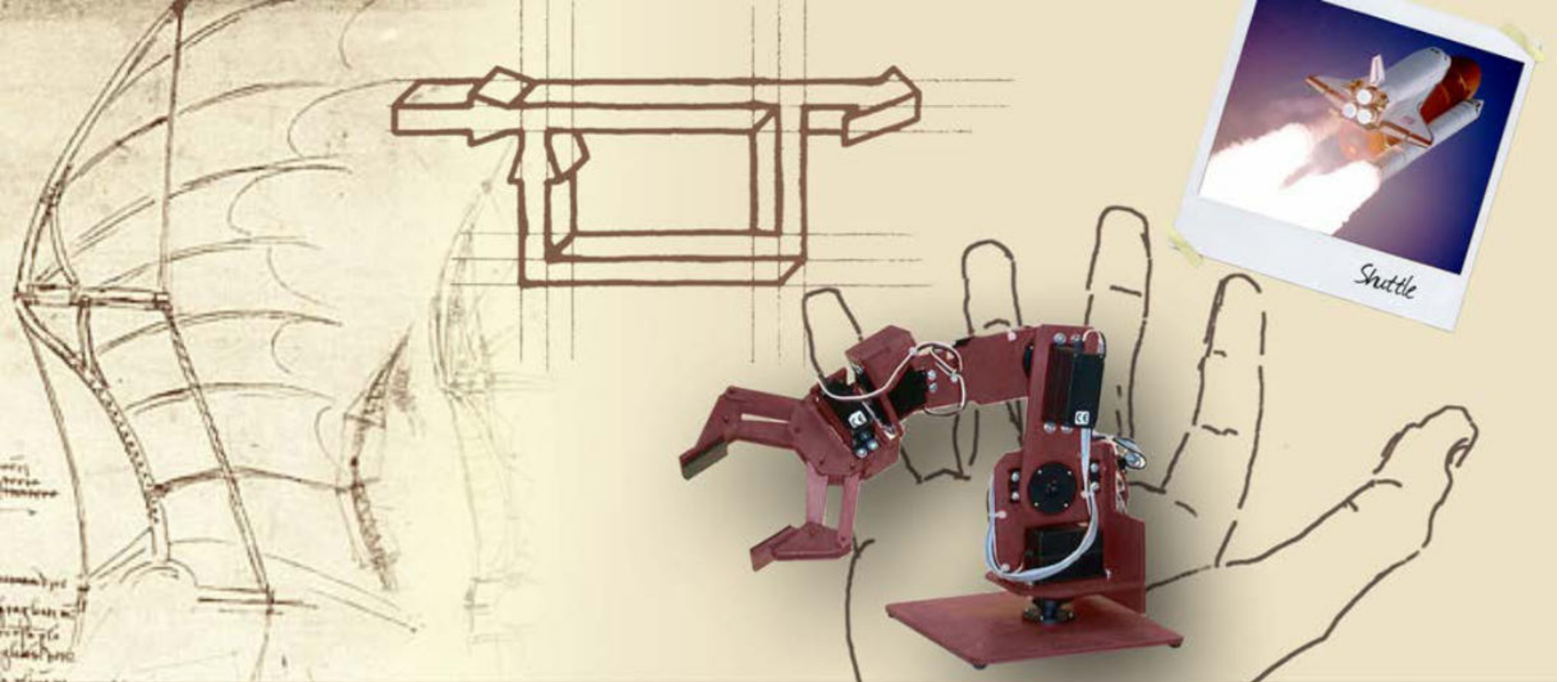
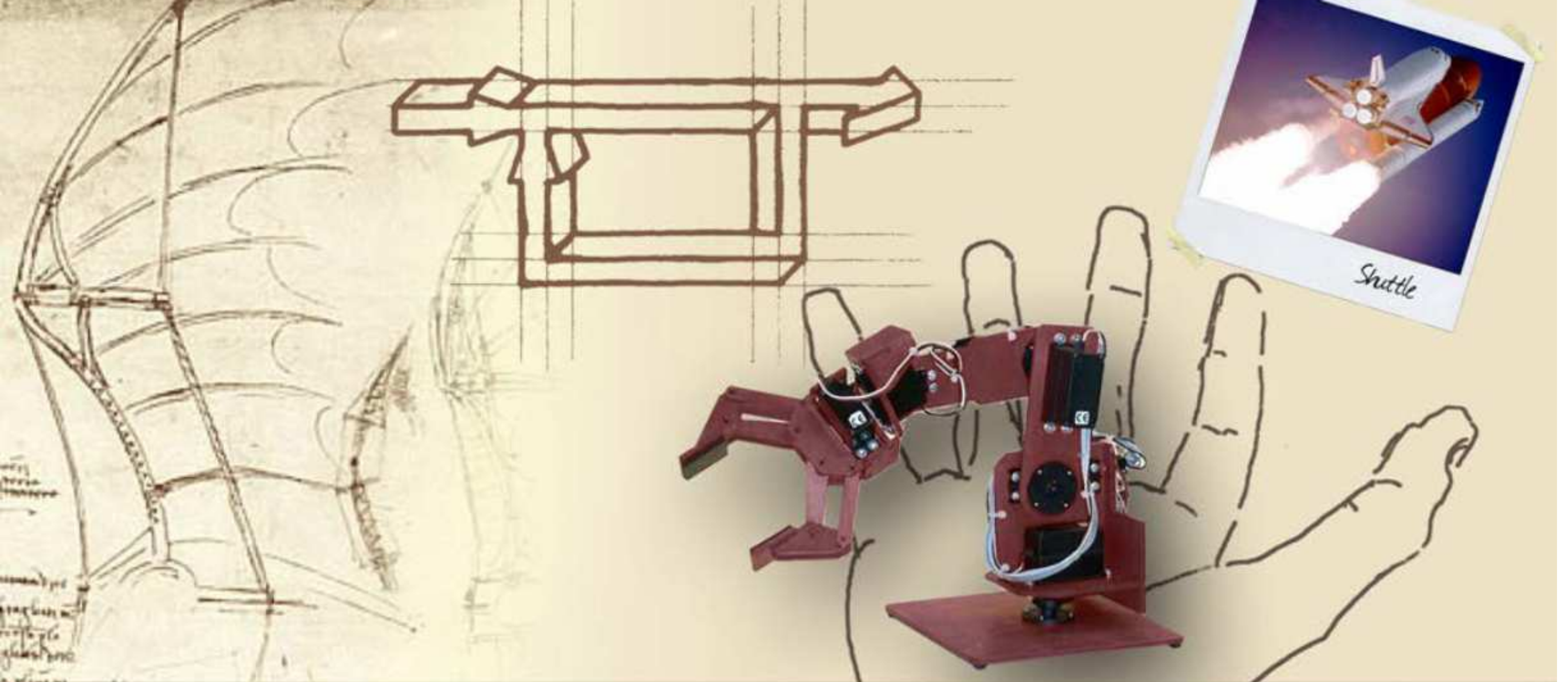


Regime permanente e transitorio

Risposta transitoria e risposta in frequenza

Risposta transitoria e risposta in frequenza

- Analisi della dipendenza **W** $\leftrightarrow$ **G_a**
- Dinamica in **t** e in ω dei sistemi del 2° ordine
- Caratterizzazione di **W** con dinamica dominante del 2° ordine
- Relazioni fra parametri caratteristici della **G_a** e della **W**



Risposta transitoria e risposta in frequenza

Analisi della dipendenza $W \leftrightarrow G_a$

La fdt della catena aperta

- Sia definita la fdt d'anello $G_a(s)$

$$G_a(s) = \frac{N_a(s)}{D_a(s)} = \frac{K_a \prod_{j=1}^{m_a} (s - \xi_j)}{\prod_{i=1}^{n_a} (s - \lambda_i)}, \text{ con } m_a < n_a$$

- **NB**: $D_a(s)$ è monico

La fdt della catena chiusa

- Siano definite le fdt della catena chiusa

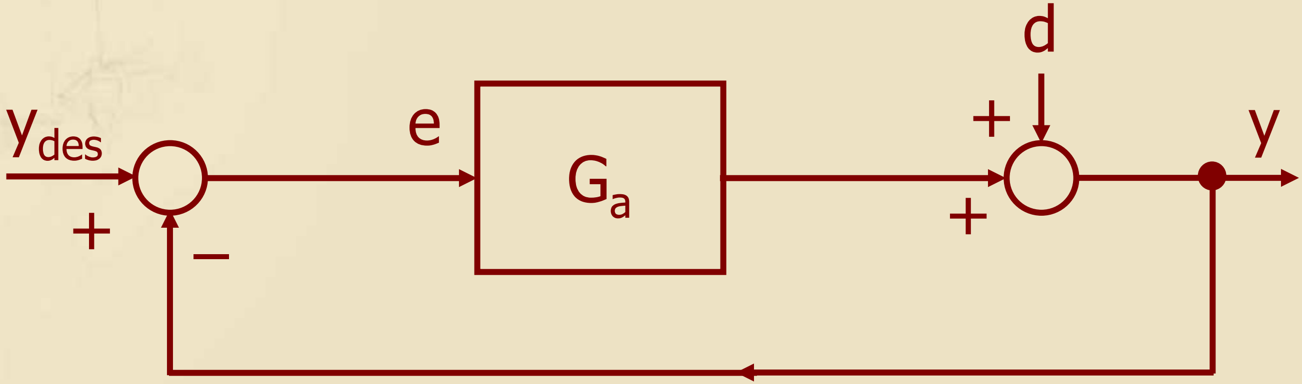
$$W(s) \doteq \frac{y(s)}{r(s)} = K_r W_y(s)$$

$$W_y(s) \doteq \frac{y(s)}{y_{des}(s)} = \frac{N_W(s)}{D_W(s)} = \frac{K_W \prod_{j=1}^{m_W} (s - \xi_{W_j})}{\prod_{i=1}^{n_W} (s - \lambda_{W_i})}, \text{ con } m_W < n_W$$

- **NB**: $D_W(s)$ è monico

Schema di riferimento

- Lo schema di riferimento è quello già introdotto (non è più riportato il simbolo della variabile complessa "s")



W_y funzione di G_a (1/2)

- È immediato ricavare quanto segue:

$$W_y = \frac{N_W}{D_W} = \frac{G_a}{1+G_a} = \frac{N_a}{D_a + N_a}$$

$$\begin{cases} N_W = N_a \\ D_W = D_a + N_a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_W = m_a \\ \xi_{Wj} = \xi_{aj}, \;\; j = 1, \ldots, m_a \\ n_W = n_a \end{cases}$$

W_y funzione di G_a (2/2)

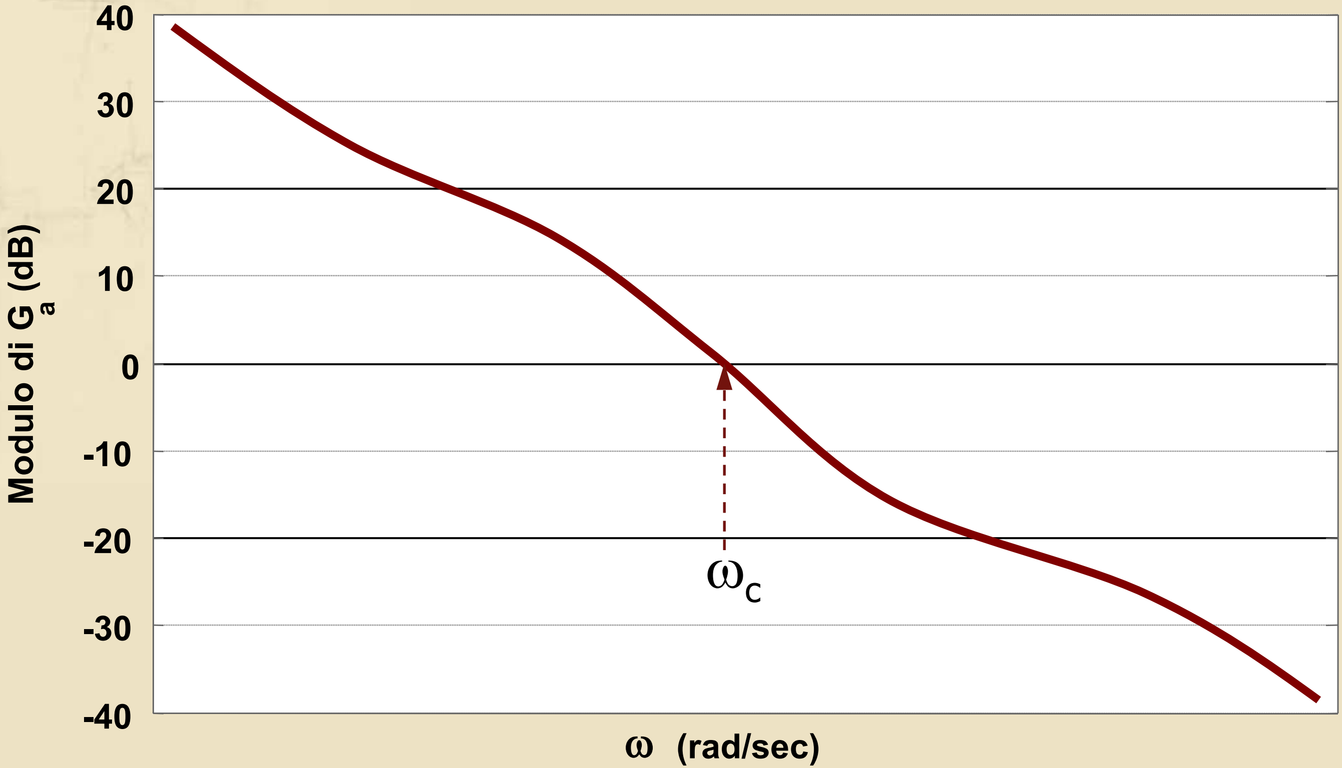
- **NB**:
  - L'ordine della catena chiusa coincide con quello della catena aperta
  - Il numeratore della catena chiusa coincide con quello della catena aperta

La catena chiusa ha gli stessi zeri della catena aperta

Con lo schema di controllo adottato gli zeri della catena chiusa sono sempre coincidenti con gli zeri della catena aperta

Forma tipica di $|G_a|$

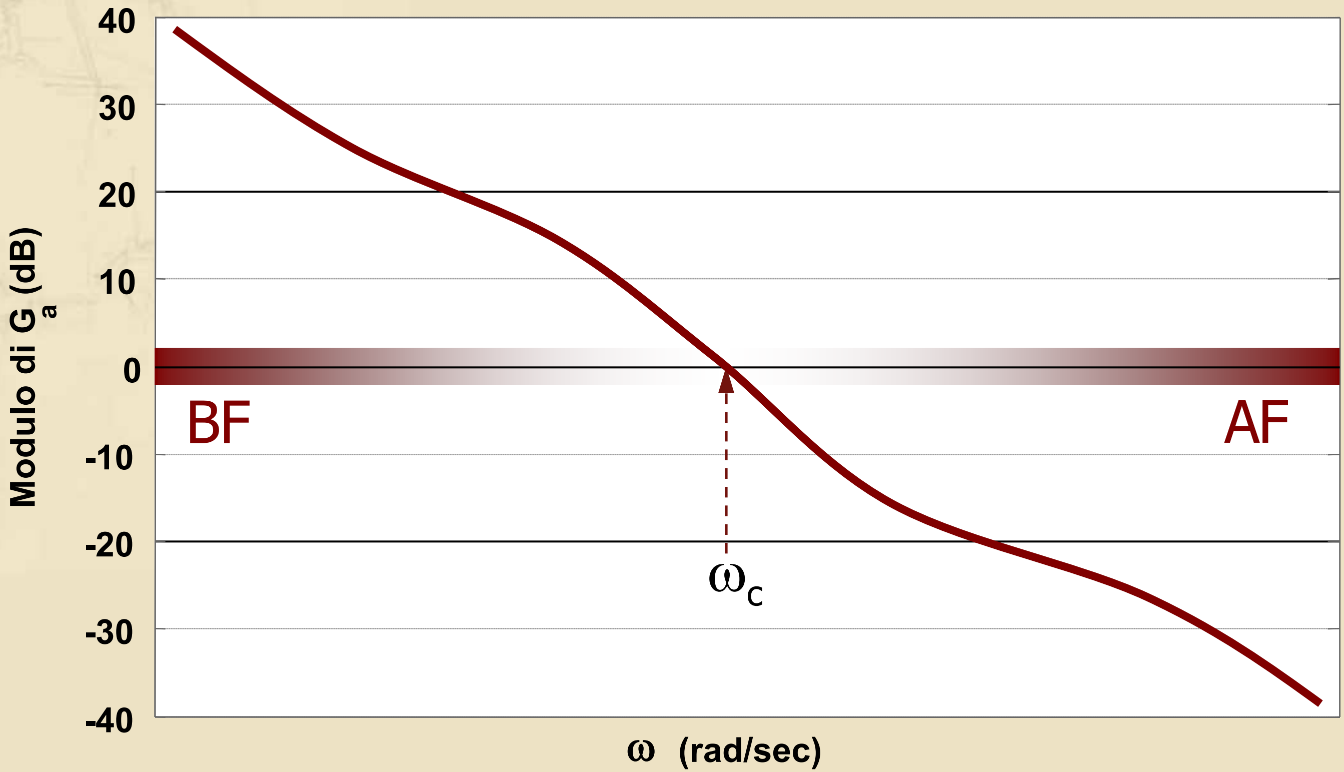
- **Generalmente** la fdt G_a presenta un DdB del modulo come in figura



G_a in bassa e in alta frequenza (1/4)

- La pulsazione di riferimento è la ω_c
- Si definisce banda di bassa frequenza (**BF**) l’insieme $\boldsymbol{\omega \ll \omega_c}$
- Si definisce banda di alta frequenza (**AF**) l’insieme $\boldsymbol{\omega \gg \omega_c}$
- **In genere $\left|G_a\right|_{BF} \gg 1$ a motivo delle specifiche di precisione in regime permanente**
- **In genere $\left|G_a\right|_{AF} \ll 1$ in quanto il sistema è strettamente proprio**

G_a in bassa e in alta frequenza (2/4)



G_a in bassa e in alta frequenza (3/4)

- La relazione

$$\left|G_a\right|_{BF} >> 1 \;\; (\mathrm{in}\; u_n)$$

si può convenzionalmente trasformare nella seguente

$$\left|G_a\right|_{BF} \geq 10\; u_n \rightarrow \left|G_a\right|_{BF} \geq 20\; \mathrm{dB}$$

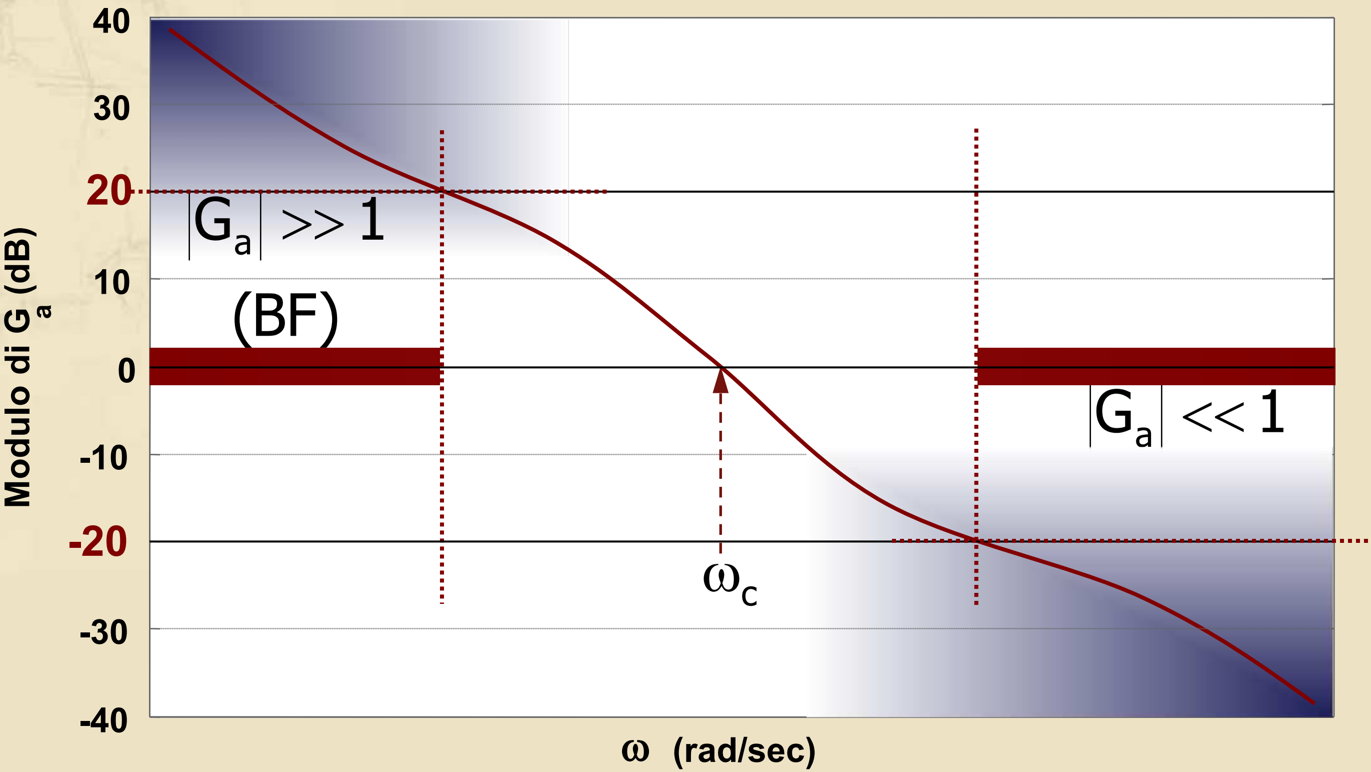
- Analogamente la relazione

$$\left|G_a\right|_{AF} << 1 \;\; (\mathrm{in}\; u_n)$$

si può convenzionalmente trasformare nella seguente

$$\left|G_a\right|_{AF} \leq 0.1\; u_n \rightarrow \left|G_a\right|_{BF} \leq -20\; \mathrm{dB}$$

G_a in bassa e in alta frequenza (4/4)



W_y funzione di G_a in BF (1/3)

- Dalla relazione

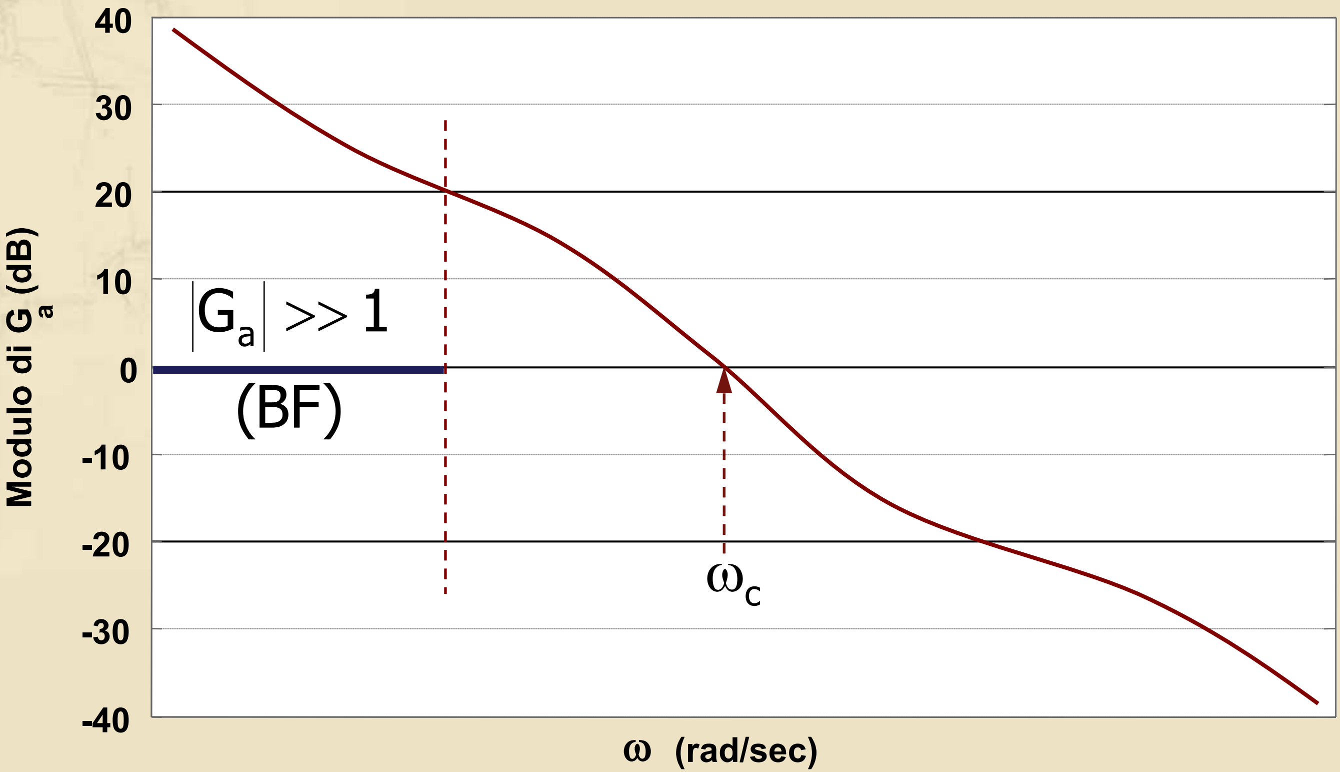
$$W_y = \frac{G_a}{1+G_a}$$

si deduce quanto segue:

$$W_y\Big|_{|G_a|>>1} \cong 1 \overset{\text{in genere}}{\Rightarrow} W_y\Big|_{BF} \cong 1 \Rightarrow \frac{N_W}{D_W}\Bigg|_{BF} \equiv \frac{N_a}{D_W}\Bigg|_{BF} \cong 1$$

$$\frac{N_a}{D_W}\Bigg|_{BF} \cong 1 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} D_W(s \to 0) \cong N_a(s \to 0) \\ \lambda_W\big|_{BF} \cong \xi_a\big|_{BF} \end{cases}}$$

W_y funzione di G_a in BF (2/3)



W_y funzione di G_a in BF (3/3)

- Si deduce allora che nella banda in cui $|G_a| >> 1$ (in genere in BF) il guadagno stazionario della catena chiusa è circa unitario e i suoi poli sono approssimativamente coincidenti con gli zeri della catena aperta presenti nella stessa banda

  Nota: $W_y(0)=1$ se $G_a(s)$ presenta almeno un polo in $s=0$

W_y funzione di G_a in AF (1/3)

- Dalla relazione

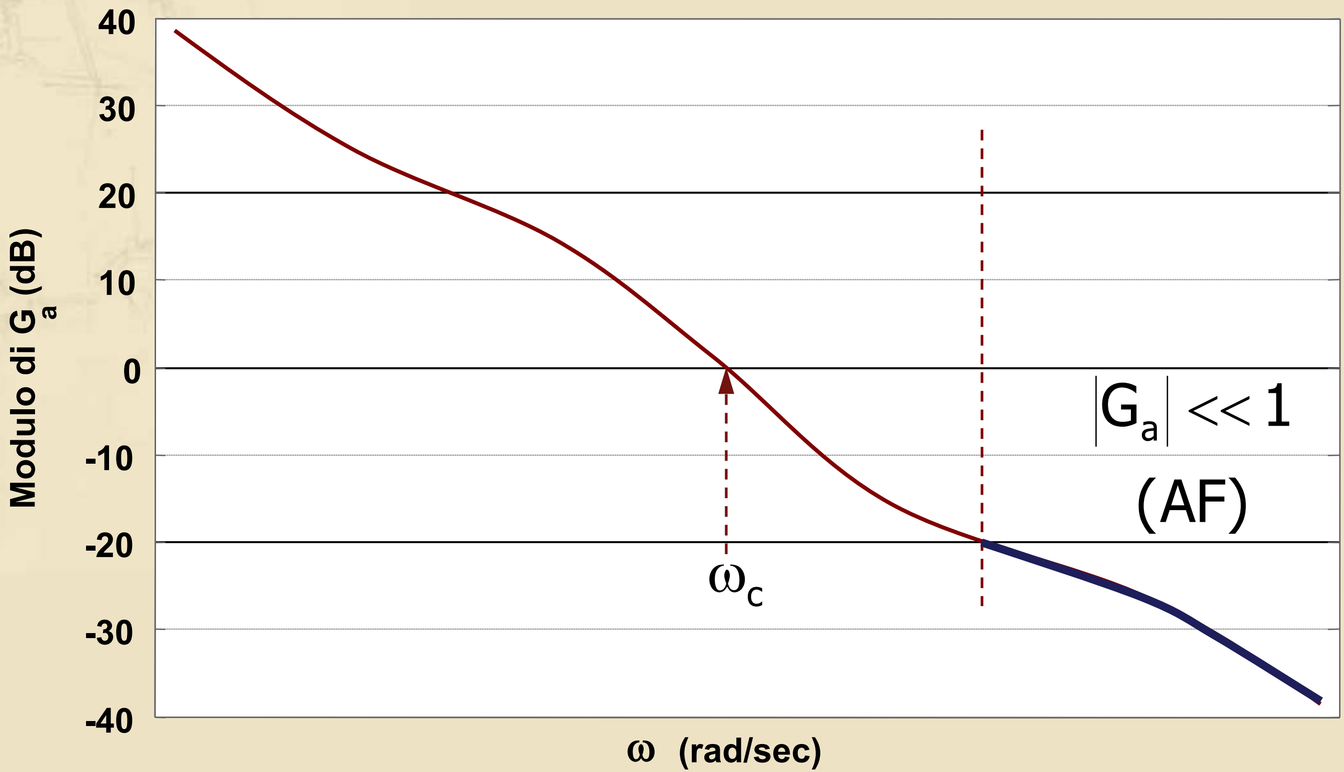
$$W_y = \frac{G_a}{1+G_a}$$

si deduce quanto segue:

$$W_y\Big|_{|G_a|<<1} \cong G_a \overset{\text{in genere}}{\Rightarrow} W_y\Big|_{AF} \cong G_a \Rightarrow \frac{N_W}{D_W}\Big|_{AF} \cong \frac{N_a}{D_a}\Big|_{AF}$$

$$\frac{N_W}{D_W}\Big|_{AF} \cong \frac{N_a}{D_a}\Big|_{AF} \Rightarrow \boxed{\lambda_W\Big|_{AF} \cong \lambda_a\Big|_{AF}}$$

W_y funzione di G_a in AF (2/3)



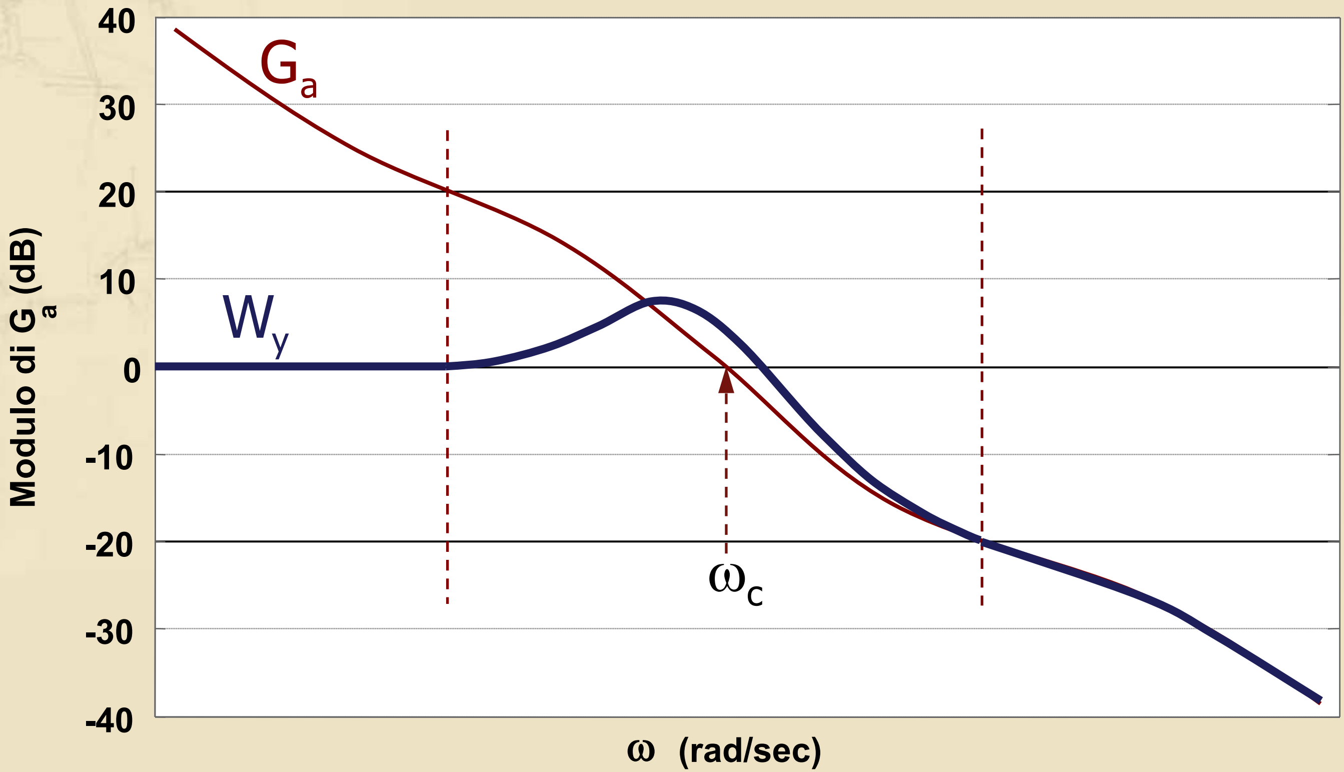
W_y funzione di G_a in AF (3/3)

- Si deduce allora che nella banda in cui $|G_a| << 1$ (in genere in AF) la catena chiusa coincide approssimativamente con la catena aperta (si dice anche che **in AF la catena rimane aperta**).
  In particolare i poli della catena chiusa in AF sono approssimativamente coincidenti con quelli della catena aperta presenti nella stessa banda

Poli in catena chiusa funzione di G_a (1/2)

- I poli della catena chiusa in BF e in AF sono approssimativamente coincidenti rispettivamente con gli zeri della catena aperta (e della catena chiusa) in BF e con i poli della catena aperta in AF
- Per la catena chiusa, nella banda $\omega \cong \omega_c$, non è possibile alcuna particolare approssimazione né è possibile alcuna particolare approssimazione per i suoi poli
- Nella banda $\omega \cong \omega_c$ la catena chiusa presenta **in genere** una dinamica **approssimativamente** del 2° ordine (più o meno smorzata)

Poli in catena chiusa funzione di G_a (2/2)



Esempio (1/12)

- Sia data G_a

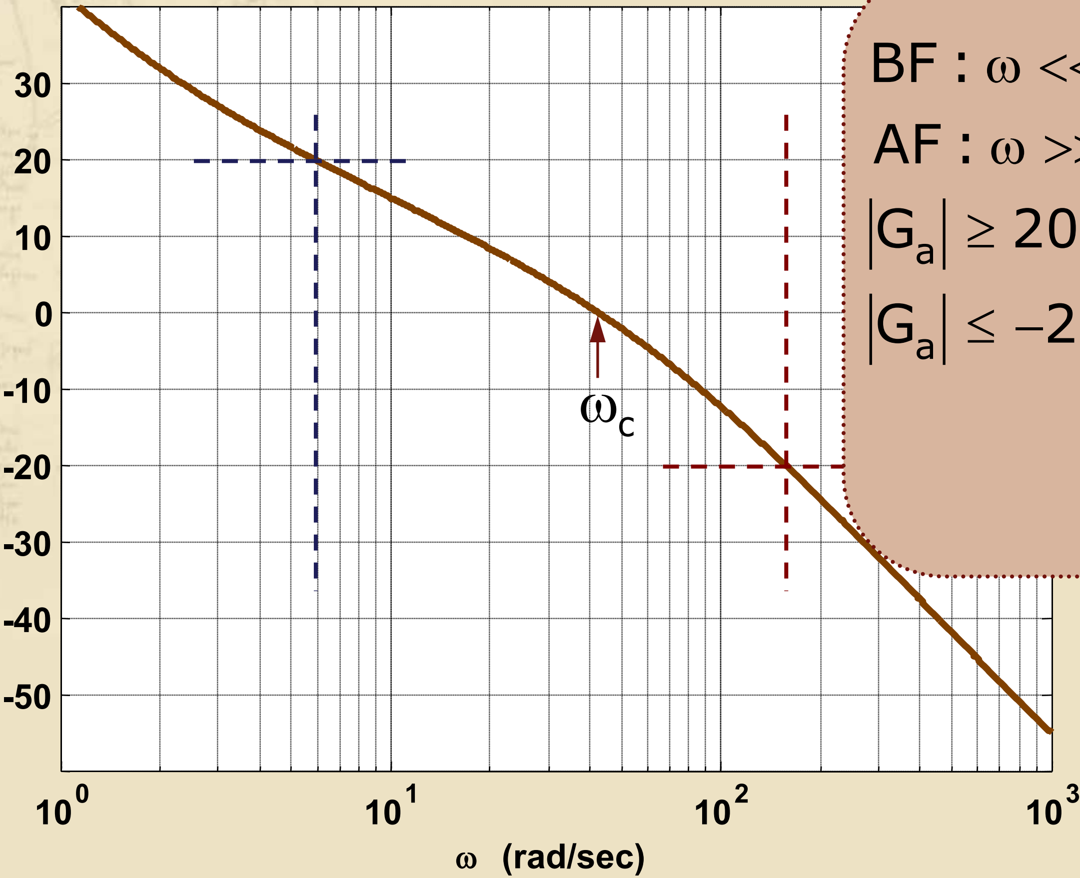
$$G_a = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{s^2\,(s+50)\,(s+300)},$$

$$\omega_c \cong 42.5$$

- La W_y corrispondente è la seguente

$$W_y = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{(s+2.073)\,(s^2+43.7s+2663)\,(s+304.2)}$$

Esempio (2/12)



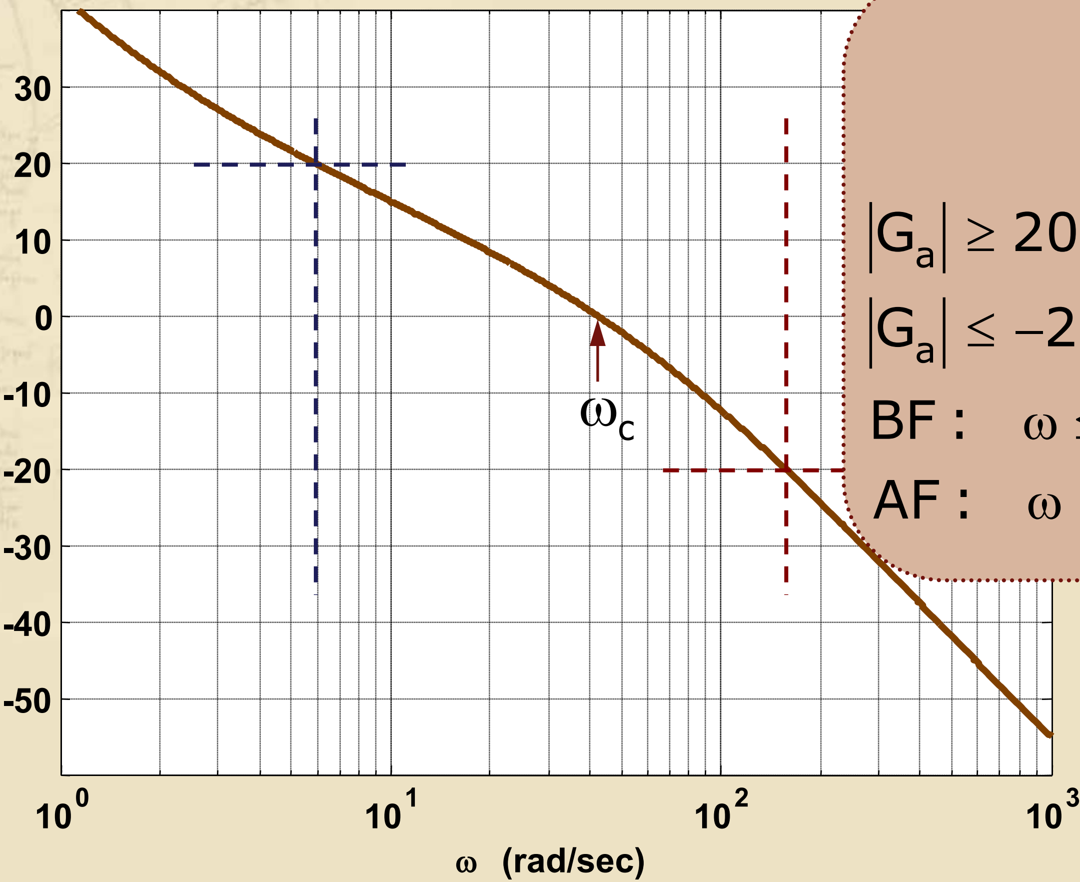
$\text{BF}: \omega \ll 42.5$

$\text{AF}: \omega \gg 42.5$

$\left|G_a\right| \geq 20 \text{ dB} \rightarrow \omega \leq 6$

$\left|G_a\right| \leq -20 \text{ dB} \rightarrow \omega \geq 156$

Esempio (2/12)



$$|G_a| \geq 20 \text{ dB} \rightarrow \omega \leq 6$$

$$|G_a| \leq -20 \text{ dB} \rightarrow \omega \geq 156$$

$$\text{BF}: \quad \omega \leq 6$$

$$\text{AF}: \quad \omega \geq 156$$

Esempio (3/12)

- G_a:

$$G_a = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{s^2(s+50)\,(s+300)}, \qquad \omega_c \cong 42.5$$

- W_y:

$$W_y = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{(s+2.073)\,(s^2+43.7s+2663)\,(s+304.2)}$$

Esempio (4/12)

- G_a:

$$G_a = \frac{\boxed{1680\,(s+2)(s+500)}}{s^2(s+50)(s+300)}, \qquad \omega_c \cong 42.5$$

- W_y:

$$W_y = \frac{\boxed{1680\,(s+2)(s+500)}}{(s+2.073)(s^2+43.7s+2663)(s+304.2)}$$

ω qualunque

Esempio (5/12)

- G_a:

$$G_a = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{s^2(s+50)\,(s+300)}, \qquad \omega_c \cong 42.5$$

- W_y:

$$W_y = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{(s+2.073)\,(s^2+43.7s+2663)\,(s+304.2)}$$

$$\boxed{W_y\Big|_{s\to 0} = 1}$$

ω in BF

Esempio (5/12)

- G_a:

$$G_a = \frac{1680\boxed{(s+2)}(s+500)}{s^2(s+50)(s+300)}, \qquad \omega_c \cong 42.5$$

- W_y:

$$W_y = \frac{1680\boxed{(s+2)}(s+500)}{\boxed{(s+2.073)}(s^2+43.7s+2663)(s+304.2)}$$

ω in BF

Esempio (6/12)

- G_a:

$$G_a = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{s^2(s+50)\boxed{(s+300)}}, \qquad \omega_c \cong 42.5$$

- W_y:

$$W_y = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{(s+2.073)\,(s^2+43.7s+2663)\boxed{(s+304.2)}}$$

ω in AF

Esempio (7/12)

- G_a:

$$G_a = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{s^2\,(s+50)\,(s+300)}, \qquad \omega_c \cong 42.5$$

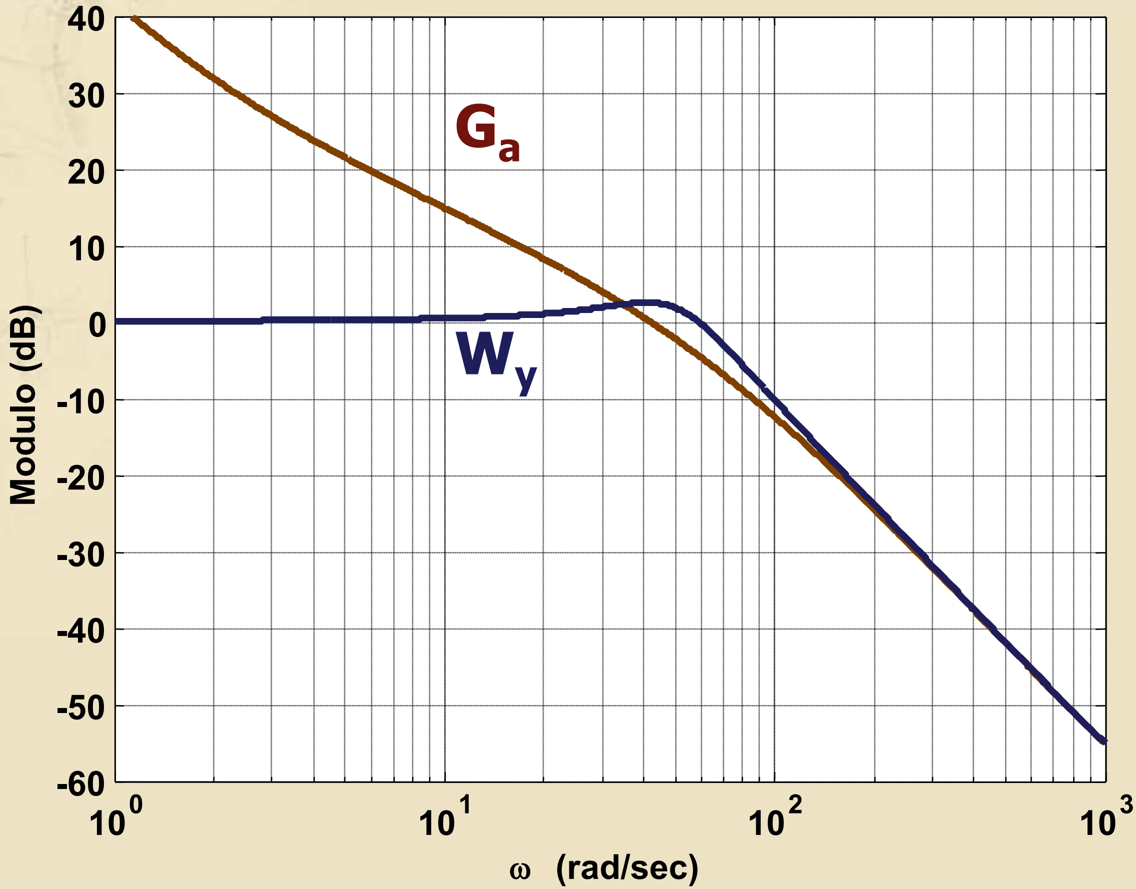
- W_y:

$$\boxed{\omega_n = 51.6,\ \ \zeta = 0.42}$$

$$W_y = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{(s+2.073)\boxed{(s^2+43.7s+2663)}(s+304.2)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\omega \approx \omega_c}}$$

Esempio (8/12)



40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
Modulo (dB)
G_a
W_y
10^0
10^1
10^2
10^3
ω (rad/sec)

Esempio (9/12)

- La W_y corrispondente è la seguente

$$W_y = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{(s+2.073)\,(s^2+43.7s+2663)\,(s+304.2)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{\left(1+\dfrac{s}{2}\right)\left(1+\dfrac{s}{500}\right)}{\left(1+\dfrac{s}{2.073}\right)\left(1+\dfrac{2\cdot 0.42}{51.6}s+\dfrac{s^2}{51.6^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{304.2}\right)}$$

Esempio (9/12)

- La W_y corrispondente è la seguente

$$W_y = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{(s+2.073)\,(s^2+43.7s+2663)\,(s+304.2)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{\boxed{\left(1+\frac{s}{2}\right)}\left(1+\frac{s}{500}\right)}{\boxed{\left(1+\frac{s}{2.073}\right)}\left(1+\frac{2\cdot 0.42}{51.6}s+\frac{s^2}{51.6^2}\right)\left(1+\frac{s}{304.2}\right)}$$

Approssimativamente cancellabili

Esempio (9/12)

- La W_y corrispondente è la seguente

$$W_y = \frac{1680\,(s+2)(s+500)}{(s+2.073)(s^2+43.7s+2663)(s+304.2)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{\left(1+\dfrac{s}{500}\right)}{\left(1+\dfrac{2\cdot 0.42}{51.6}s+\dfrac{s^2}{51.6^2}\right)\left(1+\dfrac{s}{304.2}\right)}$$

Esempio (9/12)

- La W_y corrispondente è la seguente

$$W_y = \frac{1680(s+2)(s+500)}{(s+2.073)(s^2+43.7s+2663)(s+304.2)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{\boxed{\left(1+\frac{s}{500}\right)}}{\left(1+\frac{2\cdot 0.42}{51.6}s+\frac{s^2}{51.6^2}\right)\boxed{\left(1+\frac{s}{304.2}\right)}}$$

Trascurabili perché $\left|W_y\right|_{AF} \to 0$

Esempio (9/12)

- La W_y corrispondente è la seguente

$$W_y = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{(s+2.073)\,(s^2+43.7s+2663)\,(s+304.2)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2 \cdot 0.42}{51.6}s + \frac{s^2}{51.6^2}\right)}$$

Esempio (10/12)

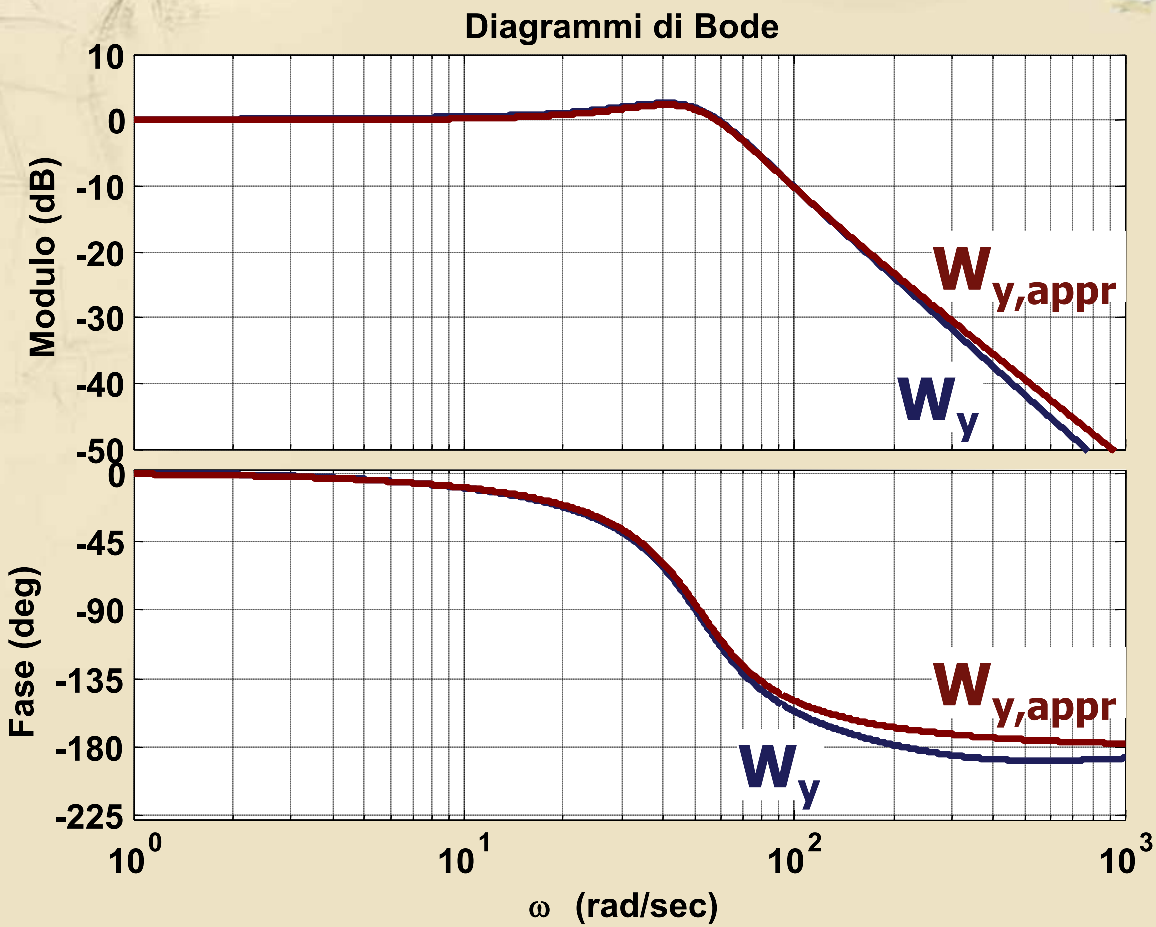
- La W_y corrispondente è la seguente

$$W_y = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{(s+2.073)\,(s^2+43.7s+2663)\,(s+304.2)} =$$

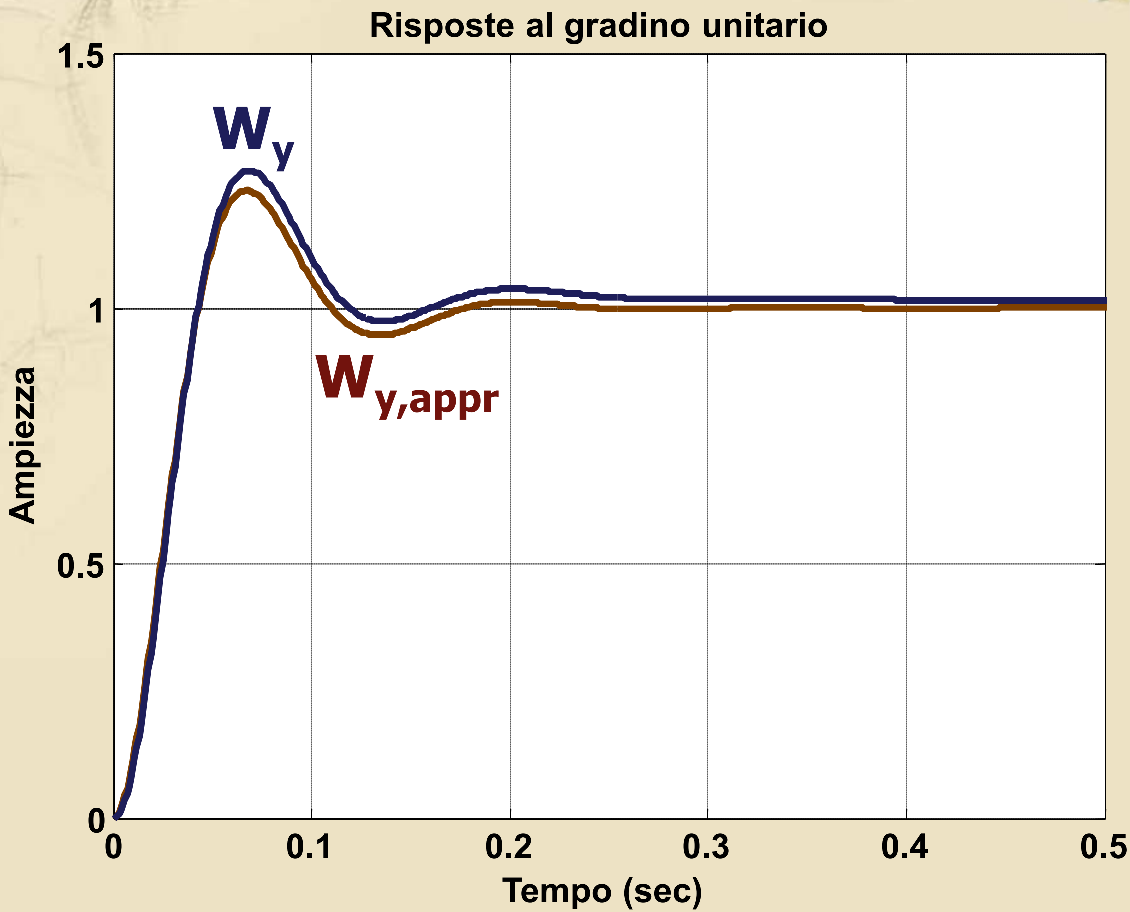
$$= 1 \cdot \frac{1}{\left(1 + \dfrac{2 \cdot 0.42}{51.6} s + \dfrac{s^2}{51.6^2}\right)}$$

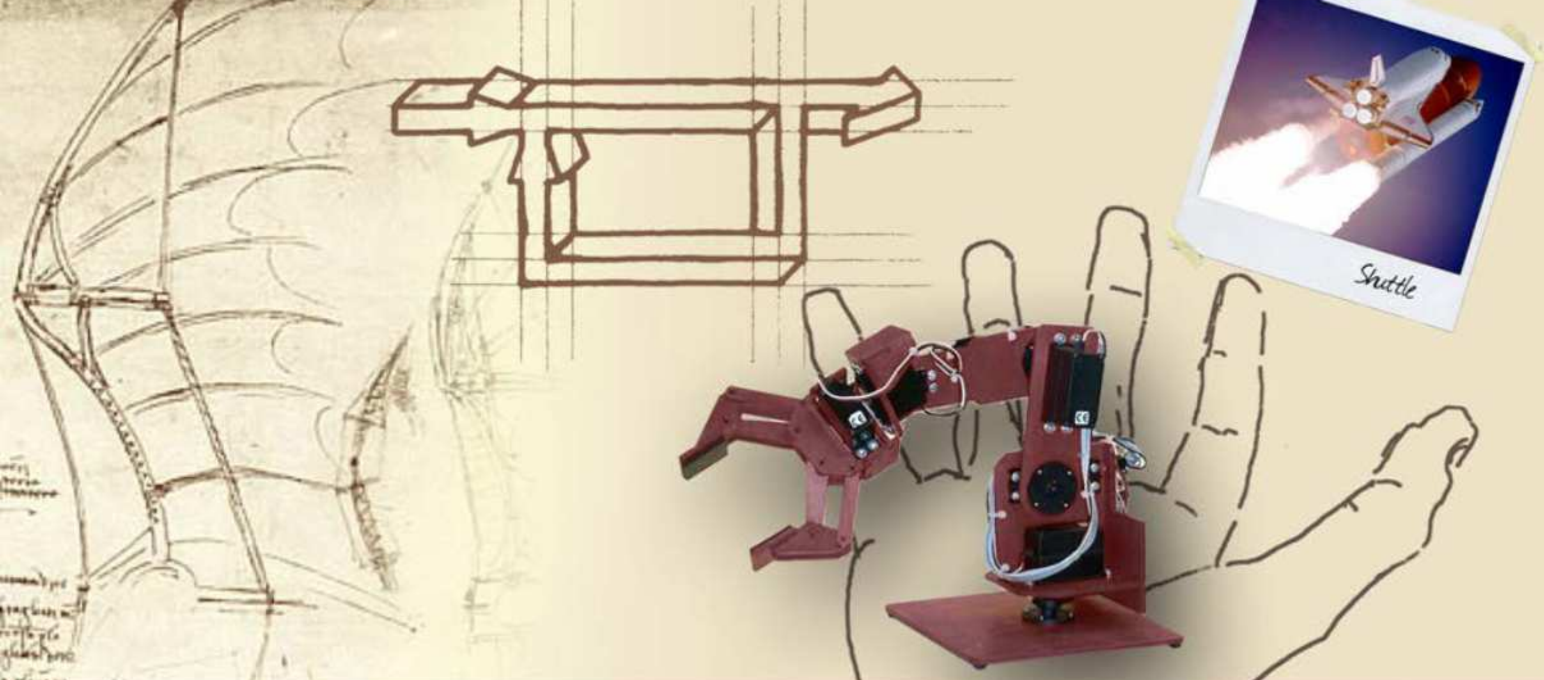
$$W_y \cong W_{y,appr} = \frac{2663}{s^2+43.7s+2663}, \text{ per } \omega \in (0,100)$$

Esempio (11/12)



Esempio (12/12)





Risposta transitoria e risposta in frequenza

Dinamica in t e in ω dei sistemi del 2° ordine

Modello di riferimento per la catena chiusa

- Ipotesi di lavoro: **il modello di riferimento per la catena chiusa sia quello del 2° ordine con due poli complessi coniugati**

$$W_{y,rif} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

dove ω_n **è dato e** $\zeta \in$ **(0.3,0.7)** (intorno a 0.5)

- **Nella pratica si otterrà** una catena chiusa di ordine elevato, caratterizzata **in genere** da **una dinamica dominante approssimativamente del 2° ordine**

G_a e W_y di riferimento

- A una fdt in catena chiusa del tipo

$$W_{y,rif} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

corrisponde la seguente fdt della catena aperta

$$G_{a,rif} = \frac{W_{y,rif}}{1 - W_{y,rif}} = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$$

- NB: **la $G_{a,rif}$ è di tipo 1**

Parametri caratteristici di $G_{a,rif}$

- I parametri caratteristici della $G_{a,rif}$ sono i seguenti

$$K_v = \frac{\omega_n}{2\zeta}$$

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}$$

$$m_\varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}} \right)$$

$$m_G = \infty$$

Parametri caratteristici di $G_{a,rif}$

- I parametri caratteristici della $G_{a,rif}$ sono i seguenti

Guadagno stazionario di velocità

$$K_v = \frac{\omega_n}{2\zeta}$$

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}$$

$$m_\varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}}\right)$$

$$m_G = \infty$$

Parametri caratteristici di $G_{a,rif}$

- I parametri caratteristici della $G_{a,rif}$ sono i seguenti

$$K_v = \frac{\omega_n}{2\zeta}$$

Pulsazione di crossover

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}$$

$$m_\varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}} \right)$$

$$m_G = \infty$$

Parametri caratteristici di $G_{a,rif}$

- I parametri caratteristici della $G_{a,rif}$ sono i seguenti

$$K_v = \frac{\omega_n}{2\zeta}$$

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}$$

Margine di fase

$$m_\varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}\right)$$

$$m_G = \infty$$

Parametri caratteristici di $G_{a,rif}$

- I parametri caratteristici della $G_{a,rif}$ sono i seguenti

$$K_v = \frac{\omega_n}{2\zeta}$$

$$\omega_c = \omega_n \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}$$

$$m_\varphi = \arctan\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}}\right)$$

Margine di guadagno

$$m_G = \infty$$

Parametri caratteristici di $W_{y,rif}$ (1/6)

- Guadagno stazionario

$$W_{y,rif}(0) = 1 \Rightarrow W_{rif}(0) = K_r$$

- Picco di risonanza **M_r** della risposta in frequenza: **è definito come il rapporto fra il guadagno massimo e il guadagno stazionario**

$$M_r = \frac{\max\left(W_{y,rif}\right)}{1} = \frac{\max\left(W_{rif}\right)}{K_r} =$$

$$= \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\text{in } \omega = \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}, \quad \text{per } \zeta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Parametri caratteristici di $W_{y,rif}$ (2/6)

- Banda passante ω_B a –3 dB: **è definita come l'intervallo di frequenze in cui vale la relazione**

$$\frac{|W_{y,rif}|}{|1|} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ovvero} \quad \frac{|W_{rif}|}{|K_r|} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

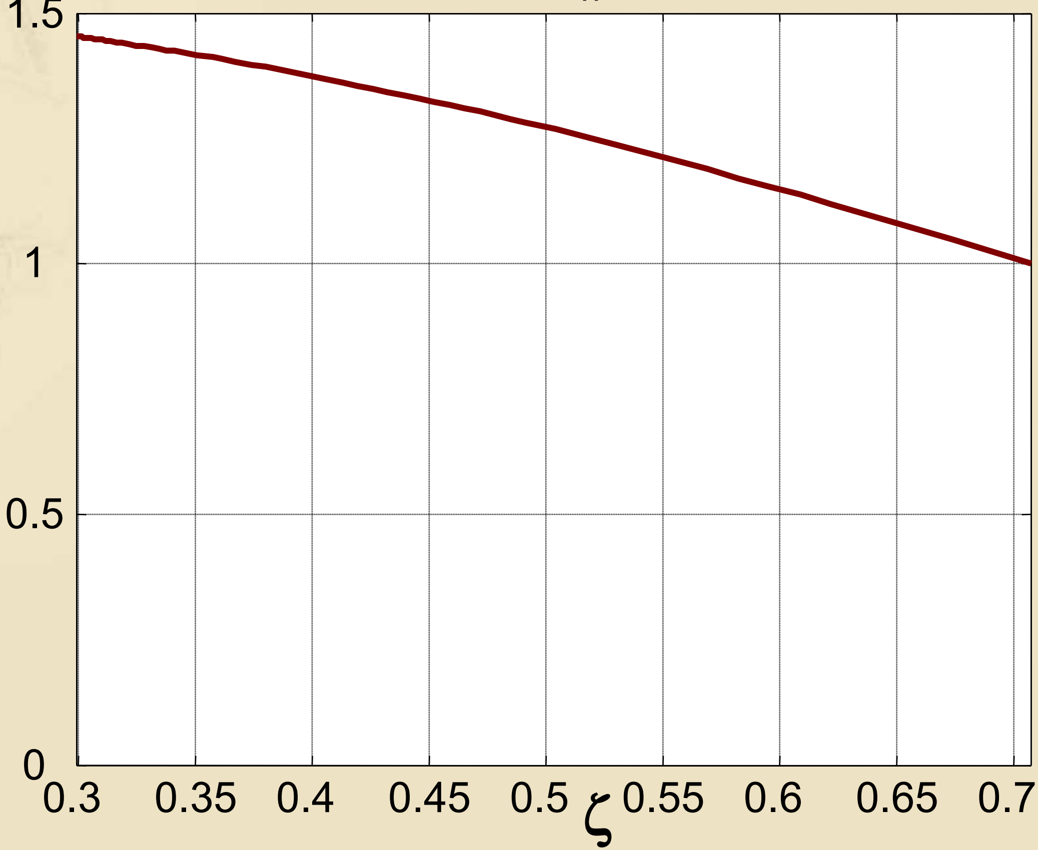
- **NB:** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **corrisponde a circa –3 dB**

- Non è difficile determinare ω_B

$$\frac{\omega_B}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}} \doteq R$$

Parametri caratteristici di $W_{y,rif}$ (3/6)

$$R \doteq \frac{\omega_B}{\omega_n}$$



Parametri caratteristici di $W_{y,rif}$ (4/6)

- Risposta al gradino unitario

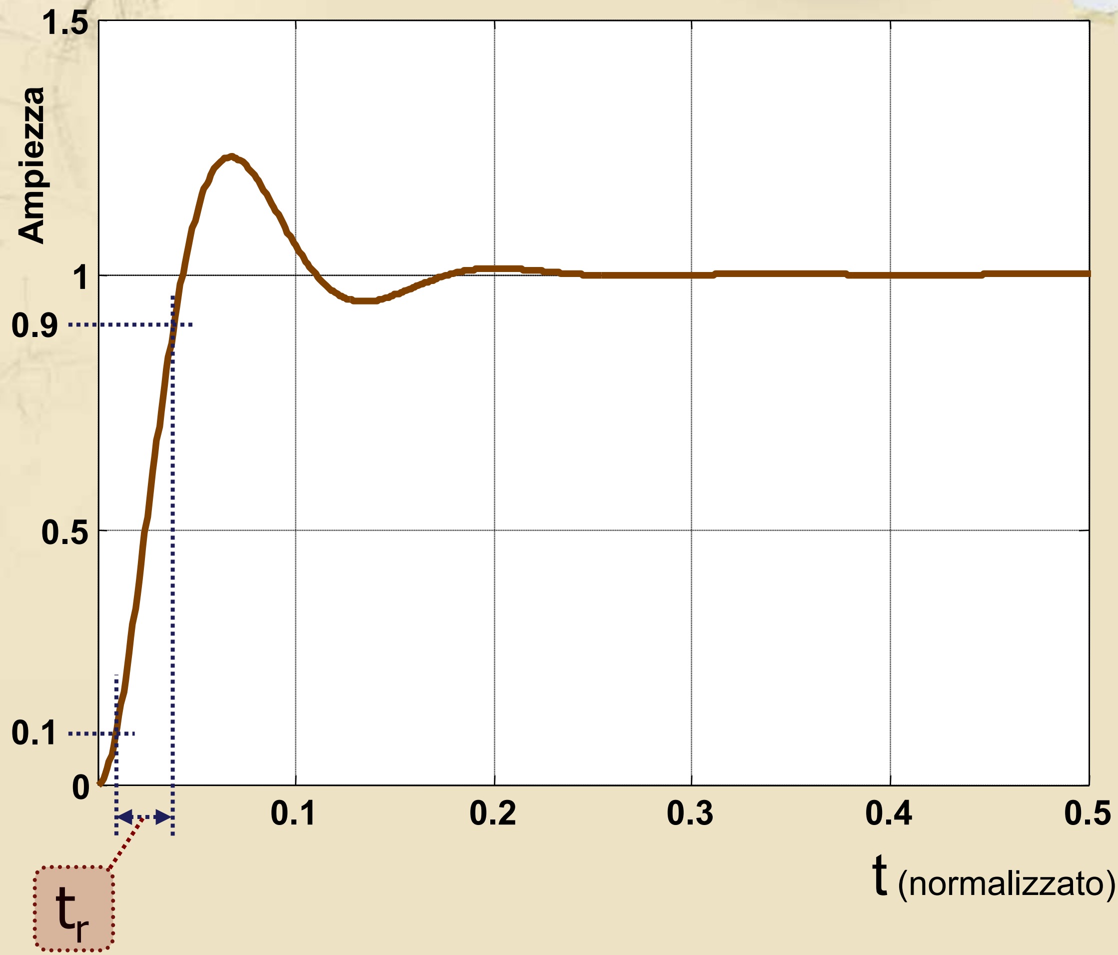
$$y_{g,W_{y,rif}}(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n t + \phi\right)$$

$$\text{con} \quad \phi = \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{\zeta^2} - 1}\right)$$

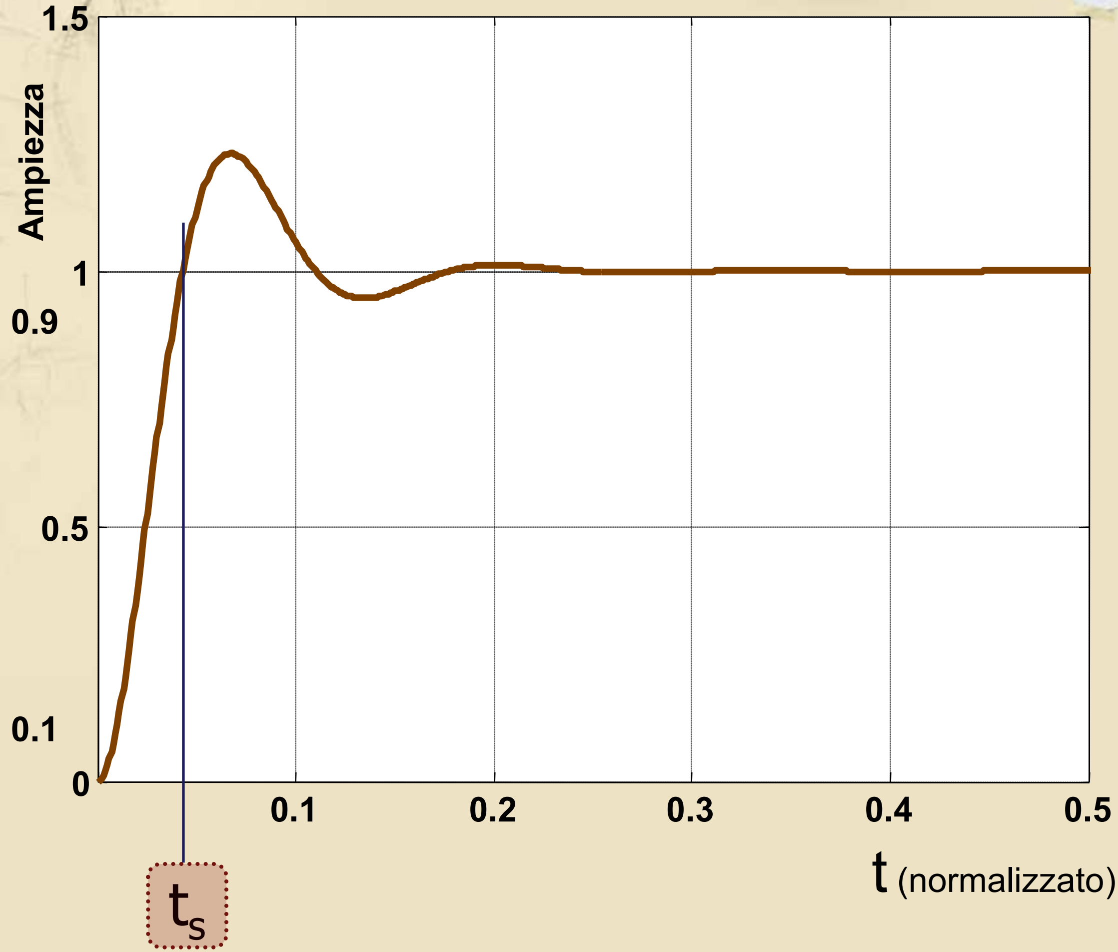
t (normalizzato)

- Nelle diapositive successive sono indicati i parametri caratteristici della risposta al gradino

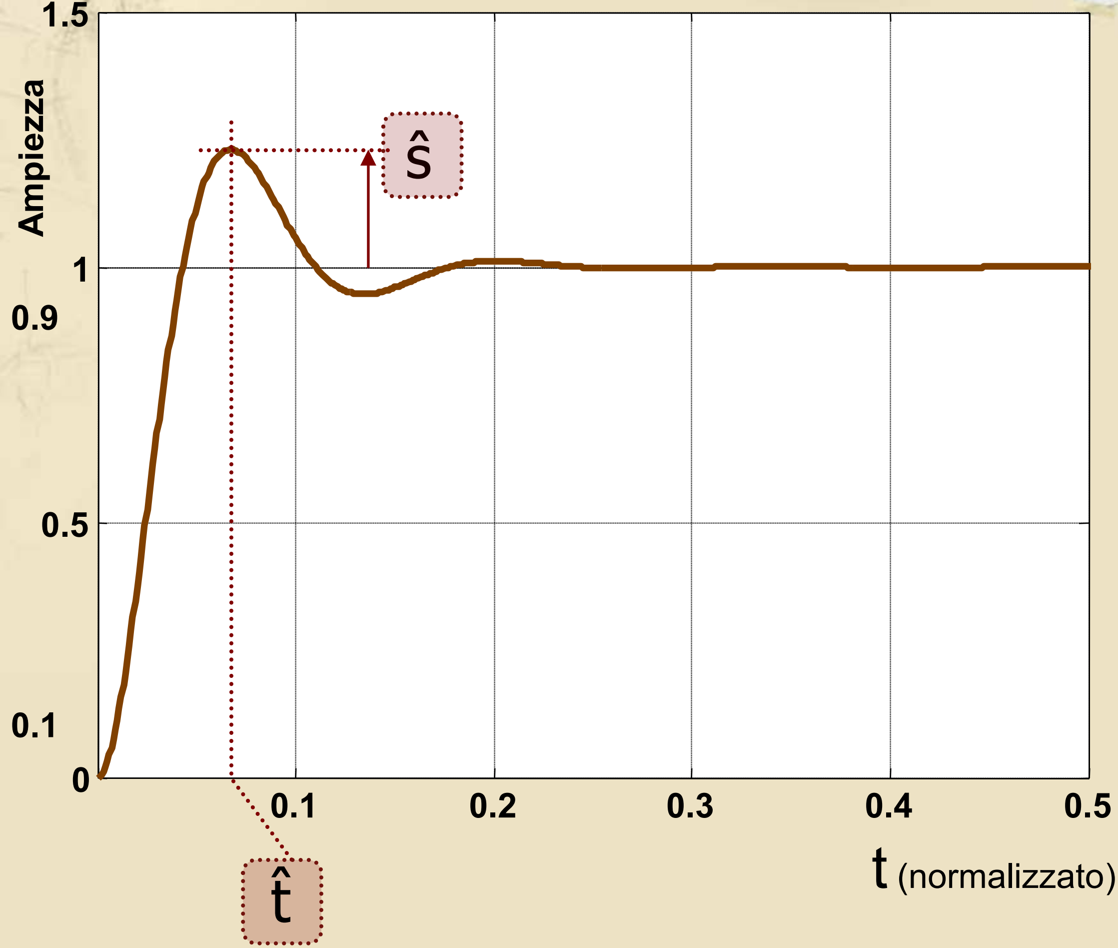
Parametri caratteristici di $W_{y,rif}$ (5/6)



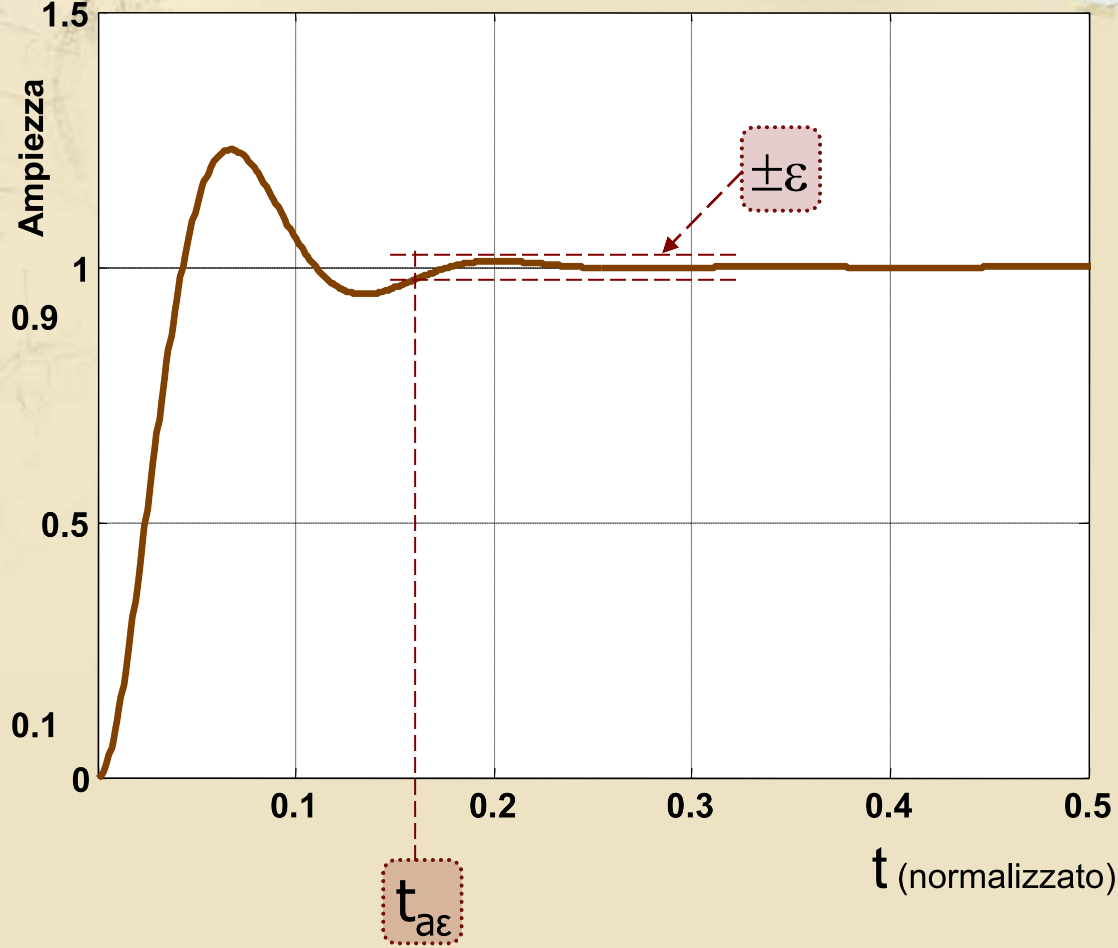
Parametri caratteristici di $W_{y,rif}$ (5/6)



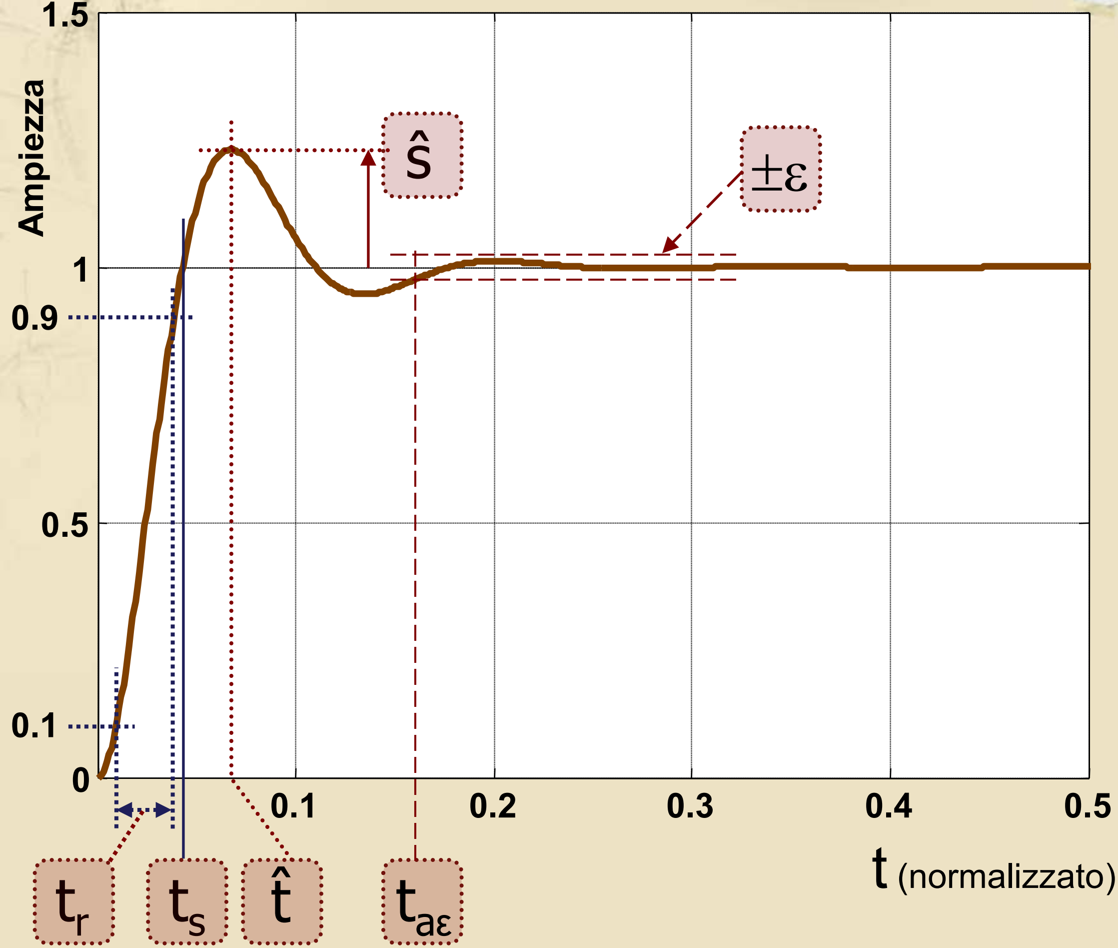
Parametri caratteristici di $W_{y,rif}$ (5/6)



Parametri caratteristici di $W_{y,rif}$ (5/6)



Parametri caratteristici di $W_{y,rif}$ (5/6)



Parametri caratteristici di $W_{y,rif}$ (6/6)

- $\hat{s}$: sovraelongazione massima (relativa)
- $\hat{t}$: tempo corrispondente a $\hat{s}$
- t_s: tempo di salita
- t_r: tempo di salita 10%÷90%
- $t_{a\varepsilon}$: tempo di assestamento a $\pm\varepsilon$

Relazioni notevoli per W_{rif} (1/10)

- Calcolando le espressioni di t_r, t_s, $\hat{t}$, $t_{a\varepsilon}$ (funzioni di ω_n e ζ) e tenendo presente la relazione

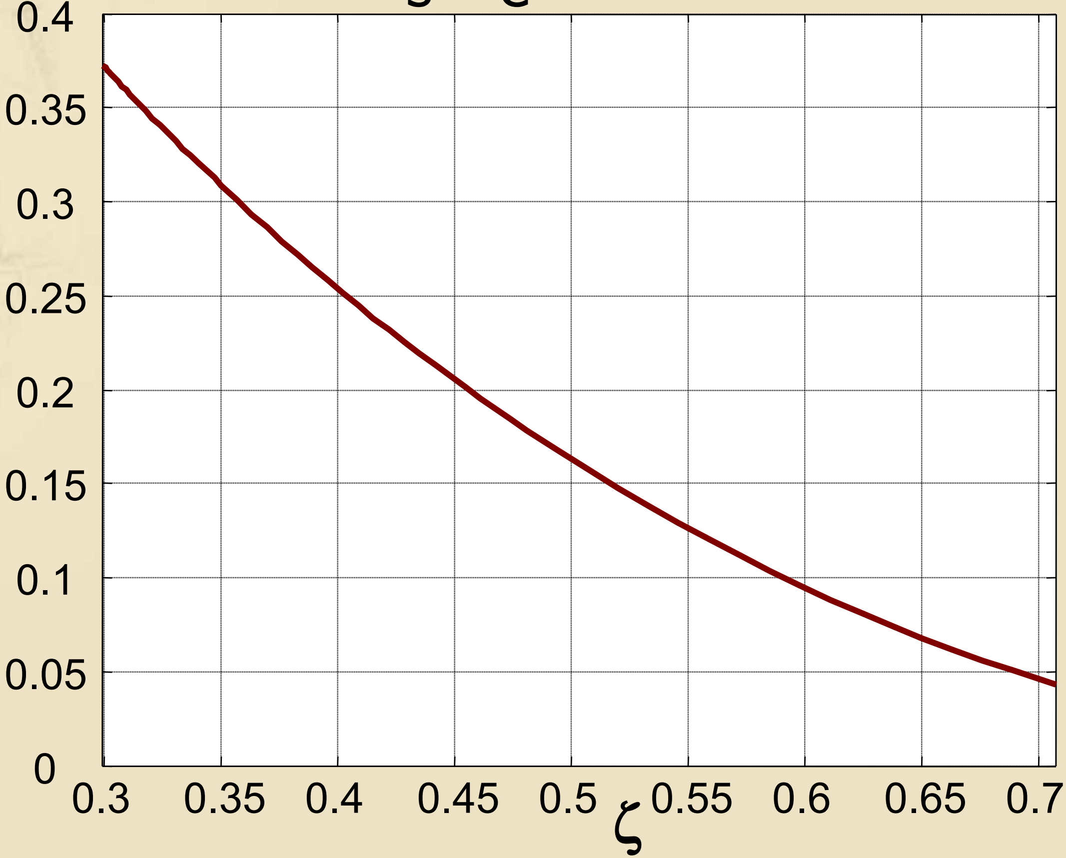
$$R \doteq \frac{\omega_B}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

possono essere ricavate le seguenti relazioni in funzione di ζ

- $\hat{s}$, $\omega_B t_r$, $\omega_B t_s$, $\omega_B \hat{t}$, $\omega_B t_{a\varepsilon}$, ω_c/ω_B, $(1+\hat{s})/M_r$, $m_\varphi M_r$

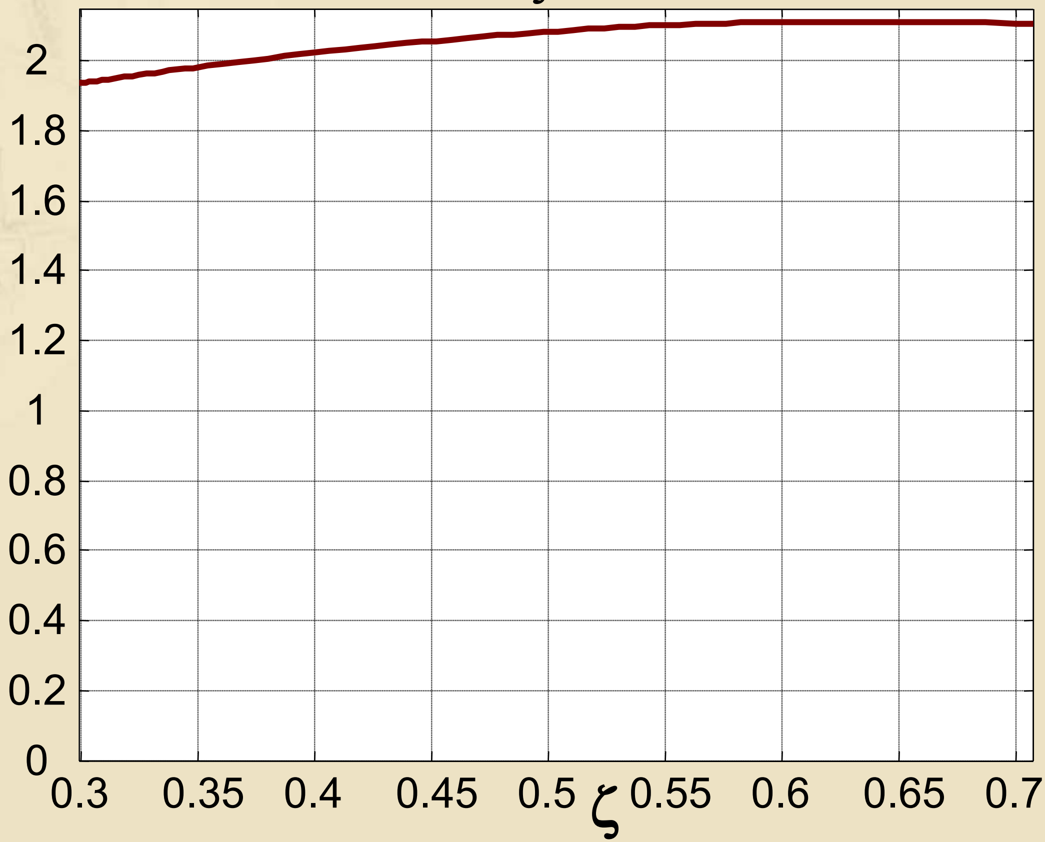
Relazioni notevoli per W_{rif} (2/10)

$$\hat{s} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$



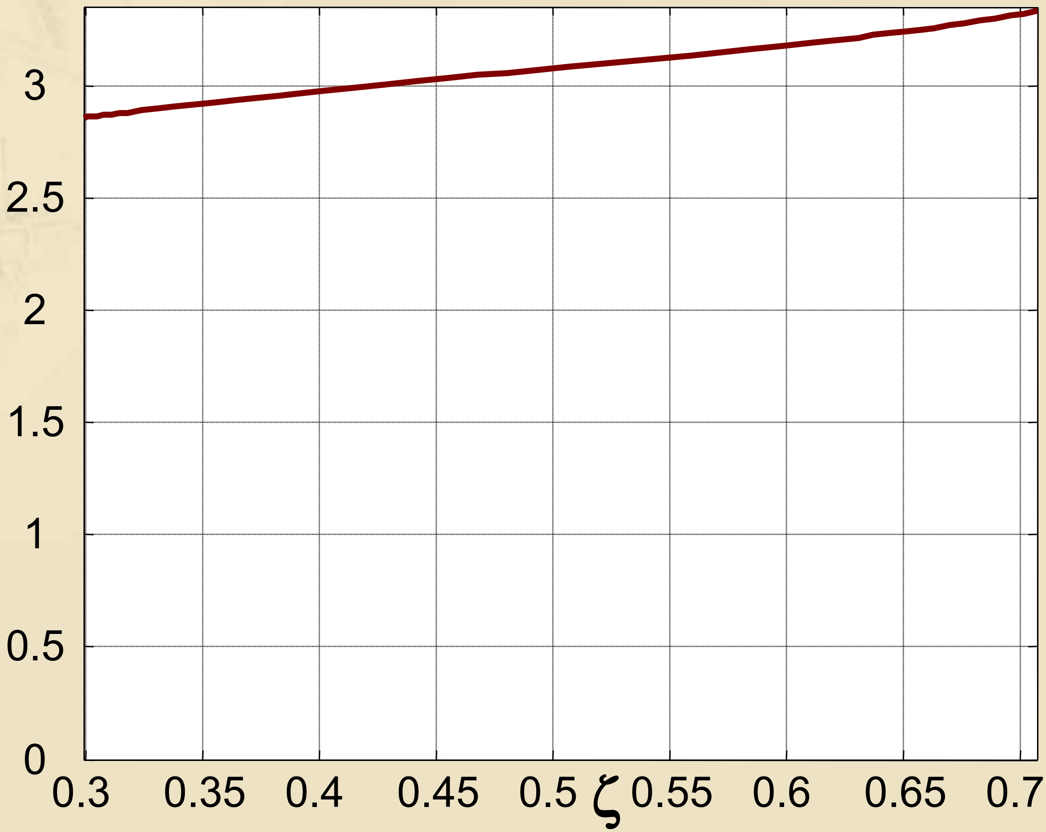
Relazioni notevoli per W_{rif} (3/10)

$$\omega_B t_r \cong \frac{2.048R}{1.561-\zeta} - 0.2923R \cong 2$$



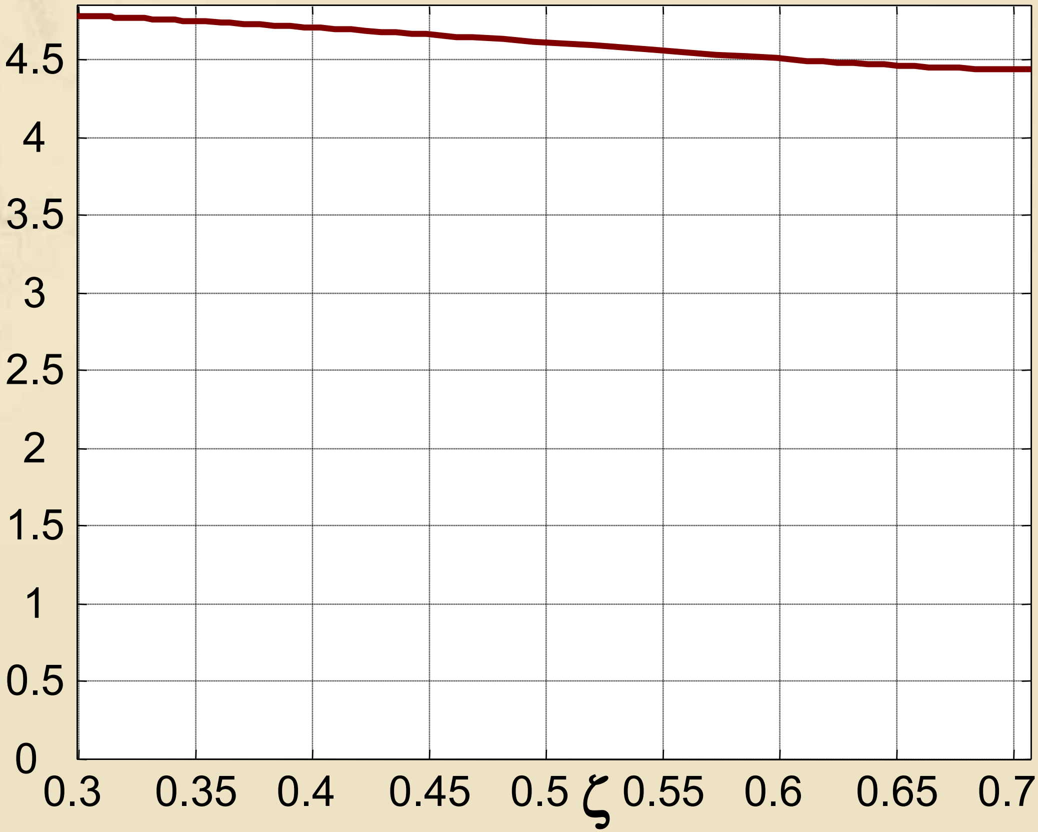
Relazioni notevoli per W_{rif} (4/10)

$$\omega_B t_s = \frac{R}{\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\pi - \arctan\left(\sqrt{\zeta^{-2}-1}\right)\right) \cong 3$$



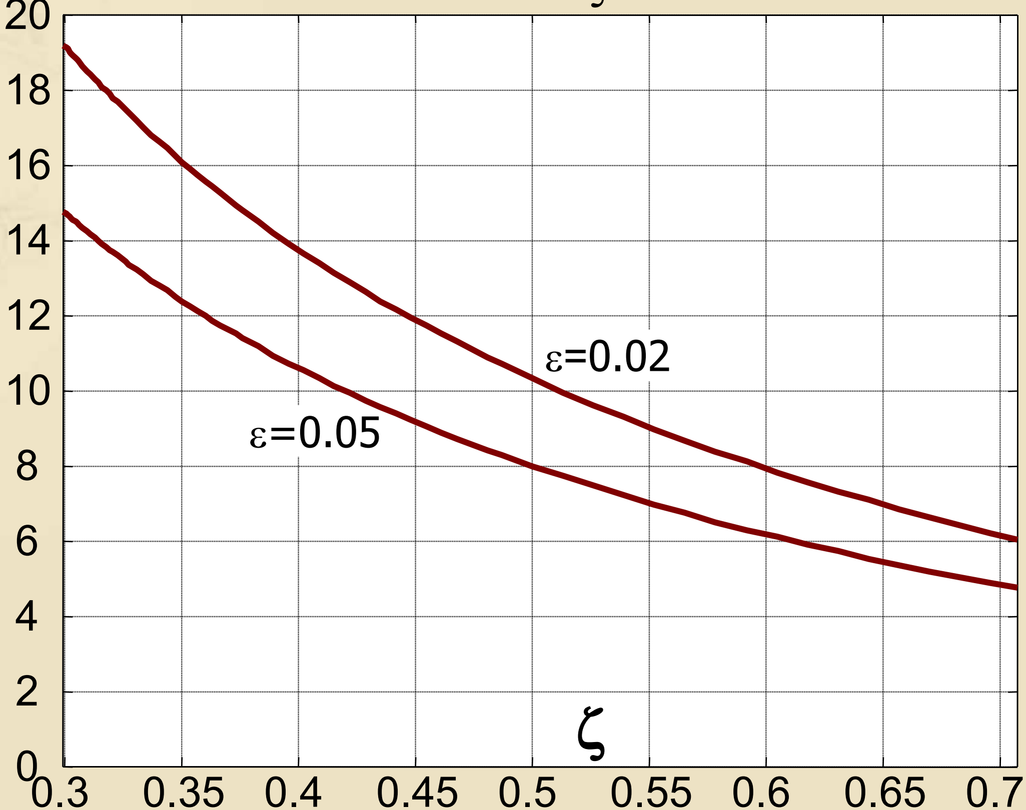
Relazioni notevoli per W_{rif} (5/10)

$$\omega_B \hat{t} = \frac{\pi R}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cong 4.5$$



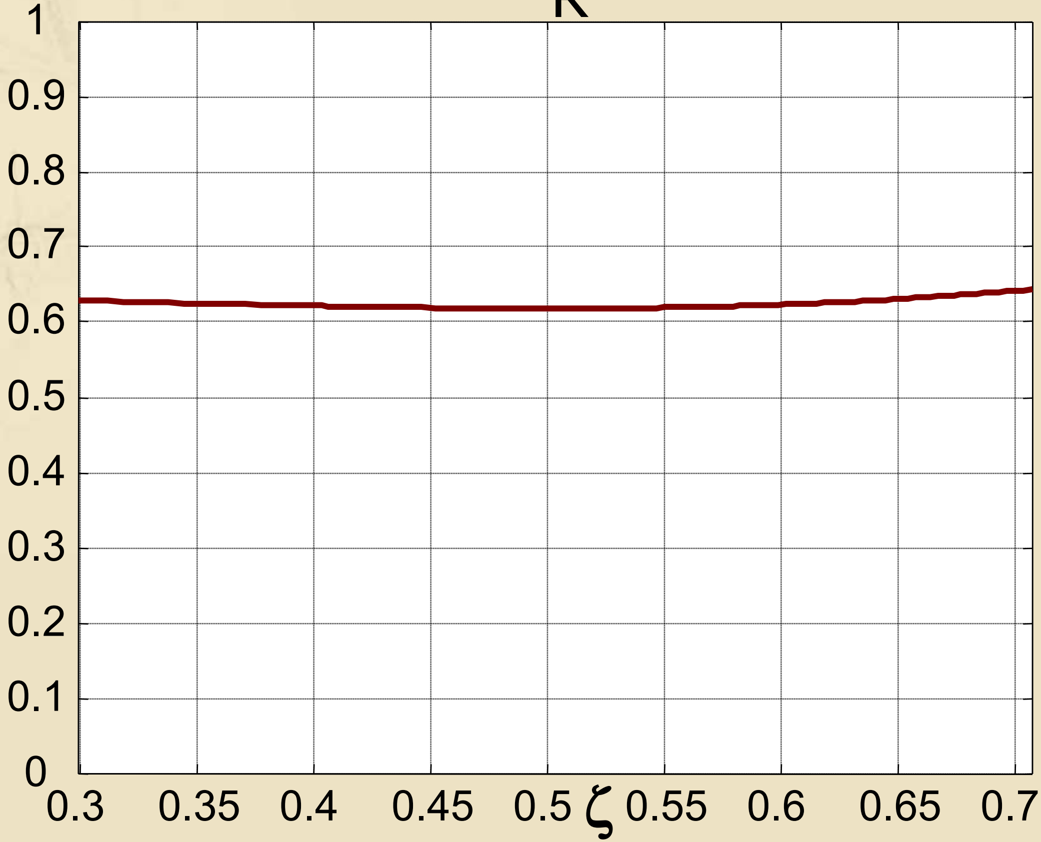
Relazioni notevoli per W_{rif} (6/10)

$$\omega_B t_{a\varepsilon} \cong \frac{-\log\left(\varepsilon\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\zeta}R$$



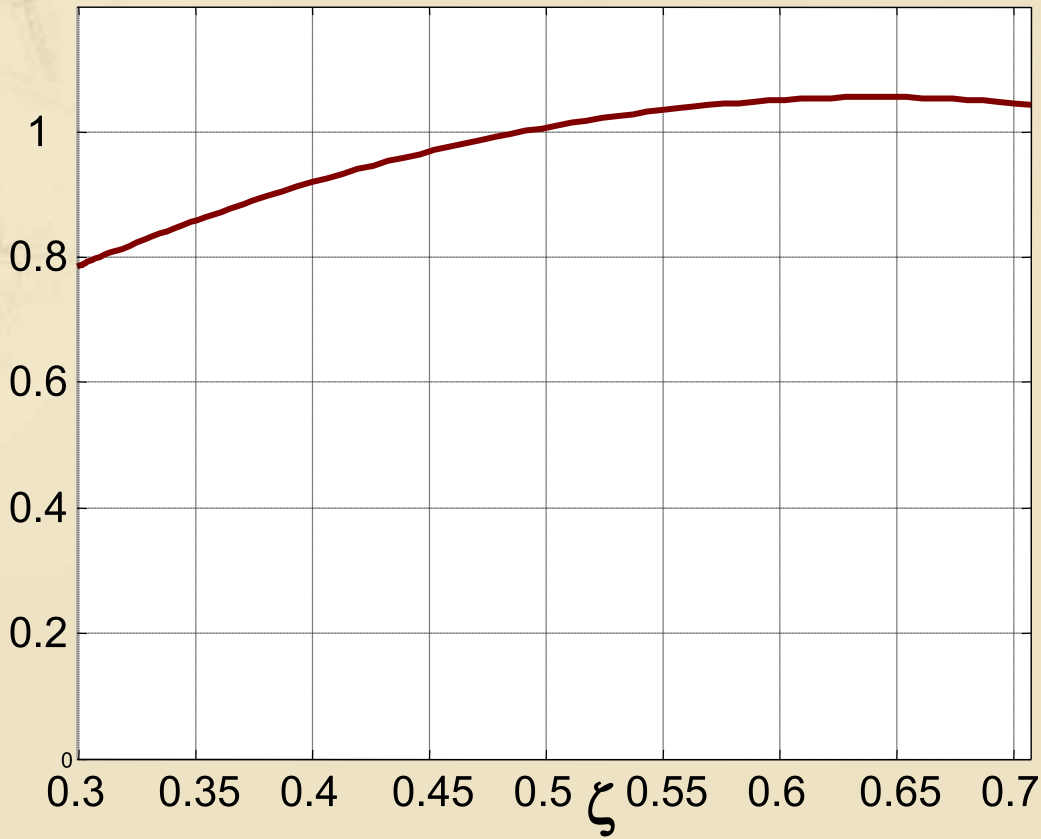
Relazioni notevoli per W_{rif} (7/10)

$$\omega_c / \omega_B = \frac{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^4}}}{R} \cong 0.63$$



Relazioni notevoli per W_{rif} (8/10)

$$\left(1+\hat{s}\right)/M_r = 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\left(1+e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \cong 0.9$$



Relazioni notevoli per W_{rif} (9/10)

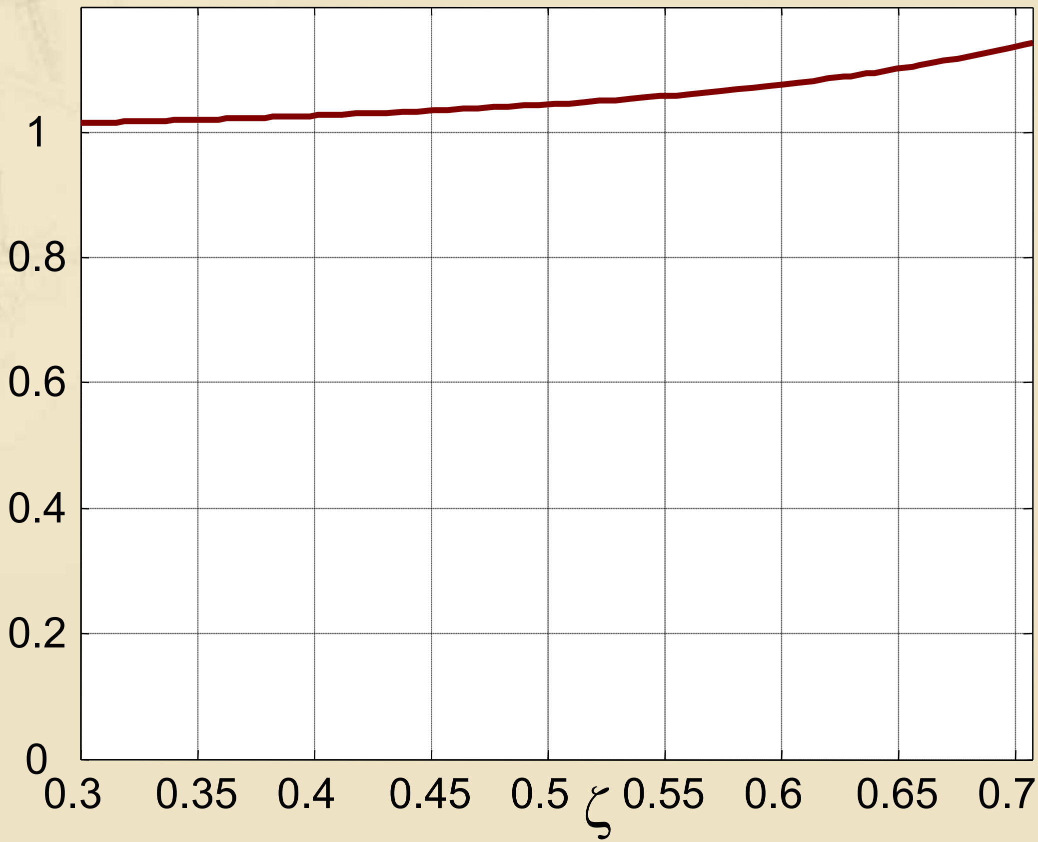
$$m_{\varphi}M_r = \arctan\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2+\sqrt{1+4\zeta^4}}}\right)\cdot\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$m_{\varphi}M_r \cong 1.05 \quad (\text{in rad}\cdot u_n)$$

$$m_{\varphi}M_r \cong 60 \quad (\text{in gradi}\cdot u_n)$$

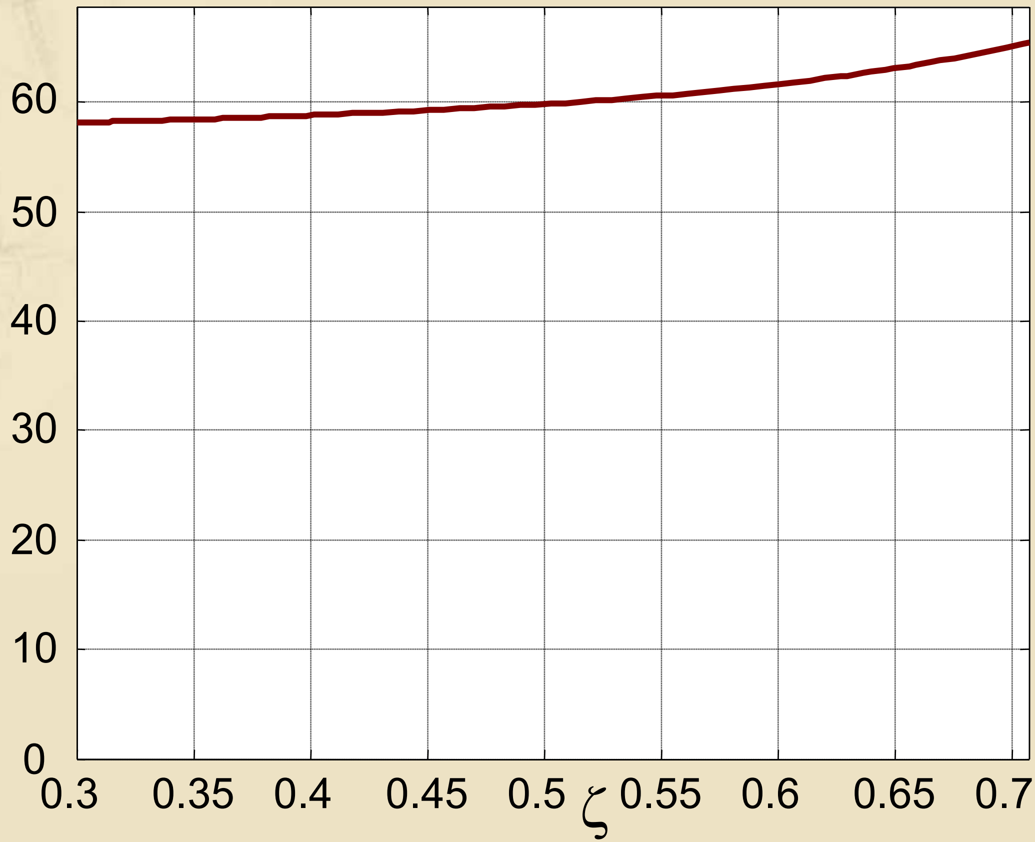
Relazioni notevoli per W_{rif} (10/10)

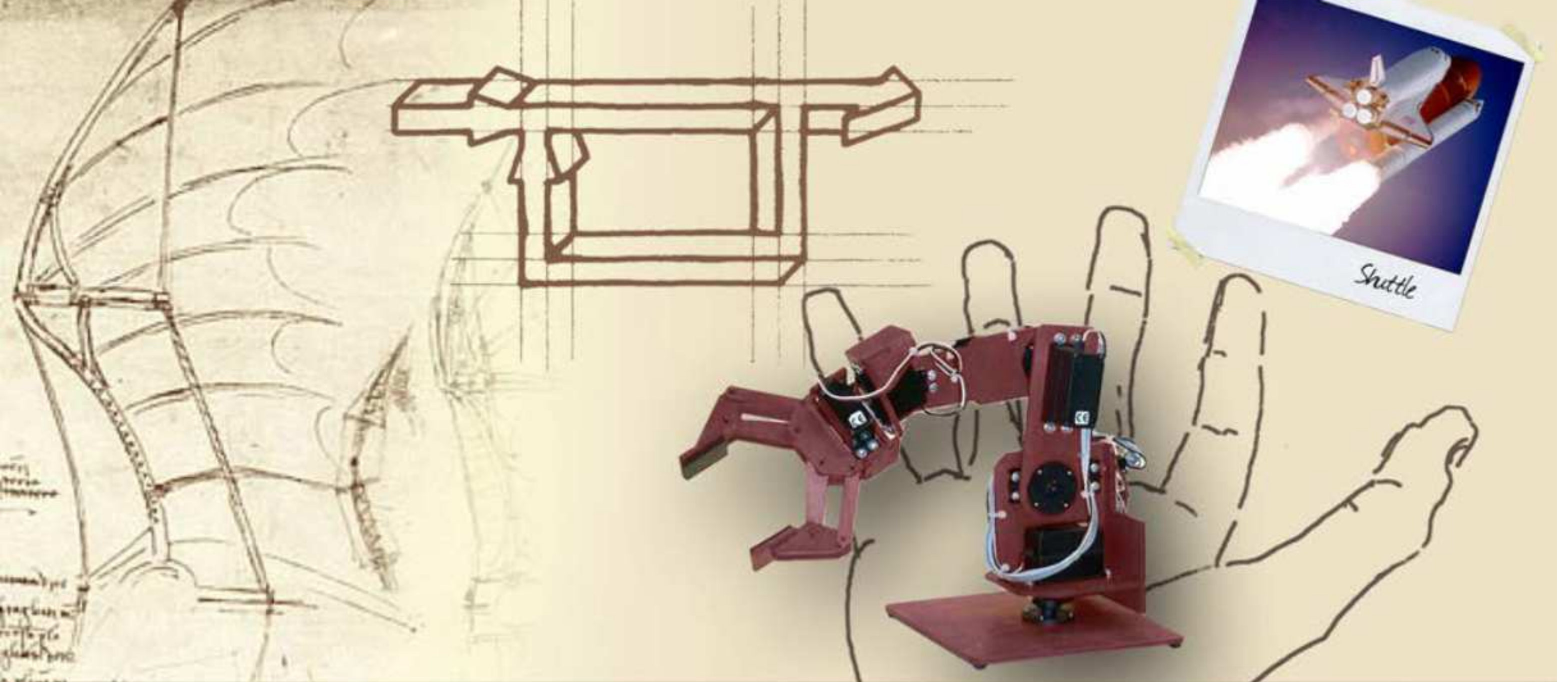
$$m_{\varphi} M_r \cong 1.05 \ \ (\text{in} \ \ \text{rad} \cdot u_n)$$



Relazioni notevoli per W_{rif} (10/10)

$$m_\varphi M_r \cong 60 \ \ (\text{in gradi} \cdot u_n)$$





Risposta transitoria e risposta in frequenza

Caratterizzazione di W con dinamica dominante del 2° ordine

Relazioni notevoli per una generica W (1/3)

- Le relazioni presentate nelle diapositive precedenti possono essere considerate approssimativamente valide anche per fdt in catena chiusa di ordine “elevato”, ma con dinamica dominante del 2° ordine

- Dette relazioni approssimate sono richiamate in modo sintetico nella diapositive successive

Relazioni notevoli per una generica W (2/3)

- $$\frac{\omega_B}{\omega_n} \cong R \doteq \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

- $$M_r \cong \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- $$\hat{s} \cong e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Relazioni notevoli per una generica W (3/3)

- $\omega_B t_r \cong 2$
- $\omega_B t_s \cong 3$
- $\omega_B \hat{t} \cong 4.5$
- $\omega_c \cong 0.63\,\omega_B$
- $1 + \hat{s} \cong 0.9\,M_r$
- $m_\varphi M_r \cong 60 \quad (\text{in gradi} \cdot u_n)$

Esempio (1/6)

- Sia data la fdt d'anello dell'esempio precedente

$$G_a = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{s^2(s+50)\,(s+300)}$$

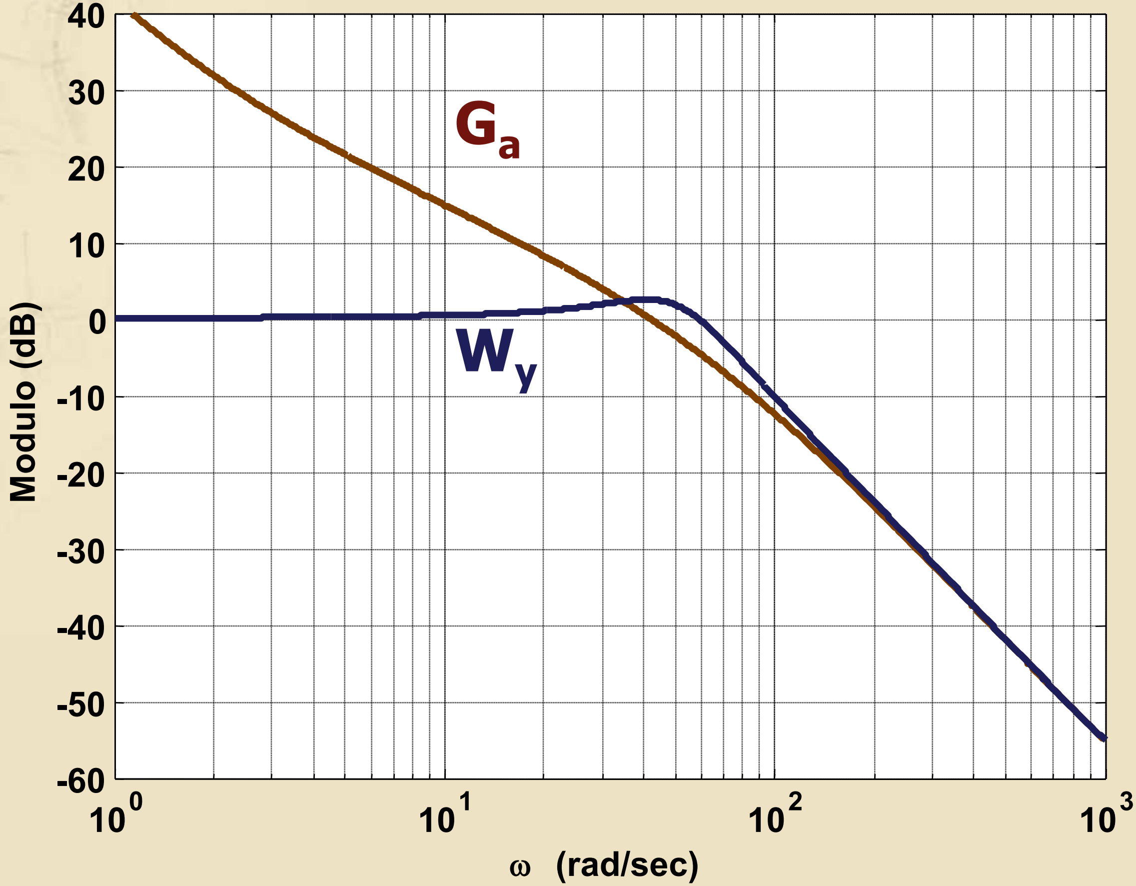
- La fdt risultante della catena chiusa è la seguente

$$W_y = \frac{1680\,(s+2)\,(s+500)}{(s+2.073)\,(s^2+43.7s+2663)\,(s+304.2)}$$

- La fdt approssimante del 2° ordine risulta

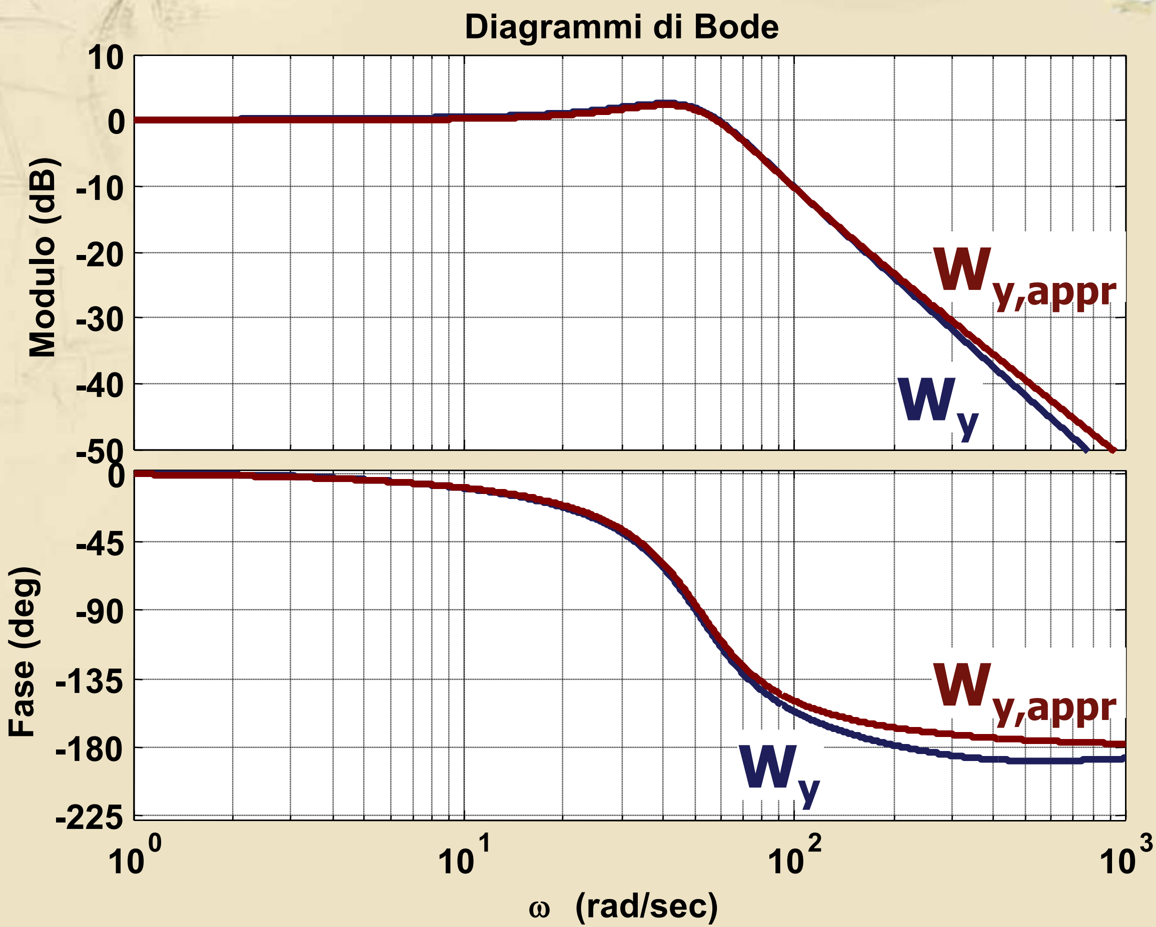
$$W_y \cong W_{y,appr} = \frac{2663}{s^2+43.7s+2663}$$

Esempio (2/6)



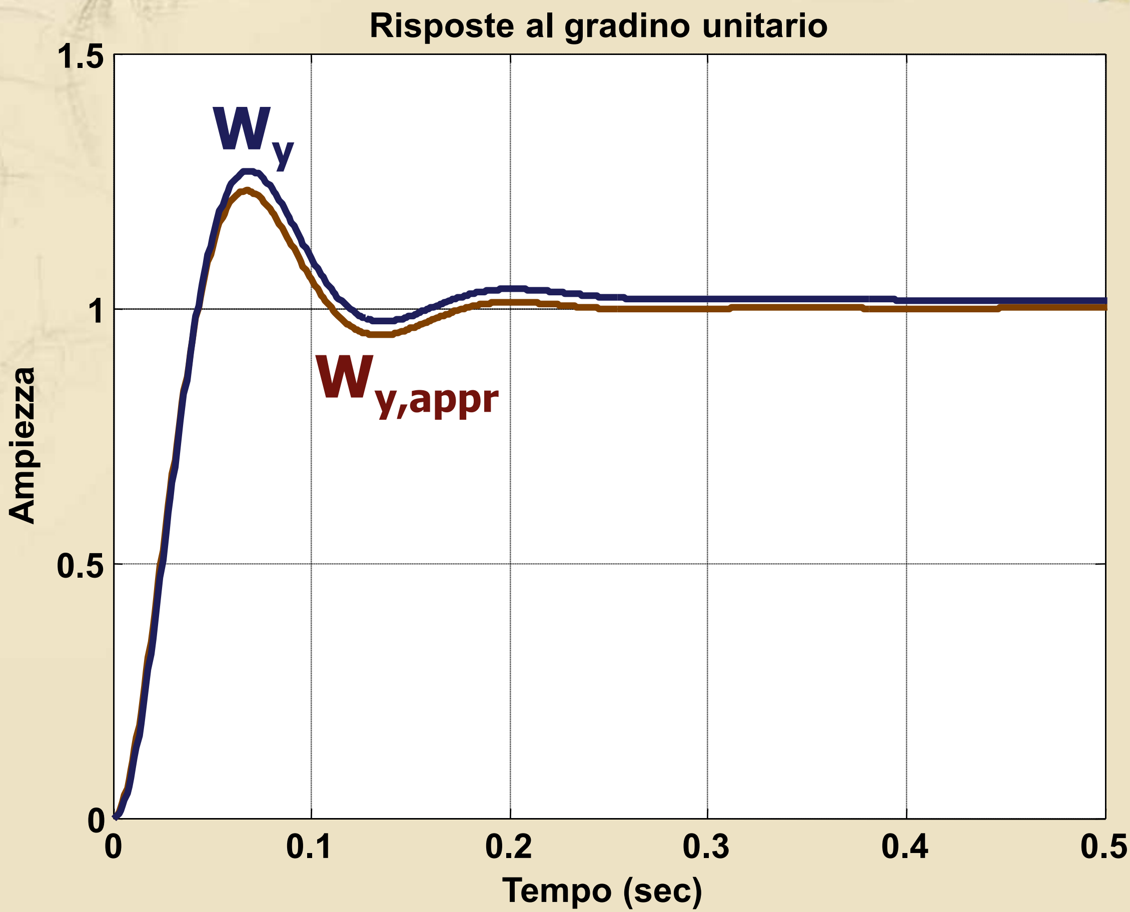
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
Modulo (dB)
G_a
W_y
10^0
10^1
10^2
10^3
ω (rad/sec)

Esempio (3/6)



Diagrammi di Bode
Modulo (dB)
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
$W_{y,appr}$
W_y
Fase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
-225
$W_{y,appr}$
W_y
10^0
10^1
10^2
10^3
ω (rad/sec)

Esempio (4/6)


Risposte al gradino unitario
1.5
1
0.5
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
Ampiezza
Tempo (sec)
W_y
$W_{y,appr}$

Esempio (5/6)

- I parametri della catena aperta e della catena chiusa sono caratterizzati dai seguenti valori numerici

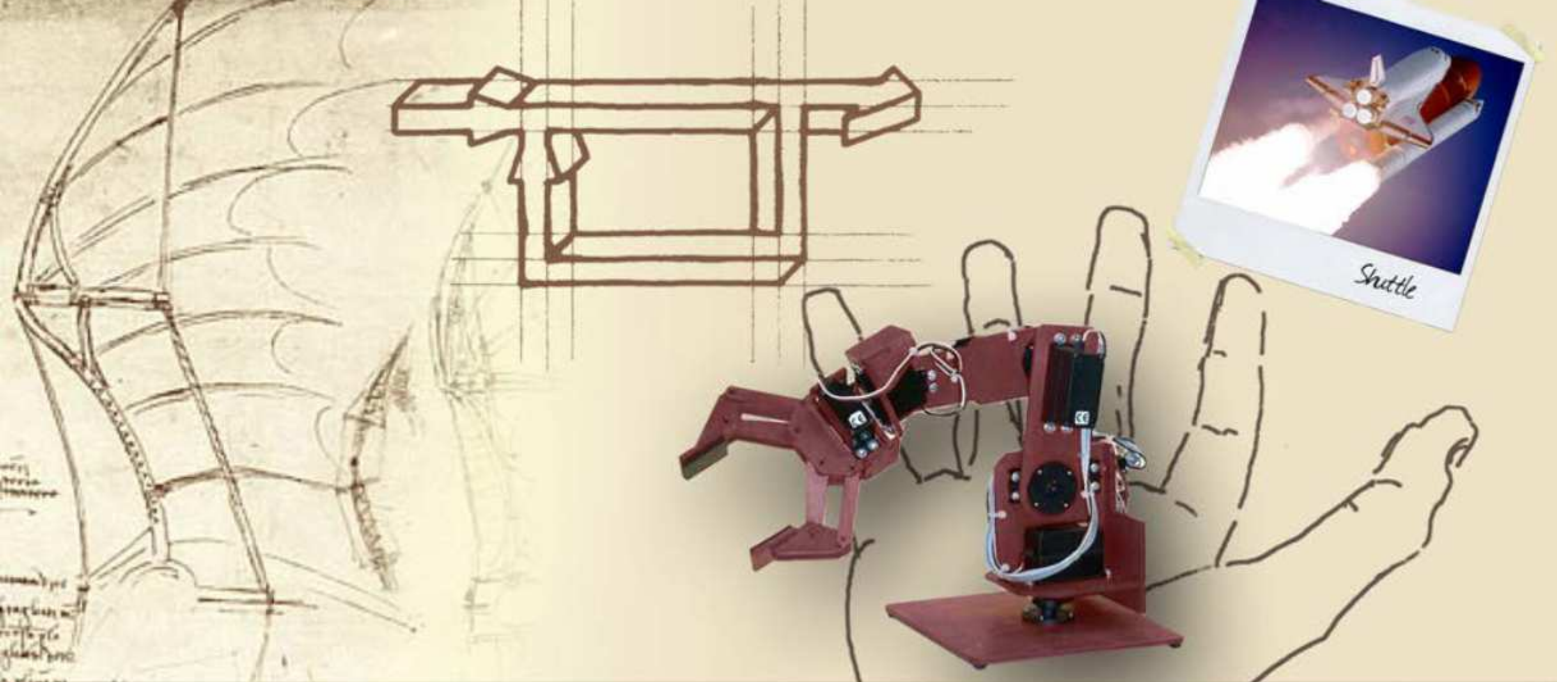
• ω_c=42.5 rad/s • m_φ=44° • m_G=26.3 dB • ω_n=51.6 rad/s • ζ=0.42 • t_r=0.0284 s • t_s=0.0427 s	• ε=2% • t_ε=0.258 s • $\hat{t}$=0.0685 s • $\hat{s}$=0.27 (27%) • M_r=2.56 dB (1.34) • ω_B=70.4 rad/s

Esempio (6/6)

- I valori relativi all'esempio in esame sono i seguenti (tra parentesi i valori "di riferimento")
  - $\omega_B t_r = 1.999 \ \ (2)$
  - $\omega_B t_s = 3.006 \ \ (3)$
  - $\omega_B \hat{t} = 4.822 \ \ (4.5)$
  - $\omega_c = 0.604\omega_B \ \ (0.63\omega_B)$
  - $1 + \hat{s} = 0.948 M_r \ \ (0.9 M_r)$
  - $m_\varphi M_r = 58.96 \ \ (60) \ \ \text{gradi} \cdot u_n$

Eccezioni

- In generale i valori numerici del singolo caso possono discostarsi dai valori di riferimento in maniera ancor più evidente
- NB: **non è sempre possibile approssimare la fdt in catena chiusa con una coppia di poli complessi coniugati dominanti più o meno smorzati**
- Nonostante ciò le relazioni trattate nella presente lezione costituiranno un punto di riferimento importante ai fini del progetto del controllore



Risposta transitoria e risposta in frequenza

Relazioni fra parametri caratteristici della G_a e della W

Relazioni notevoli – caso generale (1/6)

- Le relazioni notevoli precedentemente elencate mettono direttamente in evidenza il legame fra parametri caratteristici nel dominio del tempo (in particolare della risposta al gradino) e parametri caratteristici della risposta in frequenza

Dominio t	**Dominio ω**
t_r, t_s, $\hat{s}$, $\hat{t}$, ε, t_ε, ζ	ω_c, ω_B, ω_n, m_φ, m_G, M_r, ζ

Relazioni notevoli – caso generale (2/6)

- Le relazioni precedentemente elencate mettono direttamente in evidenza il legame fra parametri caratteristici della catena aperta e parametri caratteristici della catena chiusa

Catena aperta	**Catena chiusa**
ω_c, m_φ, m_G, $G_a(0)$	ω_B, ω_n, M_r, t_r, t_s, $\hat{s}$, $\hat{t}$, $t_{a\varepsilon}$, ζ, ε, $y(t\to\infty)$, $W(\omega\to 0)$

Relazioni notevoli – caso generale (3/6)

	Catena aperta	Catena chiusa	
t		t_r $\hat{s}$ ε ζ	t_s $\hat{t}$ $t_{a\varepsilon}$ $y(t\rightarrow\infty)$
ω	$G_a(\omega\rightarrow 0)$ ω_c m_φ m_G	ω_B M_r ω_n ζ	 $W(\omega\rightarrow 0)$

Relazioni notevoli – caso generale (4/6)

	Catena aperta	Catena chiusa
t		t_r t_s $\hat{s}$ $\hat{t}$ ε ζ
ω	$G_a(\omega \to 0)$ ω_c m_φ m_G	$W(\omega \to 0)$

$$1 + \hat{s} \cong 0.9 M_r$$

$$\omega_B t_r \cong 2$$

$$\omega_B t_s \cong 3$$

$$\omega_B \hat{t} \cong 4.5$$

$$W(0) = \frac{G_a(0)}{1 + G_a(0)}$$

$$\omega_c \cong 0.63\, \omega_B$$

$$m_\varphi M_r \cong 60$$

Relazioni notevoli – caso generale (5/6)

- Restando valida l'**ipotesi di lavoro: "il modello di riferimento per la catena chiusa sia quello del 2° ordine con due poli complessi coniugati dominanti"**, le relazioni messe in evidenza nella diapositiva precedente divengono **validi strumenti di lavoro nell'elaborazione delle specifiche ai fini del progetto del controllore**

Relazioni notevoli – caso generale (6/6)

- **Specifiche sulla catena chiusa possono essere trasformate in specifiche sulla catena aperta**

- **Specifiche nel dominio del tempo possono essere trasformate in specifiche nel dominio della frequenza**