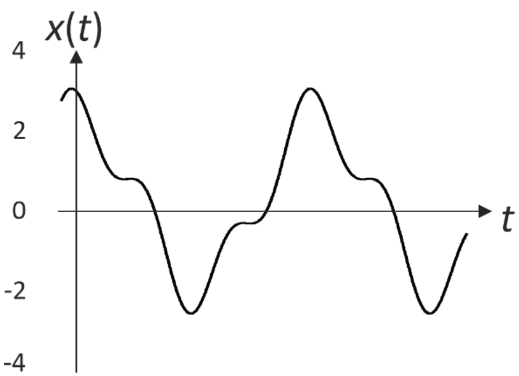
POLITECNICO
DI TORINO

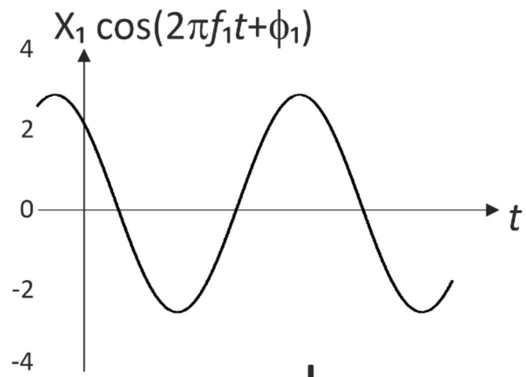
DET
Department of Electronics and Telecommunications

Richiami e Complementi di Teoria dei Circuiti: Funzioni di Trasferimento e Diagrammi di Bode

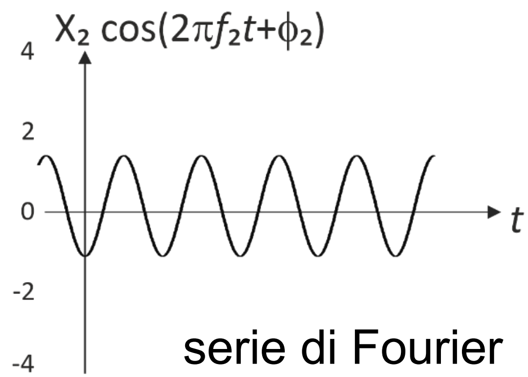
Segnale: Analisi nel dominio della frequenza

Segnale Periodico:





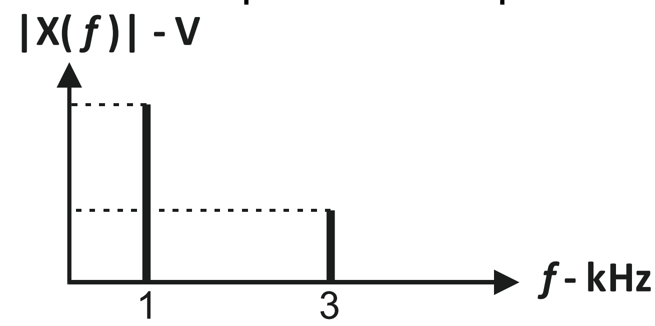
+



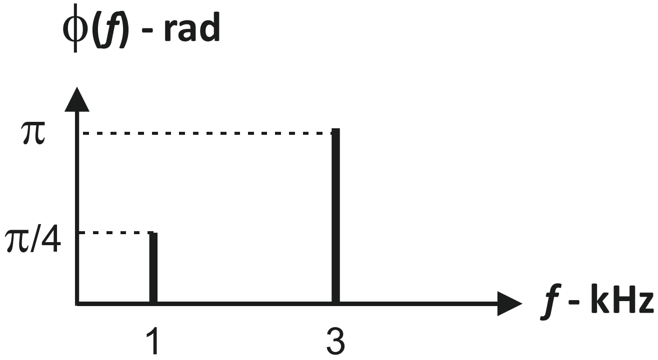
serie di Fourier

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

Spettro di Ampiezza

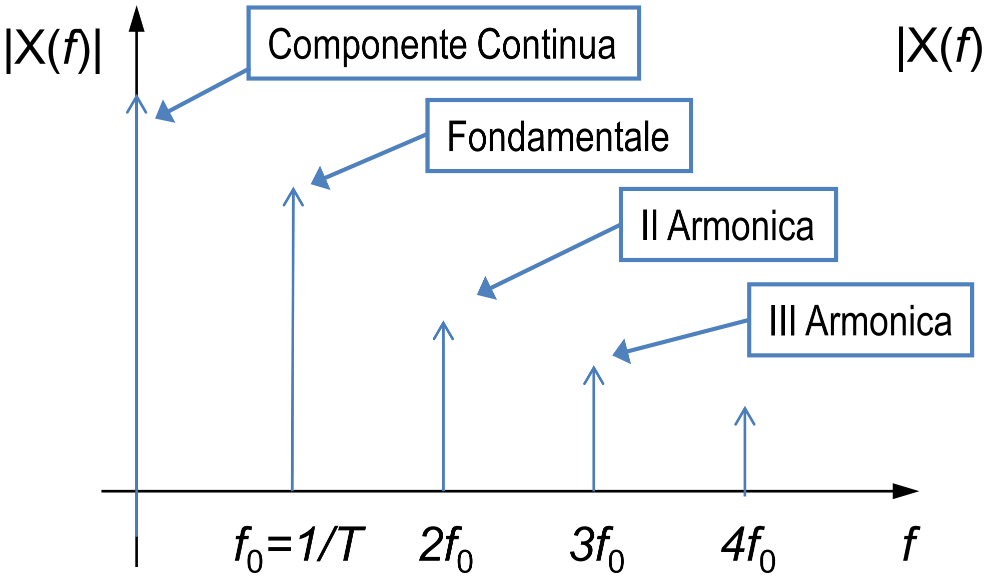


Spettro di Fase



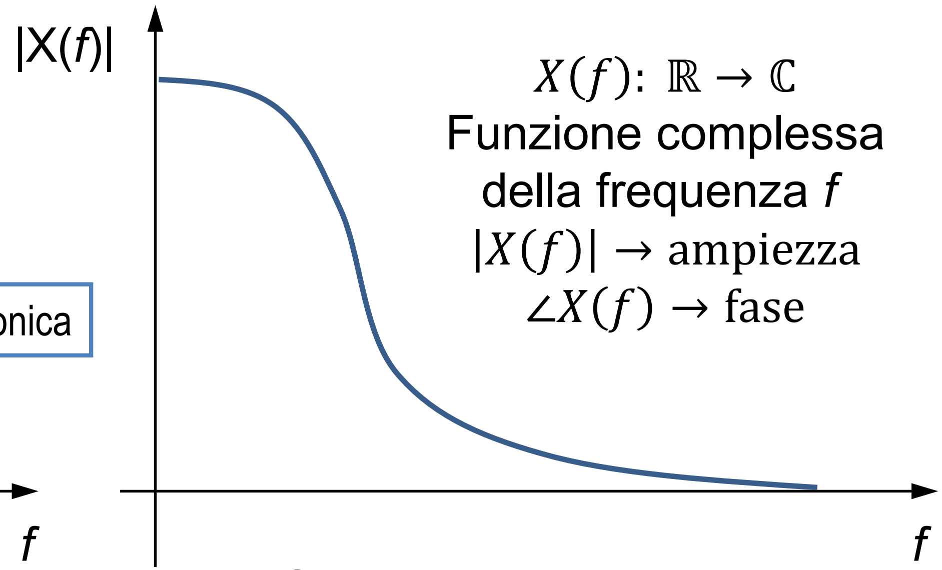
Segnale: Analisi nel dominio della frequenza

- Un generico segnale può essere scomposto nella somma di (infinite) sinusoidi con diversa *frequenza*, *ampiezza* e *fase.*



Segnale Periodico (periodo ***T=1/f*₀**):
solo componenti a frequenza *n/T, n* intero
Spettro a righe, Serie di Fourier

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$



Segnale non Periodico:
Spettro continuo
Antitrasformata di Fourier

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} \mathrm{d}f.$$

Analisi nel dominio della frequenza: perché?

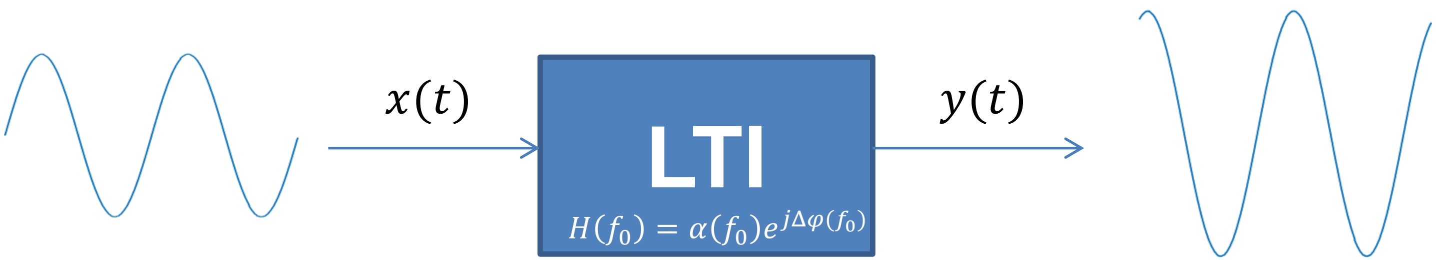
- La risposta di un sistema ***lineare tempo-invariante*** (LTI) ad un ingresso sinusoidale a frequenza f_0 <u>è ancora una sinusoide a frequenza f_0.</u>
  - Questo non è vero in generale per ingressi non-sinusoidali
- Nel caso più generale, in un sistema LTI con ingresso sinusoidale a frequenza f_0 :
  - l'ampiezza della sinusoide in uscita è pari a quella della sinusoide in ingresso, moltiplicata per un fattore α che dipende da f_0.
  - l'uscita presenta uno sfasamento $\Delta\varphi$ che dipende da f_0.

$$x(t) = X_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x)$$

$$y(t) = \alpha(f_0) X_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x + \Delta\varphi(f_0))$$

Analisi nel dominio della frequenza: perché?

- Se rappresentiamo la sinusoide $X_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x)$ con un ***fasore***, cioè un numero complesso $X = X_0 e^{j\varphi_x} \in \mathbb{C}$
  - dove $|X| = X_0$, pari all'ampiezza della sinusoide
  - e dove $\angle X = \varphi_x$, pari alla fase della sinusoide,
- il numero complesso $Y = Y_0 e^{j\varphi_Y}$ che rappresenta l'uscita può essere espresso come $H(f_0)X$, dove $H(f_0) = \alpha(f_0)e^{j\Delta\varphi(f_0)}$ descrive come il sistema opera a frequenza f_0.



$$x(t) = X_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x)$$

$$X = X_0 e^{j\varphi_x}$$

$$y(t) = \alpha(f_0)X_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_x + \Delta\varphi(f_0))$$

$$Y = \alpha(f_0)X_0 e^{j(\varphi_x + \Delta\varphi(f_0))} = H(f_0)X$$

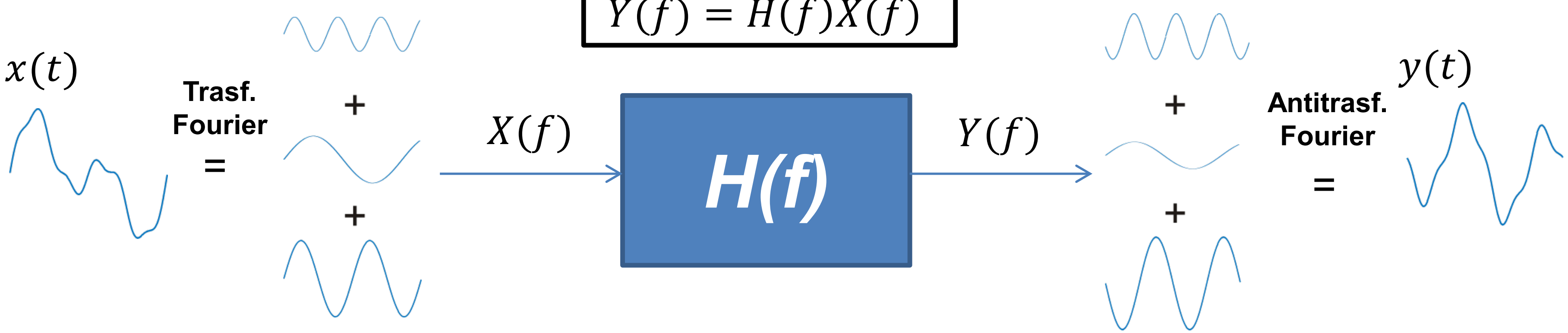
Analisi nel dominio della frequenza: perché?

- Generalizzando il numero complesso $H(f_0)$ per una generica frequenza f del segnale in ingresso, la funzione $H(f)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, detta ***funzione di trasferimento (f.d.t.),*** permette di ottenere la risposta del sistema a qualsiasi ingresso *sinusoidale*

$$Y = H(f)X$$

- Con l'analisi di Fourier si può esprimere ***qualsiasi*** ingresso nel dominio della frequenza, cioè come somma di sinusoidi. Per linearità, l'uscita è data applicando la f.d.t. frequenza per frequenza e sovrapponendo gli effetti.
- L'uscita nel dominio della frequenza è data dal prodotto dell'ingresso nel dominio della frequenza per la funzione di trasferimento.

$$\boxed{Y(f) = H(f)X(f)}$$



Analisi nel dominio della frequenza: perché?

- L'analisi nel dominio della frequenza semplifica estremamente l'analisi dei sistemi dinamici LTI perché trasforma gli operatori integro-differenziali in operatori algebrici

$$\frac{d\,\cdot}{dt} \rightarrow j\omega \qquad \int_0^t \cdot\, dt' \rightarrow 1/j\omega$$

- Strumenti matematici

Trasformata di Fourier:

$$X_F(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi f t} dt$$

Funzione complessa della variabile reale 'frequenza' f, (o $\omega = 2\pi f$, 'frequenza angolare')

Considera segnali da $-\infty$ a $+\infty$ (tipicamente periodici), usata per studiare i sistemi LTI *a regime*

Trasformata di Laplace:

$$X_L(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) e^{st} dt$$

Funzione complessa della variabile complessa $s = \sigma + j\omega$ (*pulsazione complessa)*

Se interessa solo l'analisi *a regime* (sarà sempre così in questo corso) trasformate di Fourier e di Laplace si equivalgono e vale la relazione

$$X_F(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}\Big|_f = \mathcal{L}\{x(t)\}\Big|_{s=j\omega=j2\pi f} = X_L(j\omega) = X_L(j2\pi f)$$

Diagrammi di Bode

- E' utile visualizzare graficamente l'andamento di una funzione di trasferimento.
- Consideriamo $H(j2\pi f) = H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$ (Trasf. di Fourier)
- Le f.d.t. sono funzioni *a valori complessi*, occorre rappresentarne **modulo** e **fase** in funzione della *variabile reale* frequenza *f* (o pulsazione ω).
- Il **modulo** è rappresentato in unità logaritmiche (decibel, dB) per poterne apprezzare variazioni di ordini di grandezza sulla stessa scala.
- La **fase** è espressa in gradi o radianti.
- Per la **frequenza** si usa una scala logaritmica (interessa studiare la f.d.t. per frequenze che variano di diversi ordini di grandezza).
- Le rappresentazioni grafiche del modulo e della fase di una funzione di trasferimento descritte sopra prendono il nome di ***diagrammi di Bode.***

Diagrammi di Bode

- Esempio: $H(s) = k\dfrac{1}{1 - s/s_p}$ $\qquad k = 0.5$, $s_p = -40.000 \cdot 2\pi \text{ rad/s}$

Diagramma del modulo

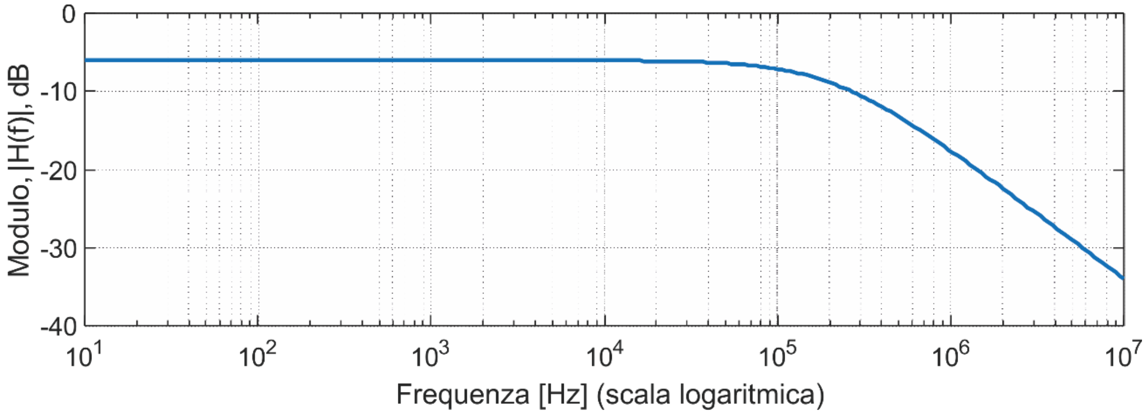
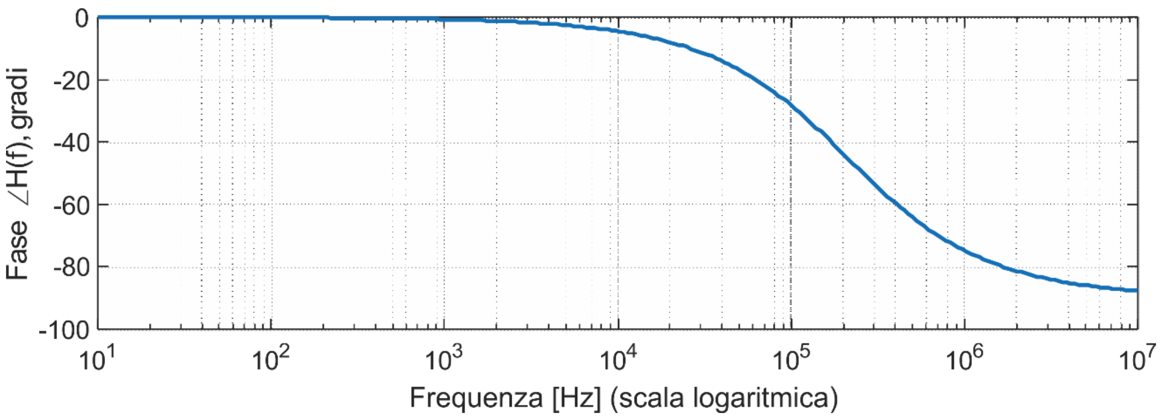


Diagramma della fase



E' importante saper tracciare a mano e con buona approssimazione i diagrammi di Bode di modulo e fase. Per farlo, si utilizza l'approssimazione asintotica 'a spezzate' illustrata nelle prossime slide

POLITECNICO DI TORINO

DET
Department of Electronics and Telecommunications

Diagrammi di Bode

- In generale, per un circuito lineare a parametri concentrati, le funzioni di trasferimento sono razionali fratte (rapporto di polinomi in *s*) e possono essere poste nella forma:

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)}$$

$s_{z,i}$: **zeri**: radici complesse del polinomio a numeratore

$s_{p,i}$: **poli:** radici complesse del polinomio a denominatore

I polinomi a num. e den. sono a coefficienti reali → quindi i poli e gli zeri possono sono o reali o a coppie complesse coniugate. Nel seguito consideriamo solo il caso di poli e zeri ***reali*** (v. testi di riferimento per poli complessi).

- I diagrammi di Bode riportano il modulo (in decibel) e la fase (in gradi o radianti) della funzione di trasferimento valutata per $s = j\omega$ in funzione della frequenza (su scala logaritmica)

Modulo (in dB)

$$20 \log_{10}|H(j\omega)|$$

Fase

$$\angle H(j\omega) = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{H(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{H(j\omega)\}}$$

Diagrammi di Bode: Modulo (I)

- Modulo:

$$20\log_{10}|H(j\omega)| =$$

$$= 20\log_{10}|k|\omega^m \left| \frac{\prod_i \left(1-\frac{j\omega}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1-\frac{j\omega}{s_{p,i}}\right)} \right|$$

$$= \underbrace{20\log_{10}|k|}_{\text{costante}} + \underbrace{20\,m\log_{10}\omega}_{\text{contributo di zeri/poli nell'origine}} + \underbrace{\sum_i 20\log_{10}\left|1-\frac{j\omega}{s_{z,i}}\right|}_{\text{contributi degli zeri non nell'origine}} - \underbrace{\sum_i 20\log_{10}\left|1-\frac{j\omega}{s_{p,i}}\right|}_{\text{contributi dei poli non nell'origine}}$$

costante

contributo di zeri/poli nell'origine
Zero: m>0
Polo: m<0

contributi degli zeri non nell'origine

contributi dei poli non nell'origine

Diagrammi di Bode: Modulo (II)

- Modulo:

Se la f.d.t. è **adimensionata** (è cioè un rapporto di grandezze omogenee, ad es. amplificazione di tensione, corrente,…) il modulo si esprime direttamente in decibel (dB)

$$|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$

Se la f.d.t. è **dimensionata** (è ad esempio un'impedenza, misurata in Ω, un'ammettenza, misurata in S,…), come unità logaritmica si usano i decibel <u>riferiti all'unità di misura</u>

	Unità Naturale	In unità logaritmiche…	Unità Logaritmica
Impedenza $\lvert Z(j\omega)\rvert$	Ω	$20\log_{10}\frac{\lvert Z(j\omega)\rvert}{1\Omega}$	dBΩ
Ammettenza $\lvert Y(j\omega)\rvert$	S	$20\log_{10}\frac{\lvert Y(j\omega)\rvert}{1S}$	dBS

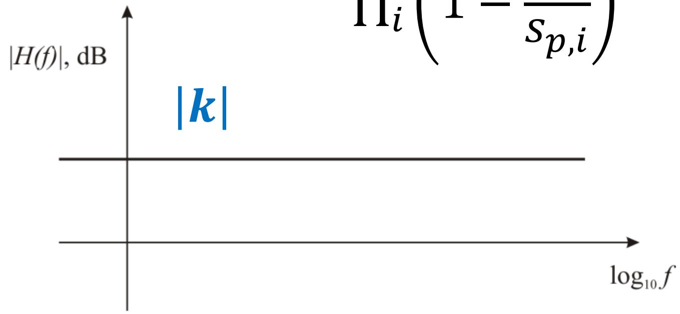
Diagrammi di Bode: Modulo (III)

$$H(s) = k s^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)}$$

- Modulo:

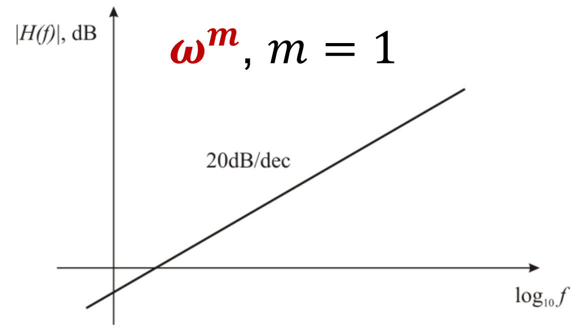
Contributo della costante moltiplicativa:

$20\log_{10} k$ (costante in frequenza)



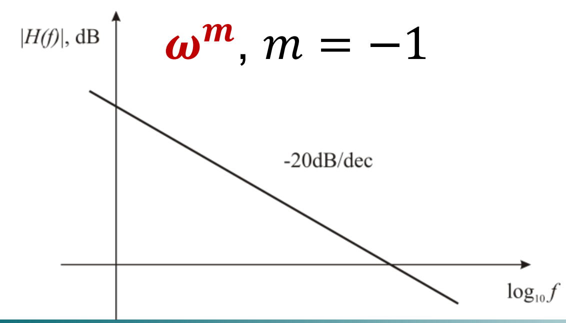
Contributo di uno zero semplice nell'origine (s^m con $m = 1$):

$$20\log_{10}\frac{f}{1\mathrm{Hz}}$$



Contributo di un polo semplice nell'origine (s^m con $m = -1$):

$$-20\log_{10}\frac{f}{1\mathrm{Hz}}$$



Diagrammi di Bode: Modulo (IV)

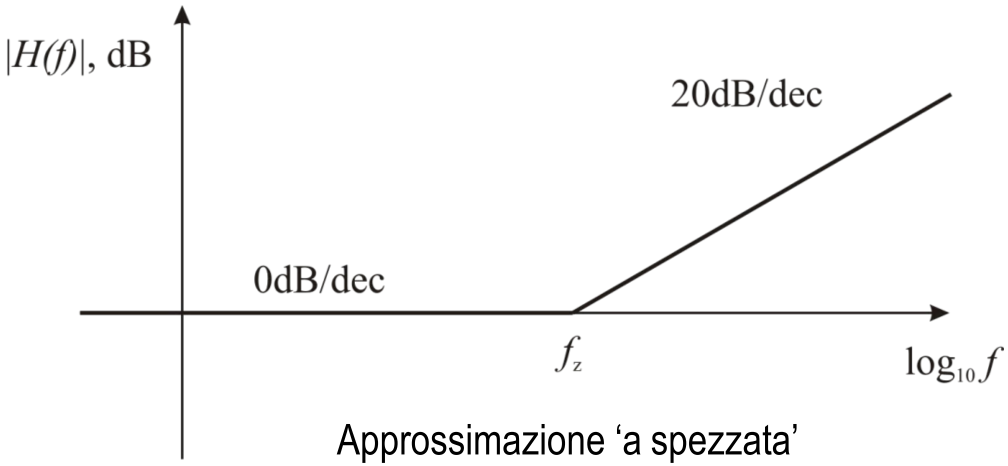
- Modulo:

  Contributo di uno **zero reale** $f_{z,i} \neq 0$

$$H(s) = k s^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)}$$

$$\omega = 2\pi f \qquad f_{z,i} = \frac{|s_{z,i}|}{2\pi}$$

$$20\log_{10}\left|1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right| = 20\log_{10}\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_{z,i}^2}} = \begin{cases} 0\text{dB} & f \ll |f_{z,i}| \\ 3\text{dB} & f = |f_{z,i}| \\ 20\log_{10}\frac{f}{f_{z,i}} & f \gg |f_{z,i}| \end{cases}$$



Approssimazione 'a spezzata'

Diagrammi di Bode: Modulo (V)

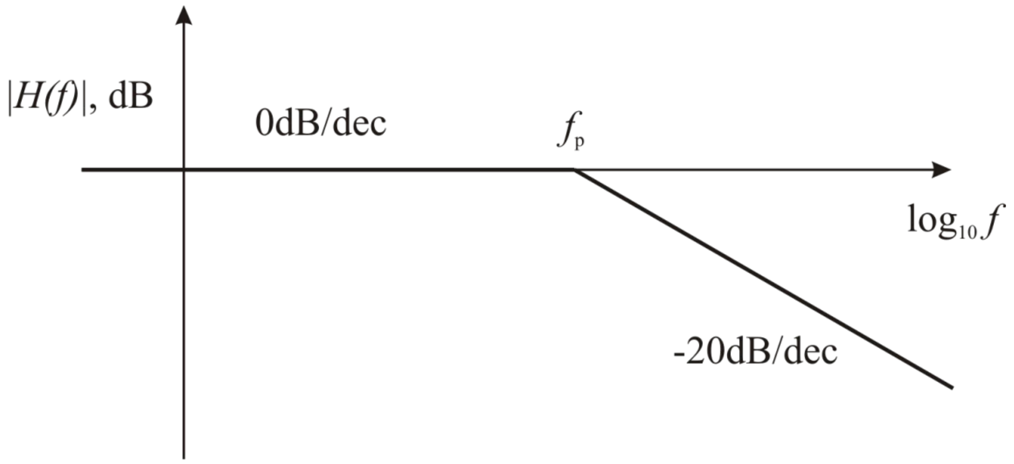
- Modulo:

  Contributo di un **polo reale** $f_{p,i} \neq 0$

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(\mathbf{1 - \frac{s}{s_{p,i}}}\right)}$$

$$\omega = 2\pi f \qquad f_{p,i} = \frac{|s_{p,i}|}{2\pi}$$

$$-20\log_{10}\left|1 - \frac{j\omega}{s_{p,i}}\right| = -20\log_{10}\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_{p,i}^2}} = \begin{cases} 0\text{dB} & f \ll |f_{p,i}| \\ -3\text{dB} & f = |f_{p,i}| \\ -20\log_{10}\frac{f}{f_{p,i}} & f \gg |f_{p,i}| \end{cases}$$



Diagrammi di Bode: Fase (I)

- Fase:

$$\angle H(j\omega) = \angle k + m\,90° + \angle \prod_i \left(1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right) - \angle \prod_i \left(1 - \frac{j\omega}{s_{p,i}}\right)$$

$$= \angle k + m\,90° + \sum_i \angle\left(1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right) - \sum_i \angle\left(1 - \frac{j\omega}{s_{p,i}}\right)$$

contributi zeri/poli nell'origine

contributi degli zeri non nell'origine

contributi dei poli non nell'origine

$$\angle k = \begin{cases} 0 \text{ per } k > 0 \\ 180° \text{ per } k < 0 \end{cases}$$

Può essere espressa in gradi o in radianti

Diagrammi di Bode: Fase (II)

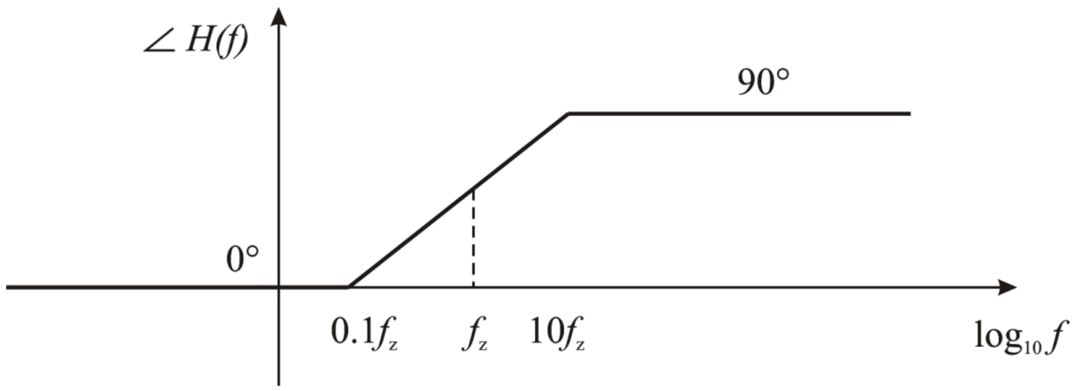
- Fase:

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)}$$

Contributo di uno **zero reale negativo** $s_{z,i} < 0$ in $f_{z,i}$

$$\omega = 2\pi f \qquad f_{z,i} = \frac{|s_{z,i}|}{2\pi} \qquad s_{z,i} < 0 \rightarrow |s_{z,i}| = -s_{z,i}$$

$$\angle\left(1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right) = \arctan\frac{f}{f_{z,i}} = \begin{cases} 0^\circ & f \ll |f_{z,i}| \\ 45^\circ & f = |f_{z,i}| \\ 90^\circ & f \gg |f_{z,i}| \end{cases}$$



Diagrammi di Bode: Fase (III)

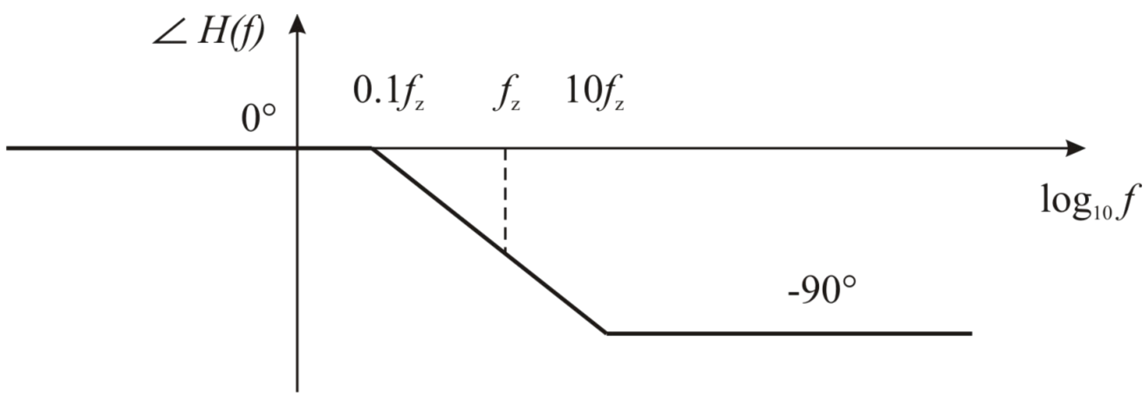
- Fase:

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)}$$

Contributo di uno **zero reale positivo** $s_{z,i} > 0$ in $f_{z,i}$

$$\omega = 2\pi f \qquad f_{z,i} = \frac{|s_{z,i}|}{2\pi}$$

$$\angle\left(1 - \frac{j\omega}{s_{z,i}}\right) = -\arctan\frac{f}{f_{z,i}} = \begin{cases} 0^\circ & f \ll |f_{z,i}| \\ -45^\circ & f = |f_{z,i}| \\ -90^\circ & f \gg |f_{z,i}| \end{cases}$$



Diagrammi di Bode: Fase (IV)

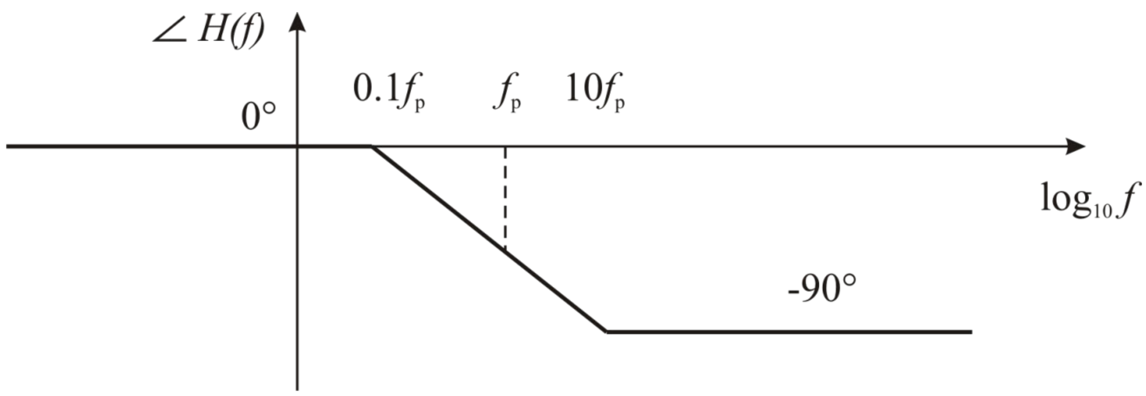
- Fase:

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(\mathbf{1 - \frac{s}{s_{p,i}}}\right)}$$

Contributo di uno **polo reale negativo*** $s_{p,i} < 0$ in $f_{p,i}$

$$\omega = 2\pi f \qquad f_{p,i} = \frac{|s_{p,i}|}{2\pi} \qquad s_{p,i} < 0 \ \rightarrow\ |s_{p,i}| = -s_{p,i}$$

$$-\angle\left(1 - \frac{j\omega}{s_{p,i}}\right) = -\arctan\frac{f}{f_{p,i}} = \begin{cases} 0^\circ & f \ll |f_{p,i}| \\ -45^\circ & f = |f_{p,i}| \\ -90^\circ & f \gg |f_{p,i}| \end{cases}$$



* La presenza di poli con parte reale positiva implica instabilità, pertanto si considerano solo poli con parte reale negativa

Esercizio: analisi in frequenza

Con riferimento al circuito in figura:

1) determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.

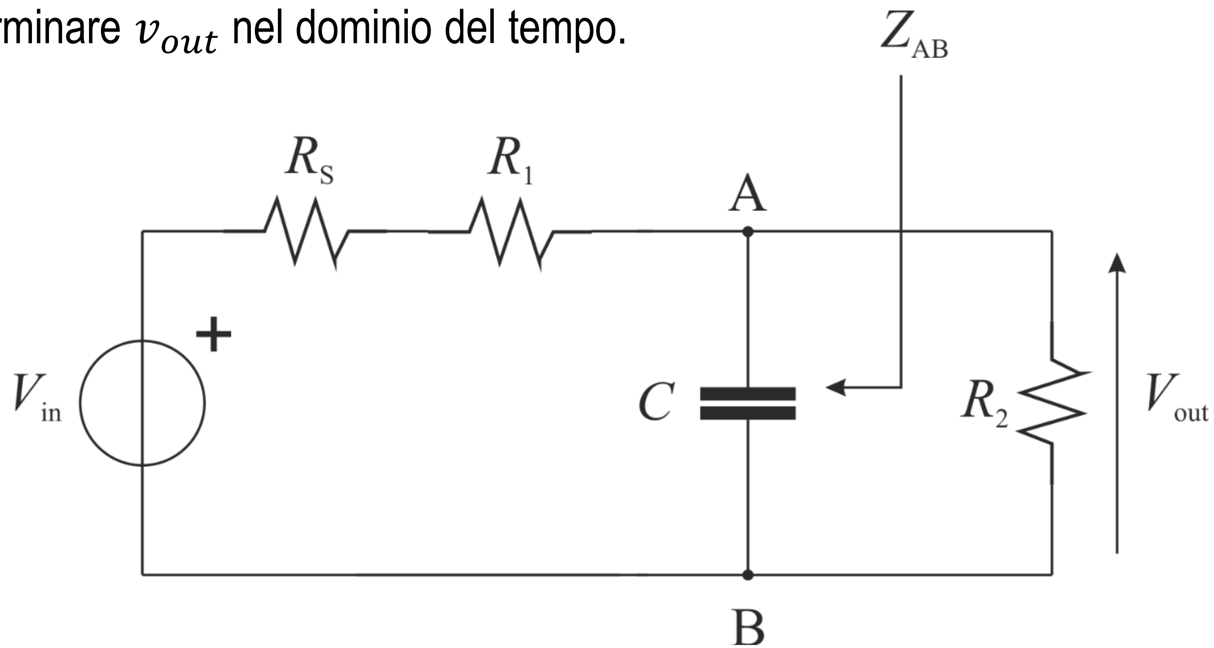
2) determinare l'espressione dell'impedenza $Z_{AB}(s)$ indicata in figura e tracciarne i diagrammi di Bode

3) supponendo che venga applicato un segnale in ingresso

$$v_{in}(t) = \sum_{k=0}^{2} V_i \cos(2\pi k f_0 t + \phi_i),$$

con $f_0 = 20\text{kHz}, V_0 = 1\text{V}, \phi_0 = 0, V_1 = 2\text{V}, \phi_1 = 0, V_2 = 1\text{V}, \phi_2 = \frac{\pi}{4}$

determinare v_{out} nel dominio del tempo.



$R_S = 5\text{k}\Omega$

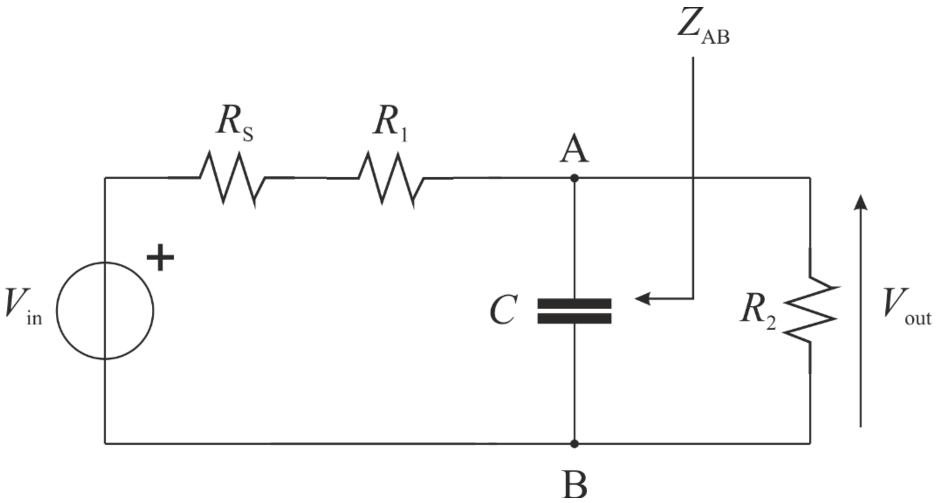
$R_1 = 5\text{k}\Omega$

$R_2 = 10\text{k}\Omega$

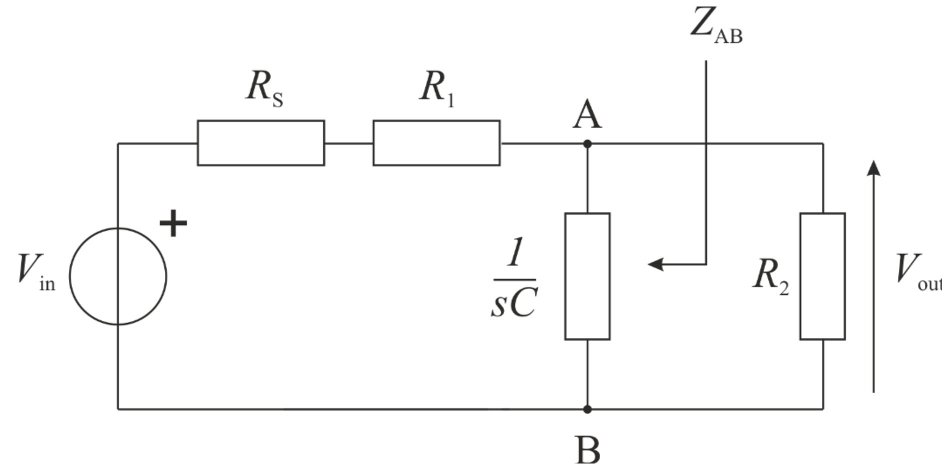
$C = \frac{5}{2\pi}\ \text{nF}$

Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.

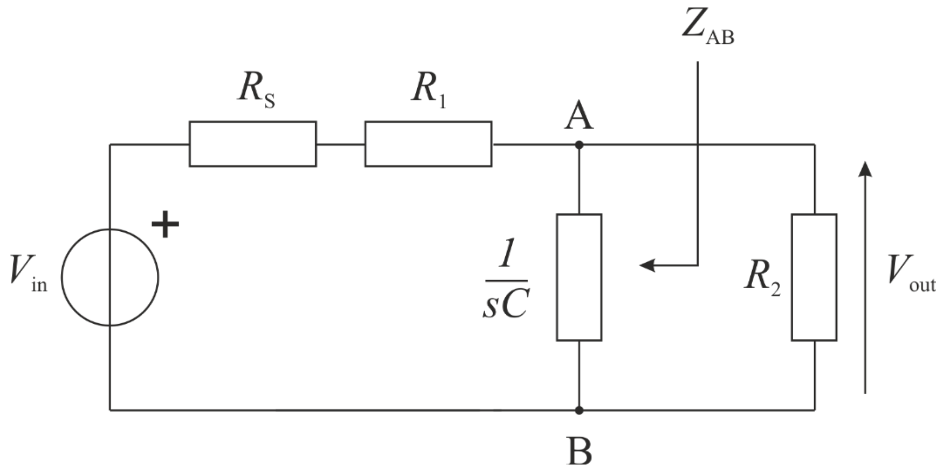


Dominio della frequenza



$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC} \parallel R_2}{R_1 + R_S + \frac{1}{sC} \parallel R_2} = \frac{\frac{R_2}{1 + sCR_2}}{R_1 + R_S + \frac{R_2}{1 + sCR_2}}$$

Esercizio: analisi in frequenza



$$H(s) = \frac{\frac{R_2}{1 + sCR_2}}{R_1 + R_S + \frac{R_2}{1 + sCR_2}}$$

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S + sCR_2(R_1 + R_S)}$$

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} \cdot \frac{1}{1 + \frac{sCR_2(R_1 + R_S)}{R_1 + R_2 + R_S}}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} \frac{1}{1 + sC[R_2 \parallel (R_1 + R_S)]}}$$

Risposta in Frequenza: Esercizio

$$\boxed{H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} \frac{1}{1 + sC[R_2 \parallel (R_1 + R_S)]}}$$

$$R_S = 5\text{k}\Omega,\ R_1 = 5\text{k}\Omega$$
$$R_2 = 10\text{k}\Omega,\ C = \frac{5}{2\pi}\ \text{nF}$$

1) Si identificano gli elementi dell'espressione generale, ordinando le singolarità (poli/zeri) in ordine di frequenza di taglio crescente

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)}$$

2) Si tracciano i diagrammi di Bode del modulo e della fase (non quotati sull'asse delle ordinate) per i vari contributi, partendo da quelli a frequenza più bassa e sommando via via i successivi.

3) Si quotano i diagrammi sull'asse delle ordinate valutando la f.d.t. in uno o più punti significativi

Risposta in Frequenza: Esercizio

$$\boxed{H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} \frac{1}{1 + sC[R_2 \parallel (R_1 + R_S)]}}$$

$R_S = 5\text{k}\Omega,\ R_1 = 5\text{k}\Omega$

$R_2 = 10\text{k}\Omega,\ C = \frac{5}{2\pi}\ \text{nF}$

Risposta in Frequenza: Esercizio

$$H(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} \frac{1}{1 + sC[R_2 \parallel (R_1 + R_S)]}$$

$R_S = 5\text{k}\Omega,\ R_1 = 5\text{k}\Omega$
$R_2 = 10\text{k}\Omega,\ C = \frac{5}{2\pi}\ \text{nF}$

1) Si identificano gli elementi dell'espressione generale, ordinando le singolarità (poli/zeri) in ordine di frequenza di taglio crescente

$$H(s) = ks^m \frac{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{z,i}}\right)}{\prod_i \left(1 - \frac{s}{s_{p,i}}\right)} \Longrightarrow H(s) = k \frac{1}{1 - s/s_p}$$

(c'è solo un polo e nessuno zero)

costante moltiplicativa: $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow -6\text{dB}$

un polo reale negativo in $s_p = -\frac{1}{C[R_2 \| (R_1 + R_S)]} = -\frac{2\pi}{25} \frac{\text{rad}}{\mu\text{s}}$ → freq. di taglio $f_p = \frac{|s_p|}{2\pi} = 40\text{kHz}$

2) Si tracciano i diagrammi di Bode del modulo e della fase (non quotati sull'asse delle ordinate) per i vari contributi, partendo da quelli a frequenza più bassa e sommando via via i successivi.

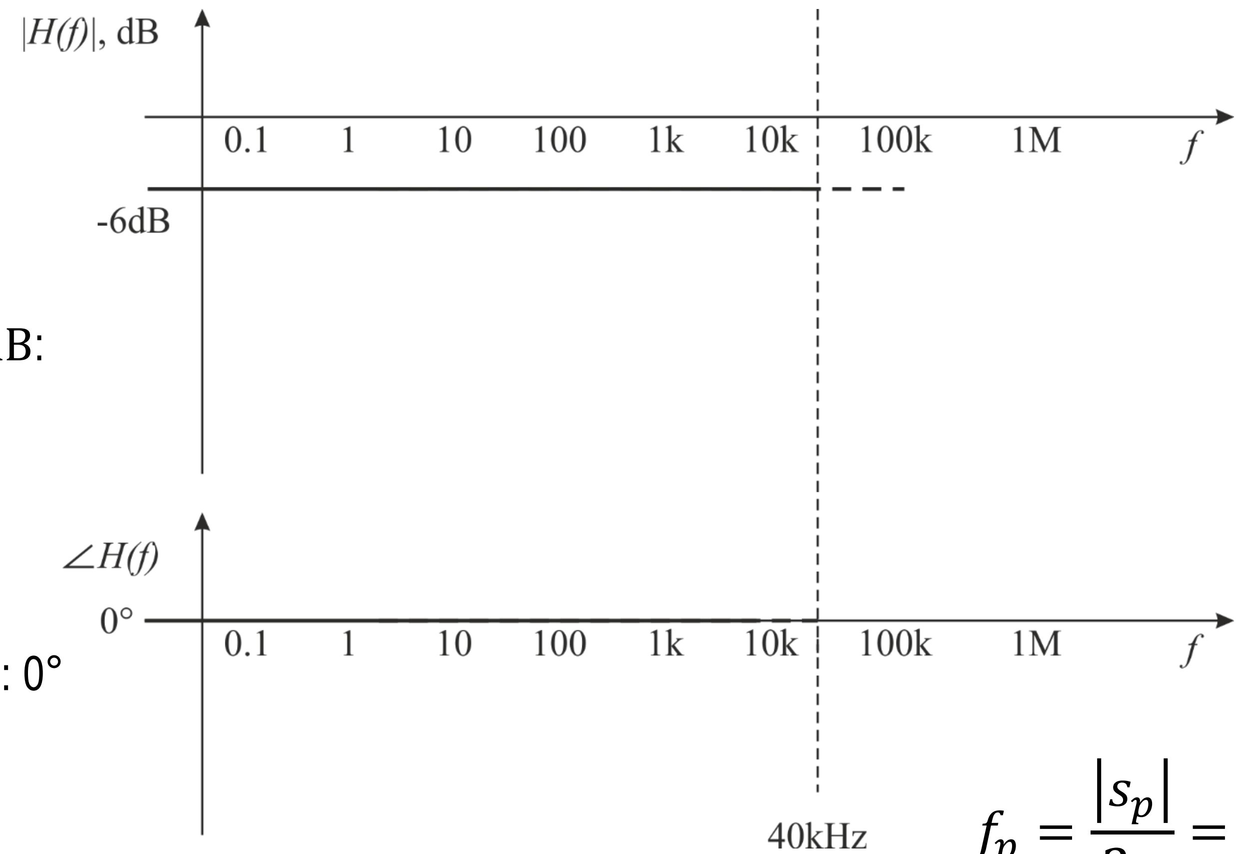
3) Si quotano i diagrammi sull'asse delle ordinate valutando la f.d.t. in uno o più punti significativi

Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.

$k = \frac{1}{2}$

Contrib. Modulo: -6dB:



$k > 0$

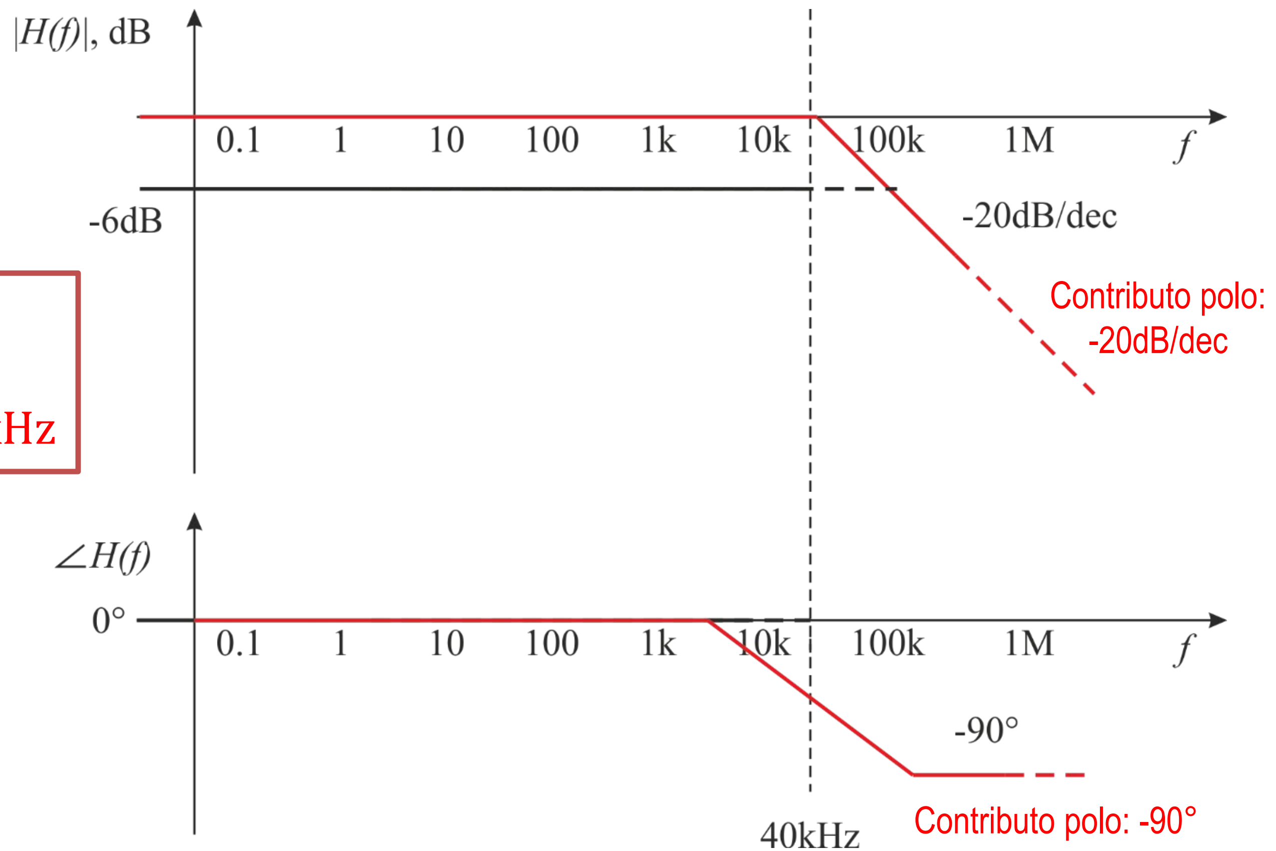
Contributo fase: 0°

$$f_p = \frac{|s_p|}{2\pi} = 40\text{kHz}$$

Esercizio: analisi in frequenza

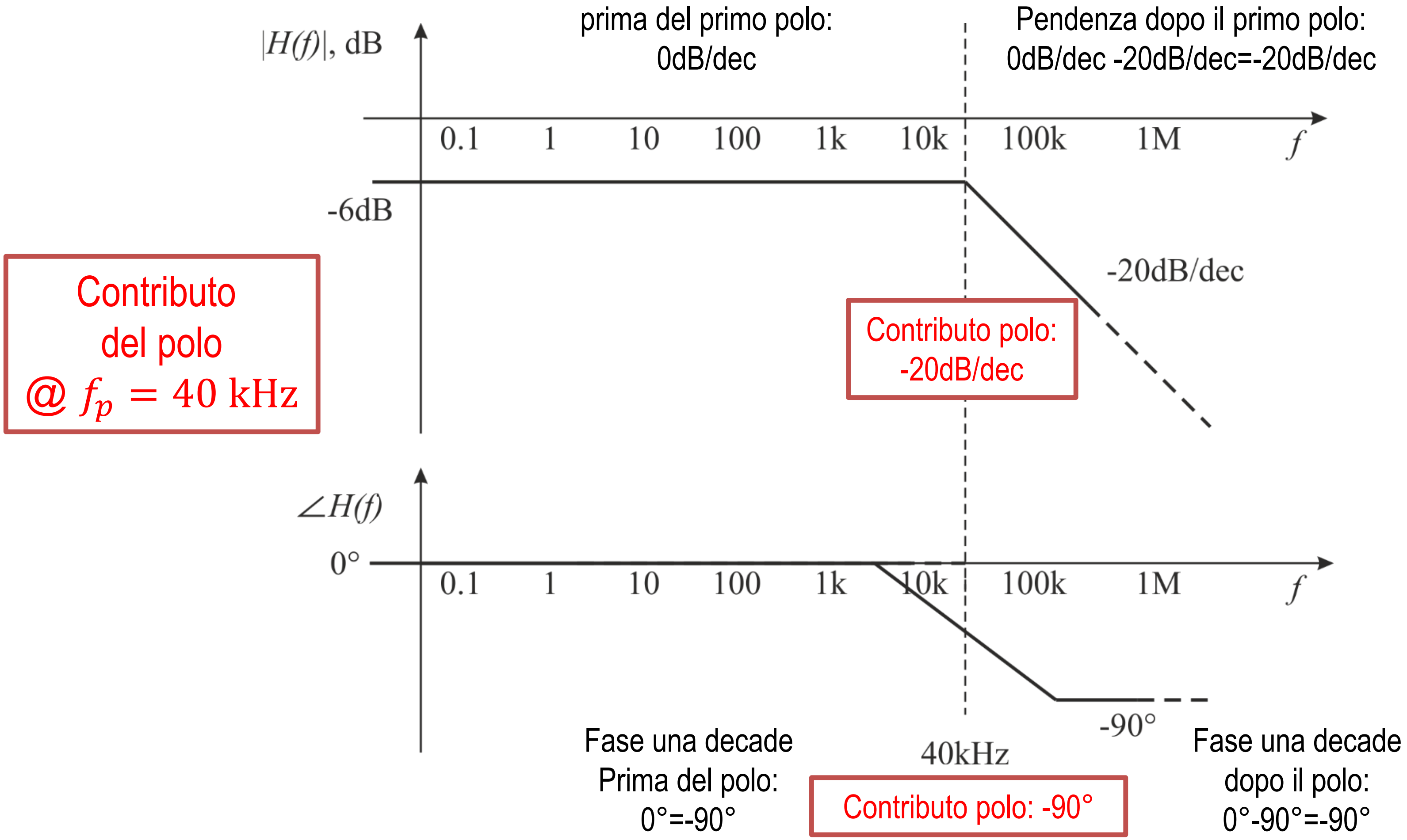
-determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.

Contributo
del polo
@ $f_p = 40\ \text{kHz}$



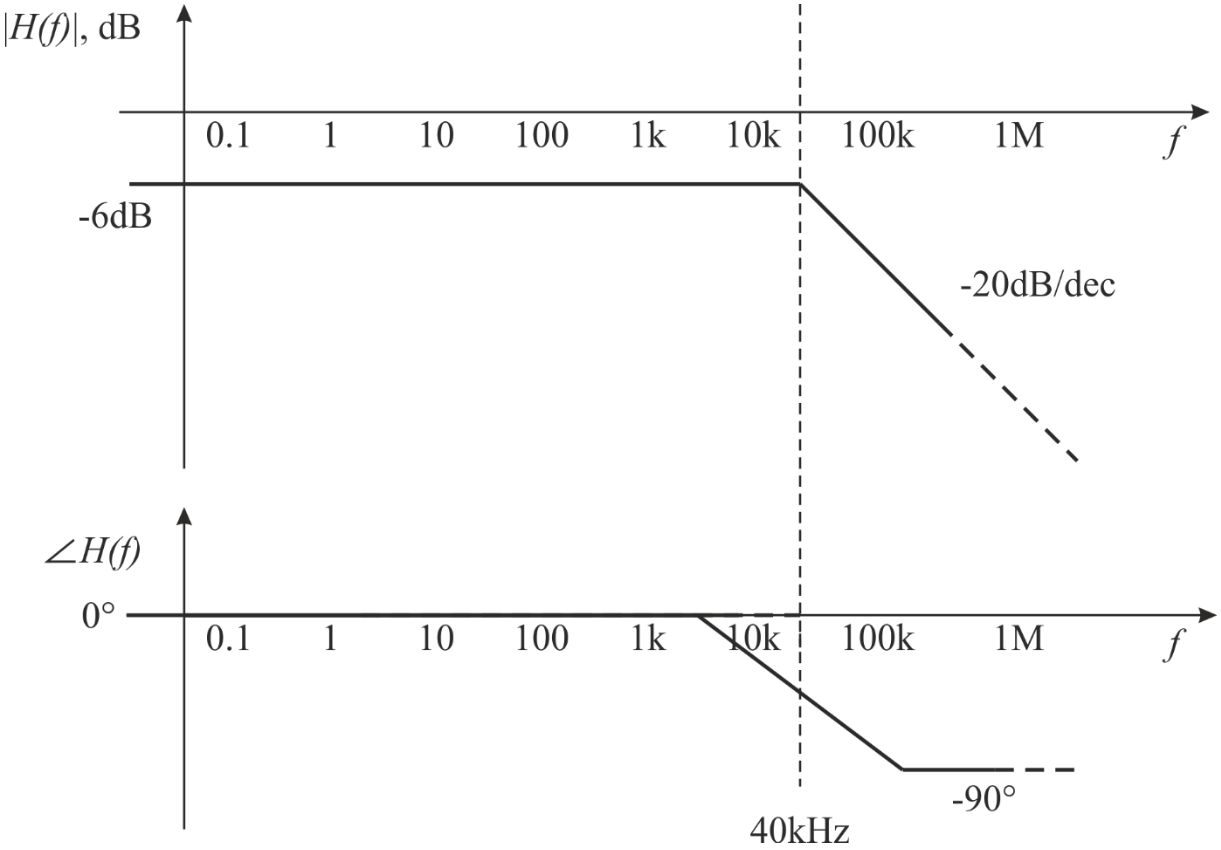
Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.



Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione di $H(s) = \frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)}$ e tracciarne i diagrammi di Bode di modulo e fase.



$$H(f) = k\frac{1}{1 + jf/f_p}$$

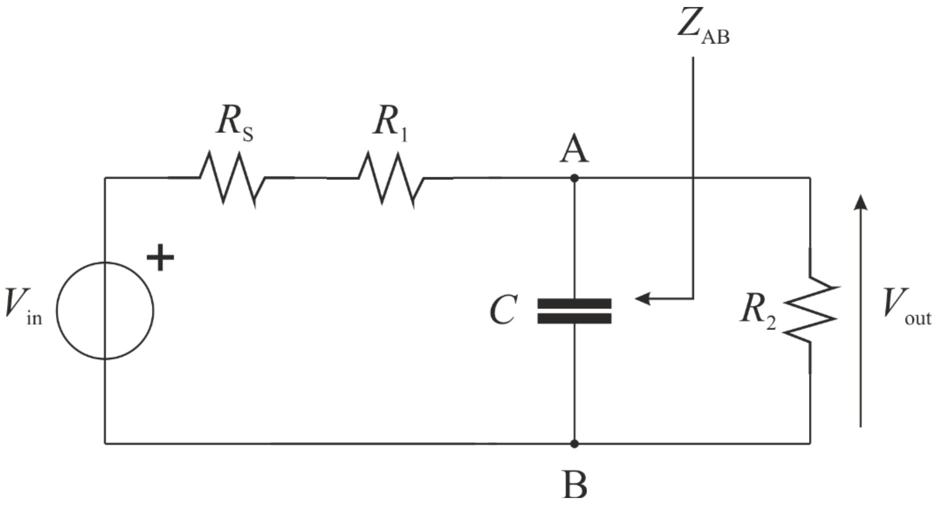
$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_S} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow -6\text{dB}$$

$$f_p = \frac{|s_p|}{2\pi} = 40\text{kHz}$$

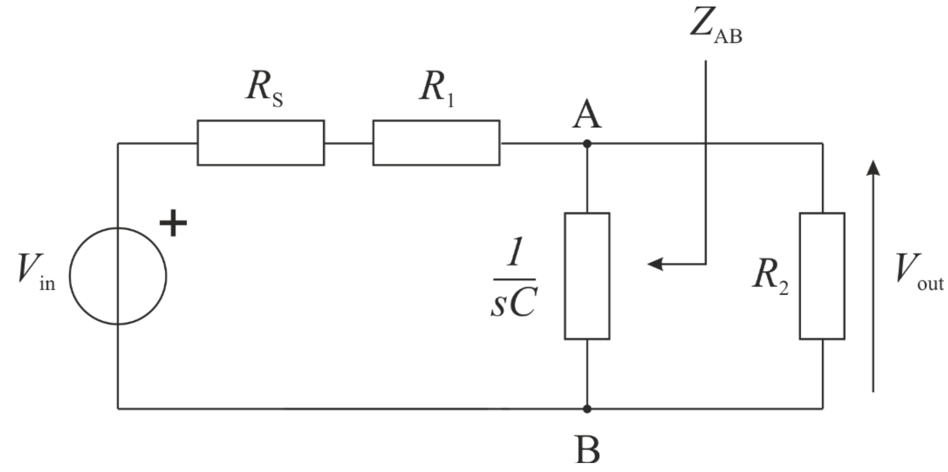
(è la stessa $H(s)$ considerata nella slide 13: lì erano riportati i diagrammi 'esatti')

Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione dell'impedenza $Z_{AB}(s)$ indicata in figura e tracciarne i diagrammi di Bode



Dominio della frequenza



$$Z_{AB}(s) = (R_1 + R_S) \parallel \frac{1}{sC}$$

$$\boxed{Z_{AB}(s) = \frac{R_1 + R_S}{1 + sC(R_1 + R_S)}}$$

Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione dell'impedenza $Z_{AB}(s)$ indicata in figura e tracciarne i diagrammi di Bode

$$R_S = 5\text{k}\Omega$$
$$R_1 = 5\text{k}\Omega$$
$$R_2 = 10\text{k}\Omega$$
$$C = \frac{5}{2\pi}\ \text{nF}$$

$$\boxed{Z_{AB}(s) = \frac{R_1 + R_S}{1 + sC(R_1 + R_S)}}$$

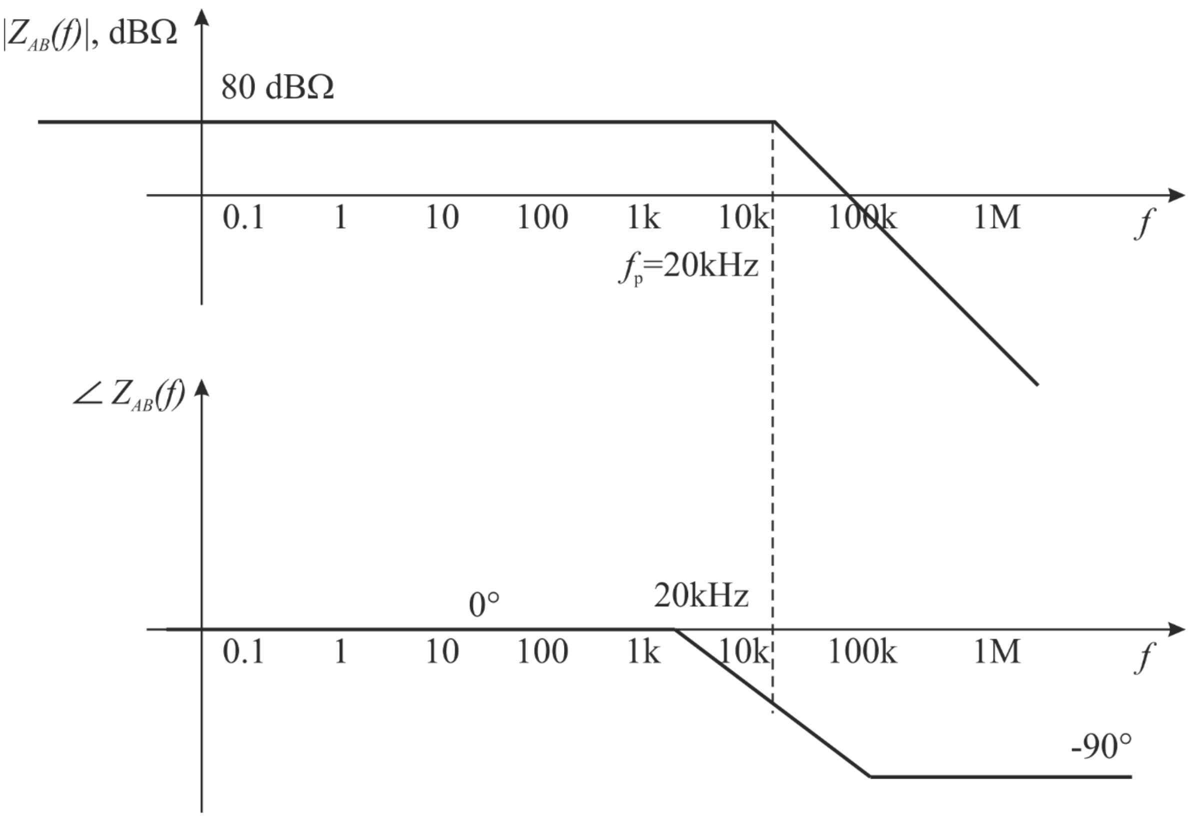
$$Z_{AB}(s) = R_0 \frac{1}{1 - s/s_p} \rightarrow Z_{AB}(f) = Z_{AB}(s)\Big|_{s=j2\pi f} = R_0 \frac{1}{1 + jf/f_p}$$

$$R_0 = R_1 + R_S = 10k\Omega \quad \rightarrow 80\text{dB}\Omega$$

$$s_p = -\frac{1}{C(R_1+R_S)} = -\frac{2\pi}{50}\frac{\text{rad}}{\mu\text{s}} \rightarrow \qquad f_p = \frac{|s_p|}{2\pi} = 20\text{kHz}$$

Esercizio: analisi in frequenza

-determinare l'espressione dell'impedenza $Z_{AB}(s)$ indicata in figura e tracciarne i diagrammi di Bode



$$Z_{AB}(f) = R_0 \frac{1}{1 + jf/f_p}$$

$$R_0 = 10k\Omega \rightarrow 80\text{dB}\Omega$$

$$f_p = \frac{|s_p|}{2\pi} = 20\text{kHz}$$

Esercizio: analisi in frequenza

supponendo che venga applicato un segnale in ingresso

$$v_{in}(t) = \sum_{k=0}^{2} V_i \cos(2\pi k f_0 t + \phi_i),$$

con $f_0 = 20\text{kHz}, V_0 = 1\text{V}, \phi_0 = 0, V_1 = 2\text{V}, \phi_1 = 0, V_2 = 1\text{V}, \phi_2 = \frac{\pi}{4}$

determinare v_{out} nel dominio del tempo.

Data la linearità del circuito, si può valutare l'uscita per ciascuna componente sinusoidale (usando la f.d.t. *H*(*f*) valutata alle diverse frequenze), e poi sovrapporre gli effetti

$$v_{out}(t) = \sum_{k=0}^{2} V_{out,i} \cos(2\pi k f_0 t + \phi_{out,i})$$

$$H(f) = H(s)\Big|_{s=j2\pi f} = k\frac{1}{1 + jf/f_p} = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \dfrac{jf}{40\text{kHz}}}$$

$$V_{out,0} = |H(0)|V_0 = 0.5\text{V} \qquad \phi_{out,0} = \phi_0 + \angle H(0) = 0$$

$$V_{out,1} = |H(20\text{kHz})|V_1 = 0.9\text{V} \qquad \phi_{out,1} = \phi_1 + \angle H(20\text{kHz}) = -26.5°$$

$$V_{out,2} = |H(40\text{kHz})|V_2 = 0.35\text{V} \qquad \phi_{out,2} = \phi_2 + \angle H(40\text{kHz}) = 45° - 45° = 0$$