Prof. Alessio Carullo

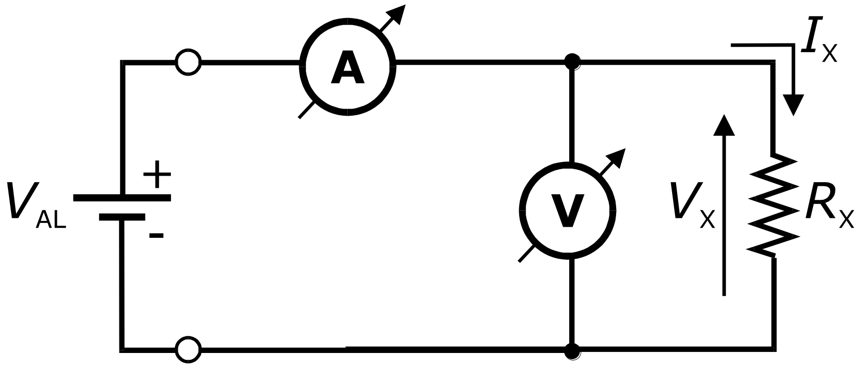
Esercizi di stima dell'incertezza secondo il modello deterministico

13 novembre 2017

Impiego di strumenti elettromeccanici

ESERCIZIO 1

La resistenza in corrente continua R_X di un bipolo è misurata mediante il metodo volt-amperometrico, realizzando il circuito di misura mostrato in figura: il voltmetro V misura la caduta di tensione ai capi del bipolo, mentre l'amperometro A misura la corrente che scorre nel circuito.



Le principali caratteristiche dei due strumenti impiegati sono di seguito riassunte:

- Voltmetro elettromeccanico di tipo magnetoelettrico
  - portate: 0.6 V, 1.2 V, 2.4 V, 4.8 V
  - classe: 0.5
  - carico strumentale: 10 kΩ/V ± 5 %
  - scala: 60 divisioni (div) a fondo scala - unità di formato 1 div
- Amperometro elettromeccanico di tipo magnetoelettrico
  - portate: 10 mA, 50 mA, 100 mA
  - classe: 0.5
  - carico strumentale: 60 mV ± 5 %
  - scala: 100 divisioni (div) a fondo scala - unità di formato 2 div

Stimare la misura della resistenza R_X avendo eseguito le seguenti letture e considerando trascurabile l'incertezza di lettura:

- voltmetro: L_V = 48 div (portata 0.6 V)
- amperometro: L_A = 75 div (portata 10 mA)

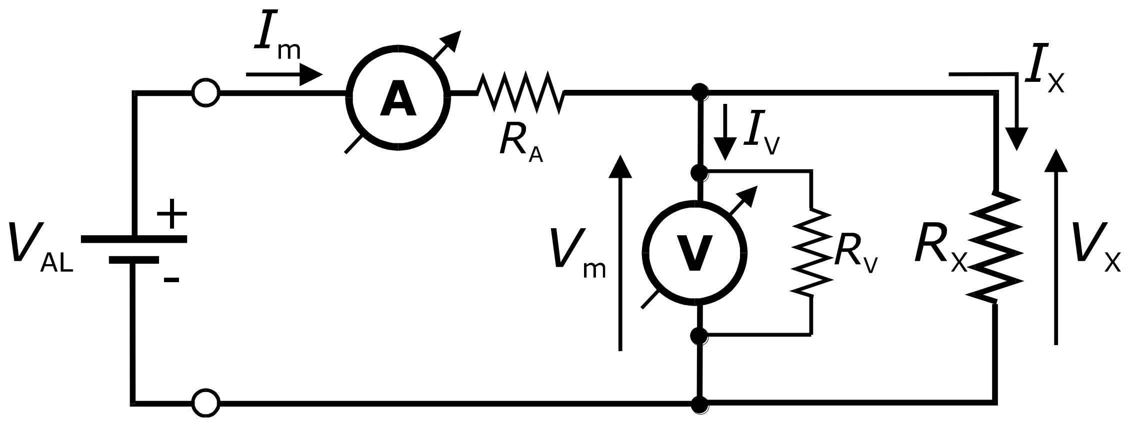
Modello di misura

La resistenza in misura R_X può essere espressa come:

$$R_X = \frac{V_X}{I_X}$$

dove V_X è la caduta di tensione ai capi del resistore in misura ed I_X la corrente che lo attraversa.

Se si considerano i carichi strumentali del voltmetro e dell'amperometro, il circuito reale di misura è quello mostrato nella figura seguente, dove R_V ed R_A sono le resistenze interne rispettivamente del voltmetro e dell’amperometro.



Il voltmetro V, connesso a valle dell’amperometro, misura una tensione V_m che è effettivamente pari alla tensione V_X, mentre l’amperometro A misura una corrente I_m che è pari alla somma delle correnti assorbite dal bipolo in misura (I_X) e dal voltmetro (I_V), ossia:

$$I_m = I_V + I_X$$

Segue che la resistenza R_m effettivamente misurata vale:

$$R_m = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_X}{I_V + I_X} = \frac{1}{\frac{I_V}{V_X} + \frac{I_X}{V_X}} = \frac{1}{\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_X}} = R_V \mathbin{/\!/} R_X$$

Quello che si ottiene è la resistenza equivalente del parallelo tra R_X ed R_V, per cui l’effetto sistematico dovuto al carico strumentale del voltmetro può essere stimato, in termini assoluti, come:

$$\Delta_{CS_V} = R_m - R_X = -\frac{R_X^2}{R_V + R_X}$$

ed in termini relativi come:

$$\varepsilon_{CS_V} = \frac{\Delta_{CS_V}}{R_X} = -\frac{R_X}{R_V + R_X} \approx -\frac{R_X}{R_V}$$

dove l’approssimazione vale nal caso in cui R_X << R_V, che è la situazione per cui si ricorre alla configurazione di misura con voltmetro a valle dell’amperometro.

Per ottenere una stima dell'effetto sistematico individuato, si osservi che il voltmetro, impiegato nella portata 0.6 V, presenta una resistenza interna pari a:

$$R_V = 10\ \frac{\text{k}\Omega}{\text{V}} \cdot 0.6\ \text{V} = 6\ \text{k}\Omega \pm 5\ \%$$

mentre il valore di R_X è pari a circa 64 Ω, per cui si ottiene:

$$\varepsilon_{\%CS_V} = -\frac{64}{6000} \cdot 100 \approx 1\ \%$$

Poiché gli strumenti impiegati sono caratterizzati da un indice di classe pari a 0.5, l'incertezza relativa percentuale delle misure eseguite a fondo scala è uguale allo 0.5 %, da cui segue che l'effetto sistematico individuato è significativo. Il modello da adottare per la stima del misurando deve perciò comprendere la correzione dell'effetto sistematico, per cui si utilizza la seguente espressione:

$$R_X = \frac{V_m}{I_m - \frac{V_m}{R_V}}$$

Stima del misurando

Per ricavare le misure fornite dal voltmetro e dall'amperometro, conviene innanzitutto stimare le corrispondenti costanti di taratura K_V e K_A:

$$K_V = \frac{P_V}{N_{FS}} = \frac{0.6\ \text{V}}{60\ \text{div}} = 0.01\ \text{V}/\text{div}$$

$$K_A = \frac{P_A}{N_{FS}} = \frac{10\ \text{mA}}{100\ \text{div}} = 0.1\ \text{mA}/\text{div}$$

A questo punto si ottiene:

$$V_m = L_V \cdot K_V = 48\ \text{div} \cdot 0.01\ \text{V}/\text{div} = 0.48\ \text{V}$$

$$I_m = L_A \cdot K_A = 75\ \text{div} \cdot 0.1\ \text{mA}/\text{div} = 7.5\ \text{mA}$$

Applicando infine il modello di misura individuato, la stima della resistenza in misura R_X è pari a:

$$R_X = \frac{0.48}{7.5 \cdot 10^{-3} - \frac{0.48}{6 \cdot 10^3}} = \frac{0.48}{7.5 \cdot 10^{-3} - 0.08 \cdot 10^{-3}} \approx 64.690\ \Omega$$

Stima dell'incertezza

Impiegando la regola per la propagazione dell'incertezza secondo il modello deterministico, l'incertezza assoluta δR_X della resistenza in misura è ottenuta come:

$$\delta R_X = \left|\frac{\partial R_X}{\partial V_m}\right| \cdot \delta V_m + \left|\frac{\partial R_X}{\partial I_m}\right| \cdot \delta I_m + \left|\frac{\partial R_X}{\partial R_V}\right| \cdot \delta R_V$$

$$\left|\frac{\partial R_X}{\partial V_m}\right| = \frac{I_m}{\left(I_m - \frac{V_m}{R_V}\right)^2} = \frac{7.5 \cdot 10^{-3}}{\left(7.5 \cdot 10^{-3} - \frac{0.48}{6 \cdot 10^3}\right)^2} \approx 136\ \Omega / \mathrm{V}$$

$$\left|\frac{\partial R_X}{\partial I_m}\right| = \frac{V_m}{\left(I_m - \frac{V_m}{R_V}\right)^2} \approx 8718\ \Omega / \mathrm{A}$$

$$\left|\frac{\partial R_X}{\partial R_V}\right| = \frac{V_m^2}{\left(I_m \cdot R_V - V_m\right)^2} \approx 1.1 \cdot 10^{-4}\ \Omega / \Omega$$

$$\delta R_V = 0.05 \cdot 6000\ \Omega = 300\ \Omega$$

L'incertezza assoluta degli strumenti elettromeccanici si ricava a partire dall'indice di classe *c*, che è definito come incertezza percentuale ridotta alla portata, ossia come:

$$c = \frac{\delta x}{P_X} \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad \delta x = \frac{c \cdot P_X}{100}$$

per cui le incertezze assolute del voltmetro e dell'amperometro impiegati valgono:

$$\delta V_m = \frac{c_V \cdot P_V}{100} = \frac{0.5 \cdot 0.6\ \mathrm{V}}{100} = 0.003\ \mathrm{V}$$

$$\delta I_m = \frac{c_A \cdot P_A}{100} = \frac{0.5 \cdot 10\ \mathrm{mA}}{100} = 0.05\ \mathrm{mA}$$

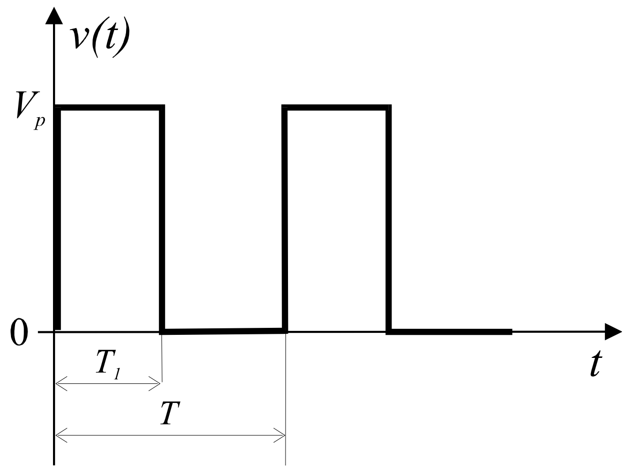
Sostituendo i valori numerici ottenuti nell'espressione dell'incertezza assoluta della resistenza in misura si ottiene:

$$\delta R_X = 136\ \frac{\Omega}{\mathrm{V}} \cdot 0.003\ \mathrm{V} + 8718\ \frac{\Omega}{\mathrm{A}} \cdot 50 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{A} + 1.1 \cdot 10^{-4}\ \frac{\Omega}{\Omega} \cdot 300\ \Omega =$$
$$= 0.408\ \Omega + 0.4359\ \Omega + 0.033\ \Omega \approx 0.9\ \Omega$$

Dichiarazione finale della misura

$$\boxed{R_X = (64.7 \pm 0.9)\,\Omega}$$

ESERCIZIO 2



Il valore efficace del segnale periodico rappresentato in figura è calcolato con la relazione:

$$V_{eff} = V_{DC} \cdot \sqrt{\frac{T}{T_1}}$$

dove

- V_{DC} è la componente continua del segnale, che è misurata mediante un voltmetro elettromeccanico di tipo magnetoelettrico di portata 6 V e classe 0.5;
- T_1 e T sono gli intervalli di tempo indicati in figura, che sono misurati con un oscilloscopio che ha incertezza del fattore di deflessione orizzontale pari al 2%.

Sapendo che il voltmetro indica 5.04 V (con incertezza di lettura trascurabile) e che le letture dei due intervalli sono pari a:

- L_{T1} = (6.2 $\pm$ 0.1) div (fattore di deflessione orizzontale K_{X1}=1 ms/div);
- L_T = (6.7 $\pm$ 0.1) div (fattore di deflessione K_X= 2 ms/div);

stimare la misura del valore efficace del segnale.

Modello di misura

A partire dalla relazione fornita, il modello di misura esplicitato rispetto alle grandezze misurate assume la seguente forma:

$$V_{eff} = V_{DC} \cdot \sqrt{\frac{L_T \cdot K_X}{L_{T1} \cdot K_{X1}}}$$

Stima del misurando

Sostituendo i valori numerici forniti al modello di misura si ottiene:

$$V_{eff} = 5.04 \cdot \sqrt{\frac{6.7 \cdot 2}{6.2 \cdot 1}} \approx 7.4095 \text{ V}$$

Stima dell'incertezza

Il modello di misura può essere espresso nella forma:

$$V_{eff} = V_{DC} \cdot \left(\frac{L_T \cdot K_X}{L_{T1} \cdot K_{X1}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

per cui, ricordando le regole per la propagazione dell'incertezza descritte nella lezione 4 del corso, l'incertezza relativa della misura del valore efficace del segnale è stimata come:

$$\varepsilon V_{eff} = \varepsilon V_{DC} + \frac{1}{2} \cdot \left(\varepsilon L_T + \varepsilon L_{T1} + \varepsilon K_X + \varepsilon K_{X1} \right)$$

dove εx rappresenta l'incertezza relativa della misura *x*.

Per quanto riguarda l'incertezza strumentale dell'oscilloscopio, il costruttore dichiara un'incertezza relativa percentuale del fattore di deflessione orizzontale pari al 2%, per cui si ha che:

$$\varepsilon K_X = \varepsilon K_{X1} = 0.02$$

mentre per l'incertezza di lettura si ottiene:

$$\varepsilon L_T = \frac{\delta L_T}{L_T} = \frac{0.1}{6.7} \approx 0.015 \quad ; \quad \varepsilon L_{T1} = \frac{\delta L_{T1}}{L_{T1}} = \frac{0.1}{6.2} \approx 0.016$$

La stima dell'incertezza strumentale del voltmetro magnetoelettrico è ottenuta a partire dalla definizione di classe di precisione:

$$\delta V_{DC} = \frac{c \cdot P}{100} = \frac{0.5 \cdot 6}{100} = 0.03 \text{ V} \Rightarrow \varepsilon V_{DC} = \frac{\delta V_{DC}}{V_{DC}} = \frac{0.03}{5.04} \approx 0.006$$

Sostituendo i valori numerici ottenuti nell'espressione dell'incertezza relativa della misura del valore efficace, si ottiene infine:

$$\varepsilon V_{eff} = 0.006 + \frac{1}{2} \cdot (0.015 + 0.016 + 0.02 + 0.02) \approx 0.04$$

da cui si ricava la corrispondente incertezza assoluta:

$$\delta V_{eff} = V_{eff} \cdot \varepsilon V_{eff} = 0.04 \cdot 7.4095 \approx 0.3 \text{ V}$$

Dichiarazione finale della misura

$$\boxed{Veff = (7.41 \pm 0.3) \text{ V}}$$

ESERCIZIO 3

L'impedenza di un bipolo è stata valutata mediante le seguenti prove:

- Misurazione della resistenza *R* in corrente continua mediante metodo volt-amperometrico
  - strumenti utilizzati: voltmetro magnetoelettrico con portata 100 V e classe 1; amperometro magnetoelettrico con portata 5 A e classe 0.5 (ipotizzare carico strumentale nullo per entrambi gli strumenti);
  - lettura fornita dal voltmetro: 30 V (con incertezza di lettura trascurabile)
  - lettura fornita dall'amperometro: 1.2 A (con incertezza di lettura trascurabile).
- Misurazione di induttanza mediante ponte in alternata, che ha fornito il seguente risultato
  - *L* = 5 mH ± 1%, ottenuta alla frequenza f = 1 kHz ± 0.1%

Stimare la misura del modulo dell'impedenza ***Z*** alla frequenza di 1 kHz, considerando trascurabili le variazione di resistenza con la frequenza.

Modello di misura

Il modulo dell'impedenza è calcolato come:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

dove *R* è la componente resistiva dell'impedenza, ottenuta dalle indicazioni del voltmetro e dell'amperometro mediante la relazione:

$$R = \frac{V}{I}$$

mentre X_L è la reattanza induttiva, ottenuta come:

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L$$

Il modello di misura può quindi essere espresso nella seguente forma:

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{V}{I}\right)^2 + (2\pi \cdot f \cdot L)^2}$$

Stima del misurando

Sostituendo i valori numerici forniti al modello di misura si ottiene:

$$|Z| = \sqrt{\left(\frac{30}{1.2}\right)^2 + (2\pi \cdot 1000 \cdot 0.005)^2} \approx 40.15\,\Omega$$

Stima dell'incertezza

$$\delta|Z| = \left|\frac{\partial|Z|}{\partial V}\right| \cdot \delta V + \left|\frac{\partial|Z|}{\partial I}\right| \cdot \delta I + \left|\frac{\partial|Z|}{\partial L}\right| \cdot \delta L + \left|\frac{\partial|Z|}{\partial f}\right| \cdot \delta f$$

$$\left|\frac{\partial|Z|}{\partial V}\right| = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\left(\frac{V}{I}\right)^2+\left(2\pi\cdot f\cdot L\right)^2}}\cdot\frac{2V}{I^2} = \frac{R}{|Z|}\cdot\frac{1}{I} \approx 0.52\,\Omega/\mathrm{V}$$

$$\left|\frac{\partial|Z|}{\partial I}\right| = \frac{1}{2\cdot|Z|}\cdot\frac{2V^2}{I^3} = \frac{R^2}{|Z|}\cdot\frac{1}{I} \approx 13\,\Omega/\mathrm{A}$$

$$\left|\frac{\partial|Z|}{\partial L}\right| = \frac{1}{2\cdot|Z|}\cdot 8\cdot\left(\pi\cdot f\right)^2\cdot L = \frac{4\cdot\left(\pi\cdot f\right)^2\cdot L}{|Z|} \approx 4915\,\Omega/\mathrm{H}$$

$$\left|\frac{\partial|Z|}{\partial f}\right| = \frac{1}{2\cdot|Z|}\cdot 8\cdot\left(\pi\cdot L\right)^2\cdot f = \frac{4\cdot\left(\pi\cdot L\right)^2\cdot f}{|Z|} \approx 0.025\,\Omega/\mathrm{Hz}$$

$$\delta L = 0.05\,\mathrm{mH} = 5\cdot 10^{-5}\ \mathrm{H}$$

$$\delta f = 1\,\mathrm{Hz}$$

Le incertezze assolute delle misure di tensione e corrente sono ottenute come:

$$\delta V = \frac{c_V\cdot P_V}{100} = \frac{1\cdot 100}{100} = 1\,\mathrm{V}$$

$$\delta I = \frac{c_A\cdot P_A}{100} = \frac{0.5\cdot 5}{100} = 0.025\,\mathrm{A}$$

Sostituendo i valori ottenuti nell’espressione dell’incertezza assoluta del modulo dell’impedenza si ottiene:

$$\delta|Z| = 0.52\cdot 1 + 13\cdot 0.025 + 4915\cdot 5\cdot 10^{-5} + 0.025\cdot 1 =$$
$$= 0.52 + 0.325 + 0.24575 + 0.025 \approx 1.1\,\Omega$$

Dichiarazione finale della misura

$$\boxed{|Z| = (40.2 \pm 1.1)\ \Omega}$$

Impiego di voltmetri per tensione continua ed alternata

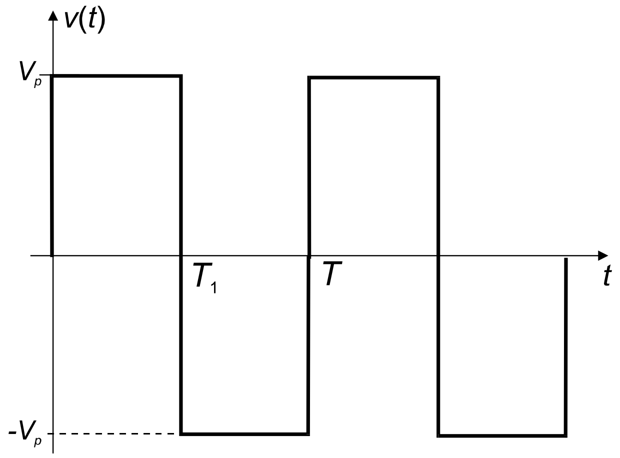
ESERCIZIO 4

Prevedere le indicazioni fornite dai seguenti strumenti

- voltmetro per tensione continua
- voltmetro per tensione alternata a valor medio con raddrizzatore a singola semionda senza condensatore in serie al circuito di ingresso
- voltmetro per tensione alternata a vero valore efficace senza condensatore in serie al circuito di ingresso
- sonda di picco (schema con condensatore in serie e diodo in parallelo) con resistenza di uscita pari a 4.1 MΩ accoppiata ad un voltmetro per tensione continua con resistenza di ingresso pari a 10 MΩ

quando all'ingresso è applicato il segnale mostrato in figura, che è caratterizzato dai seguenti parametri:

- T_1 = 0.5 T ; (T = 1 ms)
- V_p = 10 V



Voltmetro per tensione continua

Visto il contenuto in frequenza del segnale in misura (la componente fondamentale si trova ad 1 kHz), Il voltmetro per tensione continua fornisce un'indicazione m_{DC} che è pari al valore medio (o componente continua) del segnale applicato al suo ingresso, ossia:

$$m_{DC} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T v(t)dt = \frac{1}{T} \cdot \left[V_p \cdot T_1 - V_p \cdot (T - T_1)\right] = \frac{1}{T} \cdot \left(V_p \cdot \frac{T}{2} - V_p \cdot T + V_p \cdot \frac{T}{2}\right) = 0 \text{ V}$$

Questo risultato poteva essere facilmente previsto osservando il segnale in misura, che risulta simmetrico sia sull'asse dell'ampiezza sia su quello del tempo, per cui l'area della parte positiva del segnale è uguale all'area della parte negativa.

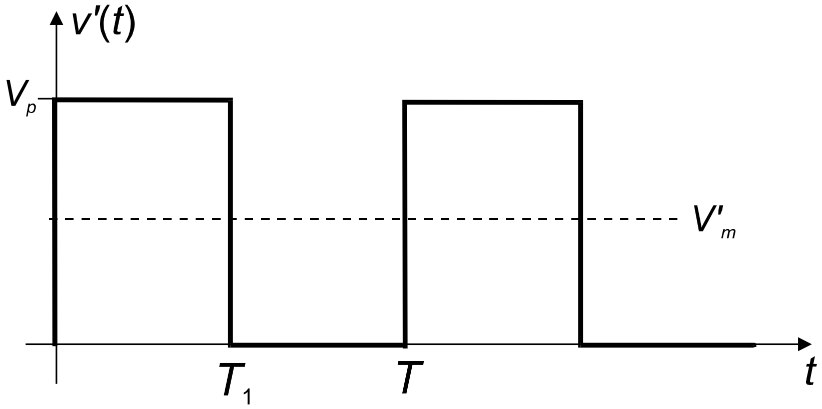
Voltmetro per AC a singola semionda senza condensatore

Questo tipo di voltmetro fornisce un'indicazione m_{AC} proporzionale al valore medio V'_m del segnale raddrizzato secondo un'opportuna costante di taratura:

$$m_{AC} = K_t \cdot V'_m$$

La costante di taratura K_t è calcolata in modo che l'indicazione del voltmetro coincida con il valore efficace di un segnale con forma d'onda sinusoidale e, nel caso di raddrizzatore a singola semionda, vale circa 2.22 (si veda la lezione 12 del corso).

Nel caso in esame, il segnale presente all'uscita del raddrizzatore a singola semionda, indicato con il simbolo $v'(t)$, è mostrato nella figura seguente:



da cui segue che l'indicazione del voltmetro è pari a:

$$m_{AC} = 2.22 \cdot V'_m = 2.22 \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^{T/2} v'(t)dt = 2.22 \cdot \frac{1}{T} \cdot V_p \cdot \int_0^{T/2} dt = 2.22 \cdot \frac{1}{T} \cdot V_p \cdot \frac{T}{2}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene l'indicazione attesa dal voltmetro:

$$m_{AC} = 2.22 \cdot \frac{V_p}{2} = 2.22 \cdot \frac{10}{2} = 11.1 \text{ V}$$

Voltmetro a vero valore efficace senza condensatore

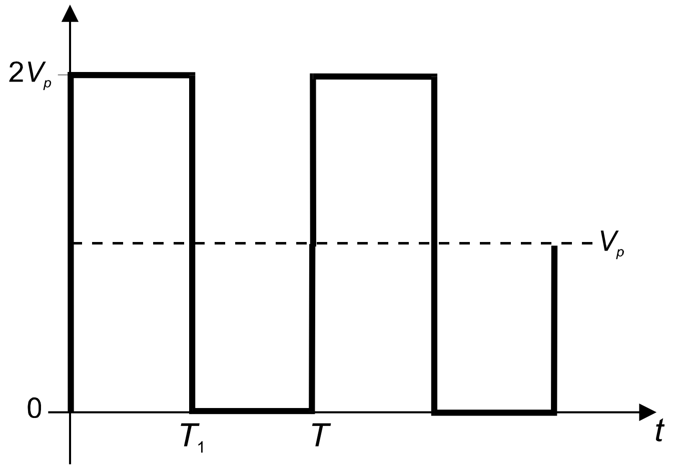
L'indicazione di un voltmetro a vero valore efficace coincide con il valore efficace del segnale in misura, indipendentemente dalla sua forma d'onda. Nel caso del segnale con forma d'onda quadra, l'indicazione sarà quindi pari a:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T v^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T V_p^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot V_p^2 \cdot T} = V_p = 10 \text{ V}$$

Il risultato ottenuto indica quindi che il valore efficace di un segnale con forma d'onda quadra che risulta simmetrico in ampiezza è uguale al valore di picco.

Sonda di picco accoppiata ad un voltmetro per tensione continua

La sonda di picco basata sullo schema con condensatore in serie e diodo in parallelo si comporta come fissatore a zero (si veda la lezione 12 del corso), per cui il segnale applicato all'ingresso del voltmetro per tensione continua è quello mostrato nella figura seguente:



che è caratterizzato da un valore medio pari al valore di picco V_p.

Per prevedere l'indicazione fornita dal voltmetro per tensione continua, si deve tenere conto dell'effetto del partitore di tensione costituito dalla resistenza di uscita R_{OUT} della sonda e dalla resistenza di ingresso R_{IN} del voltmetro, per cui l'indicazione attesa m_S può essere stimata come:

$$m_S = V_p \cdot \frac{R_{IN}}{R_{IN} + R_{OUT}} = 10\ \mathrm{V} \cdot \frac{10\ \mathrm{M\Omega}}{14.1\ \mathrm{M\Omega}} \approx 7.09\ \mathrm{V}$$

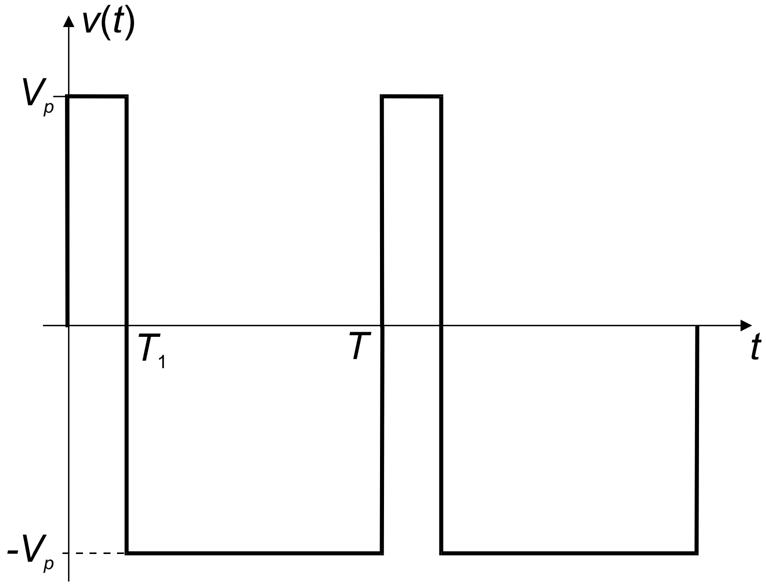
ESERCIZIO 5

Prevedere le indicazioni fornite dai seguenti strumenti

- voltmetro per tensione continua
- voltmetro per tensione alternata a valor medio con raddrizzatore a doppia semionda senza condensatore in serie al circuito di ingresso
- voltmetro per tensione alternata a valor medio con raddrizzatore a doppia semionda con condensatore in serie al circuito di ingresso
- voltmetro per tensione alternata a vero valore efficace con condensatore in serie al circuito di ingresso

quando all'ingresso è applicato il segnale mostrato in figura, che è caratterizzato dai seguenti parametri:

- $T_1 = 0.15\ T$; (T = 1 ms)
- $V_p = 10$ V



Voltmetro per tensione continua

Visto il contenuto in frequenza del segnale in misura (la componente fondamentale si trova ad 1 kHz), Il voltmetro per tensione continua fornisce un'indicazione m_{DC} che è pari al valore medio (o componente continua) del segnale applicato al suo ingresso, ossia:

$$m_{DC} = V_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T v(t)dt = \frac{1}{T} \cdot \left[V_p \cdot T_1 - V_p \cdot (T - T_1)\right] = \frac{V_p}{T} \cdot (2T_1 - T)$$

Ricordando la definizione di *duty cycle*, la relazione precedente può anche essere scritta come:

$$m_{DC} = V_m = V_p \cdot \left(2\frac{T_1}{T} - 1\right) = V_p \cdot (2 \cdot DC - 1)$$

che, nel caso di onda quadra simmetrica in ampiezza e con *duty cycle* del 50% (*DC* = 0.5), fornisce un valore medio nullo.
Sostituendo i valori numerici nell'espressione precedente si ottiene:

$$m_{DC} = V_p \cdot (2 \cdot DC - 1) = 10 \cdot \left(2 \cdot \frac{0.15 \cdot T}{T} - 1 \right) = -7 \text{ V}$$

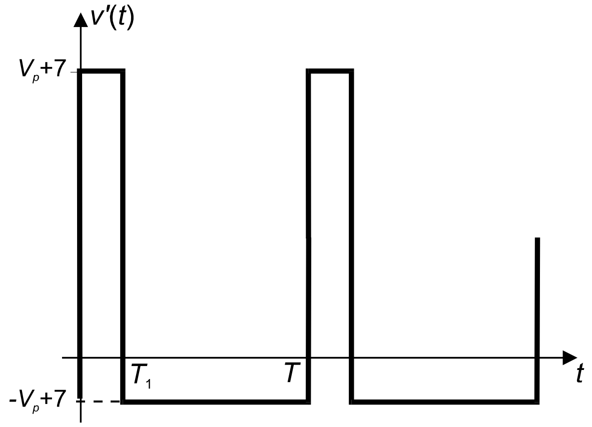
Voltmetro per AC a doppia semionda senza condensatore

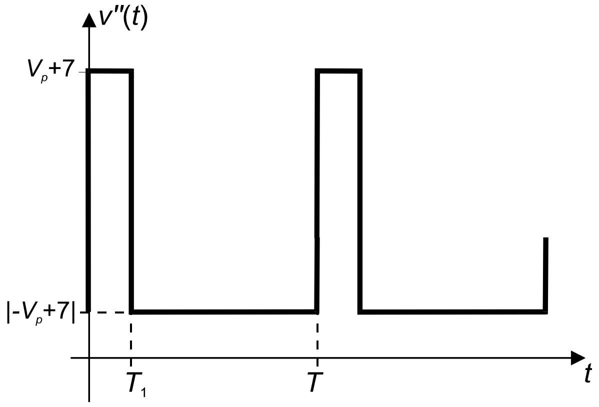
In questo caso, visto che il circuito di ingresso del voltmetro non comprende un condensatore in serie, il raddrizzatore a doppia semionda restituisce una tensione che, nel caso ideale, è un valore continuo pari a V_p. Ricordando inoltre che il voltmetro è tarato per indicare il valore efficace di un segnale sinusoidale, la sua indicazione m_{AC1} è pari al valore medio del segnale raddrizzato moltiplicato per 1.11, ossia:

$$m_{AC1} = 1.11 \cdot V_p = 1.11 \cdot 10 = 11.1 \text{ V}$$

Voltmetro per AC a doppia semionda con condensatore

Il condensatore in serie al circuito di ingresso elimina la componente continua del segnale, che vale –7 V, per cui il segnale "visto" all'ingresso del raddrizzatore a doppia semionda, indicato con il simbolo $v'(t)$, è quello mostrato in figura, dove è anche mostrato il segnale presente all'uscita del raddrizzatore, indicato con il simbolo $v''(t)$.





Il valore medio del segnale raddrizzato può essere calcolato come:

$$V''_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T v''(t) dt = \frac{1}{T} \cdot \left[(V_p + 7) \cdot T_1 + \left| -V_p + 7 \right| \cdot (T - T_1) \right]$$

Ricordando inoltre che il voltmetro fornisce un'indicazione m_{AC2} pari al valore medio del segnale raddrizzato per 1.11, sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$m_{AC2} = 1.11 \cdot \frac{1}{T} \cdot [17 \cdot T_1 + 3 \cdot (T - T_1)] = 1.11 \cdot \left(14 \cdot \frac{T_1}{T} + 3 \right) \approx 5.66 \text{ V}$$

Voltmetro a vero valore efficace con condensatore

Per stimare l'indicazione fornita da questo tipo di voltmetro, è utile osservare che il condensatore in serie al circuito di ingresso elimina la componente continua, per cui lo strumento fornirà il valore efficace della sola componente alternata.
Risulta utile ricavare una regola di carattere generale, che semplifica la soluzione di problemi simili. Il generico segnale $v(t)$ può sempre essere espresso nella seguente forma:

$$v(t) = V_{DC} + v_{AC}(t)$$

dove V_{DC} è la componente continua del segnale e $v_{AC}(t)$ è la componente alternata. Il valore efficace V_{eff} del segnale $v(t)$ può essere ricavato come:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T v^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T [V_{DC} + v_{AC}(t)]^2 dt}$$

Se, per semplicità, si sviluppa solo l'integrale definito presente nella precedente espressione, si ottiene:

$$\int_0^T [V_{DC} + v_{AC}(t)]^2 dt = \int_0^T [V_{DC}^2 + 2V_{DC} v_{AC}(t) + v_{AC}^2(t)]dt$$

che, per la proprietà di linearità dell'integrale, può essere anche scritto come:

$$\int_0^T [V_{DC} + v_{AC}(t)]^2 dt = V_{DC}^2 \int_0^T dt + 2V_{DC} \int_0^T v_{AC}(t)dt + \int_0^T v_{AC}^2(t)dt$$

Osservando inoltre che la componente alternata $v_{AC}(t)$ ha valore medio nullo, segue che il secondo integrale nella relazione precedente vale zero, per cui si ottiene:

$$\int_0^T [V_{DC} + v_{AC}(t)]^2 dt = V_{DC}^2 \cdot T + \int_0^T v_{AC}^2(t)dt = V_{DC}^2 \cdot T + V_{effAC}^2 \cdot T$$

dove V_{effAC} rappresenta il valore efficace della sola componente alternata $v_{AC}(t)$ del segnale.
Sostituendo il risultato ottenuto nell'espressione del valore efficace V_{eff} del segnale $v(t)$, si ricava infine la seguente relazione:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \left(V_{DC}^2 \cdot T + V_{effAC}^2 \cdot T\right)} = \sqrt{V_{DC}^2 + V_{effAC}^2}$$

Applicando il risultato ottenuto al caso in esame, l'indicazione del voltmetro a vero valore efficace con condensatore in serie al circuito di ingresso è pari al valore efficace della sola componente alternata, ossia a V_{effAC}, che può essere ricavato come:

$$V_{effAC} = \sqrt{V_{eff}^2 - V_{DC}^2}$$

Ricordando che il valore efficace di un'onda quadra simmetrica in ampiezza è uguale al suo valore di picco, si ottiene infine:

$$V_{effAC} = \sqrt{V_p^2 - V_{DC}^2} = \sqrt{10^2 - (-7)^2} = \sqrt{100 - 49} = \sqrt{51} \approx 7.14 \text{ V}$$

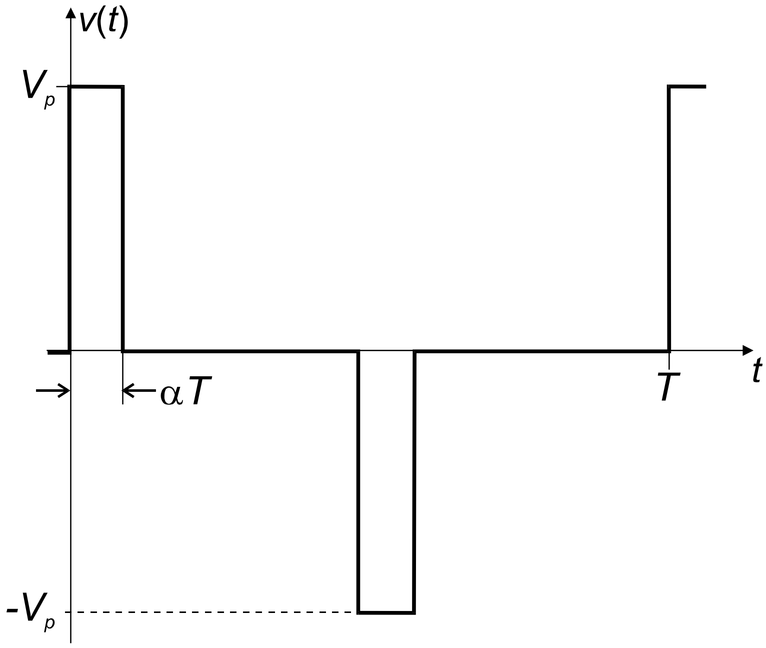
ESERCIZIO 6

Un generatore di funzioni produce un segnale della forma indicata in figura, ma è stata persa la corrispondenza tra la posizione delle manopole di regolazione ed i valori di α e V_p.

I valori di α e V_p possono essere determinati ricordando come funzionano i voltmetri in AC ed impiegando un voltmetro a vero valore efficace ed un voltmetro di picco (schema con condensatore in serie e diodo in parallelo) per misurare il segnale, ottenendo le seguenti indicazioni:

- dal voltmetro a vero valore efficace: 1.581 V
- dal voltmetro di picco: 1.768 V

Sapendo che l'incertezza garantita dal voltmetro a vero valore efficace è pari a 5 mV e che l'incertezza del voltmetro di picco è espressa mediante la seguente formula binomia: 0.5% della lettura + 5 mV, stimare le misure di α e V_p.



Modello di misura

Il voltmetro a vero valore efficace fornisce un'indicazione m_{eff} che è pari al valore efficace del segnale, indipendentemente dalla sua forma d'onda, per cui si ha che:

$$V_{eff} = m_{eff}$$

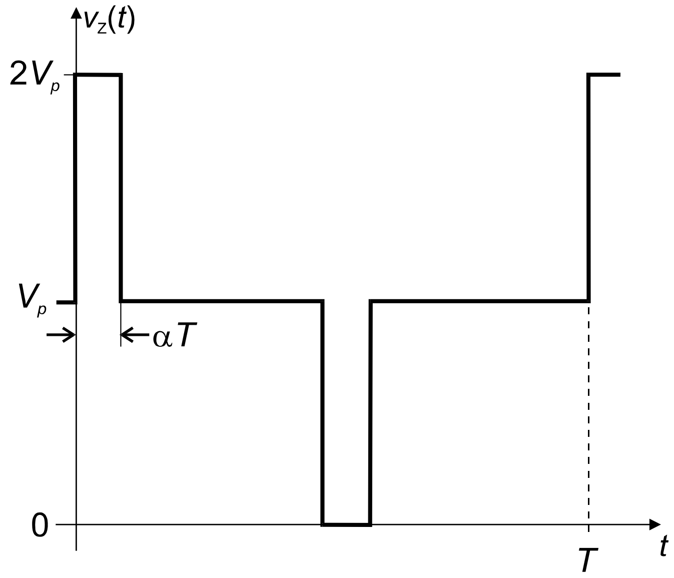
Applicando la definizione di valore efficace al segnale mostrato in figura si ottiene:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T v^2(t)dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot 2 \cdot \int_0^{\alpha T} V_p^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \cdot V_p^2 \cdot \alpha T} = \sqrt{2\alpha V_p^2} = V_p \cdot \sqrt{2\alpha}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato osservando che per α = 0 si ha valore efficace nullo, mentre per α = 0.5 (onda quadra simmetrica con *duty cycle* del 50%) si ha un valore efficace pari al valore di picco.
A questo punto, uguagliando le ultime due relazioni si ottiene:

$$m_{eff} = V_p \cdot \sqrt{2\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{m_{eff}}{V_p}\right)^2$$

Per quanto riguarda il voltmetro di picco, si ricorda che lo schema con condensatore in serie e diodo in parallelo si comporta come fissatore a zero (si veda la lezione 12 del corso), per cui l'indicazione di questo strumento è pari al valore medio del segnale fissato a zero, che è mostrato nella figura seguente:



Essendo inoltre il voltmetro tarato in modo da indicare il valore efficace di un segnale sinusoidale, la sua indicazione m_{pk} è uguale al valore medio del segnale fissato a zero diviso la radice quadrata di due, ossia:

$$m_{pk} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Il valore medio V_m del segnale fissato a zero, che è indicato con il simbolo $v_Z(t)$, è ottenuto come:

$$V_m = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T v_Z(t)dt = \frac{1}{T} \cdot \left[2V_p \cdot \alpha T + V_p \cdot (T - 2\alpha T)\right] = \frac{1}{T} \cdot V_p \cdot T = V_p$$

per cui, sostituendo il valore ottenuto per V_m nella relazione precedente si ottiene:

$$m_{pk} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} \Rightarrow V_p = m_{pk} \cdot \sqrt{2}$$

Sostituendo infine l'espressione di V_p nella relazione che esprime il parametro α si ottiene:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{m_{eff}}{m_{pk} \cdot \sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{m_{eff}}{m_{pk}} \right)^2$$

Riassumendo, il modello di misura che lega i parametri α e V_p alle grandezze m_{eff} ed m_{pk} fornite dai due voltmetri può essere espresso mediante le seguenti relazioni:

$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{m_{eff}}{m_{pk}} \right)^2$$

$$V_p = m_{pk} \cdot \sqrt{2}$$

Stima del misurando

Sostituendo le indicazioni del voltmetro a vero valore efficace e del voltmetro di picco nel modello di misura, si ottiene:

$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1.581}{1.768} \right)^2 \approx 0.1999$$

$$V_p = 1.768 \cdot \sqrt{2} \approx 2.500 \text{ V}$$

Stima dell'incertezza

A partire dal modello di misura ottenuto ed applicando le regole per la propagazione dell'incertezza descritte nella lezione 4 del corso, le incertezze relative delle due grandezze sono ottenute come:

$$\varepsilon\alpha = 2 \cdot \left(\varepsilon m_{eff} + \varepsilon m_{pk} \right); \quad \varepsilon V_p = \varepsilon m_{pk}$$

dove le incertezze relative delle indicazioni dei due voltmetri sono stimate con le seguenti relazioni:

$$\varepsilon m_{eff} = \frac{\delta m_{eff}}{m_{eff}} = \frac{0.005 \text{ V}}{1.581 \text{ V}} \approx 0.0032$$

$$\varepsilon m_{pk} = \frac{\delta m_{pk}}{m_{pk}} = \frac{\left(0.005 \cdot 1.768 + 0.005\right) \text{V}}{1.768 \text{ V}} = \frac{0.01384 \text{ V}}{1.768 \text{ V}} \approx 0.0078$$

Sostituendo i valori ottenuti nelle relazioni precedenti si ottiene infine:

$$\varepsilon\alpha = 2 \cdot \left(0.0032 + 0.0078\right) = 0.022 \Rightarrow \delta\alpha = \alpha \cdot 0.022 = 0.1999 \cdot 0.022 \approx 0.004$$

$$\varepsilon V_p = 0.0078 \Rightarrow \delta V_p = V_p \cdot 0.0078 = 2.5 \cdot 0.0078 \approx 0.02 \text{ V}$$

Dichiarazione finale della misura

$$\boxed{\begin{array}{c} V_p = (2.50 \pm 0.02) \text{ V} \\ \alpha = 0.200 \pm 0.004 \end{array}}$$

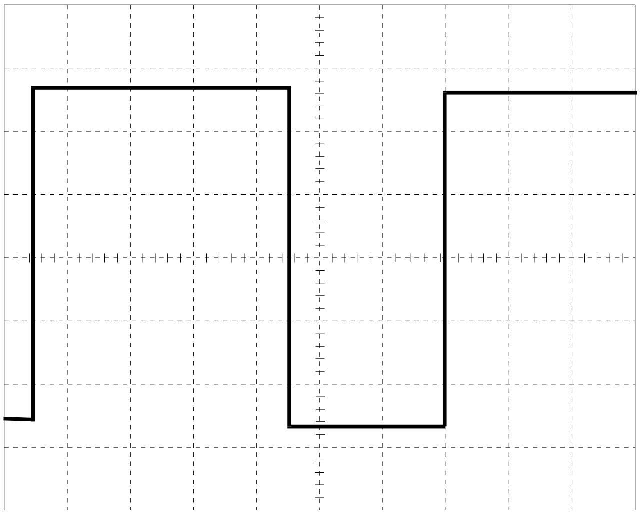
Impiego di oscilloscopi

ESERCIZIO 7

Stimare le misure di ampiezza, periodo e duty-cycle del segnale ad onda quadra mostrato in figura, che è visualizzato sullo schermo di un oscilloscopio così configurato:

- coefficiente di deflessione verticale: $K_Y = 1$ V/div
- coefficiente di deflessione orizzontale: $K_X = 100$ μs/div

L'incertezza relativa percentuale dei fattori di deflessione verticale ed orizzontale dell'oscilloscopio è pari rispettivamente al 3% ed allo 0.01%.



Premessa

Le misurazioni di ampiezze e di intervalli di tempo eseguite con un oscilloscopio possono essere ricondotte allo stesso metodo: sulla scala tracciata sullo schermo si rileva la deflessione subita dal pennello elettronico, che è espressa in divisioni o div, che è convertita in tensione o in tempo attraverso le costanti di taratura dello strumento, che sono solitamente dette coefficienti di deflessione verticale (V/div) ed orizzontale (s/div). Indicando quindi con *L* la generica lettura rilevata e con *K* il coefficiente di deflessione, la stima del misurando è ottenuta come:

$$m = L \cdot K$$

Nel caso in cui si vogliano invece misurare rapporti di ampiezze o di intervalli di tempo, si può ricorrere a due tecniche alternative.
La prima tecnica consiste nel rilevare le due ampiezze o i due intervalli di tempo m_1 ed m_2 con il metodo sopra descritto impiegando due diversi coefficienti di deflessione K_1 e K_2, per cui la grandezza rapporto *R* è ottenuta come:

$$R = \frac{m_1}{m_2} = \frac{L_1 \cdot K_1}{L_2 \cdot K_2}$$

La seconda tecnica prevede invece di rilevare le due letture in corrispondenza dello stesso coefficiente di deflessione *K*, per cui la grandezza rapporto è stimata con la relazione seguente:

$$R = \frac{m_1}{m_2} = \frac{L_1 \cdot K}{L_2 \cdot K} = \frac{L_1}{L_2}$$

ossia come rapporto tra le due letture. In questo modo, se si considera trascurabile il contributo di incertezza legato alla non linearità dello strumento, gli unici contributi di incertezza da considerare sono quelli legati alla lettura della traccia sullo schermo dell'oscilloscopio.

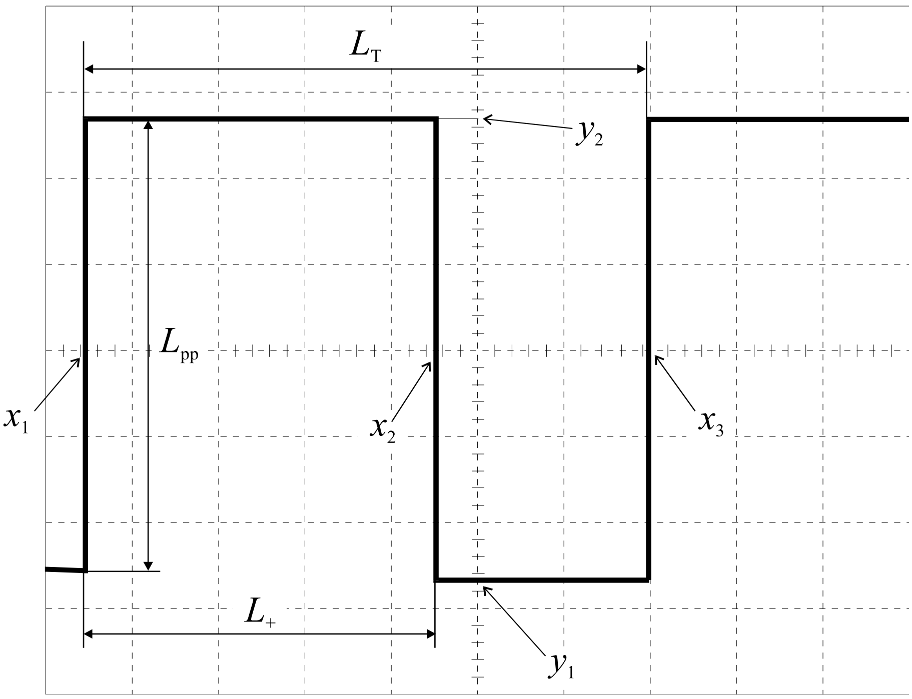
La tecnica impiegata deve essere scelta cercando di minimizzare l'incertezza complessiva, per cui si dovrà valutare di volta in volta se conviene includere l'incertezza strumentale e minimizzare quella di lettura con un'opportuna scelta dei due coefficienti di deflessione K_1 e K_2, oppure adottare lo stesso coefficiente di deflessione, evitando così il contributo di incertezza strumentale ma rischiando di ottenere incertezze di lettura molto alte, soprattutto nel caso in cui una delle due lettura sia molto piccola (inferiore ad 1 div).

Modello di misura

L'ampiezza picco-picco V_{pp}, il periodo T ed il duty-cycle DC del segnale visualizzato sullo schermo dell'oscilloscopio sono ottenuti rispettivamente come:

$$V_{pp} = L_{pp} \cdot K_Y ; \quad T = L_T \cdot K_X ; \quad DC = \frac{L_+}{L_T}$$

dove i simboli usati sono quelli mostrati nella seguente figura:



Sempre con riferimento alla figura, le diverse letture sono ottenute come:

$$L_{pp} = y_2 - y_1; \quad L_T = x_3 - x_1; \quad L_+ = x_2 - x_1$$

Segue infine che il modello di misura per le grandezze richieste può essere espresso come:

$$V_{pp} = (y_2 - y_1) \cdot K_Y ; \quad T = (x_3 - x_1) \cdot K_X ; \quad DC = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

Stima del misurando

Le diverse grandezze rilevate sullo schermo dell'oscilloscopio sono stimate con una risoluzione che dipende principalmente dall'unità di formato della scala e dallo spessore della traccia visualizzata.
La scala dell'oscilloscopio è solitamente suddivisa in dieci divisioni sull'asse orizzontale e in otto divisioni sull'asse verticale. Ciascuna divisione è suddivisa in cinque parti, per cui l'unità di formato è pari a 0.2 div.
Nella maggior parte delle applicazioni, lo spessore della traccia è analogo a quello mostrato nella figura, per cui si riescono ad eseguire letture con una risoluzione pari almeno a metà dell'unità di formato, ossia 0.1 div. In questo caso, l'incertezza di lettura massima è pari, in valore assoluto, a metà della risoluzione. Segue quindi che, volendo propagare l'incertezza con il modello deterministico, il contributo di incertezza da considerare è quello corrispondente al caso peggiore, ossia 0.05 div.

Osservando la figura che riporta lo schermo dell'oscilloscopio, si rilevano le seguenti letture:

$$x_1 = (0.4 \pm 0.05)\ \mathrm{div};\quad x_2 = (4.5 \pm 0.05)\ \mathrm{div};\quad x_3 = (7.0 \pm 0.05)\ \mathrm{div}$$
$$y_1 = (-2.7 \pm 0.05)\ \mathrm{div};\quad y_2 = (2.7 \pm 0.05)\ \mathrm{div}$$

da cui seguono le seguenti stime delle grandezze in misura:

$$V_{pp} = 5.4\ \mathrm{div} \cdot 1\ \mathrm{V/div} = 5.4\ \ \mathrm{V}$$
$$T = 6.6\ \mathrm{div} \cdot 100\ \mu\mathrm{s/div} = 660\ \ \mu\mathrm{s}$$
$$DC = \frac{4.1}{6.6} \approx 0.62$$

Stima dell'incertezza

L'ampiezza ed il periodo del segnale in misura possono essere espressi come:

$$V_{pp} = L_{pp} \cdot K_Y;\quad T = L_T \cdot K_X$$

per cui, applicando le regole per la propagazione dell'incertezza, le incertezze relative delle due grandezze sono ottenute come:

$$\varepsilon V_{pp} = \varepsilon L_{pp} + \varepsilon K_Y;\quad \varepsilon T = \varepsilon L_T + \varepsilon K_X$$

dove le incertezze relative dei fattori di deflessione verticale ed orizzontale sono fornite dal costruttore dell'oscilloscopio e valgono rispettivamente 0.03 e 0.0001, mentre le incertezze relative di lettura delle grandezze L_{pp} ed L_T si ricavano come:

$$\varepsilon L_{pp} = \frac{\delta L_{pp}}{L_{pp}} = \frac{\delta y_1 + \delta y_2}{y_2 - y_1} = \frac{0.1}{5.4} \approx 0.019$$
$$\varepsilon L_T = \frac{\delta L_T}{L_T} = \frac{\delta x_1 + \delta x_3}{x_3 - x_1} = \frac{0.1}{6.6} \approx 0.015$$

da cui segue che:

$$\varepsilon V_{pp} = 0.019 + 0.03 = 0.049 \Rightarrow \delta V_{pp} = 0.049 \cdot 5.4\ \mathrm{V} \approx 0.25\ \mathrm{V}$$
$$\varepsilon T = 0.015 + 0.0001 = 0.0151 \Rightarrow \delta T = 0.0151 \cdot 660\ \ \mu s \approx 10\ \ \mu s$$

Si osservi che l'ampiezza del segnale potrebbe essere stimata in termini di valore di picco invece che come valore picco-picco, ossia come:

$$V_p = L_p \cdot K_Y = (y_2 - y_0) \cdot K_Y$$

dove y_0 vale nominalmente zero.
In questo modo, la misura del valore di picco risulterebbe tuttavia affetta da un'incertezza maggiore, in quanto l'incertezza relativa di lettura risulterebbe doppia:

$$\varepsilon L_p = \frac{\delta L_p}{L_p} = \frac{\delta y_2 + \delta y_0}{y_2 - y_0} = \frac{0.1}{2.7} \approx 0.038$$

La lettura è infatti metà della precedente, mentre l'incertezza assoluta di lettura è la stessa, dovendo considerare sia l'incertezza con cui si rileva la lettura y_2 sia l'incertezza con cui si allinea la traccia sull'asse di riferimento della scala quando il selettore di ingresso dell'oscilloscopio è posto nella posizione GND.

Per quanto riguarda il duty-cycle, la stima dell'incertezza è eseguita applicando la regola generale di propagazione, ossia:

$$\delta DC = \left|\frac{\partial DC}{\partial x_1}\right| \cdot \delta x_1 + \left|\frac{\partial DC}{\partial x_2}\right| \cdot \delta x_2 + \left|\frac{\partial DC}{\partial x_3}\right| \cdot \delta x_3$$

$$\left|\frac{\partial DC}{\partial x_1}\right| = \left|\frac{-1 \cdot (x_3 - x_1) + 1 \cdot (x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)^2}\right| = \frac{|x_2 - x_3|}{(x_3 - x_1)^2} \approx 0.057 \ \frac{1}{\text{div}}$$

$$\left|\frac{\partial DC}{\partial x_2}\right| = \frac{1}{x_3 - x_1} \approx 0.15 \ \frac{1}{\text{div}}$$

$$\left|\frac{\partial DC}{\partial x_3}\right| = \left|\frac{-1 \cdot (x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)^2}\right| = \frac{|x_1 - x_2|}{(x_3 - x_1)^2} \approx 0.094 \ \frac{1}{\text{div}}$$

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \delta x_3 = 0.05 \ \text{div}$$

Sostituendo i valori numerici nell'espressione dell'incertezza assoluta δDC si ottiene:

$$\delta DC = 0.00285 + 0.0075 + 0.0047 \approx 0.015$$

Dichiarazione finale della misura

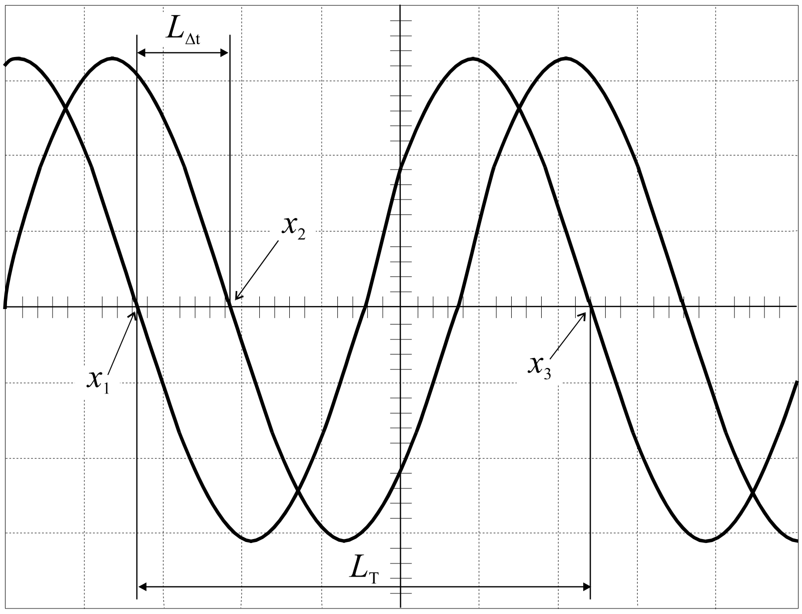
V_{pp} = (5.4 ± 0.25) V

T = (660 ± 10) μs

DC = 0.62 ± 0.015

ESERCIZIO 8

I due canali di uscita di un generatore di segnali con forma d'onda sinusoidale sono collegati agli ingressi di un oscilloscopio, che mostra le seguenti tracce:



Stimare le misure di periodo e sfasamento tra i due segnali, sapendo che il coefficiente di deflessione orizzontale K_X è impostato sul valore 50 μs/div e che il costruttore dichiara un'incertezza relativa percentuale dello 0.01%.

Modello di misura

Con riferimento ai simboli indicati nella figura, il periodo T e lo sfasamento φ tra i due segnali visualizzati sullo schermo dell'oscilloscopio possono essere espressi come:

$$T = L_T \cdot K_X = (x_3 - x_1) \cdot K_X$$

$$\varphi = 360° \cdot \frac{\Delta t}{T} = 360° \cdot \frac{L_{\Delta t} \cdot K_X}{L_T \cdot K_X} = 360° \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$$

Stima del misurando

Nel caso in esame, si riescono ad eseguire letture con una risoluzione pari a 0.1 div, per cui le grandezze stimate sullo schermo dell'oscilloscopio possono essere così espresse:

$$x_1 = (1.7 \pm 0.05)\,\text{div}; \quad x_2 = (2.9 \pm 0.05)\,\text{div}; \quad x_3 = (7.4 \pm 0.05)\,\text{div}$$

da cui segue:

$$T = (7.4 - 1.7)\,\text{div} \cdot 50\ \mu\text{s}/\text{div} = 285\ \mu\text{s}$$

$$\varphi = 360° \cdot \frac{2.9 - 1.7}{7.4 - 1.7} \approx 75.8°$$

Stima dell'incertezza

Il periodo del segnale in misura può essere espresso come:

$$T = L_T \cdot K_X$$

per cui, applicando le regole per la propagazione dell'incertezza descritte nella lezione 4 del corso, la corrispondente incertezza relativa è ottenuta come:

$$\varepsilon T = \varepsilon L_T + \varepsilon K_X$$

L'incertezza relativa del fattore di deflessione orizzontale è fornita dal costruttore dell'oscilloscopio e vale 0.0001, mentre l'incertezza relativa di lettura della grandezza L_T si ricava come:

$$\varepsilon L_T = \frac{\delta L_T}{L_T} = \frac{\delta x_1 + \delta x_3}{x_3 - x_1} = \frac{0.1}{5.7} \approx 0.018$$

da cui segue che:

$$\varepsilon T = 0.018 + 0.0001 = 0.0181 \Rightarrow \delta T = 0.0181 \cdot 285\ \mu s \approx 5.2\ \mu s$$

Per quanto riguarda lo sfasamento, si applica la regola generale di propagazione, ottenendo:

$$\delta\varphi = \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right| \cdot \delta x_1 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right| \cdot \delta x_2 + \left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right| \cdot \delta x_3$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right| = 360° \cdot \frac{|x_2 - x_3|}{(x_3 - x_1)^2} = 360° \cdot \frac{4.5}{32.49} \approx 50\ {}^{\circ}\!/\text{div}$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right| = 360° \cdot \frac{1}{x_3 - x_1} = 360° \cdot \frac{1}{5.7} \approx 63\ {}^{\circ}\!/\text{div}$$

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right| = 360° \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{(x_3 - x_1)^2} = 360° \cdot \frac{1.2}{32.49} \approx 13\ {}^{\circ}\!/\text{div}$$

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \delta x_3 = 0.05\,\text{div}$$

Sostituendo i valori numerici nell'espressione dell'incertezza assoluta $\delta\varphi$ si ottiene:

$$\delta\varphi = 2.5 + 3.15 + 0.65 \approx 6°$$

Dichiarazione finale della misura

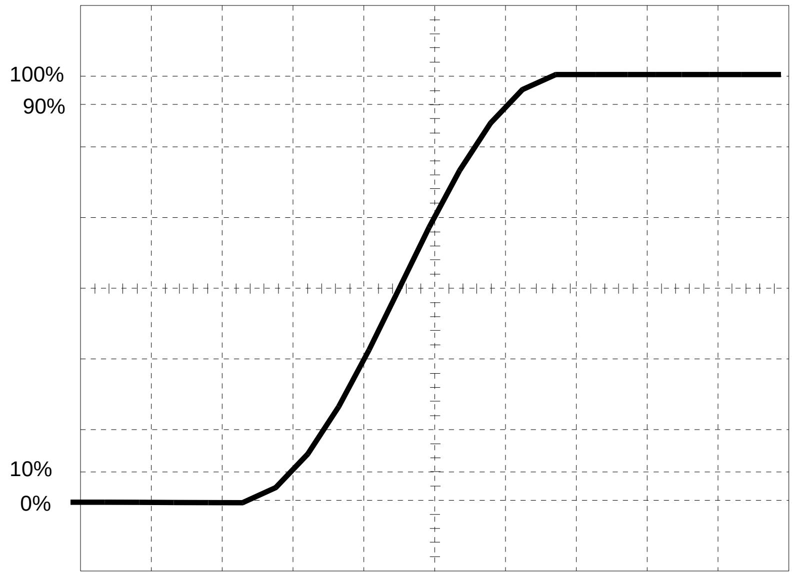
$$\boxed{\begin{array}{c} T = (285.0 \pm 5.2)\ \mu\text{s} \\ \varphi = (76 \pm 6)\ ° \end{array}}$$

ESERCIZIO 9

Si vuole misurare il tempo di salita di un segnale fornito da un generatore avente resistenza interna R_G = 50 Ω ± 5% con un oscilloscopio con le seguenti caratteristiche:

R_{IN} = 1 MΩ ± 1%; C_{IN} = 20 pF ± 5%; B = 200 MHz ± 5%

Collegando il generatore all'oscilloscopio mediante un cavo coassiale avente capacità distribuita C_d pari a 100 pF ± 5% e impostando il fattore di deflessione orizzontale al valore K_X = 10 ns/div (incertezza ± 0.01%), lo schermo dell'oscilloscopio visualizza l'immagine riportata in figura:



Stimare la misura del tempo di salita t_X del segnale.

Modello di misura

Il tempo di salita t_s del segnale visualizzato sullo schermo dell'oscilloscopio può essere ottenuto mediante la seguente relazione:

$$t_S = L_{ts} \cdot K_X$$

dove L_{ts} è la lettura, sull'asse orizzontale, dell'intervallo compreso tra gli attraversamenti del segnale per i livelli corrispondenti al 10% ed al 90% del valore di regime, mentre K_X è il fattore di deflessione orizzontale. Dall'immagine riprodotta sullo schermo dell'oscilloscopio si può stimare una lettura pari a 3 divisioni con un'incertezza di lettura di 0.1 divisioni, da cui segue che:

$$t_S = 3\,\text{div} \cdot 10\,\text{ns/div} = 30\,\text{ns}$$

Si ricorda tuttavia che la banda passante limitata dell'oscilloscopio e del circuito di misura introduce un effetto sistematico nella misura di tempi di salita, che può essere espresso mediante il seguente modello approssimato:

$$t_S = \sqrt{t_x^2 + t_{SO}^2 + t_{SIN}^2}$$

dove t_x è il tempo di salita del segnale in misura, t_{SO} è il tempo di salita proprio dell'oscilloscopio e t_{SIN} è il tempo di salita del circuito di misura.

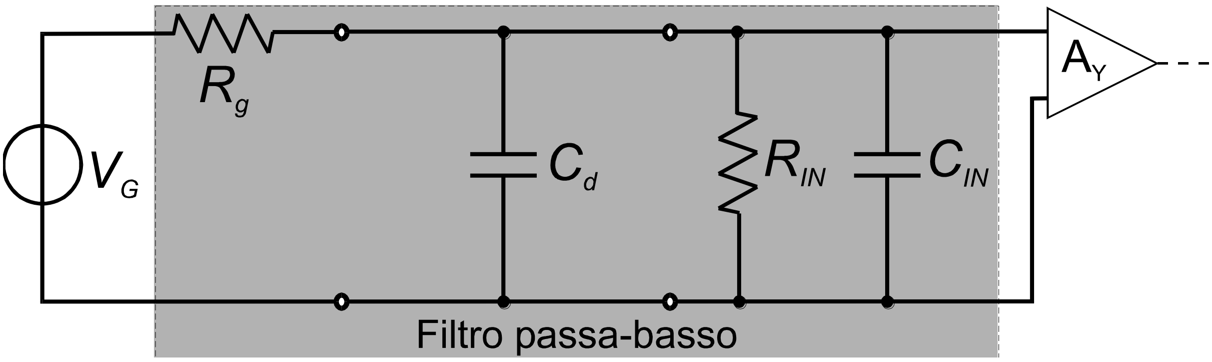
Per quanto riguarda l'oscilloscopio, la sua risposta in frequenza è assimilabile ad un filtro passa-basso del primo ordine con frequenza di taglio pari alla sua banda passante B, per cui il tempo di salita t_{SO} può essere ottenuto come:

$$t_{SO} = \frac{0.35}{B} = \frac{0.35}{2 \cdot 10^8} = 1.75 \text{ ns}$$

Osservando il circuito di misura mostrato in figura, si nota che la resistenza di uscita del generatore, la capacità del cavo coassiale e l'impedenza di ingresso dell'oscilloscopio formano un filtro passa-basso, la cui frequenza di taglio può essere espressa come:

$$f_t = \frac{1}{2\pi \cdot (R_G // R_{IN}) \cdot (C_d + C_{IN})} \approx \frac{1}{2\pi \cdot R_G \cdot (C_d + C_{IN})}$$

dove l'approssimazione deriva dal fatto che $R_G << R_{IN}$.



Il tempo di salita del circuito di misura può essere ottenuto come:

$$t_{SIN} = \frac{0.35}{f_t} = 0.35 \cdot 2\pi \cdot R_G \cdot (C_d + C_{IN}) = 0.35 \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 120 \cdot 10^{-12} \approx 13.2 \text{ ns}$$

Il tempo di salita del segnale in misura può essere stimato a partire dalla seguente relazione:

$$t_X = \sqrt{t_S^2 - t_{SO}^2 - t_{SIN}^2} = \sqrt{900 - 3.0625 - 174.24} \approx 26.9 \text{ ns}$$

da cui si ricava l'effetto sistematico espresso in termini relativi percentuali come:

$$\frac{t_S - t_X}{t_X} \cdot 100 = \frac{30 - 26.9}{26.9} \cdot 100 \approx 12 \text{ \%}$$

che risulta superiore all'incertezza strumentale dell'oscilloscopio (0.01%) ed all'incertezza di lettura (circa 3%).

Osservando inoltre che il tempo di salita dell'oscilloscopio produce un effetto trascurabile sulla misura del tempo di salita, segue infine che il modello di misura da impiegare è il seguente:

$$t_X = \sqrt{t_S^2 - t_{SIN}^2} = \sqrt{(L_{ts} \cdot K_X)^2 - [0.35 \cdot 2\pi \cdot R_G \cdot (C_d + C_{IN})]^2}$$

Stima del misurando

Impiegando il modello di misura con i valori numerici disponibili si ottiene:

$$t_X = \sqrt{30^2 - 13.2^2} = \sqrt{900 - 174.24} = \sqrt{725.76} \approx 26.9 \text{ ns}$$

Stima dell'incertezza

$$\delta t_X = \left|\frac{\partial t_X}{\partial L_{ts}}\right| \cdot \delta L_{ts} + \left|\frac{\partial t_X}{\partial K_X}\right| \cdot \delta K_X + \left|\frac{\partial t_X}{\partial R_G}\right| \cdot \delta R_G + \left|\frac{\partial t_X}{\partial C_d}\right| \cdot \delta C_d + \left|\frac{\partial t_X}{\partial C_{IN}}\right| \cdot \delta C_{IN}$$

$$\left|\frac{\partial t_X}{\partial L_{ts}}\right| = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(L_{ts} \cdot K_X)^2 - [0.35 \cdot 2\pi \cdot R_G \cdot (C_d + C_{IN})]^2}} \cdot 2 L_{ts} \cdot K_X^2 = \frac{t_S}{t_X} \cdot K_X \approx 11.2 \text{ ns/div}$$

$$\left|\frac{\partial t_X}{\partial K_X}\right| = \frac{1}{2 \cdot t_X} \cdot 2 K_X \cdot L_{ts}^2 = \frac{t_S}{t_X} \cdot L_{ts} \approx 3.3 \text{ ns/(ns/div)}$$

$$\left|\frac{\partial t_X}{\partial R_G}\right| = \frac{1}{2 \cdot t_X} \cdot [0.35 \cdot 2\pi \cdot (C_d + C_{IN})]^2 \cdot 2 \cdot R_G \approx 1.3 \cdot 10^{-10} \text{ s/}\Omega$$

$$\left|\frac{\partial t_X}{\partial C_d}\right| = \frac{1}{2 \cdot t_X} \cdot (0.35 \cdot 2\pi \cdot R_G)^2 \cdot 2 \cdot (C_d + C_{IN}) \approx 54 \text{ s/F}$$

$$\left|\frac{\partial t_X}{\partial C_{IN}}\right| = \frac{1}{2 \cdot t_X} \cdot (0.35 \cdot 2\pi \cdot R_G)^2 \cdot 2 \cdot (C_d + C_{IN}) \approx 54 \text{ s/F}$$

$$\delta L_{ts} = 0.1 \text{ div}$$

$$\delta K_X = 0.0001 \cdot 10 \text{ ns/div} = 0.001 \text{ ns/div}$$

$$\delta R_G = 0.05 \cdot 50 \ \Omega = 2.5 \ \Omega$$

$$\delta C_d = 0.05 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 5 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

$$\delta C_{IN} = 0.05 \cdot 20 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 1 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

Sostituendo infine i valori ottenuti nell'espressione dell'incertezza assoluta del tempo di salita del segnale in misura si ottiene:

$$\delta t_X = 11.2 \cdot 10^{-9} \cdot 0.1 + 3.3 \cdot 0.2 \cdot 10^{-9} + 1.3 \cdot 10^{-10} \cdot 2.5 + 54 \cdot 5 \cdot 10^{-12} + 54 \cdot 1 \cdot 10^{-12}$$

$$\delta t_X = 1.12 \cdot 10^{-9} + 0.66 \cdot 10^{-9} + 0.325 \cdot 10^{-9} + 0.27 \cdot 10^{-9} + 0.054 \cdot 10^{-9} \approx 2.4 \text{ ns}$$

Dichiarazione finale della misura

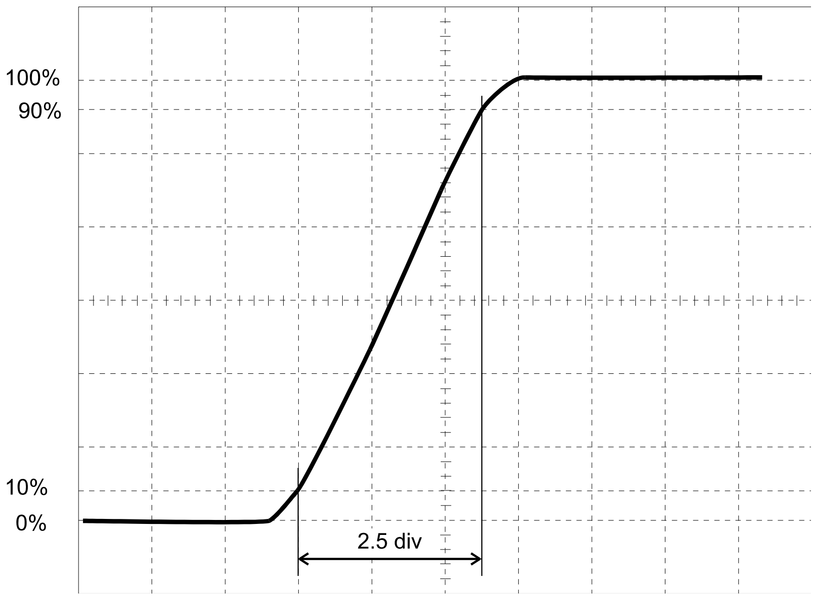
$$\boxed{t_X = (26.9 \pm 2.4) \text{ ns}}$$

ESERCIZIO 10

Si vuole misurare il tempo di salita di un segnale fornito da un generatore avente resistenza interna R_G = 50 Ω ± 5% con un oscilloscopio con le seguenti caratteristiche:

R_{IN} = 1 MΩ ± 1%; C_{IN} = 20 pF ± 5%; B = 200 MHz ± 5%

Il segnale all'uscita del generatore è prelevato mediante una sonda compensata 10:1 avente un cavo coassiale con capacità distribuita C_d pari a 100 pF ± 5%.
Dopo aver compensato la sonda, si imposta il fattore di deflessione orizzontale dell'oscilloscopio al valore K_X = 10 ns/div (incertezza ± 2%) e sullo schermo dello strumento si visualizza la seguente immagine:
Stimare la misura del tempo di salita t_X del segnale.



Modello di misura

Con considerazioni analoghe a quelle dell'esercizio precedente, il tempo di salita t_X del segnale in misura può essere ottenuto dalla relazione:

$$t_X = \sqrt{t_S^2 - t_{SO}^2 - t_{SIN}^2}$$

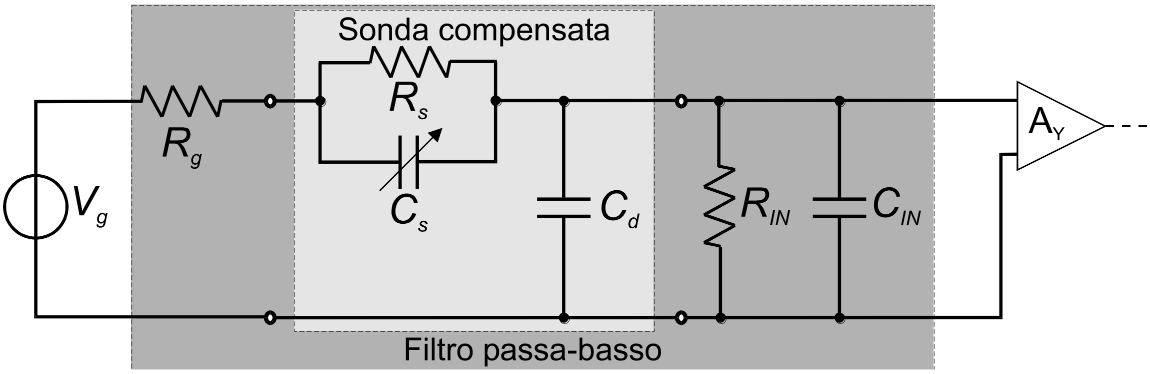
dove t_S è il tempo di salita visualizzato sullo schermo dell'oscilloscopio, che vale:

$$t_S = L_{ts} \cdot K_X = 2.5 \text{ div} \cdot 10 \text{ ns/div} = 25 \text{ ns}$$

mentre t_{SO} è il tempo di salita proprio dell'oscilloscopio, che vale:

$$t_{SO} = \frac{0.35}{B} = \frac{0.35}{2 \cdot 10^8} = 1.75 \text{ ns}$$

Il termine t_{SIN} è il tempo di salita del circuito di misura realizzato all'ingresso dell'oscilloscopio, che può essere ricavato a partire dal circuito mostrato in figura.



La sonda compensata, costituita dal resistore R_S e dal condensatore C_S collegati in parallelo e posti in serie al circuito di misura, realizza un partitore compensato insieme all'impedenza di ingresso dell'oscilloscopio ed alla capacità distribuita del cavo della sonda. In condizioni di compensazione vale la relazione seguente:

$$R_S \cdot C_S = R_{IN} \cdot \left(C_d + C_{IN}\right)$$

Per una sonda compensata 10:1 valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$R_S = 9 \cdot R_{IN}; \quad C_S = \frac{1}{9} \cdot \left(C_d + C_{IN}\right)$$

La resistenza di uscita del generatore, la sonda compensata e l'impedenza di ingresso dell'oscilloscopio formano un filtro passa-basso con frequenza di taglio pari a:

$$f_t^S = \frac{1}{2\pi \cdot \left[R_G // \left(R_S + R_{IN}\right)\right] \cdot C_{eq}} \approx \frac{1}{2\pi \cdot R_G \cdot C_{eq}}; \quad C_{eq} = \frac{\left(C_d + C_{IN}\right) \cdot C_S}{\left(C_d + C_{IN}\right) + C_S}$$

Sostituendo nell'espressione della frequenza di taglio le relazioni precedenti si ottiene:

$$C_{eq} = \frac{1}{10} \cdot \left(C_d + C_{IN}\right) \Rightarrow f_t^S = 10 \cdot \frac{1}{2\pi \cdot R_G \cdot \left(C_d + C_{IN}\right)} = 10 \cdot f_t$$

dove f_t è la frequenza di taglio del circuito all'ingresso dell'oscilloscopio in assenza di sonda compensata. Si può quindi concludere che la sonda compensata 10:1 permette di estendere di un fattore 10 la risposta in frequenza del circuito all'ingresso dell'oscilloscopio.

Il tempo di salita del circuito di misura può essere ottenuto come:

$$t_{SIN}^S = \frac{0.35}{f_t^S} = \frac{0.35}{10} \cdot 2\pi \cdot R_G \cdot \left(C_d + C_{IN}\right) = \frac{t_S}{10}$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene infine:

$$t_{SIN}^S = \frac{0.35}{10} \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot 120 \cdot 10^{-12} \approx 1.3 \text{ ns}$$

Il tempo di salita del segnale in misura è ottenuto come:

$$t_X = \sqrt{t_S^2 - t_{SO}^2 - t_{SIN}^2} = \sqrt{625 - 3.0625 - 1.69} \approx 24.9 \text{ ns}$$

per cui l'effetto sistematico espresso in termini relativi percentuali vale:

$$\frac{t_S - t_X}{t_X} \cdot 100 = \frac{25 - 24.9}{24.9} \cdot 100 \approx 0.4\ \%$$

che risulta trascurabile se paragonato all'incertezza strumentale dell'oscilloscopio (2 %) ed all'incertezza di lettura (circa 4 % se si assume un'incertezza assoluta di lettura di 0.1 div).

Segue infine che il modello di misura da impiegare è il seguente:

$$t_X = L_{ts} \cdot K_X$$

Stima del misurando

Sostituendo i valori numerici nel modello di misura si ottiene:

$$t_X = 2.5\ \text{div} \cdot 10\ \text{ns/div} = 25\ \text{ns}$$

Stima dell'incertezza

In questo caso, poiché il modello di misura è costituito semplicemente dal prodotto di due grandezze, applicando le regole per la propagazione dell'incertezza descritte nella lezione 4 del corso, si ottiene:

$$\varepsilon t_X = \varepsilon L_{ts} + \varepsilon K_X = \frac{\delta L_{ts}}{L_{ts}} + \varepsilon K_X = \frac{0.1}{2.5} + 0.02 = 0.06$$

che corrisponde ad un'incertezza assoluta pari a:

$$\delta t_X = t_X \cdot \varepsilon t_X = 25 \cdot 0.06 = 1.5\ \text{ns}$$

Dichiarazione finale della misura

$$\boxed{t_X = (25.0 \pm 1.5)\ \text{ns}}$$