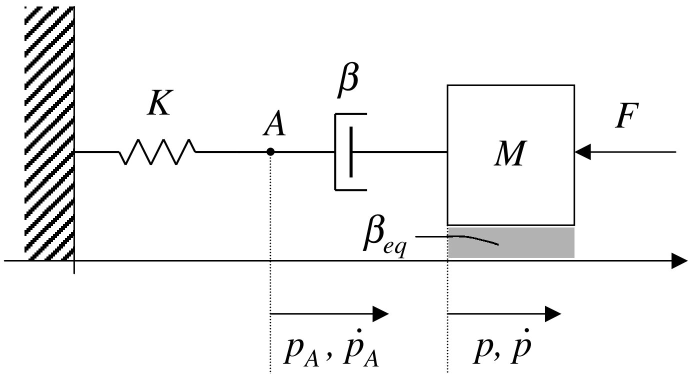
01AYS - FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Tipologia degli esercizi proposti nel compito del 30/I/2002

In questo documento si riporta la tipologia degli esercizi proposti con la relativa soluzione. Per consentire agli studenti una migliore comprensione degli errori commessi, nella tabella seguente sono indicate le posizioni dei vari esercizi nei diversi compiti, nonché il livello di difficoltà dei singoli esercizi.

Esercizio	#1	#2	#3	#4	#5	#6	#7	#8	#9	#10	#11	#12	#13
Compito #1 (pag. 11)	13	2	6	5	11	8	4	1	10	3	7	9	12
Compito #2 (pag. 21)	9	4	7	13	12	8	11	2	6	10	1	3	5
Compito #3 (pag. 31)	2	10	5	3	1	11	7	13	8	6	12	9	4
Compito #4 (pag. 41)	8	13	1	9	5	12	7	11	6	4	2	3	10
Compito #5 (pag. 51)	2	5	1	8	3	12	11	6	4	13	10	7	9
Compito #6 (pag. 61)	10	4	1	3	7	12	2	13	9	5	11	8	6
Compito #7 (pag. 71)	7	6	9	12	5	11	2	13	4	3	10	8	1
Compito #8 (pag. 81)	1	12	3	5	11	4	8	2	13	10	7	9	6
Livello di difficoltà	alto	medio	basso	basso	medio	basso	medio	alto	basso	basso	alto	basso	alto

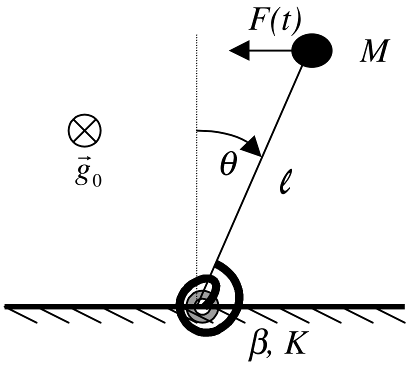
Esercizio 1 - Nel sistema dinamico meccanico in traslazione riportato in figura, un corpo puntiforme di massa M è collegato ad una parete fissa mediante uno smorzatore ed una molla in serie l'uno all'altra, aventi rispettivamente un coefficiente di attrito viscoso β ed un'elasticità K. Sul corpo agiscono una forza esterna F ed una forza d'attrito caratterizzata da un coefficiente di attrito viscoso equivalente β_{eq}.



Scrivere le equazioni del moto del corpo puntiforme e del punto materiale A di contatto fra smorzatore e molla.
[Nota: per confrontare la propria soluzione con quelle proposte, sostituire se necessario l'equazione del moto del punto materiale A nell'equazione dinamica del corpo puntiforme]

Soluzione: $M\,\ddot{p} + \beta_{eq}\,\dot{p} = -K\,p_A - F, \quad \beta\,\dot{p}_A + K\,p_A = \beta\,\dot{p}$

Esercizio 2 - Un corpo puntiforme di massa M è collegato ad una cerniera mediante un'asta rigida di lunghezza ℓ e massa trascurabile, la cui posizione angolare è individuata dall'angolo $\theta(t)$. Il pendolo così costituito è libero di muoversi vincolato in un semipiano orizzontale ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) perpendicolare alla direzione su cui agisce il campo gravitazionale. Sulla massa M agisce una forza $F(t)$ in direzione orizzontale e verso indicato nella figura sottostante. Sulla cerniera si originano una coppia di attrito viscoso, caratterizzata dal coefficiente β, ed una coppia elastica, caratterizzata dal coefficiente K. La forza $F(t)$ e la velocità angolare $\dot{\theta}(t)$ del pendolo costituiscono rispettivamente l'ingresso e l'uscita del sistema.



Determinare il modello matematico in variabili di stato di tale sistema dinamico, scegliendo come variabile di stato $x(t) = \left[\theta(t),\ \dot{\theta}(t)\right]^T$ e considerando i seguenti valori numerici dei parametri: $M = 0.2$ kg, $\ell = 0.5$ m, $\beta = 0.1$ Nms/rad, $K = 0.3$ Nm/rad.

Soluzione: $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -6x_1(t) - 2x_2(t) - 10\cos x_1(t) \cdot u(t) \end{cases} \qquad y(t) = x_2(t)$

Esercizio 3 - Dato il sistema dinamico LTI a tempo discreto descritto da:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A \cdot x(k) + B \cdot u(k) \\ y(k) &= C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \end{aligned}$$

gli autovalori della matrice A sono:

$$\lambda_i = -0.5, -0.5 + 0.5j, -0.5 - 0.5j, 0.2 + 0.1j, 0.2 - 0.1j, \quad i = 1, \ldots, 5$$

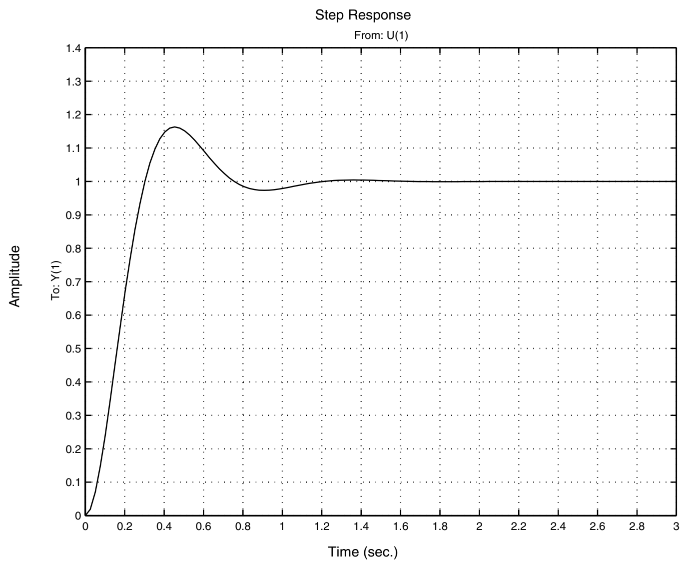
Analizzare le proprietà di stabilità del sistema.
Soluzione: Il sistema è asintoticamente stabile.

Esercizio 4 - Un sistema dinamico non lineare, a tempo continuo, con nonlinearità derivabili, viene linearizzato nell'intorno del suo unico punto di equilibrio, ottenendo un sistema LTI descritto dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Analizzare le proprietà di stabilità del punto di equilibrio del sistema.
Soluzione: Il punto di equilibrio del sistema non lineare è asintoticamente stabile.

Esercizio 5 - Dato il sistema dinamico SISO avente la seguente risposta $y(t)$ al gradino unitario:



determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ di tale sistema.
Soluzione: La funzione di trasferimento è $G(s) = \dfrac{64}{s^2 + 8s + 64}$.

Esercizio 6 - Dato il sistema dinamico non lineare a tempo continuo descritto da:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -0.25x_1^2(t) - x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 4x_1(t) - 16x_1(t)x_2(t) \\ y(t) &= 2x_2(t) \end{aligned}$$

determinarne gli stati di equilibrio $\overline{x}$ corrispondenti all'ingresso di equilibrio $\overline{u} = 0.5$.
Soluzione: Gli stati di equilibrio sono: $\overline{x}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}$, $\overline{x}_b = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.25 \end{bmatrix}$, $\overline{x}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}$.

Esercizio 7 - Dato il sistema SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4s - 2}{s^3 + 10s^2 + s(p - 20) + 2p}$$

dire per quali valori del parametro p il sistema risulta esternamente stabile.
Soluzione: $p > 25$

Esercizio 8 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = 3\frac{(s-1)(s+4)}{(s+1)(s+2)^2}$$

determinare l'espressione analitica dell'uscita $y(t)$ supponendo condizioni iniziali nulle ed ingresso a gradino di ampiezza 2, cioè $u(t) = 2\varepsilon(t)$.
Soluzione: $y(t) = \left[-6 + 36e^{-t} - 30e^{-2t} - 18te^{-2t}\right]\varepsilon(t)$

Esercizio 9 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = -4\frac{(s+1)(s-5)}{(s+2)(s^2-4s+5)}$$

calcolare il valore finale y_∞ della risposta all'ingresso $u(t)$ a gradino unitario.

Soluzione: Non si può calcolare y_∞ perché il sistema non va a regime, avendo poli nel semipiano destro.

Esercizio 10 - Dato il sistema dinamico SISO caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = Y(s)/U(s) = \frac{(s-2)(s+5)}{(s+1)(s+2)}$$

calcolare analiticamente la risposta a regime permanente $y_{perm}(t)$ all'ingresso sinusoidale $u(t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t)$, con $U = 5$ e $\omega = 2$ rad/s.

Soluzione: $y_{perm}(t) = 12.04 \cdot \sin(2t + 0.84)$

Esercizio 11 - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -251 & 31 \\ -2032 & 251 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 49 \end{bmatrix}$$

di un modello LTI in variabili di stato, determinare, se possibile, i coefficienti K di retroazione dagli stati che permettono di portare gli autovalori del sistema retroazionato in:

$$\lambda_1 = -3 \quad \lambda_2 = -5$$

Soluzione: K=[–64 8]

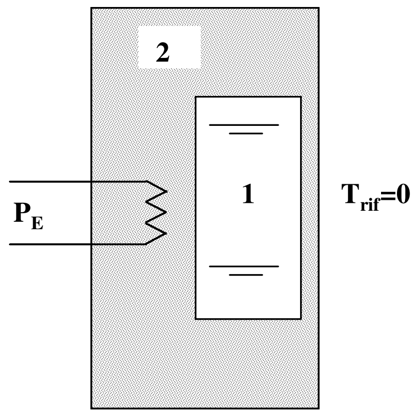
Esercizio 12 - Date le matrici

$$A = \begin{bmatrix} 30 & 39 & 51 \\ -52 & -59 & -49 \\ 8 & 7 & -7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 31 \end{bmatrix}$$

di un modello LTI in variabili di stato a tempo discreto, determinare, se possibile, i coefficienti L del ricostruttore asintotico che permettono di posizionare gli autovalori del sistema osservato in $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$ e $\lambda_3 = 0.3$.

Soluzione: Non è possibile posizionare arbitrariamente gli autovalori.

Esercizio 13 - Un sistema termico è costituito da due corpi omogenei **1** e **2**; all'interno del corpo **2** è applicato un flusso di calore P_E; l'ambiente esterno è a temperatura costante $T_{rif} = 0$. Gli stati del sistema sono dati dalle temperature T_1 e T_2 dei due corpi omogenei, l'ingresso è costituito dal flusso P_E, mentre l'uscita è data da $T_1 - T_2$. Determinare il polinomio caratteristico (in forma monica) del modello LTI che descrive il sistema dato, assumendo che le capacità dei due corpi siano date da $C_1 = C_2 = C$ e le conduttanze termiche fra i due corpi e fra il corpo **2** e l'ambiente siano $K_{12} = K_{20} = 1/(2R)$, ove $2R$ è la resistenza termica fra i vari elementi.



Calcolare il polinomio caratteristico.

Soluzione: $s^2 + 3s/(2RC) + 1/(2RC)^2$