### Definizione di Trasformata unilatera di Laplace $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \doteq \int_{0_-}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}dt = F(s)\,, \quad s \in \mathbf{C}; \qquad \underset{\mathbf{R}\to\mathbf{R}}{f(t)} \;\underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}}\; \underset{\mathbf{C}\to\mathbf{C}}{F(s)}$$

### Proprietà fondamentali della Trasformata unilatera di Laplace

| Proprietà | Tempo $t$ | Frequenza $s$ |
|---|---|---|
| Linearità | $k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t)$ | $k_1 F_1(s) + k_2 F_2(s)$ |
| Amplificazione | $f(at)$ | $\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$ |
| Traslazione nel tempo | $f(t-\tau)$ | $\mathrm{e}^{-\tau s} F(s)$ |
| Traslazione nella frequenza | $\mathrm{e}^{at} f(t)$ | $F(s-a)$ |
| Derivazione | $\dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt}$ | $sF(s) - f(t=0_-)$ |
| Doppia derivazione | $\ddot{f}(t) = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ | $s^2 F(s) - s\,f(t=0_-) - \dot{f}(t=0_-)$ |
| Integrazione | $\int_{0_-}^{t} f(\tau)\,d\tau$ | $\frac{1}{s} \cdot F(s)$ |
| Convoluzione | $f(t) * g(t)$ | $F(s) \cdot G(s)$ |
| Teorema del valore iniziale | $f(t=0_+)$ | $\lim_{s\to\infty} s \cdot F(s)$ |
| Teorema del valore finale | $f(t\to\infty)$ | $\lim_{s\to 0} s \cdot F(s)$ |

### Tabella delle principali Trasformate unilatere di Laplace

| | $f(t)\,,\ t \geq 0_-$ | $F(s)\,,\ s \in \mathbf{C}$ |
|---|---|---|
| impulso unitario | $\delta(t)$ | $1$ |
| gradino unitario | $\varepsilon(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| segnale polinomiale o canonico | $\frac{t^k}{k!},\ k \geq 0$ | $\frac{1}{s^{k+1}}$ |
| esponenziale associato al polo semplice $p$ di $F(s)$ | $\mathrm{e}^{pt},\ p \in \mathbf{C}$ | $\frac{1}{s-p}$ |
| esponenziale associato al polo multiplo $p$ di $F(s)$ | $\frac{t^k}{k!}\mathrm{e}^{pt},\ k > 0,\ p \in \mathbf{C}$ | $\frac{1}{(s-p)^{k+1}}$ |
| | $\sin(\omega_0 t)\,,\ \omega_0 \in \mathbf{R}$ | $\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$ |
| | $\cos(\omega_0 t)\,,\ \omega_0 \in \mathbf{R}$ | $\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$ |
| esponenziale di matrice | $\mathrm{e}^{At},\ A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ | $(sI_n - A)^{-1}$ |

### Decomposizione in fratti semplici di funzioni razionali fratte

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)/\,a_n}{D(s)/\,a_n} = \\ &= \frac{N'(s)}{D'(s)} = \frac{N'(s)}{s^n + a'_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a'_1 s + a'_0} = \frac{N'(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = \frac{N'(s)}{\prod_{i=1}^{n'}(s-p_i)^{\mu_i}} = \sum_{i=1}^{n'}\sum_{k=1}^{\mu_i} \underbrace{\frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k}}_{\text{fratto semplice}} \end{aligned}$$

$N(s)$, $D(s)$ : polinomi in $s$, di grado $m$ ed $n$ rispettivamente $(m < n)$
$n$ : numero di radici di $D(s)$ e $D'(s)$ = numero di poli di $F(s)$
$n'$ : numero di radici distinte di $D(s)$ e $D'(s)$ = numero di poli non coincidenti di $F(s)$
$p_i$ : $i$-esima radice di $D(s)$ e $D'(s)$ = $i$-esimo polo di $F(s)$
$\mu_i$ : molteplicità dell'$i$-esimo polo di $F(s)$
$R_{ik}$ : $k$-esimo residuo associato a $p_i$ mediante il fratto semplice $\frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k}$, dato da

$$R_{ik} = \lim_{s\to p_i} \frac{1}{(\mu_i - k)!} \frac{\partial^{\mu_i - k}}{\partial s^{\mu_i - k}} \left[(s-p_i)^{\mu_i} F(s)\right], \quad 1 \leq k \leq \mu_i$$

Se $p_i$ è un polo semplice ($\mu_i = 1$), allora ha associato soltanto il fratto semplice $\frac{R_i}{s-p_i}$, con $R_i = \lim_{s\to p_i}(s-p_i)\,F(s)$

### Antitrasformata unilatera di Laplace di funzioni razionali fratte

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{N(s)}{D(s)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n'}\sum_{k=1}^{\mu_i}\frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k}\right\} = \sum_{i=1}^{n'}\sum_{k=1}^{\mu_i}\frac{R_{ik}}{(k-1)!}\,t^{k-1}\,\mathrm{e}^{p_i t}\,\varepsilon(t)$$

Se $F(s)$ ha un polo complesso $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ con molteplicità $\mu_i$, allora $F(s)$ presenta anche il polo complesso $p_l = p_i^* = \sigma_i - j\omega_i$ con molteplicità $\mu_l = \mu_i$. In tal caso, è opportuno antitrasformare a coppie i fratti semplici di $F(s)$ associati a $p_i$ e $p_l$, poiché $R_{lk} = R_{ik}^*$ e quindi:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k} + \frac{R_{lk}}{(s-p_l)^k}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{R_{ik}}{(s-p_i)^k} + \frac{R_{ik}^*}{(s-p_i^*)^k}\right\} = \frac{2\,|R_{ik}|}{(k-1)!}\,t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\sigma_i t}\,\sin\left(\omega_i t + \angle R_{ik} + \frac{\pi}{2}\right)\,\varepsilon(t)$$

con $\quad \angle R_{ik} = \arctan\left(\frac{\Im m\,(R_{ik})}{\Re e\,(R_{ik})}\right)$