# 01AYS / 07AYS - FONDAMENTI DI AUTOMATICA

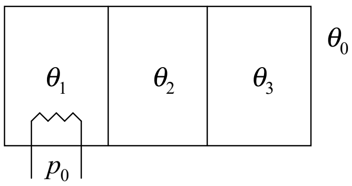
## Tipologia degli esercizi proposti nel compito del 16/XI/2007

**Esercizio 1** - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 2p-2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & p \end{bmatrix}$$

di un modello LTI in variabili di stato a tempo continuo, determinare per quali valori del parametro reale $p$ è possibile realizzare uno stimatore asintotico dello stato che permetta di posizionare ad arbitrio tutti gli autovalori del sistema osservato.
*Soluzione:* È possibile per tutti i valori di $p$ ad eccezione dei valori $p = 2.4142$ e $p = -0.4142$.

**Esercizio 2** - Un sistema termico è costituito dai corpi omogenei **1**, **2** e **3**, aventi temperatura $\theta_1$, $\theta_2$ e $\theta_3$ rispettivamente; l'ambiente esterno si trova alla temperatura costante $\theta_0 = 200$ K. Le capacità termiche dei tre corpi sono date da $C_1 = 2$ J/K e $C_2 = C_3 = 1$ J/K, mentre le conduttanze termiche fra i corpi e fra ciascun corpo e l'ambiente esterno sono rispettivamente: $K_{12} = 2$ W/K, $K_{23} = 1$ W/K, $K_{10} = K_{20} = K_{30} = 2$ W/K (si ricorda che la conduttanza termica $K_{ij}$ è pari a $1/R_{ij}$, ove $R_{ij}$ è la resistenza termica fra i corpi $i$ e $j$). All'interno del corpo **1** si trova un generatore di calore di potenza $p_0 = 400$ W.




Determinare le equazioni dinamiche del sistema, valide per ogni istante $t \geq 0$.
*Soluzione:* $\dot{\theta}_1(t) = -2\,\theta_1(t) + \theta_2(t) + 400, \quad \dot{\theta}_2(t) = 2\,\theta_1(t) - 5\,\theta_2(t) + \theta_3(t) + 400, \quad \dot{\theta}_3(t) = \theta_2(t) - 3\,\theta_3(t) + 400$

**Esercizio 3** - Dato il sistema dinamico a tempo continuo caratterizzato dalle seguenti equazioni di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 3x_1(t) + 4x_2(t) + 4u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1(t) + x_2(t) + 7u(t) \\ y(t) &= 3x_1(t) - x_2(t) + 13u(t) \end{aligned}$$

determinare l'espressione analitica dell'uscita $y(t)$ supponendo condizioni iniziali non nulle, $x(0) = [5\ 2]^T$, ed ingresso nullo, $u(t) = 0,\ \forall t$.
*Soluzione:* $y(t) = \left[11.67 \cdot e^{5t} + 1.33 \cdot e^{-t}\right] \varepsilon(t)$

**Esercizio 4** - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{s+40}{s^3 + 25s^2 + 2(p+5)s + 100(p-1)}$$

dire per quali valori del parametro $p$ il sistema risulta esternamente stabile.
*Soluzione:* Il sistema è esternamente stabile per $1 < p < 7$.

**Esercizio 5** - Dato il sistema dinamico, non lineare, a tempo discreto, descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= e^{x_1(k)} - x_2^2(k) - 3 \cdot u^2(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + 2 \cdot u(k) \\ y(k) &= x_2^3(k) \end{aligned}$$

dire quali sono le matrici del sistema linearizzato intorno allo stato di equilibrio $\overline{x} = [0\ 1]^T$, corrispondente all'ingresso di equilibrio $\overline{u} = 0$.
*Soluzione:* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

**Esercizio 6** - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.064 & -0.48 & -1.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

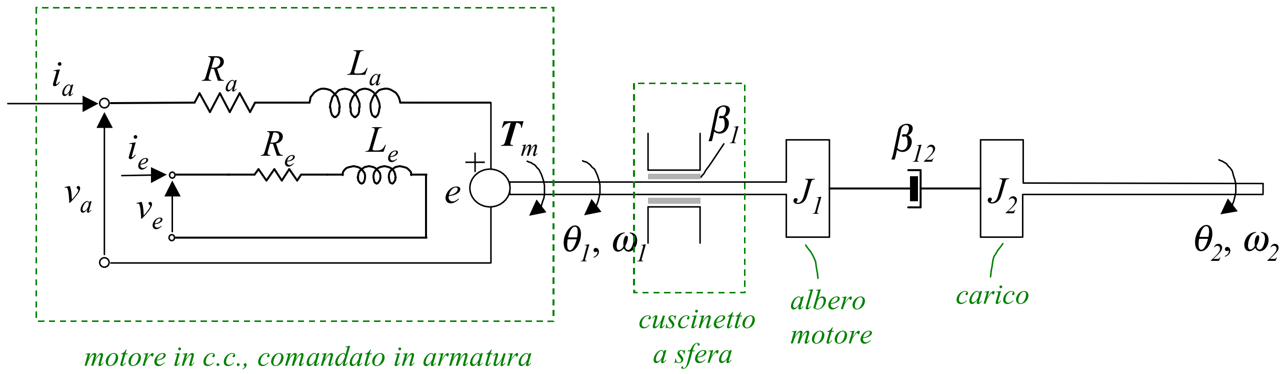
di un modello LTI in variabili di stato a tempo discreto, determinare, se possibile, i coefficienti della matrice $K$ di una legge di controllo per retroazione dagli stati che permette di posizionare gli autovalori del sistema retroazionato in $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.1$ e $\lambda_3 = 0.1$.
*Soluzione:* $K = [-0.065 \quad -0.45 \quad -1.5]$

**Esercizio 7** - Dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.8 \\ 0 & p/3 & -0.5 \\ 0 & 0 & p/4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

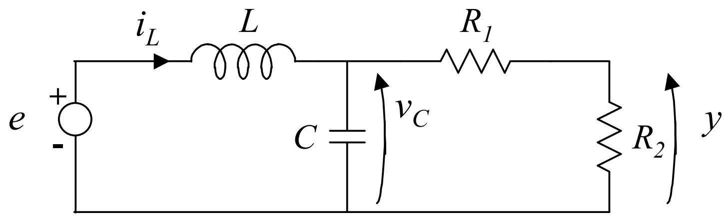
studiarne le caratteristiche di stabilità interna, determinando per quali valori del parametro $p$ risulta asintoticamente stabile.
*Soluzione:* Il sistema è asintoticamente stabile per $-3 < p < 3$.

**Esercizio 8** - Nel sistema dinamico elettromeccanico riportato in figura, un motore elettrico in corrente continua comandato in armatura è collegato ad un carico mediante uno smorzatore rotazionale avente coefficiente di attrito viscoso $\beta_{12}$. Un cuscinetto a sfera con coefficiente di attrito viscoso $\beta_1$ è calettato sull'albero motore, caratterizzato dal momento d'inerzia $J_1$ e dalla posizione angolare $\theta_1$. Il carico è caratterizzato dal momento d'inerzia $J_2$ e dalla posizione angolare $\theta_2$. Con $v_a$, $i_a$, $R_a$, $L_a$, $v_e$, $i_e$, $R_e$, $L_e$ si indichino la tensione, la corrente, la resistenza e l'induttanza rispettivamente del circuito di armatura e di eccitazione. La f.e.m. indotta vale $e = K_e^* \cdot \dot{\theta}_1$, mentre la coppia motrice vale $T_m = K_m^* \cdot i_a$.




Scrivere le sole equazioni **dinamiche** del sistema complessivo.
*Soluzione:* $L_a \dfrac{di_a}{dt} = -R_a\, i_a + v_a - K_e^*\, \dot{\theta}_1, \quad J_1\, \ddot{\theta}_1 + (\beta_1 + \beta_{12})\, \dot{\theta}_1 = K_m^*\, i_a + \beta_{12}\, \dot{\theta}_2, \quad J_2\, \ddot{\theta}_2 + \beta_{12}\, \dot{\theta}_2 = +\beta_{12}\, \dot{\theta}_1$

**Esercizio 9** - Si consideri il sistema dinamico elettrico riportato in figura, i cui componenti assumono i seguenti valori numerici: $L = 10^{-3}$ H, $C = 10^{-6}$ F, $R_1 = 10^3\,\Omega$, $R_2 = 9 \cdot 10^3\,\Omega$.




Determinare le matrici $A$, $B$, $C$ e $D$ della rappresentazione in variabili di stato del sistema $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, scegliendo come variabile di stato $x = [i_L,\ v_C]^T$ e come variabile di ingresso $u = e$.
*Soluzione:* $A = \begin{bmatrix} 0 & -10^3 \\ 10^6 & -10^2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 10^3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0.9 \end{bmatrix}$, $D = [0]$

**Esercizio 10** - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{s+4}{(s+3)(s+8)}$$

calcolare analiticamente la risposta in regime permanente $y_{perm}(t)$ all'ingresso sinusoidale $u(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t)$, con $U = 2$ e $\omega = 5$ rad/s.
*Soluzione:* $y_{perm}(t) = 0.2328 \cdot \sin(5t - 0.6929)$.

**Esercizio 11** - Un sistema dinamico non lineare, a tempo discreto, con nonlinearità derivabili, viene linearizzato nell'intorno del suo unico punto di equilibrio, ottenendo un sistema LTI descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ -0.04 & -0.5 & 0.2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.22 & -1.3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Studiare le caratteristiche di stabilità interna del punto di equilibrio.
*Soluzione:* Il punto di equilibrio del sistema non lineare è instabile.

**Esercizio 12** - Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= 2x_2(k) + \cos(u(k)) \\ x_2(k+1) &= -x_1(k) \\ y(k) &= x_2(k) + u(k) \end{aligned}$$

analizzare le proprietà del modello matematico, precisando se il sistema è a tempo continuo o discreto, statico o dinamico, a dimensione finita o infinita, SISO o MIMO, lineare o non lineare, tempo-variante o tempo-invariante, proprio o non proprio.
*Soluzione:* Il sistema è a tempo discreto, dinamico, a dimensione finita, SISO, non lineare, tempo-invariante, non (strettamente) proprio.

**Esercizio 13** - Si consideri il seguente sistema LTI tempo discreto completamente raggiungibile ed osservabile a due ingressi $(u_1, u_2)$ e due uscite, $(y_1, y_2)$:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x(k)$$

Calcolare la funzione di trasferimento $G(z)$ tra il primo ingresso $u_1$ e la seconda uscita $y_2$
*Soluzione:* $G(z) = \dfrac{3(z+0.5)}{(z-0.5)(z+1)}$.

**Es. #1**

$A = \begin{bmatrix} 2p & 1 \\ 1 & 2p-2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & p \end{bmatrix}$

Per quali $p$ è possibile realizzare uno stimatore asintotico dello stato che permetta di posizionare ad arbitrio tutti gli autovalori del sist. osservato?

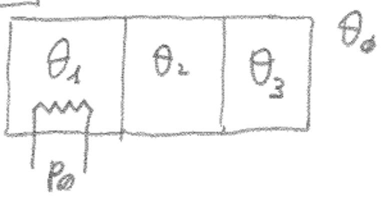
Occorre che il sistema sia completamente osservabile, cioè che $\rho\left(\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}\right) = n = 2$.

$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & p \\ -p & 2p^2-2p-1 \end{bmatrix} = \mathcal{O}(p)$ ha rango massimo, cioè $\rho(\mathcal{O}) = 2$, se e solo se

$\det(\mathcal{O}) = -2p^2+2p+1+p^2 \neq 0$, cioè: $p^2-2p-1 \neq 0 \iff \boxed{p \neq \begin{cases} 1+\sqrt{2} = 2.4142 \\ 1-\sqrt{2} = -0.4142 \end{cases}}$

---

**Es. #2**




$\theta_0 = 200K, \quad C_1 = 2\,J/K, \quad C_2 = C_3 = 1\,J/K$

$K_{12} = 2\,W/K, \quad K_{23} = 1\,W/K, \quad K_{10} = K_{20} = K_{30} = 2\,W/K, \quad P_0 = 400W$

Equazioni dinamiche del sistema?

$C_i \dot{\theta}_i = \sum_k P_k^{est} - \sum_l P_l^{int} \Rightarrow$

$C_1\dot{\theta}_1 = P_0 - [K_{10}(\theta_1-\theta_0) + K_{12}(\theta_1-\theta_2)] \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_1 = \frac{P_0}{C_1} - \frac{K_{10}+K_{12}}{C_1}\theta_1 + \frac{K_{10}}{C_1}\theta_0 + \frac{K_{12}}{C_1}\theta_2 = -2\theta_1 + \theta_2 + 400}$

$C_2\dot{\theta}_2 = 0 - [K_{20}(\theta_2-\theta_0) + K_{12}(\theta_2-\theta_1) + K_{23}(\theta_2-\theta_3)] \Rightarrow \dot{\theta}_2 = +\frac{K_{12}}{C_2}\theta_1 - \frac{K_{20}+K_{12}+K_{23}}{C_2}\theta_2 + \frac{K_{23}}{C_2}\theta_3 + \frac{K_{20}}{C_2}\theta_0 \Rightarrow$

$\boxed{\dot{\theta}_2 = 2\theta_1 - 5\theta_2 + \theta_3 + 400}$

$C_3\dot{\theta}_3 = 0 - [K_{30}(\theta_3-\theta_0) + K_{23}(\theta_3-\theta_2)] \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}_3 = \frac{K_{23}}{C_3}\theta_2 - \frac{K_{30}+K_{23}}{C_3}\theta_3 + \frac{K_{30}}{C_3}\theta_0 = \theta_2 - 3\theta_3 + 400}$

---

**Es. #3**

$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2 + 4u \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2 + 7u \\ y = 3x_1 - x_2 + 13u \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t=0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = x_0 \\ u(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y(t) = ?$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = [13]$

$Y(s) = C(sI-A)^{-1}x_0 + [C(sI-A)^{-1}B + D]\underbrace{\cancel{U(s)}}_{=0} = C(sI-A)^{-1}x_0 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s-3 & -4 \\ -2 & s-1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}\frac{1}{(s-3)(s-1)-8}\begin{bmatrix} s-1 & 4 \\ 2 & s-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2-4s-5}\begin{bmatrix} 3s-5, & -s+15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{13s+5}{(s-5)(s+1)} =$

$= \frac{70/6}{s-5} + \frac{+8/6}{s+1} = \frac{11.\bar{6}}{s-5} + \frac{1.\bar{3}}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \boxed{y(t) = [11.\bar{6}\,e^{5t} + 1.\bar{3}\,e^{-t}]\,\varepsilon(t)}$

---

**Es. #4**

$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{s+40}{s^3+25s^2+2(p+5)s+100(p-1)}$

Per quali $p$ il sistema è esternamente stab.?

Condizione necessaria: tutti i coefficienti del denominatore di $G(s)$ hanno lo stesso segno

$\Rightarrow \begin{cases} p+5 > 0 \\ p-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p > -5 \\ p > 1 \end{cases} \Rightarrow p > 1$, escludendo così qualunque possibilità di cancellazione zero-polo, essendo lo zero di $G(s)$ in $s = -40 < 1$

La condizione necessaria e sufficiente è costituita dal criterio di Routh $\Rightarrow$ costruisco la tabella di Routh

| | | |
|---|---|---|
| #3 | $1$ | $2(p+5)$ |
| #2 | $25$ | $100(p-1)$ |
| #1 | $b_{n-2}$ | $0$ |
| #0 | $100(p-1)$ | |

$b_{n-2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2(p+5) \\ 25 & 100(p-1) \end{vmatrix}}{-25} = \frac{100(p-1) - 50(p+5)}{-25} = \frac{50p-350}{-25} =$

$= -2p + 14$

La condizione necessaria e sufficiente affinché tutte le radici del polinomio a denominatore di $G(s)$ (ossia i poli di $G(s)$) abbiano parte reale $< 0$ (e quindi $G(s)$ sia esternamente stabile) è che i coefficienti della I colonna della tabella di Routh abbiano lo stesso segno $\Rightarrow$

$\begin{cases} -2p+14 > 0 \\ 100(p-1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < +7 \\ p > 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{1 < p < 7}$

**Es. #5**

$$x_1(k+1) = e^{x_1(k)} - x_2^2(k) - 3u^2(k) = f_1(k)$$
$$x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + 2u(k) = f_2(k)$$
$$y(k) = x_2^3(k) = g(k)$$

Calcolare le matrici del sistema linearizzato in $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, con $\bar{u} = 0$

$$\boxed{A} = \left[\frac{\partial f(k)}{\partial x(k)}\right]_{\substack{x(k)=\bar{x}\\u(k)=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x(k)=\bar{x}\\u(k)=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} e^{x_1(k)} & -2x_2(k) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{\substack{x(k)=\bar{x}\\u(k)=\bar{u}}} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{B} = \left[\frac{\partial f(k)}{\partial u(k)}\right]_{\substack{x(k)=\bar{x}\\u(k)=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x(k)=\bar{x}\\u(k)=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} -6u(k) \\ 2 \end{bmatrix}_{\substack{x(k)=\bar{x}\\u(k)=\bar{u}}} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{C} = \left[\frac{\partial g(k)}{\partial x(k)}\right]_{\substack{x(k)=\bar{x}\\u(k)=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x(k)=\bar{x}\\u(k)=\bar{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 3x_2^2(k) \end{bmatrix}_{\substack{x(k)=\bar{x}\\u(k)=\bar{u}}} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}}$$

$$\boxed{D} = \left[\frac{\partial g(k)}{\partial u(k)}\right]_{\substack{x(k)=\bar{x}\\u(k)=\bar{u}}} = \boxed{[0]}$$

---

**Es. #6**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.064 & -0.48 & -1.2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \exists K : \lambda_i(A-BK) = \begin{cases} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{cases} ?$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.064 & -0.48 & -1.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.064-K_1 & -0.48-K_2 & -1.2-K_3 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di $A-BK$ è

$$p_{A-BK}(\lambda) = \det(\lambda I - (A-BK)) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0.064+K_1 & 0.48+K_2 & \lambda+1.2+K_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 + \lambda(1.2+K_3) + 0.48 + K_2\right) + 1\cdot(0.064+K_1) = \lambda^3 + \lambda^2(1.2+K_3) + \lambda(0.48+K_2) + 0.064 + K_1$$

Occorre uguagliare tale polinomio al polinomio caratteristico desiderato avente come radici $\lambda_i = [0.1; 0.1; 0.1] \Rightarrow p_{des}(\lambda) = (\lambda - 0.1)^3 = \lambda^3 - 0,3\lambda^2 + 0,03\lambda - 0,001 \Rightarrow$ uguagliando i coefficienti delle potenze omonime in $\lambda$ ottengo

$$\begin{cases} 1,2 + K_3 = -0,3 \\ 0,48 + K_2 = 0,03 \\ 0,064 + K_1 = -0,001 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_3 = -1,5 \\ K_2 = -0,45 \\ K_1 = -0,065 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K = [-0,065 \quad -0,45 \quad -1,5]}$$

---

**Es. #7**

Sistema LTI a tempo discreto, con

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 & 0.8 \\ 0 & p/3 & -0.5 \\ 0 & 0 & p/4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

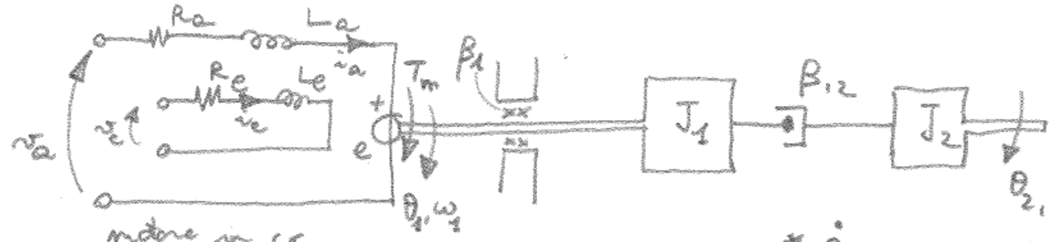
Per quali $p$ è asintoticamente stabile?

L'asintotica stabilità (interna) di un sistema LTI-TD $\Leftrightarrow |\lambda_i(A)| < 1, \ \forall i$

Poiché $A$ è triangolare (superiore) $\Rightarrow \lambda_i(A)$ sono gli elementi sulla diagonale $\Rightarrow$ il sistema è asintoticamente stabile $\Leftrightarrow \begin{cases} |p/3| < 1 \\ |p/4| < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |p| < 3 \\ |p| < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{-3 < p < 3}$

Inoltre
- il sistema è semplicemente stabile se $|p| = 3$, cioè se $p = 3$ o $p = -3$
- il sistema è instabile se $|p| > 3$, cioè se $p > 3$ o se $p < -3$

Es. #8




motore in c.c., comandato in armatura

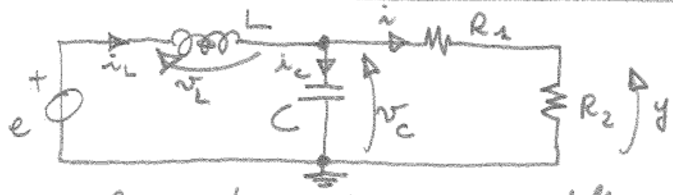
$$e = K_e^* \dot{\theta}_1, \quad T_m = K_m^* i_a$$

Equazioni dinamiche:

- maglia di armatura: $\boxed{v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_e^* \dot{\theta}_1}$
- albero motore: $J_1 \ddot{\theta}_1 = K_m^* i_a - \left[\beta_1(\dot{\theta}_1 - 0) + \beta_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\right] \Rightarrow$ $\boxed{J_1\ddot{\theta}_1 + (\beta_1 + \beta_{12})\dot{\theta}_1 = K_m^* i_a + \beta_{12}\dot{\theta}_2}$
- carico: $J_2\ddot{\theta}_2 = 0 - \beta_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \Rightarrow$ $\boxed{J_2\ddot{\theta}_2 + \beta_{12}\dot{\theta}_2 = \beta_{12}\dot{\theta}_1}$

---

Es. #9




$L = 10^{-3}\,H, \quad C = 10^{-6}\,F,$
$R_1 = 10^3\,\Omega, \quad R_2 = 9\cdot 10^3\,\Omega$

Determinare le matrici A, B, C e D della rappresentazione di stato $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$, assumendo $x = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $u = [e]$

- Equazioni costitutive di L e di C

✓ ① $v_L = L \frac{di_L}{dt}$

✓ ② $i_C = C \frac{dv_C}{dt}$

- Equazioni topologiche:
  - maglia sinistra: $e = v_L + v_C$ ③ ✓
  - maglia destra: $v_C = R_1 i + R_2 i$ ④ ✓
  - nodo: $i_L = i_C + i$ ⑤ ✓
- Equazioni di stato:

$$\dot{x}_1 = \frac{di_L}{dt} \overset{①}{=} \frac{v_L}{L} \overset{③}{=} \frac{e - v_C}{L} = -\frac{x_2}{L} + \frac{u}{L}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{dv_C}{dt} \overset{②}{=} \frac{i_C}{C} \overset{⑤}{=} \frac{i_L - i}{C} \overset{④}{=} \frac{i_L}{C} - \frac{v_C}{C(R_1+R_2)} = \frac{x_1}{C} - \frac{x_2}{C(R_1+R_2)} \Rightarrow$$

$$\boxed{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C(R_1+R_2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10^3 \\ 10^6 & -10^2 \end{bmatrix}, \quad \boxed{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Equazione di uscita

$$y = R_2 i \overset{④}{=} R_2 \frac{v_C}{R_1+R_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2} x_2 \Rightarrow \boxed{C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_2}{R_1+R_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}9 \end{bmatrix}}, \quad \boxed{D = 0}$$

---

Es. #10

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{s+4}{(s+3)(s+8)}$$

? $y_{perm}(t)$ per $u(t) = U \cdot \sin(\omega_0 t)$, con $\begin{cases} U = 2 \\ \omega_0 = 5 \end{cases}$ $= 2\sin(5t)$

$$y_{perm}(t) = U \cdot |G(j\omega)|_{\omega=\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \angle G(j\omega)\big|_{\omega=\omega_0}\right)$$

$$|G(j\omega_0)| = \left|\frac{j5+4}{(j5+3)(j5+8)}\right| = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{34}\,\sqrt{89}} = 0.1164$$

$$\angle G(j\omega_0) = \angle \frac{j5+4}{(j5+3)(j5+8)} = \operatorname{atan}(5/4) - \operatorname{atan}(5/3) - \operatorname{atan}(5/8) = -0{,}6929 \Rightarrow$$

$$\boxed{y_{perm}(t) = 0.2328 \sin(5t - 0{,}6929)}$$

**Es. #11**

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ -0.04 & -0,5 & 0,2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0,22 & -1,3 \end{array}\right]$$

Stabilità dell'equilibrio di un sistema <u>NON lineare - T.D.</u> $\Rightarrow$ $|\lambda_i(A)| = ?$

$A$ è triangolare a blocchi $\Rightarrow$

$$\lambda_i(A) = \left\{ \lambda_i\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,04 & -0,5 \end{bmatrix} \right) \right\} \cup \left\{ \lambda_i\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,22 & -1,3 \end{bmatrix} \right) \right\} \Rightarrow$$

- $p.c.(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0,04 & \lambda+0,5 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+0.5) + 0,04 = \lambda^2 + \lambda 0,5 + 0,04 = (\lambda+0,4)(\lambda+0,1)$
- $p.c.(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 0,22 & \lambda+1,3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1,3) + 0,22 = \lambda^2 + 1,3\lambda + 0,22 = (\lambda+1,1)(\lambda+0,2)$

$$\Rightarrow \lambda_i(A) = \begin{cases} -0,4 \\ -0,1 \\ -1,1 \\ -0.2 \end{cases}, \quad |\lambda_i(A)| = \begin{cases} 0.4 \\ 0.1 \\ 1.1 \\ 0.2 \end{cases}, \quad \exists\, |\lambda_i(A)| > 1 \Rightarrow$$ lo stato di eq è <u>instabile</u>

---

**Es. #12**

$$x_1(k+1) = 2x_2(k) + \cos(u(k))$$
$$x_2(k+1) = -x_1(k)$$
$$y(k) = x_2(k) + u(k)$$

Sistema a tempo ~~continuo~~ / discreto
~~statico~~ / dinamico
a dimensione finita / ~~infinita~~ $(n = 2 < \infty)$
SISO / ~~MIMO~~ $(p = q = 1)$
~~lineare~~ / non lineare $(\cos(u(k)))$
~~tempo-variante~~ / tempo-invariante
~~proprio~~ / non proprio

---

**Es. #13**

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} x(k)$$

? $G(z)$ fra $u_1$ ed $y_2$

Se considero <u>solo</u> $u_1$ ed $y_2$ $\Rightarrow$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = B_1$ (I colonna)

$C = [0 \quad 3] = C_2$ (II riga)

$$\boxed{G(z)} = C(zI-A)^{-1}B = C_2(zI-A)^{-1}B_1 = [0 \quad 3] \begin{bmatrix} z & -0.5 \\ -1 & z+0.5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [0 \quad 3] \frac{1}{z(z+0.5)-0.5} \begin{bmatrix} z+0.5 & +0.5 \\ +1 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{z^2+0.5z-0.5} [3 \quad 3z] \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \boxed{\frac{3z+1.5}{(z+1)(z-0.5)}}$$