Capitolo 1

Misurazione di resistenza con metodo volt-amperometrico

1.1 Lo schema di misurazione

Le principali grandezze elettriche che caratterizzano un bipolo in corrente continua, quali per esempio la resistenza e la potenza assorbita, possono essere misurate in modo indiretto a partire dalle misure della tensione presente ai capi del bipolo e della corrente entrante nel bipolo stesso (figura 1.1). Questo metodo di misurazione, detto volt-amperometrico, consente inoltre di costruire, per punti, la caratteristica V-I di un bipolo.

Nell'ipotesi che i carichi strumentali di voltmetro e amperometro impiegati siano nulli (resistenza interna del voltmetro infinita e resistenza interna

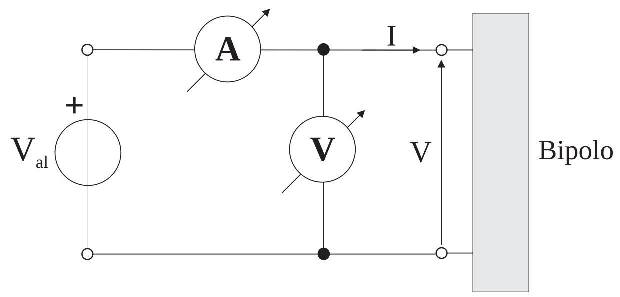

Figura 1.1: *Il metodo volt-amperometrico per la determinazione delle caratteristiche elettriche di un bipolo.*

dell'amperometro nulla), la misura r della resistenza del bipolo è ottenuta come

$$r = \frac{v}{i} \tag{1.1}$$

dove v è la misura della tensione V fornita dal voltmetro, mentre i è la misura della corrente I fornita dall'amperometro.

A partire dalla relazione 1.1, l'incertezza di misura di r può essere espressa, secondo il modello deterministico, come:

$$\epsilon_r = \epsilon_v + \epsilon_i \tag{1.2}$$

dove ϵ_x è l'incertezza relativa di misura della grandezza x.

Impiegando invece il modello probabilistico per l'espressione dell'incertezza di misura e nell'ipotesi che le misure v ed i siano statisticamente indipendenti, si ottiene:

$$u_r(r) = \sqrt{u_r^2(v) + u_r^2(i)} \tag{1.3}$$

dove $u_r(x)$ è l'incertezza tipo relativa della grandezza x.

Si noti che se le misurazioni della tensione e della corrente sono effettuate impiegando strumenti analogici di tipo elettromeccanico, l'accuratezza di misura non sarà elevata. Infatti questi strumenti sono caratterizzati da un indice di classe non inferiore a 0.05 e quindi, nel caso (particolarmente fortunato) in cui la lettura avvenga in corrispondenza del fondo scala dei due strumenti, l'incertezza di misura ottenibile non sarà migliore di alcune unità in 10^3.

1.2 L'effetto del carico strumentale

Nella valutazione dell'incertezza di misura della resistenza R, oltre all'incertezza propria degli strumenti è necessario tener conto del carico strumentale. Infatti la resistenza interna del voltmetro è elevata ma non infinita, cosí come la resistenza dell'amperometro ha un valore piccolo ma non nullo. Tenendo conto di ciò, si hanno due possibili schemi di misurazione: uno con voltmetro inserito a valle dell'amperometro (figura 1.2) e un altro con voltmetro inserito a monte dell'amperometro (figura 1.3).

Nel caso di inserzione del voltmetro a valle, l'amperometro non misura la corrente effettivamente assorbita dal bipolo in esame, bensí la somma delle correnti assorbite dal bipolo e dal voltmetro, per cui la resistenza r effettivamente misurata vale:

$$r = \frac{v}{i} = \frac{V}{I + I_V} = \frac{R \cdot R_V}{R + R_V} \tag{1.4}$$

dove R_V è la resistenza interna del voltmetro.

L'effetto sistematico legato al carico strumentale del voltmetro può quindi essere espresso in valore assoluto come:

$$\delta_{CS_V} = r - R = -\frac{R^2}{R + R_V} \tag{1.5}$$

ed in valore relativo come:

$$\epsilon_{CS_V} = \frac{\delta_{CS_V}}{R} = -\frac{R}{R + R_V} \approx -\frac{R}{R_V} \tag{1.6}$$

dove l'approssimazione impiegata è valida nel caso in cui $R_V \gg R$.

Nella configurazione di misura con voltmetro inserito a monte, il voltmetro non misura la tensione presente ai capi del bipolo, bensí la somma delle tensioni presenti ai capi dell'amperometro e del bipolo, quindi la resistenza r misurata vale:

$$r = \frac{v}{i} = \frac{V + V_A}{I} = R + R_A \tag{1.7}$$

dove R_A è la resistenza interna dell'amperometro.

L'effetto sistematico legato al carico strumentale dell'amperometro può quindi essere espresso in valore assoluto come:

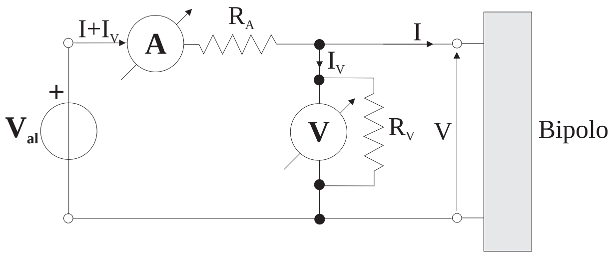

Figura 1.2: *Il metodo volt-amperometrico con inserzione del voltmetro a valle dell'amperometro.*

$$\delta_{CS_A} = r - R = R_A \tag{1.8}$$

ed in valore relativo come:

$$\epsilon_{CS_A} = \frac{\delta_{CS_A}}{R} = \frac{R_A}{R} \tag{1.9}$$

L'effetto sistematico legato al carico strumentale può essere corretto, tuttavia la resistenza interna degli strumenti è nota a meno di un'incertezza, per cui si avrà comunque un contributo di incertezza residuo. Da un punto di vista operativo conviene quindi ricorrere alla configurazione che produce il minore effetto sistematico. A tale scopo, conviene osservare le relazioni 1.6 e 1.9, dalle quali risulta che l'effetto sistematico legato al carico strumentale nelle due configurazioni è identico (in valore assoluto) quando il valore del misurando R è pari a $\sqrt{R_A \cdot R_V}$.

Se il valore del misurando (la resistenza R) è piccolo, ossia minore di $\sqrt{R_A \cdot R_V}$, conviene inserire il voltmetro a valle dell'amperometro; se invece il valore del misurando è elevato, ossia maggiore di $\sqrt{R_A \cdot R_V}$, la configurazione che minimizza l'effetto sistematico è quella con voltmetro inserito a monte dell'amperometro.

Una volta scelta la configurazione di misura, si deve valutare se è necessario correggere il modello di misura individuato inizialmente. Se l'effetto sistematico è trascurabile rispetto agli altri contributi di incertezza (incertezza strumentale, incertezza intrinseca del misurando, ...), la misura r della resistenza è ottenuta a partire dal modello (1.1). Quando l'effetto sistematico non è trascurabile, il modello da adottare per la stima del misurando r è espresso dalla relazione:

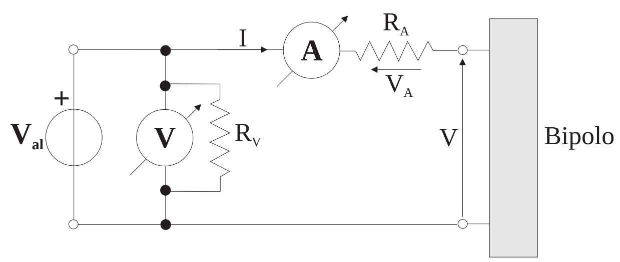

Figura 1.3: *Il metodo volt-amperometrico con inserzione del voltmetro a monte dell'amperometro.*

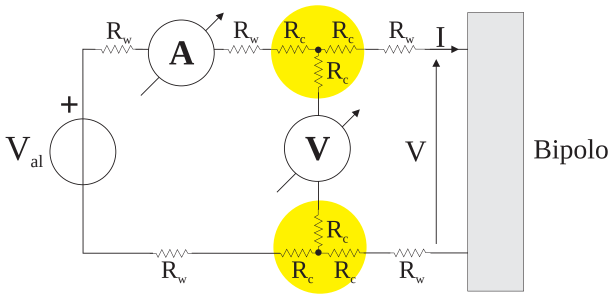

Figura 1.4: *Le resistenze dei cavi e le resistenze di contatto nel metodo volt-amperometrico.*

$$r = \frac{v}{i - \frac{v}{r_V}} \tag{1.10}$$

nel caso di inserzione del voltmetro a valle dell'amperometro, e dalla relazione:

$$r = \frac{v}{i} - r_A \tag{1.11}$$

nel caso di inserzione del voltmetro a monte dell'amperometro, dove r_V ed r_A rappresentano le misure delle resistenze interne del voltmetro e dell'amperometro.

1.3 L'effetto delle resistenze dei cavi e delle resistenze di contatto

Un'altra causa di incertezza nel metodo di misurazione descritto è costituita dalla resistenza dei cavi e dalla presenza delle resistenze di contatto, che sono localizzabili in prossimità dei vari contatti che sono effettuati per realizzare il circuito di misurazione. Nella figura 1.4 è rappresentato lo schema di misurazione in cui sono evidenziate le resistenze di contatto (R_c) e le resistenze dei cavi (R_w).

I cavi impiegati durante le esercitazioni di laboratorio sono realizzati in rame, materiale che presenta una resistività pari a circa $0.02\frac{\Omega\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$. La sezione dei cavi vale 1 mm^2, per cui la loro resistenza è pari a circa due centesimi di ohm al metro.

Il valore delle resistenze di contatto dipende dall'area delle superfici poste a contatto, dalle condizioni delle superfici stesse (ruvidità, presenza di ossido, ecc.) e dalla pressione con cui è mantenuto il contatto. Per i contatti realizzati durante le varie esercitazioni di laboratorio, le resistenze di contatto non risulteranno mai inferiori ad alcuni milliohm.

Si intuisce perciò che l'effetto delle resistenze dei cavi e delle resistenze di contatto diventa significativo qualora si vogliano misurare resistenze con incertezze dell'ordine delle decine di milliohm.

Una tecnica che consente di ridurre l'effetto delle resistenze dei cavi e delle resistenze di contatto consiste nel collegare il resistore in misura con il metodo dei quattro morsetti, due per la connessione al voltmetro e due per la connessione all'amperometro, come indicato in figura 1.5. Cosí facendo, lo schema di misurazione risulta suddiviso nel circuito voltmetrico interno e nel circuito amperometrico esterno. Il circuito voltmetrico è attraversato da una corrente di piccolo valore, in quanto la resistenza interna del voltmetro è elevata, per cui la caduta di tensione sulle resistenze dei cavi e su quelle di contatto (di piccolo valore) diventa trascurabile. Il circuito amperometrico è attraversato dalla corrente I che attraversa il bipolo in misura e la conseguente caduta di tensione sulle resistenze dei cavi e su quelle di contatto non influenza l'indicazione del voltmetro.

1.4 Altri contributi di incertezza

Un altro contributo di incertezza da prendere in considerazione è quello legato alla non perfetta conoscenza delle grandezze che definiscono lo stato del sistema in misura. Nel caso in esame, in cui il sistema in misura è un resistore, la principale grandezza da considerare è la temperatura, che deve essere misurata con un'incertezza tale da rendere trascurabile il corrispondente contributo di incertezza sulla resistenza r.

Oltre a misurare la temperatura, è inoltre importante garantire che l'autoriscaldamento del bipolo in misura non sia eccessivo. Nel metodo proposto, del tipo a stimolo e risposta, l'informazione sul misurando è ottenuta a seguito di uno stimolo inviato al sistema in misura (la corrente I) e della corrispondente risposta (la tensione V). Lo stimolo provoca tuttavia uno scambio energetico tra il misuratore ed il misurando, che altera le condizioni di misura. La corrente che attraversa il bipolo provoca infatti una dissipa-

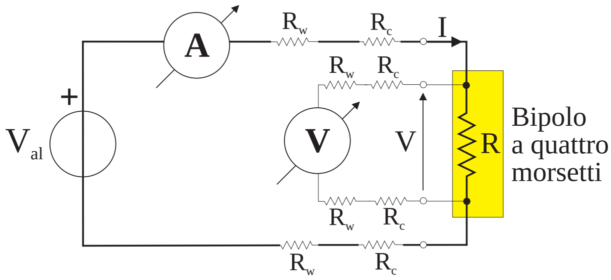

Figura 1.5: *Connessione del misurando a quattro morsetti.*

zione di calore per effetto Joule, che altera la temperatura del sistema in misura.

Capitolo 2

Misurazione di resistenza con ponte di Wheatstone

2.1 Lo schema di misurazione

La misurazione in corrente continua di una resistenza può essere eseguita, in alternativa al metodo volt-amperometrico, con il cosiddetto ponte di Wheatstone. Questo metodo di misurazione è un metodo di zero, nel quale l'azzeramento di una corrente o una tensione in un ramo del circuito di misurazione consente di esprimere il valore del misurando in funzione di un campione omogeneo con il misurando stesso. Un metodo di zero richiede quindi l'uso di un campione di riferimento variabile finemente ed un rivelatore di zero. Si intuisce che l'incertezza di misura ottenibile non potrà essere migliore dell'incertezza con cui è noto il campione di riferimento.

Il ponte di Wheatstone può essere realizzato come nello schema della figura 2.1, ossia mediante due resistori fissi R_A ed R_B che realizzano il cosiddetto lato di rapporto, un resistore campione variabile finemente (solitamente a decadi) R_C che insieme al sistema in misura (il resistore R_X) realizza il cosiddetto lato di confronto, un generatore di tensione continua V_{AL} ed un rivelatore di zero G (solitamente un galvanometro).

Durante la misurazione si modifica il valore del resistore campione R_C fino a raggiungere l'equilibrio tra i potenziali dei punti C e D (vedi figura 2.1), condizione rilevata dall'annullamento della corrente I_G che attraversa il galvanometro. La condizione di equilibrio può comunque essere raggiunta modificando il valore di uno qualunque dei resistori del ponte.

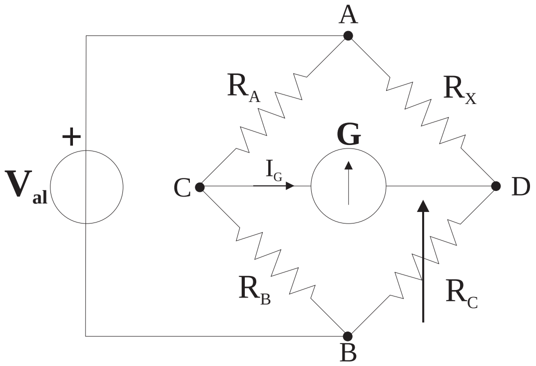

Figura 2.1: *Il ponte di Wheatstone.*

Nella condizione di ponte equilibrato il valore del misurando può essere ricavato impiegando solamente i valori dei resistori che costituiscono il ponte, in base alla relazione

$$r_X = r_C \cdot \frac{r_A}{r_B} \tag{2.1}$$

A partire dalla relazione 2.1, l'incertezza relativa di misura di r_X può essere espressa, secondo il modello deterministico, come

$$\epsilon_{r_X} = \epsilon_{r_A} + \epsilon_{r_B} + \epsilon_{r_C} \tag{2.2}$$

dove ϵ_i è l'incertezza relativa della grandezza riportata a pedice.

Adottando invece il modello propabilistico per l'espressione dell'incertezza di misura, nell'ipotesi che r_A, r_B ed r_C siano statisticamente indipendenti (ipotesi che può essere considerata valida se i tre resistori provengono da differenti processi di produzione) si ha

$$u_r(r_X) = \sqrt{u_r^2(r_A) + u_r^2(r_B) + u_r^2(r_C)} \tag{2.3}$$

dove $u_r(r_i)$ è l'incertezza tipo relativa della resistenza R_i.

2.2 La sensibilità del ponte

Come accennato in precedenza, la relazione 2.1 è valida nell'ipotesi che il ponte sia perfettamente equilibrato. Questa condizione, tuttavia, non può

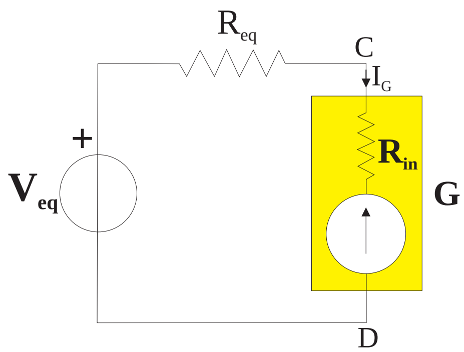

Figura 2.2: *Il circuito equivalente di Thevenin ai capi del rivelatore di zero; R_{in} è la resistenza di ingresso del galvanometro.*

essere esattamente realizzata, a causa della sensibilità finita del rivelatore di zero.

La sensibilità del ponte può essere valutata considerando il circuito equivalente di Thevenin ai capi del rivelatore di zero (figura 2.2), per il quale valgono le seguenti relazioni:

$$R_{eq} = (R_A//R_B) + (R_C//R_X) = \frac{R_A \cdot R_B}{R_A + R_B} + \frac{R_C \cdot R_X}{R_C + R_X} \tag{2.4}$$

$$V_{eq} = V_{al} \cdot \left(\frac{R_B}{R_A + R_B} - \frac{R_C}{R_X + R_C} \right) \tag{2.5}$$

Nella condizione di ponte equilibrato una variazione relativa $\frac{\Delta R_X}{R_X}$ del misurando provoca una variazione di tensione ai capi del rivelatore di zero che, a partire dalla relazione 2.5, può essere espressa come

$$\Delta V_{eq} \approx V_{al} \cdot \frac{R_C \cdot R_X}{(R_X + R_C)^2} \cdot \frac{\Delta R_X}{R_X} \tag{2.6}$$

La figura 2.2 e la relazione 2.6 suggeriscono gli interventi da attuare per ottenere un'elevata sensibilità del ponte, che possono essere così riassunti:

1. impiegare un rivelatore di zero con elevata sensibilità;

2. impiegare un valore elevato di tensione di alimentazione al fine di ottenere una ΔV_{eq} elevata a parità di variazione relativa di una delle resistenze del ponte;

3. rendere R_{eq} piccola in modo da ottenere, a parità di ΔV_{eq}, una corrente nel rivelatore di zero elevata;

4. impiegare un valore di R_C dello stesso ordine di grandezza di quello di R_X in modo da massimizzare il termine $\frac{R_C \cdot R_X}{(R_X+R_C)^2}$ nella relazione 2.6.

Si noti che non tutti gli interventi possono essere attuati contemporaneamente e indipendentemente dalla condizioni di misura.

Per esempio volendo attuare il punto 3 nel caso di misurazioni di alti valori di resistenza, poiché la resistenza equivalente ai capi del galvanometro dipende dal valore del misurando R_X secondo la relazione 2.4, sarà necessario ridurre il valore del resistore R_C, in contraddizione a quanto indicato al punto 4.

La riduzione del valore del resistore campione R_C comporta inoltre una perdita di risoluzione. Infatti i resistori campione variabili a decadi generalmente non consentono di modificare il loro valore a passi inferiori al centesimo di ohm, a causa della presenza delle resistenze di contatto.

Per quanto riguarda invece il valore della tensione di alimentazione, questo è limitato dalla massima potenza dissipabile dai resistori; in ogni caso non conviene avvicinarsi a questo limite, per evitare di modificare il valore del misurando per effetto di autoriscaldamento.

Il contributo di incertezza dovuto allo squilibrio del ponte può essere interpretato come la minima variazione relativa di uno dei resistori del ponte che provoca una variazione apprezzabile dell'indice del galvanometro.

La corrente I_G che scorre nel galvanometro vale:

$$I_G = \frac{\Delta V_{eq}}{R_{eq} + R_{in}} \tag{2.7}$$

che, nell'ipotesi che R_C sia circa uguale a R_X e sostituendo a ΔV_{eq} la relazione 2.6, diventa:

$$I_G = \frac{V_{al}}{4} \cdot \frac{\Delta R_X}{R_X} \cdot \frac{1}{R_{eq} + R_{in}} \tag{2.8}$$

Indicando con I_{Gmin} la minima corrente che provoca una variazione apprezzabile Δl dell'indice del galvanometro (ad esempio lo scostamento pari ad una tacca), il contributo di incertezza dovuto allo squilibrio del ponte può essere espresso come:

$$\epsilon_{sq} = \frac{\Delta R_X / R_X}{\Delta l / 1\text{div}} = \frac{4 I_{Gmin}}{V_{al}} \cdot (R_{eq} + R_{in}) \tag{2.9}$$

Generalmente l'incertezza ϵ_{sq} non è calcolata analiticamente, ma è stimata in modo sperimentale modificando il valore del resistore del ponte variabile più finemente e osservando quale variazione di tale resistore produce una variazione apprezzabile dell'indice del galvanometro. L'operazione è lecita in quanto, come è possibile dimostrare, la variazione relativa di uno dei resistori del ponte produce lo stesso effetto di un'analoga variazione relativa di R_X.

2.3 L'effetto delle resistenze dei cavi e delle resistenze di contatto

La presenza (inevitabile) delle resistenze dei cavi e delle resistenze di contatto comporta gli stessi problemi già trattati nel metodo volt-amperometrico. Inoltre nel caso del ponte di Wheatstone non è possibile collegare tutti i resistori a quattro morsetti, per cui il circuito di misurazione deve essere realizzato in modo che le resistenze di contatto influenzino poco l'incertezza complessiva, per esempio adottando una configurazione tale per cui le resistenze di contatto espletano il loro effetto in serie ai resistori di valore più elevato. Nella figura 2.3 è riportato un esempio di circuito di misurazione realizzato con resistori a quattro morsetti nel caso $R_B > R_C > R_A > R_X$.

2.4 L'effetto delle forze termoelettromotrici

Un'altra causa di incertezza nel metodo di misurazione proposto è costituita dalla presenza delle forze termoelettromotrici (f.t.e.m.), che sono causate dal contatto tra differenti metalli che si trovano a differente temperatura (effetto Seebeck).

Allo scopo di valutare l'effetto delle f.t.e.m. si consideri il circuito equivalente ai capi del galvanometro riportato nella figura 2.4, dove il generatore V_T rappresenta la f.t.e.m equivalente.

Quando il galvanometro è azzerato, il ponte risulta squilibrato e, avendo ipotizzato come segno della f.t.e.m. equivalente quello indicato nella figura 2.4, l'entità dello squilibrio è pari a $-V_T$. Segue che l'effetto della f.t.e.m

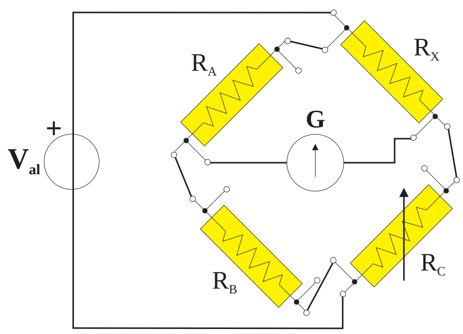

Figura 2.3: *Il ponte di Wheatstone con resistori a quattro morsetti.*

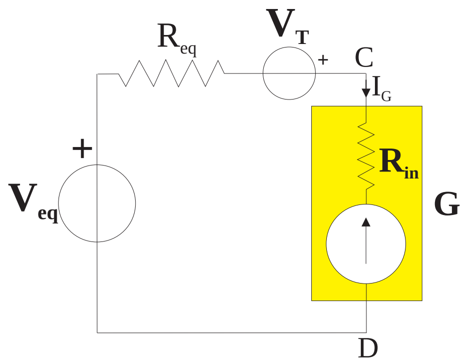

Figura 2.4: *Il circuito equivalente di Thevenin ai capi del rivelatore di zero;* V_T *è la forza termoelettromotrice equivalente.*

equivalente V_T consiste in uno scostamento relativo di misura che, a partire dalla relazione 2.6, può essere valutato come

$$\frac{\Delta R_X}{R_X} = -\frac{V_T}{V_{al}} \cdot \frac{(R_X + R_C)^2}{R_C \cdot R_X} \tag{2.10}$$

Se, per esempio, il valore della tensione di alimentazione è dell'ordine di una decina di volt, $R_C = R_X$ e se si vogliono ottenere incertezze di misura dell'ordine di alcune unità in 10^4, l'effetto delle f.t.e.m. diventa significativo se il loro valore equivalente è dell'ordine di alcune centinaia di microvolt.

Il valore delle f.t.e.m. può essere ridotto evitando l'accoppiamento tra materiali che danno origine ad elevate f.t.e.m. e minimizzando le differenze di temperatura tra le giunzioni, per esempio mediante opportune coibentazioni.

Inoltre, se si ha la possibilità di invertire la tensione di alimentazione del ponte, l'effetto delle f.t.e.m può essere compensato. Infatti il loro segno non dipende dalla tensione di alimentazione, per cui, dopo aver invertito il segno di V_{al}, lo scostamento relativo di misura dovuto alla presenza delle f.t.e.m. diventa

$$\frac{\Delta R_X}{R_X} = \frac{V_T}{V_{al}} \cdot \frac{(R_X + R_C)^2}{R_C \cdot R_X} \tag{2.11}$$

A questo punto, assumendo come misura della resistenza R_X la media delle due misure ottenute invertendo la tensione di alimentazione del ponte si elimina il contributo di incertezza dovuto alla presenza delle f.t.e.m.

2.5 Conclusioni

Il ponte di Wheatstone consente di eseguire misurazioni di resistenze di valore compreso tra circa 10 Ω e 1 MΩ con incertezze dell'ordine di alcune unità in 10^5. L'incertezza ottenibile peggiora quando si misurano resistenze di piccolo valore (inferiore alla decina di ohm) o di alto valore (superiore al megaohm).

Nel caso di misurazioni di alti valori di resistenza diventa significativo il contributo di incertezza dovuto alla presenza delle resistenze di dispersione e d'isolamento. La struttura del ponte non consente infatti di attuare agevolmente gli accorgimenti (per esempio la schermatura delle resistenze) necessari a ridurre l'effetto di questo fenomeno.

Nel caso di misurazioni di piccoli valori di resistenza, la limitazione all'incertezza ottenibile è invece costituita dalla presenza delle resistenze di contatto.

Si osservi infine che l'incertezza di misura ottenibile con il ponte di Wheatstone non è influenzata da eventuali variazioni della tensione di alimentazione.

Capitolo 3

Misurazione di resistenza con metodo di confronto

3.1 Lo schema di misurazione

Un'altra tecnica impiegata per eseguire misurazioni di resistenza in corrente continua è quella basata sul confronto tra il resistore in misura R_X ed un resistore campione R_S mediante il circuito di figura 3.1, dove i resistori R_X ed R_S sono collegati in serie. I due voltmetri V_1 e V_2 misurano le cadute di tensione V_S e V_X ai capi dei due resistori. Se i voltmetri si considerano ideali dal punto di vista del carico strumentale, ossia si ipotizza che la loro resistenza interna abbia valore infinito, si può affermare che i due resistori sono attraversati dalla stessa corrente I_T, che può essere espressa come:

$$I_\mathrm{T} = \frac{V_\mathrm{S}}{R_\mathrm{S}} = \frac{V_\mathrm{X}}{R_\mathrm{X}} \tag{3.1}$$

da cui è possibile stimare la misura della resistenza incognita come:

$$r_\mathrm{X} = \frac{v_\mathrm{X}}{v_\mathrm{S}} \cdot r_\mathrm{S} \tag{3.2}$$

A partire dalla relazione 3.2, l'incertezza di misura di r_X può essere espressa, secondo il modello deterministico, come:

$$\epsilon_\mathrm{rX} = \epsilon_\mathrm{vX} + \epsilon_\mathrm{vS} + \epsilon_\mathrm{rS} \tag{3.3}$$

Impiegando invece il modello probabilistico, nell'ipotesi di indipendenza statistica tra le misure delle grandezze v_X, v_S ed r_S, si ottiene:

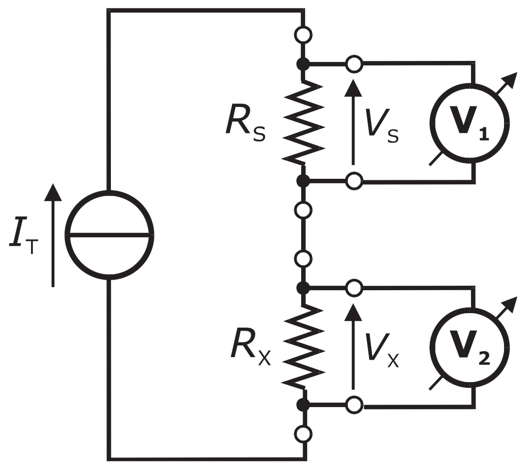

Figura 3.1: *Circuito per la misurazione di resistenza con metodo di confronto.*

$$u_r(r_X) = \sqrt{u_r^2(v_X) + u_r^2(v_S) + u_r^2(r_S)} \tag{3.4}$$

Se il metodo di confronto è applicato utilizzando un resistore campione avente lo stesso ordine di grandezza del resistore in misura, ossia $R_S \approx R_X$, anche le cadute di tensione ai capi dei due resistori assumeranno lo stesso ordine di grandezza. Questo suggerisce la possibilità di misurare le cadute di tensione V_S e V_X usando un solo voltmetro configurato nella stessa portata, come nel circuito di misura di figura 3.2. In questo caso, quando il doppio commutatore è in posizione 1, il voltmetro rileva la misura v_S, mentre in posizione 2 si ottiene la misura v_X.

La relazione che permette di stimare la misura r_X del resistore incognito è ancora la 3.2, ma dal punto di vista della stima dell'incertezza si deve tener conto della diversa procedura di misurazione, che prevede di rilevare le tensione ai capi dei due resistori in tempi diversi, mediante lo stesso voltmetro impiegato nella stessa portata. Questo ha due importanti conseguenze:

- il contributo del voltmetro non è la sua incertezza assoluta, ma la sua deviazione dalla linearità, visto che le due tensioni misurate compaiono a rapporto nel modello di misura;

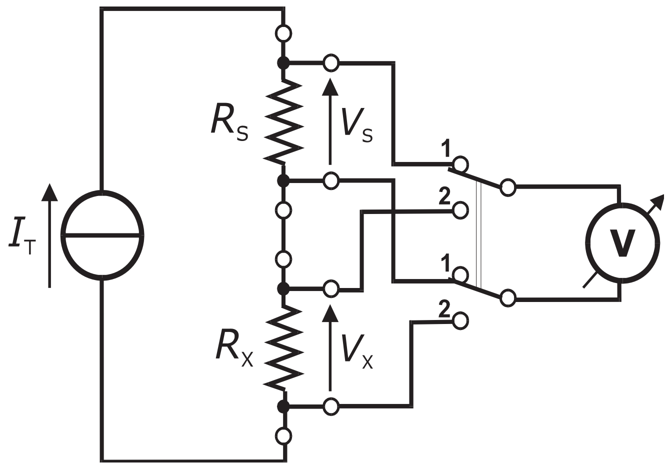

Figura 3.2: *Circuito per la misurazione di resistenza con metodo di confronto che prevede l'uso di un solo voltmetro.*

- le misure sono ottenute in tempi diversi, per cui entra in gioco la stabilità del generatore di corrente.

Tenendo conto di questi aspetti, l'incertezza relativa secondo le regole del modello deterministico può essere scritta come:

$$\epsilon_{\mathrm{rX}} = \epsilon_{\mathrm{vX,NL}} + \epsilon_{\mathrm{vS,NL}} + \epsilon_{\mathrm{rS}} + \epsilon_{\mathrm{IT}} \tag{3.5}$$

dove ϵ_{IT} rappresenta il contributo legato all'instabilità del generatore di corrente, mentre il pedice NL nell'incertezza relativa delle due tensioni evidenzia che si tratta del contributo di Non Linearità del voltmetro.

Un importante accorgimento da adottare in questo metodo di misurazione consiste nell'eseguire la misurazione delle due tensioni V_{S} e V_{X} nel minor tempo possibile, così da minimizzare l'effetto di instabilità del generatore e l'eventuale deriva a breve termine delle caratteristiche del voltmetro. In questo caso, si riescono ad ottenere incertezze di misura molto simili all'incertezza con cui è noto il resistore campione R_{S}, che può raggiungere alcune unità in 10^6 per resistenze comprese tra 1 Ω e 100 kΩ.

3.2 L'effetto del carico strumentale

L'effetto sistematico di carico strumentale del circuito di figura 3.1 può essere valutato osservando che le resistenze interne dei due voltmetri, qui indicate con R_{V1} ed R_{V2}, risultano collegate in parallelo alle resistenze R_{S} ed R_{X}, da cui segue che la relazione 3.1 assume la seguente forma:

$$I_{\mathrm{T}} = \frac{V_{\mathrm{S}}}{R_{\mathrm{S}}//R_{\mathrm{V1}}} = \frac{V_{\mathrm{X}}}{R_{\mathrm{X}}//R_{\mathrm{V2}}} \tag{3.6}$$

per cui il modello di misura da adottare diventa il seguente:

$$R_{\mathrm{X}} = \frac{R_{\mathrm{V1}} \cdot R_{\mathrm{V2}} \cdot R_{\mathrm{S}} \cdot V_{\mathrm{X}}}{R_{\mathrm{V1}} \cdot R_{\mathrm{V2}} \cdot V_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{V2}} \cdot R_{\mathrm{S}} \cdot V_{\mathrm{S}} - R_{\mathrm{V1}} \cdot R_{\mathrm{S}} \cdot V_{\mathrm{x}}} \tag{3.7}$$

Nel caso in cui le resistenze interne dei due voltmetri sono caratterizzate dallo stesso valore nominale, ossia $R_{\mathrm{V1}} = R_{\mathrm{V2}} = R_{\mathrm{V}}$, la relazione precedente assume la seguente forma:

$$R_{\mathrm{X}} = \frac{R_{\mathrm{V}}^2 \cdot R_{\mathrm{S}} \cdot V_{\mathrm{X}}}{R_{\mathrm{V}}^2 \cdot V_{\mathrm{S}} + R_{\mathrm{V}} \cdot R_{\mathrm{S}} \cdot (V_{\mathrm{S}} - V_{\mathrm{x}})} \tag{3.8}$$

che può essere utilizzata anche nel caso del circuito di misura di figura 3.2, che prevede l'uso di un solo voltmetro con resistenza interna pari a R_{V}.

3.3 Altri contributi di incertezza

Il contributo legato alla resistenza dei cavi e dei contatti è trascurabile, visto che il circuito di misura prevede il collegamento a quattro morsetti dei due resistori R_{S} ed R_{X} (il resistore campione è solitamente definito a quattro morsetti).

L'effetto delle f.t.e.m. diventa significativo quando il loro valore riferito alle tensioni in misura diventa paragonabile agli altri contributi di incertezza. Ad esempio, misurando una resistenza R_{X} dell'ordine del kiloohm con una corrente di prova $I_{\mathrm{T}} = 1$ mA, la tensione in misura assumerà valori dell'ordine del volt. Se l'incertezza dovuta agli altri contributi è dell'ordine di alcune unità in 10^5, l'effetto delle f.t.e.m. diventa significativo quando il loro valore è dell'ordine di una decina di microvolt. In situazioni come questa è importante adottare gli accorgimenti che permettono di minimizzare le f.t.e.m., quali l'uso di materiali a basso potere termoelettrico e la coibentazione delle giunzioni per renderne uniforme la temperatura. È inoltre possibile ricorrere alla doppia misurazione con verso della corrente invertito e alla stima del valore medio delle tensioni misurate, in modo da rendere trascurabile l'effetto delle f.t.e.m.

Per quanto riguarda la definizione dello stato del sistema in misura, come negli altri due metodi analizzati è necessario fornire informazioni relative alla temperatura dell'ambiente in cui è eseguita la misurazione ed alla corrente di prova, poiché entrambe influenzano la grandezza di stato temperatura del resistore in misura.