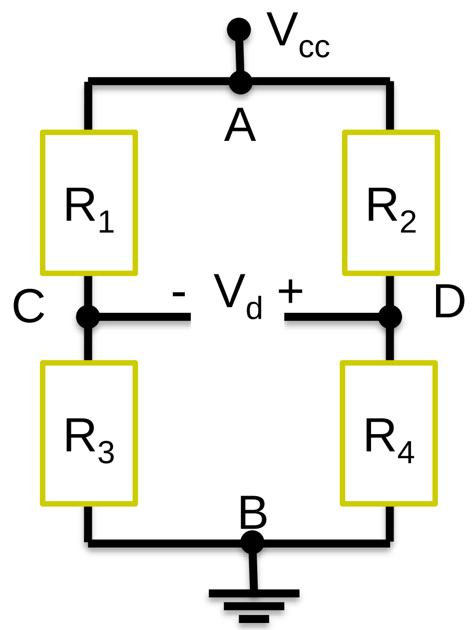
Ponte di Wheatstone

Schema di massima

Incertezze

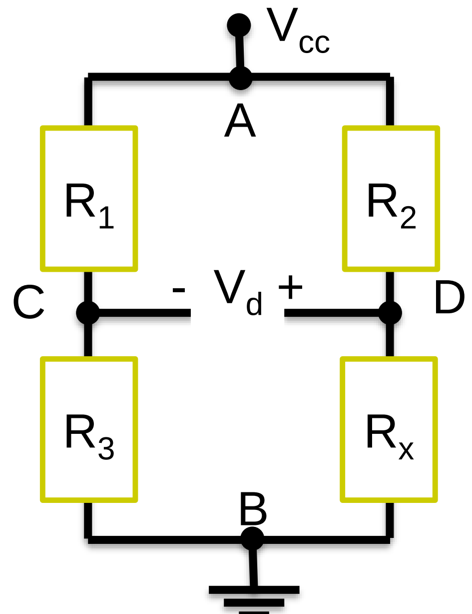
Ponte di Wheatstone

- Quattro rami (o lati) ciascuno con un resistore
- Permette di misurare il valore di resistenza
- I vertici A e B sono detti di alimentazione
- I vertici C e D sono detti di rivelazione



Ponte di Wheatstone

- Permette di misurare il valore di una resistenza R_x
- Se $V_d=0$ allora $R_1 \cdot R_x = R_2 \cdot R_3$ (condizione di equilibrio del ponte

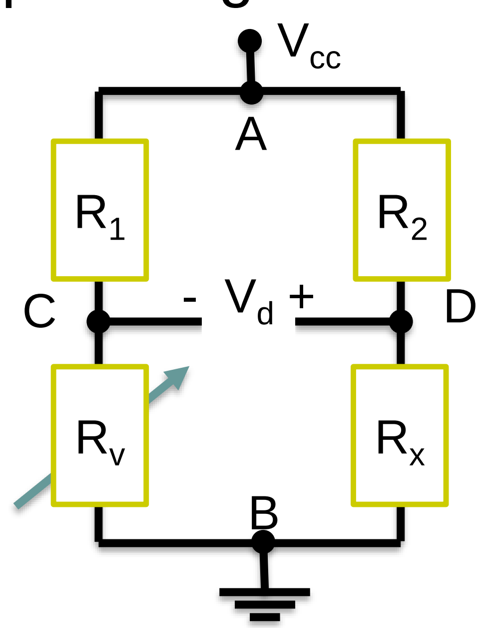


Ponte di Wheatstone

- Se R_3 diventa una resistenza variabile R_v (resistenza di confronto)

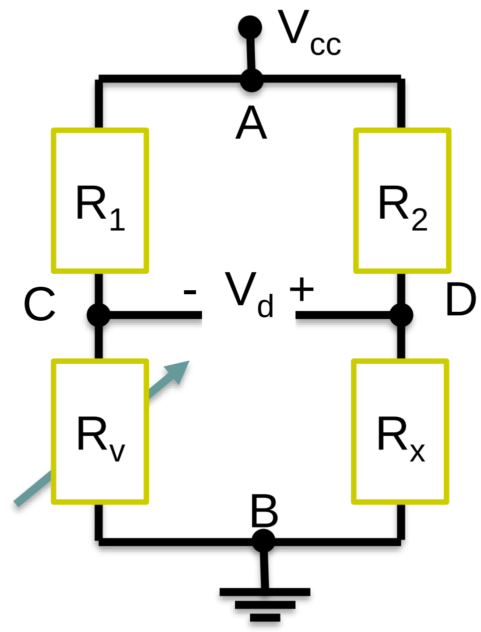
$$R_x = R_v \cdot R_2 / R_1 = R_v \cdot K$$

- K (rapporto fra le due resistenze rimanenti) è variabile a decadi ed è scelto in modo che V_d sia la più piccola possibile con R_v posizionata ad un valore intermedio del proprio range di variazione



Ponte di Wheatstone

- Successivamente si varia il valore di R_v fino ad avere il valore più piccolo possibile (prossimo allo zero) dello strumento che misura la ddp V_d (V_d~0V)



Ponte di Wheatstone

- La resistenza variabile è in genere costituita da una cassetta di resistenze tarate con incertezza relativa dello 0.1% (o migliore)
- La resistenza variabile varia in genere a step ben determinati di 1Ω o di 0.1Ω
- Può dunque succedere che non sia possibile portare in equilibrio il ponte

Modello RM/5 p 1

a cinque decadi da 0,1 a 11.000 ohm. 10×(0,1+1+10+100+1000)

Commutatori a spazzola rotante, con scatto rapido, comandati a manopola. I contatti di questi commutatori sono in lega d'argento, la resistenza di contatto è dell'ordine di 0,002 ohm.

Bobine, montate su supporti isolanti indeformabili, in filo di manganina con avvolgimento bifilare; potenza massima dissipabile in ogni bobina 0,5 watt a carico continuo.

Taratura eseguita con precisione superiore a ± 0,1%.

Montate in cassetta metallica verniciata in grigio acciaio con pannello metallico verniciato. Sotto i commutatori sono ricavate delle finestrelle nelle quali compare il numero corrispondente al valore della resistenza inserita.

Queste cassette hanno due morsetti, le cinque decadi sono collegate in serie internamente.

Dimensioni: mm. 420×295×180
Peso: kg. 8,500 circa.

Dekabox DB52 resistor box

Ponte di Wheatstone

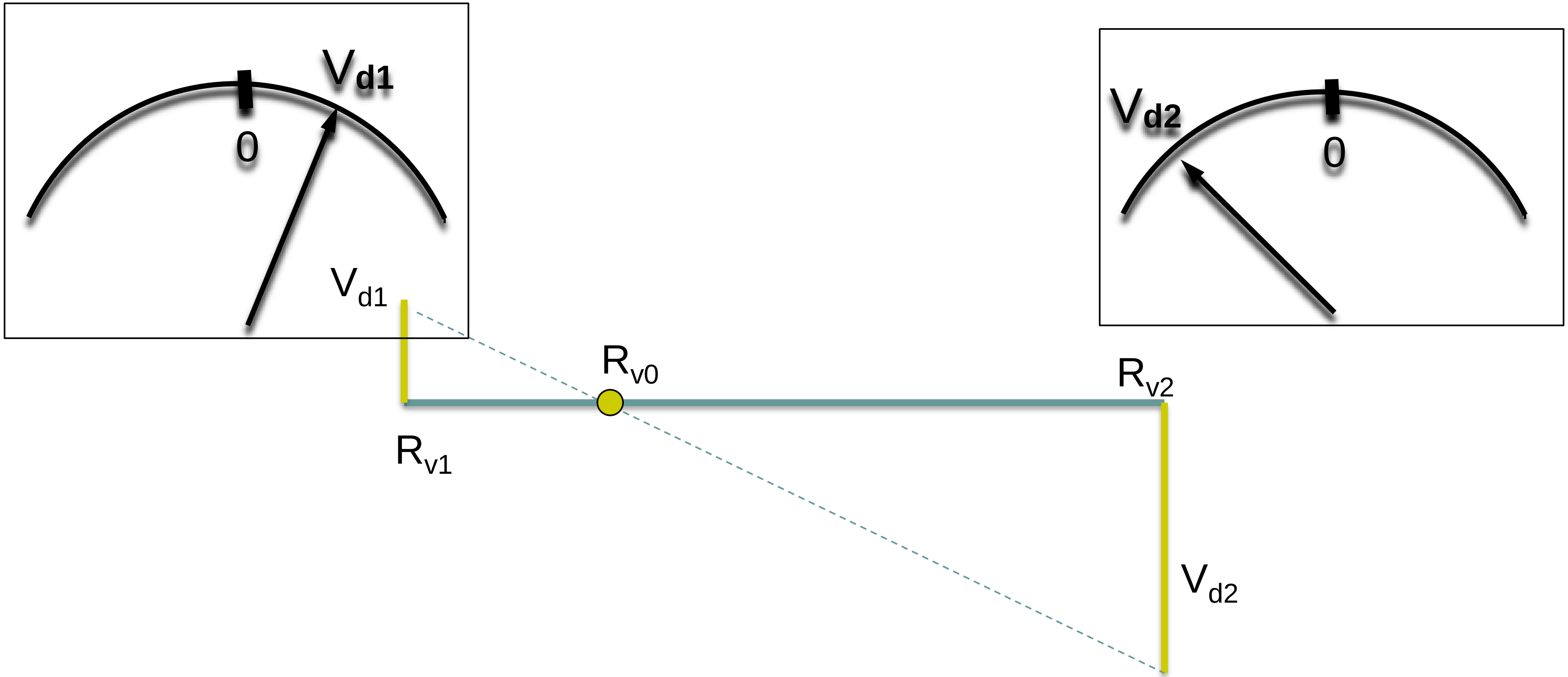
- In corrispondenza di due valori di resistenza R_{v1} e R_{v2} si avranno valori si V_d di segno opposto (per esempio $V_{d1}>0$ e $V_{d2}<0$)

- In questo caso la risoluzione della resistenza campione non è adeguata a portare a zero la tensione V_d

- Si utilizza una semplice tecnica di interpolazione per determinare il valore teorico R_{v0} che mette in equilibrio il ponte

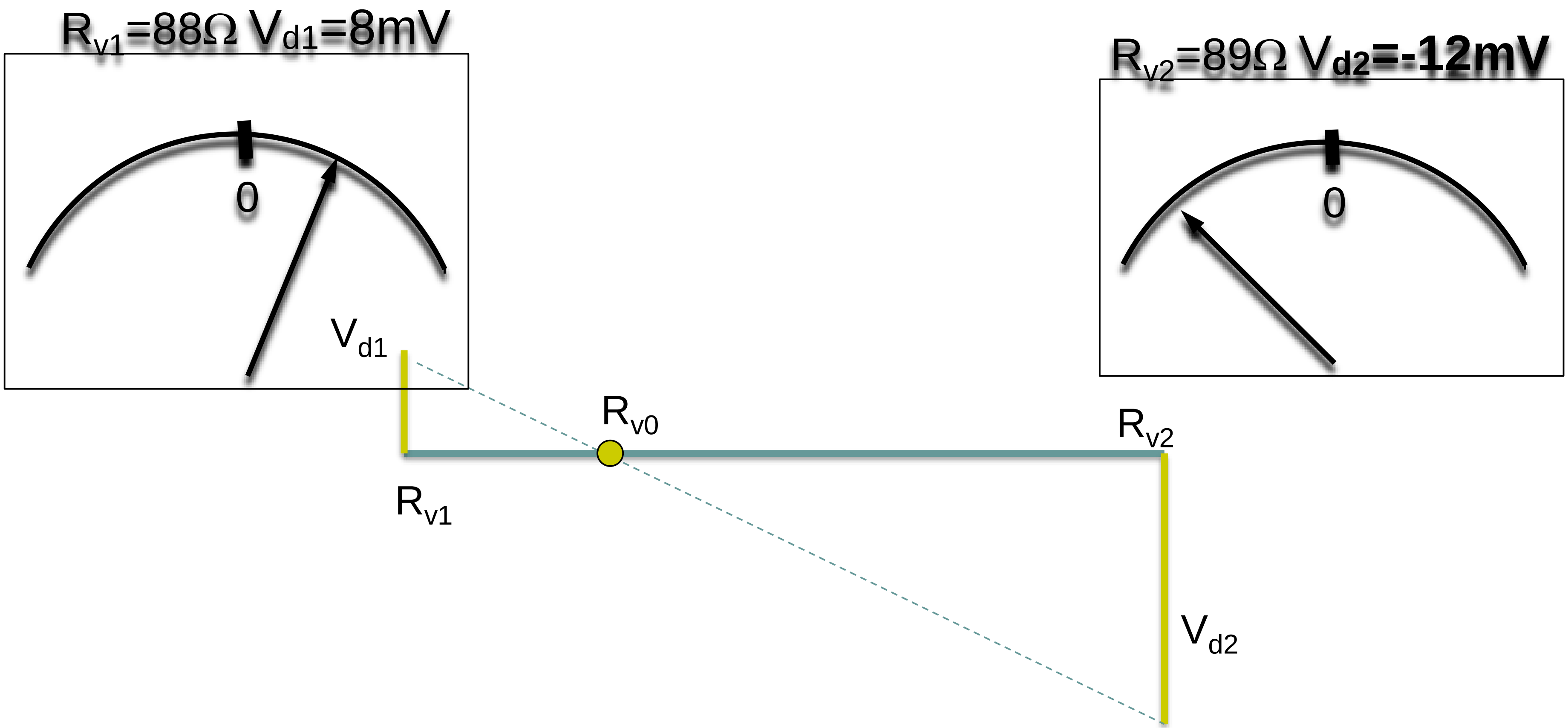
Ponte di Wheatstone

- $\frac{V_{d1}}{R_{v1}-R_{v0}} = \frac{V_{d2}}{R_{v0}-R_{v2}}$ …da cui $R_{v0} = \frac{V_{d1}R_{v2}+V_{d2}R_{v1}}{V_{d1}+V_{d2}}$



Ponte di Wheatstone

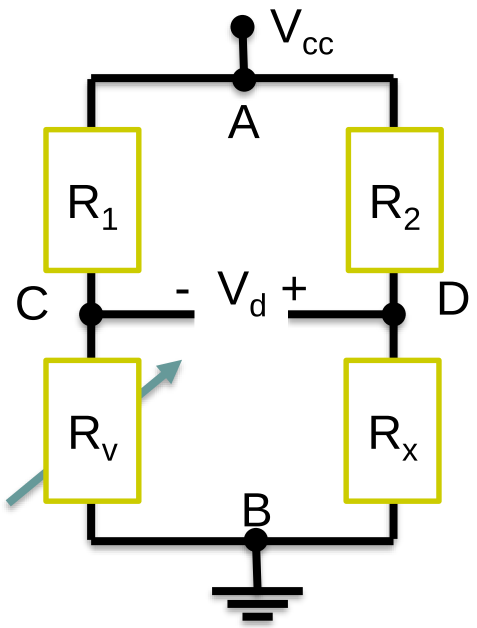
Esempio: resistore campione con risoluzione 1Ω
R_{v1}=88Ω V_{d1}=8mV; R_{v2}=89Ω e V_{d2}=-12mV
R_{v0}=88.4Ω



Ponte di Wheatstone

- Può accadere però che R_v sia un resistore con risoluzione ΔR_v adeguata per portare il ponte in equilibrio (per esempio 0.05Ω)

$$V_d = \left(\frac{R_x}{R_x + R_2} - \frac{R_v}{R_v + R_1}\right) \cdot V_{cc}$$



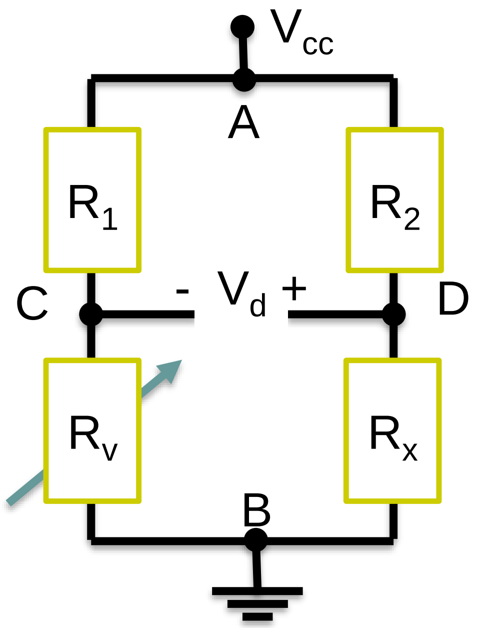
- In equilibrio si ottiene:

$$\frac{R_1}{R_v} = \frac{R_2}{R_x} \rightarrow R_x = \frac{R_2}{R_1} R_v$$

- $R_x = kR_v$

Ponte di Wheatstone

- Nell'ipotesi di avere $V_d \approx 0$
- $R_x = \frac{R_2}{R_1} R_v$ da cui
- $\frac{\delta R_x}{R_x} = \frac{\delta R_1}{R_1} + \frac{\delta R_2}{R_2} + \frac{\delta R_v}{R_v}$



Ponte di Wheatstone

- Si supponga che il ponte sia "quasi" all'equilibrio e che l'unica resistenza variabile sia R_v

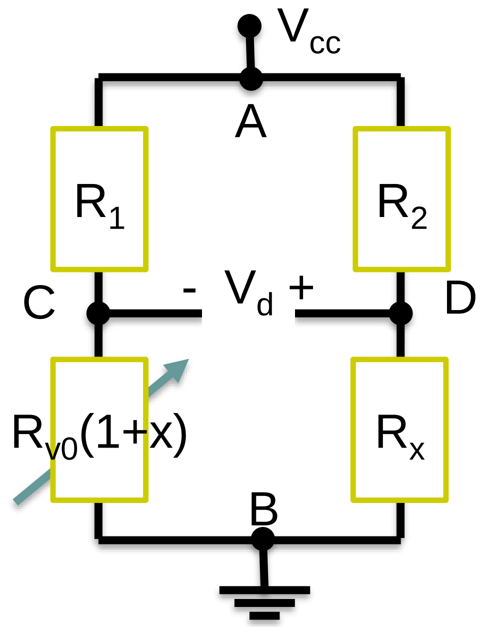
$$R_v = R_{v0} + \Delta R_v = R_{v0}(1 + x) \text{ con } x = \frac{\Delta R_v}{R_{v0}}$$

- R_{v0} è il valore che permetterebbe di avere il ponte in equilibrio quando x=0

Ponte di Wheatstone

- Riscriviamo la condizione di equilibrio come:

$$V_d = \left(\frac{R_{vo}(1+x)}{R_{vo}(1+x)+R_1} - \frac{R_3}{R_3+R_2}\right)\cdot V_{cc}$$



- Definisco $A = \frac{R_1}{R_{v0}} = \frac{R_2}{R_3}$
- "A" è detto guadagno del ponte e rappresenta il rapporto fra le resistenze in condizione di equilibrio

Ponte di Wheatstone

$$V_d = \left(\frac{R_{vo}(1+x)}{R_{vo}(1+x)+R_1} - \frac{R_3}{R_3+R_2} \right) \cdot V_{cc} =$$

$$= \left(\frac{(1+x)}{(1+x)+A} - \frac{1}{1+A} \right) \cdot V_{cc} = \frac{Ax}{\big((1+x)+A\big)(1+A)} V_{cc}$$

$$V_d = \frac{Ax}{(A+1)^2\left(1+\frac{x}{A+1}\right)} \cdot V_{cc} \approx \frac{Ax}{(A+1)^2} \cdot \left(1 - \frac{x}{A+1}\right) V_{cc} \qquad (1)$$

$$\text{NB: se } \alpha = \frac{x}{A+1} \ll 1 \; si \; ha \; che \; \frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha$$

Ponte di Wheatstone

Introducendo il termine di sensibilità definito come

$$S = \frac{A}{(A+1)^2} V_{cc}$$

Si ottiene infine, dalla (1):

$$V_d = Sx - S\frac{x^2}{A+1}$$

Ponte di Wheatstone

$$S = \frac{A}{(A+1)^2} V_{cc}$$

- Il termine di sensibilità ha un massimo per A=1 quindi per resistenze del ponte tutte uguali

$$V_d = Sx - S\frac{x^2}{A+1} \ con \ x = \frac{\Delta R_v}{R_{v0}}$$

- V_d dipende anche da un termine quadratico
- Il termine quadratico si riduce se A aumenta (peò riduco la sensibilità)

Ponte di Wheatstone

$$V_d = Sx - S\frac{x^2}{A+1} \; con \; x = \frac{\Delta R_v}{R_{v0}} \quad (2)$$

- Dalla (2), è possibile valutare la tensione di squilibrio ottenibile variando il resistore del valore pari alla risoluzione ΔR_v

- Inoltre: $\delta V_d = S\delta x$ ....più un termine trascurabile

Ponte di Wheatstone

- Tornando al caso della misura di una resistenza incognita R_x abbiamo:

$$R_v = R_{v0} + \Delta R_v$$
$$\delta R_v = \delta R_{v0} + \delta(\Delta R_v)$$

$$\frac{\delta R_v}{R_v} \approx \frac{\delta R_{v0}}{R_{v0}} + \frac{\delta(\Delta R_v)}{R_{v0}}$$

- Utilizzando le usuali formule di propagazione delle incertezze (metodo determ.) si ottiene:

$$\frac{\delta R_x}{R_x} = \frac{\delta R_1}{R_1} + \frac{\delta R_2}{R_2} + \frac{\delta R_{v0}}{R_{v0}} + \frac{\delta(\Delta R_v)}{R_{v0}}$$

Ponte di Wheatstone

- Tenendo conto che $\delta V_d = S\delta x$ possiamo scrivere

$$\frac{\delta(\Delta R_v)}{R_{v0}} = \frac{\delta V_d}{S}$$

$$\frac{\delta R_x}{R_x} = \frac{\delta R_1}{R_1} + \frac{\delta R_2}{R_2} + \frac{\delta R_{v0}}{R_{v0}} + \frac{\delta V_d}{S}$$

Ponte di Wheatstone

$$\frac{\delta R_x}{R_x} = \frac{\delta R_1}{R_1} + \frac{\delta R_2}{R_2} + \frac{\delta R_{v0}}{R_{v0}} + \frac{\delta V_d}{S}$$

- L'incertezza relativa di R_x dipende dunque da
  - L'incertezza relativa di R_1 ed R_2
  - Dalla sensibilità del ponte
  - Dalla nostra capacità di "azzerarlo"
  - Dalla incertezza della nostra resistenza campione

Misure in AC

Definizioni

Voltmetri a valore efficace

Esercizi

Definizioni

- La potenza media dissipata da un resistore ai capi del quale è applicata una tensione periodica *v(t)* è data da

$$P = \frac{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt}{R} = \frac{v_{eff}^2}{R}$$

- Con questa definizione si mantiene la stessa struttura della formula della potenza dissipata da un resistore ai capi del quale è applicata una tensione costante

- Inoltre: il valore efficace di una grandezza periodica è dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati dei valori efficaci delle sue componenti armoniche (teorema di Parseval) ...andate a rivedere la dimostrazione

Definizioni

- Per un generico segnale periodico $\mathrm{v(t)}$ possiamo definire due paramentri fondamentali:

- il valor medio: $v_m = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)dt$

- Il valore efficace: $v_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt}$

Esempi

- v(t)=Asin(ωt)

$$v_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)dt} = \sqrt{\frac{A^2}{T}\int_0^T sin^2(\omega t)dt} = \cdots = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

- v(t)= V_p per 0<t≤T/2
  -V_p per T/2<t≤T

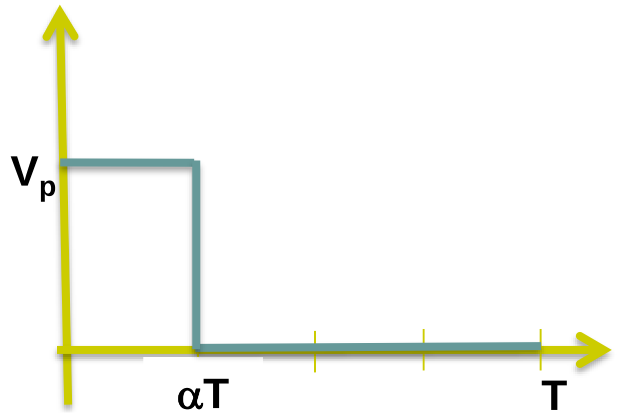
$$v_{eff} = \cdots = V_p$$

Esercizio

- Determinare valor medio e valore efficace nel caso della forma d'onda quadra in figura al variare del duty cycle α

- $V_m = 1/T \cdot \alpha T \cdot V_p = \alpha \cdot V_p$

- $v_{eff}^2 = \frac{1}{T}\, \alpha\, T\, V_p^2 = \alpha\, V_p^2 \;\rightarrow v_{eff} = V_p\sqrt{\alpha}$



Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

- Il voltmetro a doppia rampa permette di effettuare misurazioni di tensione con elevata risoluzione ed accuratezza

- Per mezzo di una conversione elettrotermica è possibile misurare una tensione efficace per mezzo di una equivalente tensione DC

Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

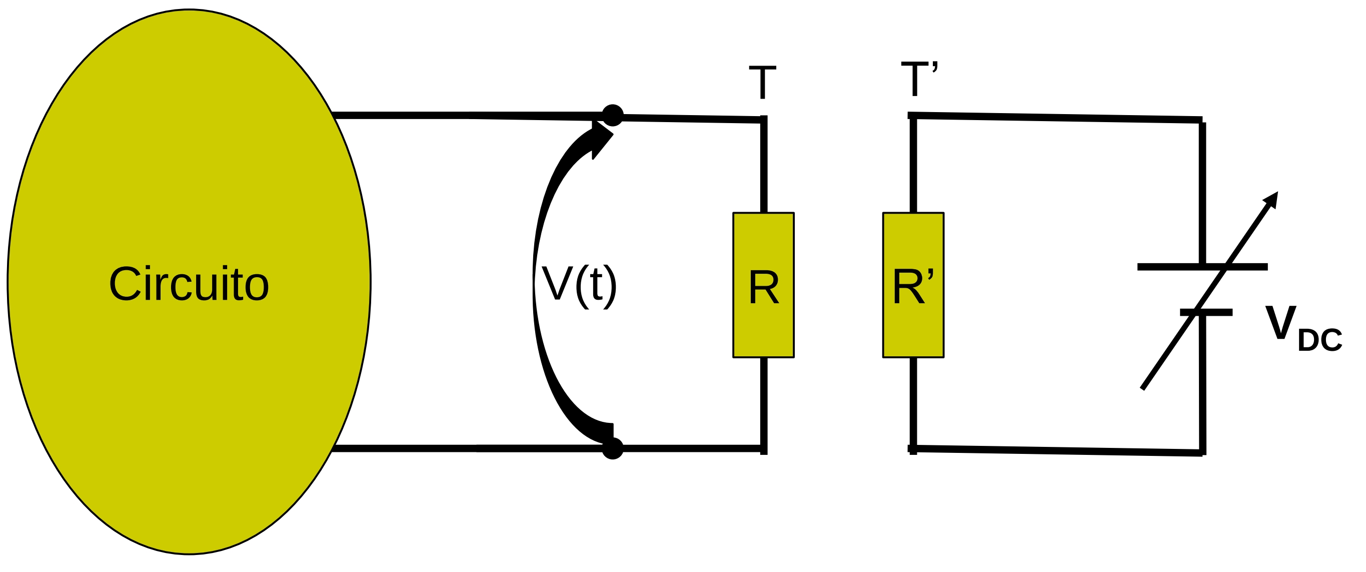
- Sottoponendo un resistore ad una tensione si ottiene un aumento della temperatura proporzionale alla potenza dissipata

- Misurando l’aumento della temperatura è possibile risalire al valore efficace della tensione stessa

- Poiché la temperatura ambiente influenza la temperatura finale del resistore, è necessario utilizzare un sistema di confronto

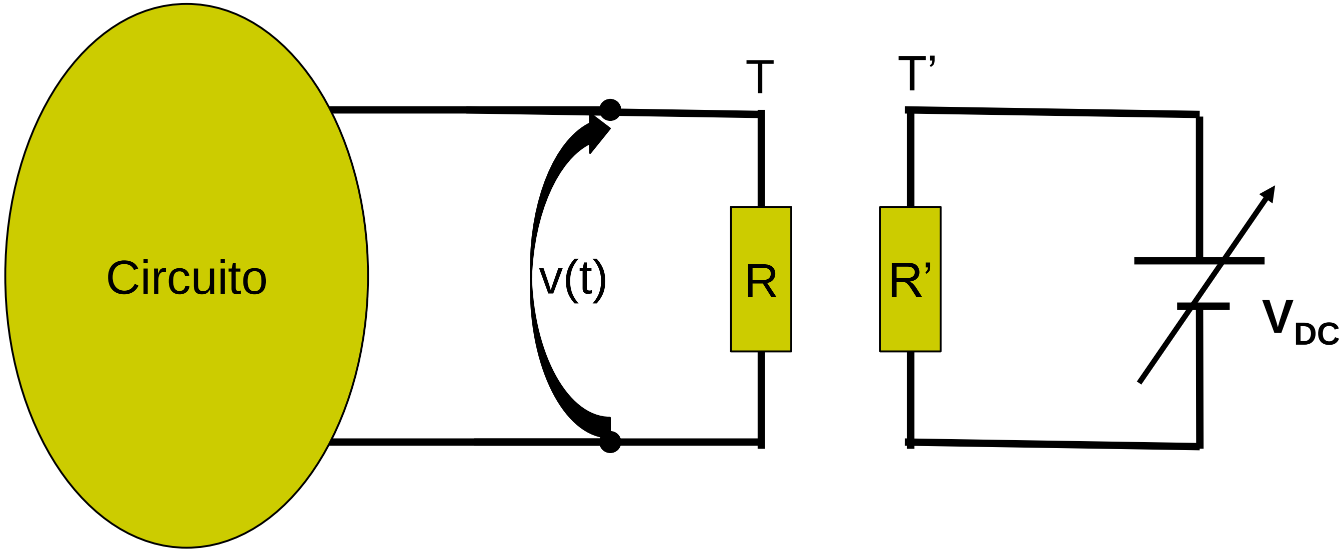
Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

- Schema di principio di un voltmetro a conversione elettro-termica



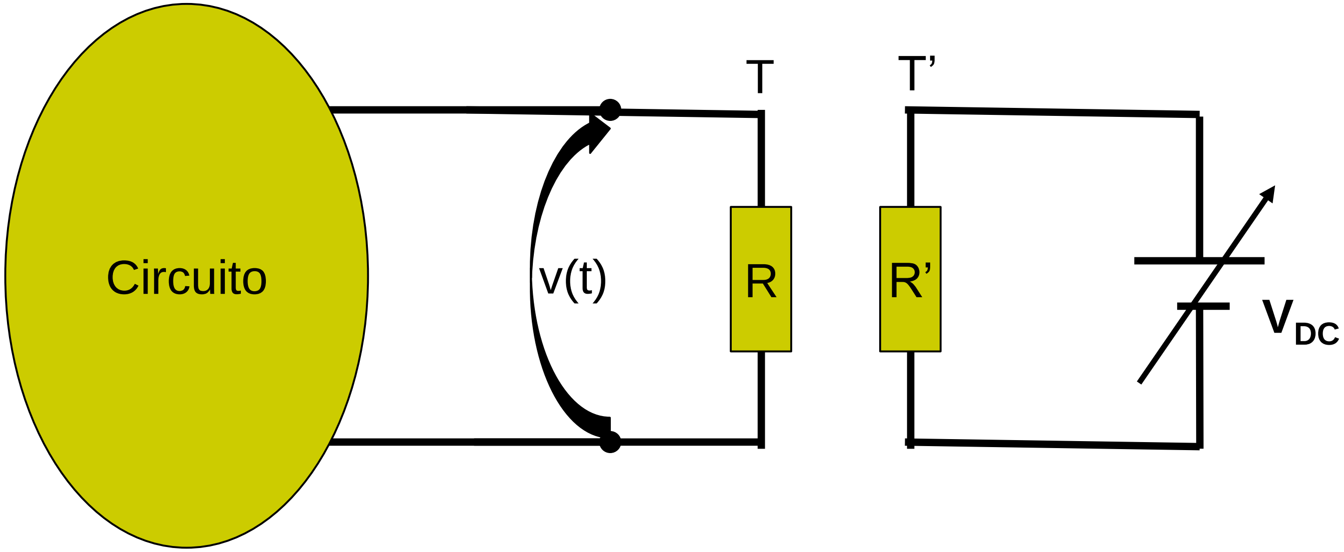
Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

- Il resistore R’ è sottoposto alla tensione continua prodotta dal generatore variabile V_{DC}; ad R è applicata la tensione v(t) di cui si vuol misurare il valore efficace



Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

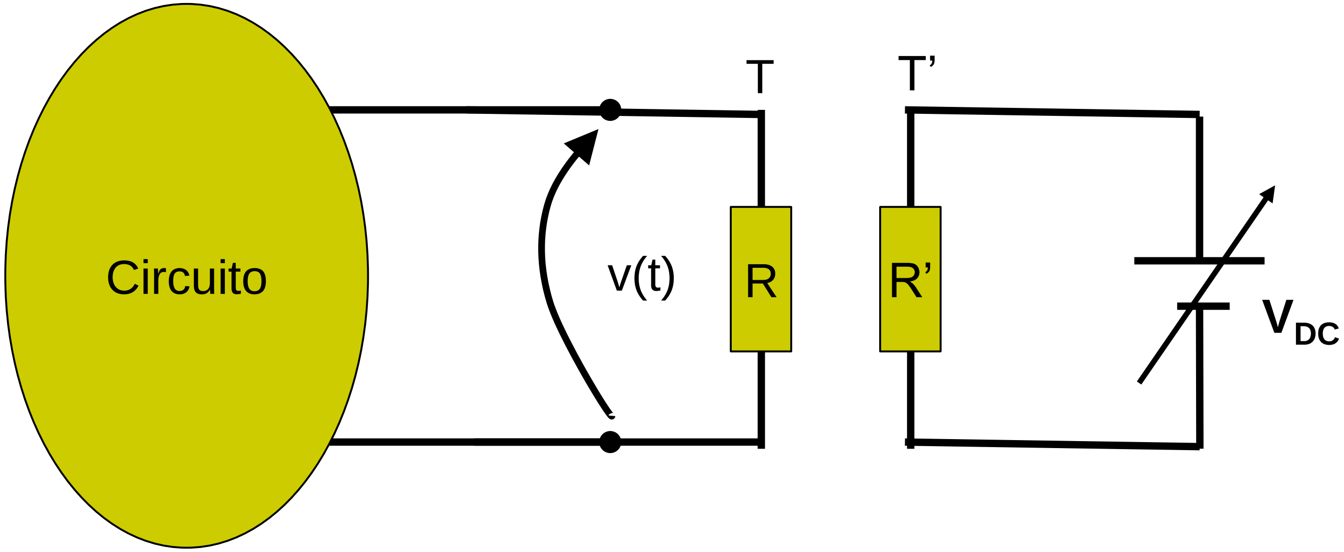
- La tensione continua V_{DC} viene fatta variare finché R’ non raggiunge la stessa temperatura di R



Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

- Raggiunta la condizione di equilibrio termico fra le due resistenze, la potenza dissipata dai due resistori è la stessa:

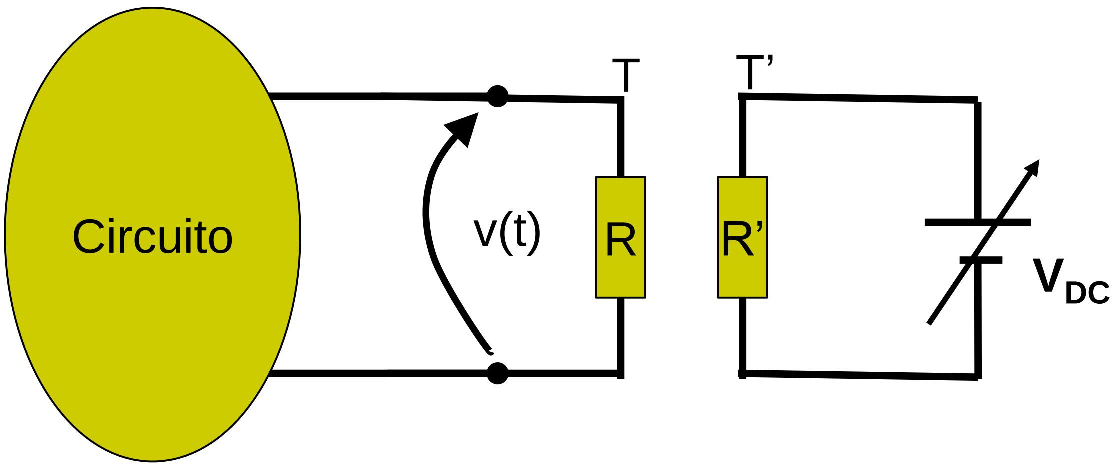
$$\frac{{V_{eff}}^2}{R} = \frac{{V_{DC}}^2}{R'}$$



Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

- Da cui: $$V_{eff} = \sqrt{\frac{R'}{R}} \cdot V_{DC}$$

Misurando dunque la tensione continua ai capi del generatore variabile con un voltmetro numerico per tensioni continue è possibile ottenere direttamente la tensione efficace del segnale $v(t)$, qualunque sia la forma del segnale $v(t)$



Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

Esempio: Incertezza voltmetro Agilent 34401 nella misura in alternata

■ AC Characteristics

Accuracy Specifications ± (% of reading + % of range) [1]

Function	Range [3]	Frequency	24 Hour [2] 23°C ± 1°C	90 Day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient/°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
True RMS AC Voltage [4]	100.0000 mV	3 Hz – 5 Hz	1.00 + 0.03	1.00 + 0.04	1.00 + 0.04	0.100 + 0.004
		5 Hz – 10 Hz	0.35 + 0.03	0.35 + 0.04	0.35 + 0.04	0.035 + 0.004
		10 Hz – 20 kHz	0.04 + 0.03	0.05 + 0.04	0.06 + 0.04	0.005 + 0.004
		20 kHz – 50 kHz	0.10 + 0.05	0.11 + 0.05	0.12 + 0.05	0.011 + 0.005
		50 kHz – 100 kHz	0.55 + 0.08	0.60 + 0.08	0.60 + 0.08	0.060 + 0.008
		100 kHz – 300 kHz [6]	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	0.20 + 0.02
	1.000000 V to 750.000 V	3 Hz – 5 Hz	1.00 + 0.02	1.00 + 0.03	1.00 + 0.03	0.100 + 0.003
		5 Hz – 10 Hz	0.35 + 0.02	0.35 + 0.03	0.35 + 0.03	0.035 + 0.003
		10 Hz – 20 kHz	0.04 + 0.02	0.05 + 0.03	0.06 + 0.03	0.005 + 0.003
		20 kHz – 50 kHz	0.10 + 0.04	0.11 + 0.05	0.12 + 0.05	0.011 + 0.005
		50 kHz – 100 kHz [5]	0.55 + 0.08	0.60 + 0.08	0.60 + 0.08	0.060 + 0.008
		100 kHz – 300 kHz [6]	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	0.20 + 0.02
True RMS AC Current [4]	1.000000 A	3 Hz – 5 Hz	1.00 + 0.04	1.00 + 0.04	1.00 + 0.04	0.100 + 0.006
		5 Hz – 10 Hz	0.30 + 0.04	0.30 + 0.04	0.30 + 0.04	0.035 + 0.006
		10 Hz – 5 kHz	0.10 + 0.04	0.10 + 0.04	0.10 + 0.04	0.015 + 0.006
	3.00000 A	3 Hz – 5 Hz	1.10 + 0.06	1.10 + 0.06	1.10 + 0.06	0.100 + 0.006
		5 Hz – 10 Hz	0.35 + 0.06	0.35 + 0.06	0.35 + 0.06	0.035 + 0.006
		10 Hz – 5 kHz	0.15 + 0.06	0.15 + 0.06	0.15 + 0.06	0.015 + 0.006

Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

- Se il segnale da misurare è piccolo allora l'aumento di temperatura può non essere rilevabile: si utilizza un amplificatore di ingresso a larga banda (per poter misurare più armoniche possibili del segnale di ingresso)

- L'amplificatore inserito deve avere una dinamica di ingresso molto ampia in modo da non distorcere i segnali che presentano un basso valore efficace ed un elevato valore di picco (segnali impulsivi): in genere si introduce, nel budget delle incertezze, un termine correttivo dovuto al fattore di cresta CF definito come $CF=V_p/V_{eff}$

Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

- Molto spesso i voltmetri a vero valore efficace presentano un condensatore in serie al circuito di ingresso che elimina la componente continua del segnale da misurare

- Se si vuol conoscere il valore della componente continua si utilizza la modalità di misura in DC

- Per esempio nel 34401 la più piccola frequenza misurabile in AC è di 3Hz

Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

Esempio: Incertezza voltmetro Agilent 34401 nella misura in alternata

Additional Low Frequency Errors (% of reading)

Frequency	AC Filter Slow	AC Filter Medium	AC Filter Fast
10 Hz – 20 Hz	0	0.74	—
20 Hz – 40 Hz	0	0.22	—
40 Hz – 100 Hz	0	0.06	0.73
100 Hz – 200 Hz	0	0.01	0.22
200 Hz – 1 kHz	0	0	0.18
> 1 kHz	0	0	0

Additional Crest Factor Errors (non-sinewave) [7]

Crest Factor	Error (% of reading)
1 – 2	0.05%
2 – 3	0.15%
3 – 4	0.30%
4 – 5	0.40%

Sinewave Transfer Accuracy (typical)

Frequency	Error (% of range)
10 Hz – 50 kHz	0.002%
50 kHz – 300 kHz	0.005%

Conditions:
- Sinewave input.
- Within 10 minutes and ± 0.5°C.
- Within ±10% of initial voltage and ±1% of initial frequency.
- Following a 2-hour warm-up.
- Fixed range between 10% and 100% of full scale (and <120 V).
- Using 6½ digit resolution.
- Measurements are made using accepted metrology practices.

Measuring Characteristics

Operating Characteristics [9]

Fattore di cresta: rapporto tra valore di picco e valore efficace

Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

Esempio: voltmetro Agilent 34401 (tarato negli ultimi 90 giorni) nella **misura in continua**

V_L=0.71321456 V

Trovare l'incertezza e rappresentare il risultato di misura con un adeguato numero di cifre (scelto V_{FS}=1V)

$$\delta V = \frac{0.0030}{100} V_L + \frac{0.0007}{100} V_{FS} = 21\ \mu V + 7\ \mu V = 28\ \mu V;$$

$$V_L = (0.713214 \pm 0.000028) = 0.713214 \cdot (1 \pm 39 \cdot 10^{-6})\ V$$

■ DC Characteristics

Accuracy Specifications ± (% of reading + % of range) [1]

Function	Range [3]	Test Current or Burden Voltage	24 Hour [2] 23°C ± 1°C	90 Day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient /°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
DC Voltage	100.0000 mV		0.0030 + 0.0030	0.0040 + 0.0035	0.0050 + 0.0035	0.0005 + 0.0005
	1.000000 V		0.0020 + 0.0006	0.0030 + 0.0007	0.0040 + 0.0007	0.0005 + 0.0001
	10.00000 V		0.0015 + 0.0004	0.0020 + 0.0005	0.0035 + 0.0005	0.0005 + 0.0001
	100.0000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0006	0.0045 + 0.0006	0.0005 + 0.0001
	1000.000 V		0.0020 + 0.0006	0.0035 + 0.0010	0.0045 + 0.0010	0.0005 + 0.0001

Voltmetri numerici per la misura del valore efficace

Esempio: voltmetro Agilent 34401 (tarato negli ultimi 90 giorni) nella **misura in alternata**

V_L=91.321456mV con segnale sinusoidale @500Hz

Trovare l'incertezza e rappresentare il risultato di misura con un adeguato numero di cifre (scelto V_{FS}=100mV)

$$\delta V = \frac{0.05}{100} V_L + \frac{0.04}{100} V_{FS} = 45\mu V + 40\mu V = 85\mu V;\ V_L = (91.321 \pm 0.085) mV = 91.321 \cdot (1 \pm 93 \cdot 10^{-5})\ mV$$

■ AC Characteristics

Accuracy Specifications ± (% of reading + % of range) [1]

Function	Range [3]	Frequency	24 Hour [2] 23°C ± 1°C	90 Day 23°C ± 5°C	1 Year 23°C ± 5°C	Temperature Coefficient/°C 0°C – 18°C 28°C – 55°C
True RMS AC Voltage [4]	100.0000 mV	3 Hz – 5 Hz	1.00 + 0.03	1.00 + 0.04	1.00 + 0.04	0.100 + 0.004
		5 Hz – 10 Hz	0.35 + 0.03	0.35 + 0.04	0.35 + 0.04	0.035 + 0.004
		10 Hz – 20 kHz	0.04 + 0.03	0.05 + 0.04	0.06 + 0.04	0.005 + 0.004
		20 kHz – 50 kHz	0.10 + 0.05	0.11 + 0.05	0.12 + 0.05	0.011 + 0.005
		50 kHz – 100 kHz	0.55 + 0.08	0.60 + 0.08	0.60 + 0.08	0.060 + 0.008
		100 kHz – 300 kHz [6]	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	4.00 + 0.50	0.20 + 0.02

Esercizio

Un segnale periodico è composto, per un semiperiodo, da una forma d'onda triangolare, mentre, nell'altro semiperiodo, da una forma d'onda sinusoidale (V_p=5 V, valore minimo 0 V, v. figura) è misurato per mezzo di un voltmetro a vero valore efficace **senza condensatore in serie**.

- Determinate il valore atteso di lettura.

- Il manuale del voltmetro riporta la seguente tabella delle incertezze

  V_{fs}=1V ±(0.02%Vl+0.005%Vfs)

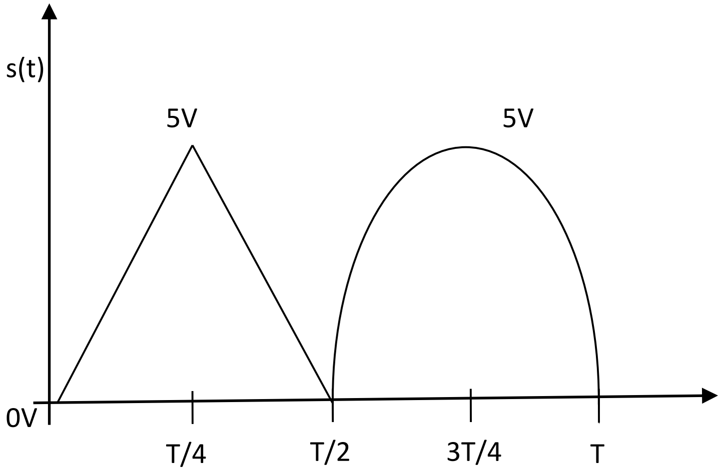
  V_{fs}=5V ±(0.03%Vl+0.005%Vfs)

  V_{fs}=10V ±(0.04%Vl+0.005%Vfs)

  indicate il valore del fondo scala scelto

  e l'incertezza assoluta di misura.

- Determinate infine il valor medio del segnale



Esercizio

- Un segnale ad onda quadra ha un duty cycle del 20%, valore massimo V_p=5V, valore minimo -5V. Determinare la lettura attesa e l'incertezza se si utilizza un voltmetro a vero valore efficace **con condensatore in serie**. Il voltmetro dispone di un unico fondo scala di 10 V e l'incertezza è rappresentata dalla seguente espressione $\delta V = \pm(0.05\%\, V_L + 0.002\%\, V_{FS})$