18AKSOA - CONTROLLI AUTOMATICI

II esercitazione presso il LAIB

Esercizio #1: risposta di sistemi del I ordine ad ingressi canonici

Dati i sistemi dinamici SISO LTI a tempo continuo descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento:

$$G_1(s) = \frac{10}{s-5}\ ,\quad G_2(s) = \frac{10}{s}\ ,\quad G_3(s) = \frac{10}{s+5}\ ,\quad G_4(s) = \frac{10}{s+20}$$

1) se ne traccino mediante MATLAB i rispettivi grafici degli andamenti dell'evoluzione temporale delle risposte $y(t)$ all'impulso unitario utilizzando i comandi `impulse` oppure `ltiview`;

   ove possibile, si valutino per via grafica le costanti di tempo τ (date dal piede della tangente alla risposta iniziale $y_0 = y(t=0)$) e si verifichi che i valori ricavati sono in accordo con la relazione $\tau = -1/p$, essendo p il polo del sistema considerato;

   ove possibile, si ricavino per via grafica i valori finali y_∞ delle risposte $y(t)$ e se ne verifichi l'uguaglianza con i risultati forniti dal teorema del valore finale;

2) se ne traccino mediante MATLAB i rispettivi grafici degli andamenti dell'evoluzione temporale delle risposte $y(t)$ al gradino unitario utilizzando i comandi `step` oppure `ltiview`;

   ove possibile, si valutino per via grafica le costanti di tempo τ (date dall'intersezione della tangente alla risposta iniziale y_0 con la retta orizzontale tangente alla risposta finale y_∞) e si verifichi che i valori ricavati sono in accordo con la relazione $\tau = -1/p$, essendo p il polo del sistema considerato;

   ove possibile, si ricavino per via grafica i valori finali y_∞ delle risposte $y(t)$ e se ne verifichi l'uguaglianza con i risultati forniti dal teorema del valore finale; si osservi che all'istante $t = \tau$ ($t = 2\tau$; $t = 3\tau$) la risposta $y(t)$ ha raggiunto circa il 63% (86%; 95%) del suo valore finale y_∞;

   ove possibile, si determinino per via grafica i tempi di salita t_S (pari al tempo necessario affinché $y(t)$ passi per la prima volta dal 10% al 90% del valore finale y_∞).

Nota: l 'espressione "ove possibile" precedentemente usata sottintende che si debba valutare soprattutto dal punto di vista teorico se la richiesta effettuata abbia senso oppure no.

Esercizio #2: risposta al gradino di sistemi del II ordine

1) Dati i sistemi dinamici SISO LTI a tempo continuo descritti dalle seguenti funzioni di trasferimento (caratterizzate da due poli reali e nessuno zero):

$$G_1(s) = \frac{20}{(s+1)(s+10)}\ ,\quad G_2(s) = \frac{2}{(s+1)^2}\ ,\quad G_3(s) = \frac{0.2}{(s+1)(s+0.1)}$$

   se ne confrontino mediante MATLAB i rispettivi grafici degli andamenti dell'evoluzione temporale delle risposte $y(t)$ al gradino unitario, osservando l'effetto dei diversi valori del secondo polo;

   si ricavino per via grafica i valori finali y_∞ delle risposte $y(t)$ e se ne verifichi l'uguaglianza con i risultati forniti dal teorema del valore finale;

   si determinino per via grafica i tempi di salita t_S (pari al tempo necessario affinché $y(t)$ passi per la prima volta dal 10% al 90% del valore finale y_∞).

2) Dato il sistema dinamico SISO LTI a tempo continuo descritto dalla seguente funzione di trasferimento (caratterizzata da due poli reali ed uno zero in z):

$$G_4(s) = \frac{5}{-z} \cdot \frac{s-z}{(s+1)(s+5)}$$

si confrontino mediante MATLAB i grafici delle risposte $y(t)$ al gradino unitario corrispondenti alle seguenti scelte del valore dello zero:

2.a) $z_1 = 100$, $z_2 = 10$, $z_3 = 1$, $z_4 = 0.5$ (compare una sottoelongazione);

2.b) $z_5 = -0.9$, $z_6 = -0.5$, $z_7 = -0.1$ (compare una sovraelongazione, definita come $\hat{s} = \dfrac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$ ed espressa normalmente in percentuale);

2.c) $z_8 = -100$, $z_9 = -10$, $z_{10} = -2$ (cambia la velocità di risposta);

si determinino per via grafica i tempi di salita t_S (pari al tempo necessario affinché $y(t)$ passi per la prima volta dal 10% al 90% del valore finale y_∞).

3) Dato il sistema dinamico SISO LTI a tempo continuo descritto dalla seguente funzione di trasferimento (caratterizzata da nessuno zero e due poli complessi coniugati, purché $\omega_n > 0$ e $|\zeta| < 1$):

$$G_5(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

si confrontino mediante MATLAB i grafici delle risposte $y(t)$ al gradino unitario corrispondenti alle seguenti scelte dei valori dei parametri ω_n e ζ :

3.a) $\omega_n = 2$, $\zeta = 0.5$;

3.b) $\omega_n = 2$, $\zeta = 0.25$;

3.c) $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.5$;

si valutino per via grafica le massime sovraelongazioni $\hat{s} = \dfrac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$ e si verifichi che i valori ricavati sono in accordo con la relazione

$$\hat{s} = \exp\left(-\pi\zeta \Big/ \sqrt{1-\zeta^2}\right) \ ;$$

si valutino per via grafica i tempi di salita t_S (pari al tempo necessario perché $y(t)$ raggiunga per la prima volta il valore y_∞ partendo dal valore iniziale y_0) e si verifichi che i valori ricavati sono in accordo con la relazione:

$$t_S = \frac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\left(\pi - \arccos\zeta\right) \ ;$$

si valutino per via grafica i tempi di assestamento al 5% $t_{a,5\%}$ (pari al tempo necessario affinché $y(t)$ differisca definitivamente dal valore finale y_∞ di non più del 5%).

Esercizio #3: stabilità di sistemi dinamici LTI

1) Dati i sistemi dinamici LTI a tempo continuo aventi come rappresentazione in variabili di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

in cui $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$, $D = [0]$ e la matrice di stato A assume uno dei seguenti valori:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

simulare l'evoluzione dello stato $x(t)$ a partire da una arbitraria condizione iniziale $x(t=0) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ed assumendo nullo l'ingresso: $u(t) = \bar{u} = 0$, $\forall t > 0$. Verificare che gli andamenti ottenuti siano in accordo con i risultati forniti dall'analisi di stabilità dei sistemi considerati.

2) Dati i sistemi dinamici LTI a tempo discreto aventi come rappresentazione in variabili di stato

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

in cui le matrici A, B, C e D sono le stesse considerate al punto precedente, simulare l'evoluzione dello stato $x(k)$ a partire da una arbitraria condizione iniziale $x(k=0) \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ed assumendo nullo l'ingresso: $u(k) = \bar{u} = 0$, $\forall k > 0$. Verificare che gli andamenti ottenuti siano in accordo con i risultati forniti dall'analisi di stabilità dei sistemi considerati.