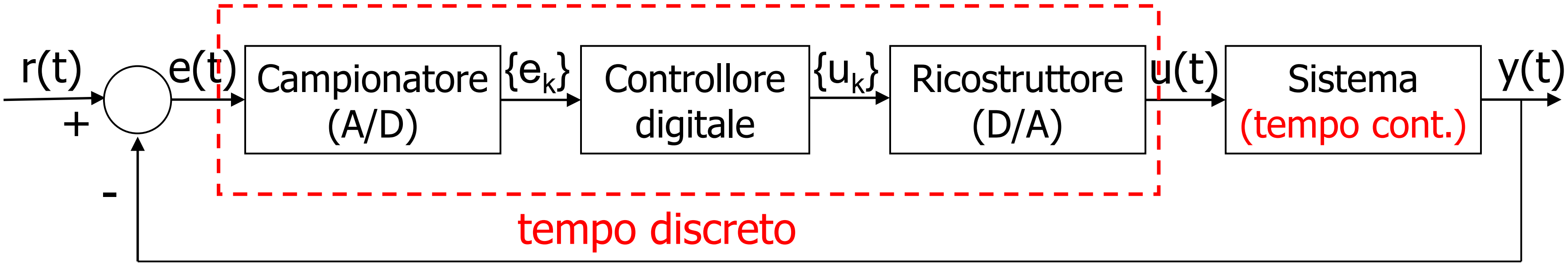
Controlli Automatici – prof. M. Indri
Sistemi di controllo digitali

- Schema di controllo "base"



  - Il sistema risultante è ibrido
  - Il campionatore genera in uscita la sequenza di campioni $\{e_k\}$ dell'errore di inseguimento
  - Il ricostruttore genera u(t) (a tempo continuo) a partire da $\{u_k\}$

- Come analizzare matematicamente il comportamento di un sistema ibrido?
  - Ad ogni sequenza di campioni si può associare il corrispondente treno di impulsi:

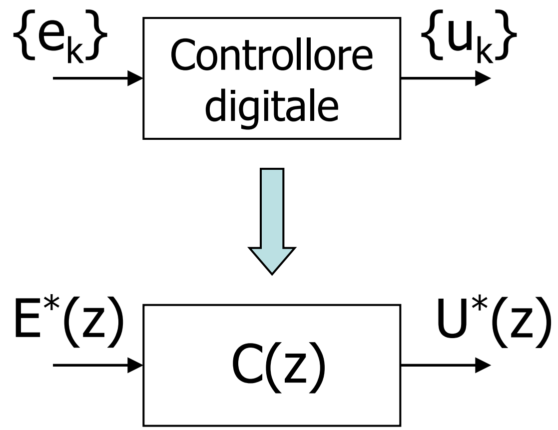
$$\{f_k\} \to f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot \delta(t - kT)$$

    ove T è il passo di campionamento
  - La sequenza di campioni $\{f_k\}$ può essere trasformata in z, la funzione $f^*(t)$ può essere trasformata in s:

$$\mathcal{Z}\left\{\{f_k\}\right\} = F^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot z^{-k}$$

$$\mathcal{L}\left\{f^*(t)\right\} = F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cdot e^{-kTs} = F^*(z)\Big|_{z=e^{sT}}$$

- Il controllore digitale è definito dalla sua fdt in z:



- Per mantenere prestazioni simili a quelle che sarebbero state ottenute realizzando il controllore analogicamente, è necessario:
  - Scegliere opportunamente il passo di campionamento
  - Selezionare un appropriato metodo di discretizzazione del controllore

- Si dovrà scegliere T sufficientemente piccolo per tenere conto:
  - del teorema del campionamento (o di Shannon): la pulsazione di campionamento ω_s deve essere almeno il doppio della componente più elevata ω_M del segnale da campionare ($2\omega_M$ è detta pulsazione di Nyquist)
    $\Longrightarrow$ $\omega_s >> \omega_M$ con $\omega_M = \omega_B$
  - della perdita di fase introdotta dal ricostruttore in ω_c
    $\Longrightarrow$ $\omega_s >> \omega_c$ (da discutere!)
- Si dovrà però evitare di scegliere T troppo piccolo, per non incorrere in
  - Problemi di quantizzazione
  - Necessità di utilizzare processori costosi per garantire elevate prestazioni

- Il ricostruttore più usato è quello di ordine zero (Z.O.H. = Zero Order Hold), che nell'intervallo T mantiene u(t) pari al valore dell'ultimo campione acquisito. La sua risposta all'impulso è
  - nel tempo: $h_0(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)$
  - nel dominio di s: $H_0(s) = (1 - e^{-sT})/s$

  Si dimostra che $H_0(s)$ è proprio la fdt del filtro Z.O.H.: $H_0(s) = U(s)/U^*(s)$
- Approssimando $e^{-sT} = (1 - sT/2)/ (1 + sT/2)$, si ricava:

$$\boxed{H_0(s) \cong \frac{T}{1 + s\frac{T}{2}}}$$

approssimazione di Padè del I ordine

- Nella scelta del passo di campionamento T è necessario quindi fare in modo che la perdita di fase in ω_c introdotta dal polo di $H_0(s)$ in -2/T sia "sopportabile", cioè tale da mantenere comunque un soddisfacente margine di fase
  - Riducendo via via T, il polo si sposta ad una pulsazione sufficientemente elevata rispetto a ω_c con conseguente riduzione della perdita di fase in ω_c
  - Per non essere costretti a ridurre eccessivamente T, può essere opportuno progettare C(s) garantendo un margine di fase superiore a quanto strettamente richiesto

Principali metodi di discretizzazione di C(s):

1. Metodo delle Differenze all'Indietro
2. Metodo delle Differenze in Avanti
3. Trasformazione Bilineare o di Tustin
4. Trasformazione Bilineare con Precompensazione in Frequenza
5. Metodo di Invarianza della Risposta all'Impulso
6. Metodo di Invarianza della Risposta al Gradino (matematicamente equivalente a trasformare in z C(s) in cascata ad un fittizio Z.O.H.)
7. Metodo della Corrispondenza Poli-Zeri

I metodi più idonei (e disponibili anche in Matlab) sono il 3, il 4, il 6 ed il 7

Progetto per discretizzazione di C(s)

1. Scelta di T
   a. Si considera come prima scelta $T = 2\pi/(\alpha\ \omega_B)$, con α compreso fra 5 e 20 (se T non risulta troppo piccolo, è preferibile scegliere $\alpha = 20$)
   b. Si valuta il nuovo margine di fase, corrispondente alla fdt d'anello comprensiva sia del campionatore sia del ricostruttore Z.O.H. approssimato (basta introdurre $(1+sT/2)$ a denominatore della $G_a(s)$, in quanto il guadagno T dello Z.O.H. si elide con il fattore 1/T introdotto dal campionatore)
   c. Se m_φ risulta insufficiente, si riduce T per quanto possibile. Se comunque il margine di fase richiesto non può essere ottenuto, è necessario rivedere C(s)

2. Discretizzazione di C(s)

Si calcola C(z) secondo uno dei metodi indicati

⇨ In Matlab si utilizza il comando **`c2d`** (vedere help) considerando come opzione di metodo:

- **`'tustin'`** per il metodo di Tustin (trasf. bilineare)
- **`'prewarp'`** per la trasformazione bilineare con precompensazione in frequenza, adottando ω_c come pulsazione per la precompensazione
- **`'zoh'`** per il metodo di Invarianza della Risposta al Gradino
- **`'matched'`** per il metodo della Corrispondenza Poli-Zeri

3. Verifica del comportamento del sistema con il controllore digitale C(z)
    a. Analisi (in frequenza e/o nel dominio del tempo) "a tempo discreto" con Matlab: si trasforma in z il sistema F(s) preceduto dal filtro Z.O.H. e si calcolano nel dominio z sia la fdt d'anello sia la fdt in catena chiusa (In Matlab si applica il comando **`c2d`** a F con l'opzione **`'zoh'`**)
    b. Simulazione del sistema ibrido con Simulink (è sufficiente sostituire nel blocco del controllore la C(z) precedentemente calcolata)