POLITECNICO
DI TORINO

DET
Department of Electronics and Telecommunications

Amplificatori Operazionali

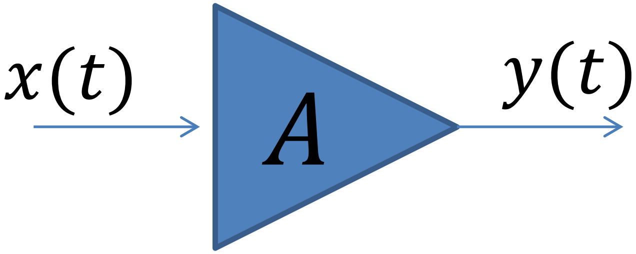
Limitazioni degli stadi amplificatori

- Principali limitazioni degli amplificatori (considerati fino ad ora):
  - **Effetto di carico** in ingresso ed in uscita → in generale, è difficile ottenere con impedenze d'ingresso e d'uscita molto elevate o molto ridotte.
  - L'**accuratezza dei parametri** (amplificazione, impedenze d'ingresso e d'uscita) è scarsa: i parametri dei dispositivi attivi presentano forti tolleranze di fabbricazione (oltre $\pm 50\%$ per i componenti attivi) che variano da dispositivo a dispositivo.

Per migliorare decisamente le prestazioni sotto entrambi gli aspetti verrà introdotto ora il principio funzionale della **retroazione negativa.**

Amplificatori ad Anello Aperto

- Negli amplificatori *ad anello aperto* considerati fino ad ora, il segnale di ingresso dell'amplificatore coincide con l'ingresso esterno $x(t)$



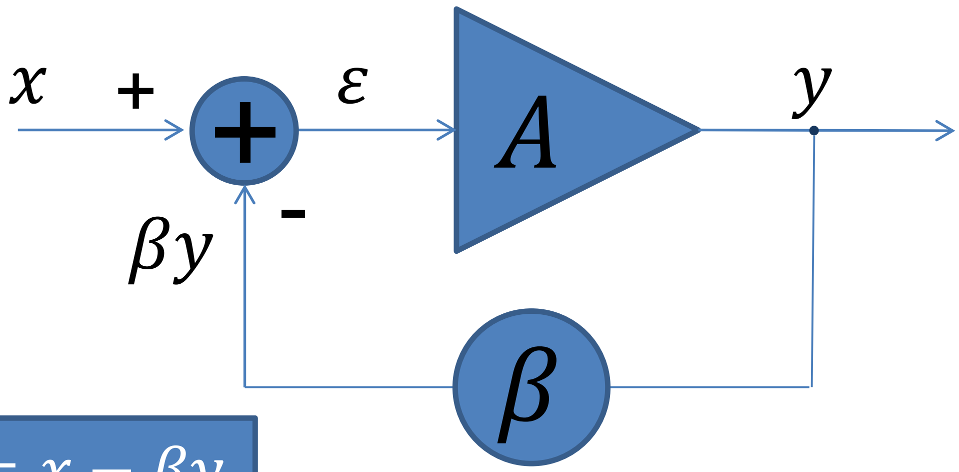
$$\boxed{y(t) = Ax(t)}$$

- Se lo stadio è progettato per avere amplificazione A, qualsiasi errore δA, dovuto a tolleranze di fabbricazione o effetto di carico si riflette direttamente sull'uscita:

$$\boxed{y(t) = (A + \delta A)x(t) \neq Ax(t)}$$

Retroazione Negativa (I)

- In un amplificatore con retroazione negativa (***negative feedback***), il segnale voluto in uscita è visto come il segnale che, se attenuato di un fattore β, è uguale all'ingresso esterno.
- L'***amplificatore d'errore*** *A* ha in ingresso l'***errore*** $\varepsilon = x - \beta y$ tra ingr. esterno x e uscita attenuata βy e varia l'uscita y così da *ridurre* l'errore (segno meno davanti a y, da cui retroazione ***negativa***).
  - Se $\varepsilon > 0$ cresce (ad es. perché cresce x) → y **aumenta** e l'errore $\varepsilon = x - \beta y$ decresce
  - Se $\varepsilon < 0$ diminuisce (ad es. perché decresce x) → y **diminuisce** e l'errore $\varepsilon = x - \beta y$ decresce in modulo
  - Se $x = \beta y$ allora l'uscita è proprio quella voluta ($1/\beta$)
- Il fattore β è ottenuto da una rete passiva e può essere controllato in modo accurato.



$$\boxed{\varepsilon = x - \beta y}$$

segnale d'errore

Esempio: *amplificatore che amplifica 10*

$$y = 10x$$

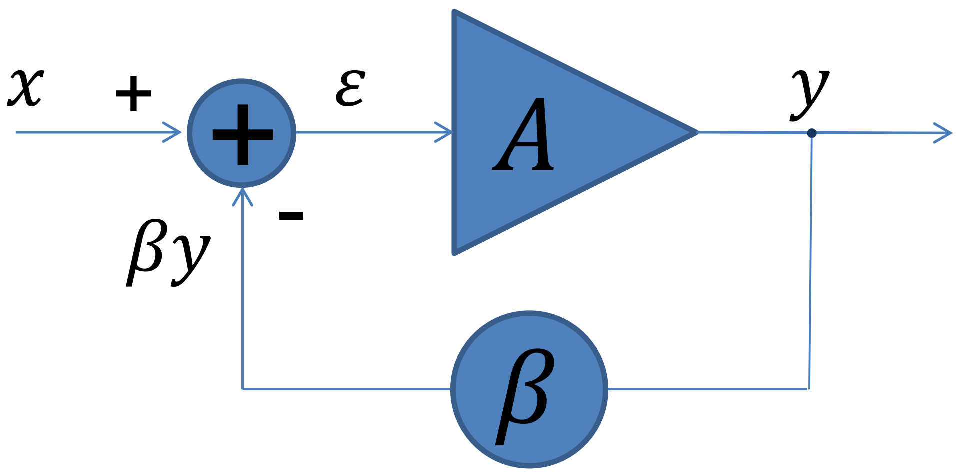
approccio ad anello aperto

$$x = \frac{y}{10}$$

$$\underbrace{x - \frac{y}{10}}_{\text{segnale d'errore}} = 0$$

approccio con retroazione

Retroazione Negativa (II)



Definizioni	
$\varepsilon = x - \beta y$	segnale d'errore
$T = A\beta$	guadagno d'anello
A	amplificazione ad anello aperto
$\dfrac{1}{\beta}$	amplificazione ad anello chiuso

Dallo schema a blocchi:

$$\begin{cases} y = A\varepsilon \\ \varepsilon = x - \beta y \end{cases}$$

$$y = A(x - \beta y)$$

$$y(1 + A\beta) = Ax$$

Espressioni dell'uscita e del segnale d'errore:

$$\begin{cases} y = \dfrac{A\beta}{1 + A\beta}\dfrac{1}{\beta}x = \dfrac{T}{1 + T}\dfrac{1}{\beta}x \\ \varepsilon = \dfrac{1}{1 + A\beta}x = \dfrac{1}{1 + T}x \end{cases}$$

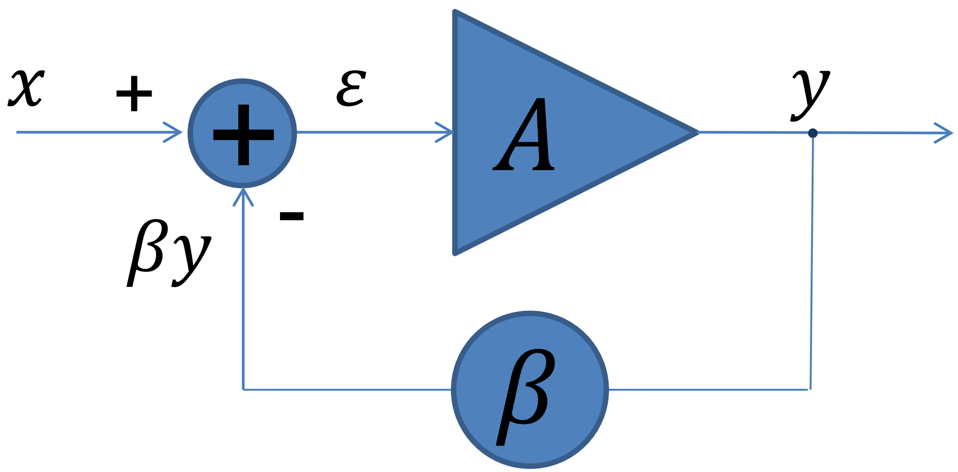
per $T \to \infty$ (ossia per $A \to \infty$)

$$\boxed{y \to \frac{1}{\beta}x}$$

$$\boxed{\varepsilon \to 0}$$

Retroazione Negativa (III)

- Se *A*, o meglio il *guadagno d'anello* $T = A\beta$, è sufficientemente elevato in modulo, l'amplificazione complessiva $\frac{y}{x}$ tende a $\frac{1}{\beta}$ <u>indipendentemente</u> dal valore preciso di *A*!
- L'amplificazione ad anello chiuso dipende *solo* da β ed è pertanto insensibile a effetti di carico, tolleranze di fabbricazione dei dispositivi attivi (che invece influenzano *A*).



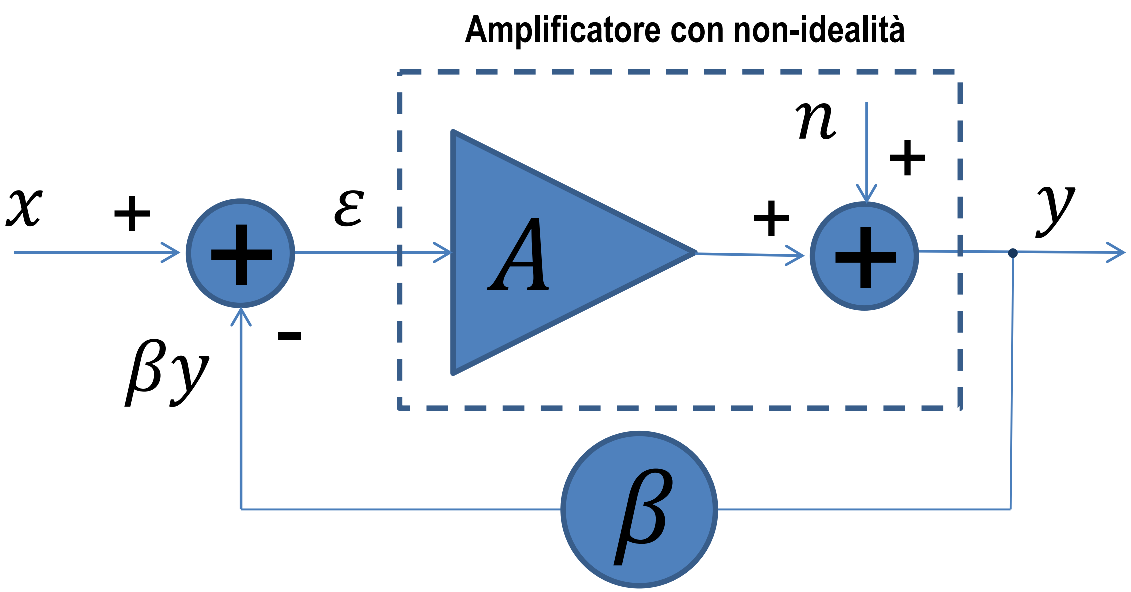
per $T = A\beta \rightarrow \infty$
(ossia per $A \rightarrow \infty$)

$$\boxed{y \rightarrow \frac{1}{\beta} x}$$

$$\boxed{\varepsilon \rightarrow 0}$$

Retroazione Negativa (IV)

- Le tolleranze, gli effetti di carico… ed altre non-idealità dell'amplificatore *A* possono essere descritte da un termine di errore additivo n.
- Il contributo n delle non-idealità sull'uscita y è attenuato di un fattore $1 + A\beta$.
- Tanto più il guadagno d'anello $T = A\beta$ è elevato in modulo, tanto più il comportamento dell'amplificatore retroazionato si avvicina all'idealità.



$$\begin{cases} y = A\varepsilon + n \\ \varepsilon = x - \beta y \end{cases}$$

$$y = A(x - \beta y) + n$$

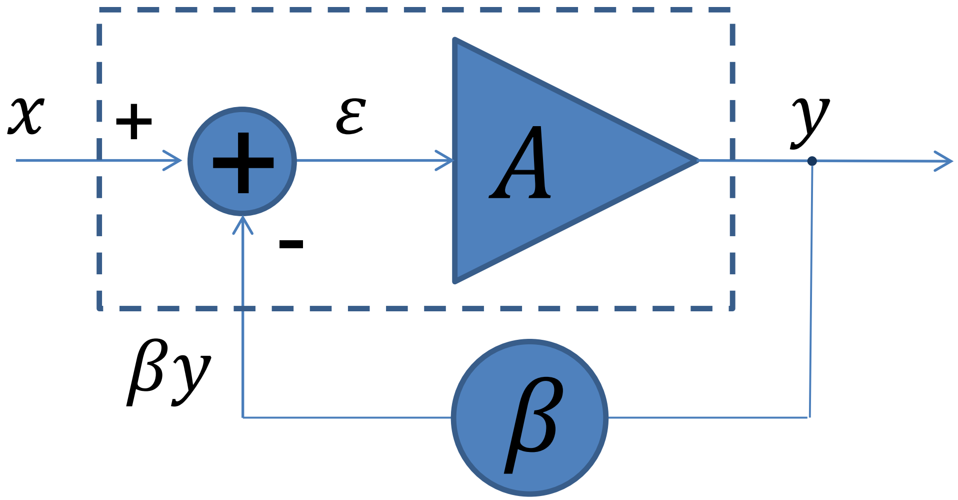
$$\boxed{y = \underbrace{\frac{A\beta}{1 + A\beta}\frac{1}{\beta}}_{\text{Termine atteso}} x + \underbrace{\frac{1}{1 + A\beta}}_{\text{Effetto delle non idealità di } A} n}$$

per $T = A\beta \to \infty$ **le non-idealità di *A* non influenzano l'uscita**

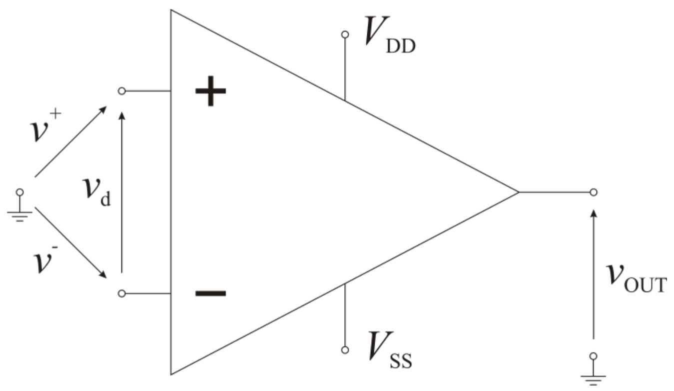
$$y = \frac{1}{\beta} x$$

Amplificatore Operazionale (I)

- Che cosa occorre per implementare il principio della retroazione negativa a livello circuitale?
  - Un amplificatore con ***elevata amplificazione*** *A, idealmente infinita*
  - E' necessario eseguire la ***differenza*** tra due segnali → amplificatore ***differenziale***
- Un amplificatore di tensione differenziale con queste caratteristiche (amplificazione di tensione differenziale $A_d = \frac{v_{out}}{v^+ - v^-}$ da 10^4 fino a 10^6 (80-120dB) è detto **amplificatore operazionale.**
- Il fattore β è ottenuto da una rete passiva (rete di retroazione).



Amplificatore operazionale



Amplificatore Operazionale (II)

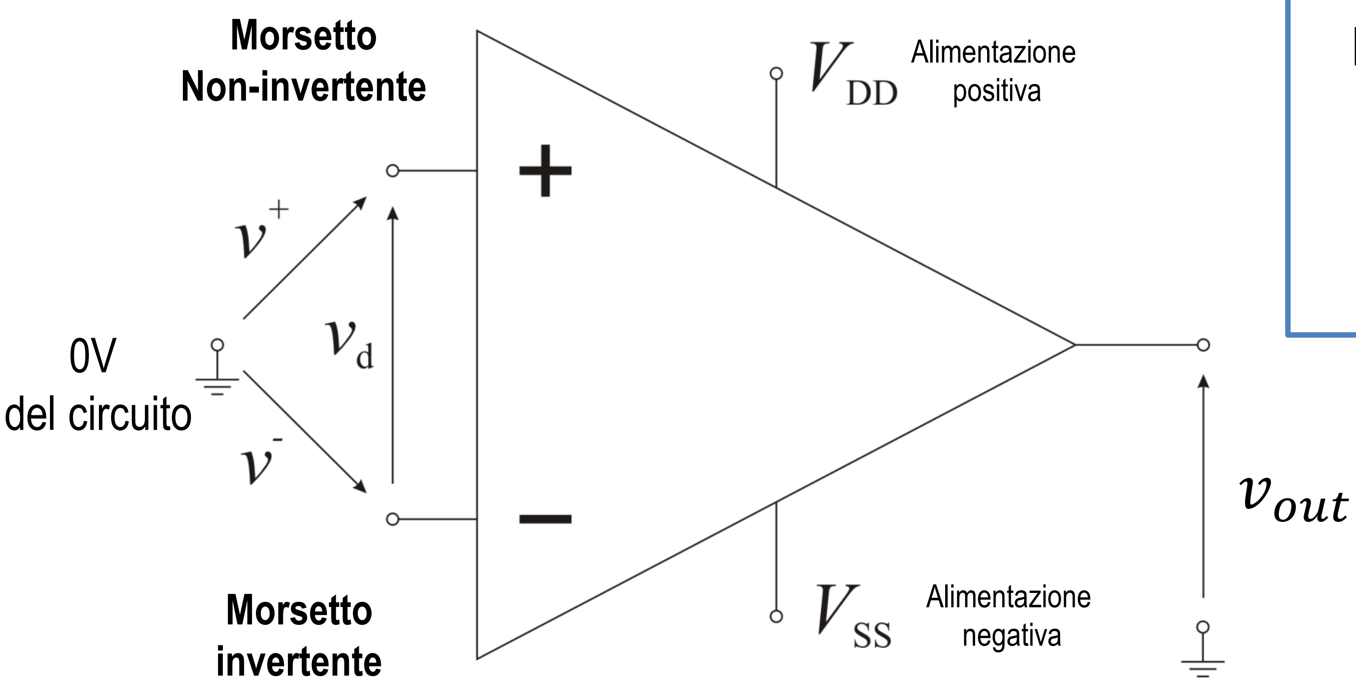
$v_d = v^+ - v^-$ tensione differenziale d'ingresso

$v_{cm} = \frac{v^+ + v^-}{2}$ tensione di modo comune d'ingresso

$$v_{out} = A_d v_d$$

per $A_d \to \infty$

Amplificatore Operazionale ideale

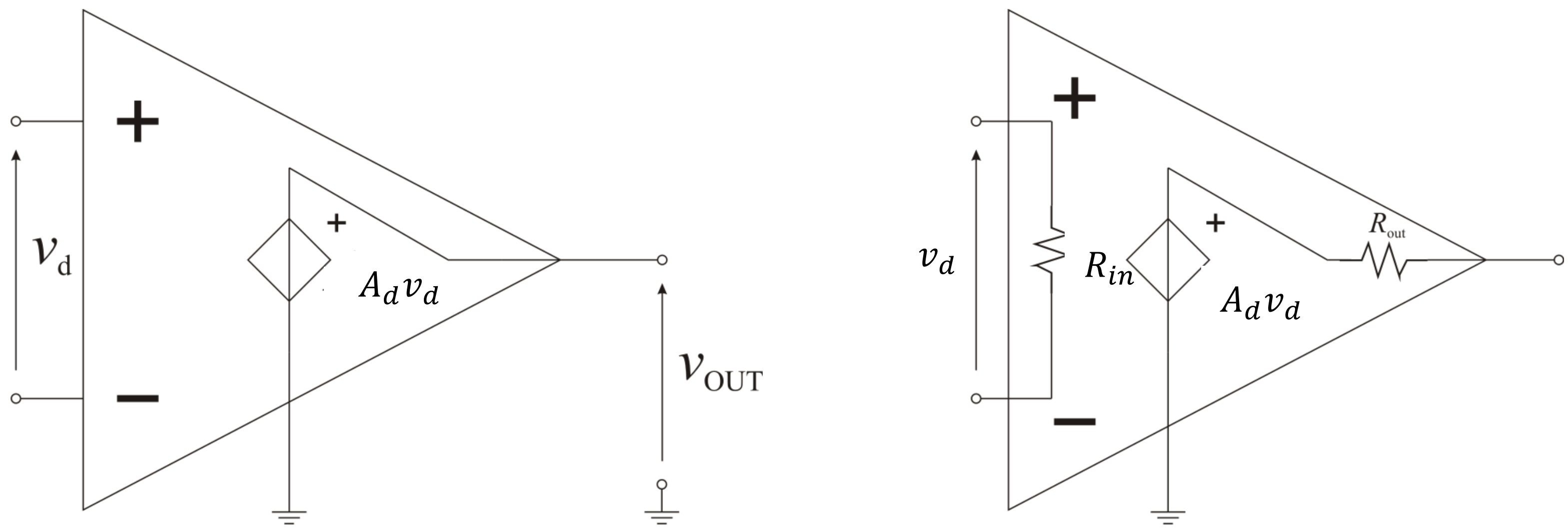


È un ***amplificatore differenziale***: l'uscita v_{out}, (che è riferita allo 0V del circuito), dipende solo dalla *differenza* tra v^+ e v^-, non da v^+ e v^- rispetto a 0V

Amplificatore Operazionale (III)

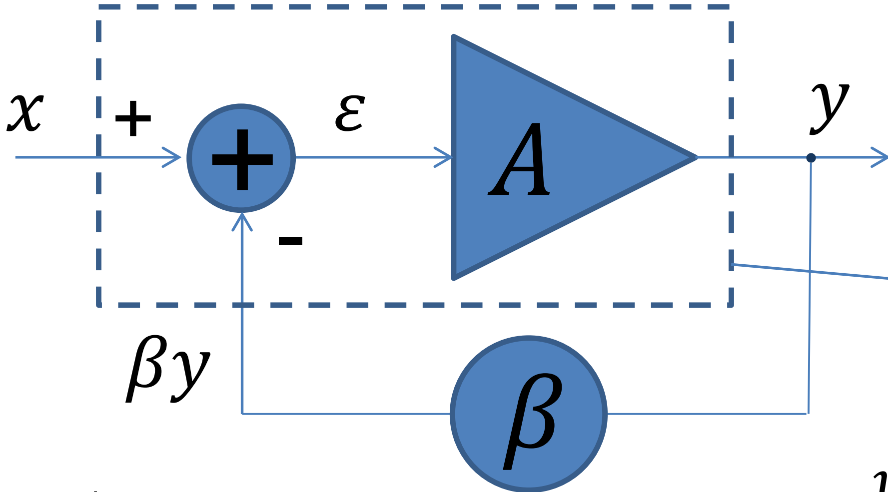
- Come tutti gli amplificatori, anche gli operazionali presentano R_{in}, R_{out} generalmente finite e non nulle → ma se A_d è sufficientemente elevata, gli effetti di carico risultanti sono trascurabili.
- In un **amplificatore operazionale ideale (**$A_d \rightarrow \infty$**)** R_{in} ed R_{out} non danno luogo ad effetto di carico e sono completamente ininfluenti.

Amplificatore operazionale come doppio bipolo



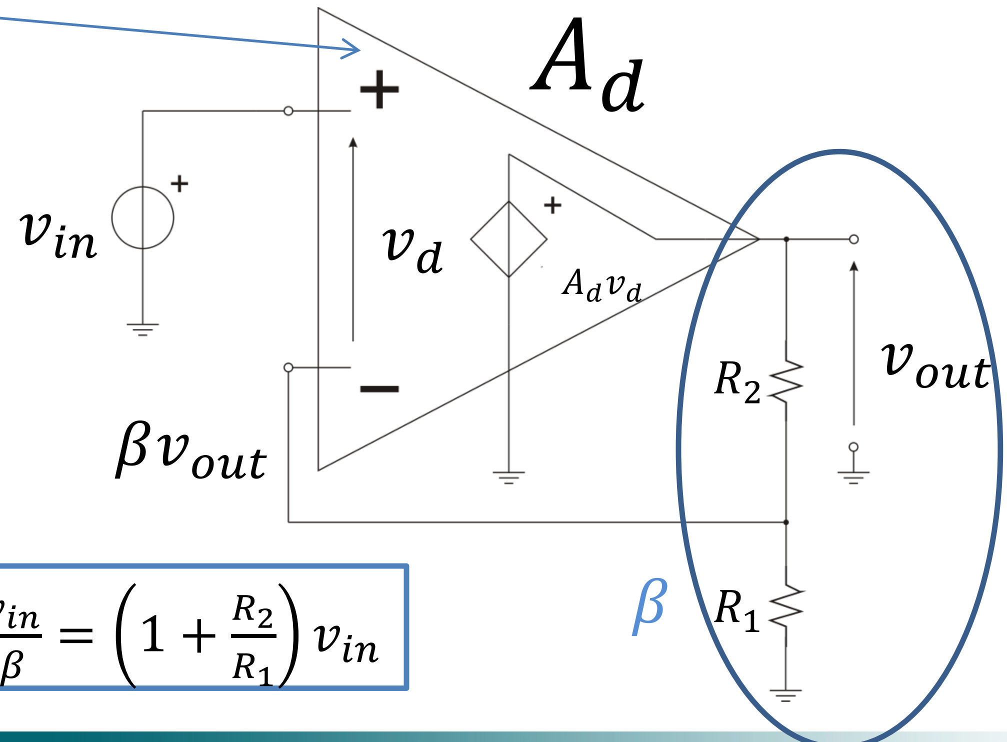
Amplificatore di tensione con operazionale

Dallo schema a blocchi…



Es.: per ottenere un amplificatore di tensione con $A_v = \mathbf{10}$
- applico l'ingresso v_{in} al morsetto non invertente.
- per amplificare 10, attenuo v_{out} di un fattore $\beta = 0.1$ con un partitore ($R_1 = R_2/9$) e lo applico all'ingresso invertente.

…al circuito con operazionale



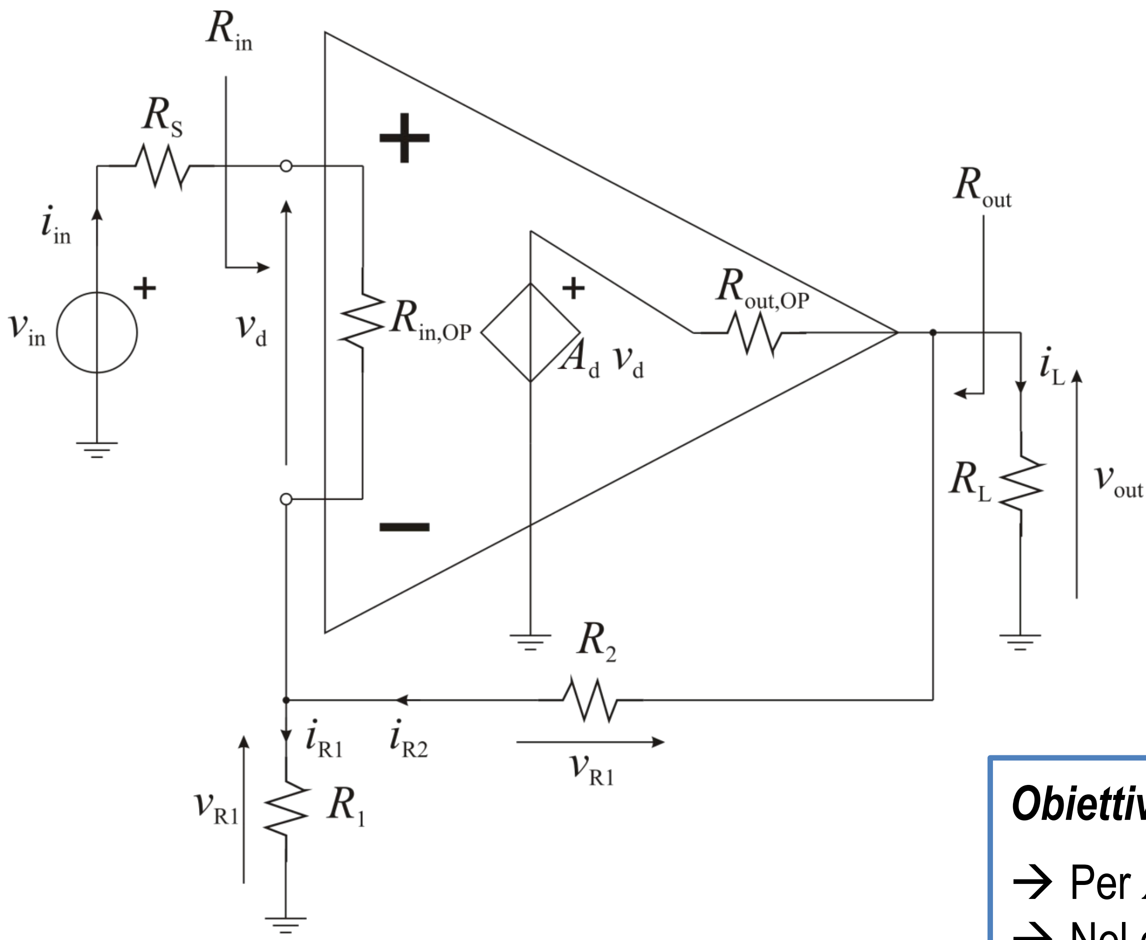
$$v^+ = v_{in}$$

$$v^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_{out} = \beta v_{out}$$

$$v_{out} = A_d(v^+ - v^-) = A_d(v_{in} - \beta v_{out})$$

$$v_{out} = \frac{\beta A_d}{1+\beta A_d} \frac{v_{in}}{\beta} \xrightarrow{A_d \to \infty} \boxed{v_{out} = \frac{v_{in}}{\beta} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_{in}}$$

Analisi di circuiti con operazionali (I)



-consideriamo l'amplificatore di tensione ricavato dallo schema a blocchi in un caso più realistico, introducendo anche:

- $R_{in,OP}$, $R_{out,OP}$
  Resistenza d'ingresso e d'uscita dell'operazionale finite e non nulle

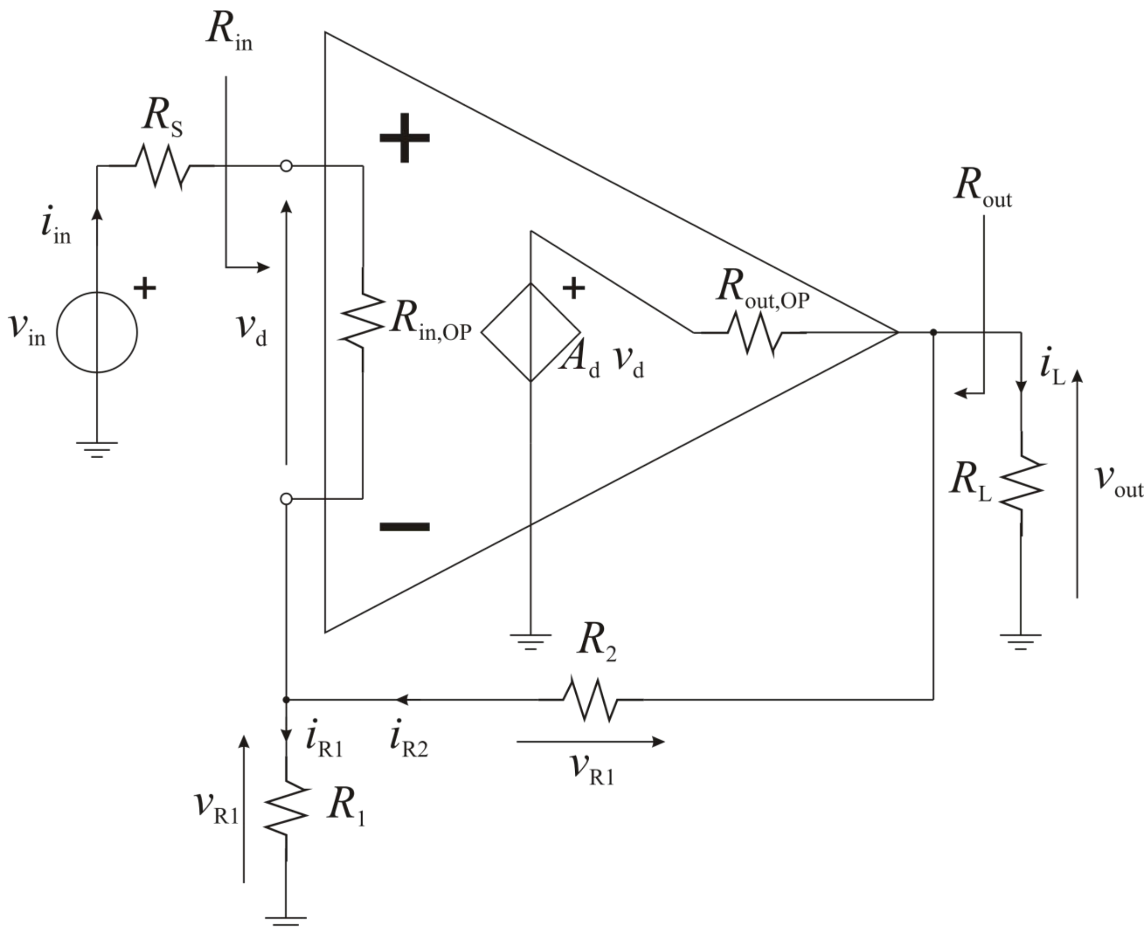
- R_S, R_L
  Resistenza di sorgente e carico finite e non nulle

Obiettivo: ricavare $A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}}$, R_{in} , R_{out}

→ Per A_d finita

→ Nel caso ideale, per $A_d \to \infty$

Analisi di circuiti con operazionali (II)



E' un circuito con generatore di tensione pilotato in tensione

Applicando il metodo del pilota…
(calcoli laboriosi ma semplici)

primo passo:

$$\begin{cases} v_d = \dfrac{R_{in,OP}}{R_{in,OP} + R_S + R_c} v_{in} - \beta' \hat{e} \\ \hat{e} = A_d v_d \end{cases}$$

dove:

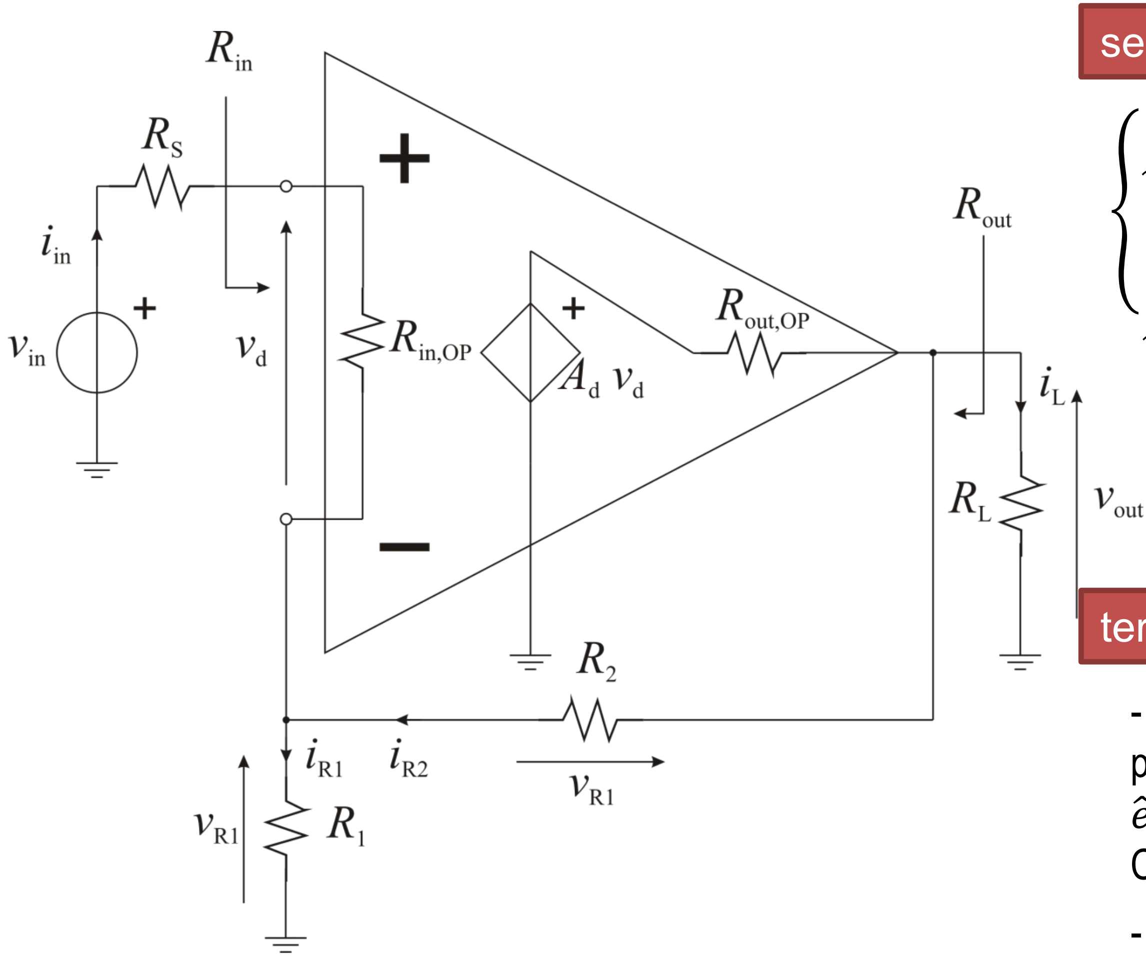
$$\beta' = \frac{R_a}{R_a + R_{out}} \frac{R_b}{R_b + R_2} \frac{R_{in,OP}}{R_{in,op} + R_S}$$

$$R_a = R_L \parallel [R_2 + R_1 \parallel (R_S + R_{in,OP})]$$

$$R_b = R_1 \parallel (R_S + R_{in,OP})$$

$$R_c = R_1 \parallel (R_2 + R_{out,OP} \parallel R_L)$$

Analisi di circuiti con operazionali (III)



secondo passo:

$$\begin{cases} v_d = \dfrac{R_{in,OP}}{R_{in,OP} + R_S + R_c} v_{in} - \beta' \hat{e} \\ \hat{e} = A_d v_d \end{cases}$$

$$v_d(1 + \beta' A_d) = \frac{R_{in,OP}}{R_{in,OP} + R_S + R_c} v_{in}$$

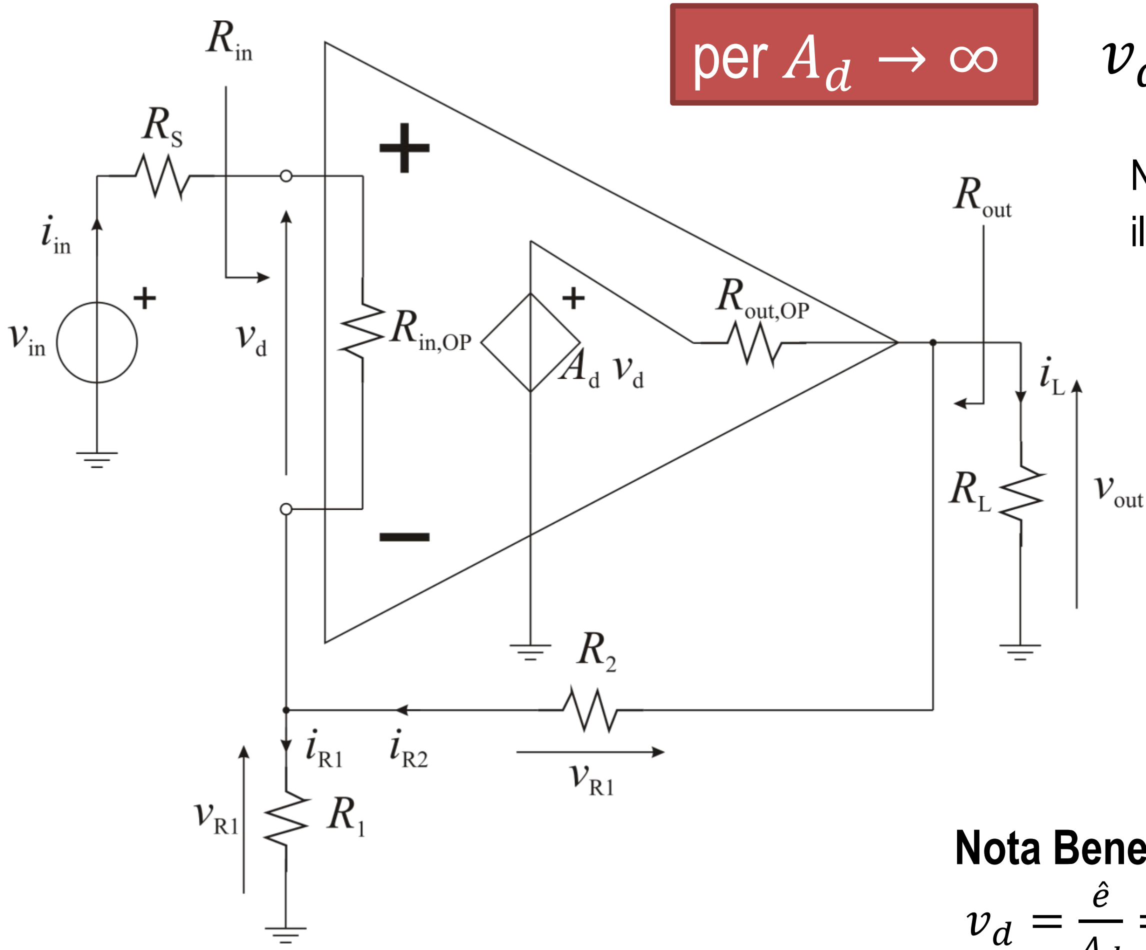
$$\boxed{v_d = \frac{R_{in,OP}}{R_{in,OP}+R_S+R_c} \frac{v_{in}}{1+\beta' A_d}}$$

terzo passo:

- **per A_d finita**: si prosegue con il metodo del pilota si ricava v_{out} in funzione di v_{in} e di $\hat{e} = A_d v_d$ (noto)… altri calcoli un po' laboriosi… Con lo stesso metodo si valutano R_{in} ed R_{out}.

- **per A_d** $\rightarrow \infty$ (operazionale ideale) sono possibili notevoli semplificazioni ☺ ! (vedi prossima slide…)

Analisi di circuiti con operazionali ideali (I)



per $A_d \to \infty$

$$v_d = \frac{R_{in,OP}}{R_{in,OP}+R_S+R_c} \frac{v_{in}}{1+\beta' A_d} \to 0$$

Non è necessario determinarla applicando il metodo del pilota!!!

$$v_d = 0 \;\to v^- = v^+$$

Essendo poi $R_{in,OP}$ non nulla, si ha anche:

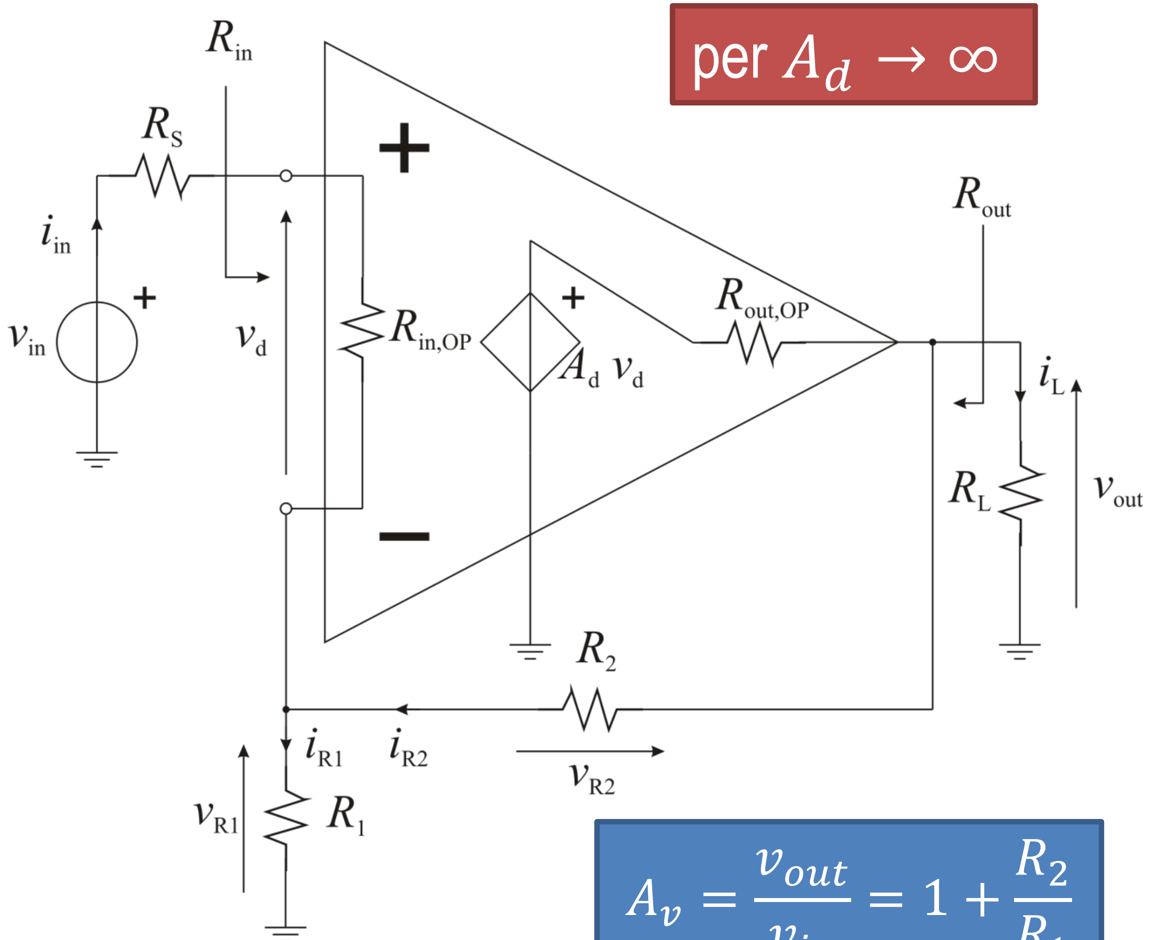
$$i^+ = -i^- = \frac{v_d}{R_{in,OP}} = 0$$

Nota Bene: essendo $A_d \to \infty$

$v_d = \frac{\hat{e}}{A_d} = 0$, indipendentemente da $\hat{e}$

per cui $v_d = 0$ ***non implica*** $\hat{e} = A_d v_d = 0$!

Analisi di circuiti con operazionali ideali (II)



per $A_d \rightarrow \infty$

$$v_d = 0 \ \rightarrow v^- = v^+$$

$$i^+ = -i^- = 0$$

Le due relazioni sono valide per tutti i circuiti con operazionali in retroazione ***negativa***

Utilizzando le due relazioni:

$$i_{in} = i^+ = 0 \qquad v_{R_s} = 0$$

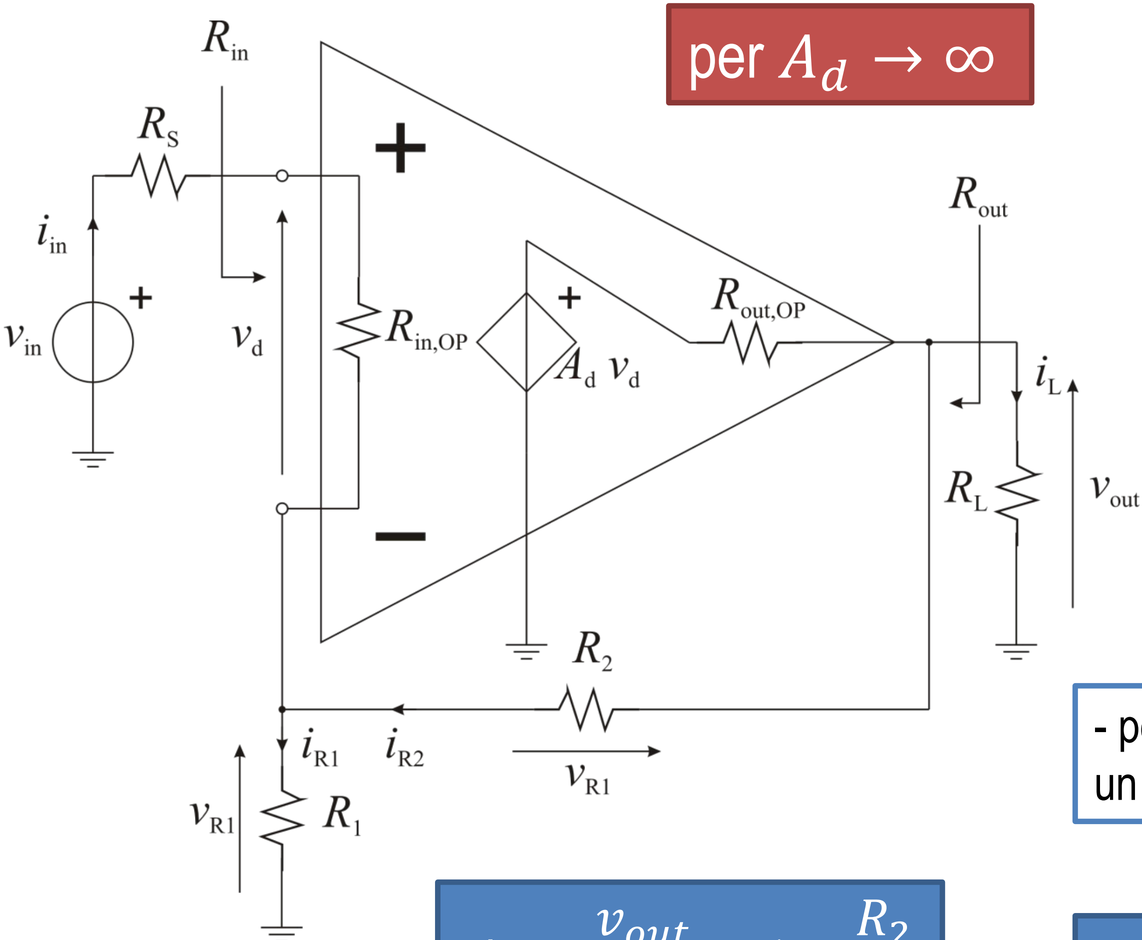
$$v_{R1} = v^- = v^+ = v_{in}$$

$$i_{R2} = i_{R1} = \frac{v_{in}}{R_1}$$

$$\begin{aligned} v_{out} &= v^- + v_{R2} \\ &= v_{in} + i_{R2}R_2 \\ &= v_{in} + \frac{R_2}{R_1}v_{in} = v_{in}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \end{aligned}$$

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

Analisi di circuiti con operazionali ideali (III)



per $A_d \to \infty$

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

- E' l'espressione da cui eravamo partiti… ed è valida anche ora considerando $R_{in,OP}, R_{out,OP}, R_S, R_G$ finite e non nulle → non c'è effetto di carico!

- Essendo $i^+ \to 0,\ R_{in} = \frac{v_{in}}{i^+} \to \infty$

- Inoltre, spegnendo v_{in}, $v_{out} = 0$ anche applicando un generatore di corrente di test in uscita, quindi $R_{out} = \frac{v_{out}}{i_{test}} = 0$

- per $A_d \to \infty$ il circuito si comporta come un **amplificatore di tensione ideale**

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$R_{in} \to \infty$

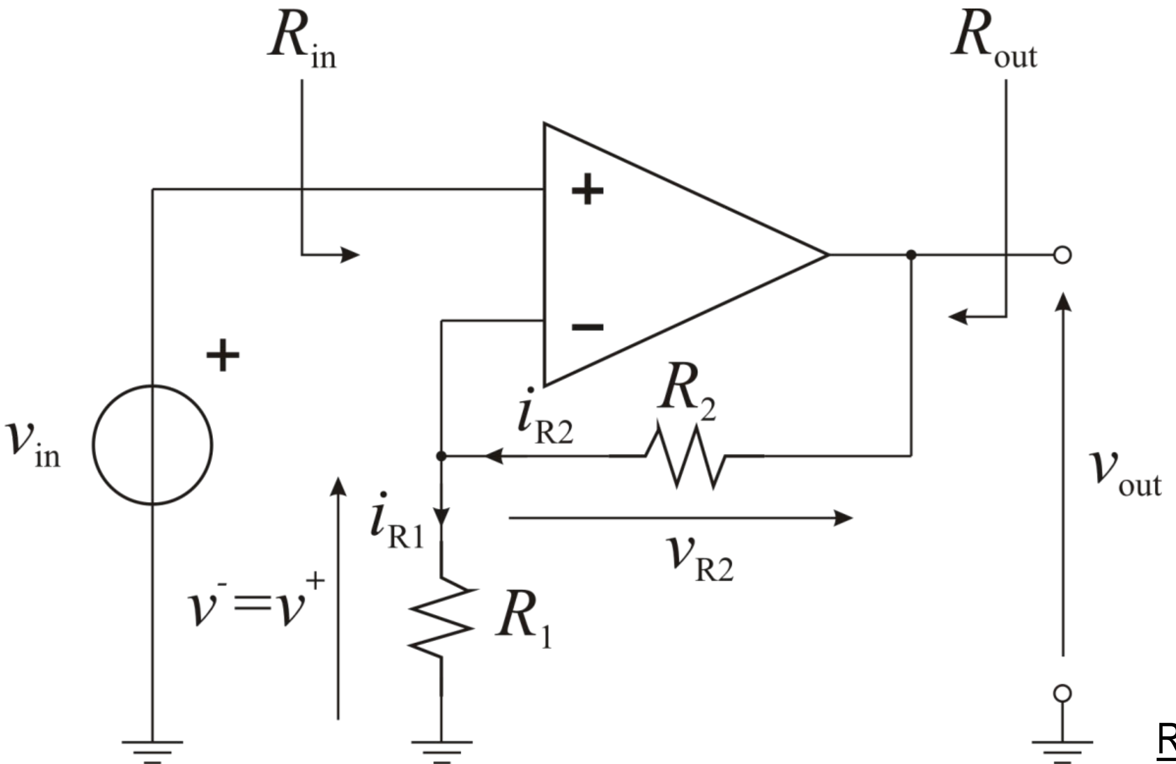
$R_{out} = 0$

Amplificatori con operazionali ideali

- Abbiamo visto come utilizzando un amplificatore operazionale ideale (con $A_d \rightarrow \infty$) sia possibile ottenere un amplificatore di tensione prossimo all'idealità.
- Partendo dallo stesso operazionale ideale, è possibile ottenere tutte le tipologie di amplificatore:
  - Amplificatore di **Tensione**
  - Amplificatore di **Transconduttanza**
  - Amplificatore di **Transresistenza**
  - Amplificatore di **Corrente**

  con caratteristiche che idealmente non risentono degli effetti di carico.
- Ricavare i circuiti dallo schema a blocchi è meno intuitivo: analizzeremo direttamente i circuiti.

Amplificatore di Tensione



$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_{in} \to \infty$$

$$R_{out} = 0$$

Amplificazione di tensione

$$v_{out} = v^+ + v_{R2}$$

$$v_{R2} = i_{R2} R_2 = \frac{v_{in}}{R_1} R_2$$

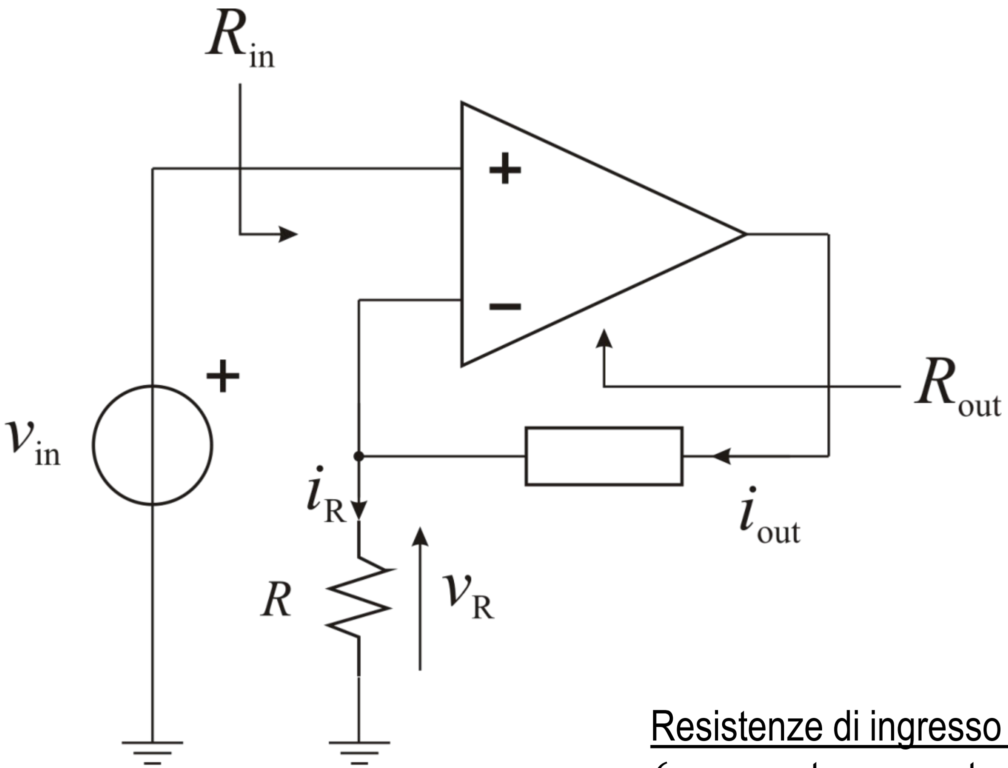
$$v_{out} = v_{in}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Resistenze di ingresso e di uscita:
(v_{in} spento, generatori di test opportuni)

$$G_{in} = \frac{i^+}{v_{test,in}} = 0$$

$$R_{out} = \frac{v_{out}}{i_{test,out}} = 0$$

Amplificatore di Transconduttanza



$$G_m = \frac{i_{out}}{v_{in}} = \frac{1}{R}$$

$$R_{in} \rightarrow \infty$$

$$R_{out} \rightarrow \infty$$

<u>Resistenze di ingresso e di uscita</u>:
(v_{in} spento, generatori di test opportuni)

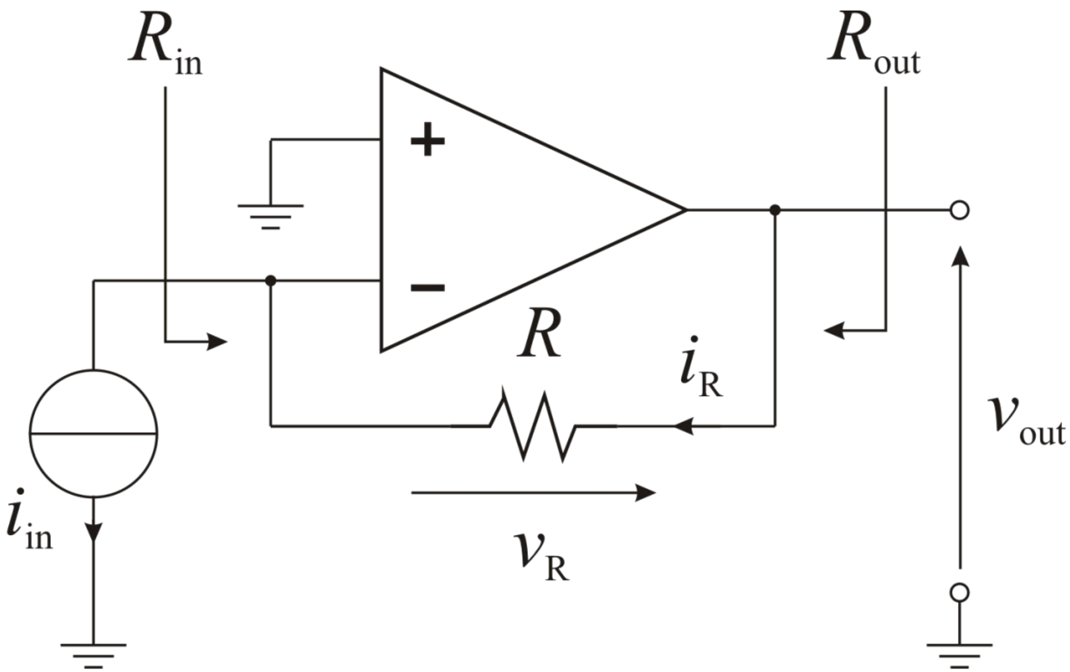
$$G_{in} = \frac{i^+}{v_{test,in}} = 0$$

$$G_{out} = \frac{i_{out}}{v_{test,out}} = 0$$

<u>Transconduttanza:</u>

$$i_{out} = i_R - i^- = \frac{v_{in}}{R}$$

Amplificatore di Transresistenza



$$R_m = \frac{v_{out}}{i_{in}} = R$$

$$R_{in} = 0$$

$$R_{out} = 0$$

Transresistenza:

$$v_{out} = v^+ + v_R = v_R$$

$$i_R = i_{in} - i^-$$

$$v_R = i_R R = R i_{IN}$$

$$v_{out} = R\, i_{in}$$

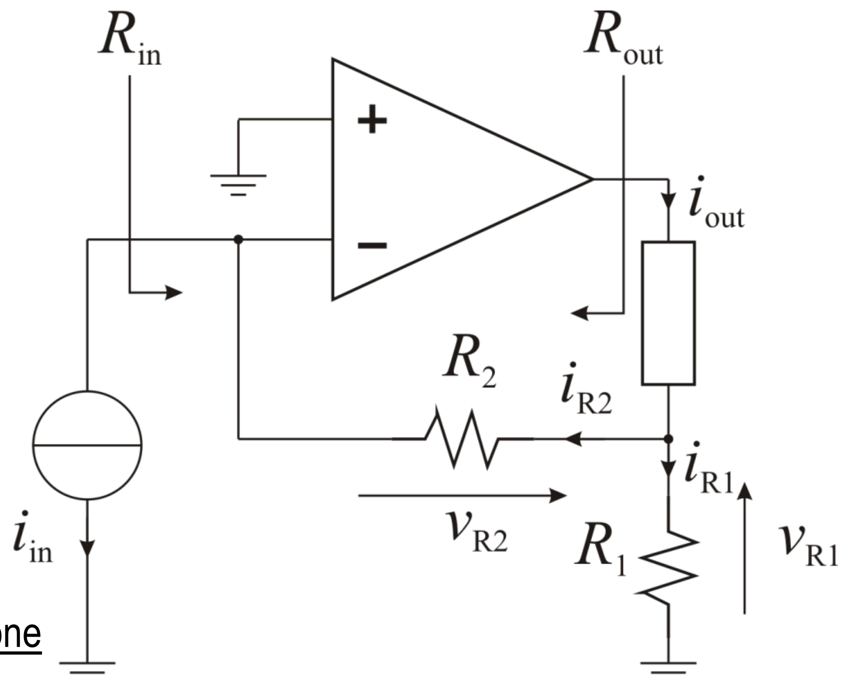
Resistenze di ingresso e di uscita:

(i_{in} spento, generatori di test opportuni)

$$R_{in} = \frac{v^+}{i_{test,in}} = 0$$

$$R_{out} = \frac{v_{out}}{i_{test,out}} = 0$$

Amplificatore di Corrente



$$A_i = \frac{i_{out}}{i_{in}} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$R_{in} = 0$$

$$R_{out} \to \infty$$

Amplificazione di corrente:

$$i_{out} = i_{R2} + i_{R1} = i_{in} + i_{in}\frac{R_2}{R_1}$$

$$i_{R2} = i_{in} \qquad v_{R1} = v_{R2}$$

$$v_{R2} = i_{R2}R_2 = i_{in}R_2$$

$$i_{R1} = \frac{v_{R1}}{R_1} = \frac{v_{R2}}{R_1} = i_{in}\frac{R_2}{R_1}$$

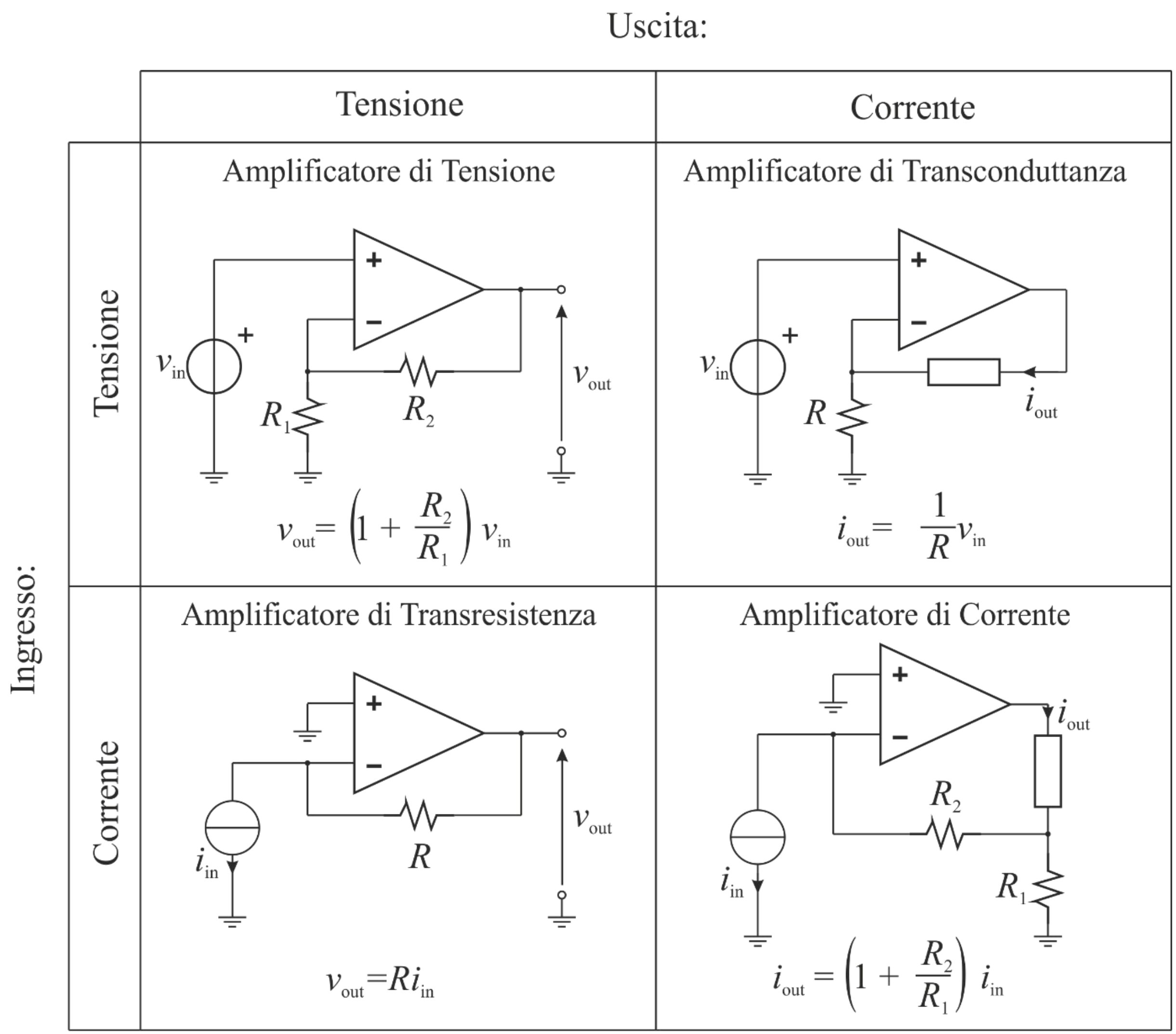
$$i_{out} = i_{in}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Resistenze di ingresso e di uscita:
(i_{in} spento, generatori di test opportuni)

$$R_{in} = \frac{v^+}{i_{test,in}} = 0$$

$$G_{out} = \frac{i_{out}}{v_{test,out}} = 0^*$$

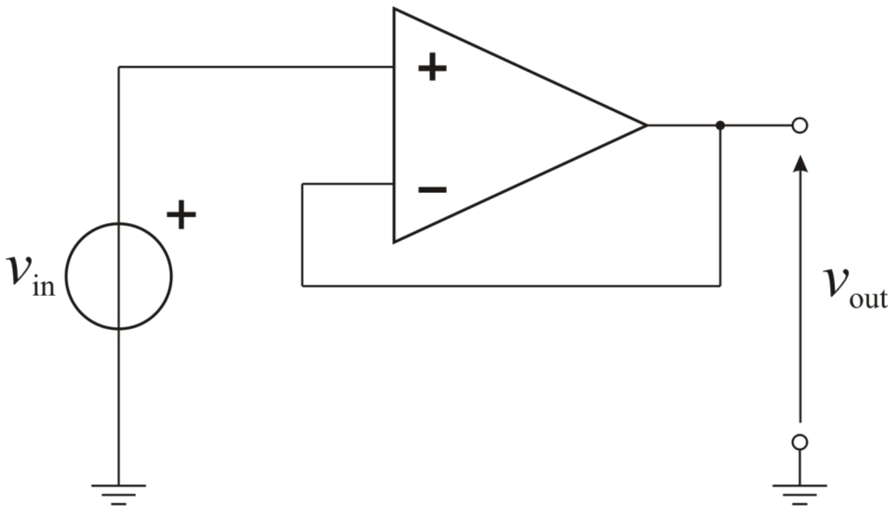
Amplificatori con operazionali



Altri Circuiti Analogici Basati su Operazionale

- Utilizzando amplificatori operazionali con retroazione negativa è anche possibile implementare direttamente altri blocchi funzionali analogici.
- In questo corso vedremo:
  - **Inseguitore di Tensione** (Voltage Follower)
  - **Amplificatore di Tensione invertente**
  - **Amplificatore Esponenziale**
  - **Amplificatore Logaritmico**
  - **Integratore**
  - **Derivatore**
  - **Sommatore**
  - **Amplificatore Differenziale**
  - **Filtri attivi**

Inseguitore di Tensione (Voltage Follower) - I



$$v_{out} = v_{in}$$

$$R_{in} \rightarrow \infty$$

$$R_{out} = 0$$

Amplificatore di tensione
con amplificazione unitaria

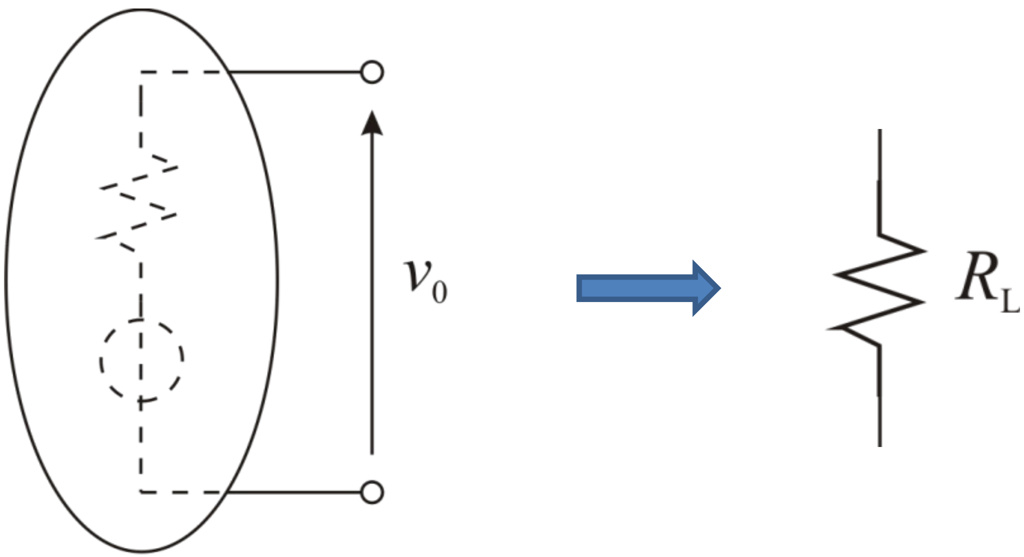
A che cosa può servire un amplificatore di tensione che dà in uscita la stessa tensione applicata in ingresso?!

L'importanza di questo circuito, fondamentale, è tutta legata agli *effetti di carico…*

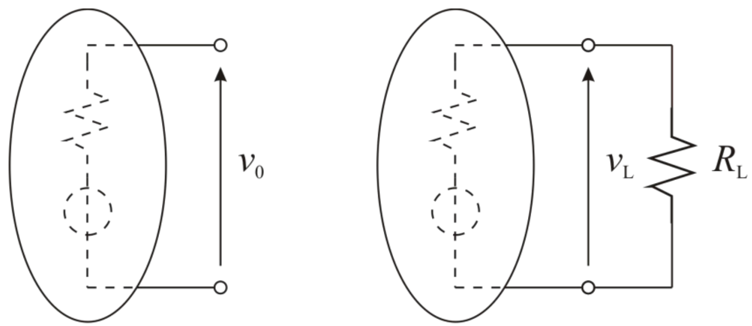
Inseguitore di Tensione (Voltage Follower) - II

Problema:

- Si ha una tensione v_0 ai capi di un bipolo.
- Si vuole applicare la tensione v_0 ad un carico R_L.



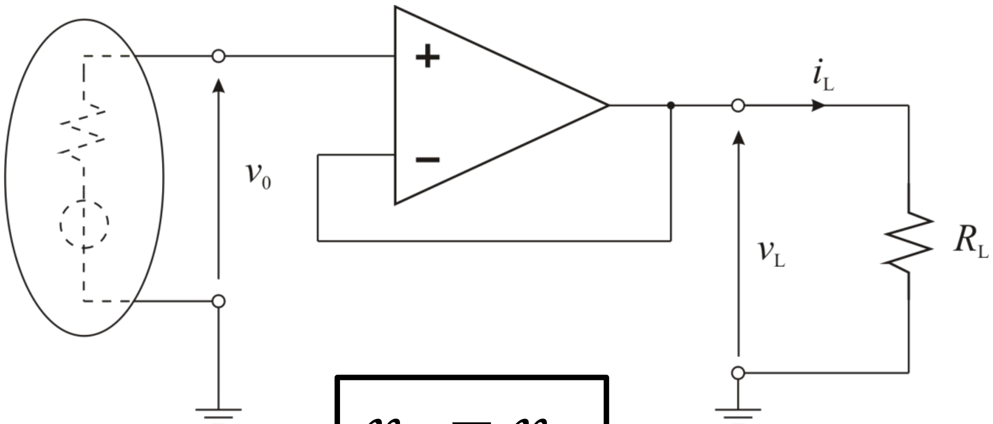
Inseguitore di Tensione (Voltage Follower) - III



$$\boxed{v_L \neq v_0}$$

Collegamento diretto

Se si collega direttamente R_L al bipolo, in generale *non si ottiene il risultato desiderato* a causa dell'effetto di carico.

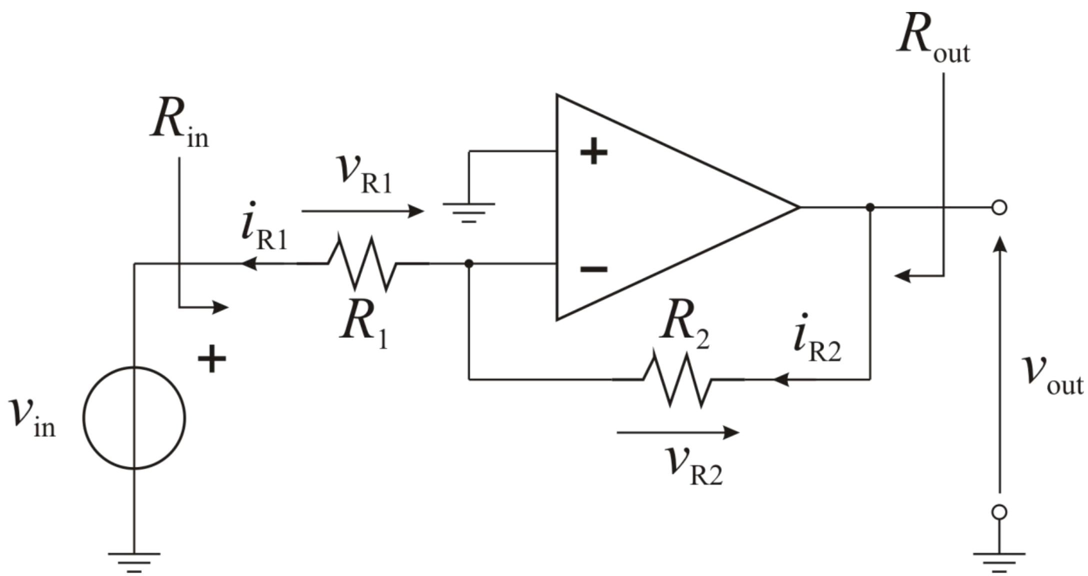


$$\boxed{v_L = v_0}$$

Utilizzando il voltage follower:

- La corrente assorbita all'ingresso dell'operazionale è nulla.
- La tensione ai capi del bipolo resta v_0
- La tensione sul carico è uguale a v_0 indipendentemente dalla corrente i_L erogata al carico.

Amplificatore Invertente



$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$R_{in} = R_1$$

$$R_{out} = 0$$

Amplificazione di tensione

$$v_{out} = v_{R2}$$

$$i_{R2} = i_{R1}$$

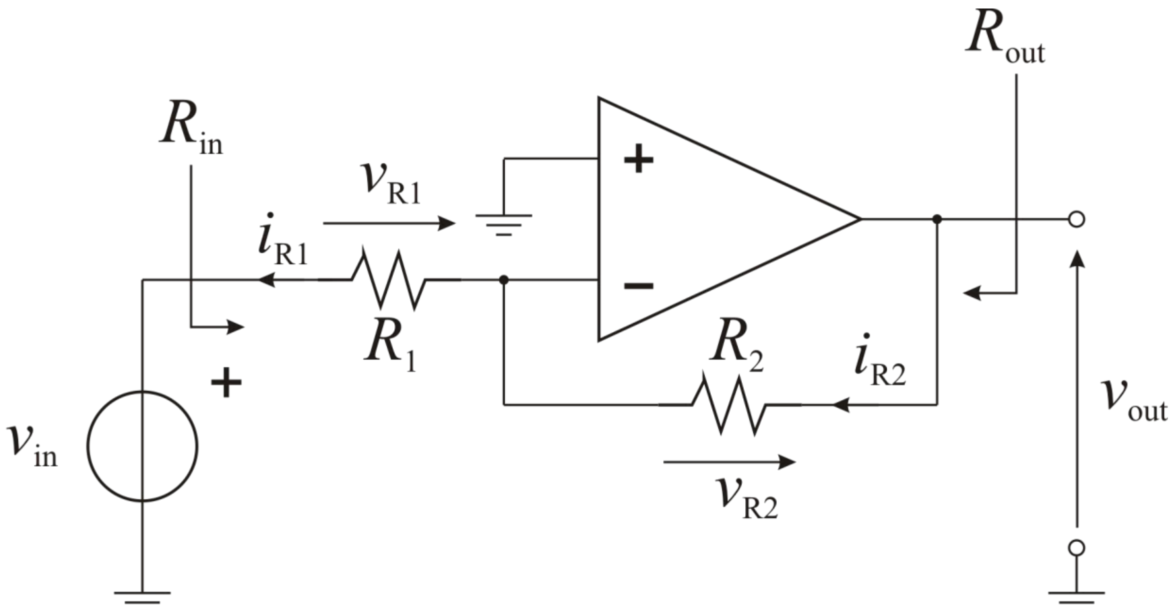
$$v_{R2} = i_{R2}R_2 = -\frac{v_{in}}{R_1}R_2 \quad \Rightarrow \quad v_{out} = -\frac{R_2}{R_1}v_{in}$$

Resistenze di ingresso e di uscita:
(v_{in} spento, generatori di test opportuni)

$$R_{in} = \frac{v_{test,in}}{v_{test,in}/R_1} = R_1$$

$$R_{out} = \frac{v_{test,out}}{i_{test,out}} = 0$$

Amplificatore Invertente



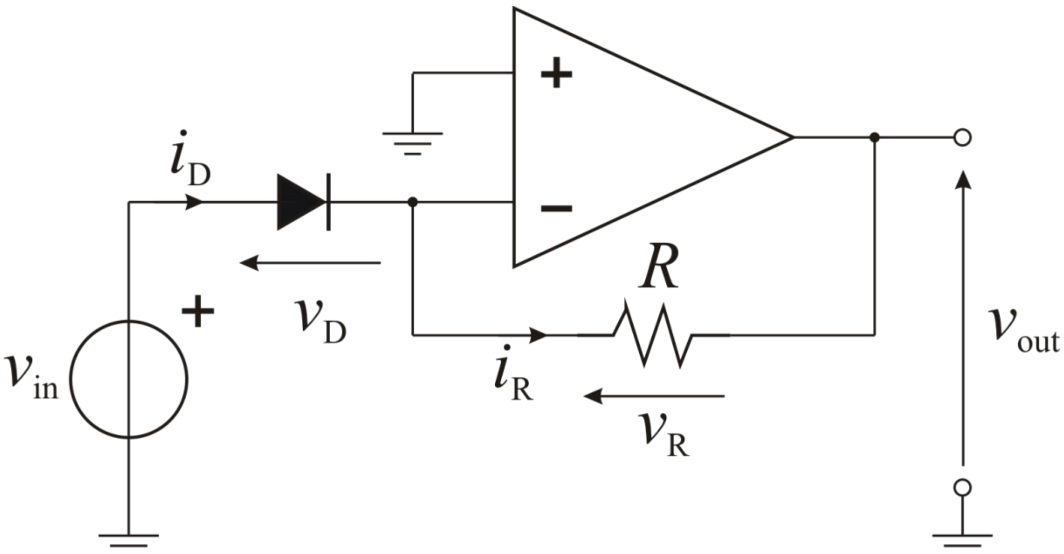
$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$R_{in} = R_1$$

$$R_{out} = 0$$

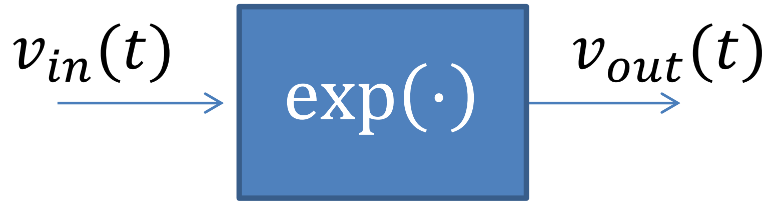
- Spesso è indicato come amplificatore *di tensione* invertente, ma ***non è un amplificatore di tensione*** prossimo all'idealità, in quanto $R_{in} = R_1$ e non è necessariamente elevata.
- Deriva dall'amplificatore di Transresistenza (sostituendo la rappresentazione Norton della sorgente con la rappresentazione di Thévénin)
- Su R_1 è applicata la tensione v_{in}, perchè l'ingresso invertente è a 0V (massa virtuale).
- La corrente in R_1 non va verso massa, ma in R_2: la caduta su R_2 è la tensione in uscita.
- Con lo stesso approccio si possono ottenere altri blocchi funzionali analogici…

Amplificatore Esponenziale



$$v_{out} = -V_0 e^{\frac{v_{in}}{V_1}}$$

Blocco Funzionale



$$v_D = v_{in}$$

$$i_D = I_S\left(e^{\frac{v_D}{\eta V_T}} - 1\right)$$ **Caratteristica del Diodo**

$$\simeq I_S e^{\frac{v_D}{\eta V_T}} \text{ per } v_D > 0$$

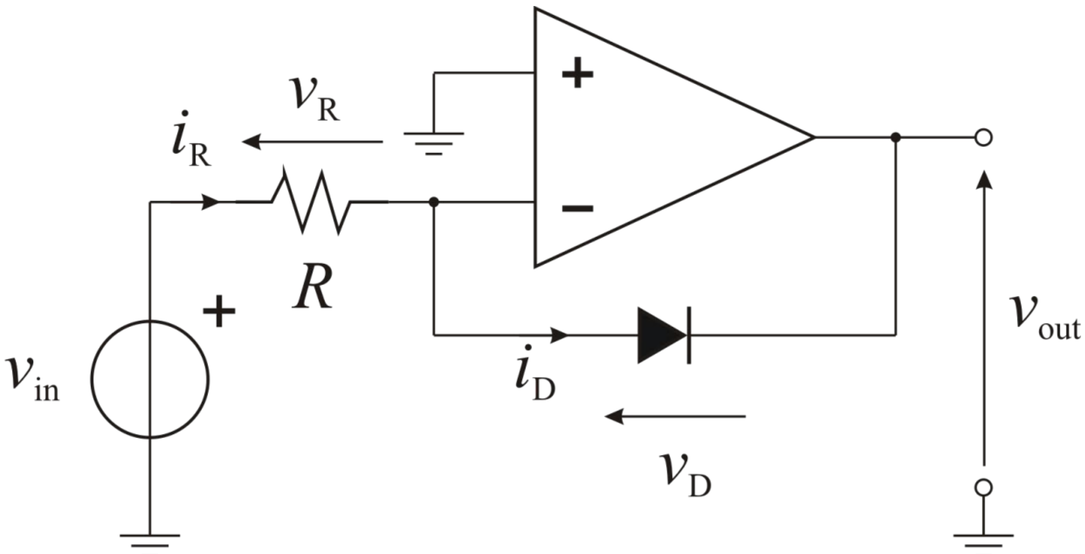
$$i_R = i_D$$

$$v_R = R I_S e^{\frac{v_{in}}{\eta V_T}} \quad \Rightarrow \quad v_{out} = -R I_S e^{\frac{v_{in}}{\eta V_T}}$$

R_{in}: il comportamento alla porta d'ingresso è non-lineare e dà luogo ad effetto di carico → per evitare di caricare la sorgente v_{in}: *voltage follower.*

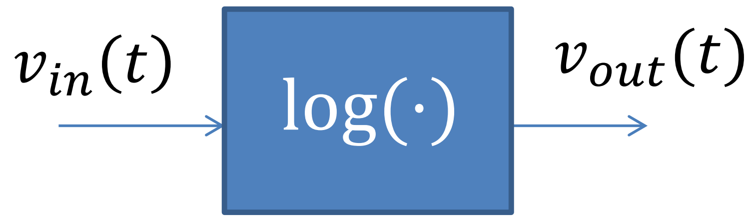
$$R_{out} = 0$$

Amplificatore Logaritmico



$$\boxed{v_{out} = -V_1 \log \frac{v_{in}}{V_0}}$$

Blocco Funzionale



$$i_D = i_R = \frac{v_{in}}{R}$$

$$\frac{v_{in}}{R} = I_S e^{\frac{v_D}{\eta V_T}} \text{ per } i_D \gg I_S$$ **Caratteristica del Diodo**

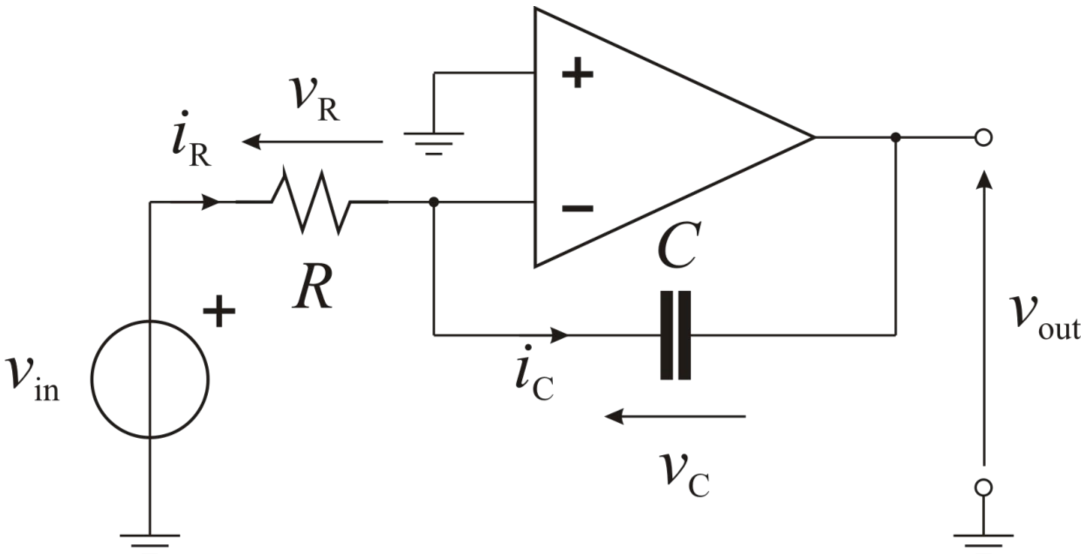
$$v_D = \eta V_T \log \frac{v_{in}}{R I_S} \Rightarrow v_{out} = -\eta V_T \log \frac{v_{in}}{R I_S}$$

$$\boxed{R_{in} = R} \ (*)$$

$$\boxed{R_{out} = 0}$$

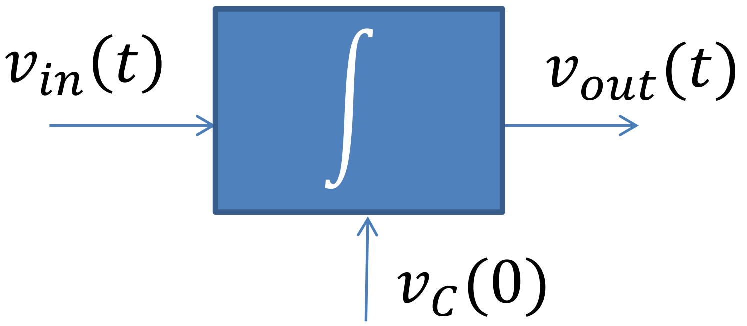
(*) Come per l'amplificatore invertente, la resistenza d'ingresso è finita e può dare luogo ad effetto di carico. Se fosse un problema (i.e. se la resistenza di sorgente non è molto minore), lo si può far precedere da un *voltage follower.*

Integratore



$$v_{out} = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_{in}(t')dt'$$

Blocco Funzionale



$$v_{out} = -v_C$$

$$i_C = \frac{v_{in}}{R}$$

$$v_C = \frac{1}{C}\int_0^t i_C(t')dt'$$

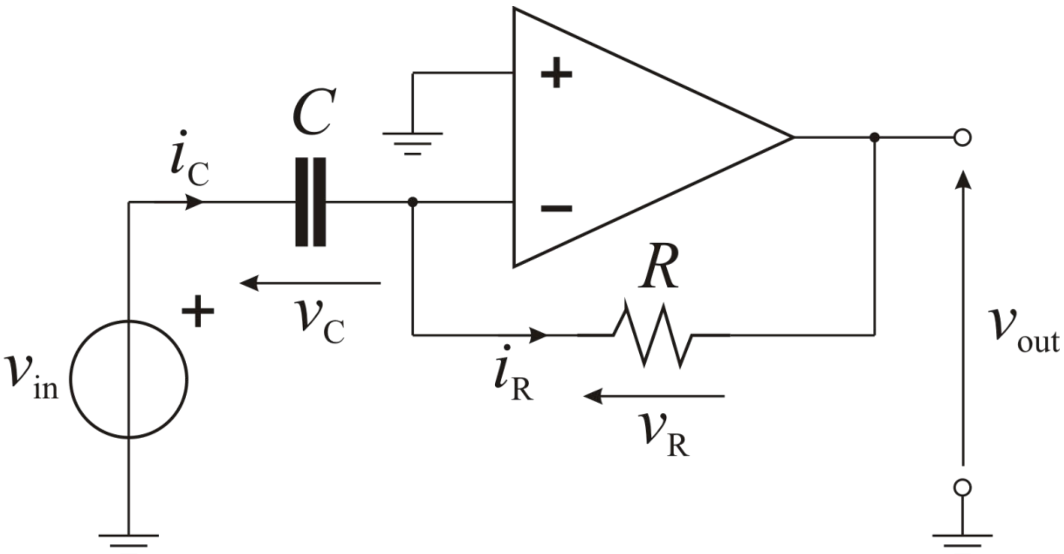
$$\Rightarrow \quad v_{out} = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_{in}(t')dt'$$

$R_{in} = R$ (*)

$R_{out} = 0$

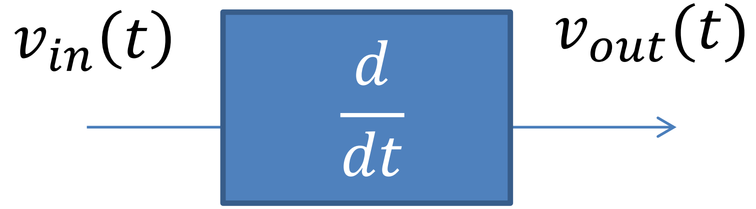
(*) Come per l'amplificatore invertente, la resistenza d'ingresso è finita e può dare luogo ad effetto di carico. Se fosse un problema (i.e. se la resistenza di sorgente non è molto minore), lo si può far precedere da un *voltage follower.*

Derivatore



$$v_{out} = -RC\frac{dv_{in}}{dt}$$

Blocco Funzionale



$v_{in} = v_C \quad i_C = C\frac{dv_C}{dt}$

$i_R = i_C$

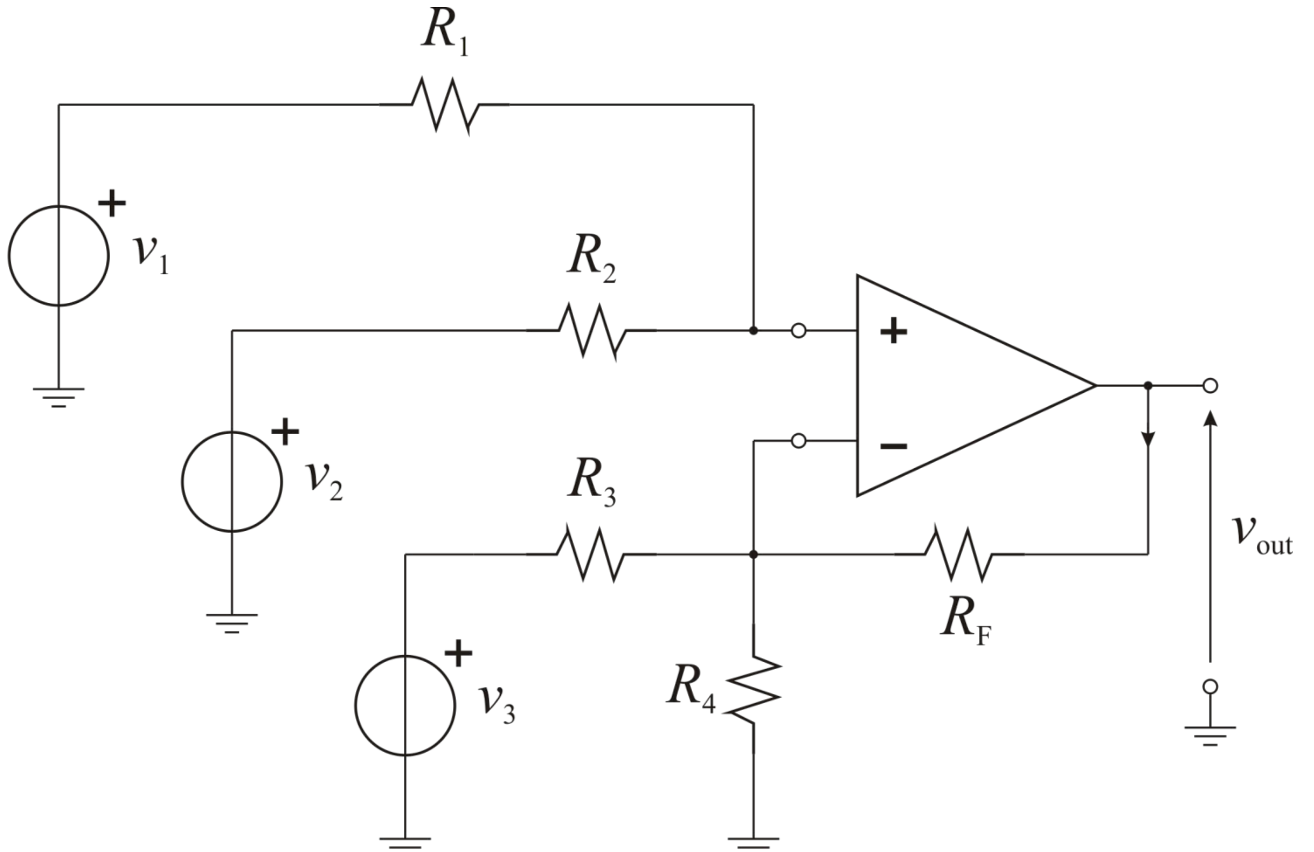
$v_{out} = -v_R = -Ri_R \Rightarrow v_{out} = -RC\frac{dv_{in}}{dt}$

$R_{in} \to \infty$ (in DC)
$Z_{in}(\omega) = \frac{1}{j\omega C}$ (nel dominio della frequenza)

$R_{out} = 0$

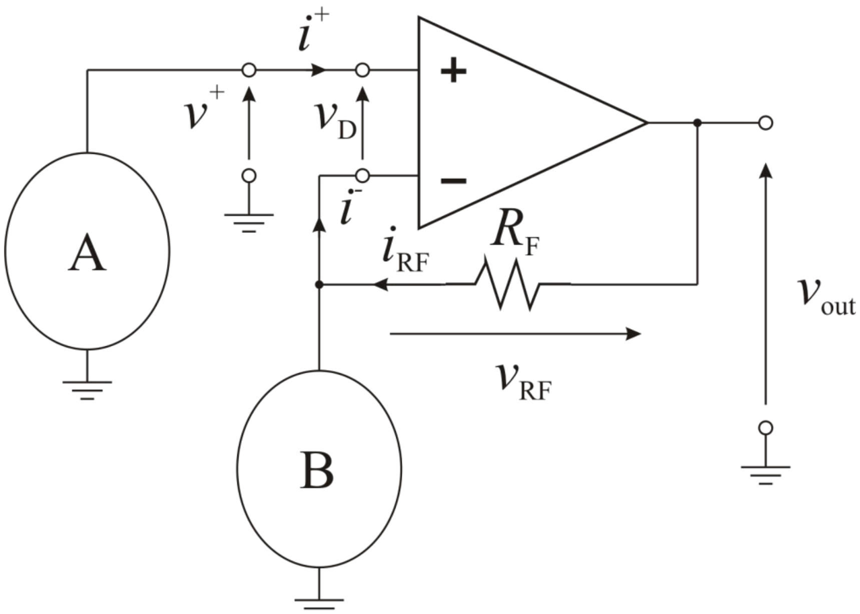
Analisi di Circuiti con Operazionali

Determinare la tensione d'uscita v_{out} nel circuito in figura in funzione degli ingressi v_1, v_2 e v_3.



Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: I metodo (I)

***I metodo*: analisi diretta** a partire dalle relazioni costitutive



Operazionale Ideale

$v^- = v^+$

$i^+ = i^- = 0$

In un circuito con operazionale ideale con retroazione negativa ed un resistore di feedback R_F (o altro bipolo) che collega l'uscita all'ingresso invertente, essendo $v^- = v^+$, per la KVL l'uscita si può sempre scrivere come:

$$v_{out} = v_{RF} + v^+$$

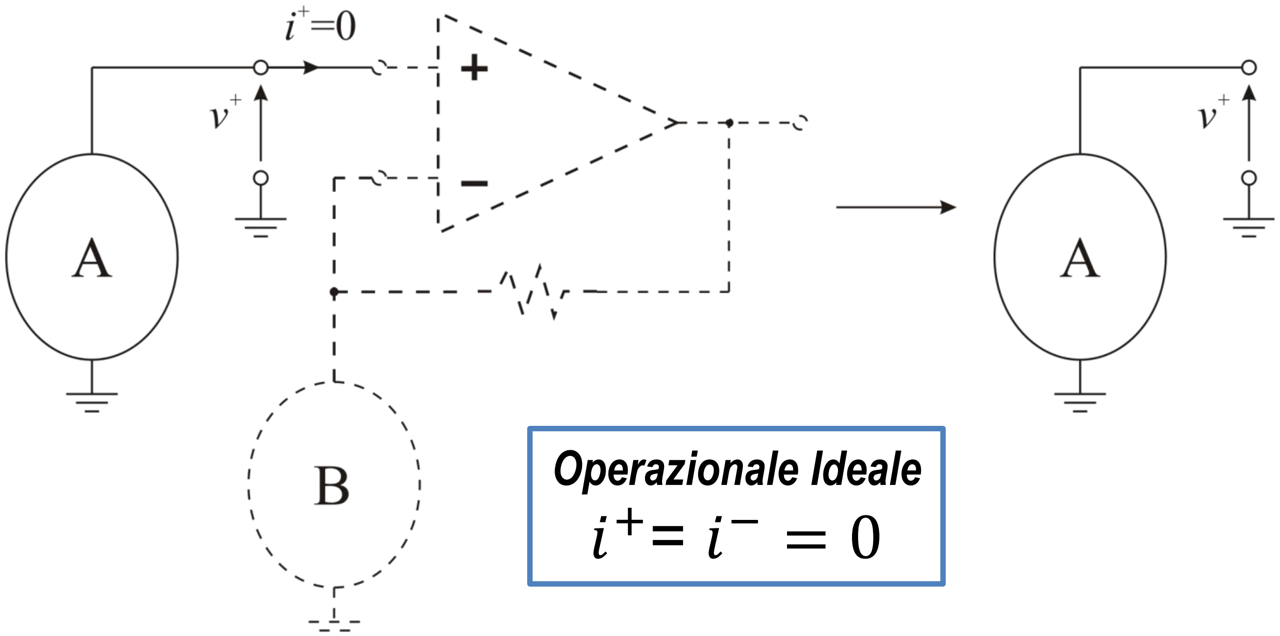
dove v_{RF} è la tensione sul resistore (o altro bipolo) in feedback.

Per valutare la tensione di uscita v_{out}, si tratta quindi di determinare:

- La tensione al morsetto non invertente, v^+
- La caduta di tensione sul resistore (o altro bipolo) in retroazione, v_{RF}

Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: I metodo (II)

Tensione v^+ all'ingresso non-invertente



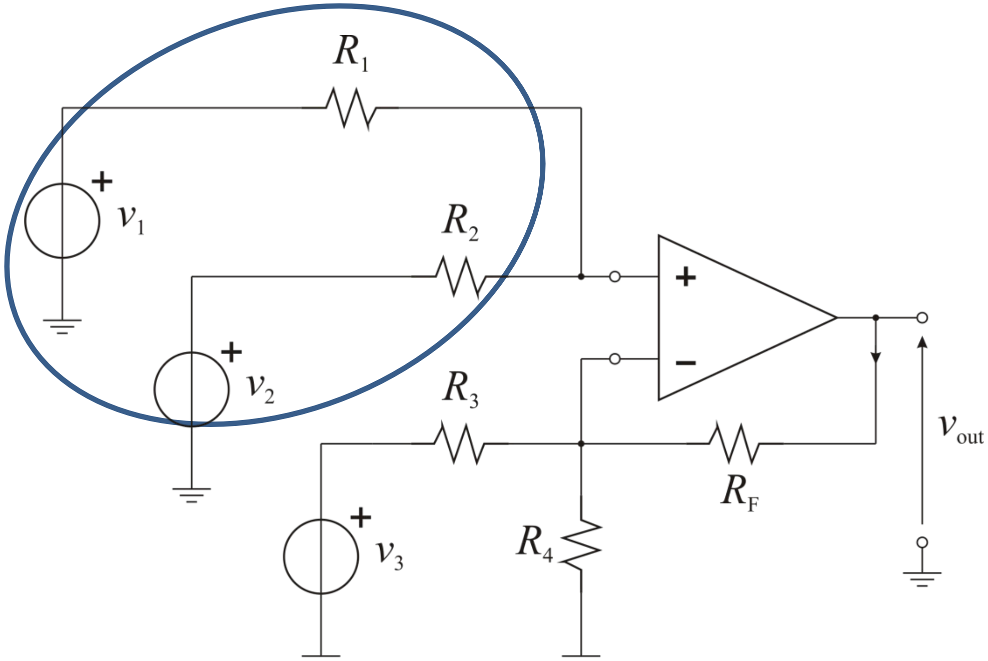
Operazionale Ideale

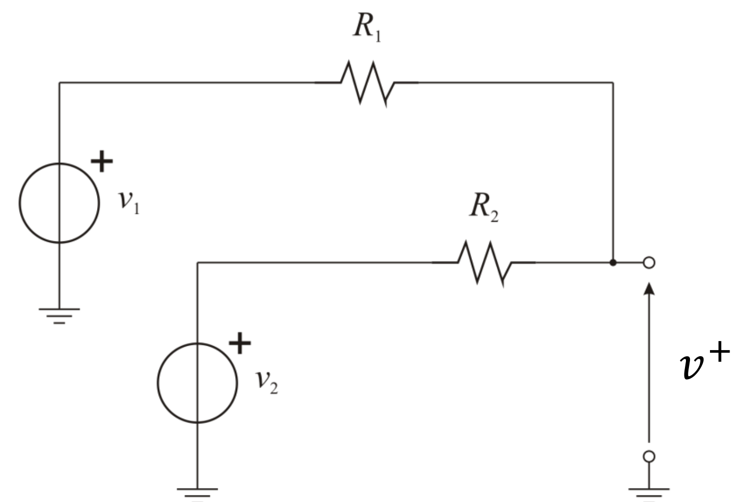
$$i^+ = i^- = 0$$

Dal momento che la corrente i^+ è nulla, la tensione v^+ è la stessa che si avrebbe ai capi del bipolo A a vuoto e può essere determinata facilmente.

Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: I metodo (III)

Tensione v^+ all'ingresso non-invertente

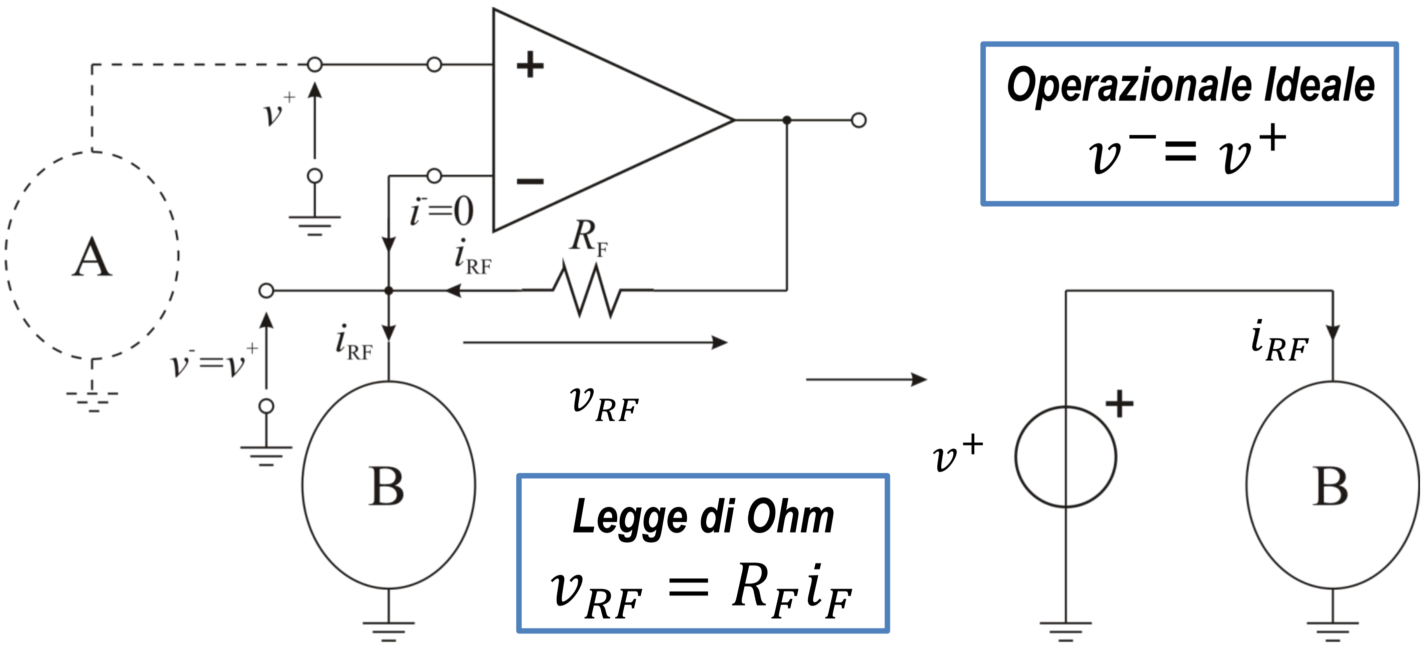




$$v^+ = \frac{R_2 v_1 + R_1 v_2}{R_1 + R_2}$$

Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: I metodo (IV)

Tensione v_{RF}



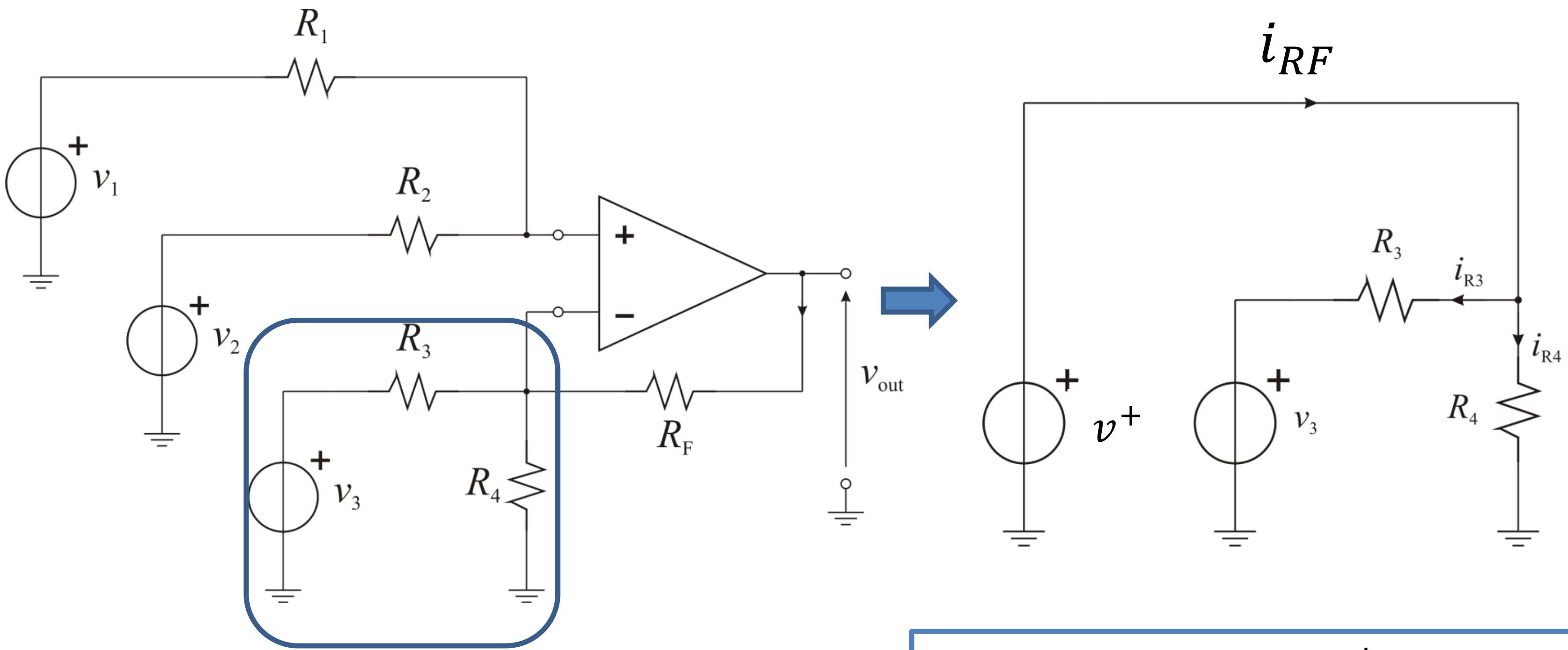
Operazionale Ideale
$v^- = v^+$

Legge di Ohm
$v_{RF} = R_F i_F$

- Per determinare v_{RF} si valuta la corrente i_{RF} che scorre in R_F e si applica la legge di Ohm.
- La corrente i_{RF} fluisce nel bipolo B, a cui è applicata una tensione $v^- = v^+$, che è ***nota*** dal passaggio precedente → per il teorema di sostituzione, è come se ci fosse un generatore ideale di tensione, di valore v^+, tra morsetto invertente e 0V.

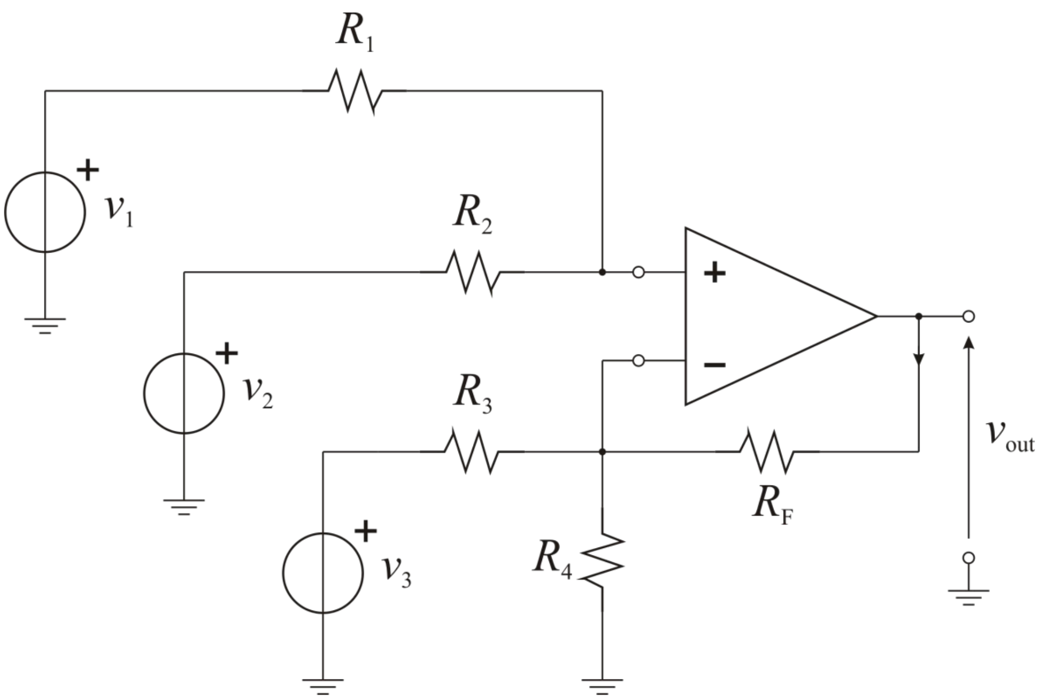
Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: I metodo (V)

Corrente i_{RF}



$$i_{RF} = i_{R3} + i_{R4} = \frac{v^+ - v_3}{R_3} + \frac{v^+}{R_4}$$

Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: I metodo (VI)



Dopo aver trovato v^+ e v_{RF}, non resta che scrivere la soluzione

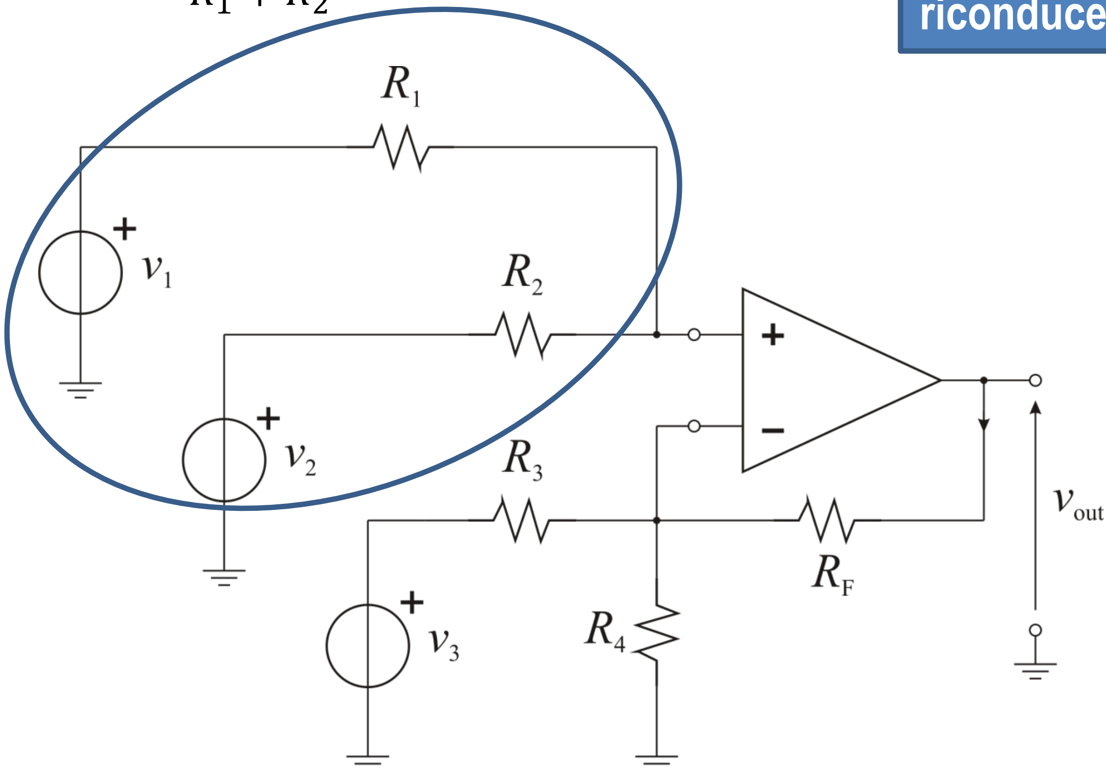
$$
\begin{aligned}
v_{out} &= v_{RF} + v^+ \\
&= R_F\left(\frac{v^+ - v_3}{R_3} + \frac{v^+}{R_4}\right) + v^+ \\
&= v^+\left(1 + \frac{R_F}{R_3 \| R_4}\right) - v_3\,\frac{R_F}{R_3}
\end{aligned}
$$

$$
v^+ = \frac{R_2 v_1 + R_1 v_2}{R_1 + R_2}
$$

$$
\boxed{v_{out} = \frac{R_2 v_1 + R_1 v_2}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_F}{R_3 \parallel R_4}\right) - v_3\,\frac{R_F}{R_3}}
$$

Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: Il metodo (I)

$$v^+ = \frac{R_2 v_1 + R_1 v_2}{R_1 + R_2}$$



***Il metodo*: sovrapposizione degli effetti, riconducendo il circuito a configurazioni base**

Essendo $i^+ = 0$, possiamo valutare direttamente la tensione all'ingresso non invertente e sostituire i generatori collegati all'ingresso non invertente con un unico generatore di tensione equivalente v^+ (vedi primo metodo) nella sovrapposizione degli effetti.

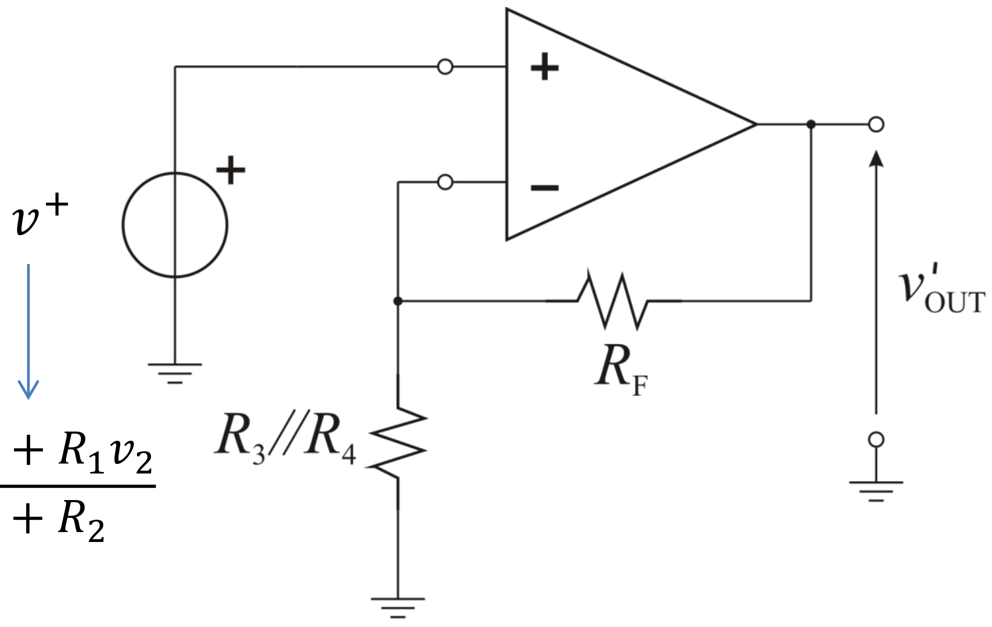
$$v_{out} = v'_{out} + v''_{out}$$

contributo di v^+ (comprende v_1 e v_2)

contributo di v_3

Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: II metodo (II)

contributo di v^+



$$\frac{R_2 v_1 + R_1 v_2}{R_1 + R_2}$$

ci si riconduce ad un **amplificatore di tensione non invertente**

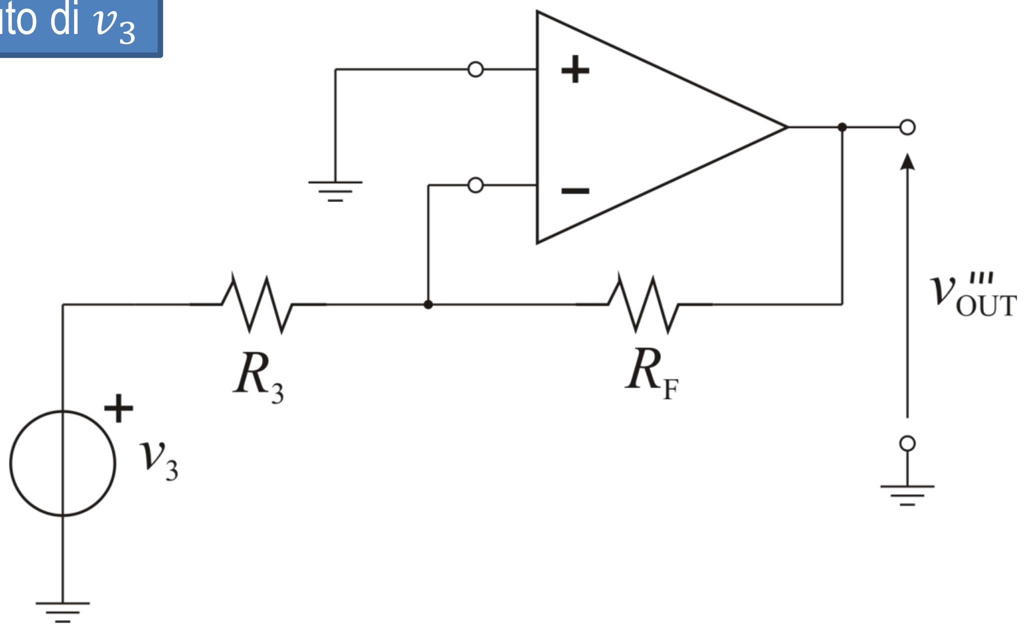
$$v'_{out} = v^+ \left(1 + \frac{R_F}{R_3 \parallel R_4}\right)$$

$$v^+ = \frac{R_2 v_1 + R_1 v_2}{R_1 + R_2}$$

- Per determinare l'effetto di v^+ sull'uscita spegniamo v_3. Così facendo, R_3 ed R_4 sono in parallelo e ci si riconduce al caso dell'***amplificatore di tensione*** (non invertente).
- Ricordando la relazione tra ingresso ed uscita dell'amplificatore di tensione, si scrive direttamente l'espressione del contributo sull'uscita v'_{out} di v^+.

Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: Il metodo (III)

contributo di v_3

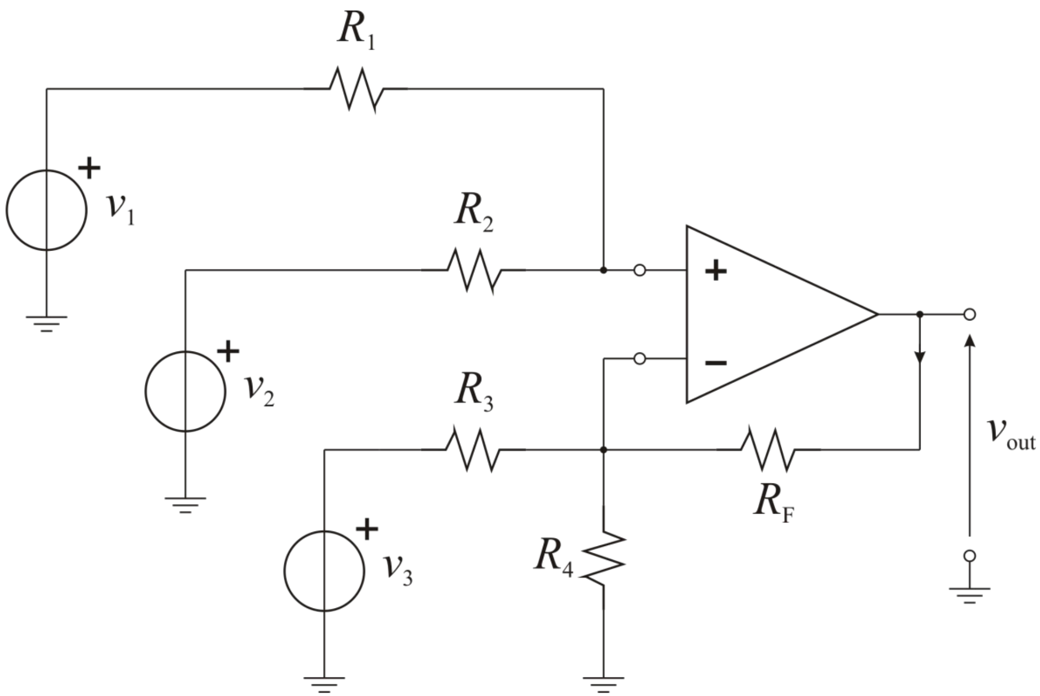


ci si riconduce ad un **amplificatore invertente**

$$v''_{out} = -\frac{R_F}{R_3} v_3$$

- Per determinare l'effetto di v_3, spegniamo v_1 e v_2. Essendo $i^+ = 0$, in R_1 e R_2 non passa corrente e l'ingresso non invertente può considerarsi collegato direttamente a 0V.
- Essendo $v^+ = 0$, anche $v^- = 0$ per cui nella resistenza R_4 dello schema originale *non passa corrente* e può essere eliminata.
- Il circuito si riconduce così ad un ***amplificatore invertente*** e si risolve immediatamente.

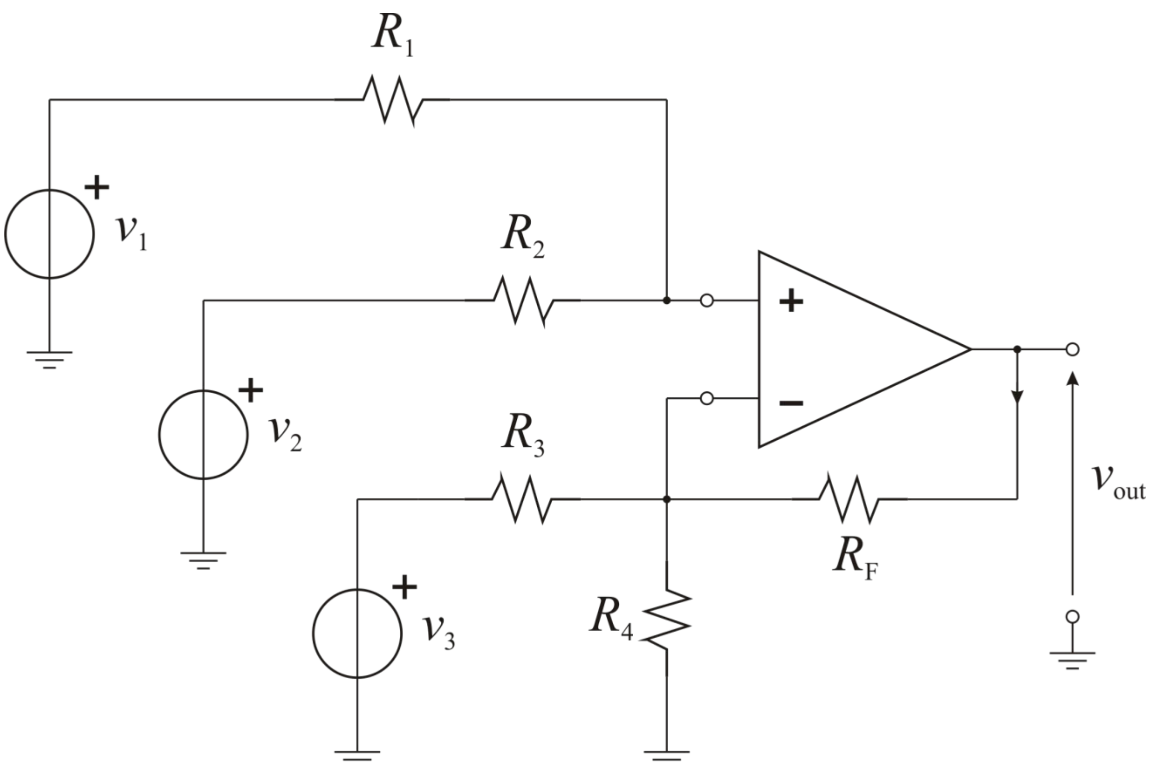
Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: Il metodo (IV)



Sovrapponendo gli effetti:

$$v_{out} = \frac{R_2 v_1 + R_1 v_2}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_F}{R_3 \parallel R_4}\right) - v_3 \frac{R_F}{R_3}$$

Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: III metodo (I)



***III metodo*: Teorema di Millman**

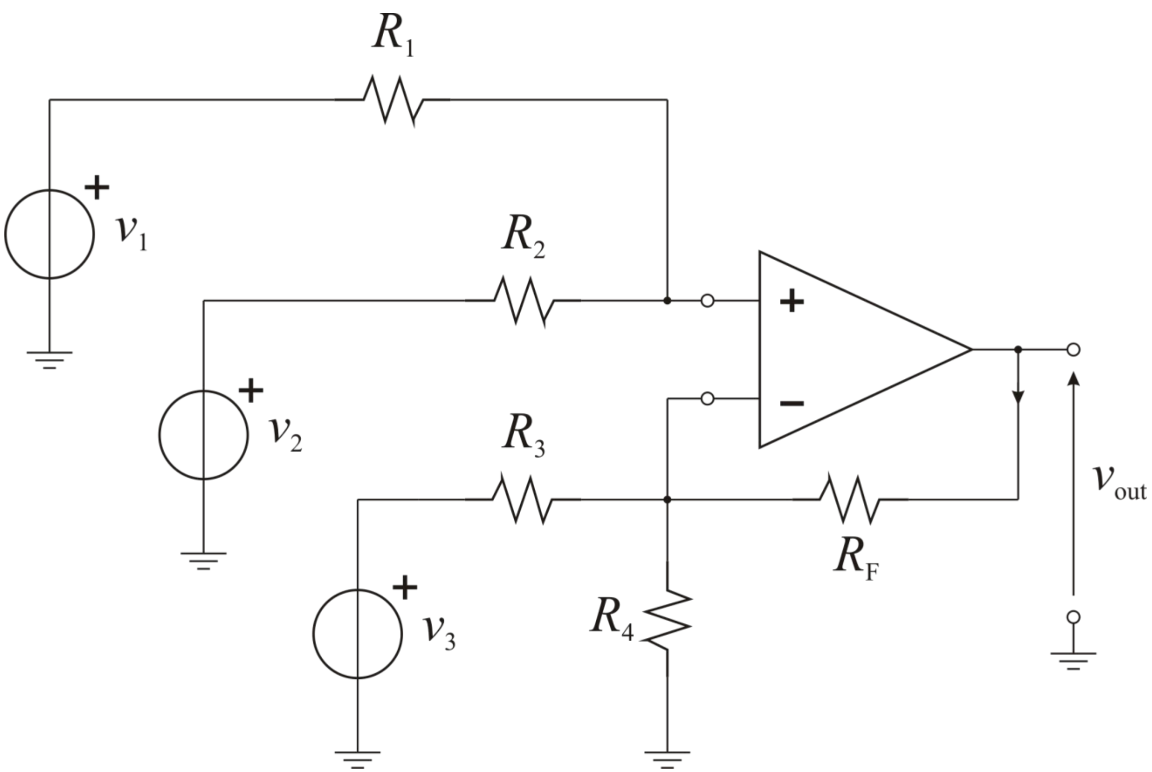
Assumendo di conoscere v_{out}, ed essendo $i^+ = i^- = 0$, si possono ricavare indipendentemente v^+ e v^- con il teorema di Millman

$$v^+ = \frac{G_1 v_1 + G_2 v_2}{G_1 + G_2}$$

$$v^- = \frac{G_3 v_3 + G_F v_{out}}{G_3 + G_4 + G_F}$$

$$\left(G_x = \frac{1}{R_x} \; \forall x \right)$$

Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: III metodo (II)



Si impone quindi l'uguaglianza $v^+ = v^-$ e da questa si ricava l'uscita v_{out}

$$v^+ = v^-$$

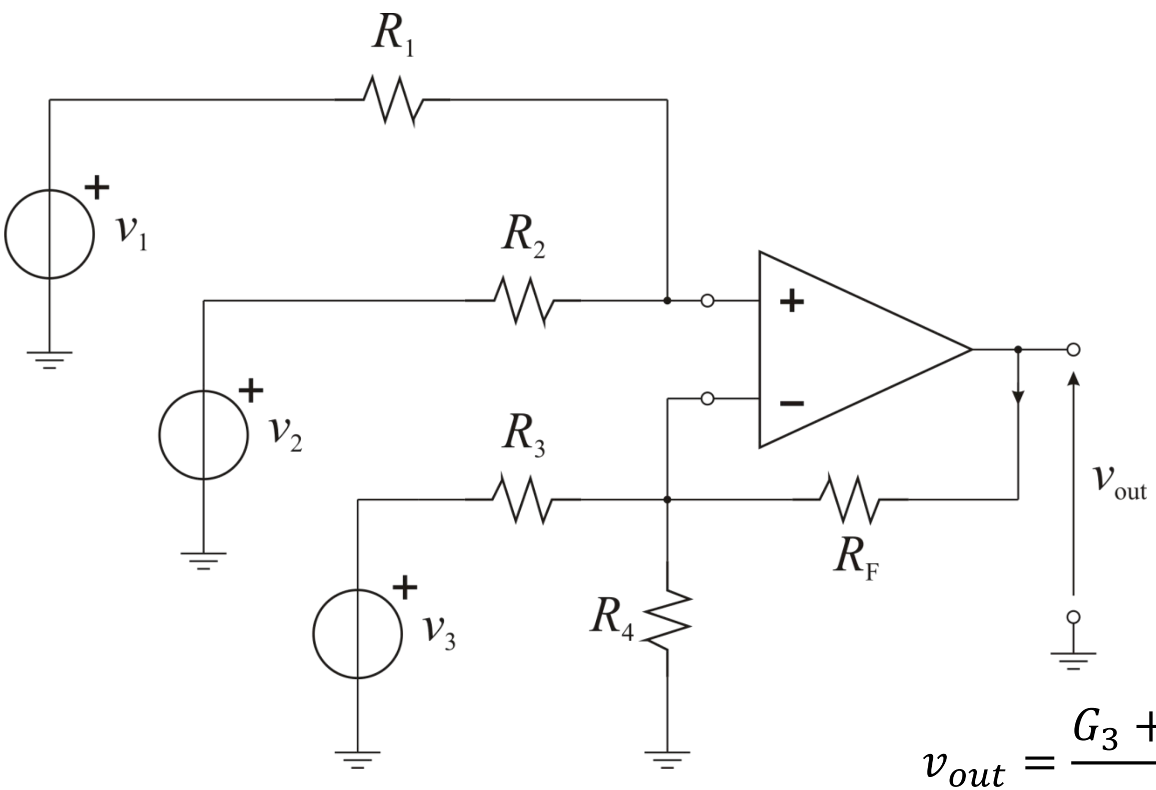
$$\Downarrow$$

$$\frac{G_1 v_1 + G_2 v_2}{G_1 + G_2} = \frac{G_3 v_3 + G_F v_{out}}{G_3 + G_4 + G_F}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v_{out} = \frac{G_3 + G_4 + G_F}{G_F} \frac{G_1 v_1 + G_2 v_2}{G_1 + G_2} - \frac{G_3}{G_F} v_3}$$

Analisi di Circuiti con Operazionali Ideali: III metodo (III)

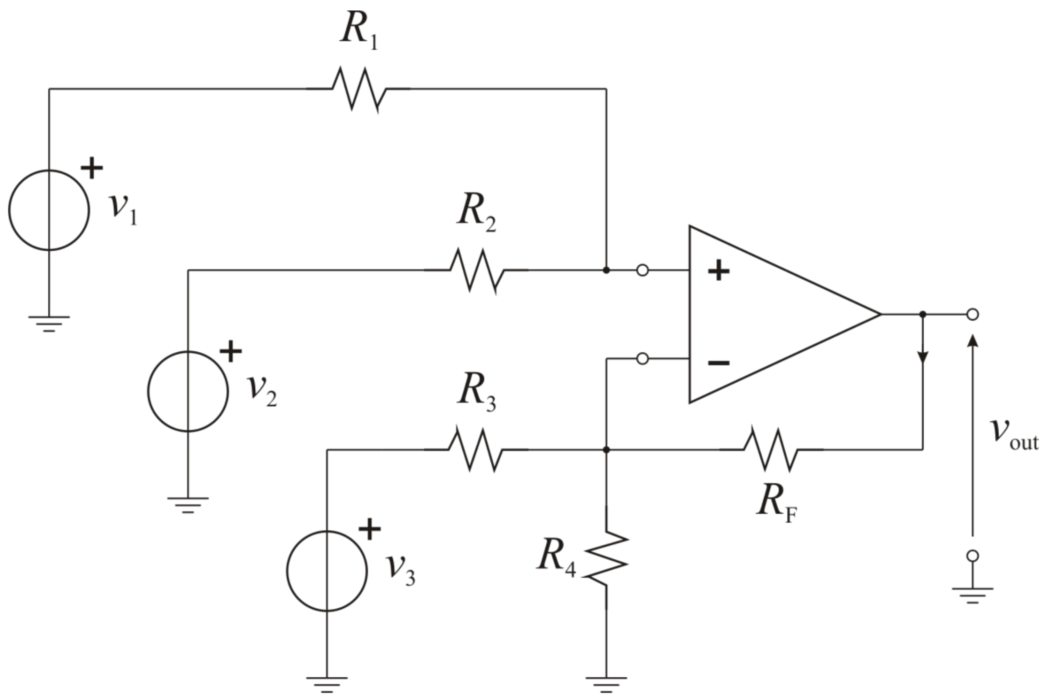


Dopo alcuni passaggi algebrici si ritrova l'espressione ottenuta in precedenza con gli altri metodi.

$$v_{out} = \frac{G_3 + G_4 + G_F}{G_F} \frac{G_1 v_1 + G_2 v_2}{G_1 + G_2} - \frac{G_3}{G_F} v_3$$

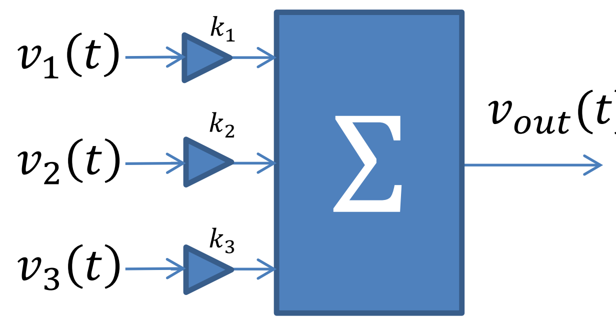
$$\boxed{v_{out} = \frac{R_2 v_1 + R_1 v_2}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_F}{R_3 \parallel R_4}\right) - v_3 \frac{R_F}{R_3}}$$

Sommatore (I)



$$v_{out}(t) = \sum_i k_i \, v_i(t)$$

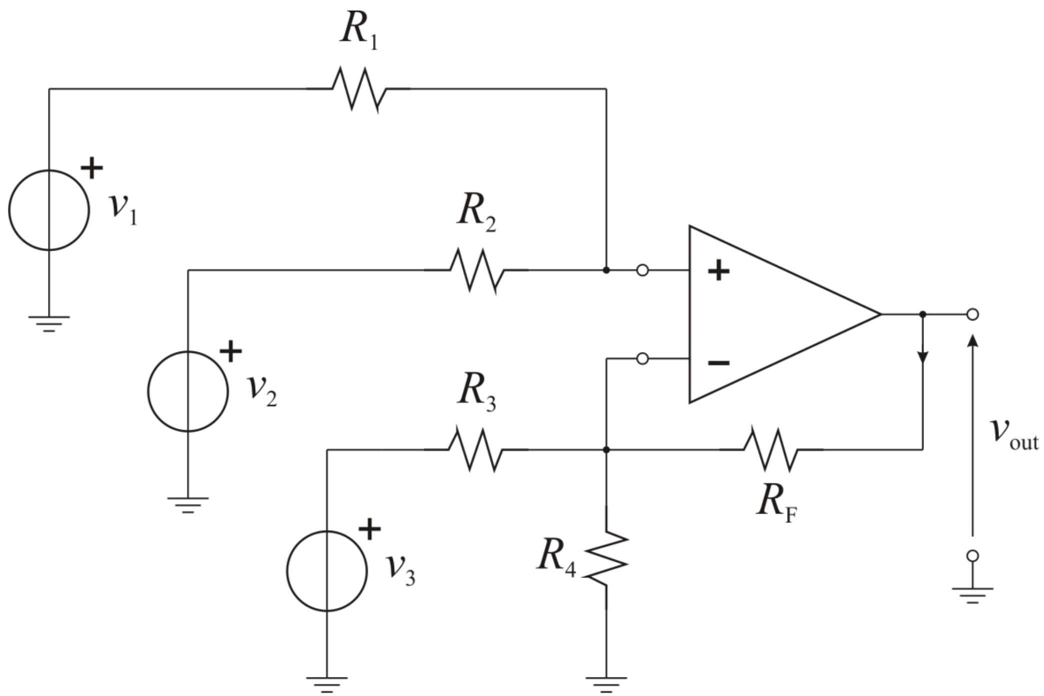
Blocco Funzionale



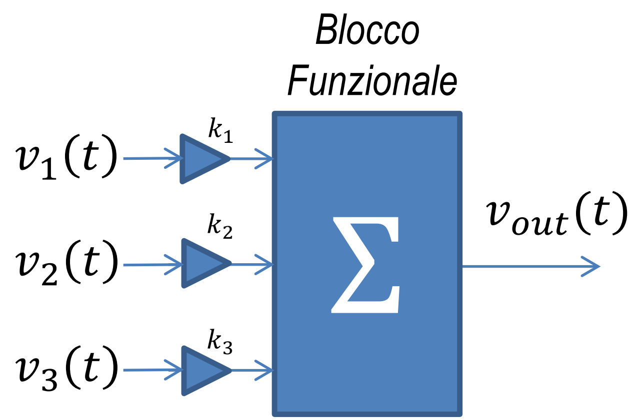
Il circuito analizzato esegue la somma algebrica pesata delle tensioni in ingresso

$$v_{out} = \underbrace{\frac{R_2}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_F}{R_3 \parallel R_4}\right)}_{k_1 > 0} v_1 + \underbrace{\frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_F}{R_3 \parallel R_4}\right)}_{k_2 > 0} v_2 \underbrace{- \frac{R_F}{R_3}}_{k_3 < 0} v_3$$

Sommatore (II)



$$v_{out}(t) = \sum_i k_i\, v_i(t)$$

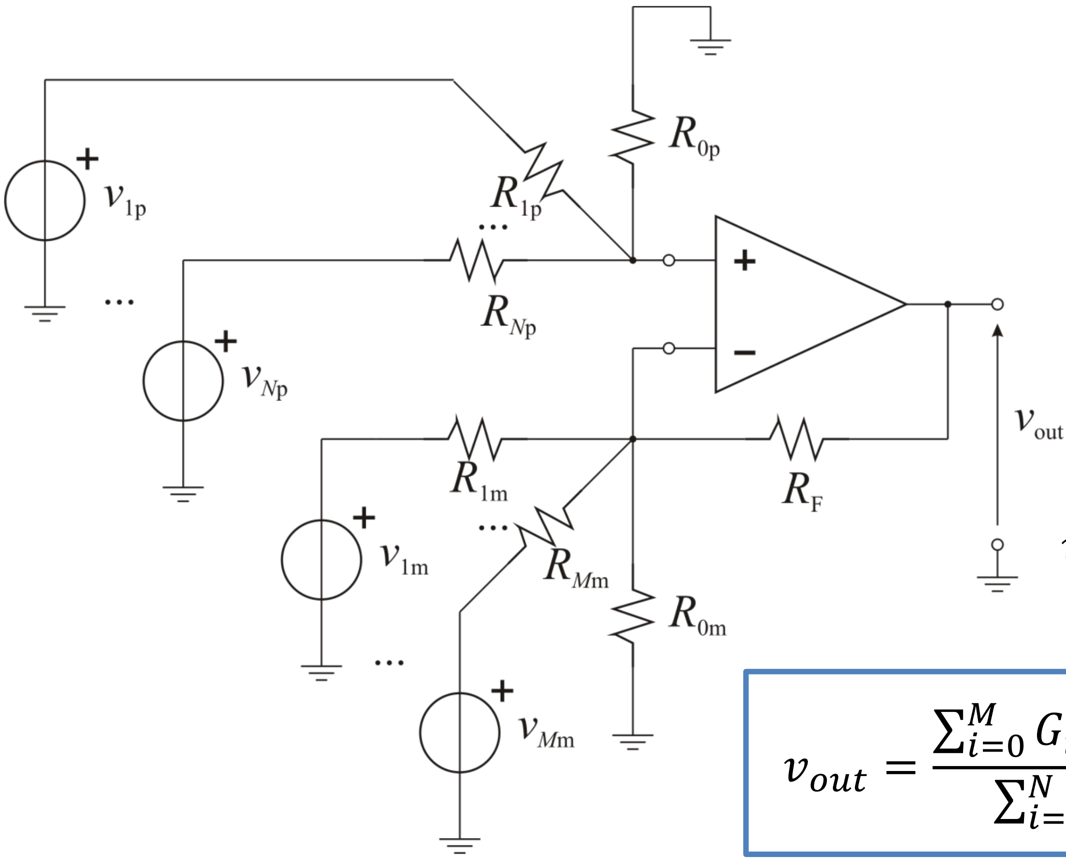


Il circuito analizzato esegue la somma algebrica pesata delle tensioni in ingresso

Osservazioni:

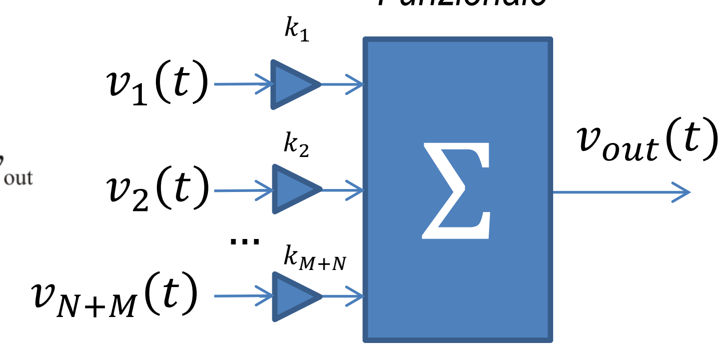
- le resistenze equivalenti viste dai generatori di tensione che forniscono le tensioni di ingresso da sommare non sono infinite (calcolo lasciato per esercizio) → si ha effetto di carico in ingresso.
- se l'effetto di carico sugli ingressi non è accettabile, è possibile introdurre stadi *voltage follower*.

Sommatore Generalizzato (I)



$$v_{out}(t) = \sum_i k_i\, v_i(t)$$

Blocco Funzionale

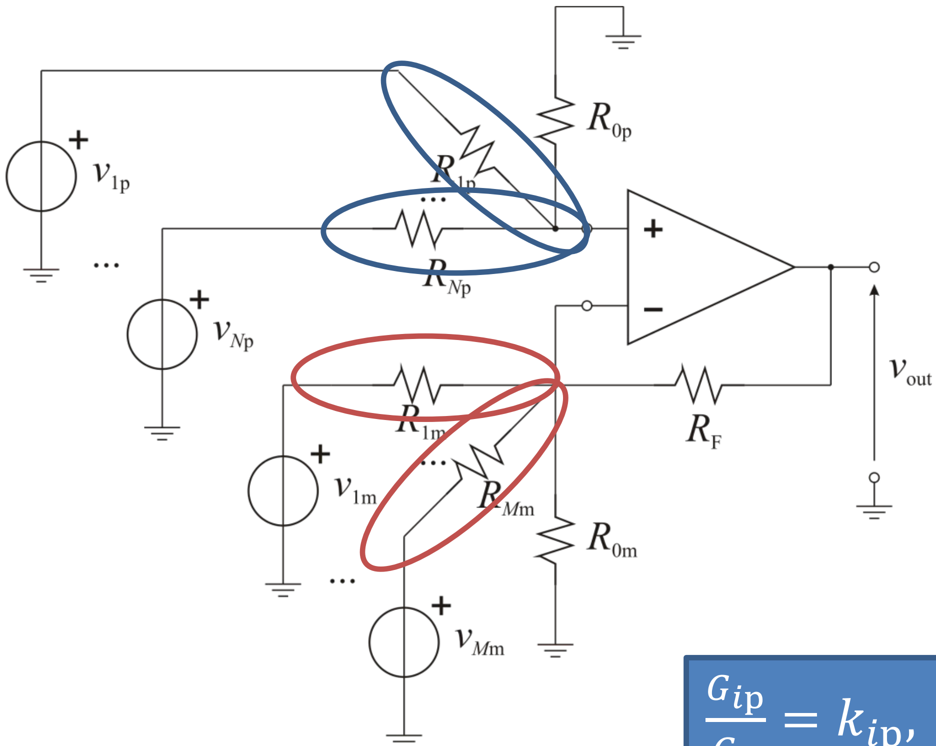


$$v_{out} = \frac{\sum_{i=0}^{M} G_{im} + G_F}{\sum_{i=0}^{N} G_{ip}} \sum_{i=1}^{N} \frac{G_{ip}}{G_F} v_{ip} - \sum_{i=1}^{M} \frac{G_{im}}{G_F} v_{im}$$

Il sommatore può essere generalizzato come in figura per eseguire la somma pesata di $N + M$ tensioni (N con pesi positivi, M con pesi negativi)

Sommatore Generalizzato (II)

Date le tensioni v_{ip} (i=1…*N*) e v_{im} (i=1…*M*), fornite da generatori ideali, dimensionare il sommatore per avere in uscita $v_{out} = \sum_{i=1}^{N} k_{ip} v_{ip} - \sum_{i=1}^{M} k_{im}\, v_{im}$, con k_{ip}, k_{in} dati.



$$v_{out} = \frac{\sum_{i=0}^{M} G_{im} + G_F}{\sum_{i=0}^{N} G_{ip}} \sum_{i=1}^{N} \frac{G_{ip}}{G_F} v_{ip} - \sum_{i=1}^{M} \frac{G_{im}}{G_F} v_{im}$$

1) assumendo $\sum_{i=0}^{N} G_{ip} = \sum_{i=0}^{N} G_{im} + G_F$ (il che non è vero in generale, dovremo poi far sì che l'assunzione sia verificata), si ha che:

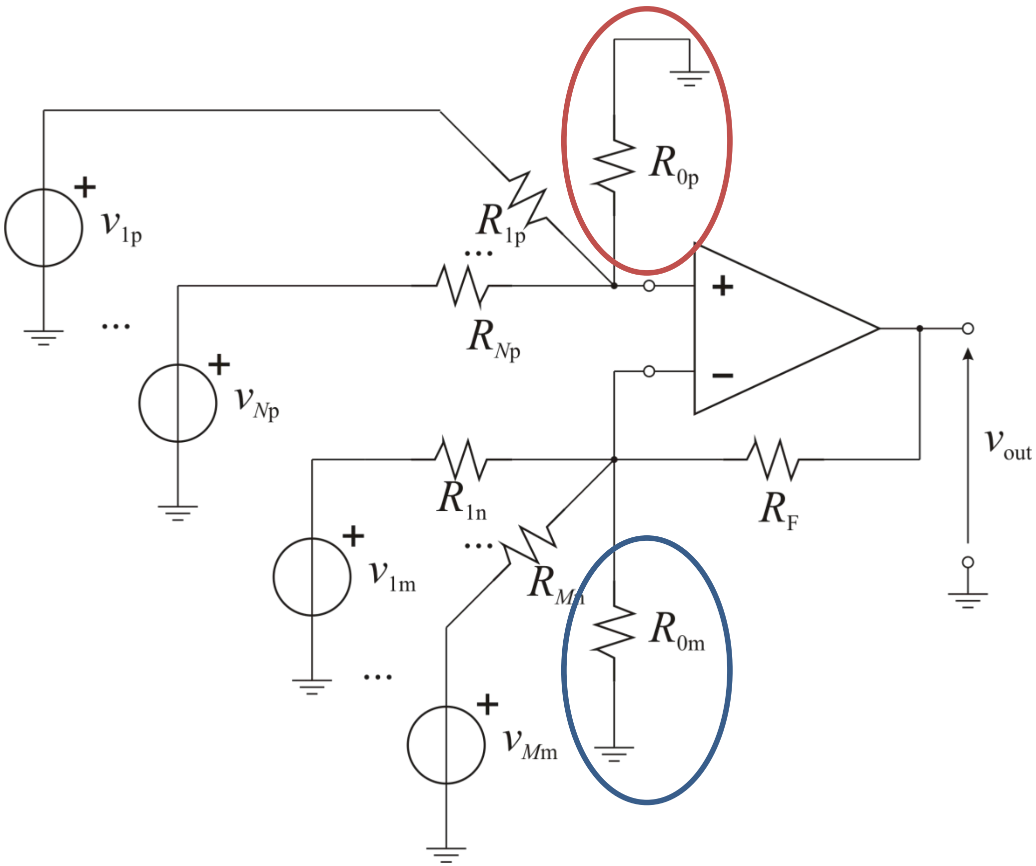
$$v_{out} = \sum_{i=1}^{N} \frac{G_{ip}}{G_F} v_{ip} - \sum_{i=1}^{M} \frac{G_{im}}{G_F} v_{im}$$

e si determinano direttamente i rapporti tra le conduttanze in serie ai generatori e G_F

$$\boxed{\frac{G_{ip}}{G_F} = k_{ip},\ 1 \le i \le N} \qquad \boxed{\frac{G_{im}}{G_F} = k_{im},\ 1 \le i \le M}$$

Nota: restano da determinare le conduttanze G_{0m}, G_{0p} tra gli ingressi dell'operazionale e 0V

Sommatore Generalizzato (III)



2) Si determinano le conduttanze $G_{0\mathrm{m}}$, $G_{0\mathrm{p}}$ tra gli ingressi e 0V in modo che l'assunzione $\sum_{i=0}^{N} G_{ip} = \sum_{i=0}^{N} G_{im} + G_F$ sia verificata. A tale fine, dette:

$$G'_{\mathrm{p}} = \sum_{i=1}^{N} G_{ip} \qquad G'_{\mathrm{m}} = \sum_{i=1}^{N} G_{im} + G_F$$

se $G'_{\mathrm{p}} > G'_{\mathrm{m}}$

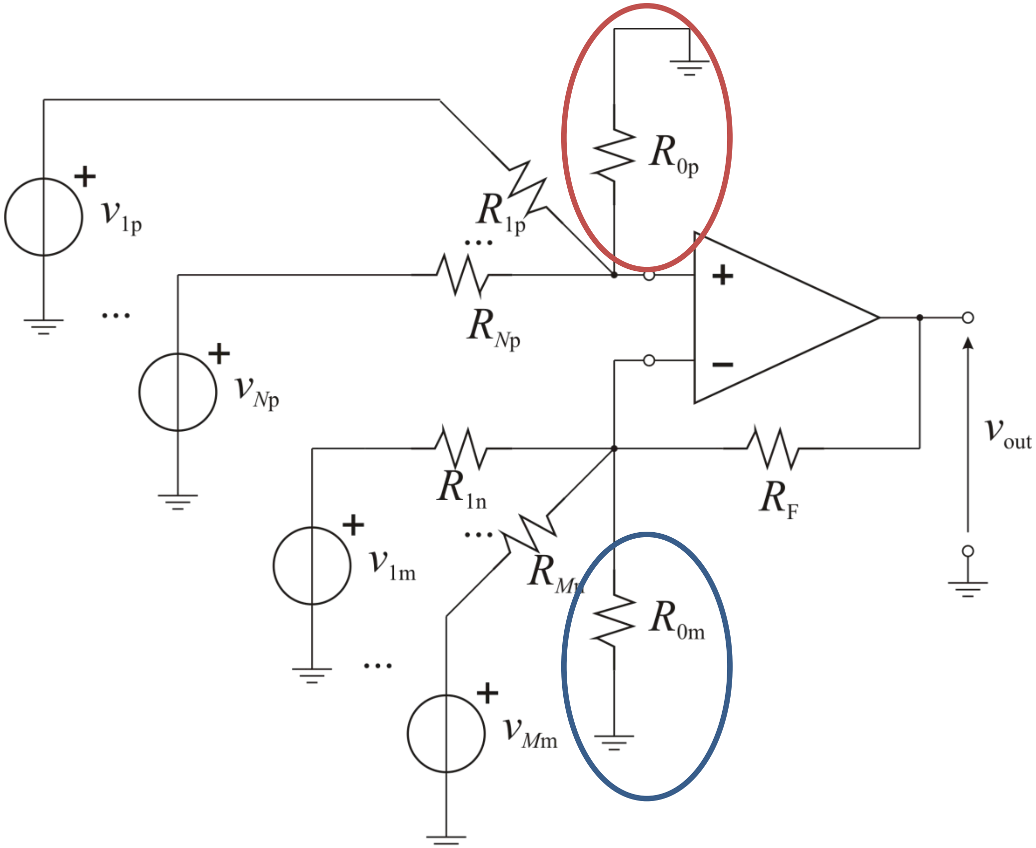
si pone: $G_{0\mathrm{m}} = G'_{\mathrm{p}} - G'_{\mathrm{m}}$, e $G_{0\mathrm{p}} = 0$

se $G'_{\mathrm{p}} < G'_{\mathrm{m}}$

si pone: $G_{0\mathrm{m}} = G'_{\mathrm{m}} - G'_{\mathrm{p}}$, e $G_{0\mathrm{m}} = 0$

In altre parole: si aggiunge un resistore tra 0V e l'ingresso per cui la somma delle conduttanze dei generatori (G'_{p} o G'_{m}) è minore, di valore tale da rendere la somma delle conduttanze collegate a quell'ingresso uguale alla somma delle conduttanze collegate all'altro ingresso, verificando l'assunzione di partenza.

Sommatore Generalizzato (IV)



$$v_{out} = \sum_{i=1}^{N} k_{ip} v_{ip} - \sum_{i=1}^{M} k_{im}\, v_{im}$$

$$\frac{G_{ip}}{G_F} = k_{ip},\ 1 \le i \le N$$

$$\frac{G_{im}}{G_F} = k_{im}, 1 \le i \le M$$

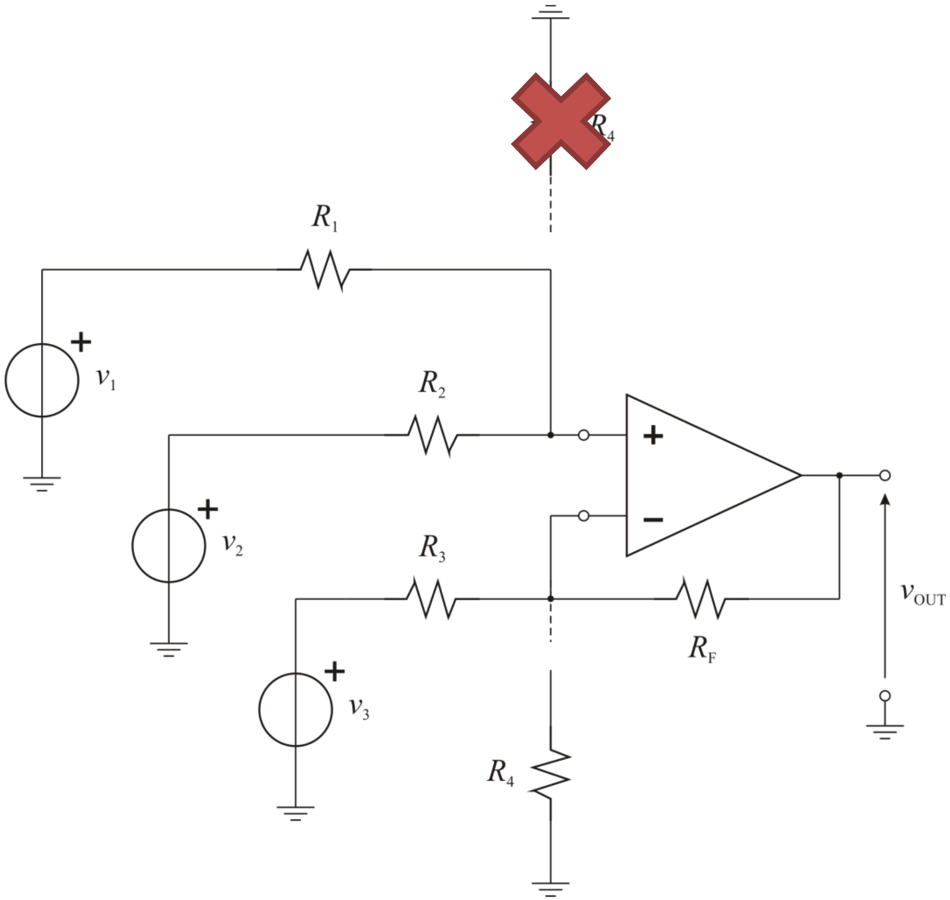
se $G'_p > G'_m$	$G_{0m} = G'_p - G'_m$, e $G_{0p} = 0$
se $G'_p < G'_m$	$G_{0p} = G'_m - G'_p$, e $G_{0m} = 0$

Le relazioni ricavate forniscono i rapporti tra tutte le resistenze ed R_F.

- Le relazioni trovate risolvono l'esercizio, ma sono solo il primo passo in un progetto vero e proprio.
- Il progetto è un problema ingegneristico complesso con numerose altre variabili: caratteristiche dei segnali, tecnologie di fabbricazione, limitazioni dei componenti, costi e reperibilità dei componenti…
- Affrontare questi aspetti esula dallo scopo di questo corso.

Esercizio

Utilizzando una resistenza di retroazione $R_F = 100\text{k}\Omega$ progettare un circuito che generi una tensione $v_{out} = 3v_1 + 4v_2 - v_3$ a partire da v_1, v_2 e v_3 forniti da generatori ideali di tensione.



Utilizzando le formule, per i coefficienti positivi

$$G_1 = 3G_F \qquad G_2 = 4G_F$$

Per il coefficiente negativo:

$$G_3 = G_F$$

Somma delle conduttanze al morsetto invertente:

$$G'_m = G_F + G_F = 2G_F$$

Somma delle conduttanze al morsetto non-invertente:

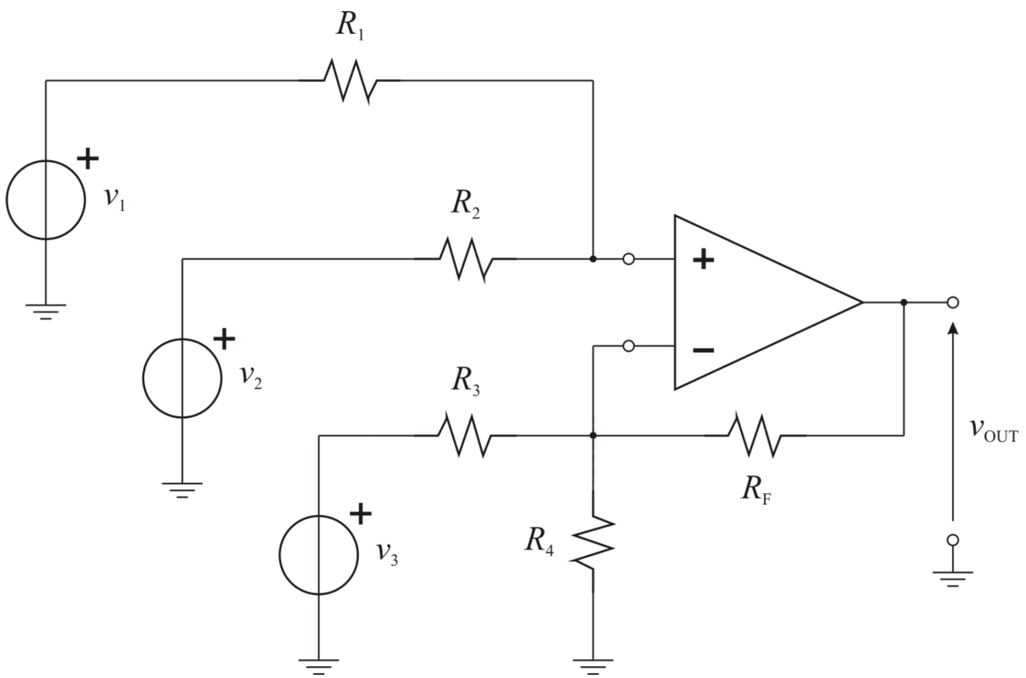
$$G'_p = 3G_F + 4G_F = 7G_F$$

Essendo $G'_p > G'_m$ è necessario aggiungere una conduttanza G_4 verso 0V **all'ingresso invertente**

$$G_4 = G'_p - G'_m = 5G_F$$

Esercizio

Utilizzando una resistenza di retroazione $R_F = 100\text{k}\Omega$ progettare un circuito che generi una tensione $v_{out} = 3v_1 + 4v_2 - v_3$ a partire da v_1, v_2 e v_3 forniti da generatori ideali di tensione.



Si ottiene quindi:

$$G_1 = 3G_F \qquad R_1 = \frac{R_F}{3} = 33\text{k}\Omega$$

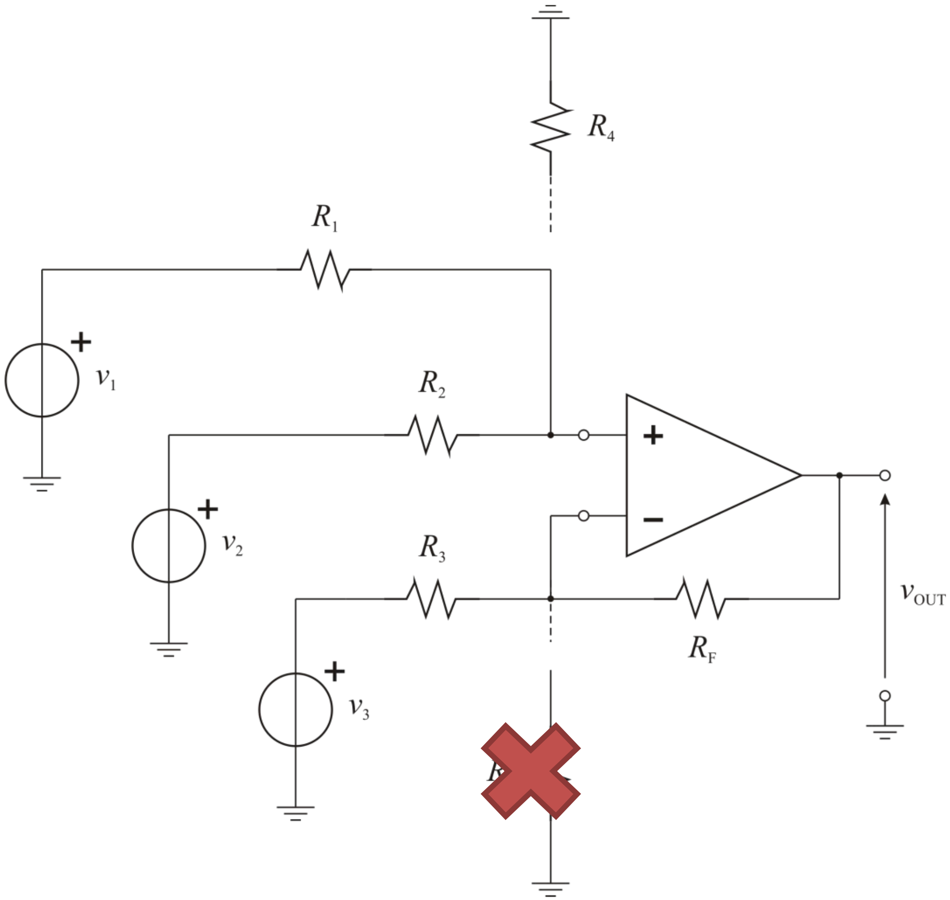
$$G_2 = 4G_F \qquad R_1 = \frac{R_F}{4} = 25\text{k}\Omega$$

$$G_3 = G_F \qquad R_3 = R_F = 100\text{k}\Omega$$

$$G_4 = 5G_F \qquad R_4 = \frac{R_F}{5} = 20\text{k}\Omega$$

Esercizio

Utilizzando una resistenza di retroazione $R_F = 100\text{k}\Omega$ progettare un circuito che generi una tensione $v_{out} = v_1 + 2v_2 - 5v_3$ a partire da v_1, v_2 e v_3 forniti da generatori ideali di tensione.



Utilizzando le formule, per i coefficienti positivi

$$G_1 = G_F \qquad G_2 = 2G_F$$

Per il coefficiente negativo:

$$G_3 = 5G_F$$

Somma delle conduttanze al morsetto invertente:

$$G'_m = 5G_F + G_F = 6G_F$$

Somma delle conduttanze al morsetto non-invertente:

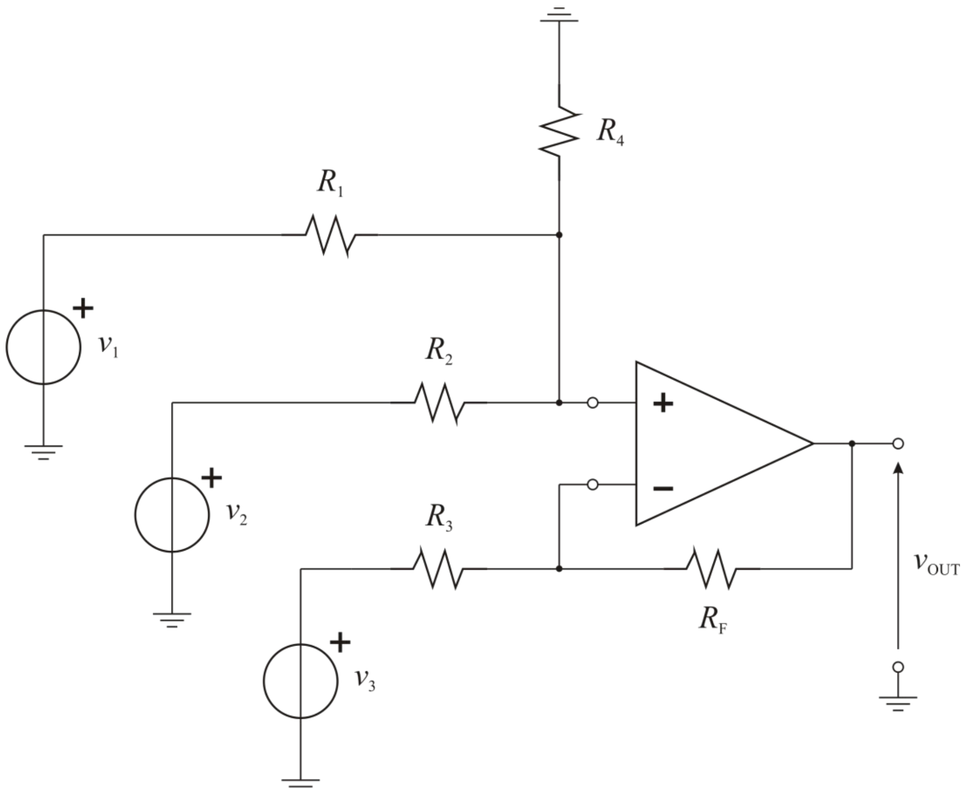
$$G'_p = 2G_F + G_F = 3G_F$$

Essendo $G'_p < G'_m$ è necessario aggiungere una conduttanza G_4 verso 0V **all'ingresso non invertente**

$$G_4 = G'_m - G'_p = 3G_F$$

Esercizio

Utilizzando una resistenza di retroazione $R_F = 100\text{k}\Omega$ progettare un circuito che generi una tensione $v_{out} = v_1 + 2v_2 - 5v_3$ a partire da v_1, v_2 e v_3 forniti da generatori ideali di tensione.



Si ottiene quindi:

$$G_1 = G_F \qquad R_1 = R_F = 100\text{k}\Omega$$

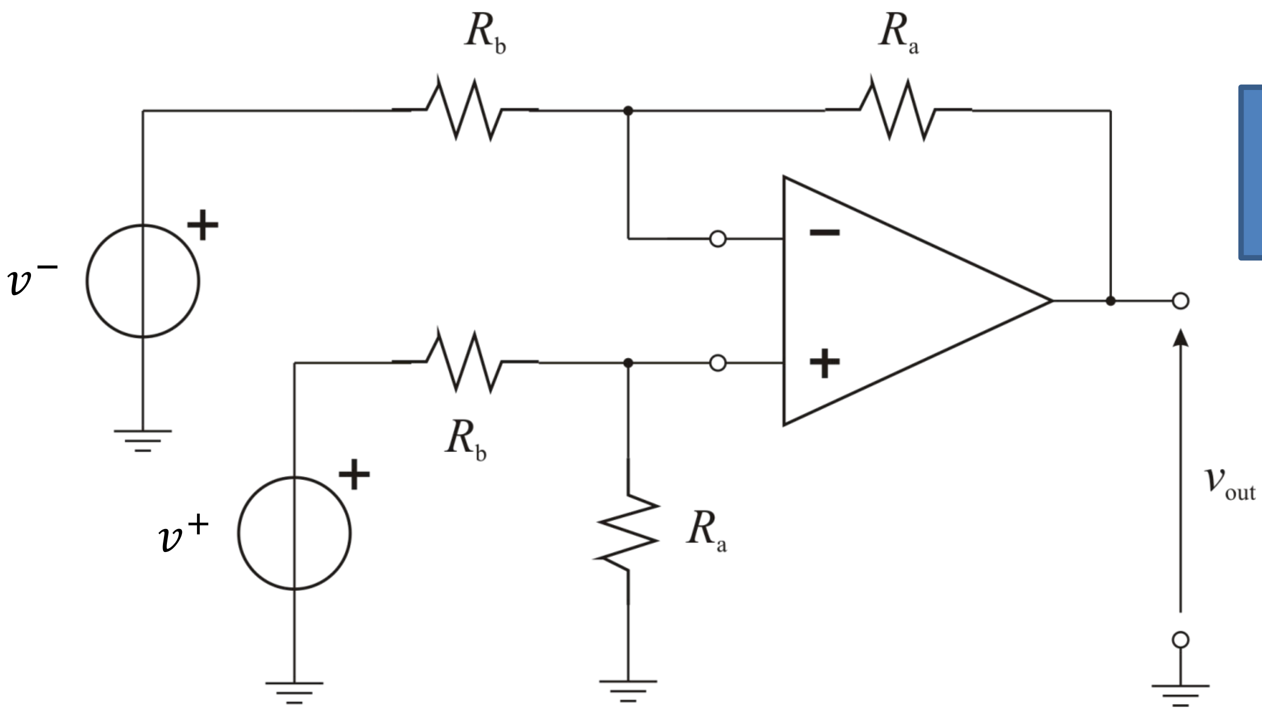
$$G_2 = 2G_F \qquad R_1 = \frac{R_F}{2} = 50\text{k}\Omega$$

$$G_3 = 5G_F \qquad R_3 = \frac{R_F}{5} = 20\text{k}\Omega$$

$$G_4 = 3G_F \qquad R_4 = \frac{R_F}{5} = 33\text{k}\Omega$$

Amplificatore Differenziale (I)

Tra i circuiti riconducibili al sommatore generalizzato riveste particolare importanza l'***amplificatore differenziale***, che fornisce una tensione d'uscita proporzionale alla *differenza* tra due tensioni v^+e v^- riferite a 0V.



$$v_{out} = \frac{R_a}{R_b}(v^+ - v^-)$$

$$R_{in(v1)} = R_a + R_b$$

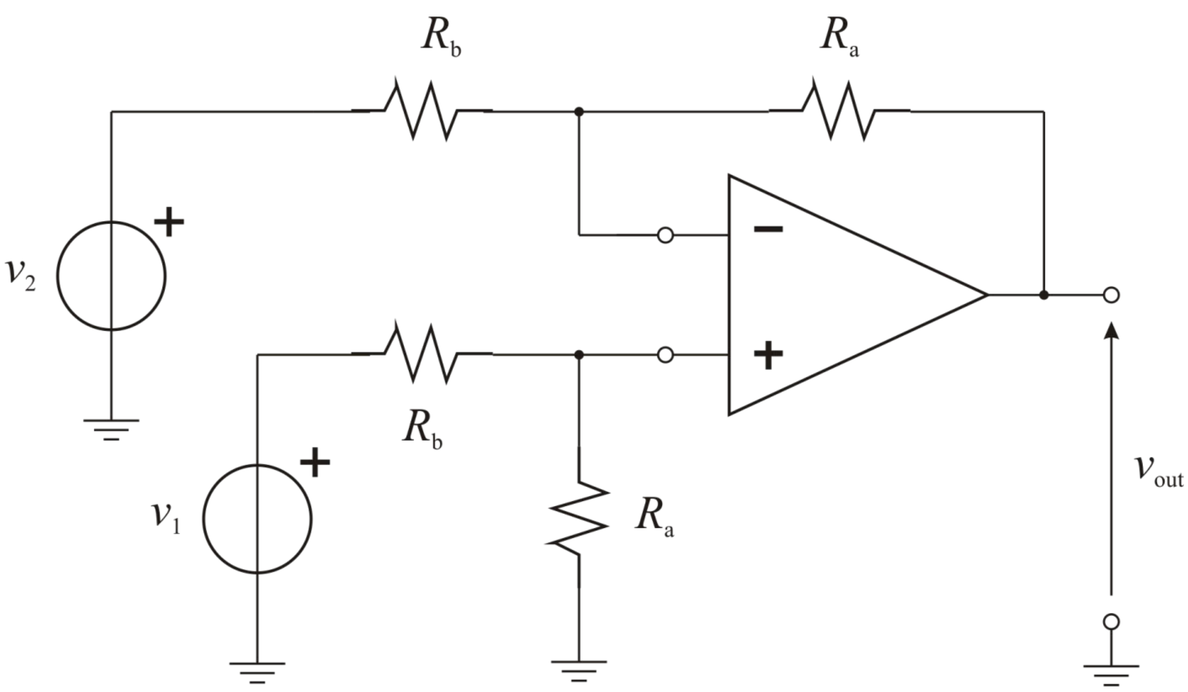
$$R_{in(v2)} = R_b$$

$$R_{out} = 0$$

$$v_{out} = v'_{out} + v''_{out} = v^+ \frac{R_a}{R_a + R_b}\left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) - v^- \frac{R_a}{R_b} = \frac{R_a}{R_b}(v^+ - v^-)$$

Modo Differenziale e Modo Comune

Quando si parla di circuiti differenziali è utile scomporre i segnali in ***componente differenziale,*** v_d (la differenza dei due segnali) e ***componente di modo comune,*** v_{cm} (la media aritmetica).
Si può vedere come un 'cambio di variabili': la coppia (v_d, v_{cm}) porta la stessa informazione della coppia (v^+, v^-) ed è immediato passare dall'una all'altra.



Da (v^+, v^-) a (v_d, v_{cm})

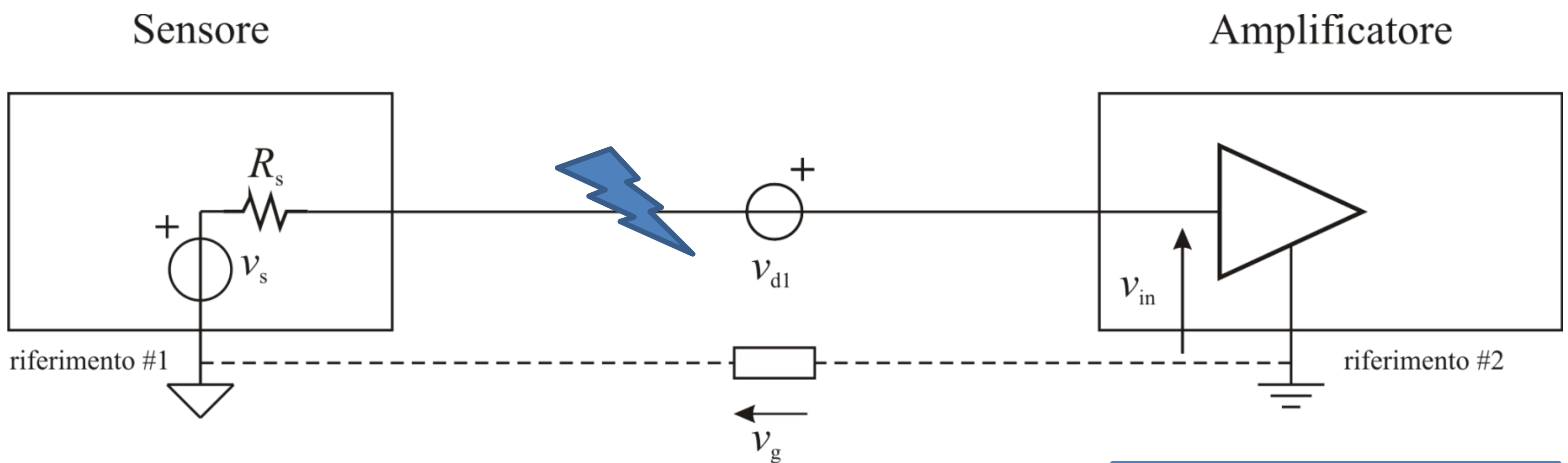
$$\begin{cases} v_d = v^+ - v^- \\ v_{cm} = \dfrac{v^+ + v^-}{2} \end{cases}$$

Da (v_d, v_{cm}) a (v^+, v^-)

$$\begin{cases} v^+ = v_{cm} + \dfrac{v_d}{2} \\ v^- = v_{cm} - \dfrac{v_d}{2} \end{cases}$$

Immunità ai disturbi dei segnali differenziali (I)

Se la sorgente che fornisce l'ingresso non è vicina all'amplificatore, la tensione di ingresso è corrotta da disturbi elettromagnetici captati dall'interconnessione e/o derivanti da differenze tra i potenziali di riferimento che si sommano al segnale utile.

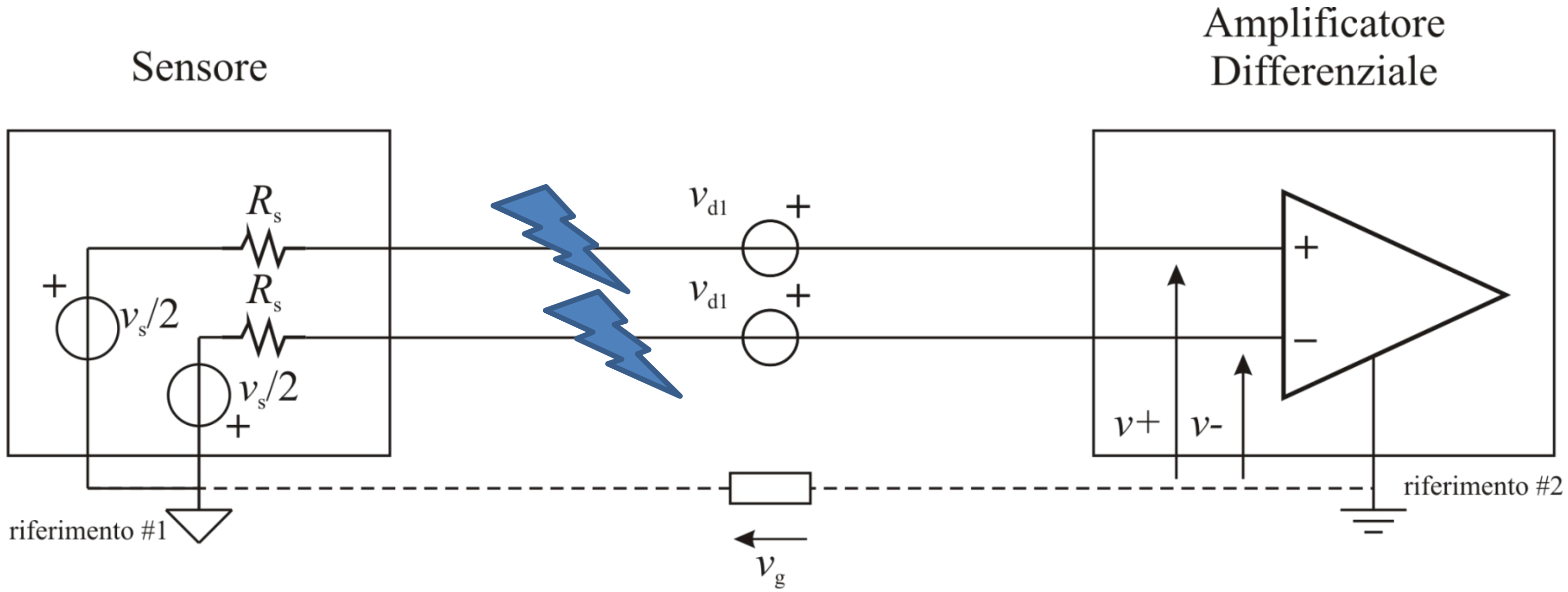


$$v_{in} = v_s + v_{dl} + v_g$$

Il segnale ricevuto dall'amplificatore (riferito al suo 0V, cioè ***single-ended***) è corrotto:
-dai disturbi v_{dl} captati dal conduttore, che si comporta come un'antenna,
-dalle fluttuazioni tra i riferimenti di potenziale del sensore e dell'amplificatore, v_g

Immunità ai disturbi dei segnali differenziali (II)

- Per rendere il sistema immune più ai disturbi, la sorgente codifica l'informazione nella tensione differenziale, con polarità opposte rispetto al riferimento locale.
- Se le due linee sono identiche e vicinissime, accoppiano i disturbi esterni 'quasi' allo stesso modo.



Se i conduttori sono vicini, possibilmente intrecciati:
v^+ e v^- sono corrotti da v_{dl} e da v_g quasi ***allo stesso modo***

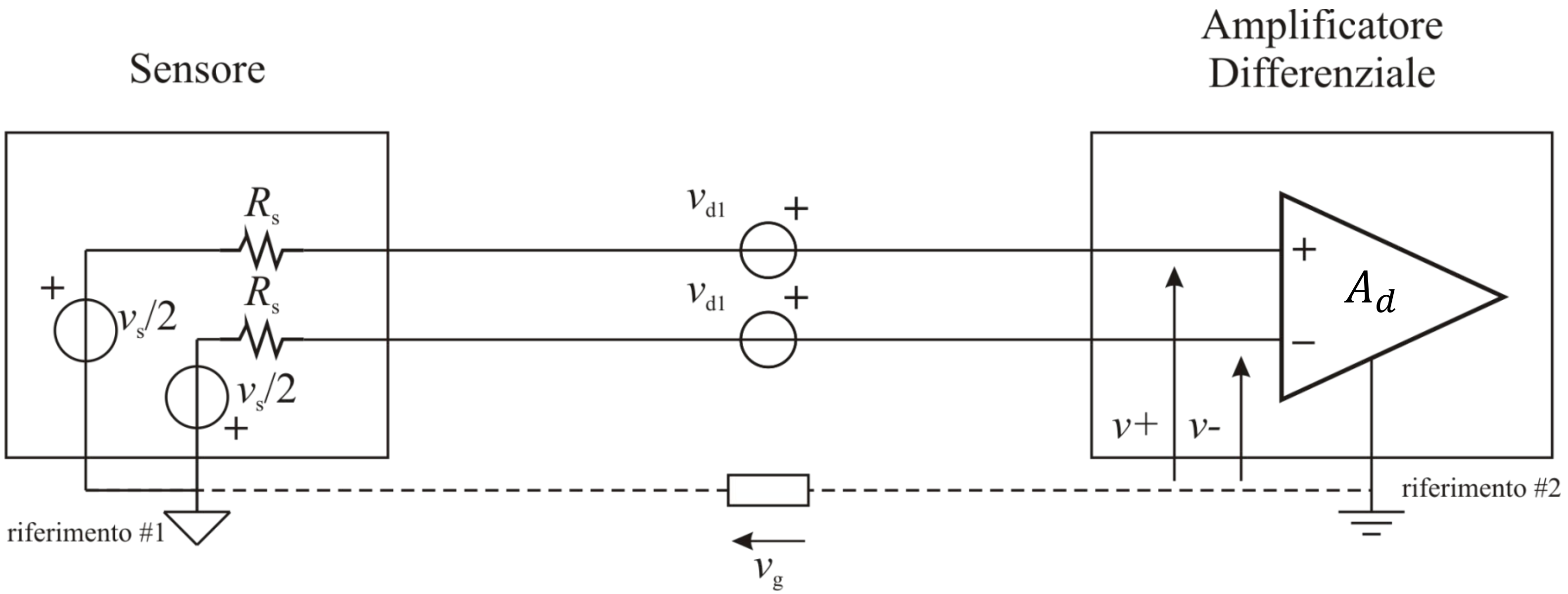
$$v^+ = \frac{v_s}{2} + v_{dl} + v_g$$
$$v^- = -\frac{v_s}{2} + v_{d1} + v_g$$

Amplificatore Differenziale (I)

- Per recuperare l'informazione utile occorre un ***amplificatore differenziale*** che:

→ amplifichi la differenza tra le tensioni in ingresso (che porta l'informazione)

→ sia insensibile al modo comune delle tensioni rispetto al riferimento (che è corrotto da disturbi)



$$v^+ = \frac{v_s}{2} + v_{d1} + v_g$$

$$v^- = -\frac{v_s}{2} + v_{d1} + v_g$$

$$\boxed{v_d = v^+ - v^- = v_s}$$

Modo differenziale → **segnale utile**

$$\boxed{v_{cm} = \frac{v^+ + v^-}{2} = v_{d1} + v_g}$$

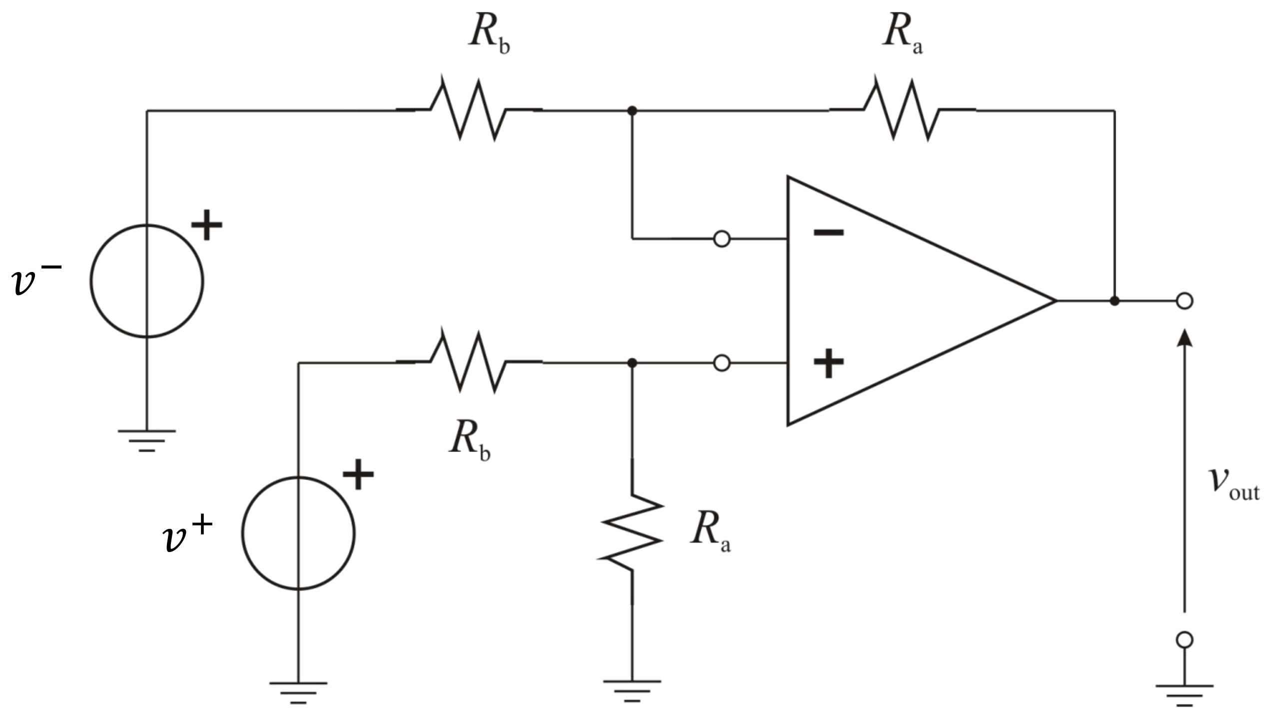
Modo comune → **disturbo**

Amplificatore Differenziale (II)

- Per recuperare l'informazione occorre un ***amplificatore differenziale*** come quello introdotto che:

→ amplifichi la differenza tra le tensioni in ingresso, ***tensione differenziale*** (che porta l'informazione)

→ sia **insensibile al modo comune** delle tensioni rispetto al riferimento (corrotto da disturbi)



$$v_{out} = \frac{R_a}{R_b}(v^+ - v^-)$$

$$v^+ = \frac{v_s}{2} + v_{d1} + v_g$$

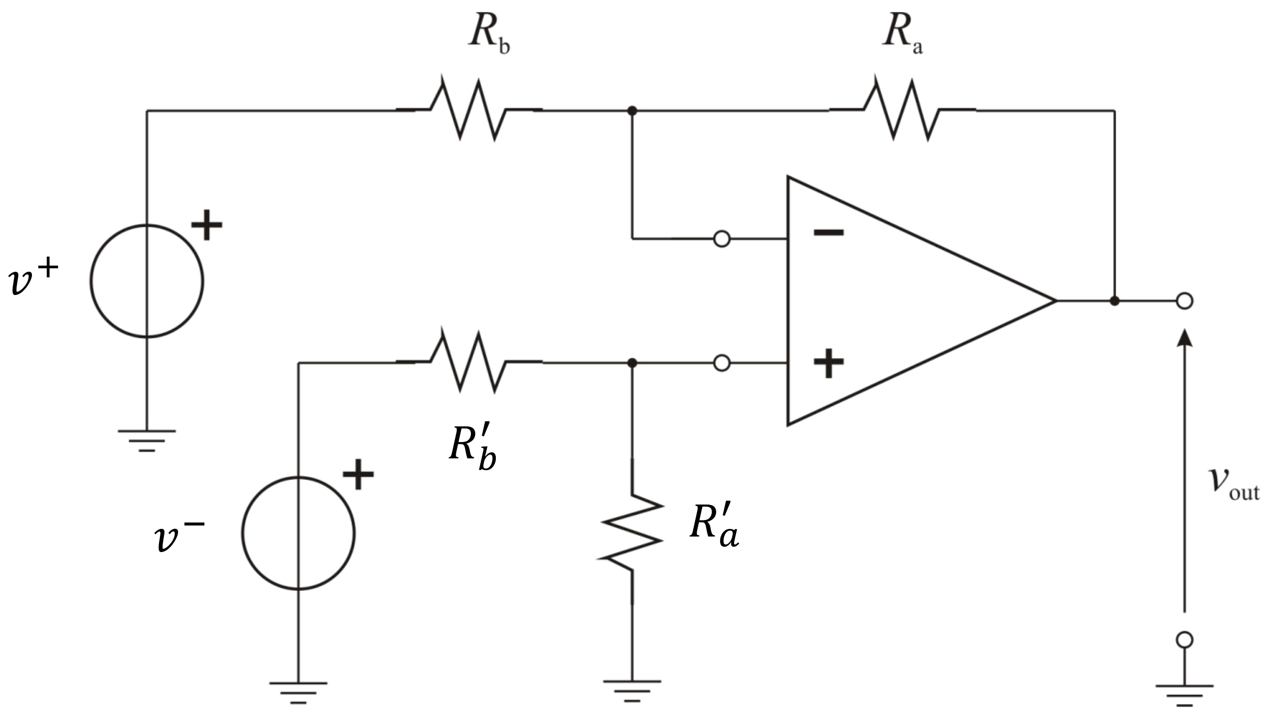
$$v^- = -\frac{v_s}{2} + v_{d1} + v_g$$

L'uscita dell'ampl. differenziale non è affetta dai disturbi

$$v_{out} = \frac{R_a}{R_b}\left(\frac{v_s}{2} + \cancel{v_{d1}} + \cancel{v_g} + \frac{v_s}{2} - \cancel{v_{d1}} - \cancel{v_g}\right) \Rightarrow \boxed{v_{out} = \frac{R_a}{R_b} v_s}$$

Amplificatore Differenziale (III)

- Se i rapporti delle resistenze $\frac{R_a}{R_b}$ e $\frac{R'_a}{R'_b}$ non sono identici per effetto delle tolleranze dei componenti, l'amplificatore non amplifica solo il modo differenziale



$$\frac{R'_a}{R'_b} = \frac{R_a}{R_b}(1+\varepsilon) \neq \frac{R_a}{R_b}$$

Se i quattro resistori hanno tolleranza δ, cioè se $R = R_{nom}\,(1 \pm \delta)$, nel caso peggiore:

$$\varepsilon = 4|\delta|$$

$$v_{out} = v^+ \frac{R'_a}{R'_a + R'_b}\left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) - v^- \frac{R_a}{R_b} = v^+ \frac{1}{1 + \frac{R'_b}{R'_a}}\left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) - v^- \frac{R_a}{R_b}$$

Amplificatore Differenziale (IV)

$$\frac{R'_b}{R'_a} = \frac{R_b}{R_a}(1+\varepsilon) \neq \frac{R_b}{R_a}$$

$$v_{out} = v^+ \frac{R'_a}{R'_a + R'_b}\left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) - v^- \frac{R_a}{R_b} = v^+ \frac{1}{1 + \frac{R'_b}{R'_a}}\left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) - v^- \frac{R_a}{R_b} =$$

$$v_{out} = v^+ \frac{1}{1 + \frac{R_b}{R_a} + \frac{R_b}{R_a}\varepsilon}\left(1 + \frac{R_a}{R_b}\right) - v^- \frac{R_a}{R_b} = v^+ \frac{1}{1 + \frac{\frac{R_b}{R_a}\varepsilon}{1 + \frac{R_b}{R_a}}} \frac{1 + \frac{R_a}{R_b}}{1 + \frac{R_b}{R_a}} - v^- \frac{R_a}{R_b} =$$

$$v_{out} = \frac{1}{1 + \frac{\frac{R_b}{R_a}\varepsilon}{1 + \frac{R_b}{R_a}}} v^+ \frac{R_a}{R_b} - v^- \frac{R_a}{R_b} \simeq \left(1 - \frac{\varepsilon}{1 + \frac{R_a}{R_b}}\right) v^+ \frac{R_a}{R_b} - v^- \frac{R_a}{R_b}$$

$$v_{out} = \frac{R_a}{R_b}(v^+ - v^-) - \underbrace{v^+ \frac{R_a}{R_a + R_b}\varepsilon}_{\text{Dipende anche dal modo comune}}$$

Amplificatore Differenziale (V)

$$v_{out} = \frac{R_a}{R_b} v_d - \left(v_{cm} + \frac{v_d}{2}\right) \frac{R_a}{R_a + R_b} \varepsilon$$

$$v_{out} = \overbrace{\left(\frac{R_a}{R_b} - \frac{R_a}{R_a+R_b}\frac{\varepsilon}{2}\right)}^{A_d} v_d - \overbrace{\frac{R_a}{R_a+R_b}\varepsilon}^{A_{cm}} v_{cm}$$

Amplificazione Differenziale

$$A_{diff} = \frac{R_a}{R_b} + \underbrace{\frac{R_a}{R_a + R_b}\frac{\varepsilon}{2}}_{\text{Errore su } A_{diff} \text{ (trascurabile)}} \simeq \frac{R_a}{R_b}$$

Amplificazione di Modo Comune

$$A_{cm} = -\frac{R_a}{R_a + R_b}\varepsilon$$

$$\boxed{CMRR = \left|\frac{A_d}{A_{cm}}\right|}$$

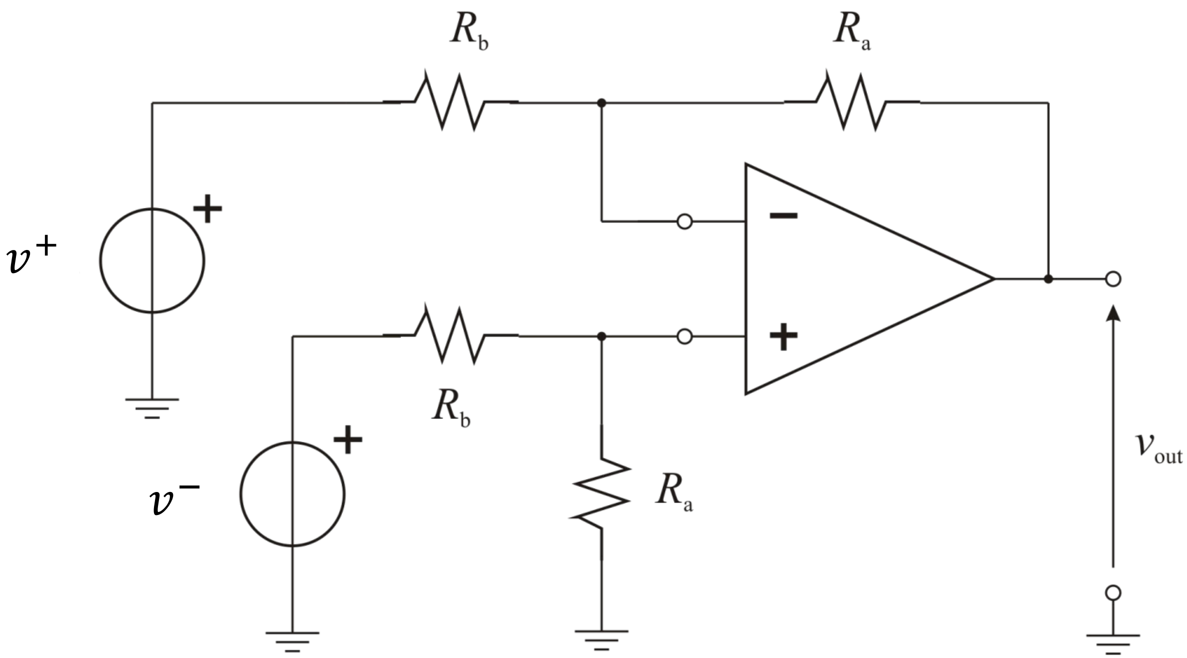
Common-Mode Rejection Ratio
(rapporto di reiezione del modo comune)
Rapporto tra amplificazione differenziale e di modo comune

Nello specifico amplificatore differenziale:

$$CMRR = \frac{1 + \frac{R_a}{R_b}}{\varepsilon} = \frac{1 + A_{diff}}{\varepsilon} = \frac{1 + A_{diff}}{4\delta}$$

Amplificatore Differenziale (VI)

- In presenza di amplificazione di modo comune finita, l'uscita contiene ancora parte dei disturbi
- Il rapporto tra l'amplificazione del segnale utile e quella dei disturbi è proprio il CMRR.



$$v^+ = \frac{v_s}{2} + v_{d1} + v_g$$

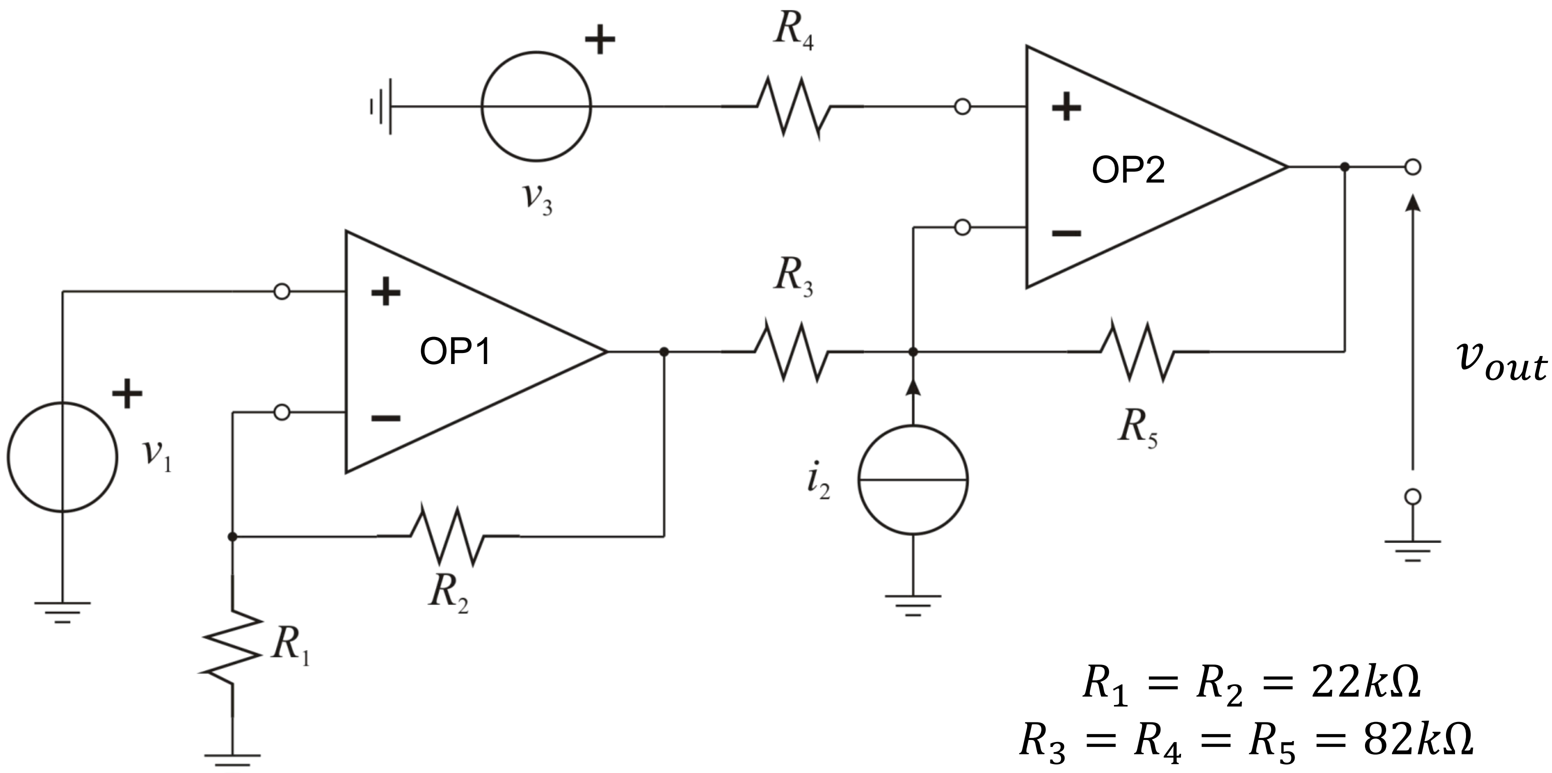
$$v^- = -\frac{v_s}{2} + v_{d1} + v_g$$

$$v_{out} = \underbrace{\frac{R_a}{R_b} v_s}_{\text{segnale}} + \underbrace{\frac{R_a}{R_a + R_b} \varepsilon (v_{d1} + v_g)}_{\text{disturbi}}$$

$$v_{out} = A_d \left(\frac{v_s}{2} + \cancel{v_{d1}} + \cancel{v_g} + \frac{v_s}{2} - \cancel{v_{d1}} - \cancel{v_g} \right) + A_{cm} \frac{\left(\cancel{\frac{v_s}{2}} + v_{d1} + v_g - \cancel{\frac{v_s}{2}} + v_{d1} + v_g \right)}{2}$$

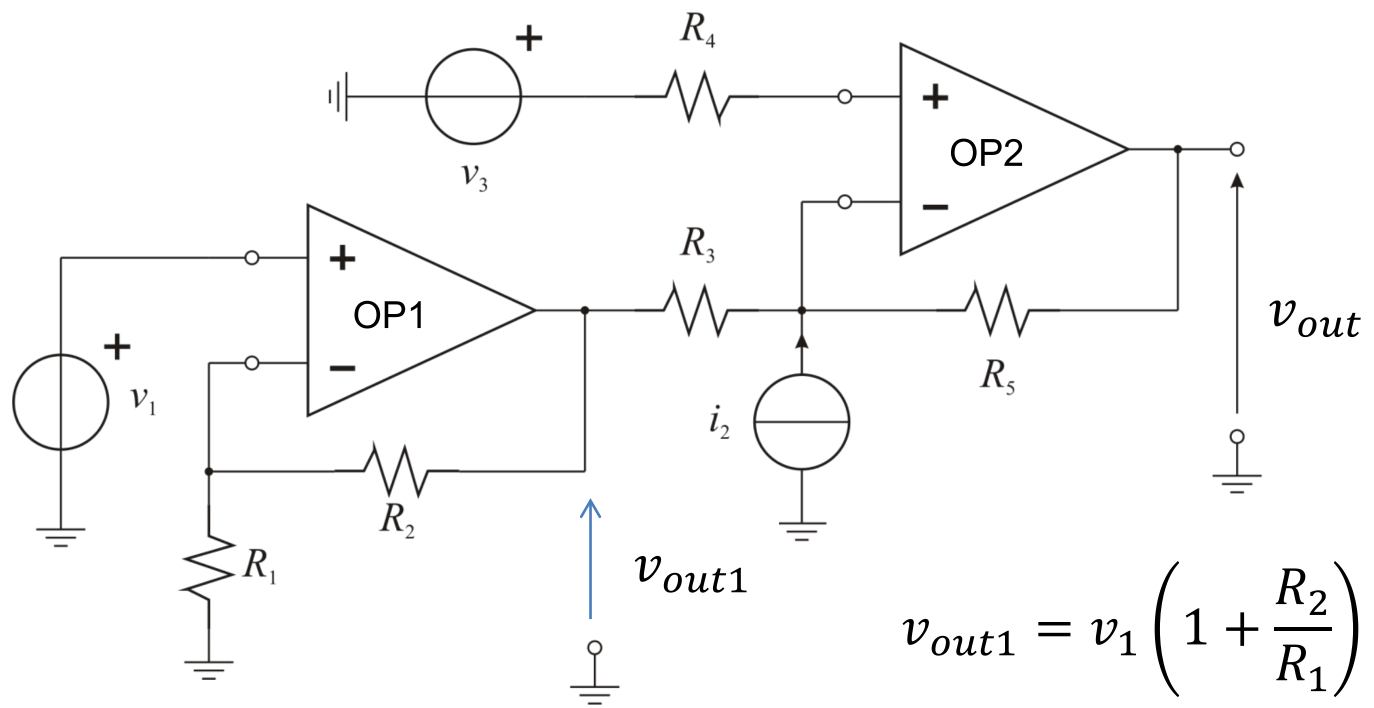
Analisi di circuiti con più operazionali ideali (I)

Assumendo che gli amplificatori operazionali siano ideali, determinare l'espressione di v_{out} in funzione degli ingressi v_1, i_2, v_3



$$R_1 = R_2 = 22k\Omega$$
$$R_3 = R_4 = R_5 = 82k\Omega$$

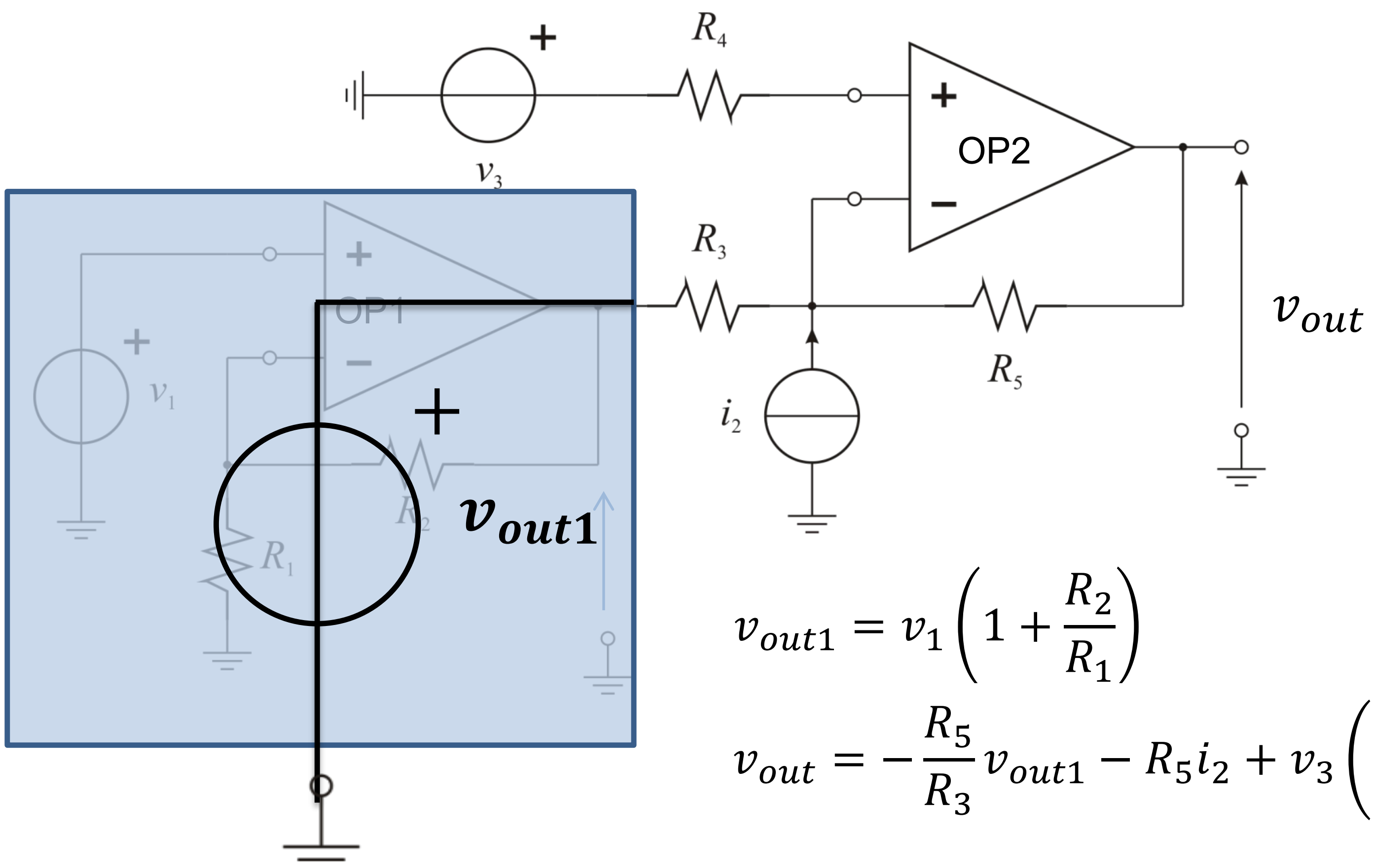
Analisi di circuiti con più operazionali ideali (II)



$$v_{out1} = v_1\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

- si può determinare l'uscita degli operazionali che sono direttamente collegati solo ad ingressi esterni (in questo caso OP1)
- nota v_{out1}, per il teorema di sostituzione, è possibile analizzare il resto del circuito sostituendo al primo operazionale un generatore ideale di tensione di valore pari a v_{out1} appena trovato.

Analisi di circuiti con più operazionali ideali (III)



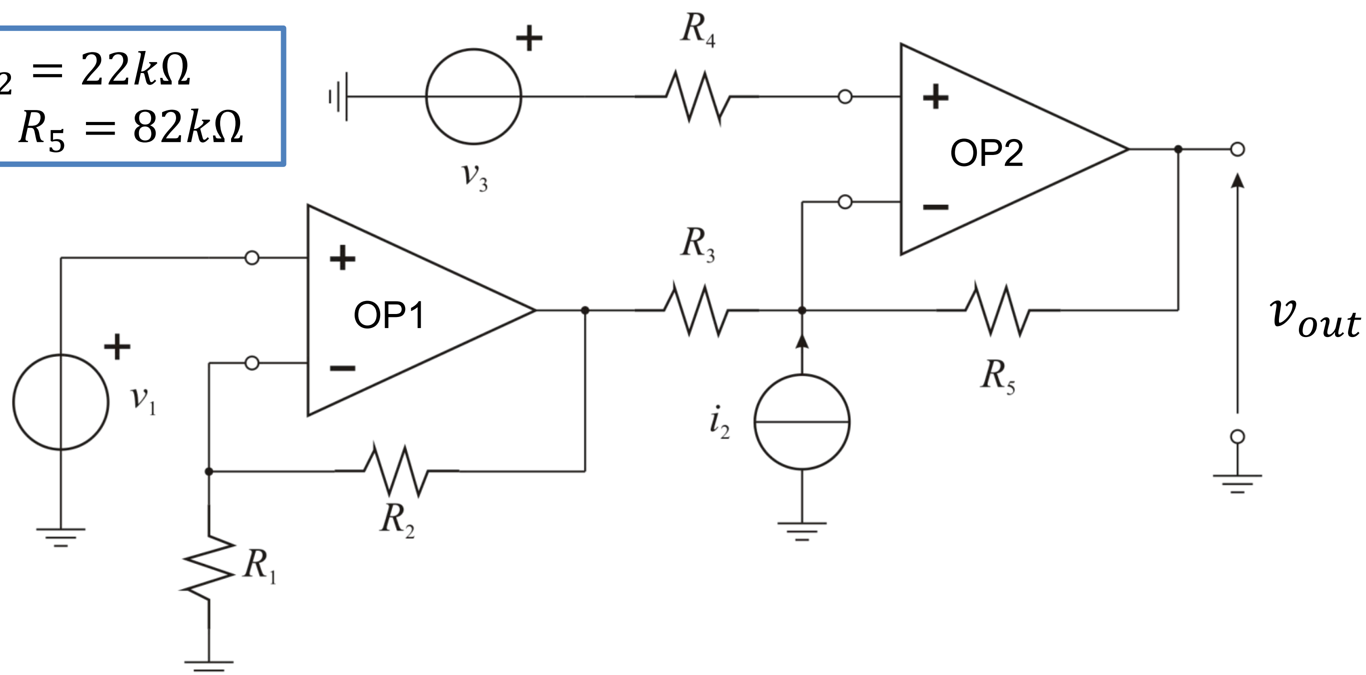
$$v_{out1} = v_1\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$v_{out} = -\frac{R_5}{R_3} v_{out1} - R_5 i_2 + v_3\left(1 + \frac{R_5}{R_3}\right)$$

- per determinare il contributo di v_{out1}, ci si riconduce all'amplificatore invertente, per il contributo di i_2 ci si riconduce ad un amplificatore di transresistenza, per il contributo di v_3, ci si riconduce ad un amplificatore di tensione.

Analisi di circuiti con più operazionali ideali (IV)

$$R_1 = R_2 = 22k\Omega$$
$$R_3 = R_4 = R_5 = 82k\Omega$$



$$v_{out} = -\frac{R_5}{R_3}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)v_1 - R_5 i_2 + v_3\left(1+\frac{R_5}{R_3}\right)$$

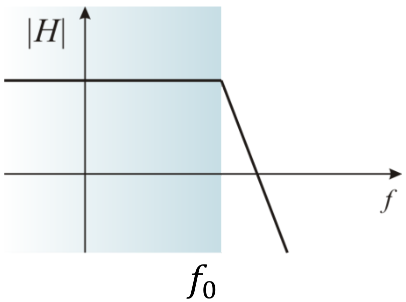
Sostituendo i valori numerici:

$$\boxed{v_{out} = -2v_1 - 82k\Omega \cdot i_2 + 2v_3}$$

Filtri Attivi

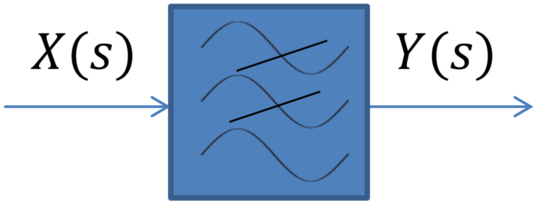
- Un ***filtro*** (elettronico) è un circuito lineare dinamico descritto da una funzione di trasferimento nel dominio della frequenza con caratteristiche specificate.
- Nei sistemi elettronici è molto spesso necessario disporre di *filtri* in grado di prelevare e amplificare una porzione dello spettro di un segnale sopprimendo le altre componenti.
- E' possibile implementare <u>filtri attivi</u> con operazionali ed elementi reattivi (condensatori).

Filtro passa-basso

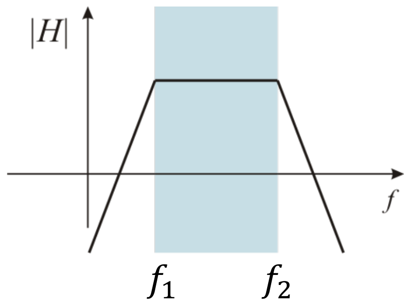


Banda Passante: $f < f_0$

LPF

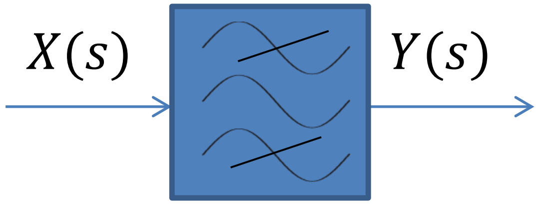


Filtro passa-banda

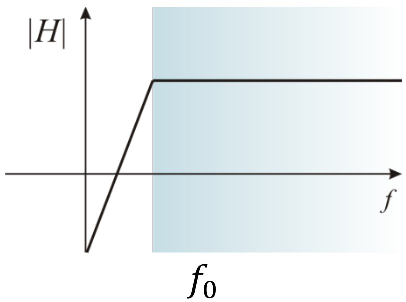


Banda Passante: $f_1 < f < f_2$

BPF

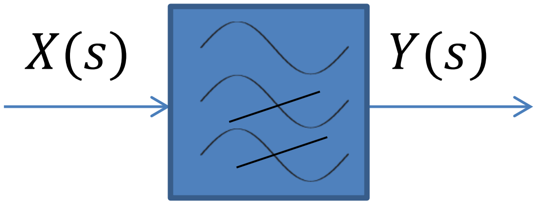


Filtro passa-alto



Banda Passante: $f > f_1$

HPF

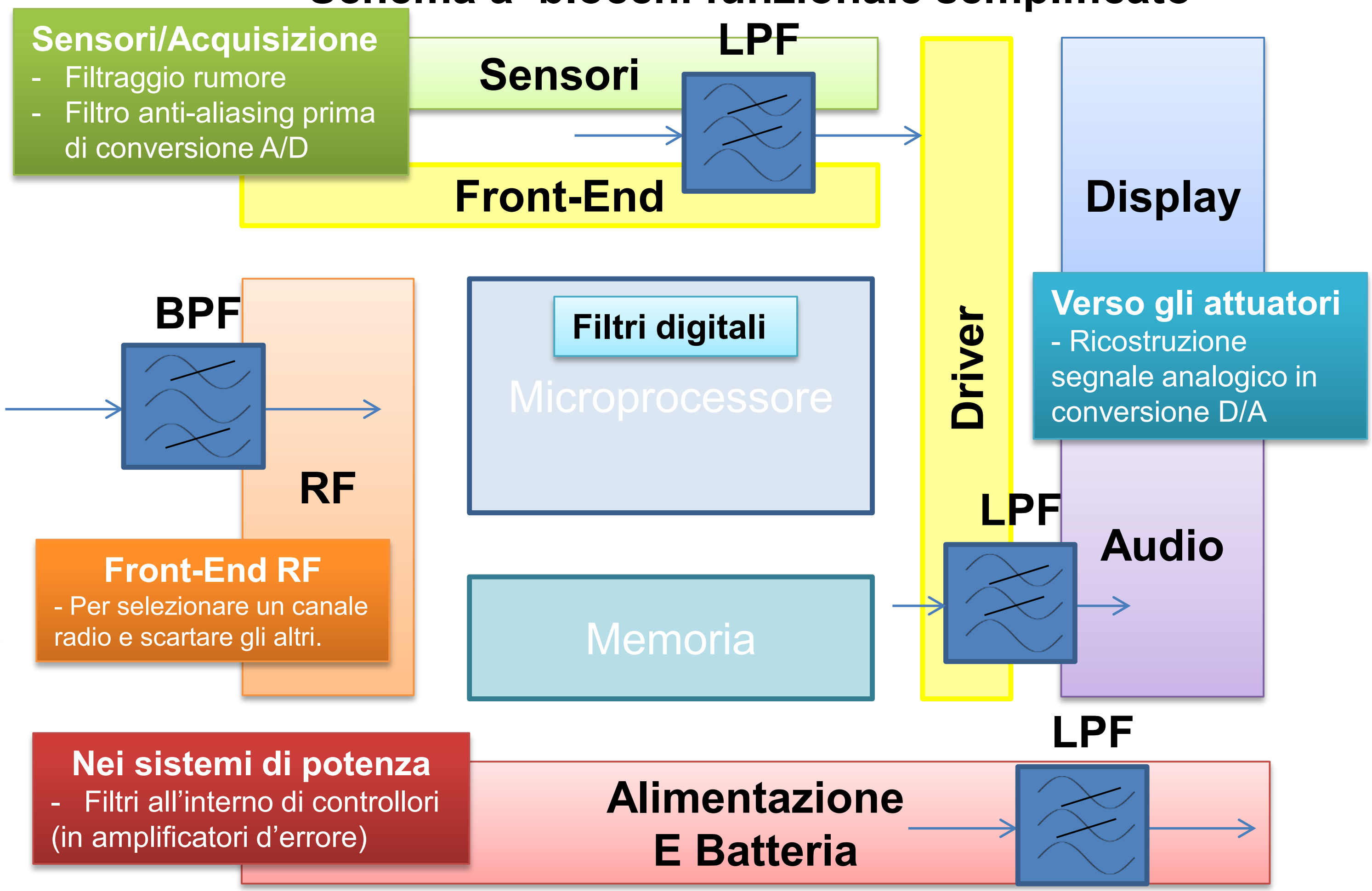


Filtri nei Sistemi Elettronici

Apple iPhone5

Nella gran parte dei sottosistemi elettronici sono presenti filtri

Schema a blocchi funzionale semplificato

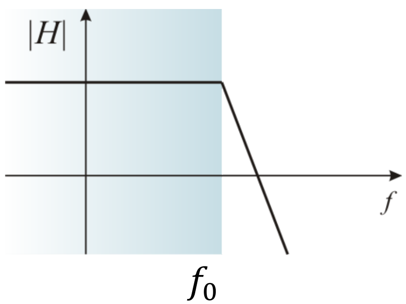


Filtri Attivi

- Il progetto di un filtro prevede due fasi:
  - Determinare una funzione di trasferimento di un circuito fisicamente realizzabile che approssimi le caratteristiche desiderate (ad es: transizioni ripide tra banda passante e attenuata, guadagno costante in banda…)→ problema matematico
  - Realizzare un circuito elettronico che presenti la funzione di trasferimento voluta.

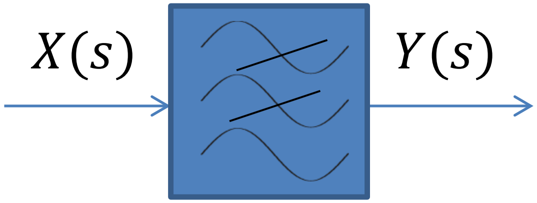
In questo corso non ci occuperemo di nessuna delle due cose, ci limiteremo a introdurre alcuni circuiti basati su operazionale che presentano caratteristiche filtranti ed analizzare le caratteristiche filtranti di reti date.

Filtro passa-basso

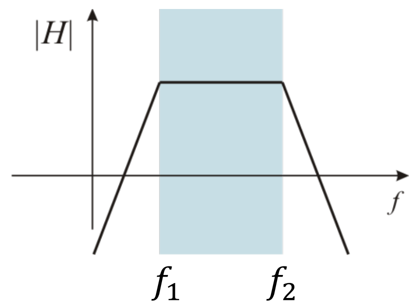


Banda Passante: $f < f_0$

LPF

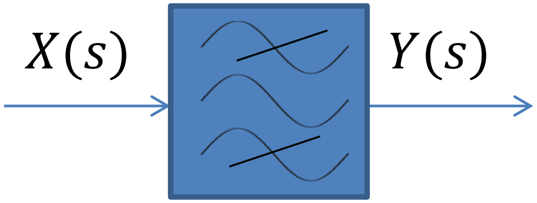


Filtro passa-banda

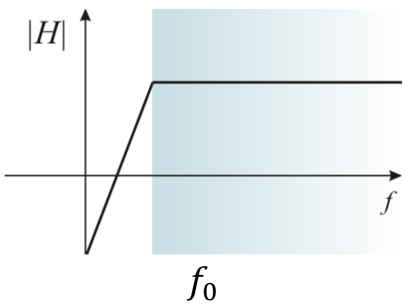


Banda Passante: $f_1 < f < f_2$

BPF

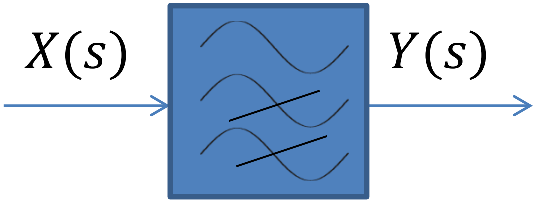


Filtro passa-alto

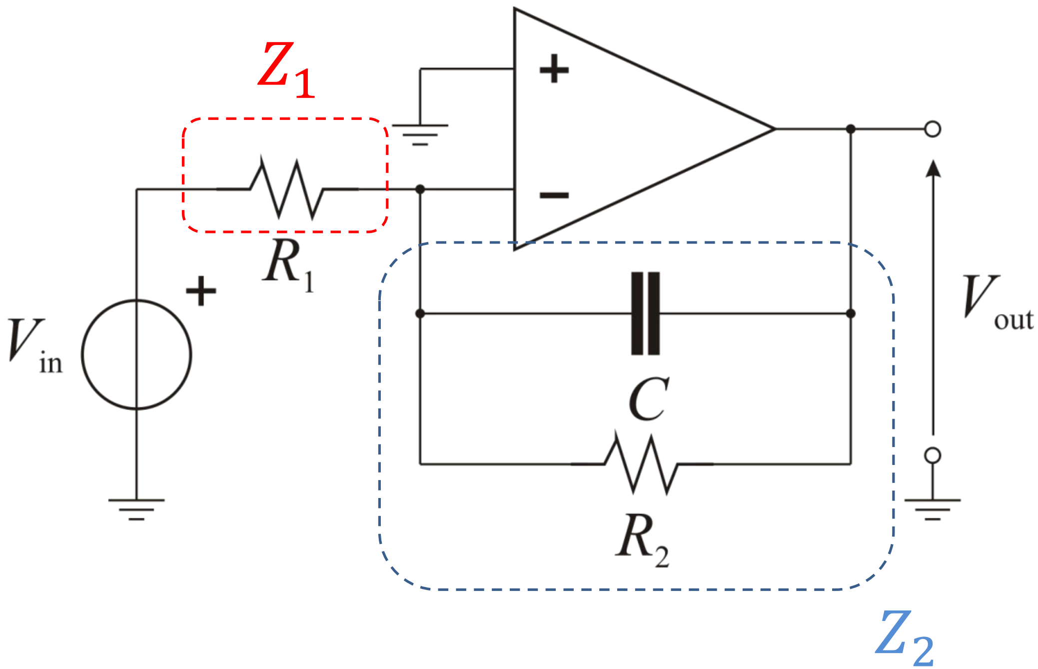


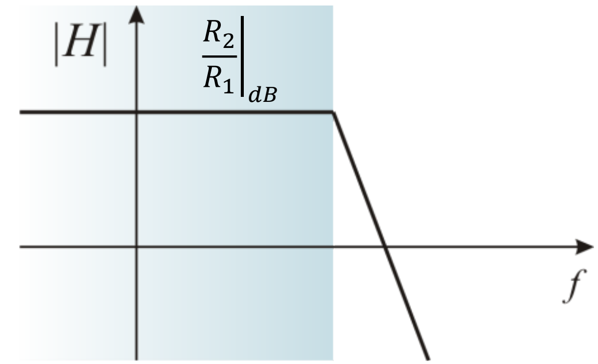
Banda Passante: $f > f_1$

HPF



Filtro Passa-Basso del I ordine





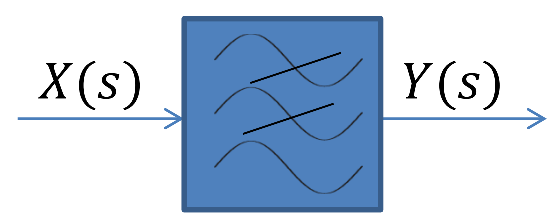
$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_2 C}$$

Banda Passante: $f < f_0 = \frac{1}{2\pi R_2 C}$

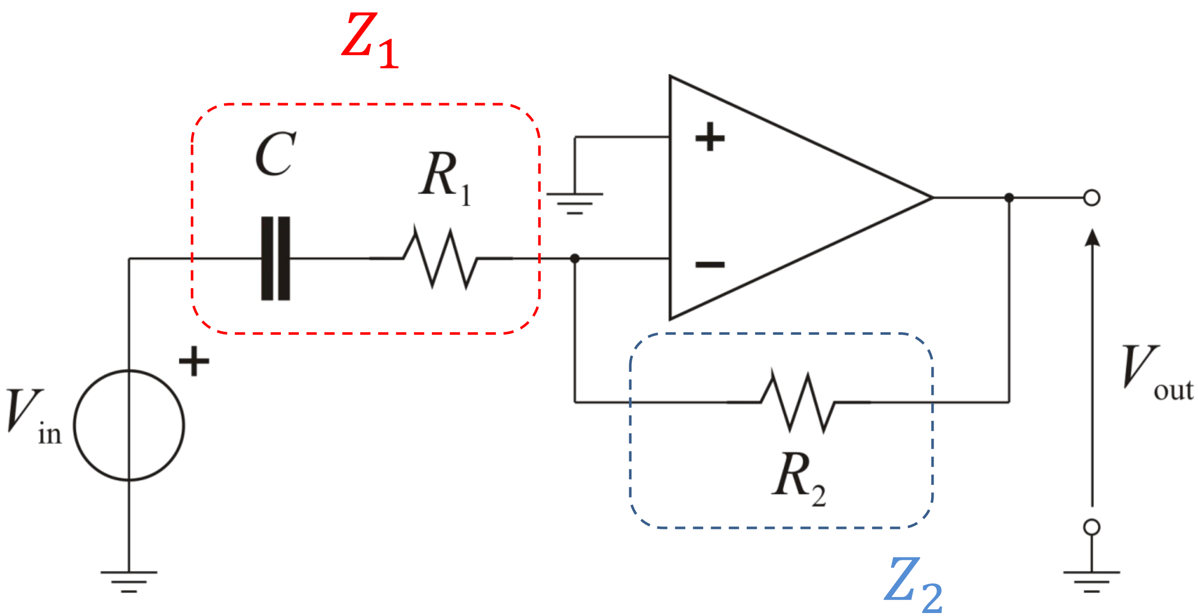
$$\boxed{H(s) = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + sR_2C}}$$

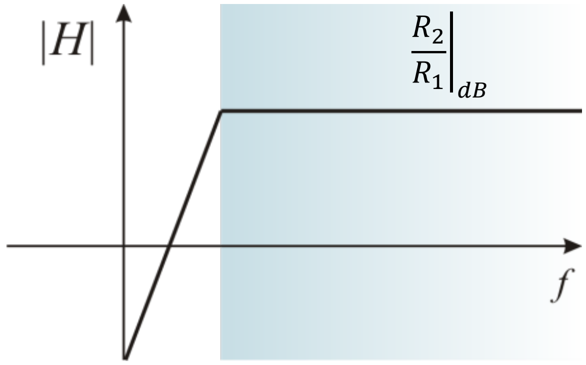
Analisi nel dominio della frequenza:

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{\left(sC + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + sR_2C}$$



Filtro Passa-Alto del I ordine



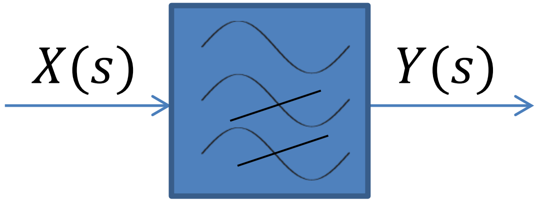


$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_1 C}$$

Banda Passante: $f > f_0 = \frac{1}{2\pi R_1 C}$

$$\boxed{H(s) = -\frac{sCR_2}{1 + sCR_1}}$$

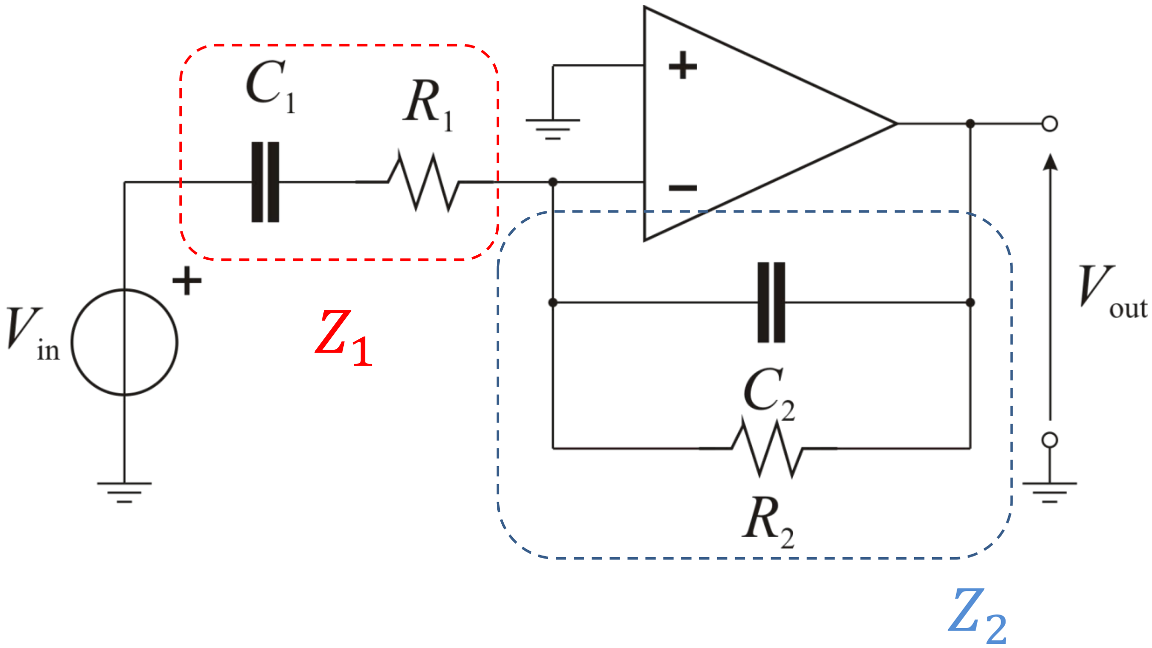
HPF

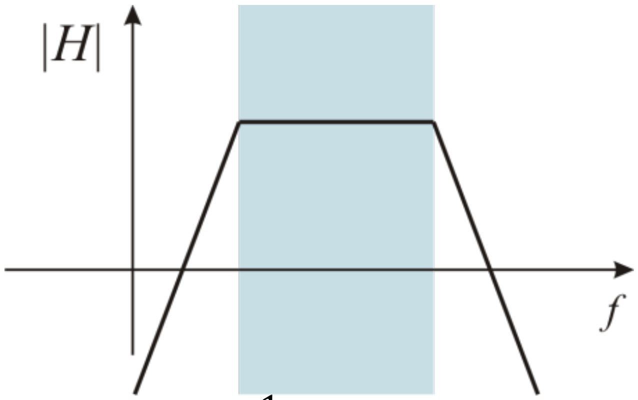


Analisi nel dominio della frequenza:

$$H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{\frac{1}{sC} + R_1} = -\frac{sCR_2}{1 + sR_1 C}$$

Filtro Passa-Banda del II ordine (poli reali)





$f_1 = \dfrac{1}{2\pi R_1 C_1}$ $\quad f_2 = \dfrac{1}{2\pi R_2 C_2}$

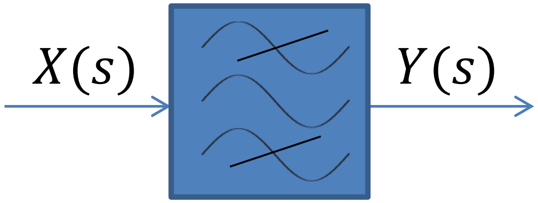
Banda Passante: $f_1 < f < f_2$

$$H(s) = -\frac{sC_1}{1 + sR_1C_1}\frac{1}{1 + sR_2C_2}$$

Analisi nel dominio della frequenza:

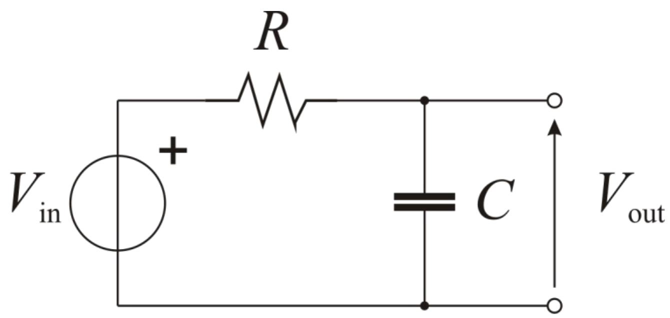
$$H(s) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{\left(sC_2 + \dfrac{1}{R_2}\right)^{-1}}{\dfrac{1}{sC_1} + R_1} = -\frac{sR_2C_1}{1 + sR_1C_1}\frac{1}{1 + sR_2C_2}$$

BPF



Filtri Attivi vs. Filtri Passivi (I)

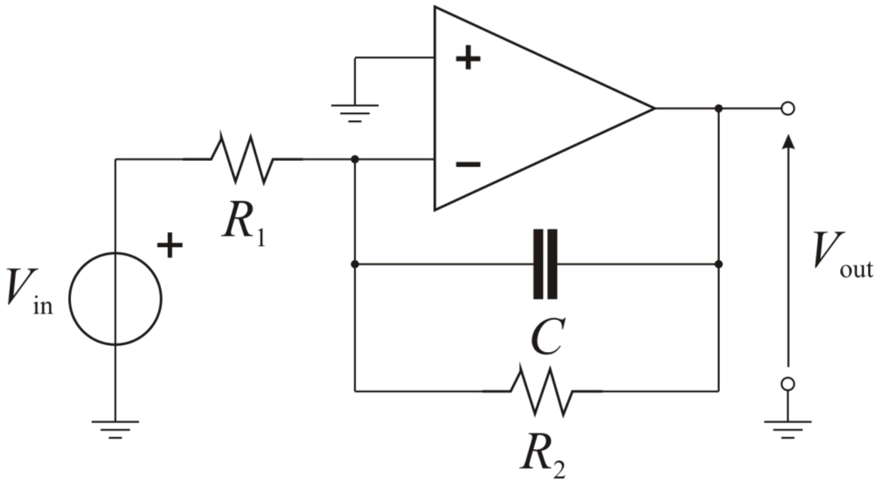
- E' possibile realizzare funzioni di filtraggio anche utilizzando circuiti puramente passivi



Filtro passivo RC passa-basso

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{1 + sRC}$$

- Il massimo guadagno in banda passante è 0dB
- Non è unidirezionale e dà luogo ad effetti di carico



Filtro passa-basso attivo

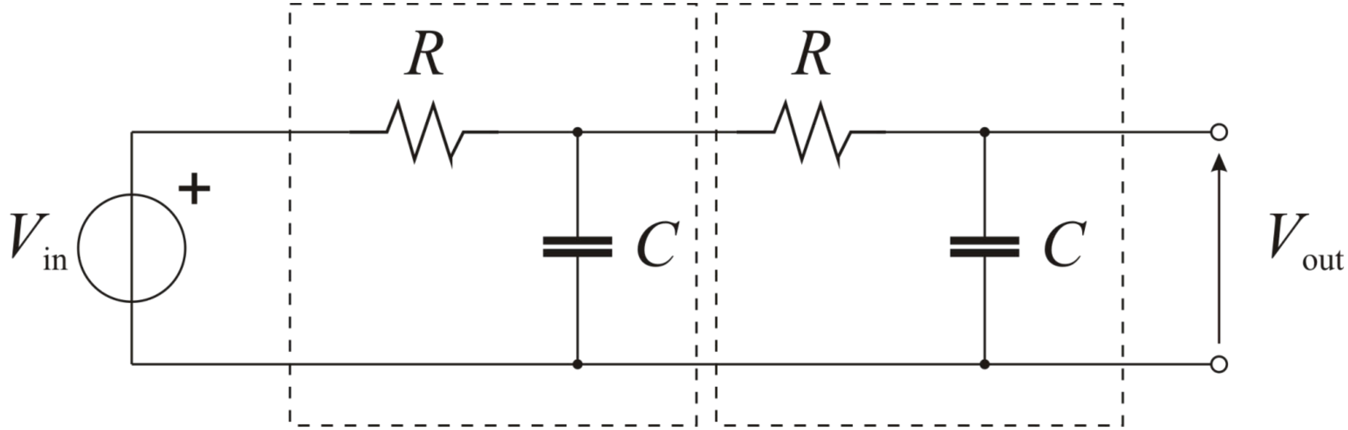
$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1 + sR_2C}$$

- Può amplificare il segnale in banda $|H(j\omega)|_{dB}$>0dB
- E' unidirezionale e l'uscita si comporta come un generatore ideale di tensione→ si comporta come un blocco funzionale analogico

Filtri Attivi vs. Filtri Passivi (II)

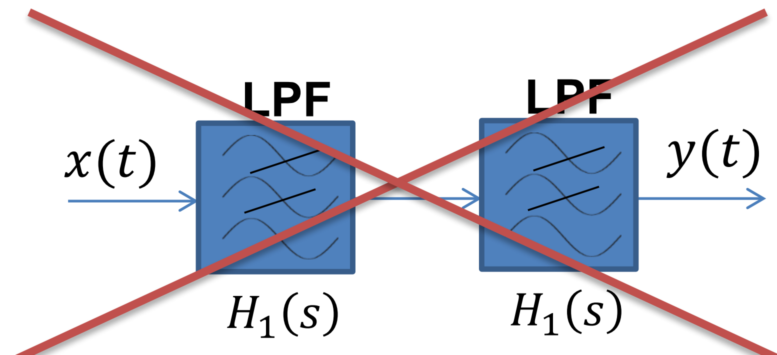
- Filtri passivi in cascata: $H_2(s) \neq H_1^2(s)$ per gli effetti di carico

$H_1(s) = \dfrac{1}{1+sRC}$ $\qquad$ $H_1(s) = \dfrac{1}{1+sRC}$



$$H_2(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{sC} \parallel \left(R + \frac{1}{sC}\right)}{R + \frac{1}{sC} \parallel \left(R + \frac{1}{sC}\right)} \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

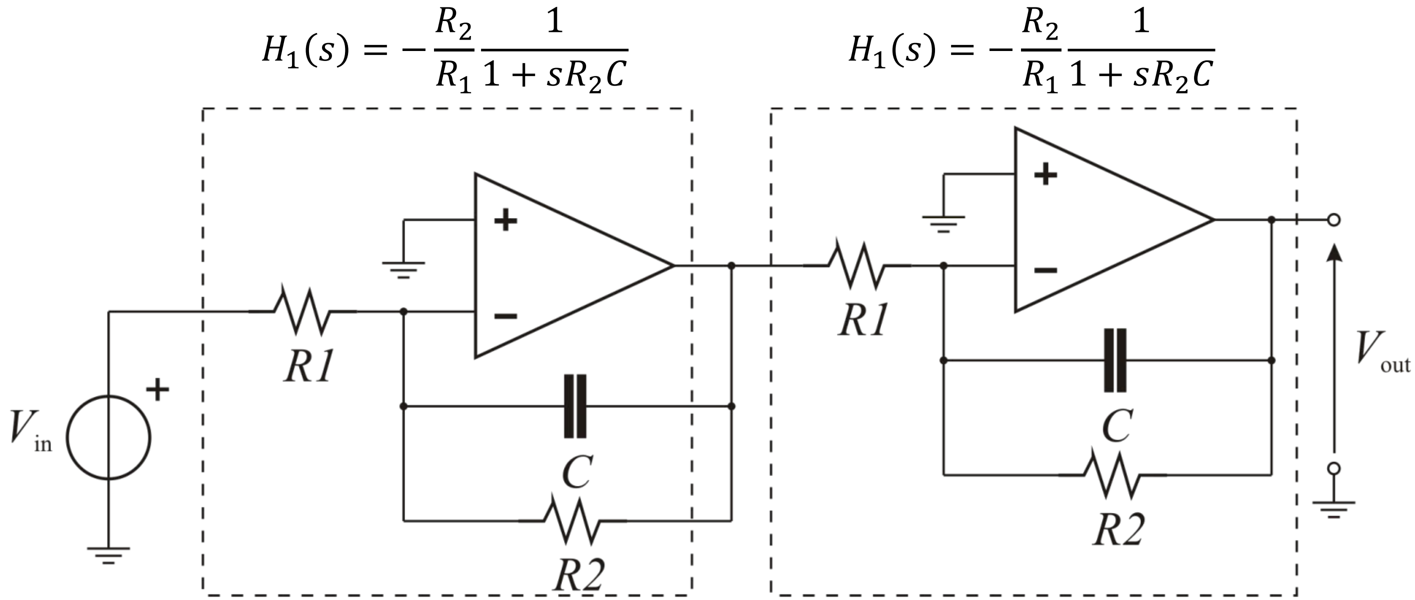
$$= \frac{1}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1} \neq H_1^2(s)$$



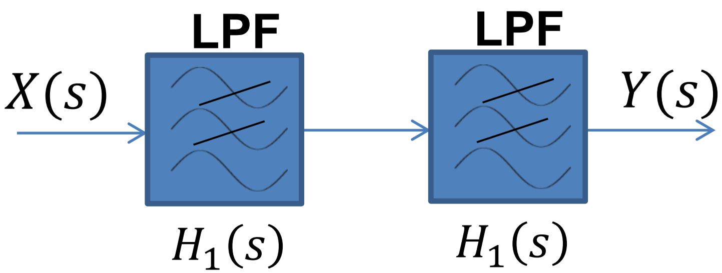
I filtri passivi non si comportano in generale come blocchi funzionali analogici

Filtri Attivi vs. Filtri Passivi (III)

- Il collegamento in cascata non dà luogo ad effetti di carico: $H_2(s) = H_1^2(s)$.



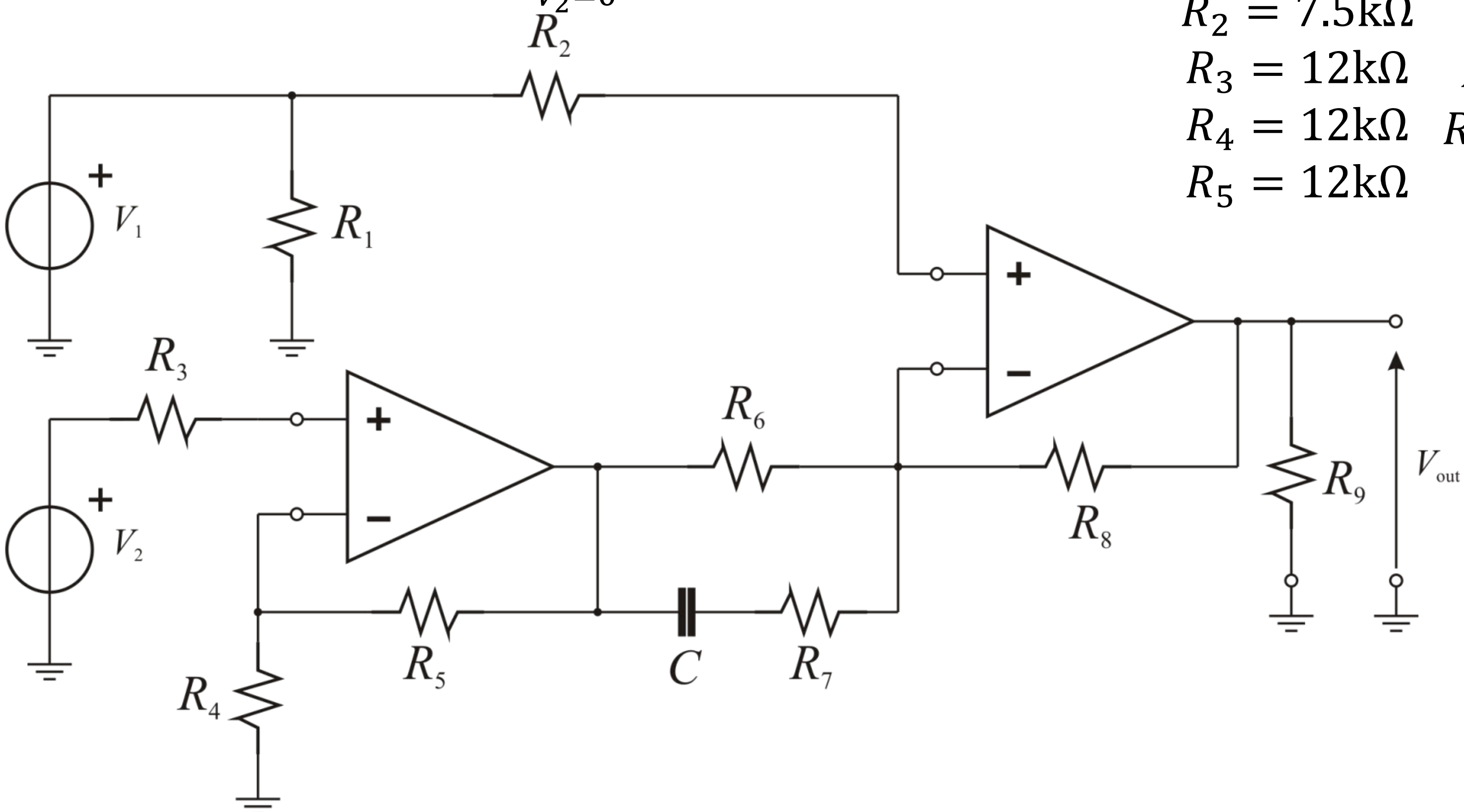
$$H_2(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \frac{1}{(1+sR_2C)^2} = H_1^2(s)$$



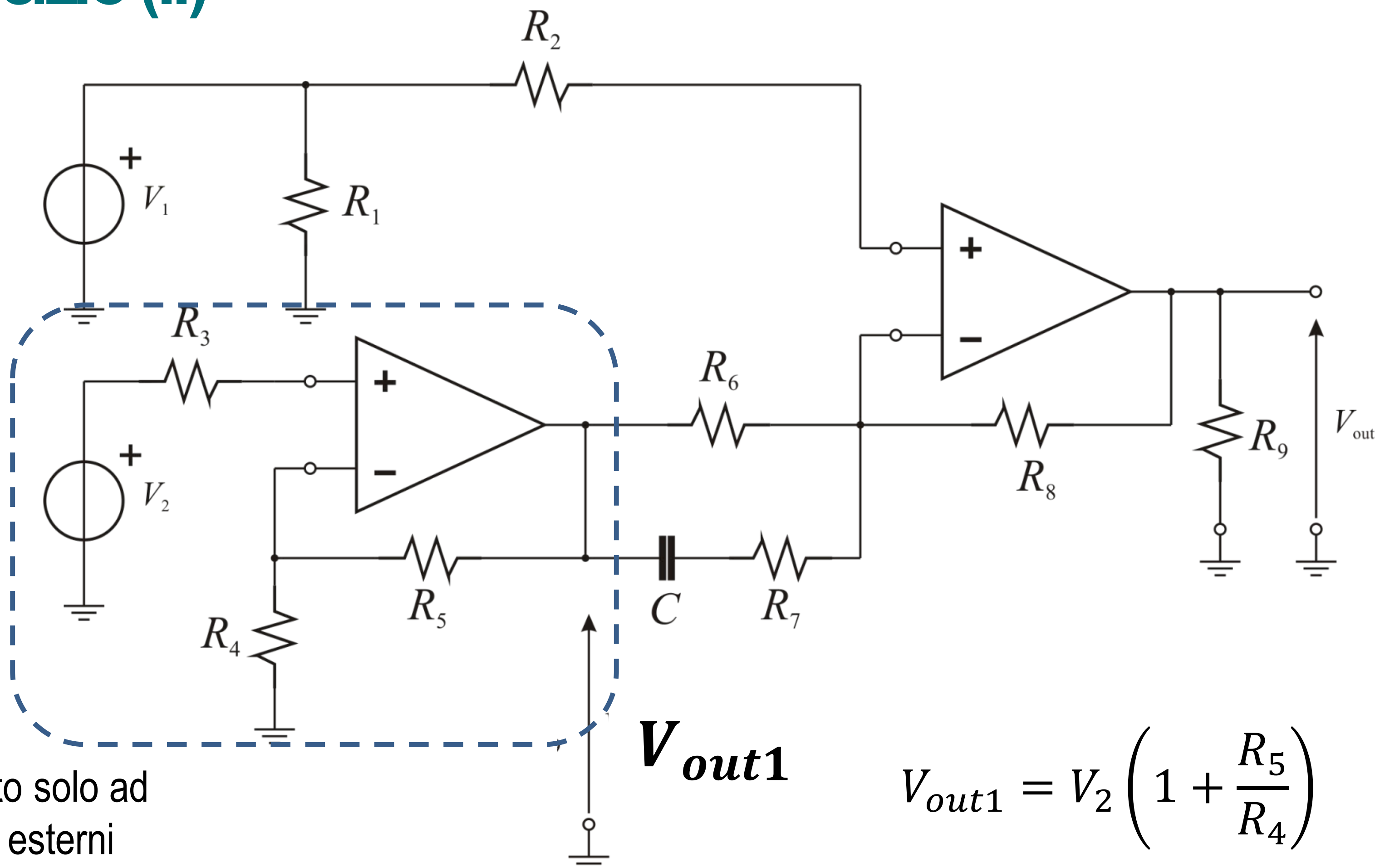
Esercizio (I)

Determinare l'espressione della tensione di uscita $V_{out}(s)$ in funzione dei segnali d'ingresso $V_1(s)$ e $V_2(s)$. Tracciare i diagrammi di Bode in modulo e fase della funzione di trasferimento $H(s) = \left.\frac{V_{out}(s)}{V_1(s)}\right|_{V_2=0}$

$R_1 = 10\text{k}\Omega$ $R_6 = 120\text{k}\Omega$
$R_2 = 7.5\text{k}\Omega$ $R_7 = 10\text{k}\Omega$
$R_3 = 12\text{k}\Omega$ $R_8 = 120\text{k}\Omega$
$R_4 = 12\text{k}\Omega$ $R_9 = 112.4\text{k}\Omega$
$R_5 = 12\text{k}\Omega$ $C = 4.7\text{nF}$



Esercizio (II)

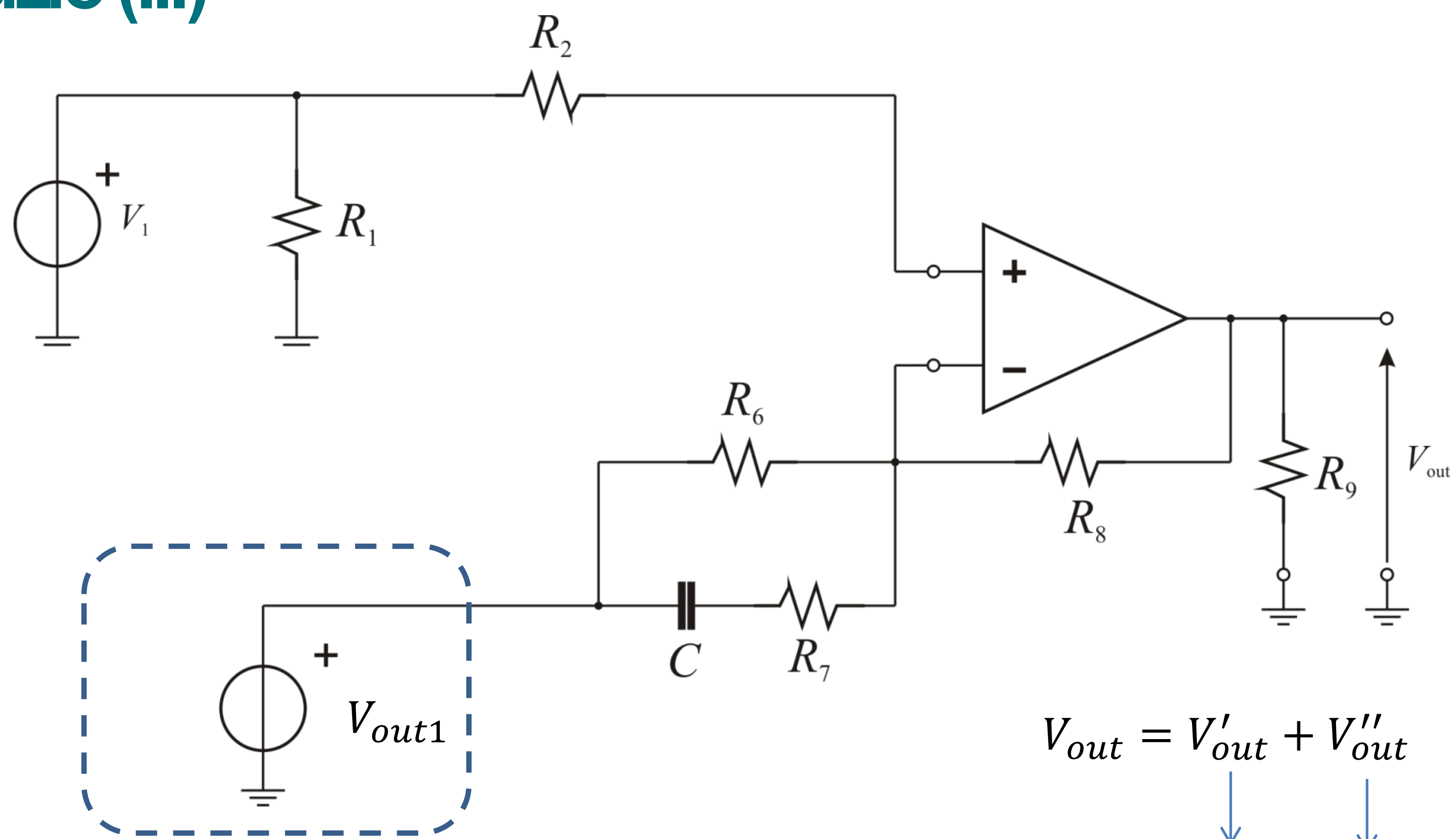


Collegato solo ad
Ingressi esterni

$$V_{out1} = V_2\left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right)$$

In R3 non passa corrente, il circuito nella linea tratteggiata si riconduce ad un ***amplificatore di tensione non invertente*** e si può esprimere la tensione di uscita V_{out1} in funzione di V_2

Esercizio (III)

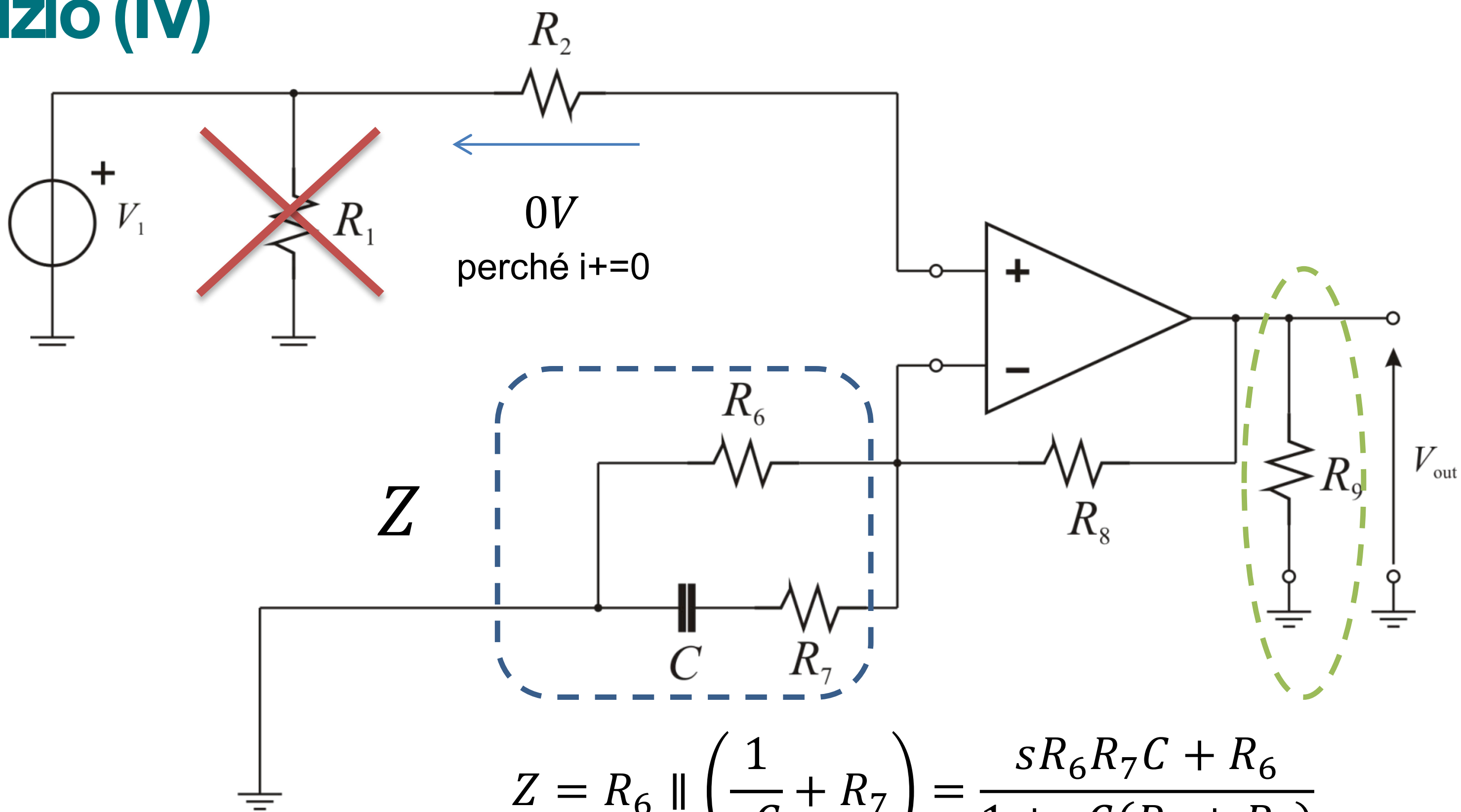


$$V_{out} = V'_{out} + V''_{out}$$

$V'_{out} \rightarrow V_1$, $V''_{out} \rightarrow V_{out1}$

Scriviamo l'uscita V_{out} sovrapponendo gli effetti dell'ingresso V_1 e di V_{out1} calcolato prima (il primo operazionale si comporta come un generatore di tensione V_{out1} alla porta d'uscita)

Esercizio (IV)

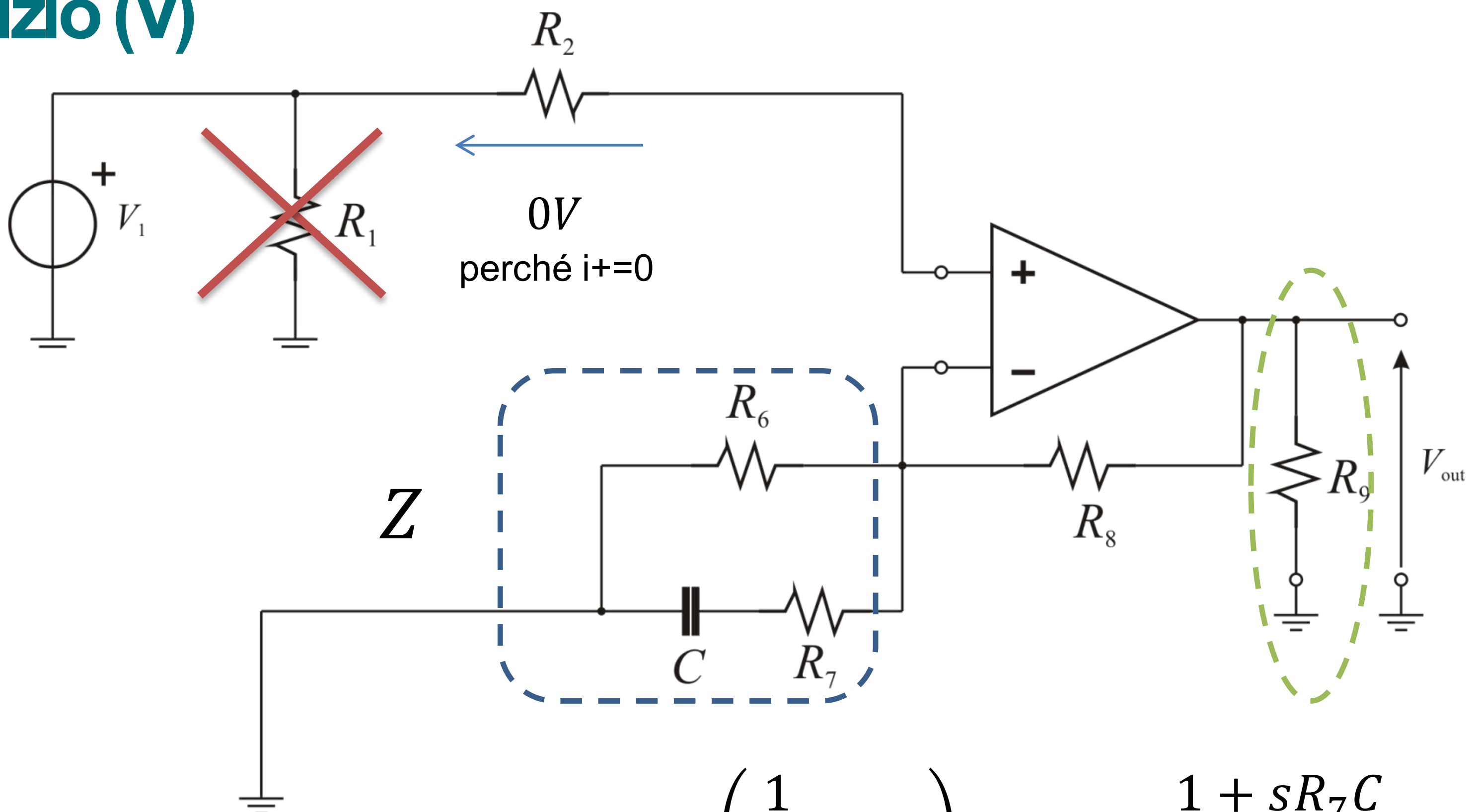


$$Z = R_6 \parallel \left(\frac{1}{sC} + R_7\right) = \frac{sR_6R_7C + R_6}{1 + sC(R_6 + R_7)}$$

<u>Contributo di V_1</u>

- R_1 è in parallelo ad un generatore ideale di tensione ed è pertanto ininfluente
- In R_2 non scorre corrente, per cui la caduta di tensione ai suoi capi è nulla.
- Sostituendo C, R_6 ed R_7 con Z ci si riconduce ad un ***amplificatore di tensione non invertente***.
- L'uscita dell'operazionale ideale non dà luogo ad effetti di carico e pertanto R_9 è ininfluente.

Esercizio (V)

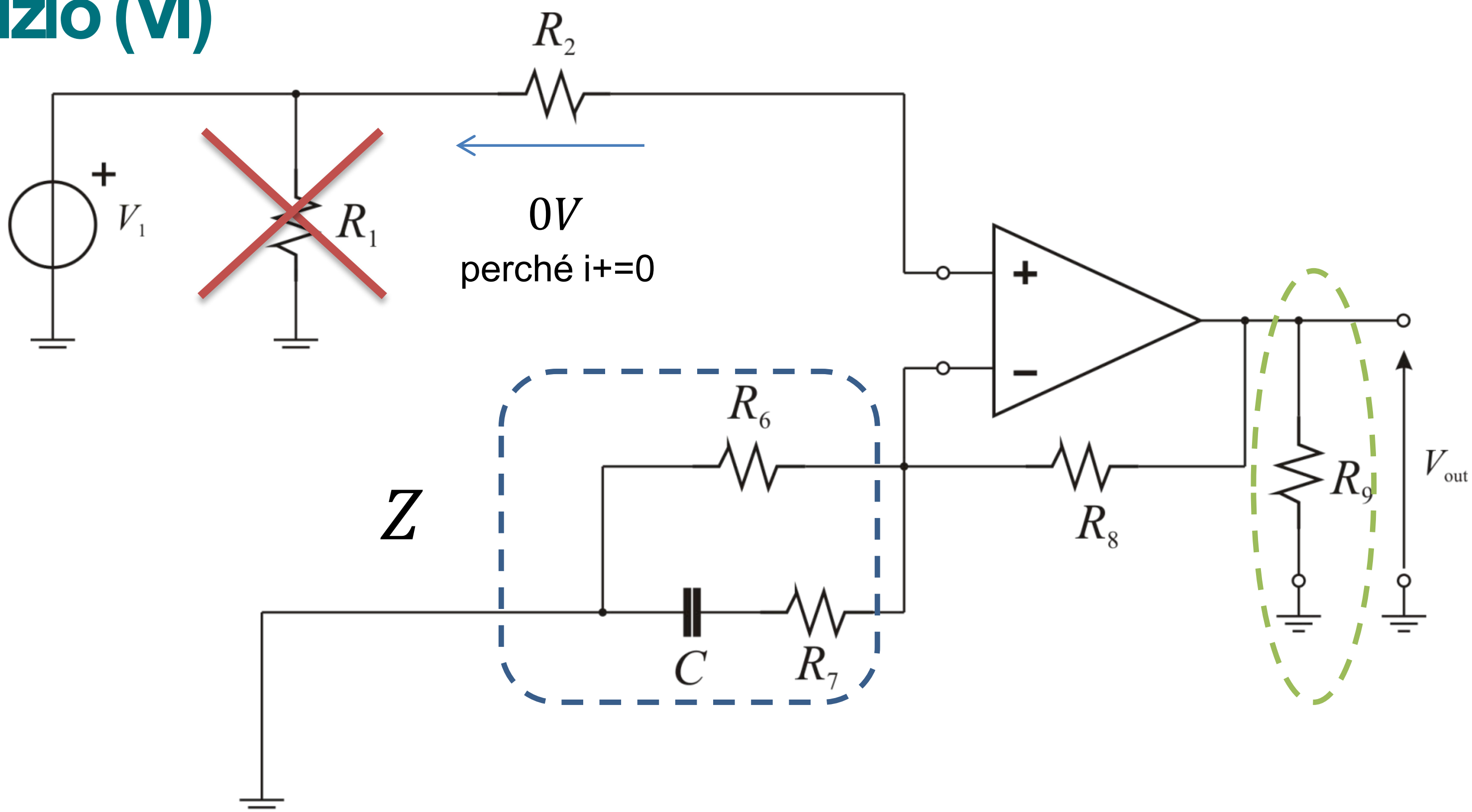


Contributo di V_1

$$Z = R_6 \parallel \left(\frac{1}{sC} + R_7\right) = R_6 \frac{1 + sR_7C}{1 + sC(R_6 + R_7)}$$

$$V'_{out} = V_1\left(1 + \frac{R_8}{Z}\right) = \frac{1}{R_6} \frac{s(R_6R_7 + R_8R_6 + R_8R_7)C + R_8 + R_6}{1 + sR_7C} V_1$$

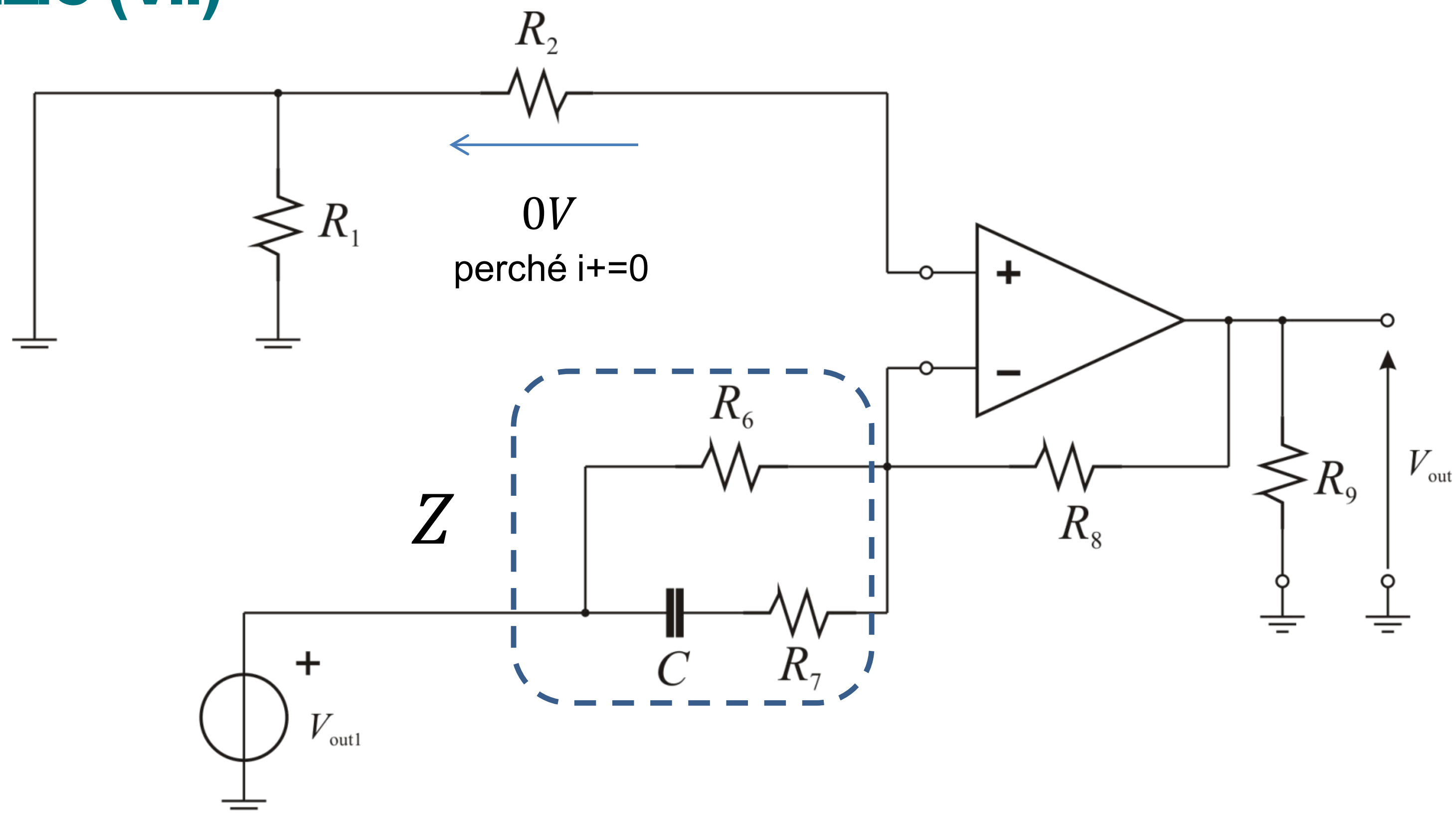
Esercizio (VI)



<u>Contributo di V_1</u>

$$V'_{out} = V_1\left(1+\frac{R_8}{Z}\right) = \left(1+\frac{R_8}{R_6}\right)\frac{1+s\dfrac{R_6R_7+R_8R_6+R_8R_7}{R_8+R_6}C}{1+sR_7C}V_1$$

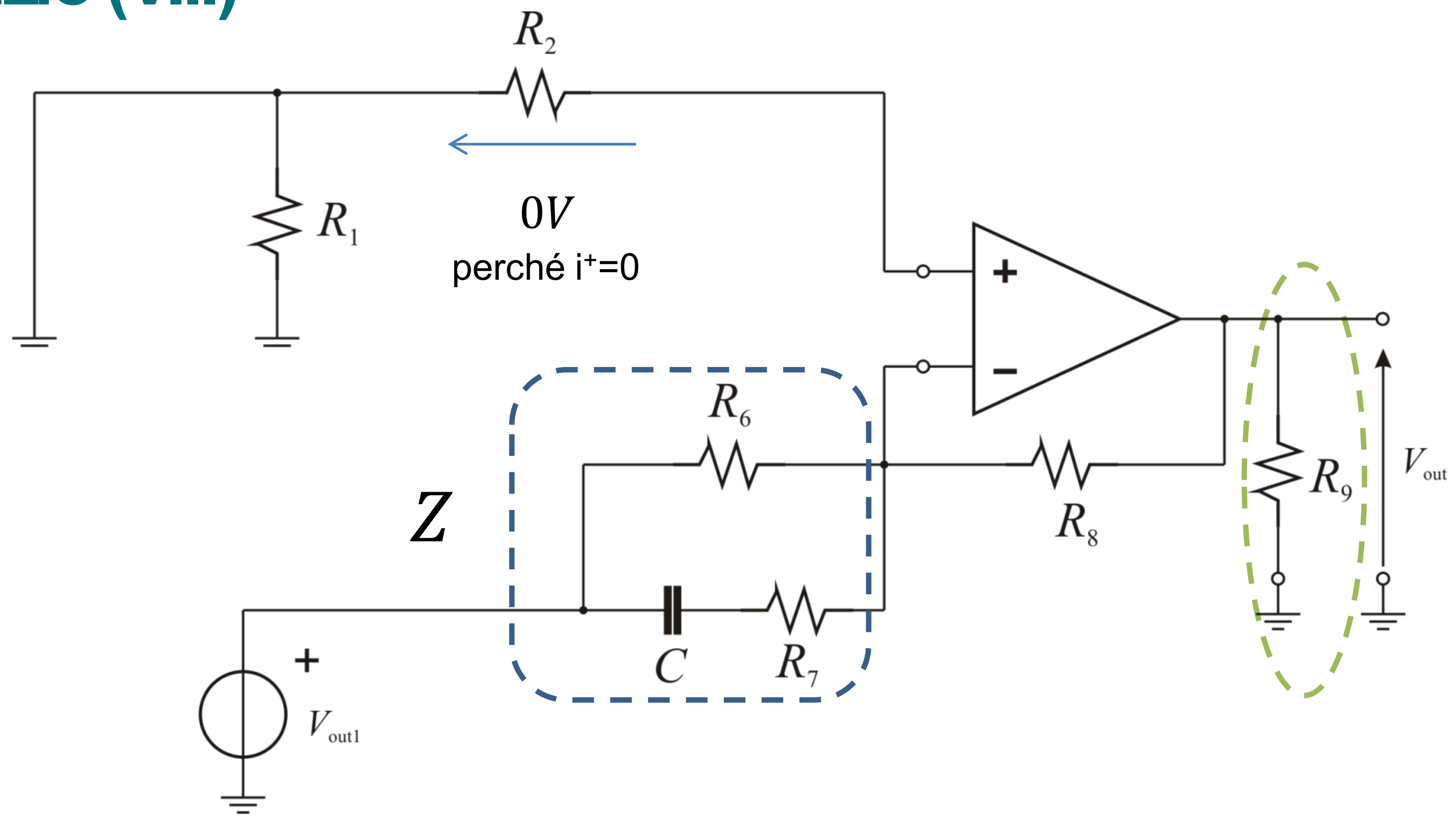
Esercizio (MI)



<u>Contributo di V_{out1}</u>

- R_1 è cortocircuitata dal generatore V_1 spento;
- in R_2 non passa corrente.
- Entrambi i resistori R_1 e R_2 sono ininfluenti e $v^+ = 0\text{V}$

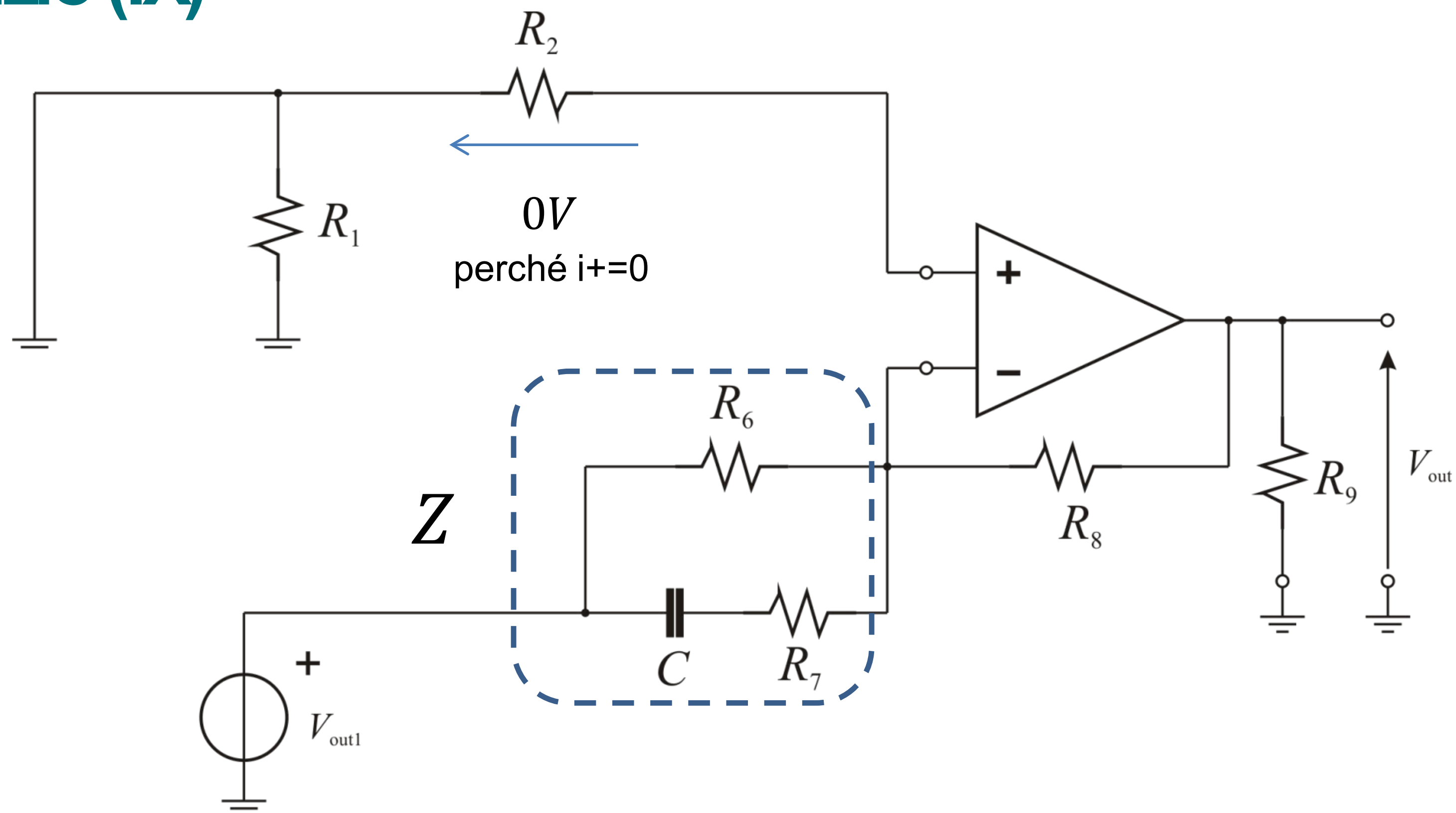
Esercizio (MII)



Contributo di V_{out1}

Ci si riconduce ad un ***amplificatore invertente*** (l'uscita dell'operazionale ideale si comporta come un generatore di tensione e non risente degli effetti di carico, per cui R9 è ininfluente)

Esercizio (IX)

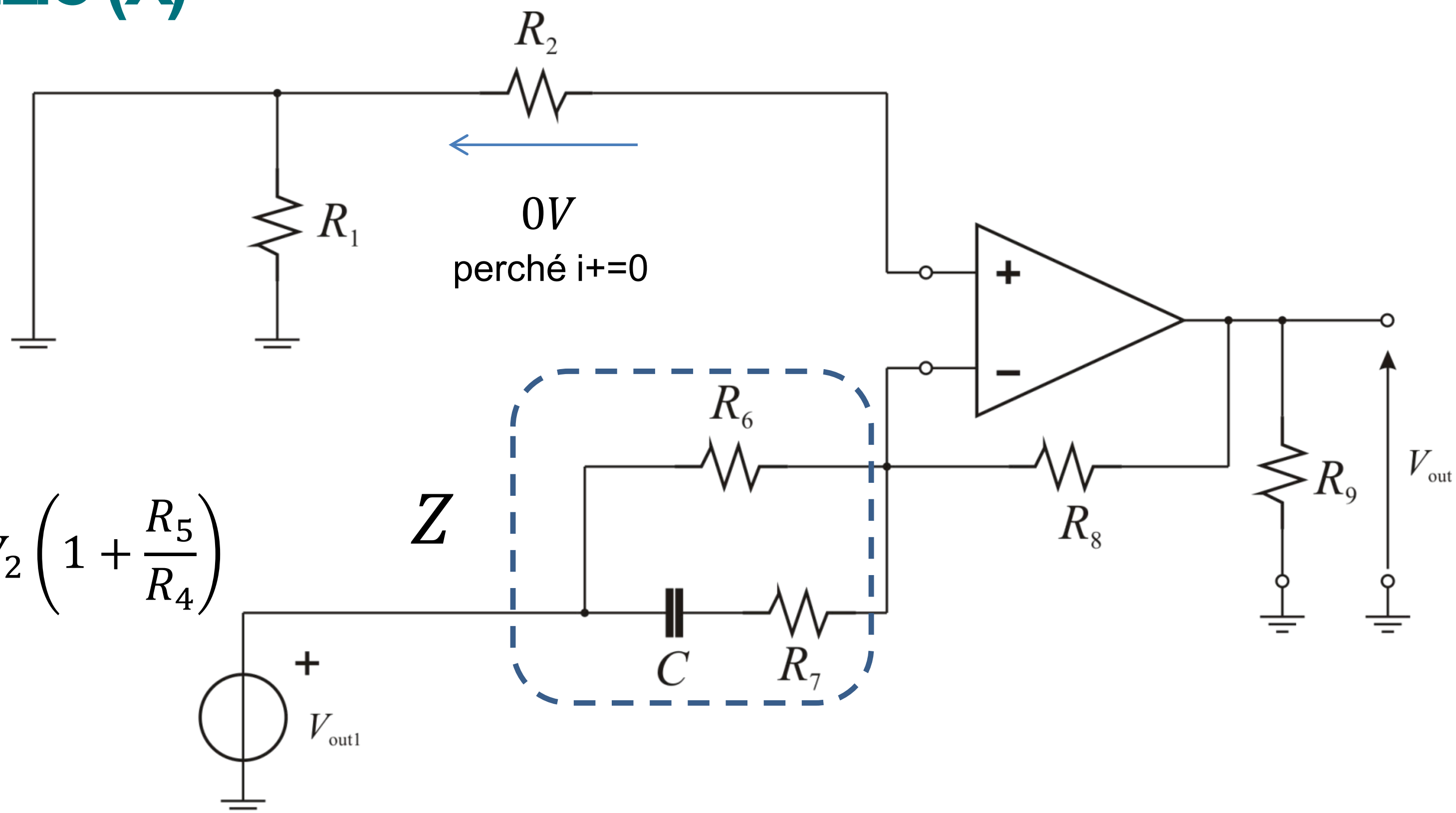


<u>Contributo di V_{out1}</u>

$$Z = R_6 \parallel \left(\frac{1}{sC} + R_7\right) = \frac{sR_6R_7C + R_6}{1 + sC(R_6 + R_7)}$$

$$V''_{out} = -\frac{R_8}{Z}V_{out1} = -\frac{R_8}{R_6}\frac{1 + sC(R_6 + R_7)}{sR_7C + 1}V_{out1}$$

Esercizio (X)



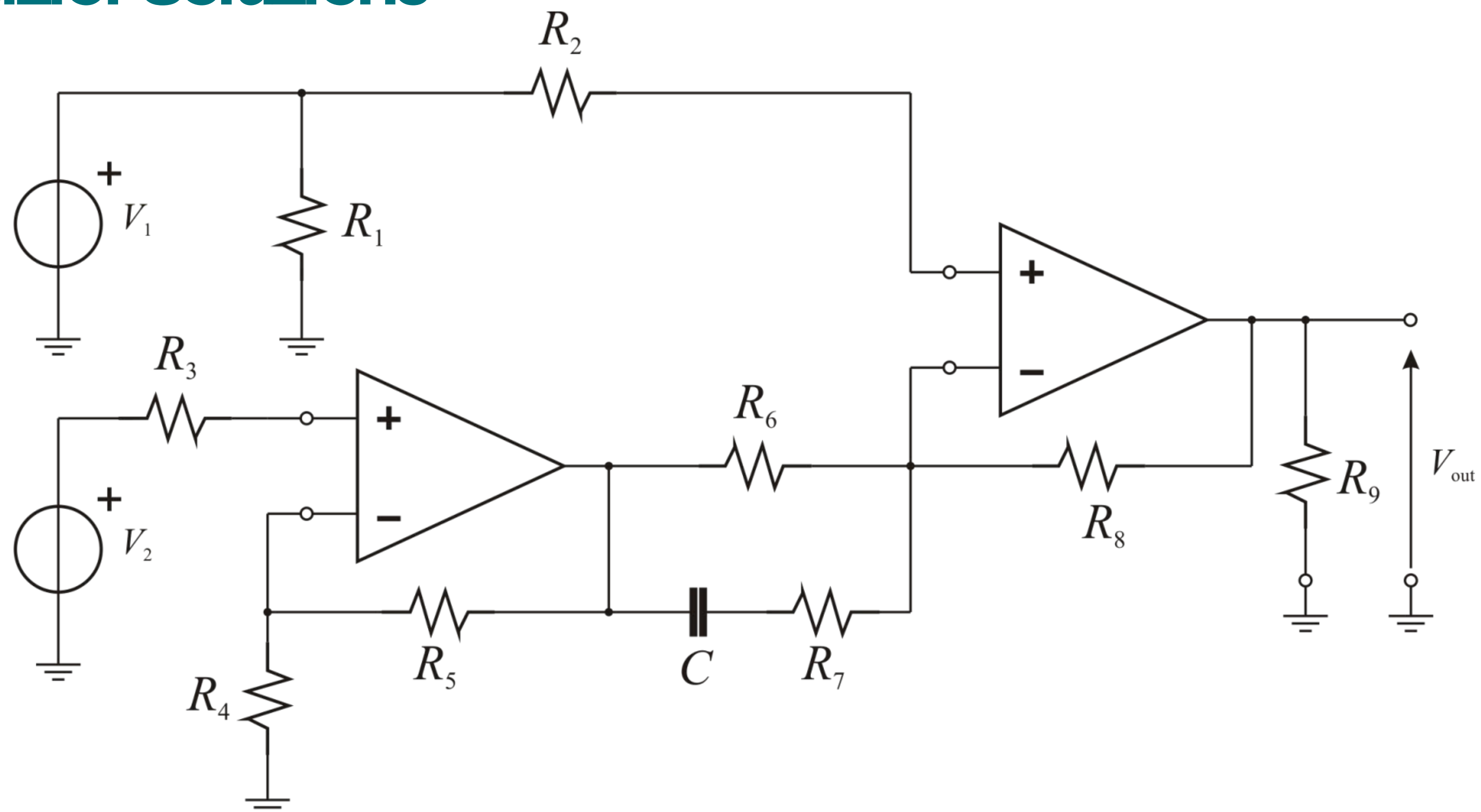
$$V_{out1} = V_2\left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right)$$

<u>Contributo di V_{out1}</u>

$$Z = R_6 \parallel \left(\frac{1}{sC} + R_7\right) = \frac{sR_6R_7C + R_6}{1 + sC(R_6 + R_7)}$$

$$V''_{out} = -\frac{R_8}{Z}V_{out1} = -\frac{R_8}{R_6}\frac{1 + sC(R_6 + R_7)}{sR_7C + 1}\left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right)V_2$$

Esercizio: Soluzione



$$V_{out} = V'_{out} + V''_{out}$$

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_8}{R_6}\right) \frac{1 + s\dfrac{R_6R_7 + R_8R_6 + R_8R_7}{R_8 + R_6}C}{1 + sR_7C} V_1 - \frac{R_8}{R_6} \frac{1 + sC(R_6 + R_7)}{1 + sR_7C} \left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right) V_2$$

Esercizio: Diagrammi di Bode (II)

$$V_{out} = \left(1 + \frac{R_8}{R_6}\right) \frac{1 + s\frac{R_6R_7 + R_8R_6 + R_8R_7}{R_8 + R_6}C}{1 + sR_7C} V_1 - \frac{R_8}{R_6} \frac{1 + sC(R_6 + R_7)}{1 + sR_7C} \left(1 + \frac{R_5}{R_4}\right) V_2$$

$$H(s) = \left.\frac{V_{out}(s)}{V_1(s)}\right|_{V_2=0} = \left(1 + \frac{R_8}{R_6}\right) \frac{1+s\frac{R_6R_7+R_8R_6+R_8R_7}{R_8+R_6}C}{1+sR_7C}$$

Singolarità: 1 zero ed 1 polo:

Forma canonica

$$H(s) = k\frac{1 - \frac{s}{s_z}}{1 - \frac{s}{s_p}} V_1$$

Valori numerici

$R_6 = 120\mathrm{k}\Omega$
$R_7 = 10\mathrm{k}\Omega$
$R_8 = 120\mathrm{k}\Omega$
$C = 4.7\mathrm{nF}$

$$k = \left(1 + \frac{R_8}{R_6}\right) = 2$$

$$s_z = -\left(\frac{R_6R_7+R_8R_6+R_8R_7}{R_8+R_6}C\right)^{-1} = -3.039\ \mathrm{krad/s} \rightarrow f_z = 483\mathrm{Hz}$$

$$s_p = -\left(R_7C\right)^{-1} = -21.27\ \mathrm{krad/s} \rightarrow f_p = 3.38\mathrm{kHz}$$

$f \rightarrow 0$: (C circuito aperto)

$|H(f)| = k = 2$ (6dB)

$f \rightarrow \infty$: (C corto circuito)

$|H(f)| = k\frac{s_p}{s_z} = 14$ (23dB)

Esercizio: Diagrammi di Bode (I)