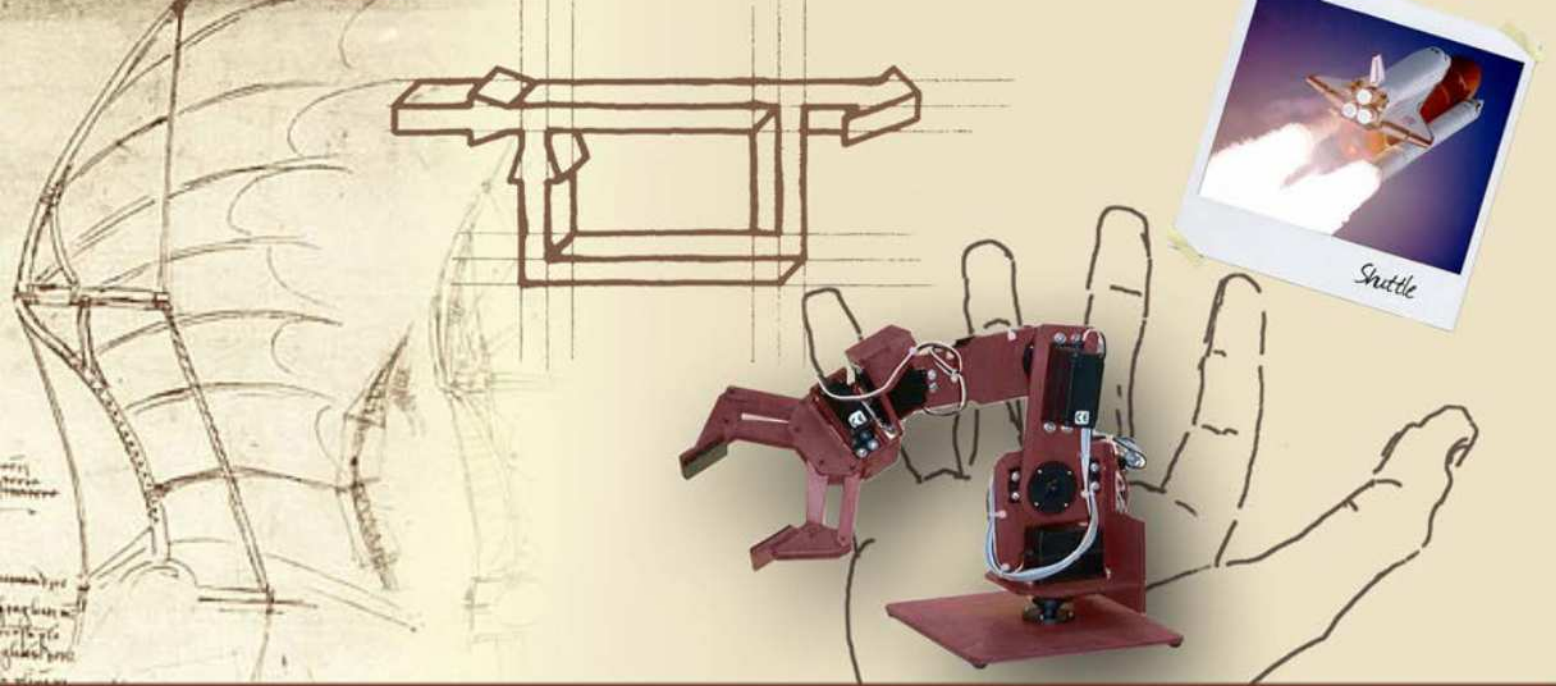


Passaggio di $G_a(j\omega)$ per il punto critico (2/2)

- In tali condizioni, il sistema in catena chiusa ha **almeno un polo sull'asse immaginario**

Il sistema **non** può essere **asintoticamente stabile**

- Non verranno fatte ulteriori analisi per distinguere le due possibilità (stabilità semplice o instabilità) perché comunque la specifica fondamentale di asintotica stabilità del sistema in catena chiusa non può essere soddisfatta



Criterio di Nyquist

Estensione a $G_a(s)$ con guadagno variabile



$G_a(s)$ a guadagno variabile

- Si consideri il caso in cui la fdt d'anello sia definita a meno di un **fattore di guadagno variabile**, dato da un parametro reale K_c

$$G_a(s) = K_c G_{a,f}(s)$$

- In caso di controllore puramente statico, K_c coincide con il controllore stesso e $G_{a,f}(s)$ con la fdt del sistema da controllare
- In caso di controllore dinamico, K_c è il guadagno stazionario del controllore, mentre $G_{a,f}(s)$ include la sua parte dinamica (completamente definita) e la fdt del sistema da controllare



Estensione del criterio di Nyquist (1/3)

- In tale caso, la relazione fra il polinomio caratteristico della fdt d'anello e quello della fdt in catena chiusa è data da

$$\frac{D_w(s)}{D_a(s)} = 1 + K_c G_{a,f}(s)$$

- La differenza fra il numero di poli instabili della $W_y(s)$ ed il numero di poli instabili della $G_a(s)$ è dato dal numero di giri che il vettore $K_c G_{a,f}(j\omega)$ compie attorno al punto $(-1,0)$ al variare di ω



Estensione del criterio di Nyquist (2/3)

- La differenza fra il numero di poli instabili della $W_y(s)$ ed il numero di poli instabili della $G_a(s)$ è dato dal numero di giri che il vettore $G_{a,f}(j\omega)$ compie attorno al punto $(-1/K_c, 0)$ al variare di ω
- La posizione del **punto critico** risulta **variabile al variare di K_c**



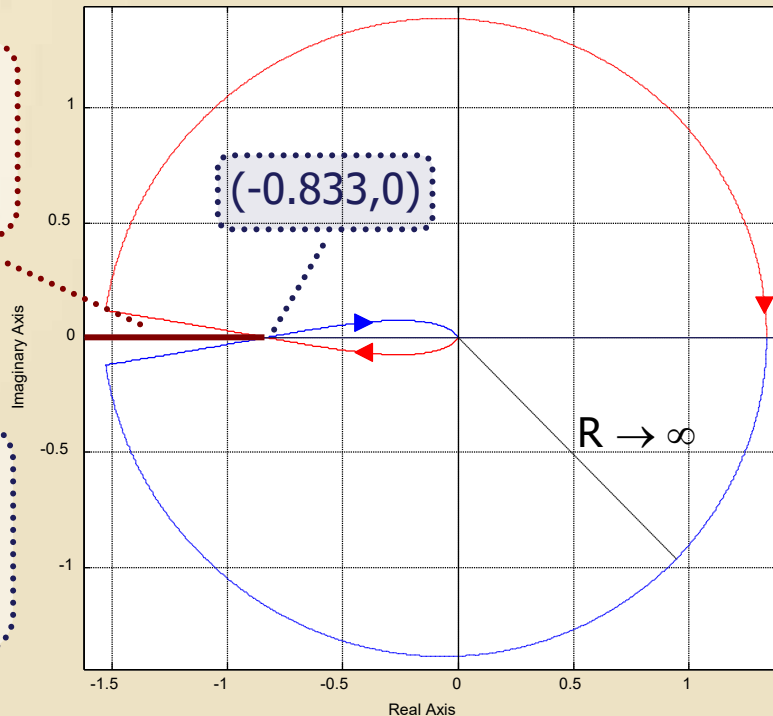
Estensione del criterio di Nyquist (3/3)

- Per estendere il **criterio di Nyquist** al caso di **$G_a(s)$ a guadagno variabile** è sufficiente
 - Considerare il **punto critico variabile** $(-1/K_c, 0)$ e modificare conseguentemente la definizione di N (numero dei giri compiuti in senso orario da $G_{a,f}(j\omega)$ attorno al punto critico variabile)
 - Spostare il punto critico lungo l'asse reale al variare di K_c , individuando il corrispondente valore di N dal diagramma di Nyquist di $G_{a,f}(j\omega)$
 - Calcolare $n_{i,c} = N + n_{i,a}$, determinando così la stabilità o l'instabilità del sistema in catena chiusa per tutti i valori di K_c per cui N è ben definito

Esempio (1/3)

➤ Sia $G_a(s) = K_c \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$ ➔ $n_{i,a} = 0$

Nyquist Diagram



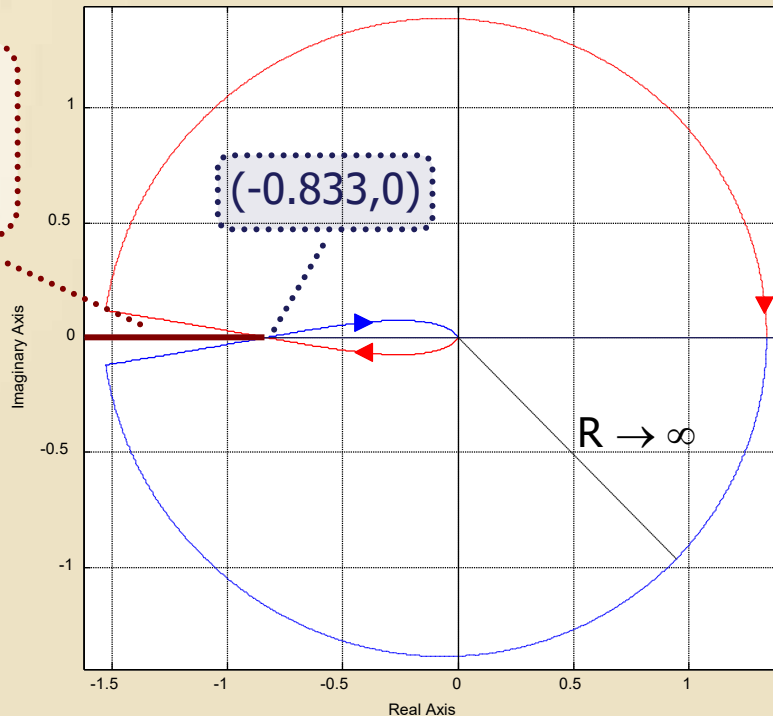
$(-1/K_c, 0)$
per $0 < K_c < 1.2$

Ricavato da
 $-1/K_c < -0.833$,
con $K_c > 0$

Esempio (1/3)

➤ Sia $G_a(s) = K_c \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$ ➔ $n_{i,a} = 0$

Nyquist Diagram



$(-1/K_c, 0)$
per $0 < K_c < 1.2$

$$N = 0$$

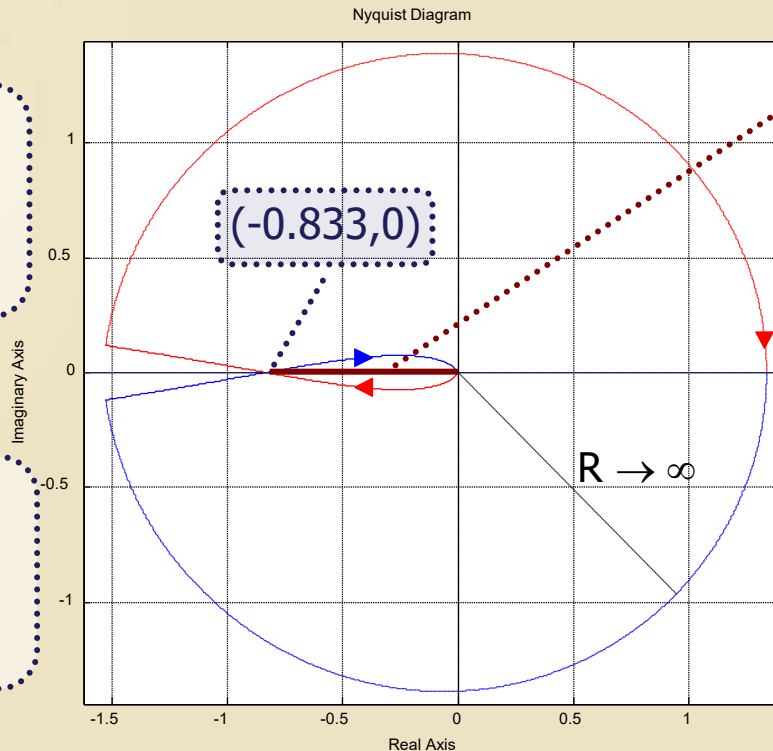
$$n_{i,c} = 0$$

Esempio (2/3)

➤ Sia $G_a(s) = K_c \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$ ➔ $n_{i,a} = 0$

Per $K_c = 1.2$
N non è ben
definito

Non si può
avere stabilità
asintotica



$(-1/K_c, 0)$
per $K_c > 1.2$

$N = 2$

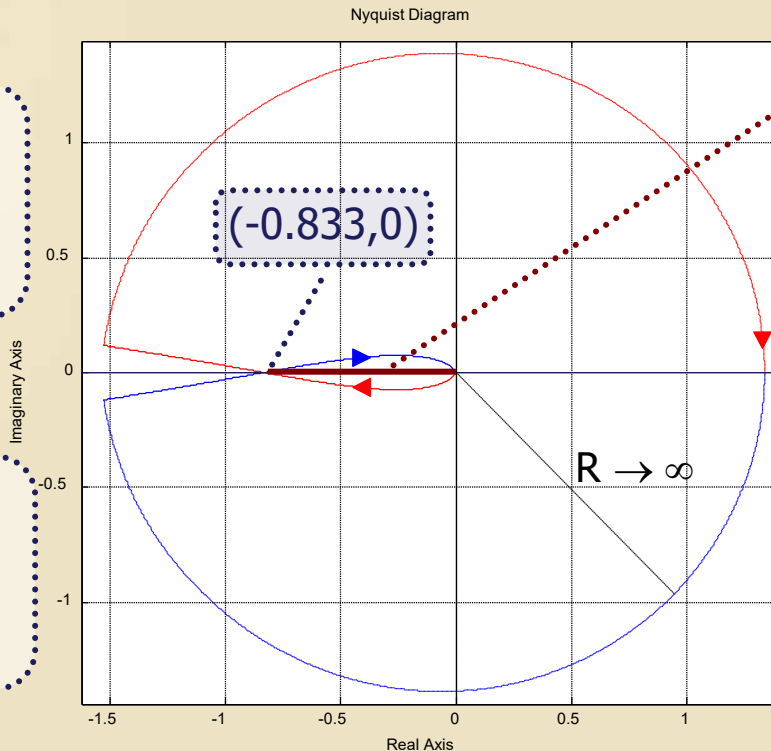
$n_{i,c} = 2$

Esempio (2/3)

➤ Sia $G_a(s) = K_c \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$ ➔ $n_{i,a} = 0$

Per $K_c = 1.2$
N non è ben
definito

Poli in: -1.27,
-1.43, +1.41j,
-1.41j



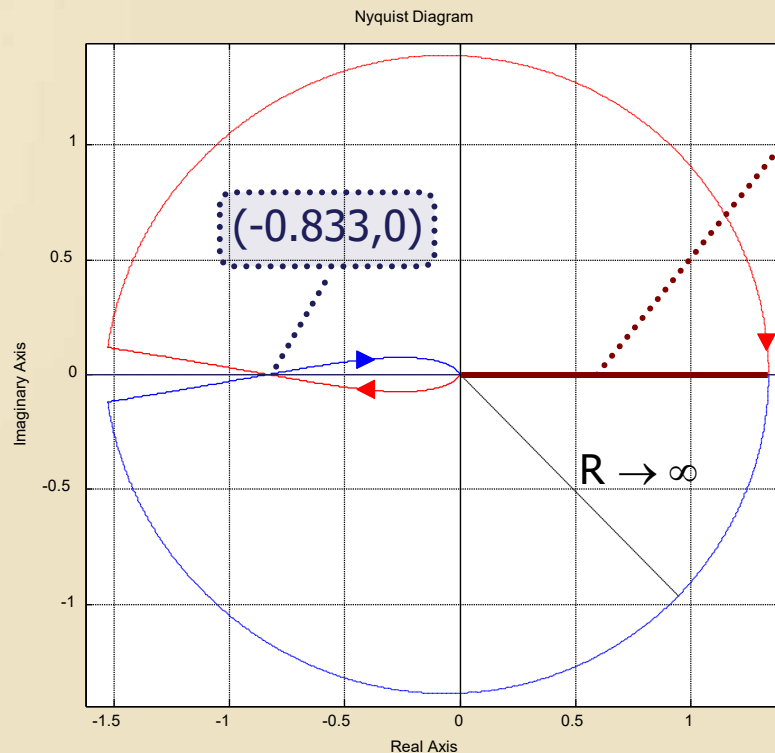
$(-1/K_c, 0)$
per $K_c > 1.2$

$N = 2$

$n_{i,c} = 2$

Esempio (3/3)

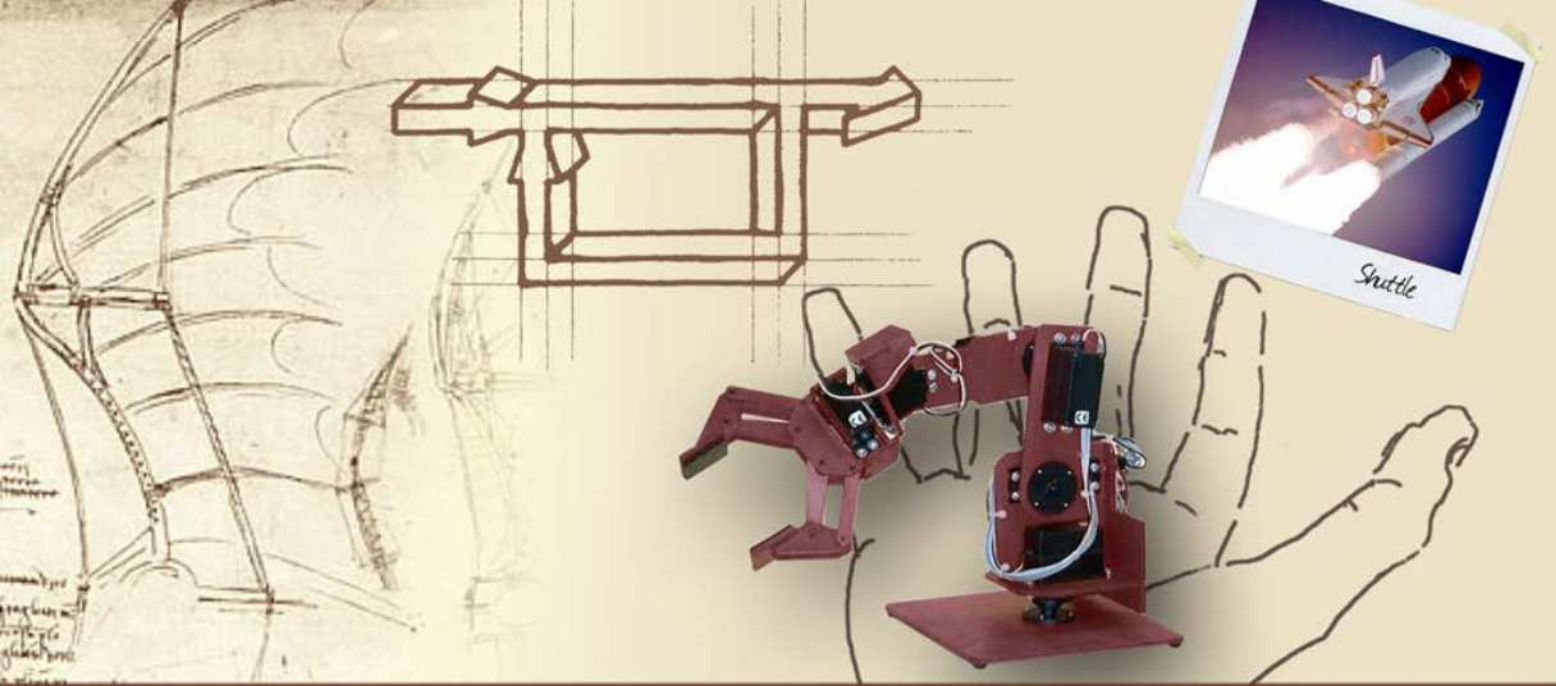
➤ Sia $G_a(s) = K_c \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$ ➔ $n_{i,a} = 0$



$(-1/K_c, 0)$
per $K_c < 0$

$N = 1$

$n_{i,c} = 1$



Criterio di Nyquist

**Applicazione a sistemi con
retroazione positiva**



Sistemi con retroazione positiva (1/2)

- Sia $G_a(s)$ la fdt d'anello di un sistema chiuso in **retroazione positiva**: la fdt in catena chiusa è in tal caso

$$W_y(s) = \frac{G_a(s)}{1 - G_a(s)} = \frac{N_a(s)}{D_a(s) - N_a(s)} \doteq \frac{N_w(s)}{D_w(s)}$$

- La relazione fra il polinomio caratteristico della fdt d'anello e quello in catena chiusa diventa

$$\frac{D_w(s)}{D_a(s)} = 1 - G_a(s)$$



Sistemi con retroazione positiva (2/2)

- La differenza fra il numero di poli instabili della $W_y(s)$ ed il numero di poli instabili della $G_a(s)$ è dato dal numero di giri che il vettore $-G_a(j\omega)$ compie attorno al punto $(-1,0)$ al variare di ω , pari al numero di giri che $G_a(j\omega)$ compie attorno al punto **$(+1,0)$**
- Se la fdt d'anello ha guadagno variabile ($G_a(s) = K_c G_{a,f}(s)$), tale differenza è pari al numero di giri che il vettore $G_a(j\omega)$ compie attorno al punto **$(+1/K_c, 0)$** al variare di ω



Applicazione del criterio di Nyquist

- Per applicare il **criterio di Nyquist a sistemi chiusi con una retroazione positiva** è sufficiente considerare il punto critico $(+1,0)$ (oppure $(+1/K_c,0)$ in caso di guadagno variabile) e modificare conseguentemente la definizione del parametro N
- Gli stessi risultati possono essere ottenuti cambiando il segno di K_c dopo aver fatto l'analisi di stabilità con retroazione negativa

Cambiare il segno di K_c equivale a cambiare il segno della retroazione

Esempio (1/4)

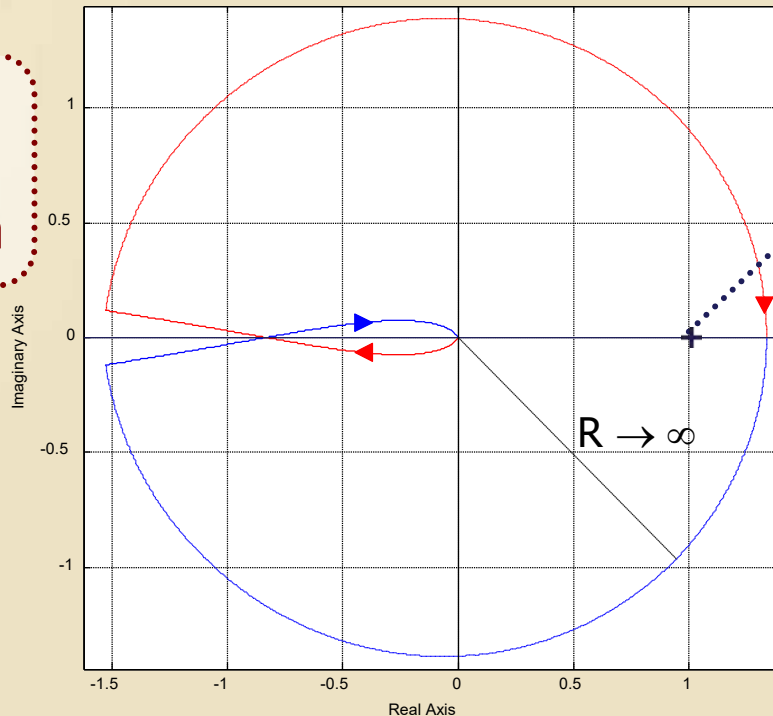
➤ Sia $G_a(s) = \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$

➔ $n_{i,a} = 0$

Sistema
instabile in
catena chiusa

**in retroazione
positiva**

Nyquist Diagram



Punto critico
(+1,0)

$N = 1$

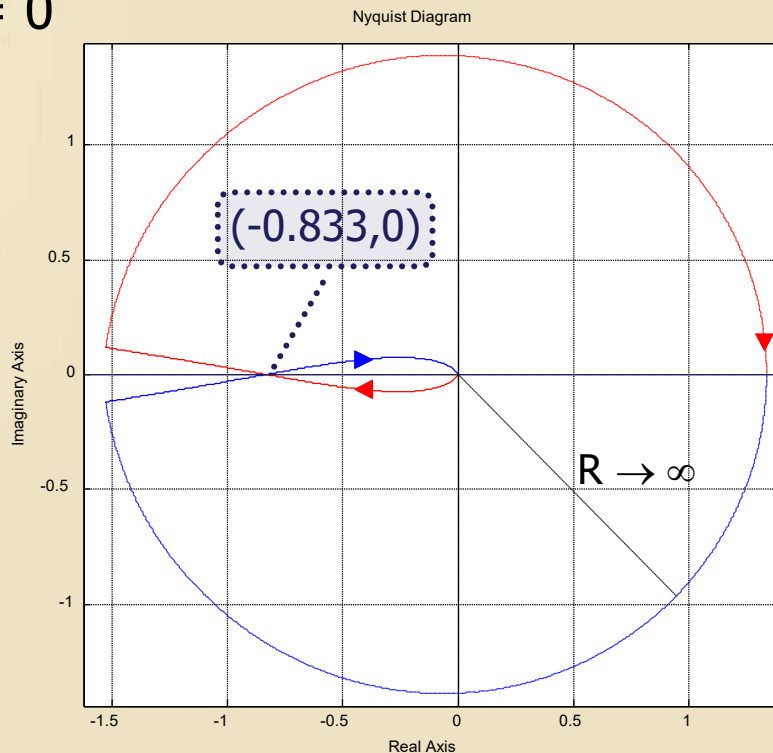
$n_{i,c} = 1$

Esempio (2/4)

➤ Sia $G_a(s) = K_c \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$

**in retroazione
positiva**

➔ $n_{i,a} = 0$



Esempio (2/4)

➤ Sia $G_a(s) = K_c \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$

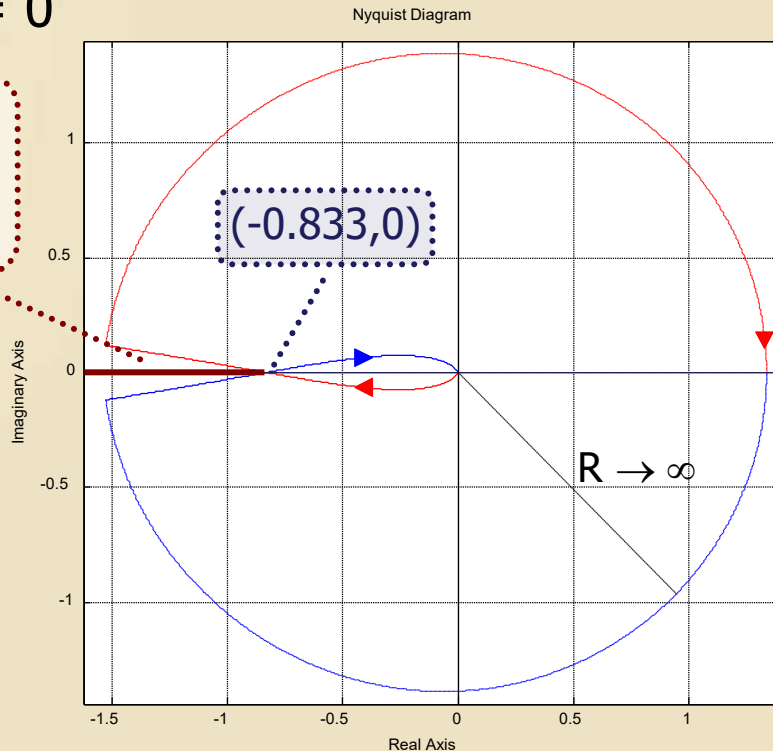
**in retroazione
positiva**

➔ $n_{i,a} = 0$

$(+1/K_c, 0)$
per $-1.2 < K_c < 0$

$N = 0$

$n_{i,c} = 0$

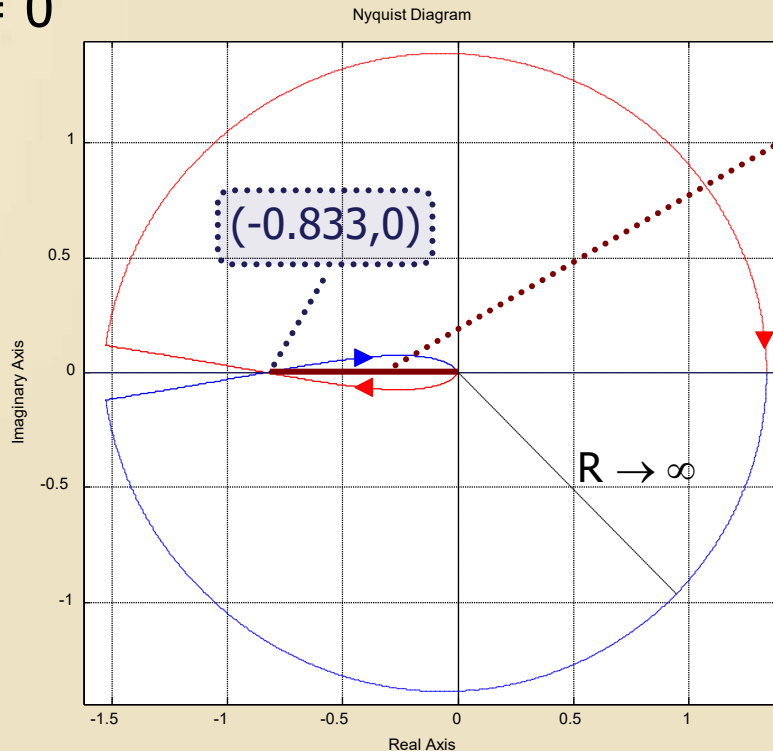


Esempio (3/4)

➤ Sia $G_a(s) = K_c \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$

➔ $n_{i,a} = 0$

**in retroazione
positiva**

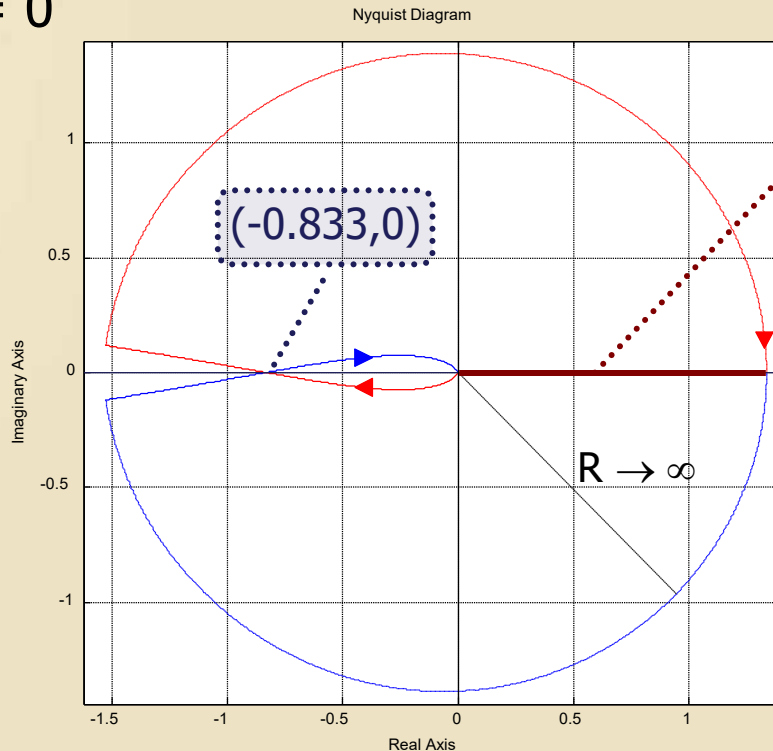


Esempio (4/4)

► Sia $G_a(s) = K_c \frac{10(s+1)}{s^2(s+2)(s+4)}$

**in retroazione
positiva**

► $n_{i,a} = 0$



$(+1/K_c, 0)$
per $K_c > 0$

$N = 1$

$n_{i,c} = 1$