# Sistemi elettronici tecnologie e misure

Sommario 1ª lezione 3ore

- Misurare
- Organizzazione internazionale di Metrologia
- Sistema di Unità di misura
- Incertezze di Misura
- Incertezze di Tipo A e Tipo B
- Esempi

# Lez. 1: misurare

Da sempre l’uomo effettua misure per conoscere il mondo che lo circonda e le proprietà degli oggetti/fenomeni di interesse

- **MISURA:**
  - **procedimento di misurazione**
    - porta all’assegnazione di un valore ad una grandezza fisica detta misurando
  - **risultato della misurazione**
    - è espresso da un valore numerico, un valore che indica l’incertezza di tale misura, infine da un’unità di misura

# Lez. 1: misurare

- **Determinare il valore (costo) di oggetti**

- **Determinare la qualità di beni**
  - Esempi:

    dimensione di terreni, stoffe, ...

    quantità di grano, sementi, acqua, ...

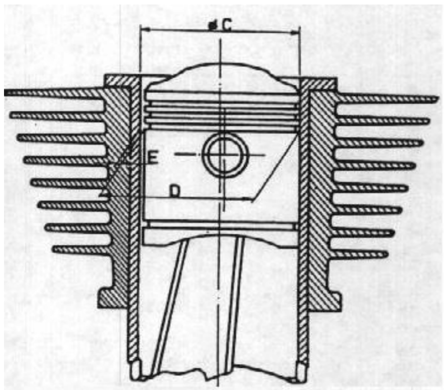
- **Storicamente:** “Pesi e misure”, convenzione del metro (1875)…

# Lez. 1: misurare

- **Motivazioni di tipo tecnico**

  - prove di accettazione per i semilavorati
    - intercambiabilità fra i prodotti di più fornitori
  - prove per la verifica della qualità del processo produttivo
    - compatibilità fra pezzi provenienti da processi diversi
  - prove per la verifica della qualità dei prodotti finiti
    - compatibilità fra prodotto e specifiche di progetto
  - confronto fra prodotti di fornitori differenti

# Esempio: tolleranze meccaniche pistone-cilindro




250 MONZA - G.T. - SCRAMBLER MOTOR CYCLES

| ASSEMBLY | CYLINDER |  | PISTON |  | Max. clearance E=mm. | Min. clearance E=mm. | Limits of wear mm. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  | C = mm. |  | D = mm. |  |  |  |  |
| Standard | A | 74.00÷74.01 | B | 73.905÷73.895 | 0.115 | 0.095 | 0.16 |
|  | B | 74.01÷74.02 | A | 73.915÷73.905 | 0.115 | 0.095 |  |
| 1st rebore +0.4 | A | 74.40÷74.41 | B | 74.305÷74.295 | 0.115 | 0.095 |  |
|  | B | 74.41÷74.42 | A | 74.315÷74.305 | 0.115 | 0.095 |  |
| 2nd rebore +0.6 | A | 74.60÷74.61 | B | 74.505÷74.495 | 0.115 | 0.095 |  |
|  | B | 74.61÷74.62 | A | 74.515÷74.505 | 0.115 | 0.095 |  |
| 3rd rebore +0.8 | A | 74.80÷74.81 | B | 74.705÷74.695 | 0.115 | 0.095 |  |
|  | B | 74.81÷74.82 | A | 74.715÷74.705 | 0.115 | 0.095 |  |
| 4th rebore +1 | A | 75.00÷75.01 | B | 74.905÷74.895 | 0.115 | 0.095 |  |
|  | B | 75.01÷75.02 | A | 74.915÷74.905 | 0.115 | 0.095 |  |

La cifra meno significativa è pari a 0.001mm → 1μm

# Lez. 1: misurare

- **Motivazioni di tipo scientifico**
  - conoscere un fenomeno fisico e ricavarne un modello (sperimentazione sul fenomeno fisico)
  - validare i parametri del modello mediante verifica sperimentale (migliorare l'accuratezza del modello): misure su circuiti elettronici, misure meccaniche, misure termiche etc etc…
  - tenere sotto osservazione (monitorare) il fenomeno per intervenire e modificare il suo comportamento (controlli automatici)

# Lez. 1: misurare

- **Esempio di misura ‘‘semplice’’:**
  - Misurare la proprietà fisica chiamata “resistenza” di un materiale conduttore
  - Metodo di misura: voltamperometrico
  - Modello matematico: $R = V / I$
  - … procedimento
  - $R = (12.5 \pm 0.1)\ \Omega$

# Esempio di misura "complessa"

$10^{-21} \times 4km \times 100 = 4 \times 10^{-16}m$ !!!

**Dimensione protone: $10^{-15}$m**

PhysRevLett 116 061102.pdf - Adobe Acrobat Reader DC

File Modifica Vista Finestra ?

Home Strumenti PhysRevLett 116 0... Accedi



propagation time, the events have a combined signal-to-noise ratio (SNR) of 24 [45].

Only the LIGO detectors were observing at the time of GW150914. The Virgo detector was being upgraded, and GEO 600, though not sufficiently sensitive to detect this event, was operating but not in observational mode. With only two detectors the source position is primarily determined by the relative arrival time and localized to an area of approximately 600 deg$^2$ (90% credible region) [39,46].

The basic features of GW150914 point to it being produced by the coalescence of two black holes—i.e., their orbital inspiral and merger, and subsequent final black hole ringdown. Over 0.2 s, the signal increases in frequency and amplitude in about 8 cycles from 35 to 150 Hz, where the amplitude reaches a maximum. The most plausible explanation for this evolution is the inspiral of two orbiting masses, $m_1$ and $m_2$, due to gravitational-wave emission. At the lower frequencies, such evolution is characterized by the chirp mass [11]

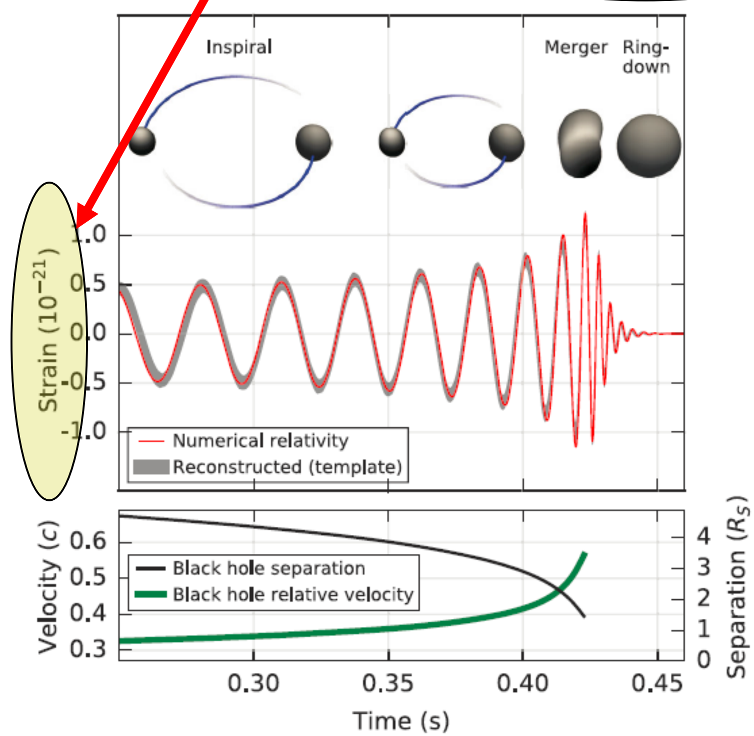



FIG. 2. *Top:* Estimated gravitational-wave strain amplitude

# Lez. 1: misurare

- **Costo di una misura**
  - In ogni attività industriale e scientifica è presente l’idea di misurare
  - Anche un semplice oggetto come ‘‘un uovo’’ ha una percentuale di ‘‘costo di misura’’ che incide nel costo finale (circa il 6%)
  - Cruscotto autovettura: costo di circa il 15-20%
  - ‘‘Costo di misura’’ >50% in un aereo militare

# Lez. 1: misurare

- **Costo di una misura**

  - Una discreta parte della vita di ogni persona è dedicata a misure
    - fatte in proprio (che ora è, che temperatura c'è fuori, quanto peso)
    - oppure fatte fare, per proprio conto, da un'altra persona (negoziante che pesa la frutta acquistata, il benzinaio che misura la quantità di benzina fornita, … )
  - Le misure incidono per circa il 5% del PIL di una nazione industrializzata (1%→15 Miliardi di Euro)

# Lez. 1: misurare

- Misurare significa **acquisire** e **comunicare informazioni oggettive** sul mondo fisico

- Il risultato di una misurazione (cioè l'informazione ottenuta) si chiama **misura**

- La **misura** è definita quando sono dichiarati:
  - il valore numerico stimato (per es: 3,2)
  - l'unità di misura associata (per es. Metri, m)
  - l'intervallo di valori che può assumere il valore di misura stimato (per esempio ±0,1m)
  - ….risultato di misura: 3,2m con incertezza di 0,1m

- Il procedimento con cui si misura si chiama **misurazione**

# inoltre…

- Occorre un **accordo**
  - su **un'unità di misura** e sul **campione**
    - Per es. per le lunghezze esiste accordo sul metro
  - su un **metodo** di misurazione
    - Per es. confronto diretto fra la grandezza da misurare e il campione
  - sulle **modalità** di **comunicare** il risultato della **misura**
    - Per es. le regole di scrittura del risultato della misurazione

# Cenni storici

- **Rivoluzione francese** (1789): riferimenti di lunghezza e massa comuni per tutta la Repubblica e possibilmente per tutti gli uomini (pensiero illuminista)

- **Riferimenti “universali”** cercati nella natura e ritenuti invarianti e disponibili a tutti: proprietà del pianeta Terra o dell’acqua distillata, …

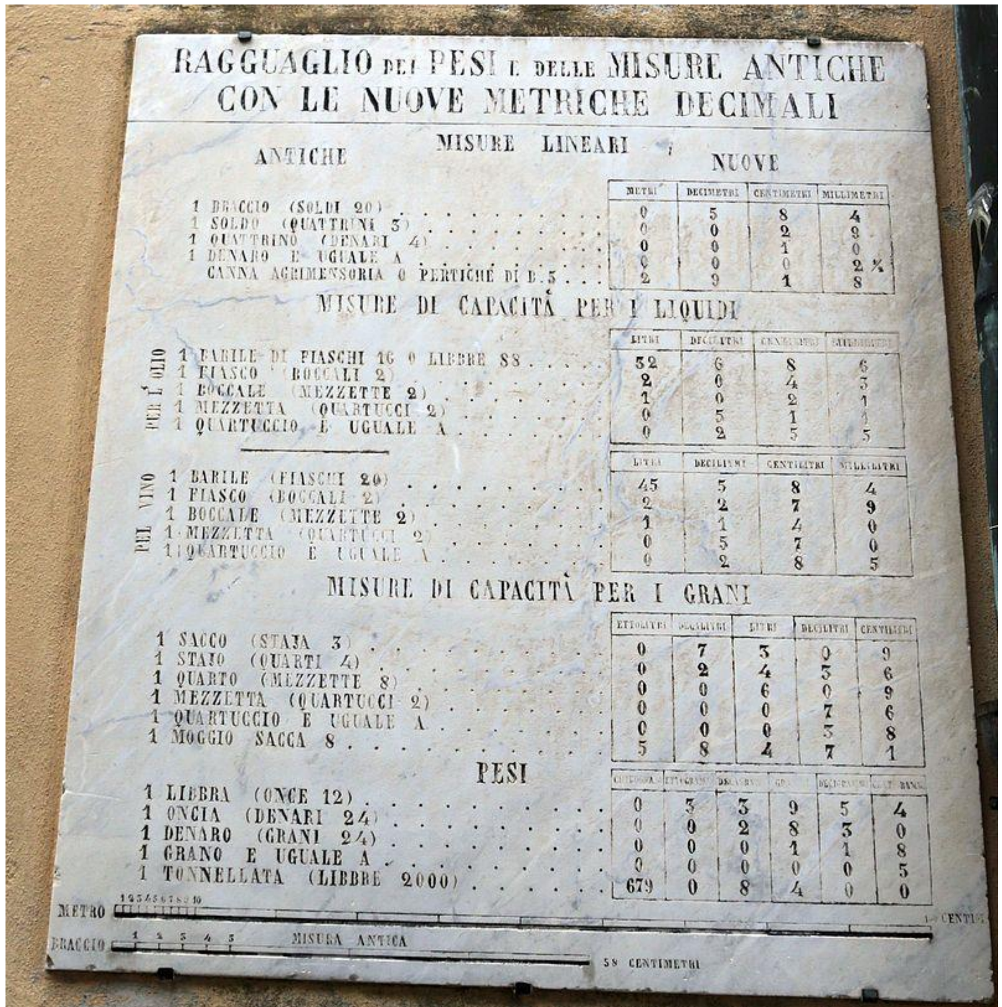
- Introduzione del **sistema decimale** per i multipli e sottomultipli delle unità Campioni

- **1875 firma della Convenzione del Metro**

# Campione antiche misure: cubito egizio: 44.7cm

# Campione antiche misure (Senigallia)

# Campione antiche misure (1860)



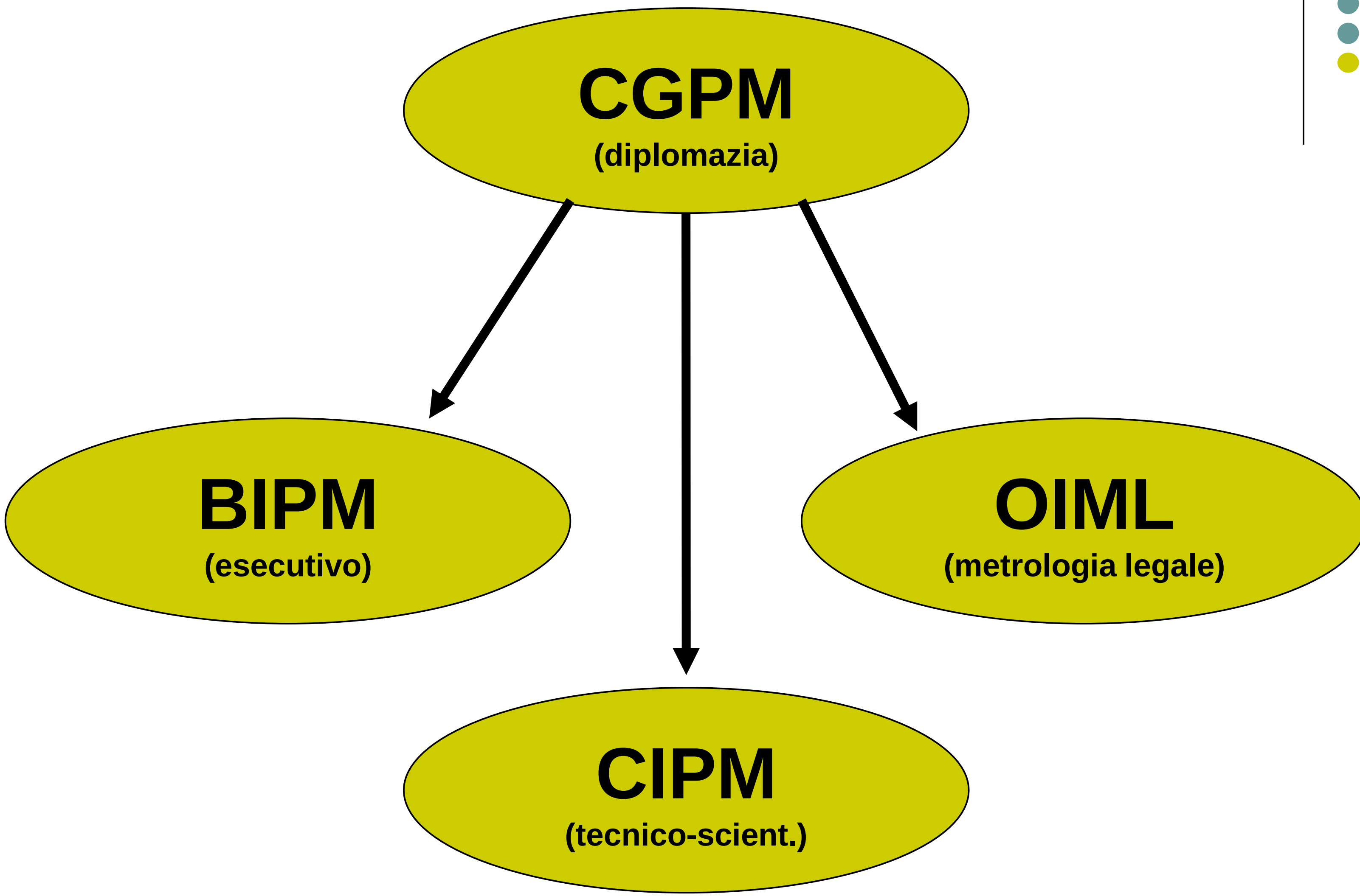
# Organismi internazionali per la Metrologia

- **CGPM** *Conférence Générale des Poids et Mesures:*
  - conferenza a LIVELLO DIPLOMATICO tra gli Stati membri della Convenzione del Metro

- **BIPM** *Bureau International des Poids et Mesures*
  - ESECUTIVO responsabile della unificazione delle misure di grandezze fisiche (Parigi)

- **CIPM** *Comité International des Poids et Mesures*
  - Comitato TECNICO-SCIENTIFICO con compiti di supervisione sul BIPM; è organizzato in *Comités Consultatifs* specifici (CCEM, CCTF, CCT, CCL, …) per le diverse grandezze

- **OIML** *Organisation Internationale pour la Métrologie Légale*
  - questioni di metrologia legale (CONTROVERSIE internazionali)


CGPM
(diplomazia)
BIPM
(esecutivo)
OIML
(metrologia legale)
CIPM
(tecnico-scient.)

# Organismi Nazionali per la Metrologia

- Istituti Metrologici Nazionali (nei paesi tecnologicamente più avanzati) *e.g*. **NIST**, **BIPM**, **NPL**, **PTB**, **NRLM** ...

- A Torino abbiamo la sede dell'INRiM

  (Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica)

  ottenuto dalla fusione di

  - **IEN** Istituto Elettrotecnico Nazionale (Galileo Ferraris) per le unità elettriche, fotometriche, tempo-frequenza
  - **IMGC** Istituto Metrologico Gustavo Colonnetti per le unità di massa, lunghezza, temperatura, forza

# SISTEMA INTERNAZIONALE (SI) DI UNITÀ DI MISURA

- Adottato nel 1960 dalla 11ª CGPM si basa su **7 unità fondamentali** e altre unità derivate

- Il SI nasce dal precedente MKSA e dal "Sistema MKS" del 1889 (1ª CGPM)

  - **metro (m)** lunghezza
  - **chilogrammo (kg)** massa
  - **secondo (s)** intervallo di tempo
  - **ampere (A)** corrente elettrica
  - **kelvin (K)** temperatura
  - **mole (mol)** quantità di sostanza
  - **candela ( cd)** intensità luminosa

- Unità derivate: Hz, Ω, F, H, T, C, J, W, N, Pa, …

# Proprietà del sistema SI

- Il SI è un **sistema coerente** in quanto tutte le sue unità derivate (grandezza G) si ricavano come prodotti e rapporti delle 7 unità di base o di altre unità derivate, senza introdurre fattori moltiplicativi (come $\pi$, $e$, *etc*.) e con esponenti interi

$$\dim(G) = L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} \ldots\ldots$$

- Le **unità di base** (o fondamentali) sono tra loro dimensionalmente indipendenti

# Unità fondamentali, derivate e convenzione per multipli e sottomultipli

| Tabella 1. Grandezze e Unità fondamentali del Sistema Internazionale (SI) | | |
|---|---|---|
| **Grandezza** | **Unità** | **Simbolo** |
| **Lunghezza** | metro | m |
| **Massa** | kilogrammo | kg |
| **Tempo** | secondo | s |
| **Intensità di corrente elettrica** | ampere | A |
| **Temperatura** | kelvin | K |
| **Quantità di sostanza** | mole | mol |
| **Intensità luminosa** | candela | cd |
| **Angolo piano** | radiante | rad |

| Tabella 2. Alcune grandezze derivate del Sistema Internazionale (SI) | | |
|---|---|---|
| **Grandezza** | **Unità** | **Simbolo** |
| **Volume** | metro cubo | $m^3$ |
| **Densità** | kilogrammo per metro cubo | $kg/m^3$ |
| **Forza** | newton | N |
| **Pressione** | pascal | Pa |
| **Potenza** | watt | W |
| **Capacità elettrica** | farad | F |
| **Resistenza elettrica** | ohm | W |
| **Lavoro, Energia e quantità di calore** | joule | J |
| **Potenziale elettrico** | volt | V |

Alcune unità di misura derivate hanno un nome proprio: pressione 1 Pa = $1N/m^2$, lavoro 1J = 1N·m etc. Altre non hanno un nome proprio: velocità in m/s, viscosità in kg/m·s, etc.

| Tabella 3. Multipli e sottomultipli decimali nel Sistema Internazionale (SI) | | | |
|---|---|---|---|
| **Prefisso** | **Fattore di moltiplicazione** | **Simbolo** | |
| **Tera** | $10^{12}$ | T | 1 000 000 000 000 |
| **Giga** | $10^{9}$ | G | 1 000 000 000 |
| **Mega** | $10^{6}$ | M | 1 000 000 |
| **Kilo** | $10^{3}$ | k | 1 000 |
| **Etto** | $10^{2}$ | h | 1 00 |
| **Deca** | $10^{1}$ | da | 1 0 |
| **Deci** | $10^{-1}$ | d | 0.1 |
| **Centi** | $10^{-2}$ | c | 0.01 |
| **Milli** | $10^{-3}$ | m | 0.001 |
| **Micro** | $10^{-6}$ | m | 0.000 001 |
| **Nano** | $10^{-9}$ | n | 0.000 000 001 |
| **Pico** | $10^{-12}$ | p | 0.000 000 000 001 |
| **Femto** | $10^{-15}$ | f | ............ |
| **Atto** | $10^{-16}$ | a | ........................ |

# Incertezze di misura

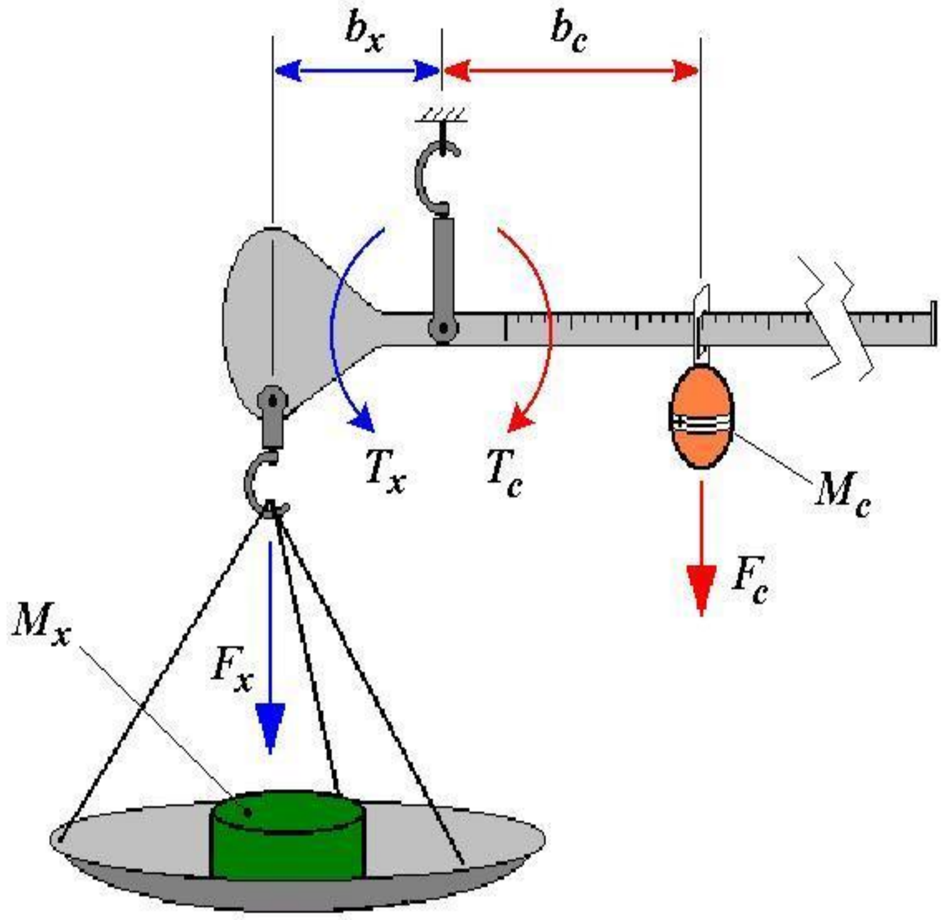
- Qualunque misurazione porta con sé una naturale indeterminazione o **INCERTEZZA** del risultato

- Le cause di incertezza sono attribuibili a:
  - **Strumentazione** utilizzata per effettuare la misurazione
  - **Incompleta conoscenza** del misurando e di eventuali modelli matematici del misurando
  - **Incompleta conoscenza** delle condizioni ambientali e dei loro effetti sul misurando e la misurazione.
  - **Risoluzione** finita degli strumenti.
  - Valori non esatti dei **campioni** e dei materiali di riferimento.
  - Valori non esatti delle **costanti e dei parametri usati** per gli algoritmi di valutazione.
  - **Approssimazioni o semplificazioni** del metodo o del procedimento sperimentale.
  - **Variazioni del misurando** in condizioni apparentemente identiche.
  - …

# Esempio: cause incertezze di misura (stadera)

- Stadera

(misuratore di masse)




$T_x = b_x \cdot F_x = b_x \cdot M_x \cdot g$

$T_c = b_c \cdot F_c = b_c \cdot M_c \cdot g$

$T_x = T_c \rightarrow M_x = b_c / b_x \, M_c$

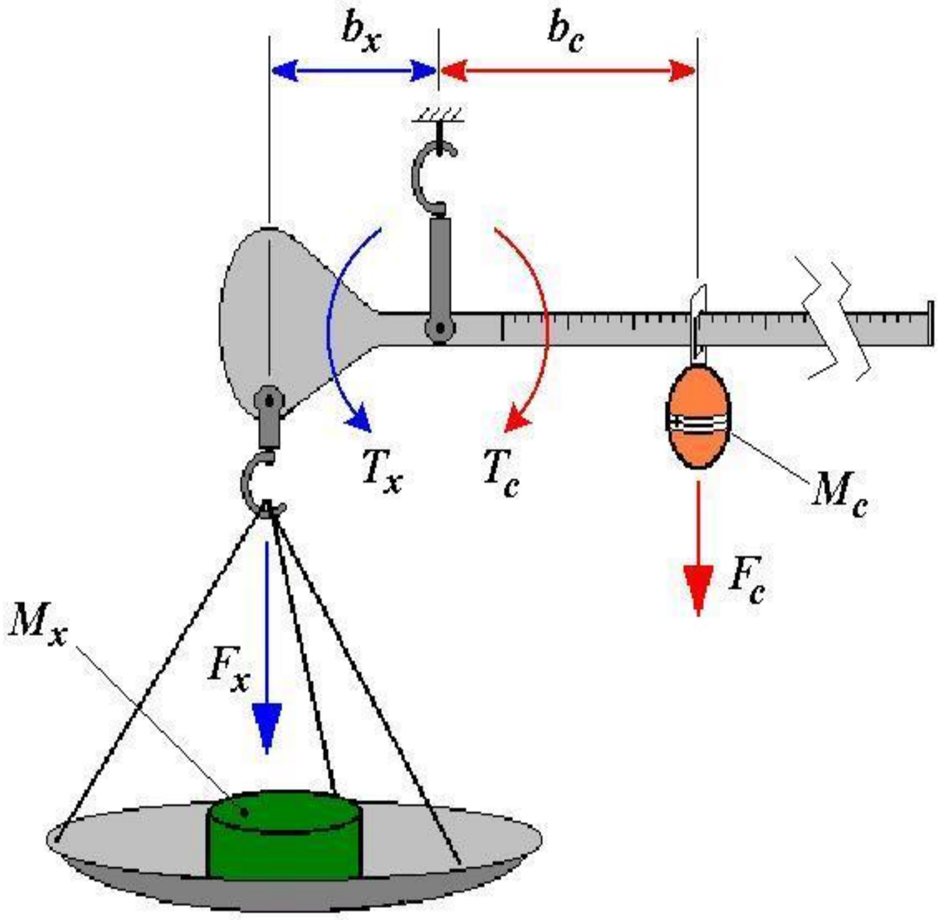
# Esempio: cause incertezze di misura (stadera)

- Incertezze su $M_x$

a seguito di incert. su:

$M_c$ , $b_c$ , $b_x$

Altre “imprecisioni”?



# Incertezze di misura

- La “Scienza delle Misurazioni” fa riferimento a due diverse tipologie di incertezza che si differenziano per i diversi strumenti matematici utilizzati per la loro valutazione
  - incertezze di **tipo A**
    - l’incertezza si stima con una <u>analisi statistica</u> di una serie di osservazioni (misure ripetute)
  - incertezze di **tipo B**
    - l’incertezza si stima con <u>mezzi diversi</u> dagli usuali strumenti statistici

# Incertezze di misura: tipo A "Misure ripetute"

- **Valor medio**: data una grandezza fisica X di cui si sono effettuate *n* misure $x_i$ , tutte effettuate nelle stesse condizioni di misura, la migliore stima ottenibile è data dal valor medio

- **Incertezza del valor medio:** la variabilità del risultato di misura è rappresentata da un intervallo di valori possibili entro il quale il misurando può trovarsi con una data probabilità

# Elementi di statistica e probabilità

- Siano $N$ i valori misurati $x_i$ della grandezza fisica di interesse
- Si definisce il valor medio dell'insieme dei valori misurati $x_i$ come:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$

- Si definisce la varianza come:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_N - \bar{x})^2}{N-1}$$

# Elementi di statistica e probabilità

- La radice quadrata (positiva) della varianza è la deviazione standard

- Indica il grado di dispersione delle singole osservazioni intorno al valor medio

- La deviazione standard si rivela molto utile per quantificare l'intervallo entro il quale si distribuiscono le $N$ misure

# Incertezze di misura: tipo A "Misure ripetute"

- Esempio: dopo aver chiesto a 10 studenti di trascrivere su un biglietto, nello stesso istante, l'ora indicata dal proprio orologio si è ottenuto il seguente insieme $x_i$ di dati:

$$
\begin{array}{ccccc}
10^h 10^m & 10^h 12^m & 10^h 9^m & 10^h 11^m & 10^h 9^m \\
10^h 11^m & 10^h 10^m & 10^h 8^m & 10^h 9^m & 10^h 11^m
\end{array}
$$

Da questa serie di dati si ottiene: $10^h 10^m \pm 1^m$

# Incertezze di misura: tipo A "Misure ripetute"

**Esempio** *Si effettua la misura di temperatura di un volume d'acqua vicino al punto di ebollizione. Dopo* 20 *misure si sono ottenuti i seguenti dati che, nella tabella 1.1, sono raggruppati in fasce di temperatura di ampiezza costante pari a* 1°C.

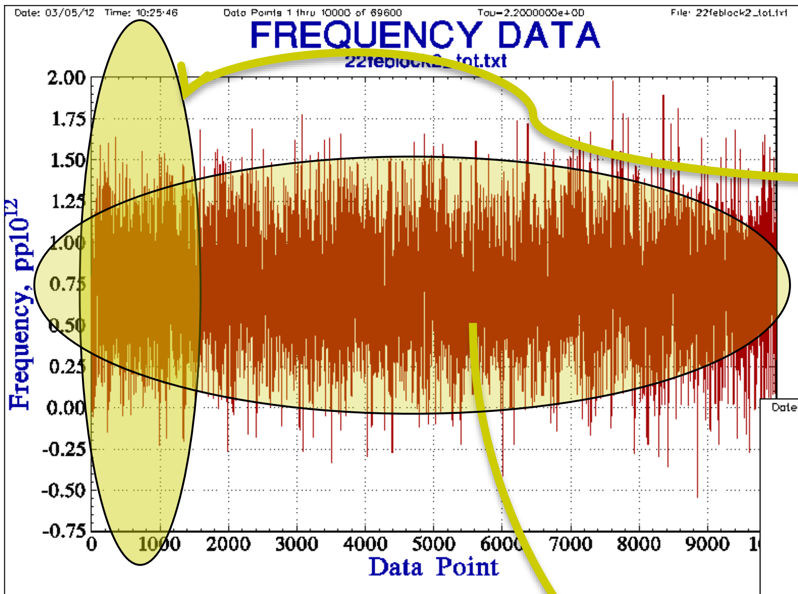
| *Intervallo* $t_1 \leq t \leq t_2$ | | *Temperatura misurata* |
|---|---|---|
| $t_1$ [$^oC$] | $t_2$ [$^oC$] | $t_i$ [$^oC$] |
| 94.5 | 95.5 | – |
| 95.5 | 96.5 | – |
| 96.5 | 97.5 | 96, 90 |
| 97.5 | 98.5 | 98, 18 : 98, 25 |
| 98.5 | 99.5 | 98, 61 : 99, 03 : 99, 49 |
| 99.5 | 100.5 | 99, 56 : 99, 74 : 99, 89 : 100, 07 : 100, 33 : 100, 42 |
| 100.5 | 101.5 | 100, 68 : 100, 95 : 101, 11 : 101, 20 |
| 101.5 | 102.5 | 101, 57 : 101, 84 : 102, 36 |
| 102.5 | 103.5 | 102, 72 |
| 103.5 | 104.5 | – |
| 104.5 | 105.5 | – |

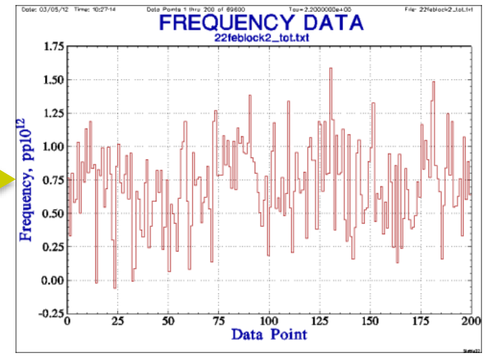
Tabella 1.1: Ripetizione di 20 misure di temperatura

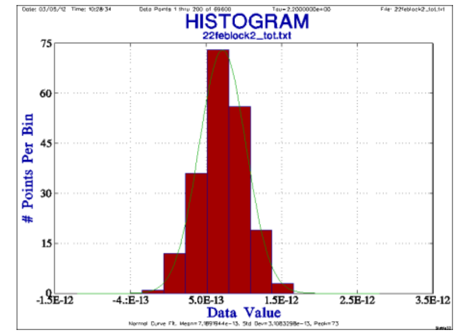
*Da una osservazione qualitativa dei valori delle misure e dalla loro distribuzione cumulativa in fasce di* 1°C *è immediato valutare nella distribuzione gaussiana il modello che meglio rappresenta la distribuzione delle* 20 *misure ottenute. Applicando le 1.1 1.2 si ottengono rispettivamente i seguenti valori:* $t_b = 100,1$°C *con deviazione standard del valor medio di circa* 1.5°C.

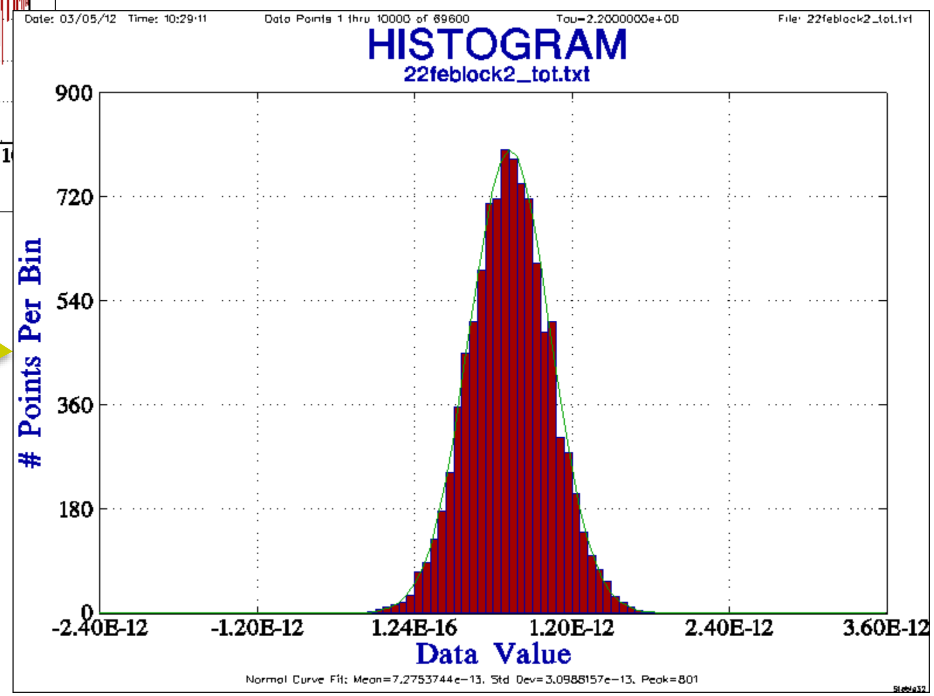
20 misure di temperatura
raggruppare in intervalli di 1°C
$T_{media}$=100.1°C  $\sigma_T$=1.5°C

# Esempio: misura di una grandezza fisica (10000 dati)




Dividiamo i risultati di misura in intervalli e contiamo quante misure cadono nell’intervallo i-esimo

# Elementi di statistica e probabilità

Nell’esempio si osserva che l’istogramma ha un andamento caratteristico: la curva è detta gaussiana. Se si prendono in considerazione $\bar{x}$ e $\sigma$, radice quadrata della varianza, questi due valori rappresentano:

- la media dei dati sperimentali (è il valore più plausibile ...o meglio “più probabile” del misurando)
- la probabilità che il 68% delle nostre misure si trovino all’interno dell’ intervallo centrato sulla media e di estremi la deviazione standard

# Incertezze di misura: tipo B

- La incertezza di tipo B è valutata analizzando il sistema di misura e tenendo conto delle conoscenze che l'operatore ha su di esso.
  Tali incertezze NON si riducono con metodi statistici

- La valutazione delle incertezze di tipo B avviene per mezzo

  - di **specifiche tecniche** dei vari componenti del sistema (incertezze sui valori dei componenti utilizzati, ecc...)
  - di dati forniti in **certificati di taratura** (che dichiarano per esempio l'incertezza del campione interno al sistema utilizzato per la misurazione ecc...)
  - di dati (incertezze) di misurazioni precedenti effettuate su elementi del sistema
  - dell'esperienza dell'operatore

# Incertezze di misura: tipo B "Misura singola"

- Misuro la mia altezza con un metro:
- 170cm
- Quanto vale l'incertezza del mio strumento?
- mm? cm?

# Incertezze di misura: tipo B “Misura singola”

Esempio: multimetro palmare.

Misura di una tensione continua

Lettura: 39.98 mV

Lo strumento effettua una lettura al secondo che è sempre la stessa.

Incertezza? Nulla?!? **MAI** !!!

# Incertezze di misura: tipo B “Misura singola”

Il manuale dello strumento indica le seguenti specifiche:
Accuracy= ± (% of reading + number of digit)

- Nel range di 40mV ho una incertezza pari a
  - 0.3% della lettura = = 39.98mVx0.3/100 = 0.12mV
  - 5 volte la risoluzione= 5x10μV = 50μV
- Incertezza assoluta di lettura: ± (0.12mV + 0.05mV) = ± 0.17mV
- Più spesso si trova ± (% of reading + % of full scale)

**Specifications**

Calibration period: one year minimum. Specifications apply at 23° C ± 5° C, < 80% RH
Accuracy = ±(% of reading + number of digits)
Temperature Coefficient = Accuracy X 0.1/° C (-10° C to 18° C; 28° C to 55° C)

**General**

Do not expose product to moisture or rain. Do not use product in flammable atmosphere.

Operating Temperature: -10° to 50°C.
Humidity: 0°C to 40°C / 80% RH max, 40°C to 50°C / 70% RH max (no condensation).
Storage Temperature: -25° to 60°C / 70% RH max (no condensation).

Display reading rate:

| | |
|---|---|
| ACV, DCV, Diode, Continuity: | Approximately 2.3/second |
| Frequency | Approximately 1/second |
| Capacitance | Approximately 0.03 to 2/second |
| AC + DC | Approximately 0.5 to 1/second |

Bargraph reading rate: Approximately 23/second
Battery life: Approximately 600 hours

**DC Voltage**

| Range | Resolution | 972A Accuracy | 973A Accuracy | Input Resistance |
|---|---|---|---|---|
| 40 mV | 10 μV | ± (0.3% + 5) | ± (0.3% + 5) | 10 MΩ (nominal) |
| 400 mV | 100 μV | ± (0.2% + 1) | ± (0.1% + 1) | |
| 4 V | 1 mV | | | 11 MΩ (nominal) |
| 40 V | 10 mV | | | 10 MΩ (nominal) |
| 400 V | 100 mV | | | |
| 1000 V | 1 V | | ± (0.2% + 1) | |

Normal Mode Rejection Ratio: > 60 dB @ 50 or 60 Hz
Effective Common Mode Rejection Ratio ( 1 kΩ imbalance): > 120 dB @ 50 or 60 Hz

# Incertezze di misura: tipo B "Misura singola"

Rappresentazione della misura:

$$V_x = (\bar{V} \pm \sigma)mV = (\bar{V} \pm \delta V)mV = \bar{V}(1 \pm \frac{\delta V}{\bar{V}})mV$$

$V_x = (39.98 \pm 0.17)mV$ (incertezza assoluta)

$V_x = 39.98 \cdot (1 \pm 0.004)mV$ (incertezza relativa)

…ed anche: "la tensione ha un valore di 39.98mV ed incertezza relativa del 4 per mille"

NB: l'incertezza indicata è di tipo B. L'incertezza di tipo A è trascurabile rispetto alla B (la lettura è ''fissa'', è ''sempre la stessa'')

# Incertezza: tipo A + tipo B

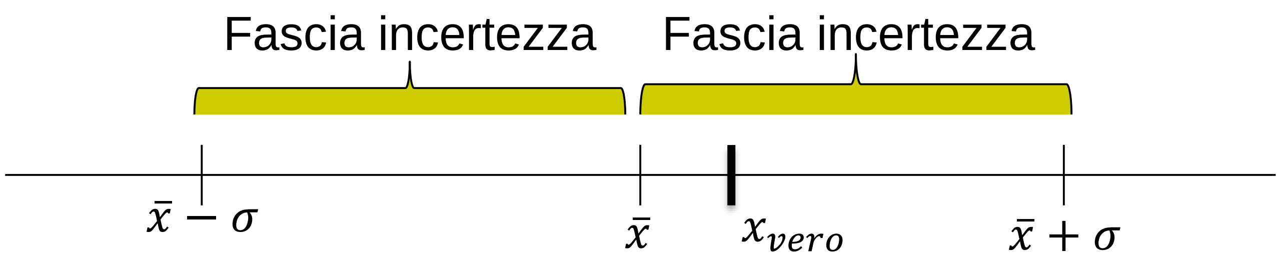
- Una volta stimati i diversi contributi di incertezza (tipo A e tipo B), l'incertezza totale "$\boldsymbol{u_C}$ è data dalla seguente formula:

$$\boldsymbol{u_C^2 = u_A^2 + u_B^2}$$

- In generale il dato rappresentativo dell'incertezza è indicato con la lettera "$\boldsymbol{u}$"

# Incertezza di misura: risultato di misura

- Valor medio e deviazione standard sono due indicatori molto utili per quantificare il valore del misurando e l'intervallo entro il quale il valore "vero" del misurando si colloca



# Incertezze di misura: risultato di misura

- **Esempio: tolleranze di componenti elettronici**

  Componenti come resistori e capacità hanno valori e tolleranze (incertezze) standard: una tipica resistenza da 8200Ω al 5% presenta una fascia di possibili valori di ± 410Ω

- **Esempio: tensione di riferimento su circuito integrato**

  Il componente LT1021-5, Linear Tecnology, ha un’uscita nominalmente di 5V @25°C. Nel data sheet si legge che i valori dell’uscita sono compresi fra 4.9975V e 5.0025V quindi un’incertezza di 2.5mV

- **Esempio: trasduttore di temperatura**

  Il componente LM35, National Semiconductor, ha un’uscita proporzionale alla temperatura con coefficiente di proporzionalità di 10mV/°C. Dal data sheet tale coefficiente può variare da un dispositivo ad un altro tra 9.8 e 10.2 mV/°C quindi il coefficiente ha una incertezza di 0.2mV/°C.

# Incertezza di misura: modalità di rappresentazione

- L'incertezza (dev. std.) si rappresenta con, **al più,** 2 cifre significative!
- Riguardo la misura le cifre rappresentate devono essere consistenti con l'incertezza
- Esempi:

$$R=(4700 \pm 47)\Omega$$ 2 cifre significative

$$L=(1.000 \pm 0.002)m$$ 1 cifra significativa

$$L=1.000m \pm 2mm$$ 1 cifra significativa

# Incertezza di misura: modalità di rappresentazione

- Esempio:

$$V_{letta} = (1.5126 \pm 0.0022)V$$

- *Errori comuni*

$$R = (4700.12 \pm 47)\Omega$$

$$R = (1.0000 \pm 0.0236)\Omega$$

Troppe cifre!!!

$$R = 1000\Omega \pm 3\%$$

Dim. errata

$$V = 1.5126 \pm 0.0022V$$

$$I = 2.00A \pm 0.04$$

Unità di misura!!!

# Fine 1a parte

# Errori sistematici

- Col termine errori si indicano le deviazioni note (o comunque conoscibili) del valore misurato da quello previsto

- Gli errori sistematici possono essere corretti

# Errori sistematici: esempi

- Misura del peso di un oggetto sottoposto alla forza di Archimede

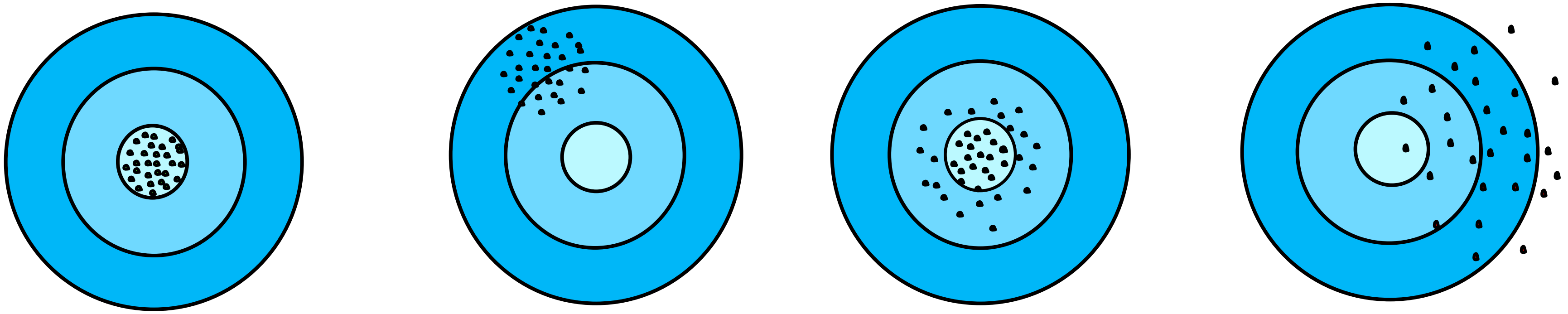
- Mirino di un fucile di precisione

- Misura di una resistenza

# Errori sistematici

- Non dobbiamo confonderci nell'utilizzo dei termini
  - Incertezza
  - Errore sistematico

# Incertezza ed errore sistematico



Bassa dispersione
Assenza di
errore sistematico

Bassa dispersione
Presenza di
errore sistematico

Alta dispersione
Assenza di
errore sistematico

Alta dispersione
Presenza di
errore sistematico

Accurate and precise

Precise but not accurate

Accurate but not precise

Not accurate and not precise

# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto

- A volte una grandezza fisica può essere ottenuta per mezzo di altre grandezze fisiche legate fra loro da un modello matematico che le collega fra loro
- Per esempio
  - Periodo del pendolo semplice $T = 2\pi\sqrt{L/g}$
  - Superficie di un rettangolo $A = L_1 \cdot L_2$
  - Resistenza di un filo conduttore $R = \rho \cdot l / S$
  - Resistenza di un filo conduttore $R = V / I$
  - Potenza elettrica $P = R \cdot I^2$
  - ….

# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto

Si indichi con $y$ la generica grandezza fisica che è legata ad $m$ grandezze fisiche $x_i$ dalla relazione:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

L'incertezza di misura della grandezza fisica $y$ è ottenuta come una opportuna somma pesata delle incertezze dei vari $x_i$.

# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto

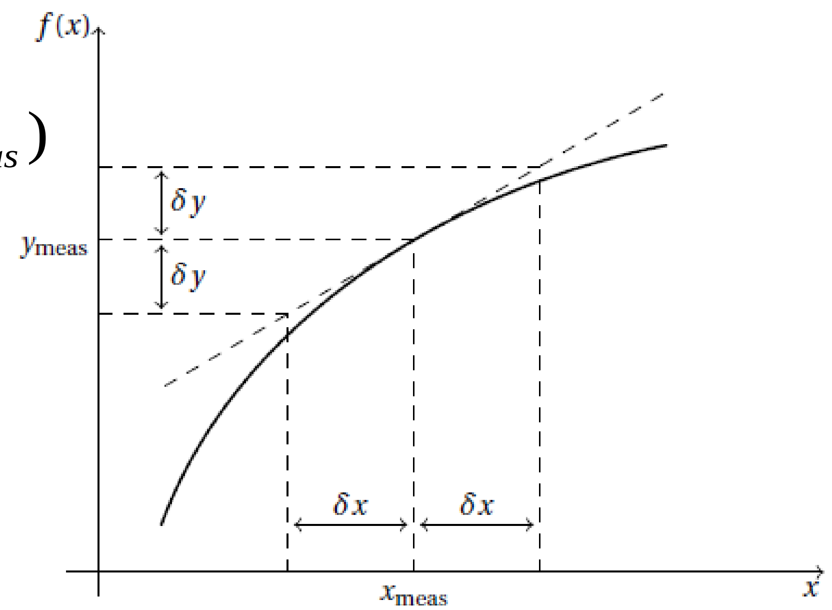
- La grandezza $y$ dipende solo da $x$: sviluppo in serie di Taylor e, nell'ipotesi che l'incertezza sia piccola, ci fermiamo ai termini del primo ordine

$$f(x) \approx f(x_{meas}) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_{meas}} (x - x_{meas})$$

$$|y - y_{meas}| = |f(x) - f(x_{meas})| =$$

$$= \left|\frac{df}{dx}\right|_{x_{meas}} |x - x_{meas}|$$

$$\delta y = |y - y_{meas}| = \left|\frac{df}{dx}\right|_{x_{meas}} \delta x$$



# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto

- Effettuando un po' di calcoli, sviluppando in serie di Taylor intorno al valor medio di ciascuna grandezza fisica $x_i$, si ottiene la seguente relazione:

$$u_c(y) = \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| u(x_i) \qquad (1)$$

- La grandezza $u_c(y)$ è detta "incertezza tipo composta associata alla grandezza $y$"
- Il metodo utilizzato è detto "deterministico" ("…l'altro è detto probabilistico…")

# Incertezza di grandezze fisiche determinate in modo indiretto

- La legge di propagazione è di grande utilità nella valutazione di incertezze su grandezze misurate per via indiretta.

- Le derivate parziali della funzione $y = f(\ldots)$ sono chiamati coefficienti di sensibilità

- L'applicazione pratica della legge di propagazione risulta in molti casi difficoltosa in assenza di modelli matematici. In tal caso occorre utilizzare metodi sperimentali

# Esempio

- Un pendolo di lunghezza $L = (0.98 \pm 0.02)m$ oscilla con periodo $T = (1.986 \pm 0.005)s$.
- Quanto vale *g*?
  - Det. il valor medio di $g$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2}$$

$$g = f(L,T) \Rightarrow \bar{g} = f(\bar{L},\bar{T}) = \ldots = 9.809058\ldots \frac{m}{s^2}$$

# Esempio

- Determinazione dell'incertezza

$$u(g) = \left|\frac{\partial g}{\partial L}\right| u(L) + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right| u(T) = \ldots = 0{,}2 + 0.049 = 0{,}249 \frac{m}{s^2}$$

- Il semplice calcolo dell'incertezza riporta un risultato con troppe cifre significative
- Le cifre significative dell'incertezza devono essere al **massimo pari a 2**
- Risultato finale: $g = (9.81 \pm 0.25) m s^{-2}$

# Cifre significative: esempio

| Numero | Cifre significative |
|---|---|
| 23 | 2 |
| 21.3 | 3 |
| 21.30 | 4 |
| 4720 | 4 |
| 0.3 | 1 |
| 0.03 | 1 |
| 0.32 | 2 |

# Esercizio in aula

Volete determinare la potenza dissipata da una resistenza: misurate corrente e tensione ai capi della resistenza. I valori letti per mezzo di multimetri digitali sono $V_m = 3.5211234\ V$ e $I_m = 2.221234\ mA$.

Il manuale del voltmetro riporta che, per un fondo scala di 10V, l'incertezza vale:

$$\boldsymbol{\delta V} = \pm\,(\mathbf{0.01}\%\ \boldsymbol{of\ reading} + \mathbf{0.005}\%\ \boldsymbol{of\ full\ scale})$$

Il manuale dell'amperometro riporta che, per un fondo scala di 10mA, l'incertezza vale:

$$\boldsymbol{\delta I} = \pm\,(\mathbf{0.2}\%\ \boldsymbol{of\ reading} + \mathbf{0.5}\%\ \boldsymbol{of\ full\ scale})$$

- Indicare le cifre significative di tensione e corrente.
- Quanto vale la potenza dissipata dal resistore?

# Esercizio in aula

- Il manuale del voltmetro riporta che, per un fondo scala di 10V, l'incertezza vale:

$$\delta V = \pm\,(0.01\%\;3.52 + 0.005\%\;10) = \pm\left(\frac{0.01}{100}3.52 + \frac{0.005}{100}10\right) =$$
$$= 0.35mV + 0.50mV = 0.85mV$$

- Il manuale dell'amperometro riporta che, per un fondo scala di 10mA, l'incertezza vale:

$$\delta I = \pm\,(0.2\%\;0.00222 + 0.5\%\;0.01) = 4.4\mu A + 50\mu A = 54\mu A$$

- Indicare le cifre significative di tensione e corrente.
- $V_m = 3.52112\cancel{34}\;V\;,\;I_m = 2.221\cancel{234}\;mA$
- $\delta V = 0.00085mV\;,\;\delta I = 0.054mA$

# Esercizio in aula

- Quanto vale la potenza dissipata dal resistore?

- $P = V \cdot I = 7.8204 \ldots mW$

- $\delta P = V\delta I + I\delta V = 3.52 \cdot 54 \cdot 10^{-6} + 2.22 \cdot 10^{-3}\ 0.85 \cdot 10^{-3} = \ 0.19mW$

- Risultato finale: $P = (7.82\ \pm 0.19)mW$

# Esercizio per casa

- Determinare il valore di una resistenza ottenuta dal parallelo di $R_1$ ed $R_2$. La prima ha valore nominale 10k$\Omega$ ed incertezza del 2%. La seconda ha valore nominale 2.2k$\Omega$ ed incertezza del 3%.

# Casi particolari

- Somma $$\begin{cases} y = f(a,b) = a + b \\ \delta y = u_c(y) = \delta a + \delta b \end{cases}$$
- Differenza $$\begin{cases} y = f(a,b) = a - b \\ \delta y = u_c(y) = \delta a + \delta b \end{cases}$$
- **Nota:** in entrambi i casi si sommano le incertezze assolute

# Casi particolari

- Prodotto
$$\begin{cases} x = a \cdot b \\ \dfrac{\delta x}{|x|} = \varepsilon_x = \dfrac{\delta a}{|a|} + \dfrac{\delta b}{|b|} = \varepsilon_a + \varepsilon_b \end{cases}$$

- Quoziente
$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{b} \\ \dfrac{\delta x}{|x|} = \varepsilon_x = \dfrac{\delta a}{|a|} + \dfrac{\delta b}{|b|} = \varepsilon_a + \varepsilon_b \end{cases}$$

**Nota:** in entrambi i casi si sommano le incertezze relative

# Casi particolari

- Potenza

$$\begin{cases} x = a^n \\ \dfrac{\delta x}{|x|} = \varepsilon_x = n\dfrac{\delta a}{|a|} = n\varepsilon_a \end{cases}$$

Radice

$$\begin{cases} x = \sqrt[n]{a} \\ \dfrac{\delta x}{|x|} = \varepsilon_x = \dfrac{1}{n}\dfrac{\delta a}{|a|} = \dfrac{\varepsilon_a}{n} \end{cases}$$

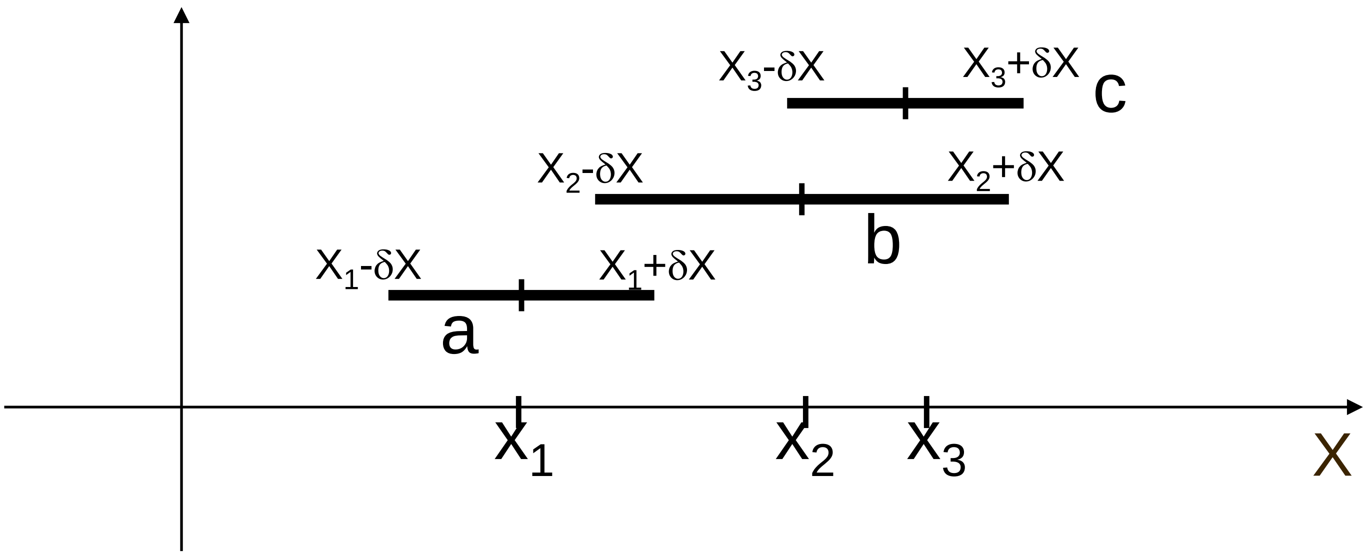
…nel dubbio utilizzate la formula di base (1)…

# Compatibilità di due misure

- A causa dell'incertezza :
  - non ha significato parlare di **misure uguali**
  - il concetto di uguaglianza è sostituito da quello di **compatibilità tra misure**
  - le **misure sono compatibili** quando le fasce di valore assegnate in diverse occasioni come misura della stessa quantità, nello stesso stato, hanno intersezione non nulla

# Compatibilità di due misure

- Esempio:




- a e b sono compatibili
- b e c sono compatibili
- a e c NON sono compatibili

# Compatibilità di due misure: definizione

- la condizione di compatibilità fra due misure $x_i = \bar{x}_i \pm \sigma(\bar{x}_i)$ è verificata se

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \leq k \cdot \left[\sigma(\bar{x}_1) + \sigma(\bar{x}_2)\right]$$

- $k$ è il fattore di copertura (tipicamente $k = 2$ o $k = 3$)

# Esercizio

- Un condensatore da 100pF è collegato in serie con un condensatore da 390pF. Le tolleranze (incertezze) dei due condensatori sono del 5% e del 10%, rispettivamente. Determinare il valore della capacità ottenuta e la sua incertezza.

# Soluzione

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{100 \cdot 390}{100 + 390} = 80\text{pF}$$

$$\delta C = \left|\frac{\partial C}{\partial C_1}\right| \cdot \delta C_1 + \left|\frac{\partial C}{\partial C_2}\right| \cdot \delta C_2 = \cdots = \frac{C^2}{C_1^2}\delta C_1 + \frac{C^2}{C_2^2}\delta C_2 = 5\text{pF}$$

Notare che…

$$\frac{\delta C}{C} = \frac{C}{C_1} \cdot \frac{\delta C_1}{C_1} + \frac{C}{C_2} \cdot \frac{\delta C_2}{C_2} = \cdots = 6\%$$

# Esercizio

- Determinare il valore di una resistenza ottenuta dalla serie di $R_1$ ed $R_2$. La prima ha valore nominale 12k$\Omega$ ed incertezza del 2%. La seconda ha valore nominale 3.3k$\Omega$ ed incertezza del 3%.

# Soluzione

- $\bar{R}_t = \bar{R}_1 + \bar{R}_2 = 12\text{k}\Omega + 3.3\text{k}\Omega = 15.3\text{k}\Omega$
- $\delta R_t = \delta R_1 + \delta R_2$
- $\delta R_1 = (\delta R_1 / R_1) \cdot R_1 = 2\% \cdot 12\text{k}\Omega = 240\Omega$
- $\delta R_2 = (\delta R_2 / R_2) \cdot R_2 = 3\% \cdot 3.3\text{kW} = 99\Omega$
- $\delta R_t = \delta R_1 + \delta R_2 = 0.34\text{k}\Omega$
- $R_t = (15.30 \pm 0.34)\ \text{k}\Omega$ (2 cifre significative)
- $R_t = (15.3 \pm 0.3)\ \text{k}\Omega$ (1 cifra significativa)

# Esercizio per casa

**Una resistenza di (10±0.1)Ω è attraversata da una corrente di (100±1)mA. La potenza dissipata dalla resistenza è pari a:**

- A) 0.1W, incertezza 2%
- B) 0.1W, incertezza 3%
- C) 1W, incertezza 2%
- D) 1W, incertezza 3%

# Esercizio per casa

Si misura vuol misurare l'ipotenusa h di un triangolo rettangolo. I due cateti valgono a=15cm e b=20cm, il primo con incertezza 3mm ed il secondo con incertezza relativa del 2%. Quanto misura l'ipotenusa h?