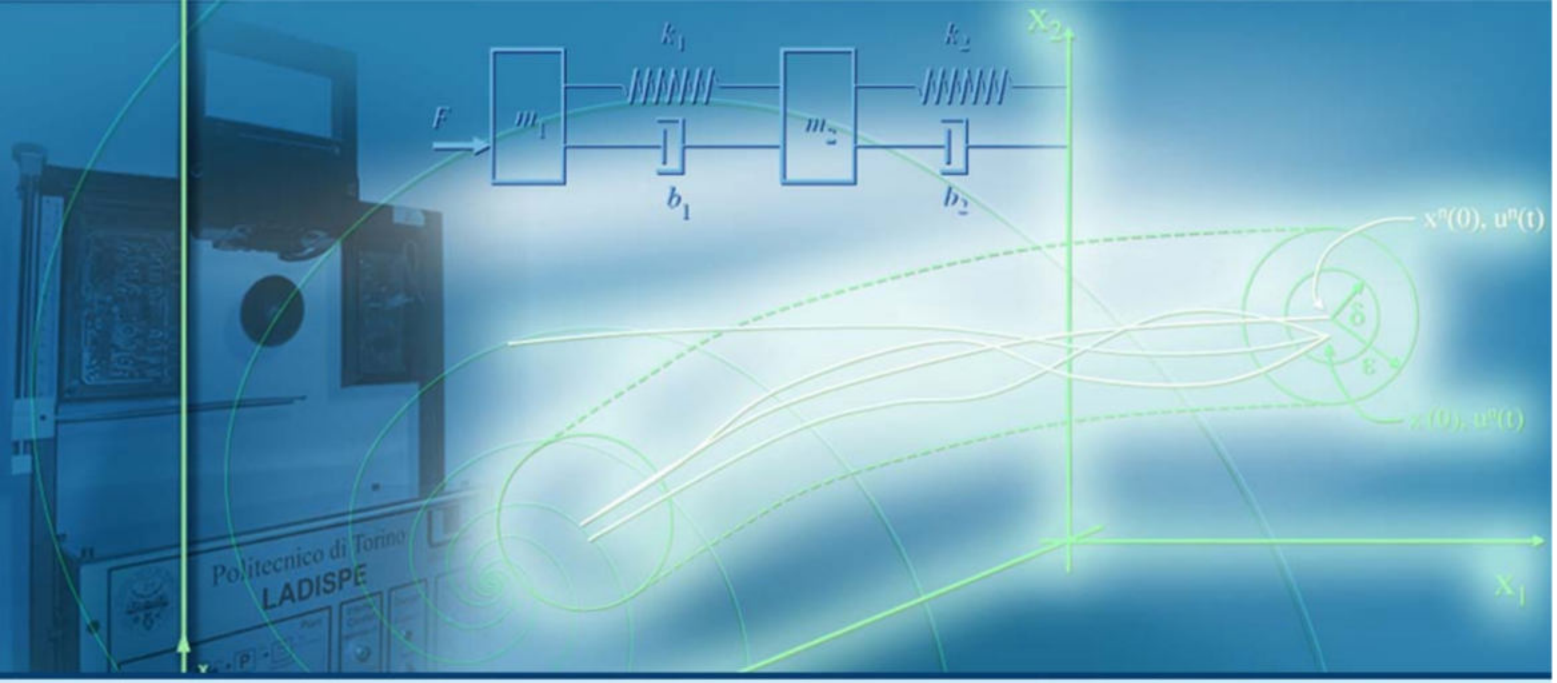
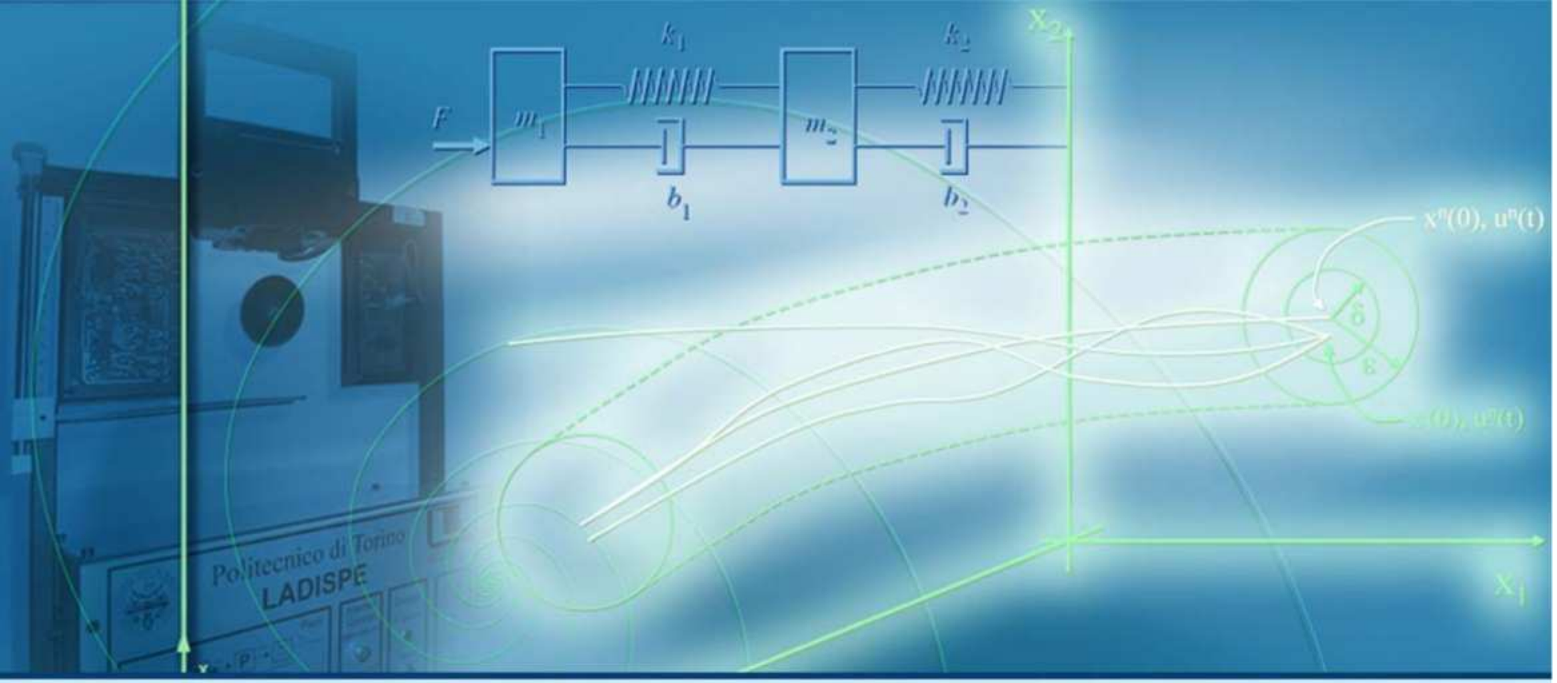


Fondamenti di Automatica

Unità 1
Introduzione e modellistica dei sistemi

Introduzione e modellistica dei sistemi

- Introduzione allo studio dei sistemi
- Modellistica dei sistemi dinamici elettrici
- Modellistica dei sistemi dinamici meccanici
- Modellistica dei sistemi dinamici elettromeccanici
- Modellistica dei sistemi dinamici termici

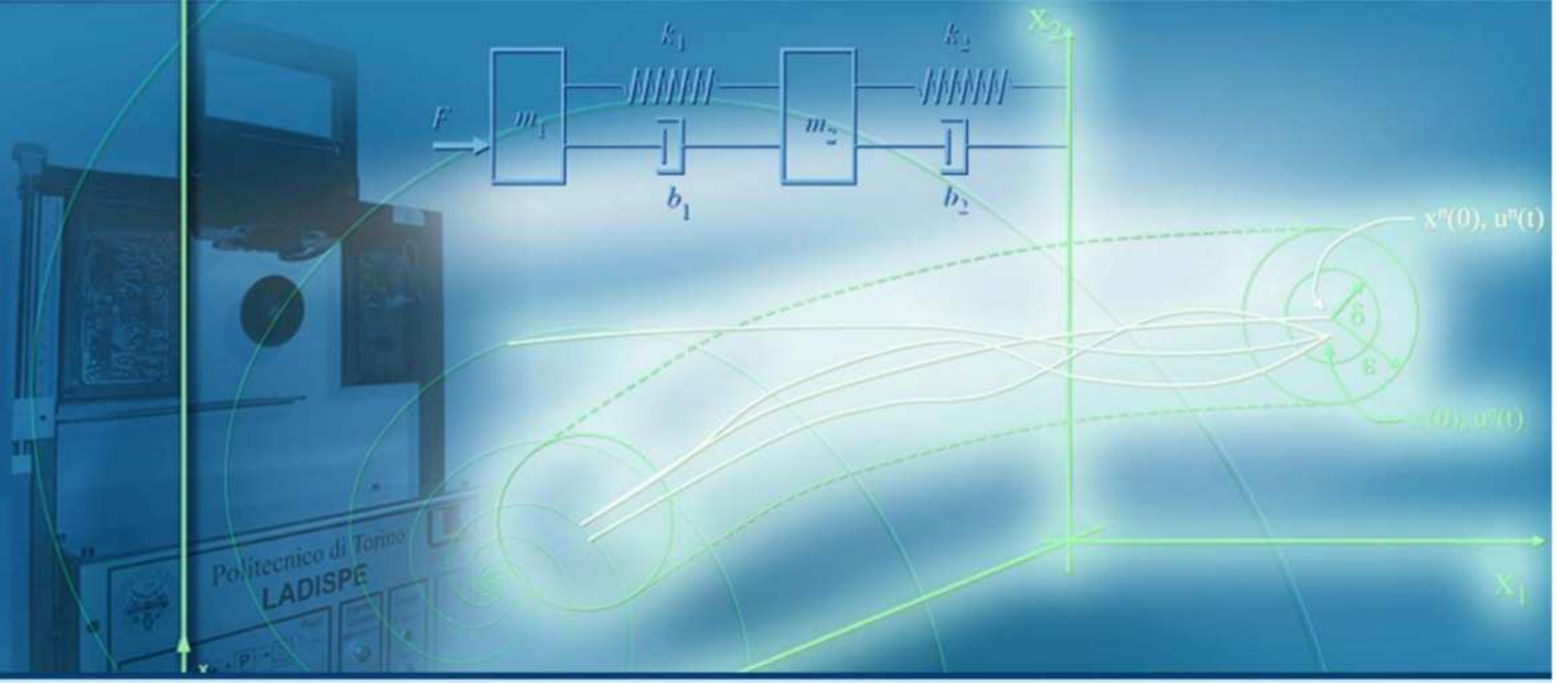


Introduzione e modellistica dei sistemi

Introduzione allo studio dei sistemi

Introduzione allo studio dei sistemi

- Nozione di sistema
- Distinzione fra sistemi statici e sistemi dinamici
- Definizione di sistema dinamico
- Criteri di classificazione dei sistemi dinamici
- Casi particolari di sistemi dinamici a dimensione finita
- Esempi di classificazione di sistemi dinamici

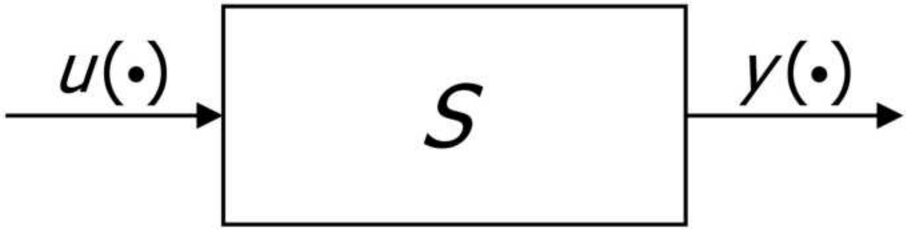


Introduzione allo studio dei sistemi

Nozione di sistema

Nozione di sistema (1/2)

- Per **sistema** si intende un ente (fisico o astratto) dato dall'interconnessione di più parti elementari, per cui vale il principio di azione e reazione



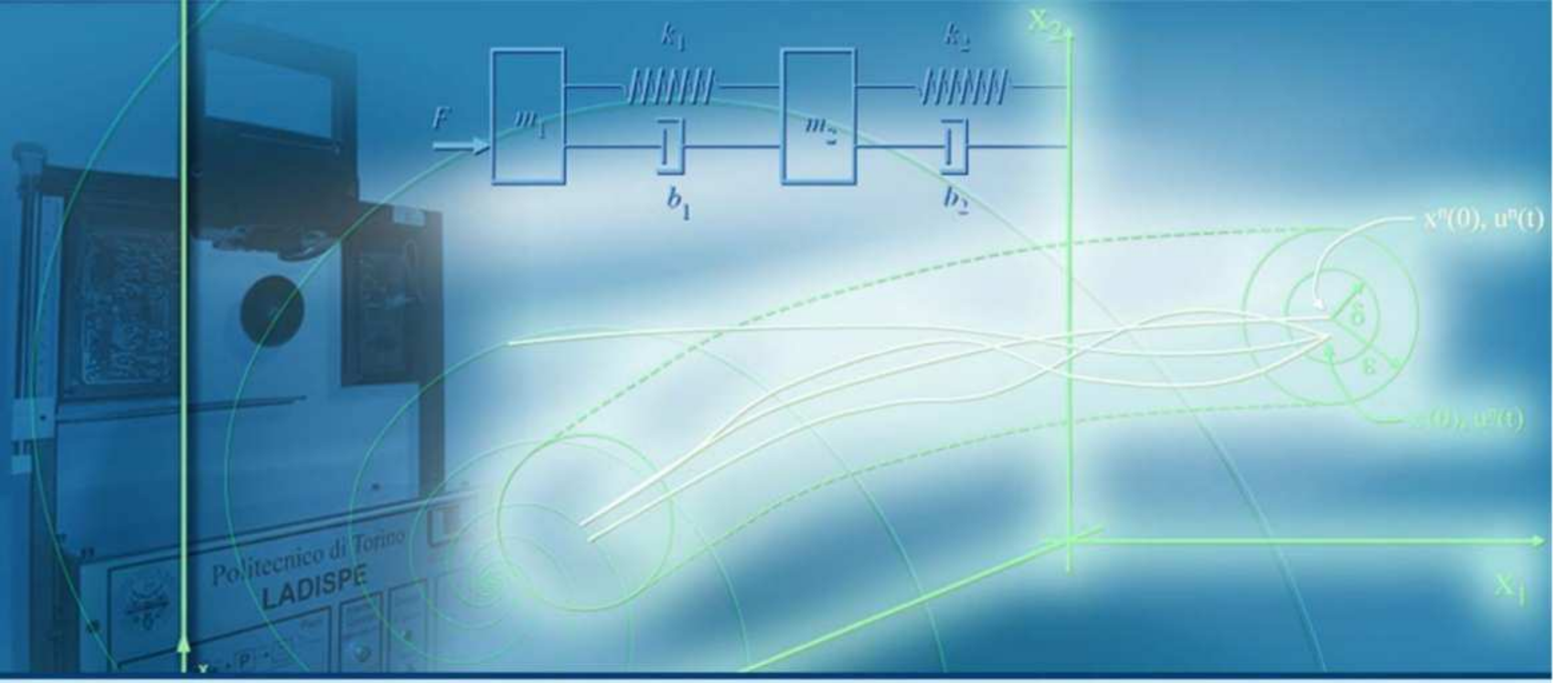
$u(\bullet)$: **ingresso** (azione, causa)
$y(\bullet)$: **uscita** (reazione, effetto)

La variabile d'interesse del sistema è l'uscita y, il cui andamento è influenzato dall'ingresso u

Nozione di sistema (2/2)

- Il comportamento di un sistema è descrivibile da un insieme S di relazioni matematiche (detto **modello matematico**) che legano fra loro l'ingresso u e l'uscita y

- Problematiche d'interesse nello studio dei sistemi:
  - Previsione noti $S, u(\bullet) \Rightarrow$ trovare $y(\bullet)$
  - Controllo noti $S, y_{des}(\bullet) \Rightarrow$ trovare $u(\bullet)$
  - Identificazione noti $u(\bullet), y(\bullet) \Rightarrow$ trovare S
- Notazione:
  - $u(\bullet), y(\bullet)$: funzioni di ingresso e di uscita
  - $u(t), y(t)$: valori dell'ingresso e dell'uscita all'istante t



Introduzione allo studio dei sistemi

Distinzione fra sistemi statici e sistemi dinamici

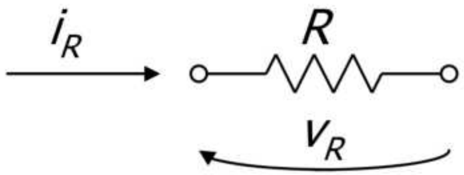
Sistema statico

- Per **sistema statico** si intende un sistema in cui il legame ingresso-uscita è istantaneo o statico:

$$\boxed{y(t) = g\big(u(t)\big), \quad \forall t}$$

cioè il valore dell'uscita *y* all'istante *t* dipende solo dal valore dell'ingresso *u* allo stesso istante *t*

- Esempio: resistore ideale



$$u(t) = i_R(t)$$
$$y(t) = v_R(t) = R\, i_R(t) = g\big(u(t)\big),\ \forall t$$

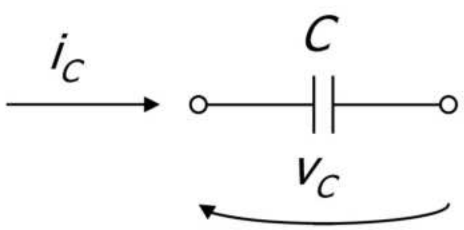
Sistema dinamico (1/3)

- Per **sistema dinamico** si intende un sistema in cui il legame ingresso-uscita è di tipo dinamico:

$$\boxed{y(t) = g\big(u(]-\infty, t])\big), \quad \forall t}$$

cioè il valore dell'uscita *y* all'istante *t* dipende da tutti i valori dell'ingresso *u* fino all'istante *t*

- Esempio: condensatore ideale, avente



$$u(t) = i_C(t) = C\, dv_C(t) / dt$$

$$y(t) = v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\sigma)d\sigma =$$

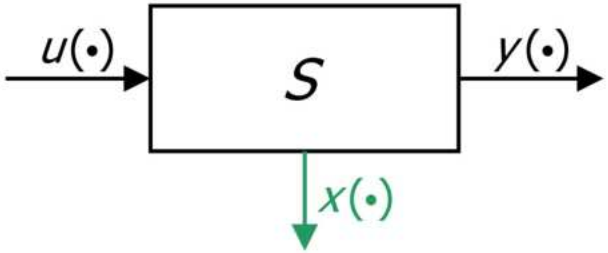
$$= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} u(\sigma)d\sigma = g\big(u(]-\infty, t])\big), \forall t$$

Sistema dinamico (2/3)

- Per riassumere tutta la "storia passata" del sistema fino all'istante τ, si può introdurre lo **stato** $\boldsymbol{x(\tau)}$ che racchiude in sé tutta la memoria del passato:

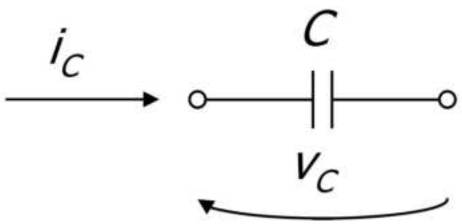
$$\boxed{y(t) = g\Big(x(\tau), u\big([\tau, t]\big)\Big), \quad \forall t \geq \tau}$$

- Rappresentazione grafica di un sistema dinamico:



Sistema dinamico (3/3)

- Esempio: condensatore ideale, avente $v_C(-\infty)=0$



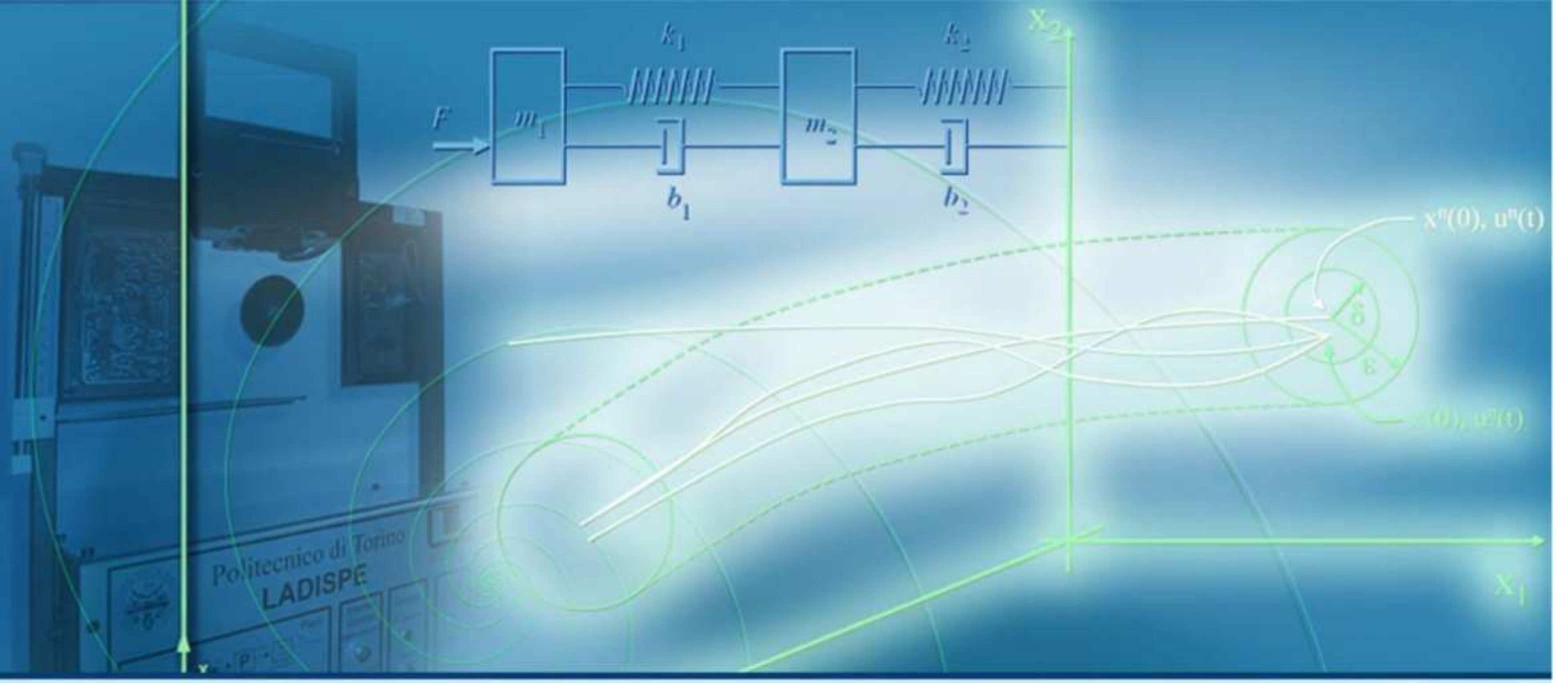
$$u(t) = i_C(t) = C\, dv_C(t)\big/ dt$$

$$y(t) = v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\sigma)d\sigma$$

$$\boldsymbol{x(\tau)} = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\tau} i_C(\sigma)d\sigma = \boldsymbol{v_C(\tau)}$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C(\sigma)d\sigma = \underbrace{\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{\tau} i_C(\sigma)d\sigma}_{x(\tau)} + \frac{1}{C}\int_{\tau}^{t} i_C(\sigma)d\sigma =$$

$$= x(\tau) + \frac{1}{C}\int_{\tau}^{t} u(\sigma)d\sigma = g\left(x(\tau), u([\tau,t])\right), \quad \forall t \geq \tau$$



Introduzione allo studio dei sistemi

Definizione di sistema dinamico

Definizione di sistema dinamico (1/3)

- **Definizione assiomatica** di sistema dinamico:

$$\boxed{S(T, U, \Omega, X, Y, \Gamma, \varphi, \eta)}$$

è un ente definito dai seguenti insiemi

T : insieme ordinato dei tempi
U : insieme dei valori assunti dall'ingresso u
Ω : insieme delle funzioni d'ingresso $\{u(\bullet): T \to U\}$
X : insieme dei valori assunti dallo stato x
Y : insieme dei valori assunti dall'uscita y
Γ : insieme delle funzioni d'uscita $\{y(\bullet): T \to Y\}$

per cui sono definite le seguenti funzioni φ, η che ne determinano la **rappresentazione di stato** (o **rappresentazione ingresso-stato-uscita**):

Definizione di sistema dinamico (2/3)

- **Funzione di transizione dello stato φ**
  L'evoluzione temporale dello stato (detta anche **movimento dello stato**) è descritta dall'equazione:

$$\boxed{x(t) = \varphi\big(t, \tau, x(\tau), u(\bullet)\big)}$$

t : istante finale

τ : istante iniziale, con $\tau \leq t$

$x(\tau)$: valore iniziale dello stato del sistema

$u(\bullet)$: funzione d'ingresso definita nell'intervallo $[\tau, t]$

La funzione di transizione φ soddisfa le proprietà di consistenza, irreversibilità, composizione, causalità

Definizione di sistema dinamico (3/3)

- **Funzione di uscita η**
  L'evoluzione temporale dell'uscita (detta anche **movimento dell'uscita** o **risposta**) è descritta da:

$$\boxed{y(t) = \eta\big(t, x(t), u(t)\big)}$$

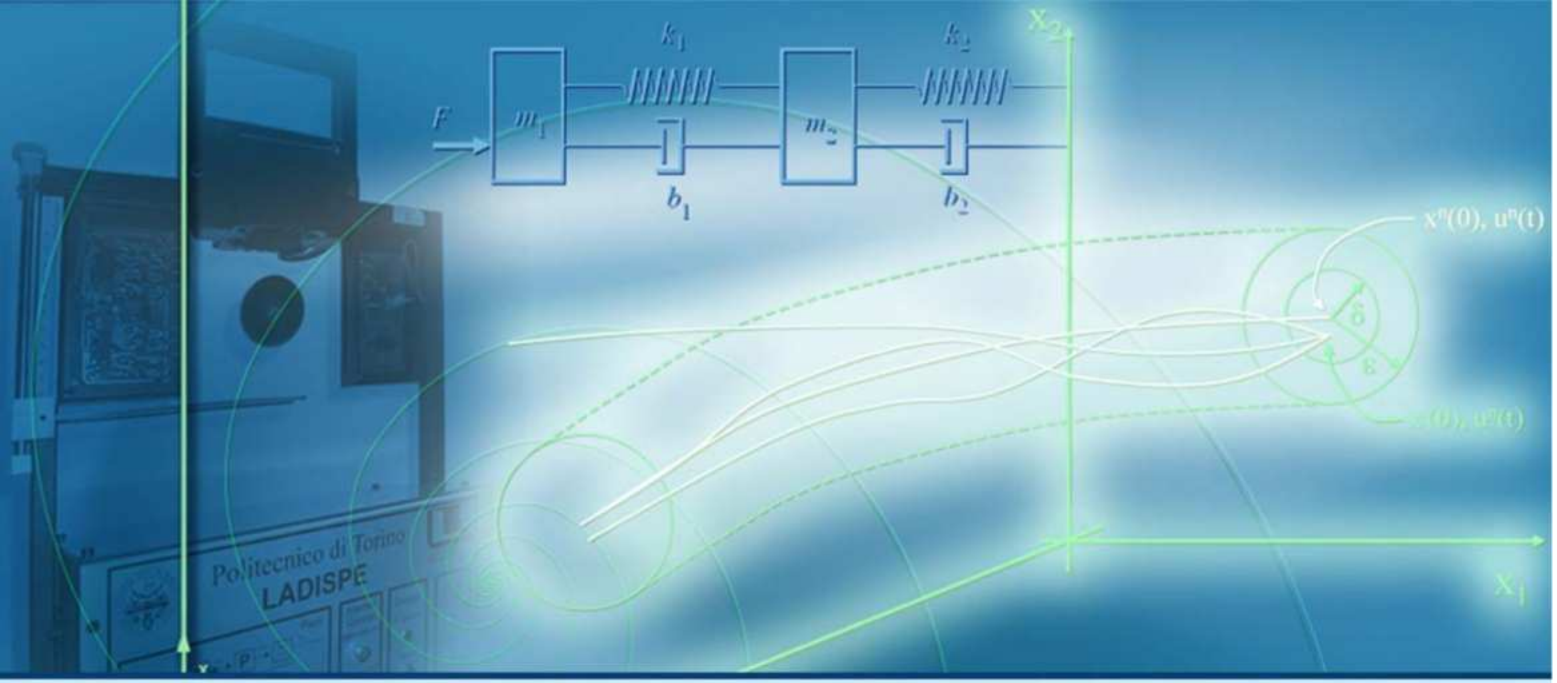
Sistema improprio
(non fisicamente realizzabile)

oppure da:

$$\boxed{y(t) = \eta\big(t, x(t)\big)}$$

Sistema proprio
(fisicamente realizzabile)

La funzione di uscita η è una funzione istantanea (cioè statica) dello stato e dell'eventuale ingresso



Introduzione allo studio dei sistemi

Criteri di classificazione dei sistemi dinamici

Classificazione dei sistemi dinamici (1/5)

- Insieme dei tempi T:
  - $T \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ sistema dinamico a tempo continuo
  - $T \subseteq \mathbb{Z} \Rightarrow$ sistema dinamico a tempo discreto
    (si usa k come variabile temporale nel caso discreto, per meglio distinguerla dalla t del caso continuo)

Classificazione dei sistemi dinamici (2/5)

- Insiemi dei valori di ingresso U e di uscita Y:
  - Insiemi discreti $\Rightarrow$ sistema dinamico a ingressi e uscite "quantizzate"
  - $U \subseteq \mathbb{R}^p, Y \subseteq \mathbb{R}^q$
    - $p = q = 1$: sistema monovariabile o SISO (Single Input - Single Output)
    - $p > 1$ e/o $q > 1$: sistema multivariabile o MIMO (Multiple Input - Multiple Output)

Classificazione dei sistemi dinamici (3/5)

- Insieme dei valori dello stato X:
  - Insieme discreto $\Rightarrow$ sistema dinamico a stati finiti
  - $X \subseteq \mathbb{R}^n$, n finito $\Rightarrow$ sistema a dimensione finita (sistema a parametri concentrati)
    (nel caso a tempo continuo, il sistema dinamico è descritto da un sistema di equazioni differenziali alle derivate ordinarie)
  - $X \subseteq \mathbb{R}^n$, n infinito $\Rightarrow$ sistema a dimensione infinita (sistema a parametri distribuiti)
    (nel caso a tempo continuo, il sistema dinamico è descritto da un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali)

Classificazione dei sistemi dinamici (4/5)

- Proprietà di linearità delle funzioni φ ed η:
  - Il sistema dinamico è **lineare** se
    - U, Ω, X, Y, Γ sono spazi vettoriali
    - φ è lineare in x e in u

$$x(t) = \varphi\big(t, \tau, x(\tau), u(\cdot)\big) =$$
$$= \varphi_\ell(t, \tau)\, x(\tau) + \varphi_f(t, \tau)\, u(\cdot) = x_\ell(t) + x_f(t)$$

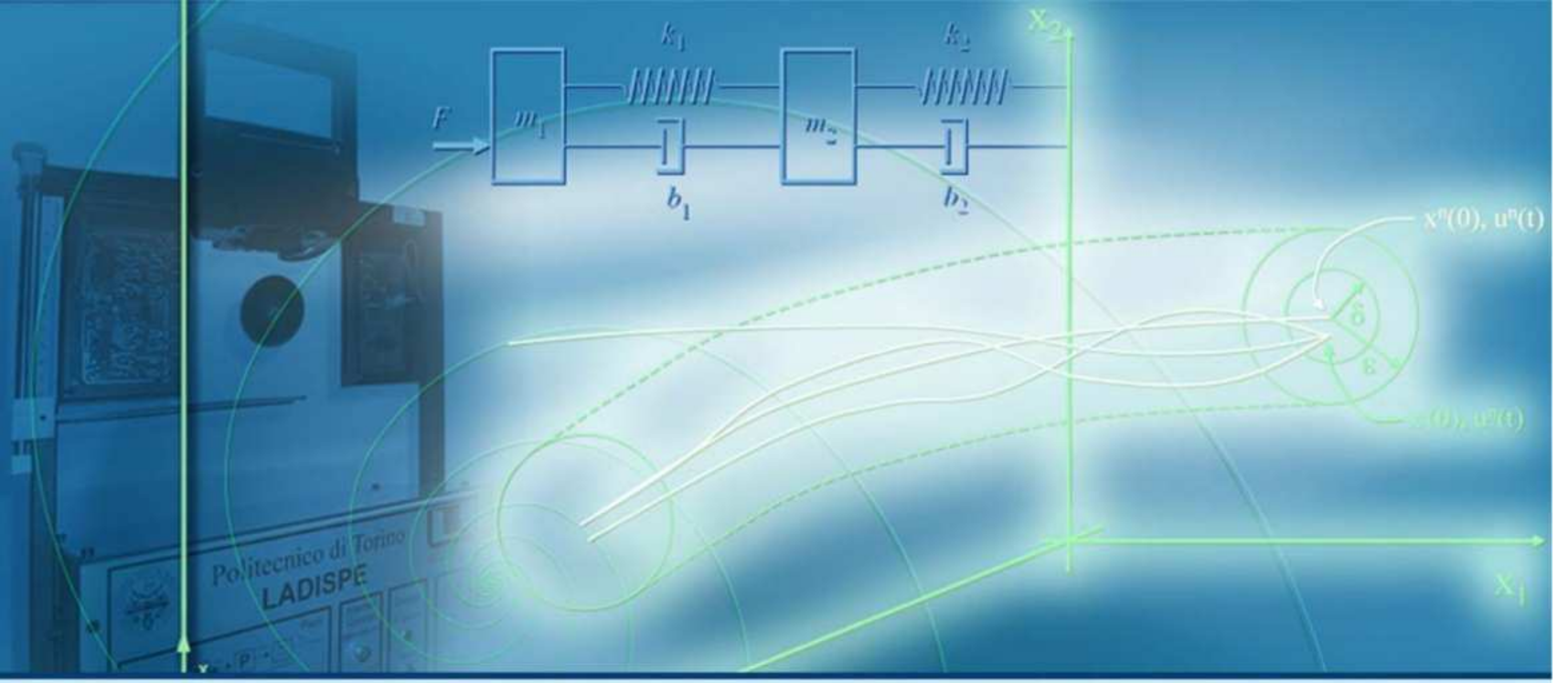
    - η è lineare in x e in u

$$y(t) = \eta\big(t, x(t), u(t)\big) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)$$

  - Altrimenti il sistema dinamico è **non lineare**

Classificazione dei sistemi dinamici (5/5)

- Proprietà di stazionarietà (o invarianza nel tempo) delle funzioni φ ed η:
  - Il sistema dinamico è **stazionario** (oppure **tempo-invariante**) se φ ed η non dipendono esplicitamente dal tempo, cioè se
    - $\varphi\left(t,\tau,x^*,u(\cdot)\right) = \varphi\left(t+\Delta\tau,\tau+\Delta\tau,x^*,u^{\Delta\tau}(\cdot)\right)$
      essendo $u^{\Delta\tau}(\sigma) = u(\sigma-\Delta\tau),\ \forall\sigma\in[\tau+\Delta\tau, t+\Delta\tau],\ \Delta\tau\geq 0$
    - $y(t) = \eta\left(x(t),u(t)\right)$
  - Altrimenti il sistema dinamico è **non stazionario** (oppure **tempo-variante**)



Introduzione allo studio dei sistemi

Casi particolari di sistemi dinamici a dimensione finita

Sistema dinamico a tempo continuo

- Per un sistema dinamico, a dimensione finita, **a tempo continuo**:
  il movimento $x(t)$ è soluzione di un sistema di n equazioni differenziali ordinarie del I ordine

$$\boxed{\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f\left(t, x(t), u(t)\right)}$$

Equazione di stato

il movimento $y(t)$ è dato da

$$\boxed{y(t) = g\left(t, x(t), u(t)\right)}$$

Equazione di uscita

Sistema dinamico, a tempo continuo, lineare

- Per un sistema dinamico, a dimensione finita, a tempo continuo, **lineare**:
  l'evoluzione temporale dello stato è descritta da *n* equazioni differenziali lineari in $x(t)$ ed $u(t)$

  $$\boxed{\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)}$$ Equazione di stato

  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matrice di stato
  $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$: matrice degli ingressi

  l'evoluzione temporale dell'uscita è descritta da

  $$\boxed{y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)}$$ Equazione di uscita

  $C(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$: matrice delle uscite
  $D(t) \in \mathbb{R}^{q \times p}$: matrice del legame diretto ingresso-uscita

Sistema dinamico, a tempo continuo, LTI

- Per un sistema dinamico, a dimensione finita, a tempo continuo, **lineare tempo-invariante** (**LTI**): l'evoluzione temporale dello stato è descritta da n equazioni differenziali lineari in $x(t)$ ed $u(t)$ a coefficienti costanti

  $$\boxed{\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)}$$ Equazione di stato

  l'evoluzione temporale dell'uscita è descritta da q equazioni lineari in $x(t), u(t)$ a coefficienti costanti

  $$\boxed{y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)}$$ Equazione di uscita

  con A, B, C, D : matrici costanti

Sistema dinamico a tempo discreto

- Per un sistema dinamico, a dimensione finita, **a tempo discreto**: l'evoluzione temporale dello stato è descritta da un sistema di *n* equazioni alle differenze finite

$$\boxed{x(k+1) = f\left(k, x(k), u(k)\right)}$$

Equazione di stato

l'evoluzione temporale dell'uscita è descritta da

$$\boxed{y(k) = g\left(k, x(k), u(k)\right)}$$

Equazione di uscita

Sistema dinamico, a tempo discreto, lineare

- Per un sistema dinamico, a dimensione finita, a tempo discreto, **lineare**:
  l'evoluzione temporale dello stato è descritta da n equazioni alle differenze finite lineari in $x(k), u(k)$

$$\boxed{x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)}$$ Equazione di stato

$A(k) \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matrice di stato
$B(k) \in \mathbb{R}^{n \times p}$: matrice degli ingressi

l'evoluzione temporale dell'uscita è descritta da

$$\boxed{y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k)}$$ Equazione di uscita

$C(k) \in \mathbb{R}^{q \times n}$: matrice delle uscite
$D(k) \in \mathbb{R}^{q \times p}$: matrice del legame diretto ingresso-uscita

Sistema dinamico, a tempo discreto, LTI

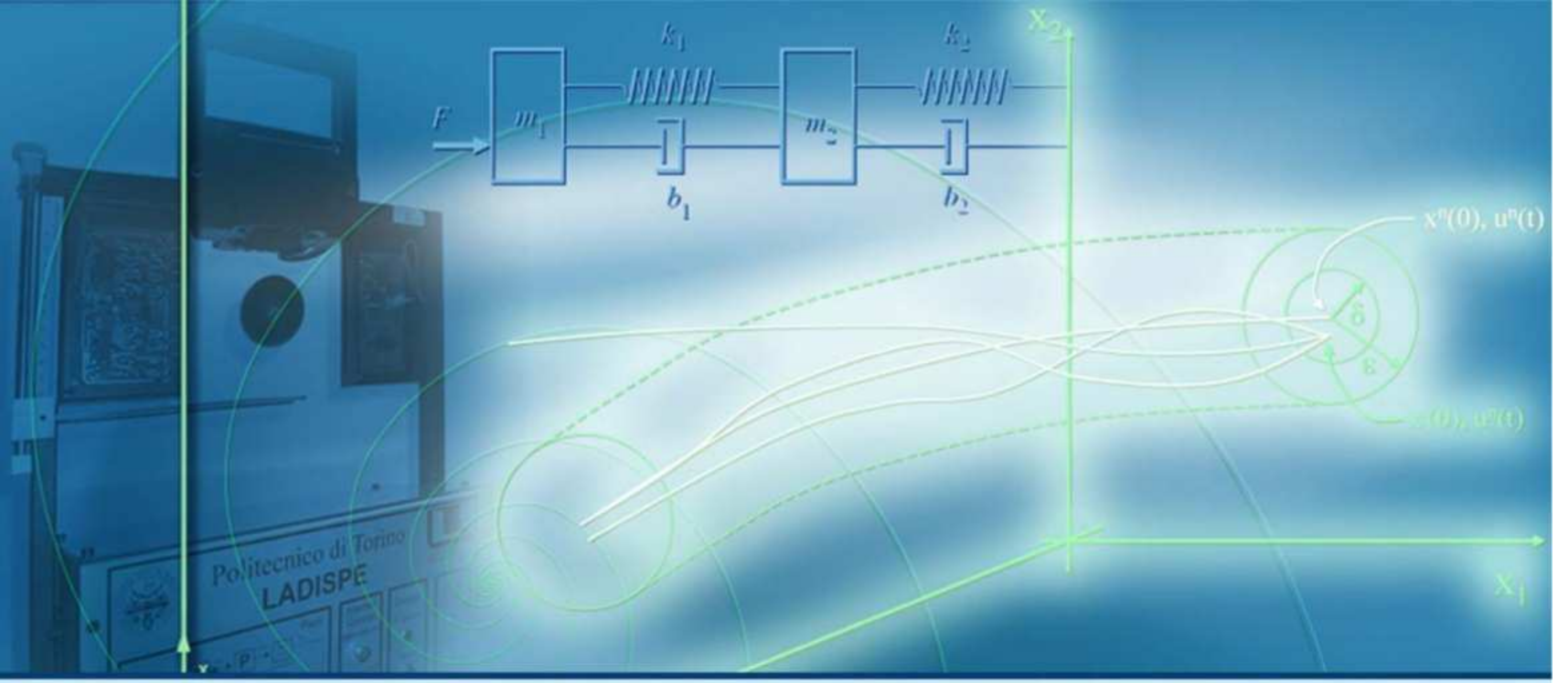
- Per un sistema dinamico, a dimensione finita, a tempo discreto, **lineare tempo-invariante** (**LTI**): l'evoluzione temporale dello stato è descritta da *n* equazioni alle differenze finite lineari in $x(k), u(k)$ a coefficienti costanti

  $$\boxed{x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)}$$ Equazione di stato

  l'evoluzione temporale dell'uscita è descritta da *q* equazioni lineari in $x(k), u(k)$ a coefficienti costanti

  $$\boxed{y(k) = Cx(k) + Du(k)}$$ Equazione di uscita

  con A, B, C, D : matrici costanti



Introduzione allo studio dei sistemi

Esempi di classificazione di sistemi dinamici

Esempio #1 di classificazione (1/2)

- Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 3x_1(t) + x_1(t)\, u(t) \\ y(t) &= x_2(t) - u(t) \end{aligned}$$

analizzare le proprietà del modello matematico

Esempio #1 di classificazione (2/2)

- Il sistema è:
  - Dinamico (il legame ingresso-uscita non è istantaneo)
  - A tempo continuo (le equazioni di stato sono equazioni differenziali)
  - SISO (p = #ingressi = dim(u) = 1, q = #uscite = dim(y) = 1)
  - A dimensione finita (n = #variabili di stato = dim(x) = 2 < ∞)
  - Non lineare (per i termini non lineari $x_1^2(t), x_1(t)u(t)$)
  - Tempo-invariante (equazioni di stato e di uscita a coefficienti costanti)

Esempio #2 di classificazione (1/2)

- Dato il sistema descritto dalle seguenti equazioni

$$
\begin{aligned}
x_1(k+1) &= x_2(k) + 2u_1(k) \\
x_2(k+1) &= k\,x_1(k) + u_2(k) \\
y(k) &= x_1(k) + 3u_1(k)
\end{aligned}
$$

analizzare le proprietà del modello matematico

Esempio #2 di classificazione (2/2)

- Il sistema è:
  - Dinamico (il legame ingresso-uscita non è istantaneo)
  - A tempo discreto (le equazioni di stato sono equazioni alle differenze)
  - MIMO (p = #ingressi = dim(u) = 2, q = #uscite = dim(y) = 1)
  - A dimensione finita (n = #variabili di stato = dim(x) = $2 < \infty$)
  - Lineare (eq. di stato e di uscita lineari in x_1, x_2, u_1, u_2)
  - Tempo-variante (per il termine $k\,x_1$ avente un coefficiente non costante)