



# **Nozioni di base sulla valutazione dell'incertezza**

## ● Argomenti trattati

- Terminologia
  - ✓ Effetti sistematici ed incertezza
- Principali contributi di incertezza
- Classificazione dei metodi di misurazione
- Il modello deterministico
  - ✓ Interpretazione del concetto di incertezza
  - ✓ Propagazione dell'incertezza
  - ✓ Casi notevoli

# Terminologia

- **Una babele di termini!**
  - Errore
  - Precisione
  - Accuratezza
  - Incertezza
  - Risoluzione
  - Sensibilità
  - Effetto sistematico
  - ...
- **per ragioni storiche ... e non solo!**

# Terminologia

## ● Errore

- Impiegato in passato, distinguendo tra:
  - ✓ Errori sistematici: quelli che influenzano una misura sempre con lo stesso segno e lo stesso valore
  - ✓ Errori accidentali: quelli dovuti a fenomeni aleatori, quindi non controllabili dall'operatore
- Attualmente usato (*measurement error*) per indicare la differenza tra una misura ed un valore di riferimento
  - ✓ Nel caso del controllo di taratura di uno strumento, indica la differenza tra il valore misurato dallo strumento e quello generato da un campione

## Terminologia

- **Precisione** (*measurement precision*)

- Indica la capacità di un sistema di misurazione di fornire misure simili in condizioni specificate
  - ✓ Condizioni di ripetibilità
    - A parità di procedura, operatore, strumenti e condizioni di misura
  - ✓ Condizioni di riproducibilità
    - Con diverse procedure, operatori, strumenti, e condizioni di misura
- Solitamente indicata mediante parametri di “imprecisione”, quali varianza e deviazione tipo

## Terminologia

- **Accuratezza** (*measurement accuracy*)
  - Indica la capacità di un sistema di misurazione di fornire misure “vicine” al valore effettivo del misurando
    - ✓ È un concetto qualitativo: lo strumento **X** è più accurato dello strumento **Y** se **X** fornisce errori minori
    - ✓ È spesso confuso con il termine “incertezza”
      - I costruttori preferiscono dichiarare che uno strumento è “accurato” piuttosto che “incerto”

# Terminologia

- **Incertezza** (*measurement uncertainty*)
  - Indica l'indeterminazione nella conoscenza del misurando
    - ✓ Include tutti i contributi di incertezza
    - ✓ Espressa fornendo la misura in termini di **fascia di valore**
      - Il significato della fascia di valore dipende dal modello impiegato (deterministico o probabilistico)

# Terminologia

- **Risoluzione** (*measurement resolution*)
  - Minima variazione della grandezza di ingresso di un dispositivo di misurazione che provoca una variazione apprezzabile della sua indicazione
    - ✓ L'unità di misura è quella della grandezza di ingresso
  - Indica la capacità del dispositivo di rilevare «piccole» variazioni del misurando
    - ✓ NOTA: potrei essere interessato a piccoli valori di risoluzione indipendentemente dall'incertezza
    - ✓ La risoluzione è un limite per l'incertezza



# Terminologia

- **Sensibilità (*sensitivity*)**
  - Rapporto tra la variazione dell'indicazione (uscita) di un dispositivo di misurazione e la corrispondente variazione del misurando (ingresso)
    - ✓ L'unità di misura è quella dell'uscita diviso quella dell'ingresso (ad esempio, mm/V o div/V per un oscilloscopio)
  - Valore costante per dispositivi con caratteristica (nominalmente) lineare
    - ✓ Il reciproco rappresenta la costante di taratura
  - Per dispositivi non lineari dipende dal valore della grandezza di ingresso

# Terminologia

- **Effetto sistematico** (*systematic error*)
  - Effetto, dovuto a diverse cause, che in misure ripetute rimane costante o varia in modo prevedibile
    - ✓ Una volta valutato può essere compensato correggendo la misura
    - ✓ La valutazione di un effetto sistematico è sempre affetta da incertezza

## Effetti sistematici

- **Effetti sistematici in una misura:  
le principali cause sono legate**
  - all'interazione tra strumentazione e sistema in misura (effetto di carico o carico strumentale)
  - all'effetto delle grandezze di influenza
  - alle non idealità della strumentazione impiegata
    - ✓ ad esempio, errori di fuori zero (*offset*) e di guadagno

## Effetti sistematici

- **Non sempre è possibile, o conveniente, correggere un effetto sistematico:**
  - In molti casi è necessario valutare l'entità dell'effetto sistematico impiegando valori noti del misurando
    - ✓ La valutazione del fuori zero è, solitamente, “indolore”, mentre la valutazione dello scarto tra guadagno nominale e guadagno effettivo richiede l'impiego di campioni di riferimento non sempre disponibili.
  - La valutazione dell'effetto di carico richiede la conoscenza di parametri del sistema in misura e della strumentazione, che non sempre sono noti.

## Effetti sistematici

- **Non sempre è possibile, o conveniente, correggere un effetto sistematico:**
  - Se un effetto sistematico non è corretto, diventa un contributo di incertezza
  - In caso di correzione, rimane un contributo residuo di incertezza
    - ✓ Il modello matematico impiegato per effettuare la correzione è una semplificazione della realtà
    - ✓ I parametri di questo modello non sono perfettamente noti

# **Principali contributi di incertezza**

## Principali contributi di incertezza

- **Una misura con incertezza nulla non può essere ottenuta:**
  - Gli strumenti impiegati non sono ideali
  - La misura ottenuta è diversa dalla misura “a vuoto” (effetto di carico)
  - Le grandezze di stato e quelle di influenza non sono perfettamente note
    - ✓ Le grandezze di stato (del sistema in misura) sono quelle che modificano il misurando
    - ✓ Le grandezze di influenza sono quelle che modificano le caratteristiche della strumentazione

## Principali contributi di incertezza

- **Una misura con incertezza nulla non può essere ottenuta:**
  - La risoluzione con cui si osserva il segnale di misura è limitata (incertezza di quantizzazione)
  - Al segnale di misura è sovrapposto un processo casuale (rumore)
  - Il limite inferiore all'incertezza è fissato dalla cosiddetta “**incertezza intrinseca del misurando**”, (*definitional uncertainty*):
    - ✓ La riduzione di questo contributo di incertezza richiede di complicare la definizione del misurando e, di conseguenza, anche la sua realizzazione





# **Il modello deterministico**

## **Il modello deterministico**

- **Il modello deterministico, molto diffuso in passato, è impiegato ancora oggi**
  - quando è accettata una sovrastima dell'incertezza
  - da molti costruttori per dichiarare le specifiche di incertezza dei propri strumenti

## Il modello deterministico

### ● Il modello deterministico

- La misura di un parametro è assegnata sotto forma di intervallo limitato (**fascia di valore**), solitamente simmetrico rispetto al valore  $m_0$  assegnato al parametro
- Caratteristiche della fascia di valore:
  - ✓ Il misurando è compreso nella fascia di valore
  - ✓ Tutti gli elementi della fascia di valore sono ugualmente validi a rappresentare il misurando

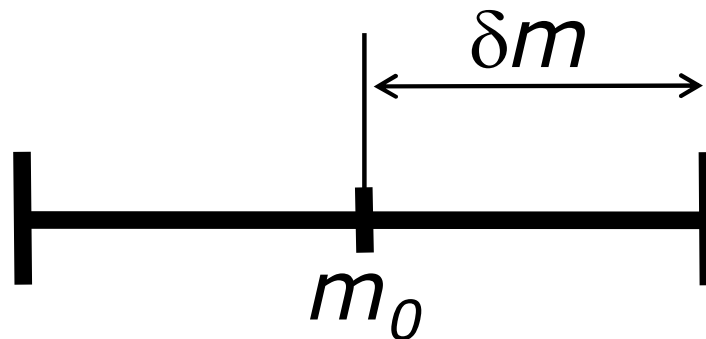
## Il modello deterministico

### ● Incertezza assoluta

#### ■ Espressione di una misura:

$$m = (m_0 \pm \delta m) U$$

- ✓  $\delta m$ : incertezza assoluta (espressa nella stessa unità di misura  $U$  del misurando)
- ✓  $2 \delta m$ : ampiezza della fascia di valore



## Il modello deterministico

### ● Incertezza assoluta

#### ■ Esempi di misura:

$$r = (113 \pm 1) \Omega$$

$$m = (1.45 \pm 0.02) \text{ g}$$

#### ■ L'incertezza assoluta non fornisce però una sensazione immediata della qualità di una misura:

$$l_1 = (13.60 \pm 0.01) \text{ m}$$

$$l_2 = (2320.10 \pm 0.01) \text{ m}$$

- ✓ Le due misure  $l_1$  ed  $l_2$  sono caratterizzate dalla stessa incertezza assoluta, ma  $l_2$  è più difficoltosa da ottenere

## Il modello deterministico

### ● Incertezza relativa

- In alternativa, si ricorre all'incertezza relativa  $\varepsilon m$  oppure all'incertezza relativa percentuale  $\varepsilon m_{\%}$ :

$$\varepsilon m = \delta m / m_0 ; \varepsilon m_{\%} = 100 \cdot \delta m / m_0$$

- ✓  $\varepsilon m$ : grandezza adimensionata
- ✓ Espressione di una misura:

$$m = m_0 \cup, \pm \varepsilon m$$

- Nel caso dell'esempio precedente:

$$l_1 = 13.6 \text{ m}, 0.07 \%$$

$$l_2 = 2320.1 \text{ m}, 0.0004 \%$$

## Il modello deterministico

### ● Incertezza ridotta

- Altra possibilità è l'incertezza ridotta, ossia l'incertezza riferita ad un valore convenzionale  $m_c$  del misurando:

$$\varepsilon m = \delta m / m_c ; \varepsilon m_{\%} = 100 \cdot \delta m / m_c$$

- ✓ NOTA: il simbolo è lo stesso di quello dell'incertezza relativa!
- ✓ Deve essere prestata massima attenzione quando si confrontano strumenti diversi

## Il modello deterministico

### ● Incertezza ridotta

#### ■ Attenzione all'incertezza ridotta ...

Voltmetro 1: portata 50 V; incertezza relativa: 1 %

Votmetro 2: portata 100 V; incertezza relativa 0.5 %\*

\*ridotta rispetto alla portata

#### ✓ Misurazione di una tensione pari a circa 30 V

– Con voltmetro 1:  $(30 \pm 0.3)$  V

– Con voltmetro 2:  $(30 \pm 0.5)$  V

#### ■ Incertezza ridotta spesso impiegata dai costruttori per ... confondere le idee!



## Il modello deterministico

### ● Propagazione dell'incertezza

- Come si combinano i diversi contributi di incertezza che affliggono una misura?
  - ✓ Dipende dal metodo di misurazione impiegato
- Solitamente si distingue tra metodi
  - ✓ **diretti**: misura assegnata a partire dall'indicazione di uno strumento (a lettura diretta) o dal valore di uno o più campioni (per confronto)
  - ✓ **indiretti**: misura assegnata come risultato di un calcolo che coinvolge grandezze ottenute con metodi diretti

## Il modello deterministico

### ● Propagazione dell'incertezza

#### ■ Metodi diretti

Si sommano i vari contributi

- ✓ Incertezza strumentale
- ✓ Incertezza di lettura
- ✓ Effetti del rumore (ripetibilità)
  - ↳ Richiede l'applicazione di un metodo a letture ripetute
- ✓ Incertezza intrinseca del misurando
- ✓ ...

## Il modello deterministico

- **Propagazione dell'incertezza**

- **Metodi indiretti**

Misurando  $Y$  esplicitato rispetto alle grandezze  $X_i$ :

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

- ✓  $x_1 = (x_{10} \pm \delta x_1) U_1$

- ✓ ...

- ✓  $x_N = (x_{N0} \pm \delta x_N) U_N$

Valutazione del misurando:

$$y_0 = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{N0})$$

## Il modello deterministico

- **Propagazione dell'incertezza**

- **Metodi indiretti**

Valutazione dell'incertezza assoluta:

$$\delta y = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{(x_{10}, \dots, x_{N0})} \cdot \delta x_1 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_N} \right|_{(x_{10}, \dots, x_{N0})} \cdot \delta x_N$$

Sviluppo in serie di Taylor della funzione  $f$

- ✓ troncato ai termini del primo ordine
- ✓ nell'intorno del punto di lavoro

## Il modello deterministico

- **Propagazione dell'incertezza**

- **Metodi indiretti**

Valutazione dell'incertezza assoluta (altra forma):

$$\delta y = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{(x_{10}, \dots, x_{N0})} \cdot \delta x_i = \sum_{i=1}^N |c_i| \cdot \delta x_i$$

- ✓  $c_i$ : coefficienti di sensibilità della funzione rispetto alle diverse variabili

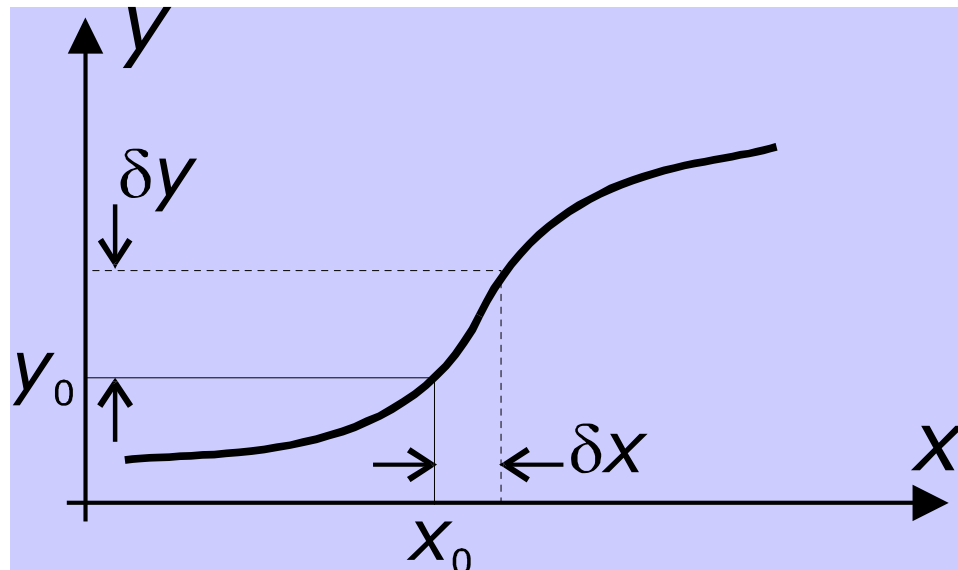
## Il modello deterministico

### ● Propagazione dell'incertezza

#### ■ Metodi indiretti

Valutazione dell'incertezza assoluta:

- ✓ In pratica, le incertezze  $\delta x_i$  sono considerate come scostamenti rispetto ai valori nominali  $x_{i0}$ , che producono uno scostamento  $\delta y$  rispetto al valore nominale  $y_0$



## Il modello deterministico

### ● Propagazione dell'incertezza

#### ■ Metodi indiretti

Il modello impiegato per la propagazione dell'incertezza corrisponde al caso pessimo:

- ✓ ogni grandezza si considera “collocata” all'estremo della fascia di valore (scostamento =  $\delta x$ )
- ✓ l'operatore valore assoluto applicato ai coefficienti di sensibilità esclude a priori qualsiasi forma di compensazione dei contributi di incertezza

## Il modello deterministico

### ● Propagazione dell'incertezza

#### ■ Metodi indiretti

Il modello impiegato per la propagazione dell'incertezza corrisponde al caso pessimo:

- È l'unico modo per garantire che il misurando sia compreso nella fascia di valore
- È il principale motivo che ha portato alla definizione di un nuovo modello di interpretazione e propagazione dell'incertezza



## Il modello deterministico

- **Casi notevoli**

- **Somma e differenza**

$$Y = a \cdot X_1 - b \cdot X_2$$

**$a$  e  $b$  costanti ( $>0$ )**

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| = a \qquad \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| = b$$

$$\delta y = a \cdot \delta x_1 + b \cdot \delta x_2$$

## Il modello deterministico

- Casi notevoli

- Prodotto e rapporto

$$Y = \frac{a \cdot X_1 \cdot X_2}{b \cdot X_3} ; a \text{ e } b \text{ costanti } (>0)$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \right| = \frac{a \cdot X_2}{b \cdot X_3} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial X_3} \right| = \frac{a \cdot X_1 \cdot X_2}{b \cdot X_3^2}$$
$$\left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \right| = \frac{a \cdot X_1}{b \cdot X_3}$$

## Il modello deterministico

- **Casi notevoli**

- **Prodotto e rapporto**

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{y} &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_3} \cdot \left( \frac{\delta \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1} + \frac{\delta \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2} + \frac{\delta \mathbf{x}_3}{\mathbf{x}_3} \right) = \\ &= \mathbf{y} \cdot \left( \varepsilon_{\mathbf{x}_1} + \varepsilon_{\mathbf{x}_2} + \varepsilon_{\mathbf{x}_3} \right)\end{aligned}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{x_1} + \varepsilon_{x_2} + \varepsilon_{x_3}$$

## Il modello deterministico

- **Casi notevoli**
  - **Elevamento a potenza**

$$Y = a \cdot X^N; a \text{ costante } (>0)$$

Riconducibile alla  
regola del prodotto

$$Y = a \cdot \prod_{i=1}^N X_i$$

$$\varepsilon_y = N \cdot \varepsilon_x$$

## Il modello deterministico

- **Casi notevoli**

- **Radice**

$$Y = a \cdot \sqrt[N]{X} ; a \text{ costante } (>0)$$

Riconducibile alla  
regola della potenza

$$Y = a \cdot X^{1/N}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{N} \cdot \varepsilon_x$$