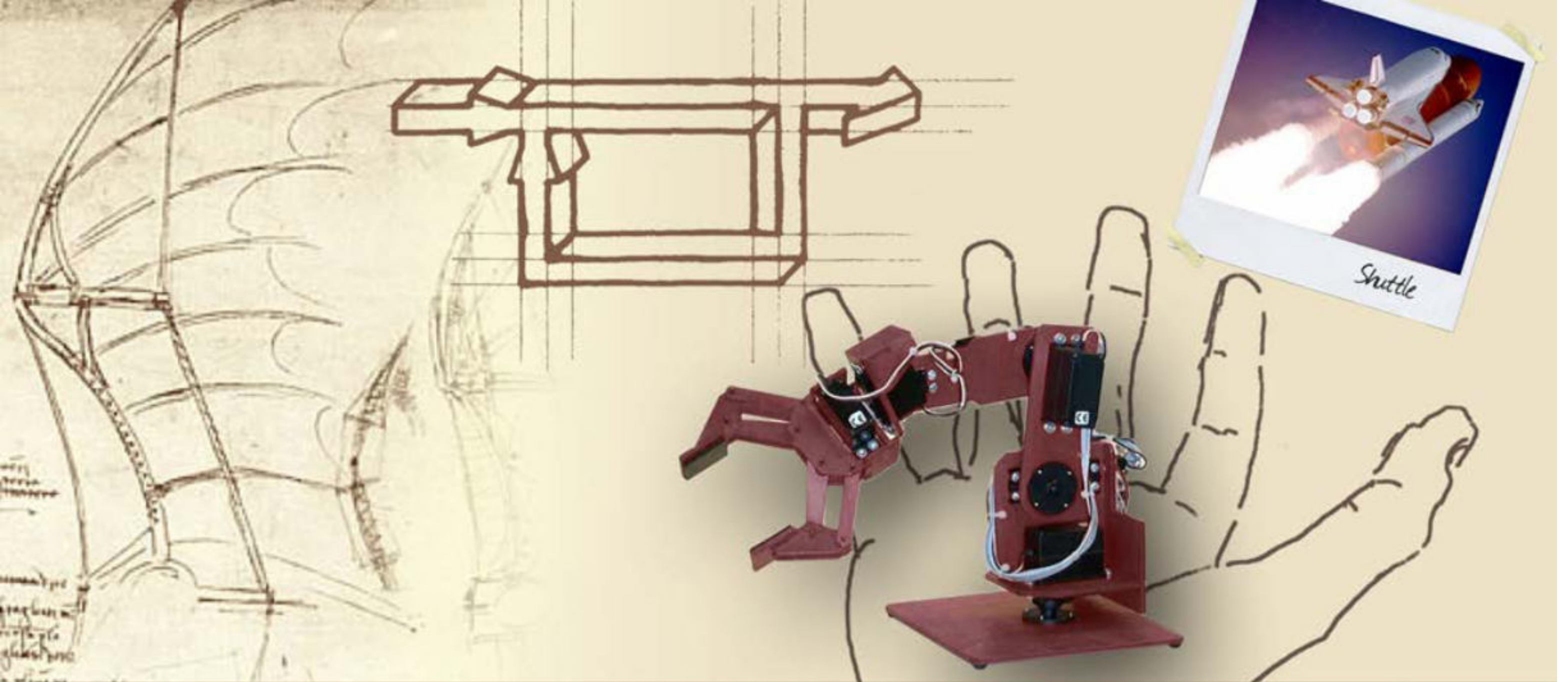
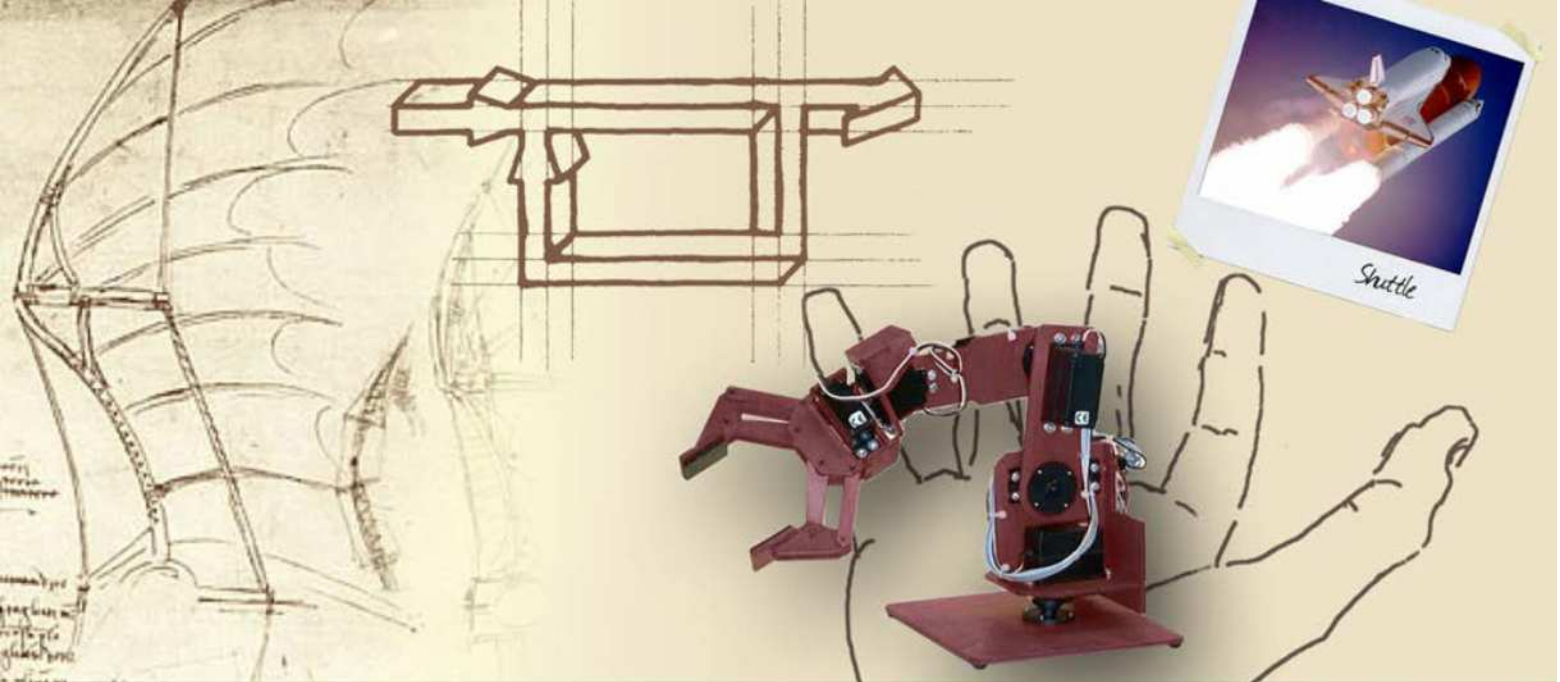


Stabilità dei sistemi di controllo in retroazione

Diagrammi di Bode

Diagrammi di Bode

- Risposta in frequenza
  - Rappresentazione grafica “naturale”
  - Rappresentazione grafica “modificata”
- Diagrammi di Bode di fdt elementari
- Esempio



Diagrammi di Bode

Risposta in frequenza

Risposta in frequenza (1/3)

- La risposta in frequenza si analizza tramite

$$G(s)\big|_{s=j\omega} = G(j\omega) = \left|G(j\omega)\right| \cdot e^{j\angle G(j\omega)} =$$

$$= M(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad 0 \le \omega < \infty$$

- Sia s che ω sono misurati in **rad/s** (equivalente a **s^{-1}**)
- L'unità di misura di $G(j\omega)$ e di $\left|G(j\omega)\right| = M(\omega)$, data dal rapporto fra l'unità di misura dell'uscita e quella dell'ingresso, verrà definita d'ora in poi **unità naturale (u_{nat})**

Risposta in frequenza (2/3)

- $\varphi(\omega)$ è misurata in **radianti (rad)** oppure in **gradi (°)**
- Per il modulo $M(\omega)$ è usuale utilizzare anche l'unità di misura **decibel (dB)**:

$$M_{dB} = 20\log_{10}\left(M_{u_{nat}}\right)$$

- Proprietà particolari:
  - Se $G = G_1^{\pm 1} G_2^{\pm 1} \cdots G_k^{\pm 1}$ (blocchi in cascata)
  - Allora $M_{u_{nat}} = M_{1,u_{nat}}^{\pm 1} M_{2,u_{nat}}^{\pm 1} \cdots M_{k,u_{nat}}^{\pm 1}$

IMPORTANTE!

$$M_{dB} = \pm M_{1,dB} \pm M_{2,dB} \pm \cdots \pm M_{k,dB}$$

$$\varphi = \pm\varphi_1 \pm \varphi_2 \pm \cdots \pm \varphi_k$$

Risposta in frequenza (3/3)

- Rappresentazioni grafiche

- $M(\omega)$: $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ (variabile indipendente ω in ascissa, variabile dipendente M in ordinata)

- $\varphi(\omega)$: $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ (variabile indipendente ω in ascissa, variabile dipendente φ in ordinata)

Rappresentazione grafica "naturale"

- Pulsazione ω (rad/s) in ascissa, modulo M (u_{nat}) in ordinata, ω in scala lineare

Diagramma "naturale" del modulo

- Pulsazione ω (rad/s) in ascissa, fase φ (gradi) in ordinata, ω in scala lineare

Diagramma "naturale" della fase

Rappresentazione grafica "modificata"

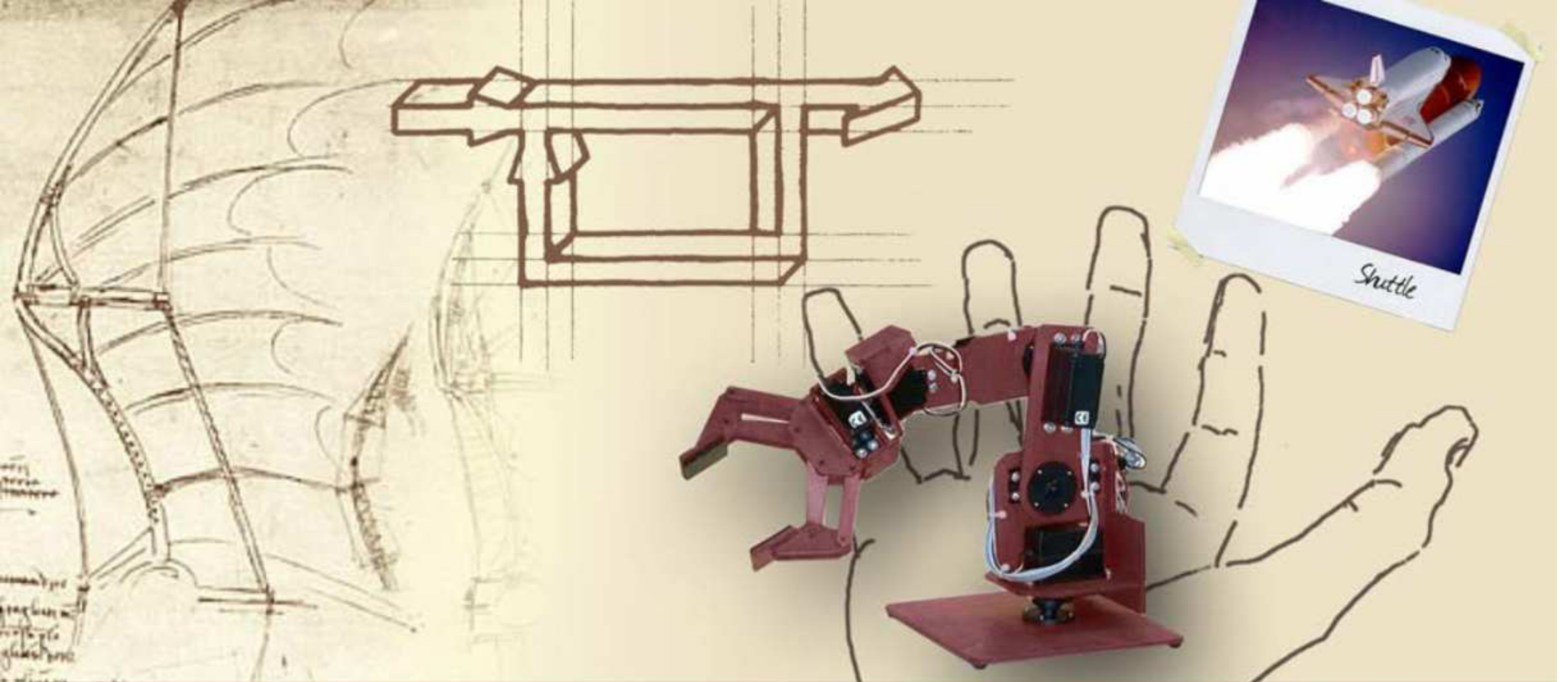
- Pulsazione ω (rad/s) in ascissa, modulo M (dB) in ordinata, ω in scala logaritmica

Diagramma "di Bode" del modulo

- Pulsazione ω (rad/s) in ascissa, fase φ (gradi) in ordinata, ω in scala logaritmica

Diagramma "di Bode" della fase

- **Diagramma di Bode $\rightarrow$ DdB**



Diagrammi di Bode di fdt elementari

Fdt elementari (1/5)

- Una qualunque fdt può essere espressa come prodotto di fdt elementari (fattori) appartenenti a quattro diverse tipologie

$$f_1(s): \quad K$$

$$f_2(s): \quad s^{\pm i}$$

$$f_3(s): \quad \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{\pm i}$$

$$f_4(s): \quad \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm i}$$

Fdt elementari (2/5)

- La molteplicità **i** implica che i DdB del singolo fattore si ottengono semplicemente moltiplicando per **i** i DdB di modulo e fase dei fattori di molteplicità unitaria:

$$f_1(s): \quad K$$

$$f_2(s): \quad s^{\pm 1}$$

$$f_3(s): \quad \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{\pm 1}$$

$$f_4(s): \quad \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$$

Fdt elementari (3/5)

- I DdB di un fattore che è l'inverso di un altro si ottengono semplicemente cambiando segno sia al DdB del modulo che a quello della fase. Si può quindi fare riferimento ai seguenti fattori elementari

$$f_1(s): \quad K$$

$$f_2(s): \quad s^{-1}$$

$$f_3(s): \quad \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-1}$$

$$f_4(s): \quad \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1}$$

Fdt elementari (4/5)

- I fattori elementari $f_1(s)$, $f_2(s)$, $f_3(s)$, $f_4(s)$ sono caratterizzati **rispettivamente** da:
  - f_1: un guadagno
  - f_2: un polo nell'origine 0 (integratore)
  - f_3: un polo reale λ (negativo o positivo, ovvero stabile o instabile)
  - f_4: una coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale ω_n e fattore di smorzamento $-1<\zeta<1$ (si ricorda che: $\zeta>0 \Rightarrow$ coppia stabile; $\zeta<0 \Rightarrow$ coppia instabile; $\zeta=0 \Rightarrow$ coppia sull'asse immaginario)

Fdt elementari (5/5)

- I fattori elementari $f_2(s)$, $f_3(s)$, $f_4(s)$

$$f_2(s):\quad s^{-1}$$

$$f_3(s):\quad \left(1-\frac{s}{\lambda}\right)^{-1}$$

$$f_4(s):\quad \left(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1}$$

sono espressi in forma a guadagno stazionario unitario

- Naturalmente i fattori inversi sono caratterizzati da zeri

DdB di un guadagno (1/2)

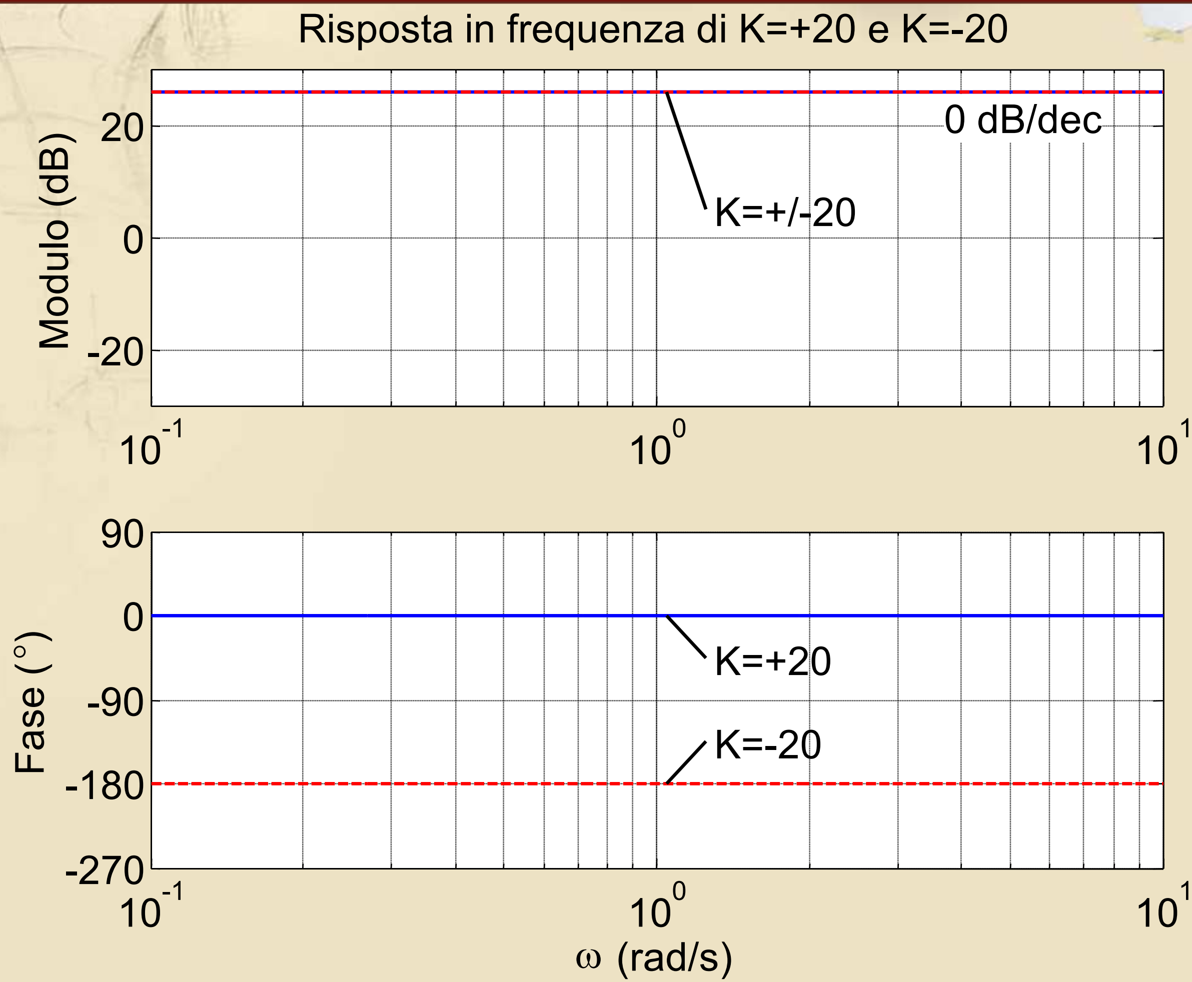
- $f_1(s) = K, \quad \text{con} \;\; K \neq 0$

$$M(\omega) = 20\log_{10}(|K|), \;\; \text{costante} \; \forall\omega$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0^\circ & \text{per } K > 0, \;\; \text{costante} \; \forall\omega \\ -180^\circ & \text{per } K < 0, \;\; \text{costante} \; \forall\omega \end{cases}$$

Ovviamente è altrettanto corretto il valore di +180° (sul piano complesso sono indistinguibili)

DdB di un guadagno (2/2)



DdB di un polo nell'origine (1/3)

- Per maggiore generalità si prende in considerazione il fattore

$$f_2(s) = \frac{K}{s}, \quad \text{con } K > 0$$

$$f_2(j\omega) = -j\frac{K}{\omega}$$

$$M(\omega) = 20\log_{10}\left(\frac{|K|}{\omega}\right) = K_{dB} - 20\log_{10}(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = -90^\circ = \text{costante } \forall\omega$$

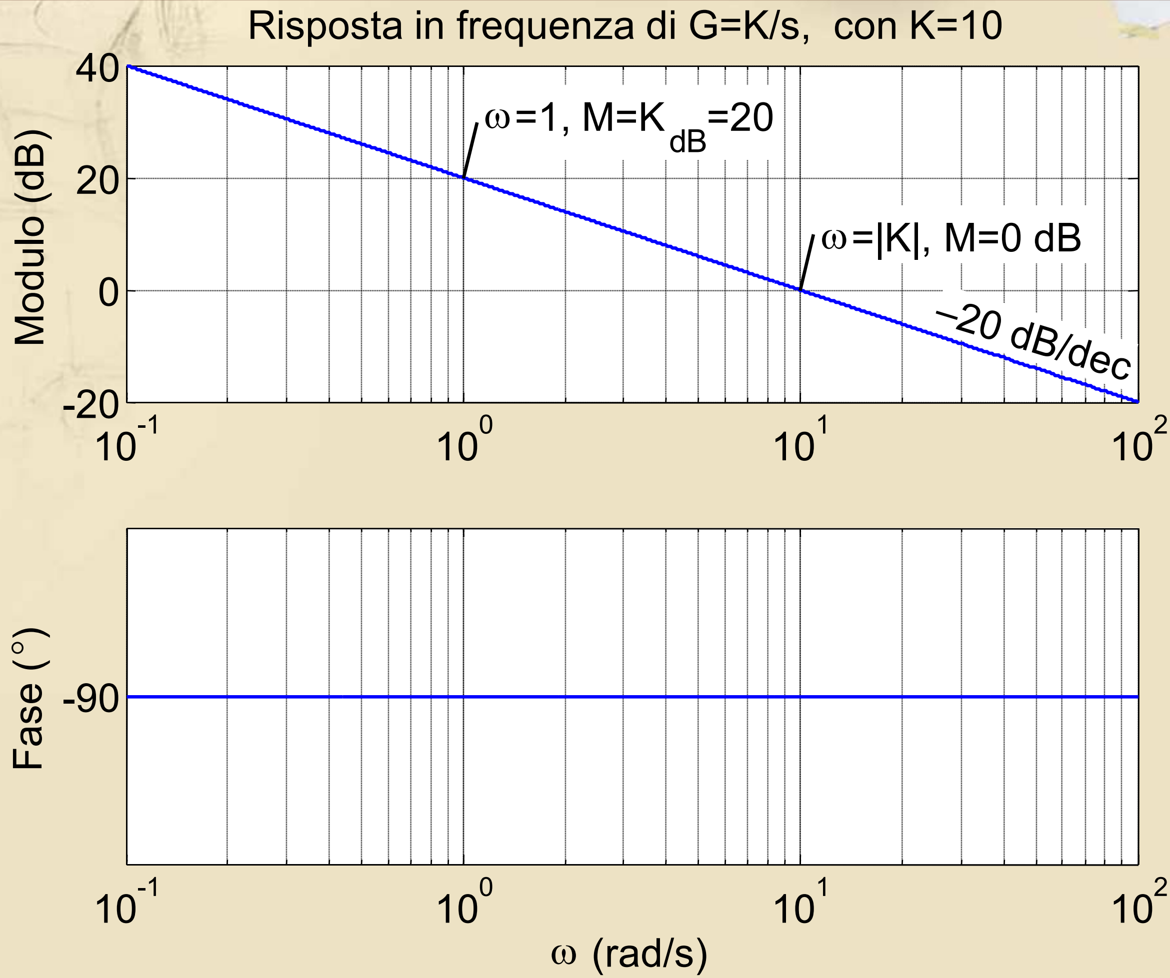
DdB di un polo nell'origine (2/3)

- Dall'espressione del modulo di $f_2(\omega)$ si deduce che
  - Per $\omega = 1 \rightarrow M = K_{dB}$
  - Per $\omega = |K| \rightarrow M = 0$ dB (cioè 1 u_{nat})
  - Il modulo dipende linearmente da $\log_{10}(\omega)$ attraverso il coefficiente -20

$$\Rightarrow$$

Il DdB del modulo è una retta con pendenza di –20 dB/dec

DdB di un polo nell'origine (3/3)



DdB di un polo multiplo nell'origine

- Sia $f_2'(s) = \dfrac{K}{s^i}$, con $K > 0$

i = molteplicità del polo

DdB di un polo multiplo nell'origine

- Sia $f_2'(s) = \dfrac{K}{s^i}$, con $K > 0$
  - Per $\omega = 1 \rightarrow M = K_{dB}$
  - Per $\omega = \sqrt[i]{|K|} \rightarrow M = 0$ dB (cioè 1 u_{nat})
  - Il modulo dipende linearmente da $\log_{10}(\omega)$ attraverso il coefficiente $-20i$

Il DdB del modulo è una retta con pendenza di $-20i$ dB/dec

DdB di un polo reale λ (1/6)

- $f_3(s) = \left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)^{-1} \rightarrow f_3(j\omega) = \left(1 - j\frac{\omega}{\lambda}\right)^{-1}$

  è comodo definire $\Omega \doteq \frac{\omega}{|\lambda|}$ (adimensionata)

  $$f_3(j\Omega) = (1 - j\,\mathrm{sign}(\lambda)\Omega)^{-1} \rightarrow$$

  $$\rightarrow \begin{cases} M(\Omega) = -20\log_{10}\left(\sqrt{1^2 + \Omega^2}\right) \\ \varphi(\Omega) = \mathrm{sign}(\lambda)\arctan(\Omega) \end{cases}$$

DdB di un polo reale λ (2/6)

- Approssimazione in bassa frequenza (BF): $\omega << |\lambda|$

$$\lim_{\substack{\omega<<|\lambda| \\ \Omega<<1}} (f_3) = 1 \rightarrow \begin{cases} M = 0 \text{ dB} \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$$

M e φ indipendenti da λ e in particolare dalla stabilità del polo

DdB di un polo reale λ (3/6)

- Approssimazione in alta frequenza (AF): $\omega >> |\lambda|$

$$\lim_{\substack{\omega>>|\lambda| \\ \Omega>>1}} \left(f_3\right) = -\mathrm{sign}(\lambda)\frac{1}{j\Omega} \rightarrow \begin{cases} M = -20\log_{10}\left(\Omega\right) \\ \varphi = \mathrm{sign}(\lambda)\cdot 90^\circ \end{cases}$$

φ dipendente da λ e in particolare:
φ=–90° per polo stabile $\left(\Re\{\lambda\} < 0\right)$
φ=+90° per polo instabile $\left(\Re\{\lambda\} > 0\right)$

M indipendente da λ e in particolare dalla stabilità del polo (pend.=–20 dB/dec)

DdB di un polo reale λ (4/6)

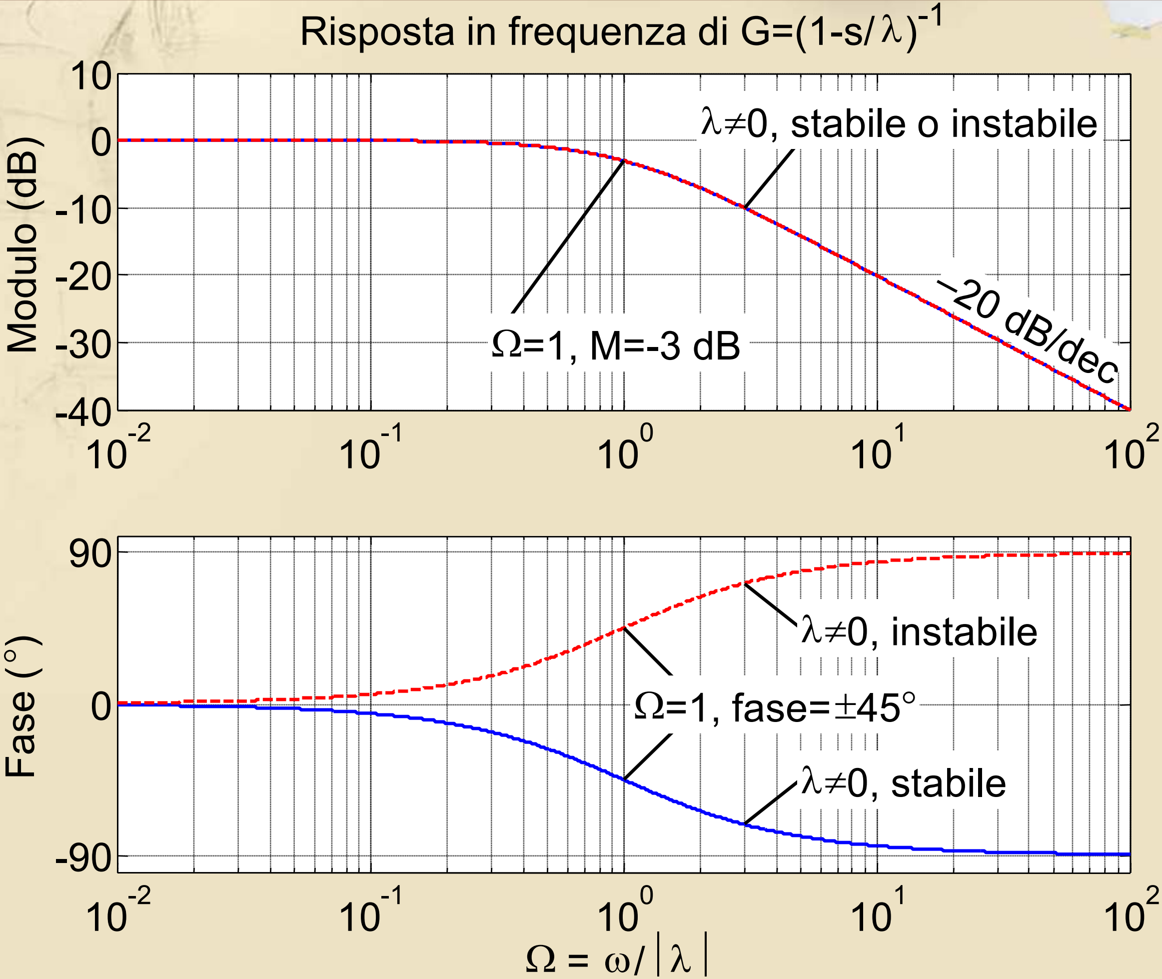
- Calcolo nel "punto centrale" $\Omega = 1$ ovvero $\omega = |\lambda|$

$$\lim_{\substack{\omega=|\lambda| \\ \Omega=1}} (f_3) = (1 - j\,\mathrm{sign}(\lambda))^{-1} \rightarrow \begin{cases} M = 20\log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cong -3\,\mathrm{dB} \\ \varphi = \mathrm{sign}(\lambda)\cdot 45^\circ \end{cases}$$

φ dipendente da λ e in particolare:
φ=–45° per polo stabile
φ=+45° per polo instabile

M indipendente da λ e in particolare dalla stabilità del polo

DdB di un polo reale λ (5/6)



DdB di un polo reale λ (6/6)

- Da ricordare
  - Il contributo di un polo in BF è di ~0 dB/dec e di ~0°, indipendentemente che sia stabile o instabile
  - Il contributo di un polo in AF è di ~–20 dB/dec, che sia stabile o meno, di ~+90° se instabile e di ~-90° se stabile
  - Nel "punto centrale", $\Omega = 1$ ovvero $\omega = |\lambda|$, il modulo vale ~-3 dB e la fase vale +45° se instabile e -45° se stabile
  - L'asintoto del modulo in AF (a -20 dB/dec) interseca l'asse a 0 dB esattamente in $\Omega = 1$

DdB di poli complessi coniugati (1/9)

- $f_4(s) = \left(1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{-1} \rightarrow f_4(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{-1}$

  è comodo definire $\Omega \doteq \frac{\omega}{\omega_n}$ (adimensionata)

  $f_4(j\Omega) = \left(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega\right)^{-1} \rightarrow$

  $$\rightarrow \begin{cases} M(\Omega) = -20\log_{10}\left(\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}\right) \\ \varphi(\Omega) = -\arg\left(1 - \Omega^2 + j2\zeta\Omega\right) \end{cases}$$

DdB di poli complessi coniugati (2/9)

- Approssimazione in BF: $\omega << \omega_n \quad (\text{Ipotesi}: \quad \zeta \neq 0)$

$$\lim_{\substack{\omega<<\omega_n \\ \Omega<<1}} (f_4) = 1 \rightarrow \begin{cases} M = 0 \text{ dB} \\ \varphi = 0^\circ \end{cases}$$

M e φ indipendenti da ζ e in particolare dalla stabilità dei poli

DdB di poli complessi coniugati (3/9)

- Approssimazione in AF: $\omega >> \omega_n \quad (\text{Ipotesi}: \quad \zeta \neq 0)$

$$\lim_{\substack{\omega>>\omega_n \\ \Omega>>1}} (f_4) = \left(-\Omega^2 + j2\zeta\Omega\right)^{-1} \rightarrow \begin{cases} M = -40\log_{10}(\Omega) \\ \varphi = -\text{sign}(\zeta)\cdot 180^\circ \end{cases}$$

φ dipendente da ζ e in particolare:
$\varphi = -180^\circ$ per poli stabili ($\zeta > 0$)
$\varphi = +180^\circ$ per poli instabili ($\zeta < 0$)

M indipendente da ζ e in particolare dalla stabilità dei poli. Pendenza = –40 dB/dec

DdB di poli complessi coniugati (4/9)

- Calcolo nel "punto centrale": $\omega = \omega_n \; (\text{Ipotesi} : \zeta \neq 0)$

$$\lim_{\substack{\omega=\omega_n \\ \Omega=1}} (f_4) = (j2\zeta)^{-1} \rightarrow \begin{cases} M = 20\log_{10}\left(\dfrac{1}{2|\zeta|}\right) \\ \varphi = -\text{sign}(\zeta)\cdot 90^\circ \end{cases}$$

φ dipendente da ζ e in particolare:
$\varphi=-90^\circ$ per poli stabili ($\zeta>0$)
$\varphi=+90^\circ$ per poli instabili ($\zeta<0$)

M dipendente da $|\zeta|$, ma non dalla stabilità dei poli

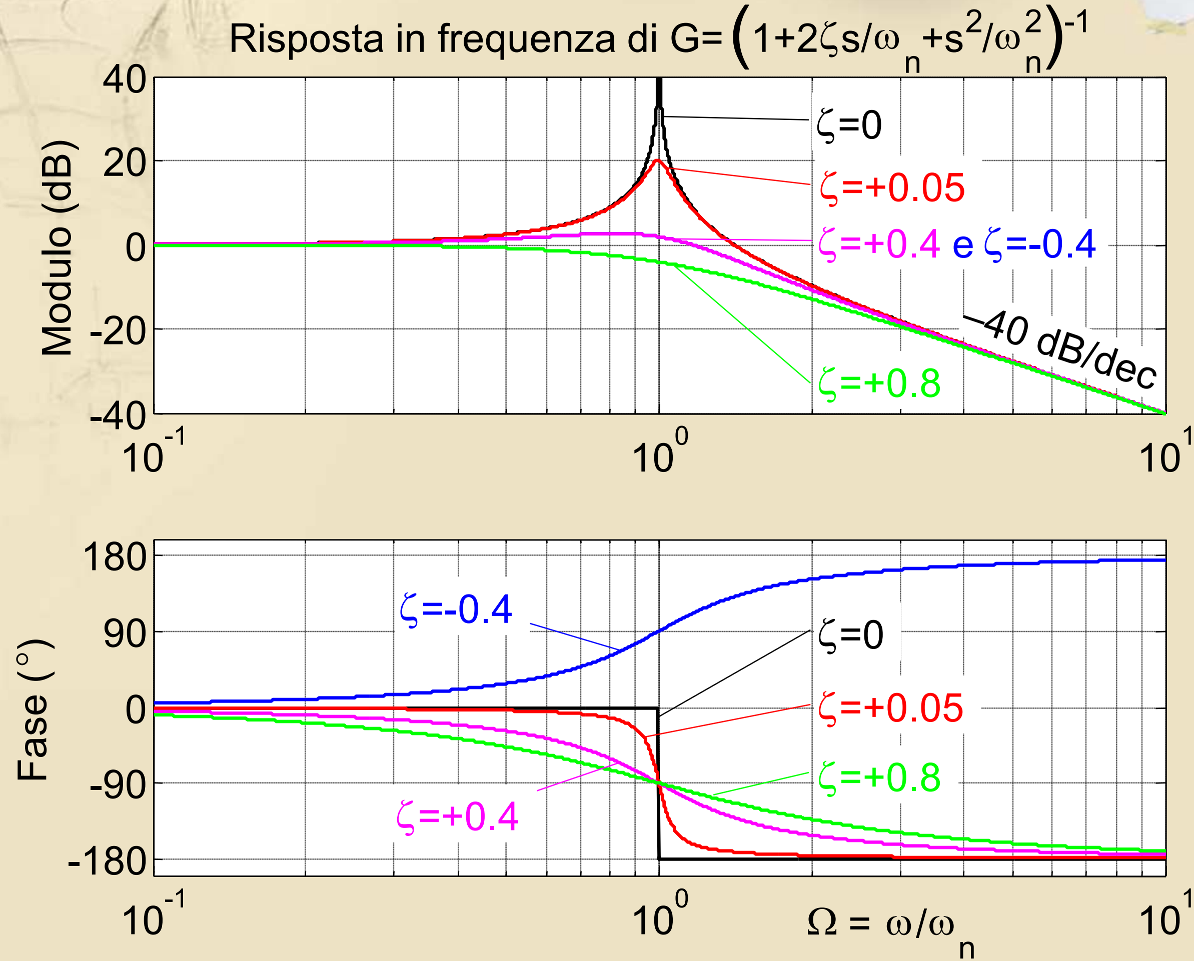
DdB di poli complessi coniugati (5/9)

- Caso particolare: $\zeta = 0$

$$f_4\big|_{\zeta=0} = \left(1 - \Omega^2\right)^{-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} M = -20\log_{10}\left|1 - \Omega^2\right| = \begin{cases} \cong 0 & \text{in BF} \\ \cong -40\log_{10}(\Omega) & \text{in AF} \\ \rightarrow \infty & \text{per } \Omega \rightarrow 1^{\pm} \end{cases} \\ \\ \varphi = \begin{cases} 0^\circ & \forall \Omega < 1 \\ \pm 180^\circ & \forall \Omega > 1 \\ \text{indeterm. per} & \Omega = 1 \end{cases} \end{cases}$$

DdB di poli complessi coniugati (6/9)



DdB di poli complessi coniugati (7/9)

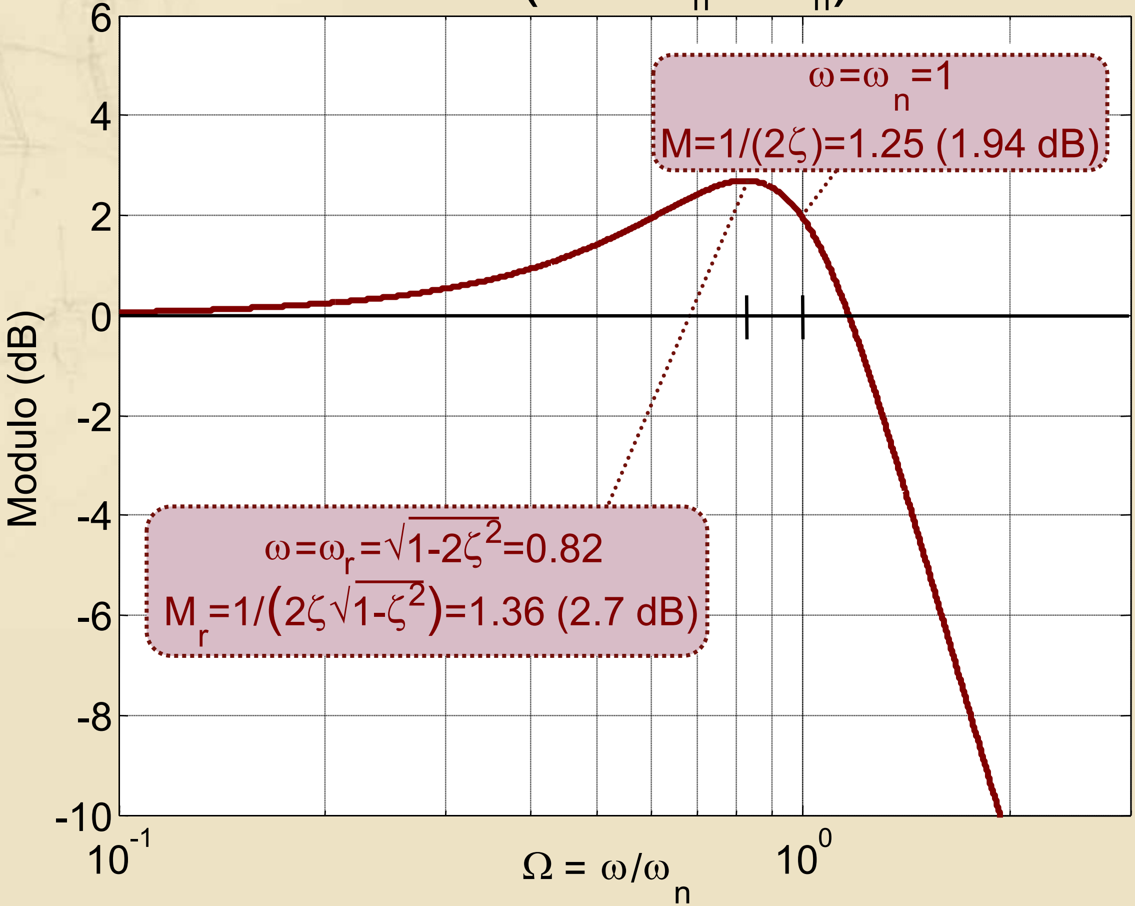
- Da ricordare
  - Il contributo in BF è di ~0 dB/dec e di ~0°, indipendentemente che siano stabili o instabili
  - Il contributo in AF è di ~–40 dB/dec, che siano stabili o meno, di ~+180° se instabili e di ~-180° se stabili
  - Nel "punto centrale", $\Omega = 1$ ovvero $\omega = \omega_n$, il modulo vale $1/(2|\zeta|)$ u_{nat} mentre la fase vale +90° se instabili e -90° se stabili
  - L'asintoto del modulo in AF interseca l'asse a 0 dB esattamente in $\Omega = 1$

DdB di poli complessi coniugati (8/9)

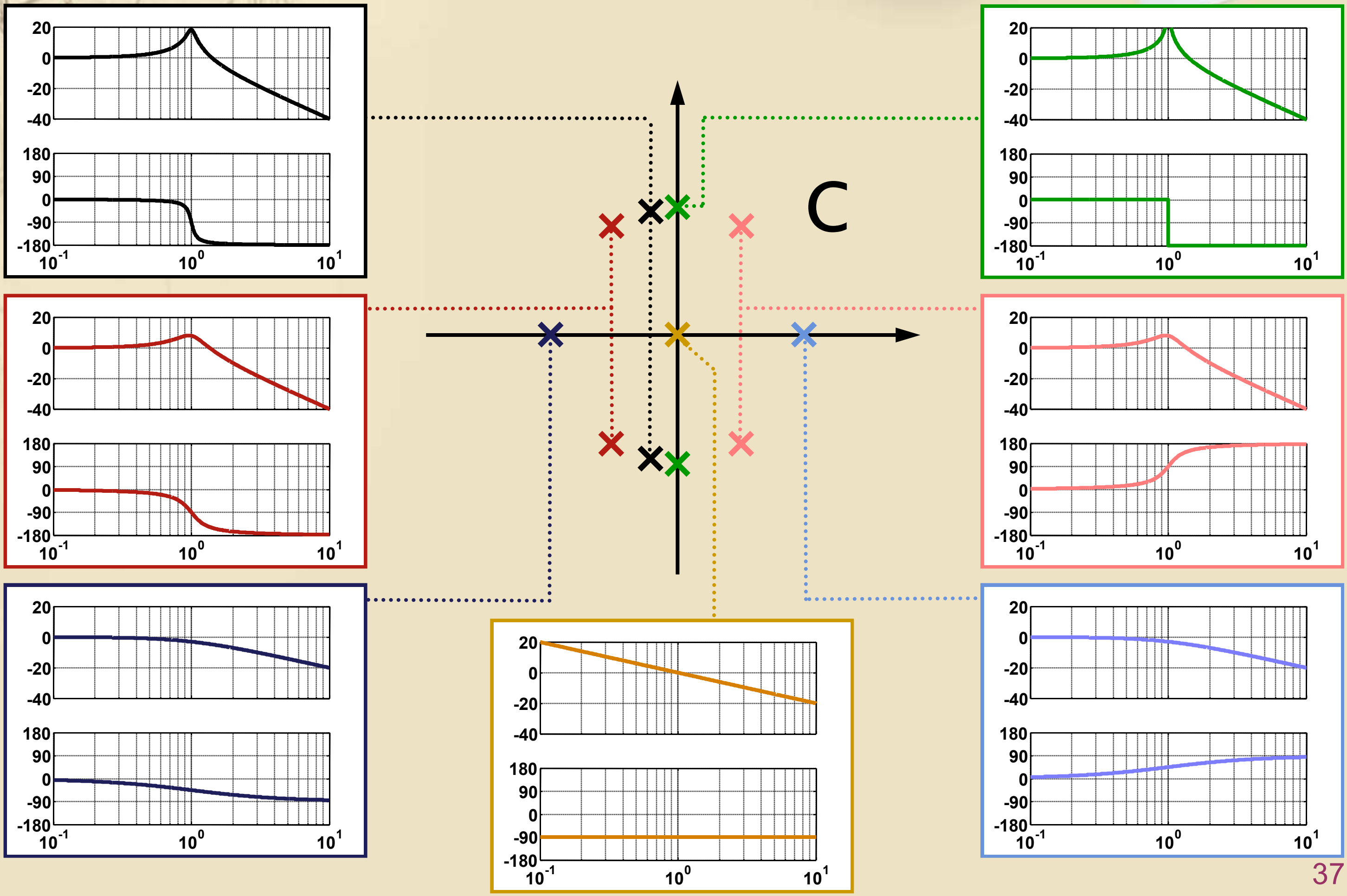
- NB:
  - Il DdB del modulo presenta un massimo M_r (risonanza) in $\omega_r \neq \omega_n$
  - Tale massimo esiste se $|\zeta| < \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$
  - $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \Rightarrow \omega_r < \omega_n$
  - $M_r \doteq M(\omega_r) = \left. \dfrac{1}{2|\zeta|\sqrt{1-\zeta^2}} \right|_{\zeta < 1/\sqrt{2}} > 1 \ (u_{nat})$
  - Ovviamente $M(\omega = \omega_n) < M(\omega = \omega_r)$

DdB di poli complessi coniugati (9/9)

Risposta in frequenza di $G=\left(1+2\zeta s/\omega_n+s^2/\omega_n^2\right)^{-1}$, con $\zeta=0.4$ e $\omega_n=1$



DdB dei poli – specchio riassuntivo



DdB degli zeri

- I DdB degli zeri si ottengono da quelli dei poli di pari valore cambiando segno sia ai moduli (in dB) che alle fasi (in gradi)

Osservazioni importanti

- I DdB dei poli (zeri) di molteplicità **i** si ottengono da quelli del polo (zero) semplice moltiplicando i valori del modulo e della fase per **i**
- Il DdB del modulo tende a ∞ dB (∞ u_{nat}) $\Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow$ c'è almeno un polo sull'asse immaginario (del piano complesso)
  - Polo reale in 0, semplice o multiplo (in tal caso il modulo$\rightarrow\infty$ per $\omega\rightarrow 0$)
  - Coppia di poli immaginari coniugati in $\pm j\omega_o$, semplice o multipla (in tal caso il modulo$\rightarrow\infty$ per $\omega\rightarrow\omega_o$ e la fase presenta una discontinuità di $\pm 180^\circ$ per $\omega=\omega_o$)

Diagrammi di Bode di una generica fdt G

- Una generica fdt $G(j\omega)$ può essere espressa come prodotto di fdt elementari (fattori)
- Il **modulo** di G in dB in una qualunque ω è dato dalla **somma dei moduli in dB** delle fdt elementari nella stessa ω
- La **fase** di G in una qualunque ω è data dalla **somma delle fasi** delle fdt G_i nella stessa ω
- I diagrammi di Bode di una generica fdt G possono quindi essere costruiti sommando i contributi delle singole fdt elementari

DdB in Matlab

- I DdB possono essere tracciati in ambiente Matlab utilizzando il comando **bode**:

  bode(G)

  (per la sintassi completa consultare il relativo help)