18AKSOA - CONTROLLI AUTOMATICI

III esercitazione presso il LAIB

Esercizio #1: posizionamento dei poli mediante retroazione degli stati

Si consideri un levitatore magnetico, il cui modello linearizzato nell'intorno del punto di funzionamento desiderato è dato dal seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}(t) &= A\cdot\delta x(t) + B\cdot\delta u(t) \\ \delta y(t) &= C\cdot\delta x(t) + D\cdot\delta u(t) \end{aligned}$$

dove $\delta u(t)$, $\delta x(t)$ e $\delta y(t)$ costituiscono gli scostamenti delle variabili di ingresso-stato-uscita del levitatore rispetto al punto di funzionamento, mentre le matrici della rappresentazione in variabili di stato sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

Si supponga di voler progettare una retroazione degli stati tale che gli autovalori del sistema retroazionato siano in $\overline{\lambda}_1 = -40$ e $\overline{\lambda}_2 = -60$. A tal proposito:

1) si analizzino le proprietà di raggiungibilità del sistema linearizzato, verificando che la coppia (A, B) sia raggiungibile e che quindi, utilizzando una legge di controllo del tipo:

$$\delta u(t) = -\underbrace{K\cdot\delta x(t)}_{\text{feedback}} + \underbrace{\alpha\cdot r(t)}_{\text{feedforward}}$$

gli autovalori di $A-BK$ siano posizionabili ad arbitrio (suggerimento: utilizzare i comandi MATLAB `ctrb` e `rank`);

2) si progetti il vettore riga K tale che gli autovalori di $A - BK$ siano in $\overline{\lambda}_1 = -40$ e $\overline{\lambda}_2 = -60$, verificando che gli autovalori di $A - BK$ siano effettivamente quelli desiderati (suggerimento: utilizzare i comandi MATLAB `place` oppure `acker`);

3) si applichi la retroazione degli stati, osservando che il sistema retroazionato è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}(t) &= A\delta x(t) + B\delta u(t) = A\delta x(t) + B[-K\delta x(t) + \alpha r(t)] \\ &= (A - BK)\delta x(t) + \alpha Br(t) = A_{rs}\delta x(t) + B_{rs}r(t) \\ \delta y(t) &= C\delta x(t) + D\delta u(t) = C\delta x(t) + D[-K\delta x(t) + \alpha r(t)] \\ &= (C - DK)\delta x(t) + \alpha Dr(t) = C_{rs}\delta x(t) + D_{rs}r(t) \end{aligned}$$

e che quindi gli autovalori del sistema retroazionato sono proprio gli autovalori di $A-BK$;

4) si simuli l'evoluzione della risposta $\delta y(t)$ del sistema retroazionato ad un ingresso $r(t)$ ad onda quadra di frequenza 0.5Hz ed ampiezza 2VPP; si ponga $\alpha = -1$ e si confrontino gli andamenti temporali corrispondenti ai seguenti valori dello stato iniziale $\delta x(t = 0)$:

$$\delta x_o^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta x_o^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta x_o^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(suggerimento: l'onda quadra può essere generata come `r=sign(sin(2*pi*0.5*t))`).

Esercizio #2: progetto di un osservatore dello stato

Si consideri il seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

in cui

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2400 & -100 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = [0]$$

(si tratta del modello linearizzato del levitatore magnetico controllato mediante retroazione degli stati come descritto nel precedente esercizio).

Si supponga di voler progettare un osservatore dello stato avente autovalori in $\overline{\lambda}_{oss,1} = -120$ e $\overline{\lambda}_{oss,2} = -180$. A tal proposito:

1) si analizzino le proprietà di osservabilità del sistema, verificando che la coppia (A, C) sia osservabile e che quindi sia possibile progettare uno stimatore asintotico dello stato in cui la matrice $A - LC$ abbia tutti gli autovalori asintoticamente stabili (suggerimento: utilizzare i comandi MATLAB `obsv` e `rank`);

2) si progetti il vettore colonna L tale che gli autovalori di $A - LC$ siano in $\overline{\lambda}_{oss,1} = -120$ e $\overline{\lambda}_{oss,2} = -180$, verificando che gli autovalori di $A - LC$ siano effettivamente quelli desiderati (suggerimento: utilizzare i comandi MATLAB `place` e `acker`);

3) si osservi che l'osservatore dello stato è dato dal seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L[y(t) - \hat{y}(t)] = LCx(t) + (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{aligned}$$

dove $\hat{x}(t)$ ed $\hat{y}(t)$ sono rispettivamente le stime dello stato $x(t)$ e dell'uscita $y(t)$;
il sistema complessivo, comprensivo dell'osservatore dello stato, è quindi descritto dal seguente sistema dinamico:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{tot}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} A & 0_{n\times n} \\ \hline LC & A - LC \end{array}\right] x_{tot}(t) + \left[\begin{array}{c} B \\ \hline B \end{array}\right] u(t) = A_{tot}x_{tot}(t) + B_{tot}u(t) \\ y_{tot}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} C & 0_{q\times n} \\ \hline 0_{q\times n} & C \end{array}\right] x_{tot}(t) + \left[\begin{array}{c} D \\ \hline D \end{array}\right] u(t) = C_{tot}x_{tot}(t) + D_{tot}u(t) \end{aligned}$$

in cui compaiono le variabili $x_{tot}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$ ed $y_{tot}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \hat{y}(t) \end{bmatrix}$;

4) si simuli l'evoluzione dello stato $x_{tot}(t)$ e della risposta $y_{tot}(t)$ ad un ingresso $u(t)$ ad onda quadra di frequenza 0.5Hz ed ampiezza 2VPP, assumendo sempre nullo lo stato iniziale dell'osservatore $\hat{x}(t = 0)$; si confrontino in particolare gli andamenti temporali dello stato $x(t)$ e della sua stima $\hat{x}(t)$, nonché dell'uscita $y(t)$ e della sua stima $\hat{y}(t)$, corrispondenti ai seguenti valori dello stato iniziale $x(t = 0)$:

$$x_o^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_o^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_o^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

osservando che l'errore di stima risulta trascurabile già dopo pochi centesimi di secondo dall'istante iniziale $t = 0$.

Esercizio #3: posizionamento dei poli mediante regolatore
Si consideri un levitatore magnetico, il cui modello linearizzato nell'intorno del punto di funzionamento desiderato è dato dal seguente sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}(t) &= A\cdot\delta x(t)+B\cdot\delta u(t)\\ \delta y(t) &= C\cdot\delta x(t)+D\cdot\delta u(t)\end{aligned}$$

dove $\delta u(t)$, $\delta x(t)$ e $\delta y(t)$ costituiscono gli scostamenti delle variabili di ingresso-stato-uscita del levitatore rispetto al punto di funzionamento, mentre le matrici della rappresentazione in variabili di stato sono le stesse considerate nel primo esercizio:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 900 & 0\end{bmatrix}\ ,\quad B=\begin{bmatrix}0\\ -9\end{bmatrix}\ ,\quad C=\begin{bmatrix}600 & 0\end{bmatrix}\ ,\quad D=[0]$$

Si supponga di voler progettare un regolatore tale che gli autovalori dell'osservatore dello stato siano in $\overline{\lambda}_{oss,1}=-120$ e $\overline{\lambda}_{oss,2}=-180$ e gli autovalori imposti dalla retroazione degli stati stimati siano in $\overline{\lambda}_1=-40$ e $\overline{\lambda}_2=-60$ e. A tal proposito:

1) si analizzino le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema linearizzato, verificando che la coppia (A,B) sia raggiungibile e che la coppia (A,C) sia osservabile, di modo che utilizzando una legge di controllo del tipo:

$$\delta u(t)=-\underbrace{K\cdot\delta\hat{x}(t)}_{\text{feedback}}+\underbrace{\alpha\cdot r(t)}_{\text{feedforward}}$$

sia gli autovalori di $A-BK$ sia gli autovalori di $A-LC$ possano essere posizionati ad arbitrio;

2) si progetti il vettore colonna L tale che gli autovalori di $A-LC$ siano in $\overline{\lambda}_{oss,1}=-120$ e $\overline{\lambda}_{oss,2}=-180$, verificando che gli autovalori di $A-LC$ siano effettivamente quelli desiderati;

3) si progetti il vettore riga K tale che gli autovalori di $A-BK$ siano in $\overline{\lambda}_1=-40$ e $\overline{\lambda}_2=-60$, verificando che gli autovalori di $A-BK$ siano effettivamente quelli desiderati;

4) si applichi la retroazione degli stati stimati, osservando che il sistema retroazionato è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}\delta\dot{x}(t) &= A\delta x(t)+B\delta u(t)=A\delta x(t)+B\left[-K\delta\hat{x}(t)+\alpha r(t)\right]\\ &= A\delta x(t)-BK\delta\hat{x}(t)+\alpha Br(t)\\ \delta y(t) &= C\delta x(t)+D\delta u(t)=C\delta x(t)+D\left[-K\delta\hat{x}(t)+\alpha r(t)\right]\\ &= C\delta x(t)-DK\delta\hat{x}(t)+\alpha Dr(t)\end{aligned}$$

mentre l'osservatore dello stato è dato da questo sistema dinamico LTI a tempo continuo:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\hat{x}}(t) &= A\delta\hat{x}(t)+B\delta u(t)+L\left[\delta y(t)-\delta\hat{y}(t)\right]\\ &= A\delta\hat{x}(t)+B\left[-K\delta\hat{x}(t)+\alpha r(t)\right]+L\left[\delta y(t)-\delta\hat{y}(t)\right]\\ &= LC\delta x(t)+(A-BK-LC)\,\delta\hat{x}(t)+\alpha Br(t)\\ \delta\hat{y}(t) &= C\delta\hat{x}(t)+D\delta u(t)=C\delta\hat{x}(t)+D\left[-K\delta\hat{x}(t)+\alpha r(t)\right]\\ &= (C-DK)\,\delta\hat{x}(t)+\alpha Dr(t)\end{aligned}$$

dove $\delta\hat{x}(t)$ ed $\delta\hat{y}(t)$ sono rispettivamente le stime dello stato $\delta x(t)$ e dell'uscita $\delta y(t)$;

il sistema complessivo, comprensivo dell'intero regolatore, è quindi descritto dal seguente sistema dinamico:

$$\begin{aligned}
\delta\dot{x}_{tot}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} A & -BK \\ \hline LC & A-BK-LC \end{array}\right]\delta x_{tot}(t) + \left[\begin{array}{c} \alpha B \\ \hline \alpha B \end{array}\right] r(t) = A^*_{tot}\delta x_{tot}(t) + B^*_{tot} r(t) \\
\delta y_{tot}(t) &= \left[\begin{array}{c|c} C & -DK \\ \hline 0_{q\times n} & C-DK \end{array}\right]\delta x_{tot}(t) + \left[\begin{array}{c} \alpha D \\ \hline \alpha D \end{array}\right] r(t) = C^*_{tot}\delta x_{tot}(t) + D^*_{tot} r(t)
\end{aligned}$$

in cui compaiono le variabili $\delta x_{tot}(t) = \begin{bmatrix} \delta x(t) \\ \delta\hat{x}(t) \end{bmatrix}$ e $\delta y_{tot}(t) = \begin{bmatrix} \delta y(t) \\ \delta\hat{y}(t) \end{bmatrix}$;

5) si simuli l'evoluzione dello stato $\delta x_{tot}(t)$ e della risposta $\delta y_{tot}(t)$ ad un ingresso $r(t)$ ad onda quadra di frequenza 0.5Hz ed ampiezza 2VPP, ponendo $\alpha = -1$ ed assumendo sempre nullo lo stato iniziale dell'osservatore $\delta\hat{x}(t=0)$;

   si confrontino in particolare gli andamenti temporali dello stato $\delta x(t)$ e della sua stima $\delta\hat{x}(t)$, nonché dell'uscita $\delta y(t)$ e della sua stima $\delta\hat{y}(t)$, corrispondenti ai seguenti valori dello stato iniziale $\delta x(t=0)$:

$$\delta x_o^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \delta x_o^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \delta x_o^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   osservando che l'errore di stima risulta trascurabile solo dopo alcuni decimi di secondo dall'istante iniziale $t = 0$;

   si confrontino infine le uscite ottenute con quelle ricavate nel primo esercizio con il sistema controllato mediante retroazione degli stati.