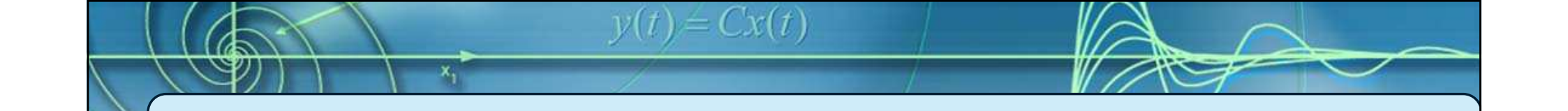


Calcolo del movimento di sistemi dinamici LTI

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD



$y(t) = Cx(t)$

Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD

- Richiami sull'analisi modale
- Modi naturali e analisi modale per sistemi LTI TD
- Esercizio 1
- Esercizio 2



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD

Richiami sull'analisi modale



$y(t) = Cx(t)$

Analisi modale: richiami (1/3)

➤ Ricordiamo che:

- Con l'**analisi modale** si possono studiare le proprietà del movimento libero di un sistema dinamico LTI
- Tale studio viene condotto sulla base del comportamento dei **modi naturali** del sistema al tendere del tempo all'infinito
- La forma dei modi naturali dipende dalle caratteristiche degli autovalori della matrice A del sistema dinamico



Analisi modale: richiami (2/3)

- Per condurre l'analisi modale di sistemi LTI occorre:
 - Determinare l'espressione analitica dei modi naturali corrispondenti a diverse caratteristiche degli autovalori del sistema
 - Valutare il comportamento dei modi naturali al tendere del tempo all'infinito

Analisi modale: richiami (3/3)

- Anche per i modi naturali $m(k)$ di sistemi dinamici LTI TD, definiti per $k \geq 0$, valgono le definizioni:

- **Convergente** se:

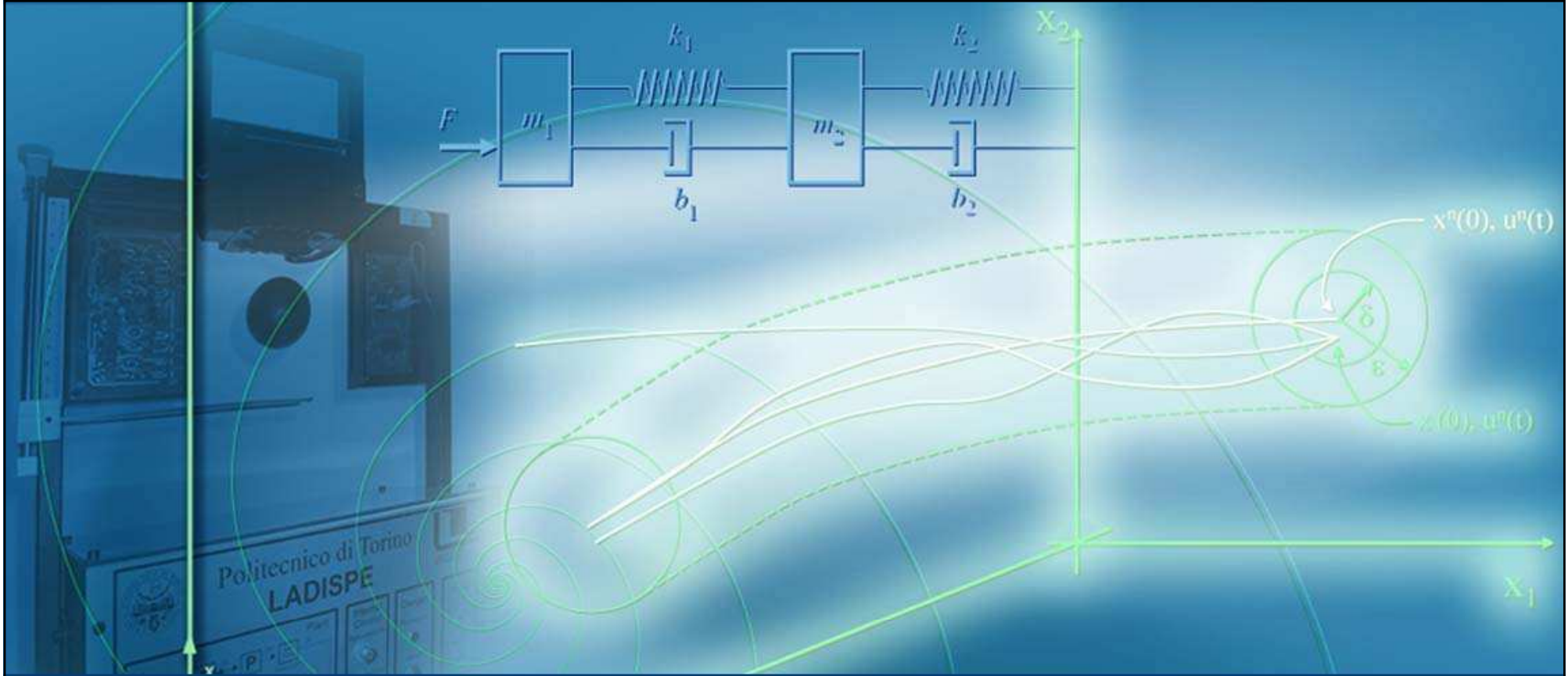
$$\lim_{k \rightarrow \infty} |m(k)| = 0$$

- **Limitato** se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $\forall k \geq 0$ risulti:

$$0 \leq |m(k)| \leq M < \infty$$

- **Divergente** se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |m(k)| = \infty$$



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD

**Modi naturali e analisi modale
per sistemi LTI TD**

Movimento libero

- Il movimento libero $x_\ell(k)$ di un sistema dinamico LTI TD di ordine n descritto dall'equazione di stato:

$$x(k+1) = Ax(k)$$

con $x(k) \in \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

è dato da:

$$x_\ell(k) = A^k x(0)$$

essendo $x(0) \in \mathbb{R}^n$ uno stato iniziale noto

Forma di Jordan (1/2)

- Per evidenziare i modi naturali associati alle varie tipologie di autovalori occorre calcolare A^k
- Il calcolo di A^k è immediato solo se A è diagonale
- In ogni caso, è possibile semplificare la procedura di determinazione dei modi naturali poiché:

$$A^k = T \tilde{A}^k T^{-1}$$

- T è una matrice costante
- \tilde{A} è una matrice in forma di Jordan (diagonale oppure diagonale a blocchi)

Forma di Jordan (2/2)

- La forma di Jordan di una matrice quadrata avente q autovalori distinti $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ di molteplicità μ_1, \dots, μ_q è una matrice diagonale a blocchi

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{A}_q \end{bmatrix}$$

- I **blocchi di Jordan** \tilde{A}_i sono matrici quadrate associate all' i -esimo autovalore λ_i , aventi dimensione $\mu_i \times \mu_i$

Potenza di matrice

- La potenza di una matrice in forma di Jordan è data da una forma diagonale a blocchi del tipo:

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{A}_q^k \end{bmatrix}$$

dove i blocchi \tilde{A}_i^k hanno forma diversa a seconda delle caratteristiche degli autovalori di A

Movimento libero e forma di Jordan

➤ Si ha:

$$x_{\ell}(k) = A^k x(0) = T \tilde{A}^k T^{-1} x(0)$$

- Poiché T e $x(0)$ sono costituite da numeri reali
- L'espressione analitica di $x_{\ell}(k)$ è una combinazione lineare degli elementi della matrice \tilde{A}^k
 - La forma semplificata di \tilde{A} (e quindi di \tilde{A}^k) permette di mettere immediatamente in evidenza la forma dei modi naturali
 - Si possono così analizzare in modo più immediato le proprietà qualitative del movimento libero $x_{\ell}(k)$



$y(t) = Cx(t)$

Calcolo dei modi naturali

- Studieremo ora, come cambia la forma dei blocchi della matrice \tilde{A}^k al variare delle caratteristiche degli autovalori della matrice A
- Questo permetterà di:
 - Definire la forma dei modi naturali in base alle proprietà degli autovalori
 - Eseguire l'analisi modale del sistema
- Studieremo i seguenti casi:
 - Autovalori con molteplicità unitaria
 - Autovalori con molteplicità maggiore di uno

Autovalori \mathbb{R} semplici

- I blocchi di \tilde{A}^k corrispondenti ad autovalori reali e distinti hanno forma diagonale:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

e danno origine a modi naturali del tipo λ_i^k

Autovalori \mathbb{R} semplici: analisi modale

- Il modo naturale λ^k , associato all'autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ di molteplicità unitaria, risulta:
 - **Geometricamente convergente** se $|\lambda| < 1$
(Es. $0.5^k, (-0.5)^k$)
 - **Limitato** se $|\lambda| = 1$
(Es. $1^k = 1, (-1)^k$)
 - **Geometricamente divergente** se $|\lambda| > 1$
(Es. $2^k, (-2)^k$)
- Si noti che, se $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, il modo corrispondente origina una sequenza di campioni (**modo alternato**) il cui segno cambia ad ogni passo

Autovalori \mathbb{C} semplici

- I blocchi di \tilde{A}^k corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi coniugati con molteplicità unitaria del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega = v e^{\pm j\theta}$ hanno la forma:

$$v^k \begin{bmatrix} \cos(\theta k) & \sin(\theta k) \\ -\sin(\theta k) & \cos(\theta k) \end{bmatrix}$$

e danno origine a modi naturali oscillanti della forma $v^k \cos(\theta k)$, $v^k \sin(\theta k)$

Autovalori \mathbb{C} semplici: analisi modale

- I modi naturali della forma $v^k \cos(\theta k)$, $v^k \sin(\theta k)$, associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati di molteplicità unitaria del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega = v e^{\pm j\theta}$ sono:

- **Geometricamente convergenti**

se $|\lambda| = v < 1$ (Es. $0.5^k \sin(k)$)

- **Limitati (oscillanti)**

se $|\lambda| = v = 1$, $\text{Arg}(\lambda) = \theta \neq 0$ (Es. $\sin(5k)$)

- **Geometricamente divergenti**

se $|\lambda| = v > 1$ (Es. $1.5^k \sin(k)$)

Autovalori \mathbb{R} multipli

- I blocchi di \tilde{A}^k corrispondenti ad un autovalore reale λ con molteplicità μ sono matrici diagonali a blocchi contenenti sottomatrici triangolari del tipo:

$$\begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^k & \dots & \frac{k(k-1)\dots(k-\mu'+2)}{(\mu'-1)!} \lambda^{k-\mu'+1} \\ 0 & \lambda^k & \dots & \frac{k(k-1)\dots(k-\mu'+3)}{(\mu'-2)!} \lambda^{k-\mu'+2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$$

e danno origine a $\mu' \leq \mu$ modi naturali contenenti termini del tipo $k^{\mu'} \lambda^k, \dots, k\lambda^k, \lambda^k$

Autovalori \mathbb{R} multipli: analisi modale

- I μ' modi naturali contenenti termini del tipo $k^{\mu'} \lambda^k, \dots, k \lambda^k, \lambda^k$, associati ad un autovalore reale λ con molteplicità μ sono:
 - **Geometricamente convergenti** se $|\lambda| < 1$
(Es. $k \cdot 0.5^k, k \cdot (-0.5)^k$)
 - **Polinomialmente divergenti** se $|\lambda| = 1$
(Es. $k 1^k = k$)
 - **Geometricamente divergenti** se $|\lambda| > 1$
(Es. $k \cdot 1.5^k, k \cdot (-1.5)^k$)
- Anche in questo caso se $\text{Re}(\lambda) < 0$ si hanno dei modi alternati

Autovalori \mathbb{C} multipli

- I blocchi di \tilde{A}^k corrispondenti ad una coppia di autovalori complessi $\lambda = \sigma \pm j\omega = v e^{\pm j\theta}$ con molteplicità μ hanno una forma analoga al caso reale e danno origine, in generale, a $\mu' \leq \mu$ modi naturali oscillanti contenenti termini del tipo:

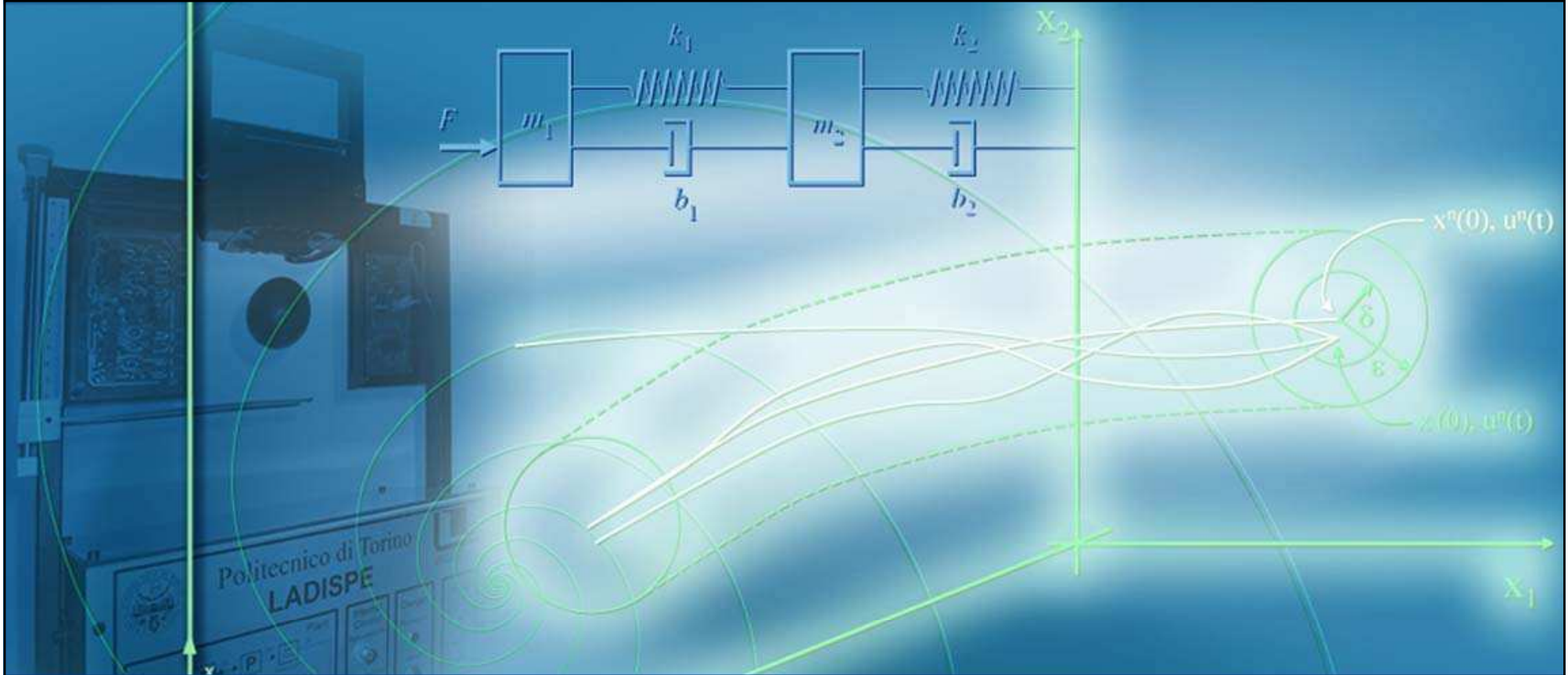
$$k^{\mu'} v^k \cos(\theta k), \dots, k v^k \cos(\theta k), v^k \cos(\theta k) \\ k^{\mu'} v^k \sin(\theta k), \dots, k v^k \sin(\theta k), v^k \sin(\theta k)$$

Autovalori \mathbb{C} multipli: analisi modale

- I μ' modi naturali contenenti termini del tipo
- $$k^{\mu'} v^k \cos(\theta k), \dots, k v^k \cos(\theta k), v^k \cos(\theta k)$$
- $$k^{\mu'} v^k \sin(\theta k), \dots, k v^k \sin(\theta k), v^k \sin(\theta k)$$

associati ad una coppia di autovalori complessi del tipo $\lambda = \sigma \pm j\omega = v e^{\pm j\theta}$ con molteplicità μ sono:

- **Geometricamente convergenti**
se $|\lambda| = v < 1$ (Es. $k 0.5^k \sin(k)$)
- **Polinomialmente divergenti**
se $|\lambda| = v = 1, \text{Arg}(\lambda) = \theta \neq 0$ (Es. $k \sin(5k)$)
- **Geometricamente divergenti**
se $|\lambda| = v > 1$ (Es. $k 1.5^k \sin(k)$)



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD

Esercizio 1

$$y(t) = Cx(t)$$

Formulazione del problema

- Si consideri un sistema dinamico LTI TD caratterizzato dalla seguente matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Determinare le caratteristiche dei modi naturali

Soluzione: calcolo dei modi naturali

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Poiché la matrice A risulta diagonale, gli autovalori si leggono direttamente sulla diagonale e sono:

$$\lambda_1 = 0.1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -0.4, \lambda_4 = 0.$$

- Gli autovalori sono reali e distinti pertanto i corrispondenti modi naturali sono del tipo λ_i^k :

$$\lambda_1 \rightarrow 0.1^k, \lambda_2 \rightarrow (-2)^k, \lambda_3 \rightarrow (-0.4)^k, \lambda_4 \rightarrow 0^k = \delta(k)$$



Soluzione: analisi modale

- $0.1^k \rightarrow$ modo geometricamente convergente
- $(-2)^k \rightarrow$ modo geometricamente divergente (alternato)
- $(-0.4)^k \rightarrow$ modo geometricamente convergente (alternato)
- $0^k = \delta(k) \rightarrow$ modo geometricamente convergente (impulsivo \rightarrow converge a zero in un passo)



Analisi modale per sistemi dinamici LTI TD

Esercizio 2

Formulazione del problema

- Si consideri un sistema dinamico LTI TD caratterizzato dalla seguente matrice A :

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- Determinare le caratteristiche dei modi naturali

Soluzione: calcolo degli autovalori

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

The matrix A is shown with two submatrices highlighted by red circles and labeled with red arrows: A_{11} points to the top-left 2x2 block, and A_{22} points to the bottom-right 2x2 block.

- Poiché la matrice A risulta diagonale a blocchi gli autovalori sono quelli delle sottomatrici A_{11} e A_{22}
- Per la sottomatrice A_{11} si ha $\lambda_{1,2} = -0.5 \pm 0.5j = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\pm j \frac{5}{4}\pi}$
- Per la sottomatrice A_{22} si ha $\lambda_3 = -1, \lambda_4 = 3$

Soluzione: analisi modale

- Il sistema presenta quattro autovalori distinti di cui due reali e due complessi coniugati
- I modi naturali corrispondenti sono:

- $\lambda_{1,2} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \cos\left(\frac{5}{4}\pi k\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \sin\left(\frac{5}{4}\pi k\right)$

$$\rightarrow |\lambda_{1,2}| < 1$$

modi oscillanti geometricamente convergenti

- $\lambda_3 \rightarrow (-1)^k \rightarrow |\lambda_3| = 1 \rightarrow \text{modo limitato (alternato)}$

- $\lambda_4 \rightarrow 3^k \rightarrow |\lambda_4| > 1 \rightarrow \text{modo geometricamente divergente}$