Teoria dei Segnali

Esercitazione 4

Sistemi lineari e trasformata di Fourier

Esercizio 1

Il segnale gaussiano $x(t)$

$$x(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2}$$

passa attraverso il filtro passabasso gaussiano con risposta all'impulso:

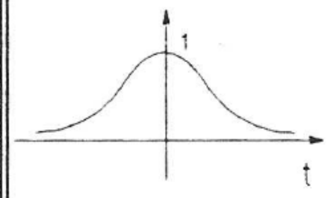
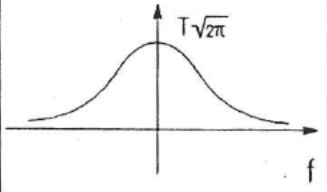
$$h(t) = e^{-\left(\frac{t}{2T}-1\right)^2}$$

Si calcoli l'espressione del segnale $y(t)$ all'uscita del filtro.

Soluzione Esercizio 1

- Conviene lavorare nel dominio della frequenza:

$$x(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2} = e^{-\frac{t^2}{T^2}}$$

28		$e^{-t^2/2S^2}$	$S\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2 f^2 S^2}$	

Sostituisco T con S per evitare confusione con il T dell'esercizio

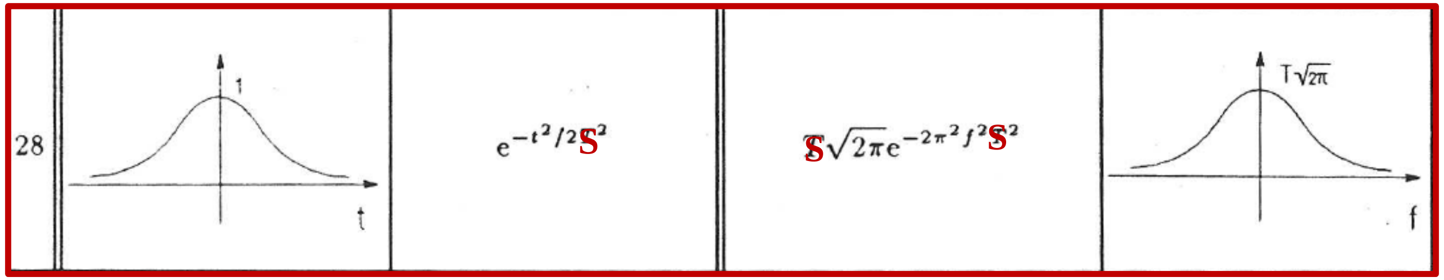
- Applicando il risultato delle tavole con $2S^2=T^2$, ossia $S = \frac{T}{\sqrt{2}}$:

$$X(f) = \frac{T}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2 f^2 \frac{T^2}{2}} = T\sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2 T^2}$$

Soluzione Esercizio 1

Ritardo di 2T

$$h(t) = e^{-\left(\frac{t}{2T}-1\right)^2} = e^{-\frac{(t-2T)^2}{4T^2}}$$



- Applicando il risultato delle tavole con $2S^2=4T^2$, ossia $S = \sqrt{2}T$:

$$H(f) = \sqrt{2}T\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2 f^2 2T^2} e^{-j2\pi f\, 2T} = 2T\sqrt{\pi}e^{-4\pi^2 f^2 T^2} e^{-j4\pi fT}$$

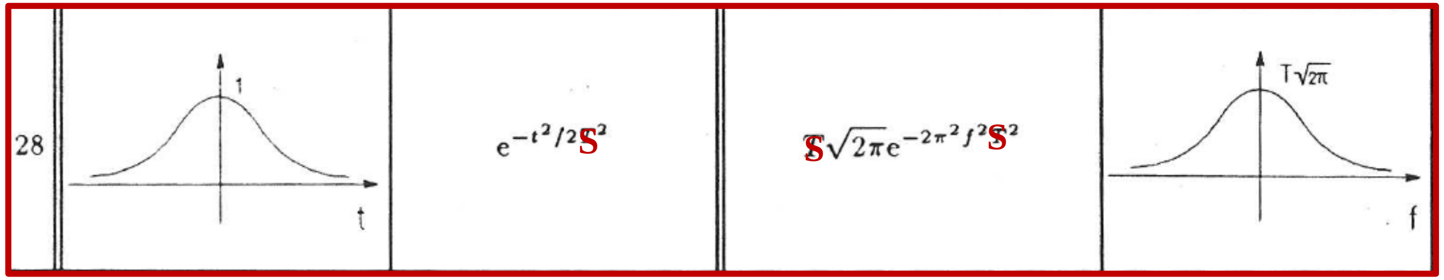
Ritardo di 2T

Soluzione Esercizio 1

- La trasformata di Fourier del segnale in uscita dal filtro vale:

$$Y(f) = X(f)H(f) = T\sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2 T^2} \cdot 2T\sqrt{\pi}e^{-4\pi^2 f^2 T^2} e^{-j4\pi fT} =$$

$$= 2\pi T^2 e^{-5\pi^2 f^2 T^2} e^{-j4\pi fT}$$



- Applicando il risultato delle tavole con $2S^2=5T^2$, ossia $S = T\sqrt{\frac{5}{2}}$:

$$y(t) = \frac{2\pi T^2}{T\sqrt{\frac{5}{2}}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-2T)^2}{2T^2\frac{5}{2}}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{5}}Te^{-\frac{(t-2T)^2}{5T^2}}$$

Esercizio 2

Il segnale $x(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$ viene trasmesso su un canale LTI che ha funzione di trasferimento:

$$H(f) = \begin{cases} H_0 e^{-j2\pi f} & |f| < 2 \\ H_0 e^{-(f-2)^2 - j2\pi f} & f > 2 \\ H_0 e^{-(f+2)^2 - j2\pi f} & f < -2 \end{cases}$$

Il canale distorce il segnale?

Soluzione Esercizio 2

$$X(f) = p_4(f)$$

$$x(t) = \frac{\sin(4\pi t)}{\pi t} = 4\,\mathrm{sinc}(4t)$$

$$H(f) = \begin{cases} H_0 e^{-j2\pi f} & |f| < 2 \\ H_0 e^{-(f-2)^2 - j2\pi f} & f > 2 \\ H_0 e^{-(f+2)^2 - j2\pi f} & f < -2 \end{cases}$$

$$Y(f) = p_4(f) H_0 e^{-j2\pi f}$$

$$y(t) = H_0 x(t-1) \Rightarrow$$

- Il segnale in ingresso è ritardato e amplificato/attenuato
- Il canale non è distorcente

Esercizio 3

Il segnale $x(t) = \cos(20\pi t)$ viene posto all'ingresso di un sistema lineare tempo invariante avente risposta impulsiva $h(t) = \mathrm{tri}(\frac{20(t-1)}{3})$. Determinare l'uscita $y(t)$ del sistema.

Soluzione Esercizio 3

$$x(t) = \cos(20\pi t) = \cos(2\pi f_0 t) \qquad f_0 = 10$$

$$h(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{20(t-1)}{3}\right) = \mathrm{tri}\left(\frac{t-1}{T}\right) \qquad T = \frac{3}{20}$$

- Per i sistemi <u>reali</u>, la risposta a $x(t)$ è:

$$\boxed{y(t) = |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \arg\{H(f_0)\})}$$

$$H(f) = T\,\mathrm{sinc}^2(fT)e^{-j2\pi f}$$

$$H(f_0) = T\,\mathrm{sinc}^2(f_0 T)e^{-j2\pi f_0} = \frac{3}{20}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3}{2}\right)e^{-j20\pi} = \frac{3}{20}\frac{\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2} = \frac{1}{15\pi^2}$$

$$y(t) = \frac{1}{15\pi^2}\cos(20\pi t)$$

Soluzione Esercizio 3

- Soluzione alternativa:

$$x(t) = \cos(20\pi t) = \cos(2\pi f_0 t) \qquad f_0 = 10$$

$$h(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{20(t-1)}{3}\right) = \mathrm{tri}\left(\frac{t-1}{T}\right) \qquad T = \frac{3}{20}$$

  - Nel dominio della frequenza:

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

$$X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))H(f) =$$

$$= \frac{1}{2}(\delta(f - f_0)H(f_0) + \delta(f + f_0)H(-f_0))$$

Soluzione Esercizio 3

$$h(t) = \mathrm{tri}\left(\frac{20(t-1)}{3}\right) = \mathrm{tri}\left(\frac{t-1}{T}\right) \qquad T = \frac{3}{20} \Rightarrow H(f) = T\,\mathrm{sinc}^2(fT)e^{-j2\pi f}$$

$$H(f_0) = T\,\mathrm{sinc}^2(f_0T)e^{-j2\pi f_0} \qquad f_0T = 10\cdot\frac{3}{20} = \frac{3}{2}$$

$$H(f_0) = \frac{3}{20}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{3}{2}\right)e^{-j20\pi} = \frac{3}{20}\frac{\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{\left(\frac{3}{2}\pi\right)^2} = \frac{1}{15\pi^2}$$

$$Y(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0)H(f_0) + \delta(f+f_0)H(-f_0)\right) = \frac{1}{15\pi^2}\frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{15\pi^2}\cos(20\pi t)$$

Esercizio 4

Si consideri il sistema della Figura 1, dove il blocco etichettato con T indica un ritardatore, ed a è una constante positiva.

1. Dire se il sistema è lineare e tempo invariante
2. Porre all'ingresso un segnale sinusoidale $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, dove $f_0 = 10Hz$, e considerare il caso $T = 50ms$. In queste condizioni, trovare per quale valore di a il segnale sinusoidale in uscita è attenuato di un fattore $1/\sqrt{2}$.
3. Nelle stesse condizioni del punto 2, calcolare la differenza di fase tra i segnali d'ingresso $x(t)$ e di uscita $y(t)$
4. Verificare, nel dominio del tempo, se il sistema è stabile nel caso di $T = 0$

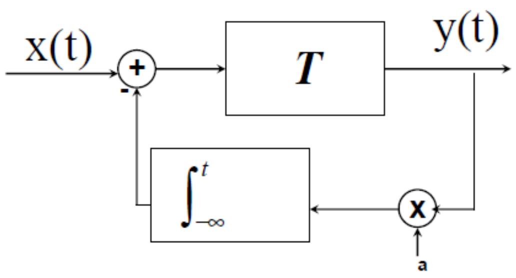
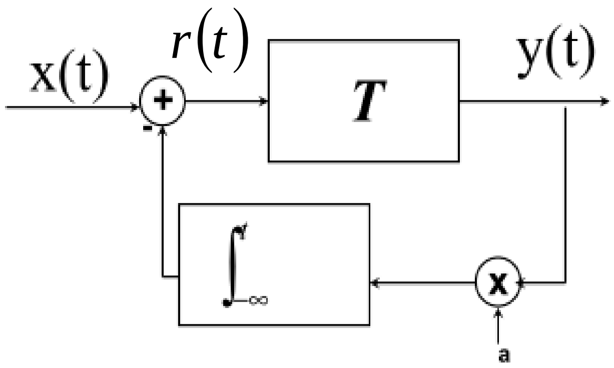


Figura 1: Esercizio 4.

Soluzione Esercizio 4.1



$$r(t) = x(t) - a\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau$$

$$y(t) = r(t-T) = x(t-T) - a\int_{-\infty}^{t-T} y(\tau)d\tau$$

- Il sistema è lineare in quanto composto da tutti blocchi lineari
- Il sistema è tempo invariante in quanto composto da tutti blocchi tempo-invarianti

Soluzione Esercizio 4

- Calcolo della funzione di trasferimento

$$y(t) = x(t-T) - a\int_{-\infty}^{t-T} y(\tau)\,d\tau$$

- Utilizzo la proprietà di integrazione: $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \Rightarrow \cancel{X(0)\delta(f)} + \frac{X(f)}{j2\pi f}$
  - Il termine con la funzione delta è nullo se X(0)=0 (come accade per i segnali sinusoidali)

$$Y(f) = X(f)e^{-j2\pi fT} - a\frac{Y(f)}{j2\pi f}e^{-j2\pi fT}$$

$$j2\pi f\,Y(f) + a\,Y(f)e^{-j2\pi fT} = j2\pi f\,X(f)e^{-j2\pi fT}$$

$$Y(f) = \frac{j2\pi f e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f + a\,e^{-j2\pi fT}}X(f)$$

Soluzione Esercizio 4.2

$$x(t)=\sin(2\pi f_0 t)$$

$$f_0 = 10 \text{ Hz}$$
$$\text{T} = 50\,\text{ms}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t)=|H(f_0)|\left[\sin\left(2\pi f_0 t+\arg\{H(f_0)\}\right)\right]$$

$$H(f)=\frac{j2\pi f e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f + a\,e^{-j2\pi fT}} \qquad H(f_0)=\frac{j2\pi f_0 e^{-j2\pi f_0 T}}{j2\pi f_0 + a\,e^{-j2\pi f_0 T}}$$

$$f_0 T = 10\cdot 0.05 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad H(f_0)=\frac{j2\pi f_0 e^{-j\pi}}{j2\pi f_0 + a\,e^{-j\pi}} = \frac{-j2\pi f_0}{j2\pi f_0 - a}$$

$$|H(f_0)| = \frac{2\pi f_0}{\sqrt{(2\pi f_0)^2 + a^2}} \qquad \boxed{|H(f_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{se} \quad a = 2\pi f_0 = 20\pi \ [\text{Hz}]}$$

Soluzione Esercizio 4.3

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

$$f_0 = 10 \text{ Hz}$$

$$\mathrm{T} = 50\,\mathrm{ms}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = |H(f_0)| [\sin(2\pi f_0 t + \arg\{H(f_0)\})]$$

$$H(f_0) = \left. \frac{-j2\pi f_0}{j2\pi f_0 - a} \right|_{a=2\pi f_0} = \frac{-j}{j-1}$$

$$\arg\{H(f_0)\} = \arg\left\{\frac{-j}{j-1}\right\} = \arg\{-j\} - \arg\{j-1\} = \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$$

$\Rightarrow$ Sfasamento di $\frac{3}{4}\pi$

Soluzione Esercizio 4.4

- Condizione di stabilità: $$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < +\infty$$

$$H(f)\big|_{T=0} = \frac{j2\pi f}{j2\pi f + a} = 1 - \frac{a}{j2\pi f + a}$$

$$\Big\Downarrow \; F^{-1}$$

$$h(t) = \delta(t) - ae^{-at}u(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt + a\int_{0}^{+\infty} e^{-at}dt = 1 - e^{-at}\Big|_{0}^{+\infty} = 2 < +\infty$$

Esercizio 5

Dato il sistema rappresentato in Figura 2, se ne calcoli la risposta impulsiva e la risposta in frequenza. Determinare inoltre il segnale $y(t)$ in uscita dal sistema, quando al suo ingresso viene posto il segnale $x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$, con $f_0 = \frac{1}{2T}$ e $f_0 = \frac{1}{T}$.

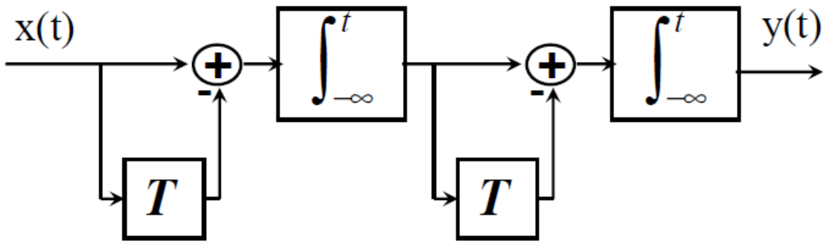
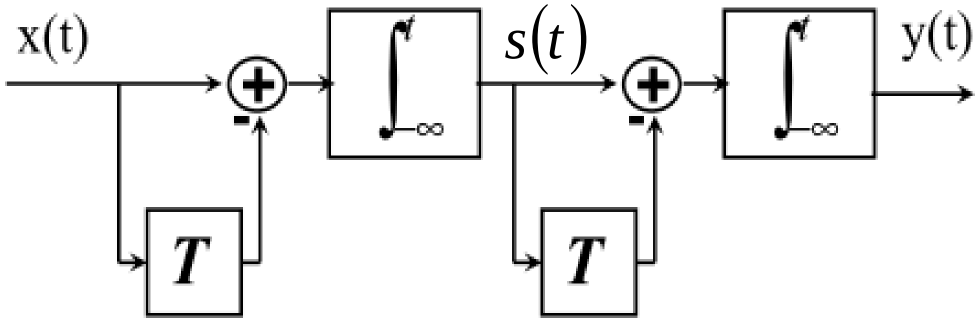


Figura 2: Esercizio 5.

Soluzione Esercizio 5



$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[s(\tau)-s(\tau-T)\right]d\tau$$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[x(\tau)-x(\tau-T)\right]d\tau$$

$$S(f)=\frac{X(f)}{j2\pi f}-\frac{X(f)}{j2\pi f}e^{-j2\pi fT}$$

$$j2\pi f\,S(f)=X(f)-X(f)e^{-j2\pi fT} \quad \Rightarrow \quad S(f)=X(f)\frac{1-e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}$$

Soluzione Esercizio 5

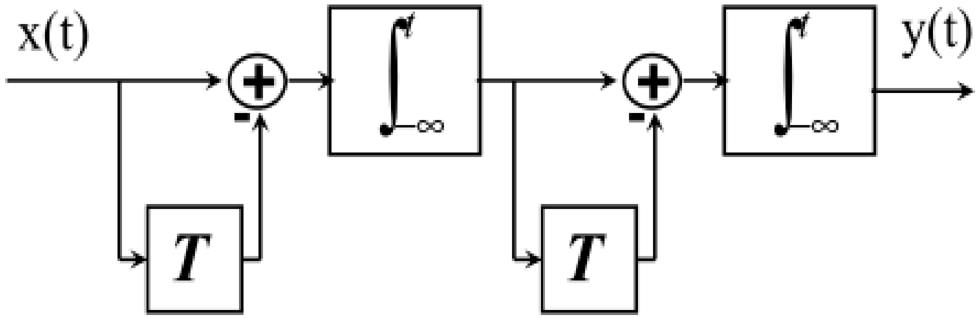
- La funzione di trasferimento vale:

$$H(f)=\frac{1-e^{-j2\pi fT}}{j2\pi f}=\frac{e^{-j\pi fT}}{\pi f}\frac{e^{+j\pi fT}-e^{-j\pi fT}}{2j}=e^{-j\pi fT}T\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

- La risposta all'impulso si ottiene come trasformata di Fourier inversa di H(f):

$$h(t)=p_T\left(t-\frac{T}{2}\right)$$

Soluzione Esercizio 5



$$H_{tot}(f) = H(f) \cdot H(f) = T^2 \,\mathrm{sinc}^2(f\,T)\,e^{-j2\pi fT}$$

$$h_{tot}(t) = T\,\mathrm{tri}\left(\frac{t-T}{T}\right)$$

Soluzione Esercizio 5

- Calcolo l'uscita dal sistema quando all'ingresso c'è il segnale:

$$x(t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$$

$$y(t) = |H_{tot}(f_0)| 2 [\cos(2\pi f_0 t + \arg\{H_{tot}(f_0)\})]$$

$$H_{tot}(f_0) = T^2 \operatorname{sinc}^2(f_0 T) e^{-j2\pi f_0 T} = \begin{cases} T^2 \dfrac{\sin^2(\pi/2)}{(\pi/2)^2} e^{-j\pi} = -\dfrac{4T^2}{\pi^2} & \text{per} \quad f_0 = \dfrac{1}{2T} \\ T^2 \dfrac{\sin^2(\pi)}{(\pi)^2} e^{-j2\pi} = 0 & \text{per} \quad f_0 = \dfrac{1}{T} \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{8T^2}{\pi^2}\cos(2\pi f_0 t) \quad \text{per} \quad f_0 = \frac{1}{2T}, \quad y(t) = 0 \quad \text{per} \quad f_0 = \frac{1}{T}}$$