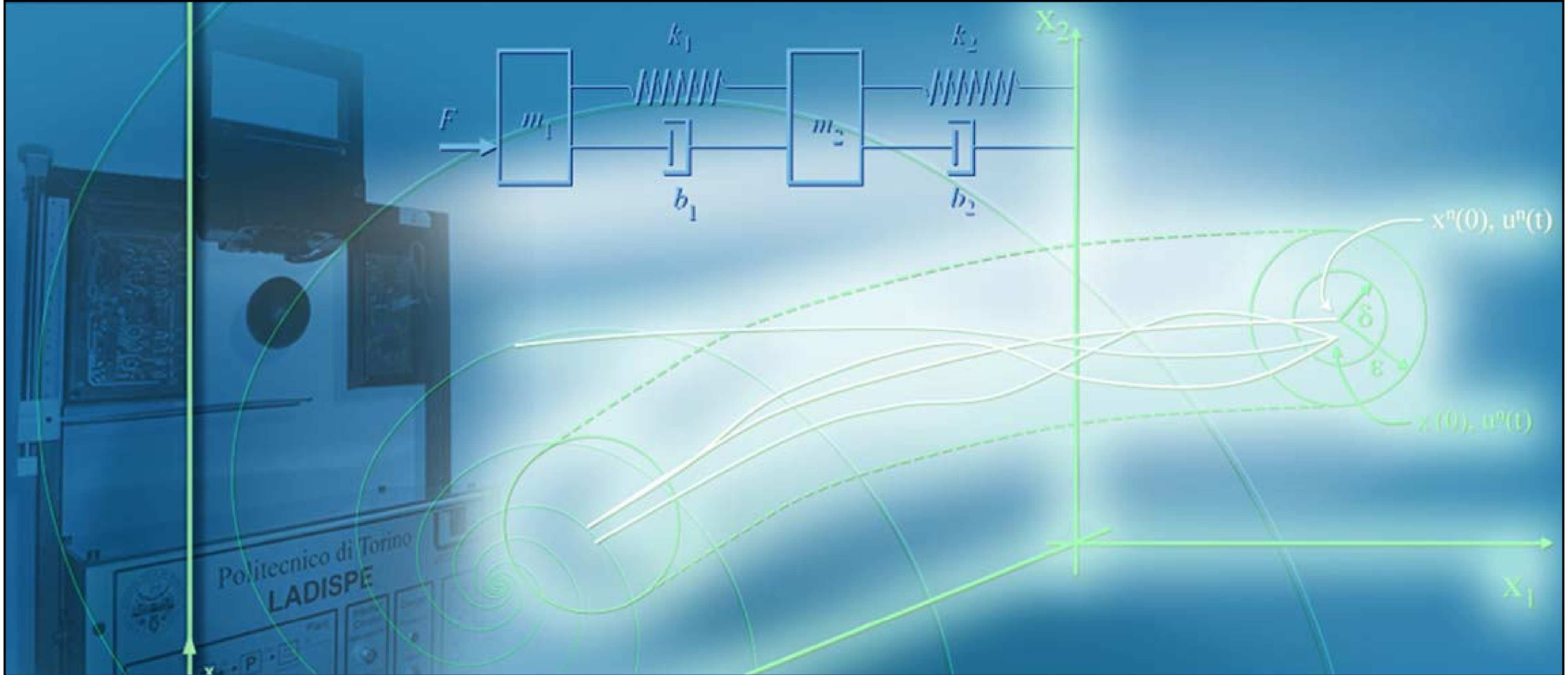
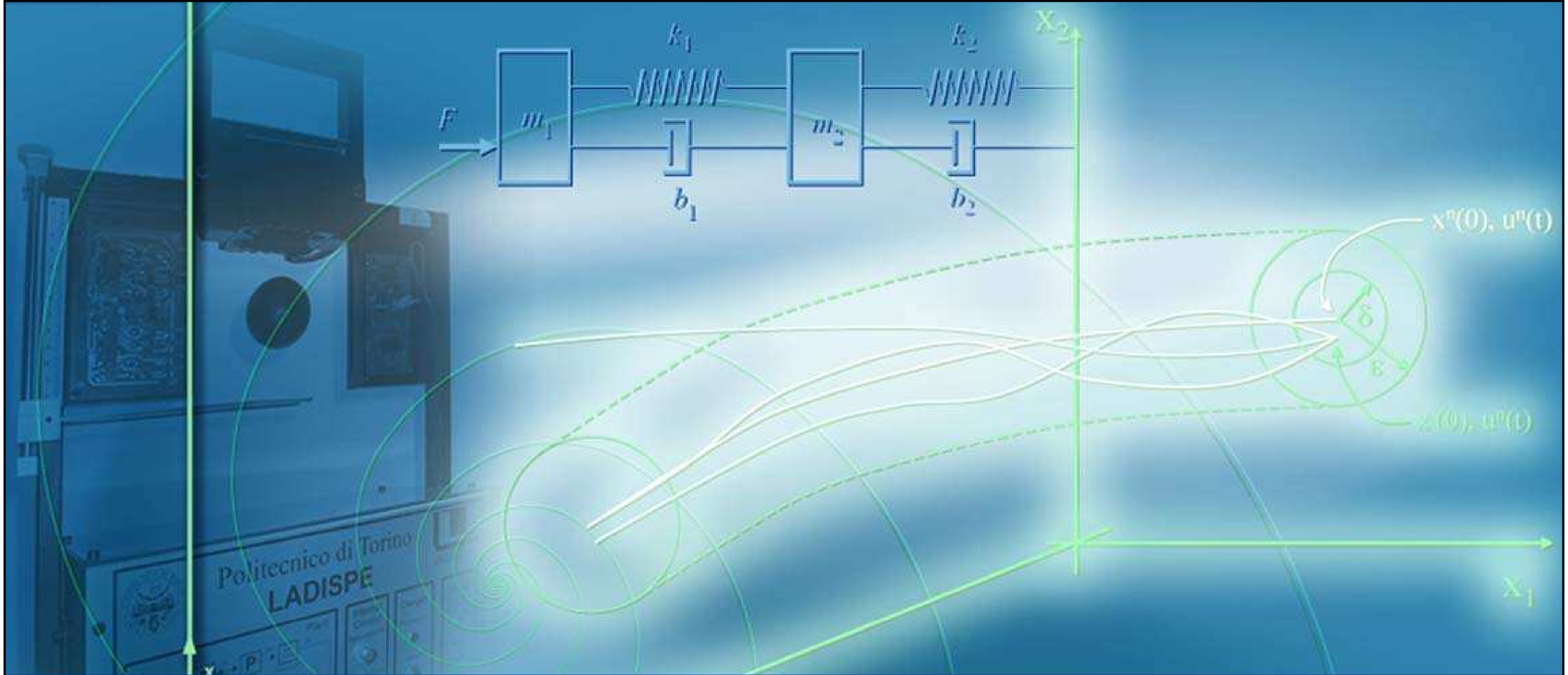


Proprietà strutturali e leggi di controllo

Retroazione statica dallo stato

Retroazione statica dallo stato

- La legge di controllo
- Esempi di calcolo di leggi di controllo
- Il problema della regolazione



Retroazione statica dallo stato

La legge di controllo

Introduzione (1/2)

- Consideriamo un sistema dinamico LTI TC a un ingresso ($u(t) \in \mathbb{R}^p \rightarrow p = 1 \rightarrow B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$) descritto dalle equazioni di stato:

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)}$$

- Ricordiamo che:
  - Il comportamento dinamico del sistema dipende dagli autovalori della matrice A
  - La possibilità di modificare tale comportamento dinamico tramite l'ingresso è descritta dalla proprietà di raggiungibilità
  - Le caratteristiche di raggiungibilità dipendono dalla coppia (A,B)

Introduzione (2/2)

- Vogliamo studiare come si può agire sull'ingresso, in modo da modificare il comportamento dinamico del sistema al fine di:
  - Rendere asintoticamente stabile un sistema instabile
  - Cambiare le caratteristiche del movimento di un sistema (asintoticamente) stabile tramite l'imposizione di modi naturali convergenti che ne migliorino le proprietà di:
    - Smorzamento
    - Rapidità di convergenza
  - Portare lo stato del sistema in un dato stato di equilibrio

Legge di controllo

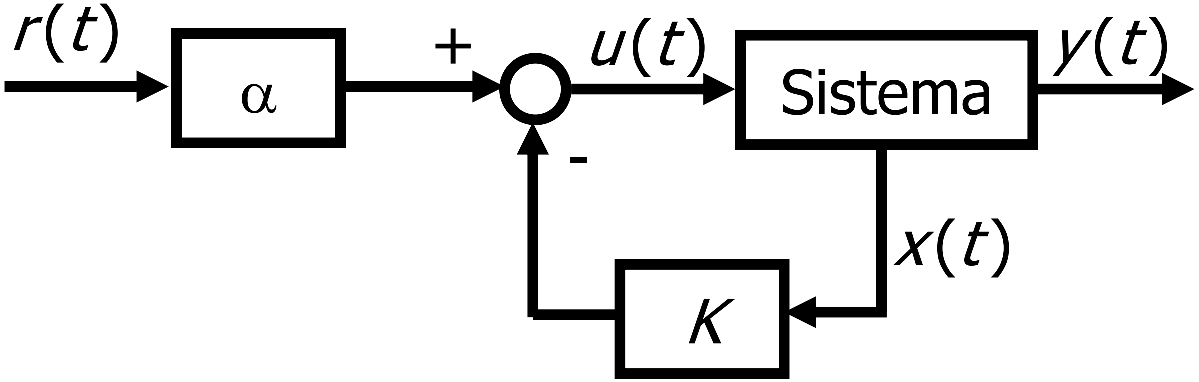
- Per modificare il comportamento dinamico del sistema, l'ingresso $u(t)$ deve poter agire in modo da cambiare gli autovalori della matrice A
- Questo può avvenire se $u(t)$ dipende dallo stato $x(t)$ secondo la seguente **legge di controllo**

$$\boxed{u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)}$$

  - $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}$
  - $K \in \mathbb{R}^{1xn}$ → vettore o matrice dei guadagni
  - $r(t)$ → ingresso esterno (riferimento)
  - $\alpha \in \mathbb{R}$

Retroazione statica dallo stato

- Consideriamo lo schema:



- L'ingresso $u(t)$ è la somma di due contributi:
  - $\alpha\, r(t)$ → azione diretta o feedforward (serve per imporre un dato movimento ad es. un equilibrio)
  - $K x(t)$ → **retroazione dallo stato** (state feedback)
- L'ingresso $u(t) = -\,K x(t) + \alpha\, r(t)$ rappresenta quindi una **legge di controllo per retroazione statica dallo stato**

Equazioni del sistema controllato

- Sostituendo l'espressione della legge di controllo:

$$\boxed{u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)}$$

nelle equazioni di stato

$$\boxed{\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)}$$

- Si ottengono le equazioni di stato del sistema controllato complessivo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \underset{\substack{\uparrow \\ u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)}}{=} Ax(t) + B\left[-Kx(t) + \alpha r(t)\right] =$$

$$= \left(A - BK\right)x(t) + B\alpha r(t)$$

Il problema di assegnazione degli autovalori

$$\boxed{\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B\alpha r(t)}$$

- Vogliamo studiare sotto quali condizioni, tramite un'opportuna scelta della matrice K, è possibile fare in modo che gli n autovalori della matrice $A - BK$ coincidano con n numeri fissati arbitrariamente
- Tale problema va sotto il nome di: **assegnazione degli autovalori mediante retroazione statica dallo stato**

Il teorema di assegnazione degli autovalori

- Al proposito, vale il seguente

Teorema di assegnazione degli autovalori

- Il problema di assegnazione degli autovalori mediante retroazione statica dallo stato ammette soluzione se e soltanto se la coppia di matrici (A,B) soddisfa la condizione di completa raggiungibilità:

$$\boxed{\rho(M_R) = \rho\left(\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = n}$$

Commenti

- Pertanto, se un sistema dinamico risulta **completamente raggiungibile**, è sempre possibile determinare la matrice dei guadagni $\boldsymbol{K}$ di una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo $\boldsymbol{u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)}$ in modo da assegnare arbitrariamente tutti gli $\boldsymbol{n}$ autovalori della matrice $\boldsymbol{A - BK}$
- Nel caso in cui il sistema non risulti completamente raggiungibile, la legge di controllo può modificare solo gli $\boldsymbol{r}$ autovalori corrispondenti alla sua parte raggiungibile

Sistemi a più ingressi

- Il teorema di assegnazione degli autovalori vale anche nel caso di sistemi a più ingressi ($u(t) \in \mathbb{R}^p \rightarrow B \in \mathbb{R}^{n\times p}$)
- La legge di controllo ha la medesima forma:

$$\boxed{u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)}$$

ma:

  - $K \in \mathbb{R}^{pxn} \rightarrow$ matrice dei guadagni

- In generale anche l'ingresso $r(t)$ può avere più componenti (tipicamente pari alla dimensione q dell'uscita $y(t) \rightarrow r(t) \in \mathbb{R}^q$). In tal caso:
  - $\alpha \in \mathbb{R}^{pxq}$

Equazioni di ingresso – stato – uscita (1/2)

- Vogliamo ricavare le equazioni di ingresso – stato – uscita quando al sistema dinamico LTI TC:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}}$$

viene applicata **legge di controllo per retroazione statica dallo stato**

$$\boxed{u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)}$$

Equazioni di ingresso – stato – uscita (2/2)

- Si ha:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \underset{\substack{\uparrow \\ u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)}}{=} Ax(t) + B\left[-Kx(t) + \alpha r(t)\right] =$$

$$= \left(A - BK\right)x(t) + B\alpha r(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \underset{\substack{\uparrow \\ u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)}}{=} Cx(t) + D\left[-Kx(t) + \alpha r(t)\right] =$$

$$= \left(C - DK\right)x(t) + D\alpha r(t)$$

Matrice di trasferimento

- Quindi:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B\alpha r(t)$$
$$y(t) = (C - DK)x(t) + D\alpha r(t)$$

- La matrice di trasferimento ***H*(*s*)** tra l'ingresso ***r*(*t*)** (riferimento) e l'uscita ***y*(*t*)** si calcola come:

$$H(s) = \left\{(C - DK)\left[sI - (A - BK)\right]^{-1} B + D\right\}\alpha$$

Il caso di sistemi dinamici LTI TD

- Il teorema di assegnazione degli autovalori vale anche per i sistemi LTI TD del tipo:

$$\boxed{x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)}$$

nei quali la **legge di controllo per retroazione statica dallo stato** assume la forma:

$$\boxed{u(k) = -Kx(k) + \alpha r(k)}$$

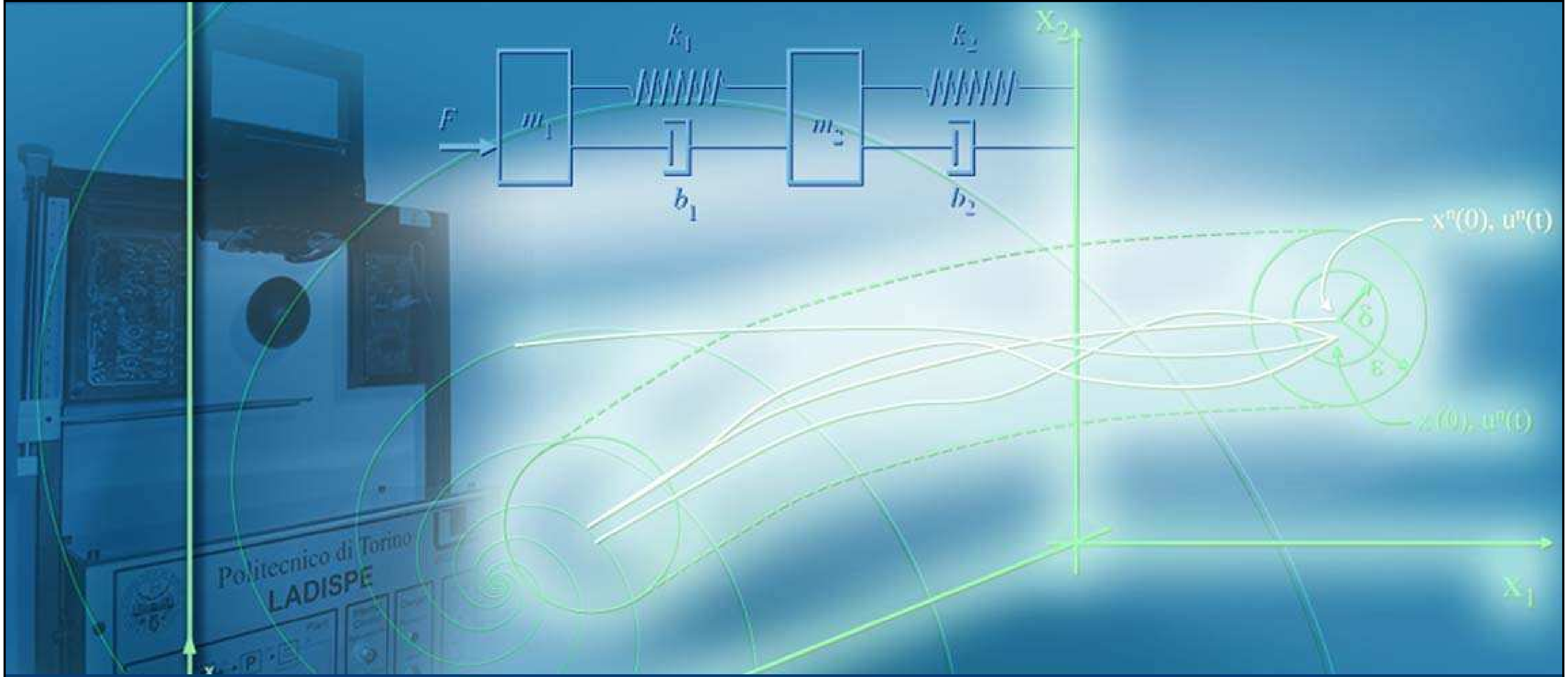
Il caso di sistemi dinamici LTI TD

- Le equazioni di ingresso – stato – uscita del sistema controllato mediante retroazione statica dallo stato sono:

$$\boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= \left(A - BK\right)x(k) + B\alpha r(k) \\ y(k) &= \left(C - DK\right)x(k) + D\alpha r(k) \end{aligned}}$$

- La matrice di trasferimento ***H(z)*** tra l'ingresso ***r(k)*** (riferimento) e l'uscita ***y(k)*** è data da:

$$\boxed{H(z) = \left\{\left(C - DK\right)\left[zI - \left(A - BK\right)\right]^{-1} B + D\right\}\alpha}$$



Retroazione statica dallo stato

Esempi di calcolo di leggi di controllo

Esempio 1: formulazione del problema

- Dato il seguente sistema dinamico LTI TC:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

trovare, se possibile, i coefficienti della matrice dei guadagni K di una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo:

$$u(t) = -Kx(t) + \alpha\, r(t)$$

che permette di assegnare gli autovalori del sistema retroazionato in: $\lambda_{1,des} = -2$ e $\lambda_{2,des} = -3$

Esempio 1: procedimento di soluzione

- Per determinare gli elementi della matrice K occorre procedere come segue:
  - Verificare la completa raggiungibilità del sistema (in caso contrario non è possibile calcolare K)
  - Dato l'insieme degli autovalori da assegnare $\{\lambda_{1,des}, \ldots \lambda_{n,des}\}$, si calcola il polinomio caratteristico desiderato $p_{des}(\lambda)$
  - Si calcola in funzione degli elementi incogniti di K il polinomio caratteristico della matrice $A-BK$: $p_{A-BK}(\lambda)$
  - Si determinano gli elementi incogniti di K applicando il principio di identità dei polinomi:

$$\boxed{p_{A-BK}(\lambda) = p_{des}(\lambda)}$$

Esempio 1: verifica della raggiungibilità

- Le matrici A e B del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Poiché il sistema è di ordine n = 2, la matrice di raggiungibilità è della forma:

$$M_R = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}$$

- Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$M_R = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \rho(M_R) = 2$$

- Per cui il sistema è **completamente raggiungibile**

Esempio 1: determinazione di $p_{des}(\lambda)$

- Gli autovalori desiderati da assegnare sono:

$$\boxed{\lambda_{1,des} = -2, \lambda_{2,des} = -3}$$

- Il corrispondente polinomio caratteristico desiderato è quindi:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{i,des}) = \\ &= (\lambda - \lambda_{1,des})(\lambda - \lambda_{2,des}) = \\ &= (\lambda - (-2))(\lambda - (-3)) = \\ &= \lambda^2 + 5\lambda + 6 \end{aligned}$$

Esempio 1: determinazione di $p_{A-BK}(\lambda)$

- Poiché $n = 2$, la matrice dei guadagni K è della forma:

$$\boxed{K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}}$$

si ha

$$\boxed{\begin{aligned} A - BK &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 \\ 2k_1 & 2k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + k_1 & 3 + k_2 \\ 4 - 2k_1 & 2 - 2k_2 \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

Esempio 1: calcolo di $p_{A-BK}(\lambda)$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 1+k_1 & 3+k_2 \\ 4-2k_1 & 2-2k_2 \end{bmatrix}$$

- Per cui:

$$p_{A-BK}(\lambda) = \det\left(\lambda I - \left(A - BK\right)\right) =$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda-(1+k_1) & -(3+k_2) \\ -(4-2k_1) & \lambda-(2-2k_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\lambda-(1+k_1)\right]\left[\lambda-(2-2k_2)\right]-(3+k_2)(4-2k_1) =$$

$$= \lambda^2 + (-3-k_1+2k_2)\lambda + 8k_1 - 6k_2 - 10$$

Esempio 1: calcolo di *K*

- Affinché i polinomi:

$$\boxed{p_{des}(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6}$$

e

$$\boxed{p_{A-BK}(\lambda) = \lambda^2 + (-3 - k_1 + 2k_2)\lambda + 8k_1 - 6k_2 - 10}$$

abbiano le stesse radici, per il principio di identità dei polinomi, deve risultare:

$$\boxed{\begin{cases} -3 - k_1 + 2k_2 = 5 \\ 8k_1 - 6k_2 - 10 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 8 \\ k_2 = 8 \end{cases}}$$

- Per cui:

$$\boxed{K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \end{bmatrix}}$$

Esempio 2: formulazione del problema

- Dato il seguente sistema LTI TD:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 & -0.03 & -0.3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

trovare, se possibile, i coefficienti della matrice dei guadagni K di una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo:

$$u(k) = -\,K\,x(k) + \alpha\, r(k)$$

che permette di assegnare gli autovalori del sistema retroazionato in: $\lambda_{1,des} = \lambda_{2,des} = \lambda_{3,des} = 0.2$

Esempio 2: procedimento di soluzione

- Per determinare gli elementi della matrice K occorre procedere come segue:
  - Verificare la completa raggiungibilità del sistema (in caso contrario non è possibile calcolare K)
  - Dato l'insieme degli autovalori da assegnare $\{\lambda_{1,des}, \ldots \lambda_{n,des}\}$, si calcola il polinomio caratteristico desiderato $p_{des}(\lambda)$
  - Si calcola in funzione degli elementi incogniti di K il polinomio caratteristico della matrice $A-BK$: $p_{A-BK}(\lambda)$
  - Si determinano gli elementi incogniti di K applicando il principio di identità dei polinomi:

$$\boxed{p_{A-BK}(\lambda) = p_{des}(\lambda)}$$

Esempio 2: analisi della raggiungibilità

- Le matrici A e B del sistema dato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 & -0.03 & -0.3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Notiamo che:
  - La matrice A è in forma compagna inferiore
  - La matrice B ha tutti gli elementi nulli tranne l'ultimo
- → Il sistema dato è in forma canonica di raggiungibilità e pertanto risulta completamente raggiungibile

Esempio 2: determinazione di $p_{des}(\lambda)$

- Gli autovalori desiderati da assegnare sono:

$$\boxed{\lambda_{1,des} = \lambda_{2,des} = \lambda_{3,des} = 0.2}$$

- Il corrispondente polinomio caratteristico desiderato è quindi:

$$\boxed{p_{des}(\lambda) = (\lambda - 0.2)^3 = \lambda^3 - 0.6\lambda^2 + 0.12\lambda - 0.008}$$

Esempio 2: determinazione di $p_{A-BK}(\lambda)$

- Poiché $n = 3$, la matrice dei guadagni K è della forma:

$$\boxed{K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}}$$

si ha

$$\boxed{\begin{aligned} A - BK &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 & -0.03 & -0.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 & -0.03 & -0.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 - k_1 & -0.03 - k_2 & -0.3 - k_3 \end{bmatrix} \end{aligned}}$$

Esempio 2: calcolo di $p_{A-BK}(\lambda)$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.001 - k_1 & -0.03 - k_2 & -0.3 - k_3 \end{bmatrix}$$

- Poiché $A - BK$ è in forma compagna inferiore, si può direttamente determinare il polinomio caratteristico in base ai coefficienti dell'ultima riga:

$$p_{A-BK}(\lambda) = \lambda^3 + (0.3 + k_3)\lambda^2 + (0.03 + k_2)\lambda + 0.001 + k_1$$

Esempio 2: calcolo di K

- Affinché i polinomi:

$$p_{des}(\lambda) = \lambda^3 - 0.6\lambda^2 + 0.12\lambda - 0.008$$

e

$$p_{A-BK}(\lambda) = \lambda^3 + (0.3 + k_3)\lambda^2 + (0.03 + k_2)\lambda + 0.001 + k_1$$

abbiano le stesse radici, deve risultare:

$$\begin{cases} 0.3 + k_3 = -0.6 \\ 0.03 + k_2 = 0.12 \\ 0.001 + k_1 = -0.008 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_3 = -0.9 \\ k_2 = 0.09 \\ k_1 = -0.009 \end{cases}$$

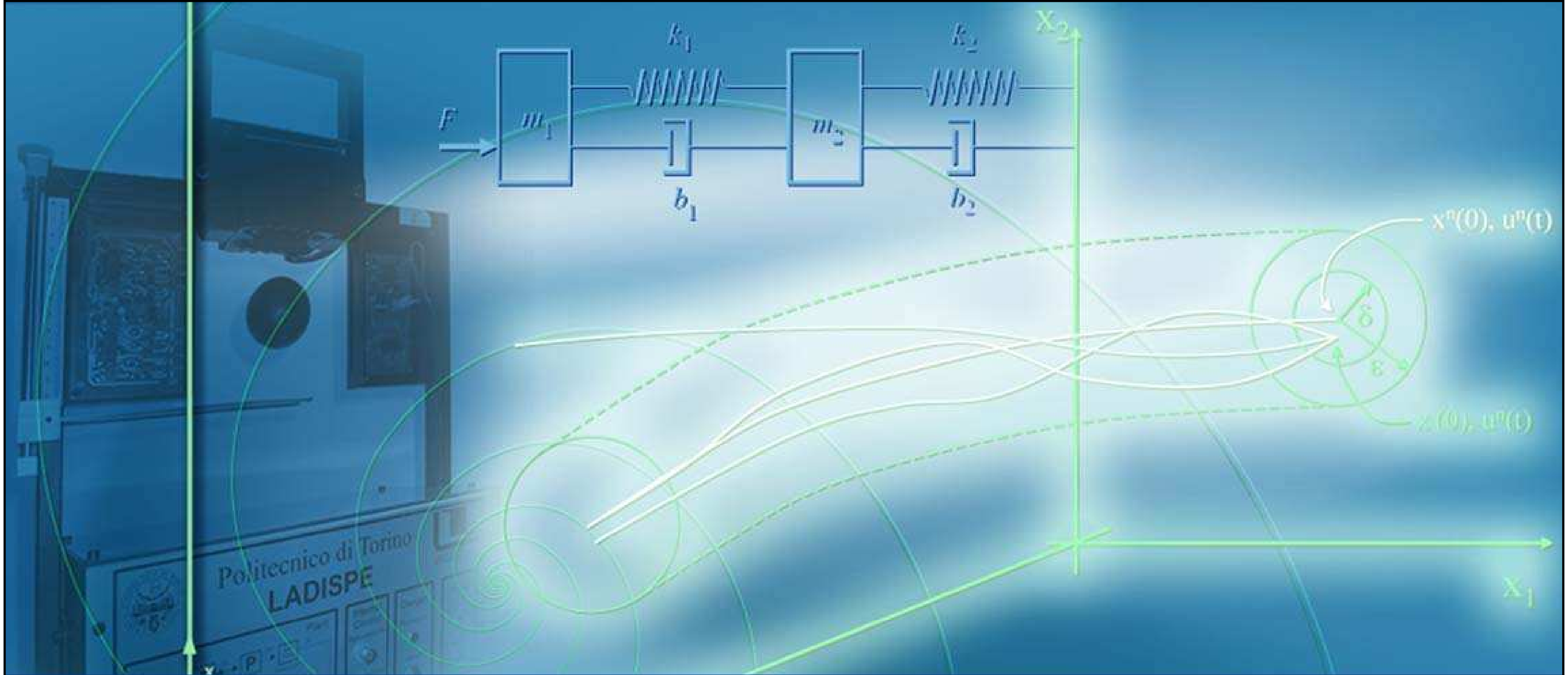
$$K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.009 & 0.09 & -0.9 \end{bmatrix}$$

MatLab

- In MatLab, la matrice dei guadagni *K* può essere calcolata, nel caso di autovalori di molteplicità unitaria, mediante l'istruzione: `K = place(A,B,p)`
  - `A, B:` matrici della rappresentazione di stato

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

  - `p:` vettore contenente gli autovalori da assegnare
- Se invece gli autovalori da assegnare non hanno molteplicità unitaria, bisogna usare l'istruzione: `K = acker(A,B,p)`
- Per maggiori dettagli sulle istruzioni, digitare `help place, help acker` al prompt di MatLab



Retroazione statica dallo stato

Il problema della regolazione

Stati ed uscita di equilibrio (1/2)

- Consideriamo il sistema dinamico LTI TC:

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \left(A - BK\right)x(t) + B\alpha r(t)\\ y(t) &= \left(C - DK\right)x(t) + D\alpha r(t)\end{aligned}}$$

- Supponiamo che:
  - La matrice K sia tale da rendere il sistema asintoticamente stabile
  - $r(t) \in \mathbb{R}$, $y(t) \in \mathbb{R}$ → sistema SISO, $\alpha \in \mathbb{R}$
  - $r(t) = \bar{r}$ = costante, $\forall t$
- Vogliamo calcolare lo stato $\bar{x}$ e l'uscita $\bar{y}$ di equilibrio corrispondenti all'ingresso $r(t) = \bar{r}$

Stati ed uscita di equilibrio (2/2)

- In base alla condizione di equilibrio per sistemi dinamici LTI TC, $r(t)=\bar{r}, x(t)=\bar{x}, y(t)=\bar{y}, \forall t$ si ha:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= 0 = (A-BK)\bar{x} + B\alpha\bar{r} \\ \bar{y} &= (C-DK)\bar{x} + D\alpha\bar{r} \end{aligned}}$$

per cui:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= -(A-BK)^{-1}B\alpha\bar{r} \\ \bar{y} &= \left[-(C-DK)(A-BK)^{-1}B + D\right]\alpha\bar{r} \end{aligned}}$$

La regolazione dell'uscita

- Data l'asintotica stabilità del sistema considerato, applicando l'ingresso costante $\bar{r}$, i movimenti dello stato e dell'uscita tenderanno, per tempi sufficientemente grandi, ai loro rispettivi valori di equilibrio $\bar{x}$ e $\bar{y}$ per qualsiasi condizione iniziale
- Ci chiediamo se è possibile fare in modo che il valore di equilibrio dell'uscita $\bar{y}$ coincida con $\bar{r}$:

$$\boxed{\bar{y} = \bar{r}}$$

- Tale problema è noto come: **regolazione dell'uscita**

Condizione di regolazione (1/2)

$$\boxed{\bar{y} = \left[-(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D \right] \alpha \bar{r}}$$

- Se $\bar{r} = 0 \Rightarrow \bar{y} = \bar{r} = 0, \ \forall t, \forall \alpha$
- Più in generale, se $\bar{r} \neq 0$, allora per ottenere la condizione

$$\boxed{\bar{y} = \bar{r}}$$

deve risultare:

$$\boxed{\left[-(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D \right] \alpha = 1}$$

Condizione di regolazione (2/2)

$$\boxed{\left[-\left(C-DK\right)\left(A-BK\right)^{-1}B+D\right]\alpha=1}$$

- Si può agire sul parametro α
- Infatti, dal momento che risulta:

$$\boxed{\alpha\in\mathbb{R},-\left(C-DK\right)\left(A-BK\right)^{-1}B+D\in\mathbb{R}}$$

per ottenere la condizione di regolazione si pone:

$$\boxed{\alpha=\left[-\left(C-DK\right)\left(A-BK\right)^{-1}B+D\right]^{-1}}$$

Sistemi LTI TD: equilibrio

- Per i sistemi dinamici LTI TD SISO controllati mediante retroazione statica dallo stato, le equazioni di ingresso – stato – uscita sono:

$$\boxed{\begin{aligned} x(k+1) &= \left(A - BK\right)x(k) + B\alpha r(k) \\ y(k) &= \left(C - DK\right)x(k) + D\alpha r(k) \end{aligned}}$$

- La condizione di equilibrio è:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{x} &= \left(A - BK\right)\bar{x} + B\alpha\bar{r} \\ \bar{y} &= \left(C - DK\right)\bar{x} + D\alpha\bar{r} \end{aligned}}$$

Sistemi LTI TD: condizione di regolazione

- Quindi

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{x} &= \left[I-\left(A-BK\right)\right]^{-1}B\alpha\bar{r}\\ \bar{y} &= \left\{\left(C-DK\right)\left[I-\left(A-BK\right)\right]^{-1}B+D\right\}\alpha\bar{r}\end{aligned}}$$

- La regolazione dell'uscita

$$\boxed{\bar{y}=\bar{r}}$$

si ottiene ponendo:

$$\boxed{\alpha=\left\{\left(C-DK\right)\left[I-\left(A-BK\right)\right]^{-1}B+D\right\}^{-1}}$$

Esempio: formulazione del problema

- Al seguente sistema dinamico LTI TC raggiungibile:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} x(t)$$

viene applicata una legge di controllo per retroazione statica dallo stato del tipo:

$$u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)$$

con $K = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$. Supponendo $r(t) = \bar{r} = 3\varepsilon(t)$, calcolare il valore di α in modo da ottenere la regolazione dell'uscita $\bar{y} = \bar{r}$

Esempio: procedimento di soluzione

- Per determinare il valore di α occorre procedere come segue:
  - Verificare che la retroazione dallo stato ottenuta mediante la matrice K stabilizzi asintoticamente il sistema
  - Calcolare α in base alla condizione di regolazione

Esempio: verifica dell'asintotica stabilità

- Calcolando la matrice $A - BK$:

$$A - BK = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- Si nota che gli autovalori sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -4$
- Il sistema dato risulta quindi asintoticamente stabile

Esempio: calcolo di α

- Applicando la condizione per la regolazione di sistemi LTI TC

$$\alpha = \left[-(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D \right]^{-1}$$

con i dati

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}, D = 0, K = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

si ottiene:

$$\alpha = -\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} = 0.\overline{1}$$