

Definizione di Trasformata unilatera Zeta \mathcal{Z}

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} \doteq \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k} = F(z), \quad z \in \mathbf{C}; \quad \begin{array}{ccc} f(k) & \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} & F(z) \\ \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R} & & \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \\ & \xleftarrow{\mathcal{Z}^{-1}} & \end{array}$$

Proprietà fondamentali della Trasformata unilatera Zeta

Proprietà	Tempo k	Frequenza z
Linearità	$k_1 f_1(k) + k_2 f_2(k)$	$k_1 F_1(z) + k_2 F_2(z)$
Traslazione a sinistra	$f(k+1)$	$zF(z) - z \cdot f(k=0)$
Traslazione a destra di n passi	$f(k-n)$	$z^{-n} \cdot F(z)$
Somma	$\sum_{l=0}^k f(l)$	$\frac{z}{z-1} \cdot F(z)$
Convoluzione	$f(k) * g(k) = \sum_{l=0}^k f(l) g(k-l)$	$F(z) \cdot G(z)$
Teorema del valore iniziale	$f(k=0)$	$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$
Teorema del valore finale	$f(k \rightarrow \infty)$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot F(z)$

Tabella delle principali Trasformate unilatera Zeta

	$f(k), k \geq 0$	$F(z), z \in \mathbf{C}$
impulso unitario	$\delta(k)$	1
gradino unitario	$\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-1}$
polinomio fattoriale di grado l	$\binom{k}{l} \doteq \frac{k(k-1) \cdots (k-l+1)}{l!}, l > 0$	$\frac{z}{(z-1)^{l+1}}$
esponenziale associato al polo semplice p di $F(z)$	$p^k, p \in \mathbf{C}$	$\frac{z}{z-p}$
polinomio fattoriale* esponenziale associato al polo multiplo p di $F(z)$	$\binom{k}{l} p^{k-l}, p \in \mathbf{C}, l > 0$	$\frac{z}{(z-p)^{l+1}}$
	$\sin(k\theta), \theta \in \mathbf{R}$	$\frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$
	$\cos(k\theta), \theta \in \mathbf{R}$	$\frac{z(z - \cos \theta)}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}$
potenza di matrice	$A^k, A \in \mathbf{R}^{n \times n}$	$z \cdot (zI_n - A)^{-1}$

Decomposizione in fratti semplici di funzioni razionali fratte

Caso #1: $F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, con $N(0) = b_0 = 0$

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = z \cdot \frac{N(z)}{a_n z} \cdot \left[\frac{D(z)}{a_n} \right]^{-1} = \\ &= z \cdot \frac{N'(z)}{D'(z)} = z \cdot \frac{N'(z)}{z^n + a'_{n-1} z^{n-1} + \dots + a'_1 z + a'_0} = z \cdot \frac{N'(z)}{\prod_{i=1}^n (z-p_i)} = z \cdot \frac{N'(z)}{\prod_{i=1}^{n'} (z-p_i)^{\mu_i}} = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} R_{ij} \underbrace{\frac{z}{(z-p_i)^j}}_{\text{fratto semplice}} \end{aligned}$$

$N(z), D(z)$: polinomi in z , di grado m ed n rispettivamente ($m \leq n$)

n : numero di radici di $D(z)$ e $D'(z)$ = numero di poli di $F(z)$

n' : numero di radici distinte di $D(z)$ e $D'(z)$ = numero di poli non coincidenti di $F(z)$

p_i : i -esima radice di $D(z)$ e $D'(z)$ = i -esimo polo di $F(z)$; μ_i : molteplicità dell' i -esimo polo di $F(z)$

R_{ij} : j -esimo residuo associato a p_i mediante il fratto $\frac{R_{ij} z}{(z-p_i)^j}$: $R_{ij} = \lim_{z \rightarrow p_i} \frac{1}{(\mu_i - j)!} \frac{\partial^{\mu_i - j}}{\partial z^{\mu_i - j}} \left[(z-p_i)^{\mu_i} \frac{N'(z)}{D'(z)} \right], 1 \leq j \leq \mu_i$

se p_i è un polo semplice ($\mu_i = 1$), allora ha associato soltanto il fratto semplice $\frac{R_i z}{z-p_i}$, con $R_i = \lim_{z \rightarrow p_i} (z-p_i) \frac{N'(z)}{D'(z)}$

Caso #2: $F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, con $N(0) = b_0 \neq 0, m < n$

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} = \frac{N(z)}{a_n} \cdot \left[\frac{D(z)}{a_n} \right]^{-1} = \\ &= \frac{N'(z)}{D'(z)} = \frac{N'(z)}{z^n + a'_{n-1} z^{n-1} + \dots + a'_1 z + a'_0} = \frac{N'(z)}{\prod_{i=1}^n (z-p_i)} = \frac{N'(z)}{\prod_{i=1}^{n'} (z-p_i)^{\mu_i}} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} R_{ij} \frac{z}{(z-p_i)^j} \end{aligned}$$

Antitrasformata unilatera Zeta di funzioni razionali fratte

Caso #1: $F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, con $N(0) = b_0 = 0 \Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{R_{ij} z}{(z-p_i)^j} \right\} = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} R_{ij} \binom{k}{j-1} p_i^{k-j+1} \varepsilon(k)$

Caso #2: $F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, con $N(0) = b_0 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{ \frac{1}{z} \cdot \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} \frac{R_{ij} z}{(z-p_i)^j} \right\} = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^{\mu_i} R_{ij} \binom{k-1}{j-1} p_i^{k-j} \varepsilon(k-1)$

Se $F(z)$ ha un polo complesso p_i con molteplicità μ_i , allora $F(z)$ presenta anche il polo complesso $p_l = p_i^*$ con molteplicità $\mu_l = \mu_i$. In tal caso, è opportuno antitrasformare a coppie i fratti semplici di $F(z)$ associati a p_i e p_l , poiché $R_{lj} = R_{ij}^*$ e quindi:

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{R_{ij} z}{(z-p_i)^j} + \frac{R_{lj} z}{(z-p_l)^j} \right\} = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{R_{ij} z}{(z-p_i)^j} + \frac{R_{ij}^* z}{(z-p_i^*)^j} \right\} = 2 |R_{ij}| \binom{k}{j-1} |p_i|^{k-j+1} \cos((k-j+1) \angle p_i + \angle R_{ij}) \varepsilon(k)$$

$$\text{con } \angle p_i = \arctan \left(\frac{\Im m(p_i)}{\Re e(p_i)} \right), \angle R_{ij} = \arctan \left(\frac{\Im m(R_{ij})}{\Re e(R_{ij})} \right)$$