Teoria dei Segnali

Esercitazione 6

Funzioni di correlazione

Spettro di energia e di potenza

Segnali a energia finita

Funzione di autocorrelazione

$$\boxed{R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(t)\,dt}$$

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)\,dt = E(x)$$

Spettro di energia

$$\boxed{S_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = |X(f)|^2}$$

$$E(x) = \int S_x(f)\,df$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t)$$

$$S_x(f) \quad \Longrightarrow \quad S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

$$\boxed{R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)\,dt}$$

Funzione di mutua correlazione

Segnali periodici

- Per un segnale periodico la potenza è finita

$$P(x) = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt$$

$$x(t) = \sum_i \mu_i \, \mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{T} it}, \quad \mu_i = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{T} it} \, dt$$

$$P(x) = \sum_i |\mu_i|^2$$

- Lo spettro di potenza e la funzione di autocorrelazione valgono

$$\boxed{G_x(f) = \sum_i |\mu_i|^2 \delta(f - i/T)} \qquad \boxed{R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau) x^*(t) dt}$$

Segnali a potenza media finita

Funzione di autocorrelazione

$$\boxed{\Phi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)x^*(t)dt}$$

$$\Phi_x(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t)dt = P(x)$$

Spettro di potenza

$$\boxed{G_x(f) = F\{\Phi_x(\tau)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2}$$

$$P(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t)$$

$$G_x(f) \quad \Longrightarrow \quad G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

Esercizio 1

E' dato un segnale $x(t)$ ad energia finita. Indicare quale delle seguenti $R_x(\tau)$ non può rappresentare la sua funzione di autocorrelazione:

a) $R_x(\tau) = \mathrm{sinc}(\tau/T)$

b) $R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$

c) $R_x(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T}$ per $|\tau| < T$

d) $R_x(\tau) = \cos(2\pi\tau/T)p_{T/2}(\tau)$

Soluzione Esercizio 1

- Proprietà da soddisfare:
  - $R_x(\tau)$ pari
  - $R_x(\tau)$ con massimo nell'origine
  - Valori di $S_x(f)$ maggiori o uguali a zero

$$R_x(\tau)=\mathrm{sinc}\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

- $R_x(\tau)$ è pari e ha il massimo nell'origine
- Calcolo lo spettro di energia:

$$S_x(f)=F\{R_x(\tau)\}=Tp_{\frac{1}{T}}(f)$$

Soluzione Esercizio 1

$$R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$$

- $R_x(\tau)$ è pari e ha il massimo nell'origine
- Calcolo lo spettro di energia:

$$S_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = \frac{2}{1 + 4\pi^2 f^2}$$

Soluzione Esercizio 1

$$R_x(\tau) = 1 - \frac{|\tau|}{T} \quad \text{per} \quad |\tau| < T \quad \Rightarrow R_x(\tau) = \text{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

- $R_x(\tau)$ è pari e ha il massimo nell'origine
- Calcolo lo spettro di energia:

$$S_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = T\,\text{sinc}^2(fT)$$

Soluzione Esercizio 1

$$R_x(\tau) = \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right) p_{T/2}(\tau)$$

- $R_x(\tau)$ è pari e ha il massimo nell'origine
- Calcolo lo spettro di energia:

$$S_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = \frac{T}{2}\operatorname{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right) * \frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{T}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{T}\right)\right] =$$

$$= \frac{T}{4}\left[\operatorname{sinc}\left(\left(f-\frac{1}{T}\right)\frac{T}{2}\right)+\operatorname{sinc}\left(\left(f+\frac{1}{T}\right)\frac{T}{2}\right)\right] = \frac{T}{4}\left[\operatorname{sinc}\left(\left(f\frac{T}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)+\operatorname{sinc}\left(\left(f\frac{T}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{T}{4}\frac{\sin\left(\pi f\frac{T}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\left(f\frac{T}{2}-\frac{1}{2}\right)} + \frac{T}{4}\frac{\sin\left(\pi f\frac{T}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi\left(f\frac{T}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{T}{2}\frac{-\cos\left(\pi f\frac{T}{2}\right)}{\pi(fT-1)} + \frac{T}{2}\frac{\cos\left(\pi f\frac{T}{2}\right)}{\pi(fT+1)} = \frac{T}{\pi}\frac{\cos\left(\pi f\frac{T}{2}\right)}{1-(fT)^2}$$

- $S_x(f)$ può assumere valori negativi !!!

Esercizio 2

Dato il segnale:

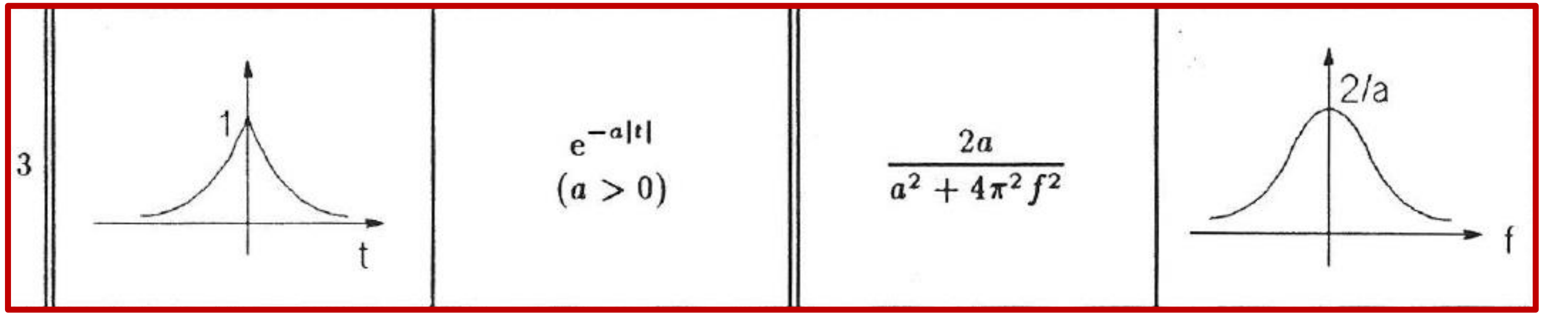
$$x(t) = \frac{1}{K_1} \mathrm{e}^{-\left|\frac{t-t_0}{K_2}\right|}$$

1. Calcolare lo spettro di energia $S_x(f)$.

2. Calcolare la banda a -10dB del segnale $x(t)$, definita come quella frequenza B_{10dB} tale per cui $S_x(B_{10dB}) = \frac{1}{10} S^x_{max}$, dove S_x^{max} è il valore massimo assunto da $S_x(f)$.

Soluzione Esercizio 2

$$x(t) = \frac{1}{K_1} e^{-\left|\frac{t-t_0}{K_2}\right|} = y(t-t_0) \quad \text{con} \quad y(t) = \frac{1}{K_1} e^{-\left|\frac{t_0}{K_2}\right|}$$



$$Y(f) = \frac{1}{K_1} \frac{2/K_2}{\frac{1}{K_2^{\,2}} + 4\pi^2 f^2}$$

$$X(f) = Y(f) e^{-j2\pi f t_0} = \frac{1}{K_1} \frac{2K_2}{1 + 4\pi^2 K_2^2 f^2} e^{-j2\pi f t_0}$$

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \left(\frac{2K_2}{K_1}\right)^2 \frac{1}{\left(1 + 4\pi^2 K_2^2 f^2\right)^2}$$

Soluzione Esercizio 2

- B_{10dB} risolve l'equazione:

$$S_x\left(B_{10dB}\right)=\frac{1}{10}S_{\max}$$

$$\left(\frac{2K_2}{K_1}\right)^2\frac{1}{\left(1+4\pi^2K_2^2B_{10dB}^2\right)^2}=\frac{1}{10}\left(\frac{2K_2}{K_1}\right)^2$$

$$\left(1+4\pi^2K_2^2B_{10dB}^2\right)^2=10$$

$$1+4\pi^2K_2^2B_{10dB}^2=\sqrt{10}$$

$$B_{10dB}^2=\frac{\sqrt{10}-1}{4\pi^2K_2^2}$$

$$B_{10dB}=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{10}-1\right)}}{2\pi K_2}$$

Esercizio 3

Dato il segnale ad energia finita $x(t)$, di cui si conosca la funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$, determinare la funzione di autocorrelazione del segnale $y(t)$ che si ottiene trasformando $x(t)$ come indicato in figura 1, dove il blocco etichettato con T è un ritardatore ideale, e l'altro blocco è un derivatore.

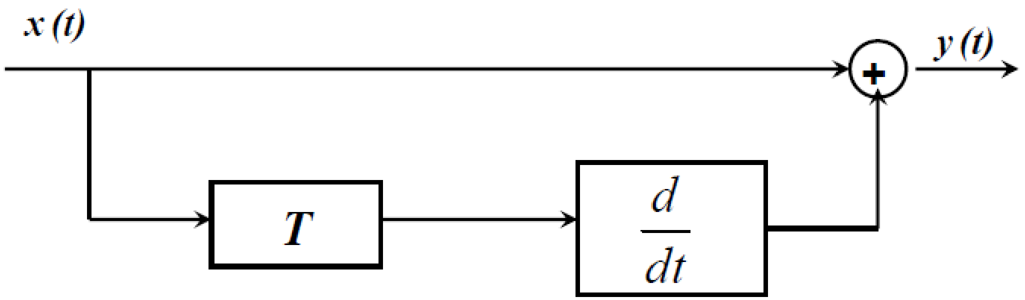
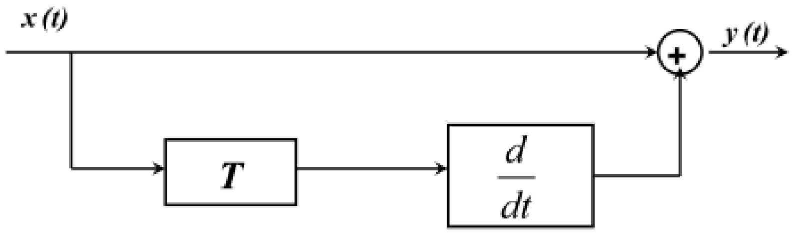


Figura 1: Esercizio 3.

Soluzione Esercizio 3

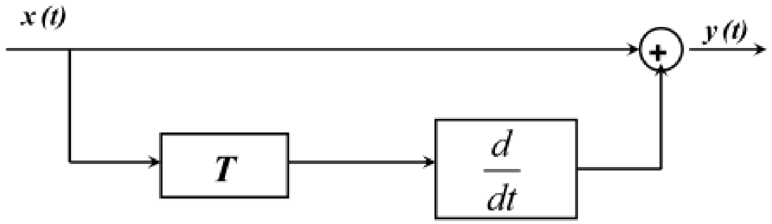


$$y(t) = x(t) + \frac{d}{dt} x(t - T)$$

$$Y(f) = X(f) + j2\pi f\, X(f) e^{-j2\pi fT} = X(f)\left(1 + j2\pi f\, e^{-j2\pi fT}\right)$$

$$\begin{aligned}
S_y(f) &= S_x(f)\left|1 + j2\pi f\, e^{-j2\pi fT}\right|^2 = \\
&= S_x(f)\left[1 + j2\pi f\, e^{-j2\pi fT}\right]\left[1 - j2\pi f\, e^{+j2\pi fT}\right] = \\
&= S_x(f)\left[1 - (j2\pi f)^2 + j2\pi f\, e^{-j2\pi fT} - j2\pi f\, e^{+j2\pi fT}\right] = \\
&= S_x(f)\left[1 + 4\pi^2 f^2 - j2\pi f\left(e^{+j2\pi fT} - e^{-j2\pi fT}\right)\right] = \\
&= S_x(f)\left[1 + 4\pi^2 f^2 + 4\pi f \sin(2\pi fT)\right]
\end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 3



$$y(t) = x(t) + \frac{d}{dt} x(t-T)$$

$$S_y(f) = S_x(f)\left[1 - (j2\pi f)^2 + j2\pi f\, e^{-j2\pi fT} - j2\pi f\, e^{+j2\pi fT}\right] =$$

$$= S_x(f) - (j2\pi f)^2 S_x(f) + j2\pi f\, e^{-j2\pi fT} S_x(f) - j2\pi f\, e^{+j2\pi fT} S_x(f)$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) - R_x''(\tau) + R_x'(\tau - T) - R_x'(\tau + T)$$

Esercizio 4

Un impulso ideale è applicato in ingresso al sistema della figura 2:

1. Dire se il sistema racchiuso nel riquadro tratteggiato è lineare e/o invariante.
2. Calcolare la potenza media e l'energia di $y_1(t)$ e $y_2(t)$.
3. Calcolare gli spettri di energia o di potenza - coerentemente con il tipo di segnale di $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

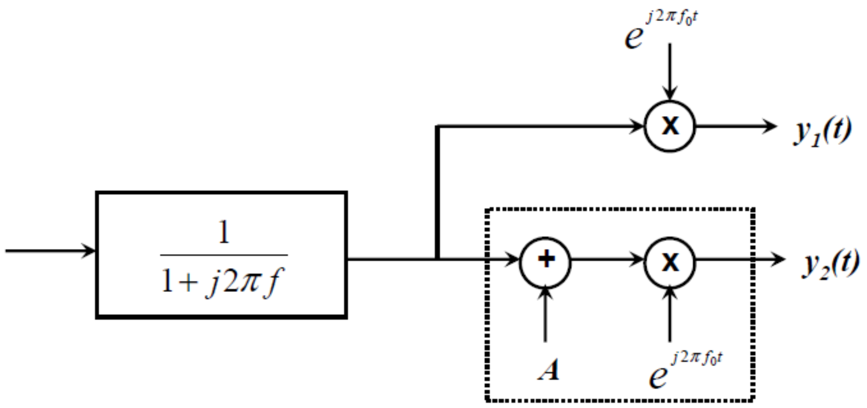
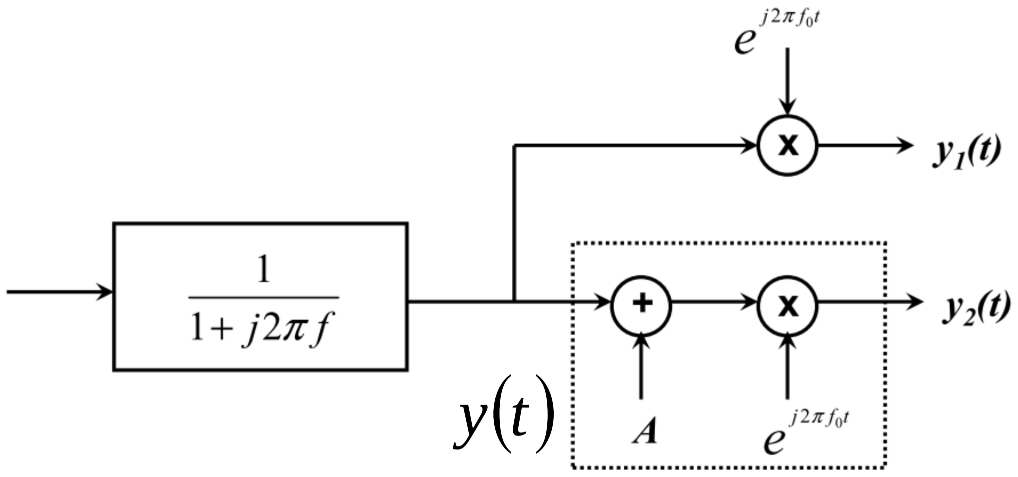


Figura 2: Esercizio 4.

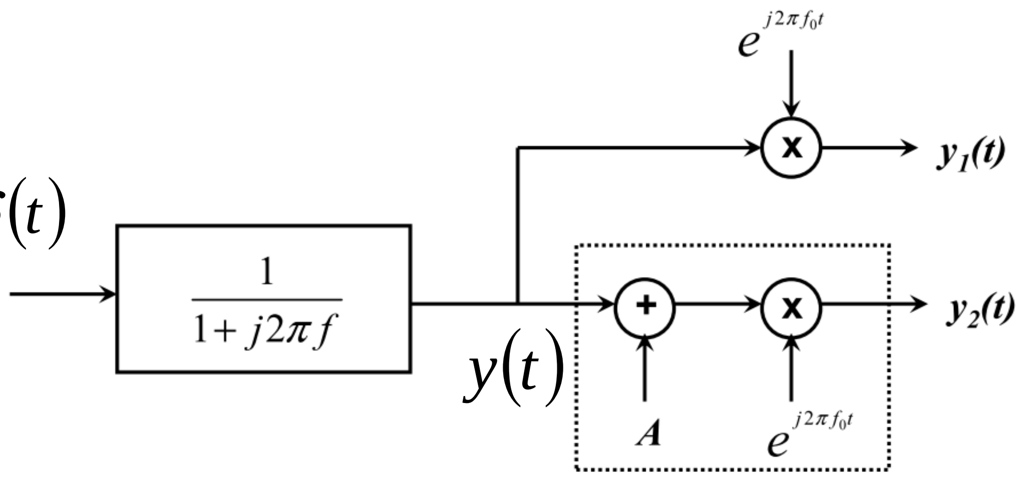
Soluzione Esercizio 4.1



- Il sistema nel riquadro non è né lineare (somma per una costante) né tempo-invariante (funzione dipendente dal tempo).

Soluzione Esercizio 4.2

$x(t) = \delta(t)$



$$X(f) = 1$$

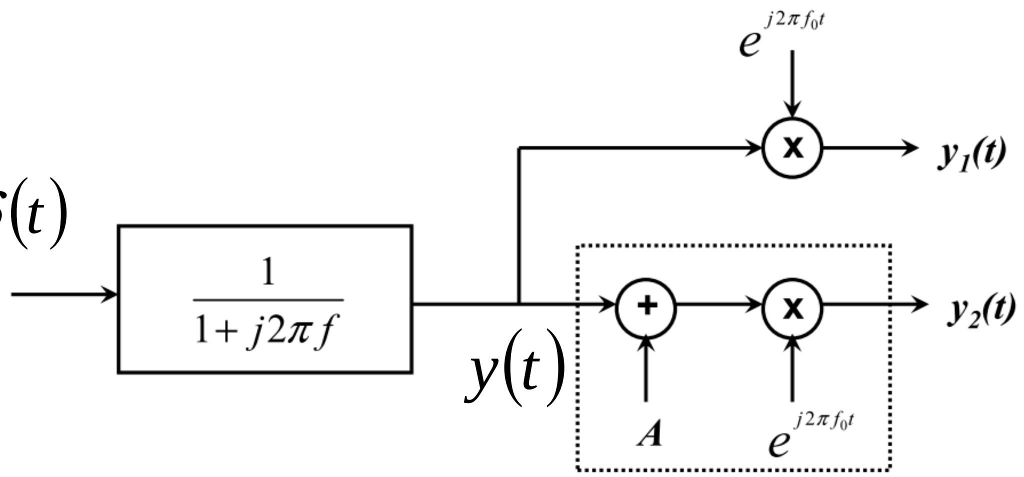
$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f} \Rightarrow y(t) = e^{-t}u(t)$$

$$y_1(t) = y(t)e^{j2\pi f_0 t} \qquad E(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y_1(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$$

$$P(y_1) = 0$$

Soluzione Esercizio 4.2

$$x(t)=\delta(t)$$



$$y(t)=e^{-t}u(t)$$

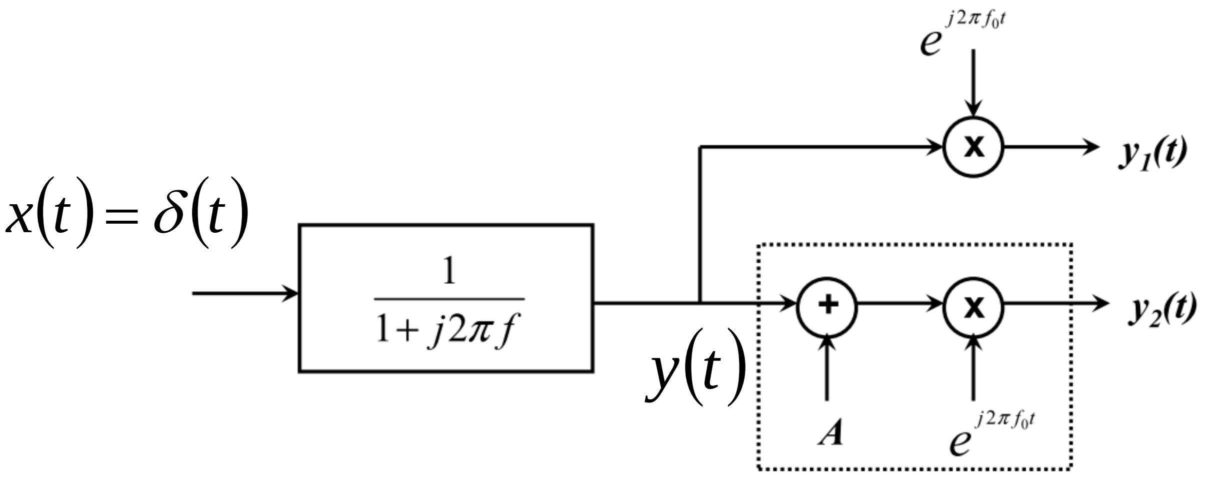
Ipotesi: A reale

$$y_2(t)=\left(A+y(t)\right)e^{j2\pi f_0 t}$$

$$E(y_2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|y_2(t)\right|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|A+y(t)\right|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(A^2+2Ay(t)+y^2(t)\right)dt=\infty$$

$$P(y_2)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a}\left(A^2+2Ay(t)+y^2(t)\right)dt=A^2+P(y)+\lim_{a\to\infty}\frac{2A}{2a}\int_{0}^{+a}e^{-t}dt=A^2$$

Soluzione Esercizio 4.3



$$y_1(t)=y(t)e^{j2\pi f_0 t}$$

$$Y(f)=X(f)H(f)=\frac{1}{1+j2\pi f}$$

$$Y_1(f)=Y(f-f_0)$$

$$S_{y_1}(f)=|Y_1(f)|^2=|Y(f-f_0)|^2=\frac{1}{1+4\pi^2(f-f_0)^2}$$

Soluzione Esercizio 4.3

$$y_2(t) = (A + y(t))e^{j2\pi f_0 t} \qquad y(t) = e^{-t}u(t)$$

$$\Phi_{y_2}(\tau) = \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} y_2(t+\tau)y_2^*(t)dt =$$

$$= \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}(A + y(t+\tau))e^{j2\pi f_0(t+\tau)}(A + y(t))e^{-j2\pi f_0 t}dt =$$

$$= e^{j2\pi f_0 \tau}\left[\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}A^2 dt + \lim_{a\to\infty}\frac{A}{2a}\int_{-a}^{a}(y(t) + y(t+\tau))dt + \lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}y(t)y(t+\tau)dt\right] =$$

$$= e^{j2\pi f_0 \tau}\left[A^2 + \lim_{a\to\infty}\frac{A}{2a}\int_{-a}^{a}(y(t) + y(t+\tau))dt + \Phi_y(\tau)\right] = A^2 e^{j2\pi f_0 \tau}$$

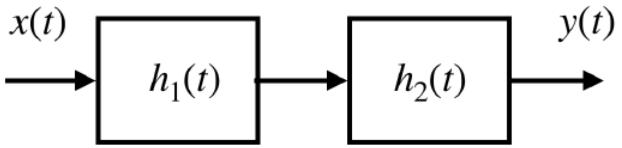
$$\boxed{G_{y_2}(f) = A^2\delta(f - f_0)}$$

Esercizio 5

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} r(t-2kT) \quad \text{con} \quad r(t) = e^{-|t|}$$

Il segnale $x(t)$ viene filtrato dal seguente sistema lineare:



$$\text{dove} \quad h_1(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi t}\cos\left(\frac{3\pi t}{2T}\right) \qquad h_2(t) = 2\frac{\sin\left(\frac{3\pi t}{2T}\right)}{\pi t}.$$

Si calcolino:

1. l'espressione del segnale $y(t)$.
2. lo spettro di potenza $G_y(f)$ e la potenza P_y del segnale $y(t)$.

Soluzione Esercizio 5.1

- Calcoliamo la funzione di trasferimento del sistema complessivo:

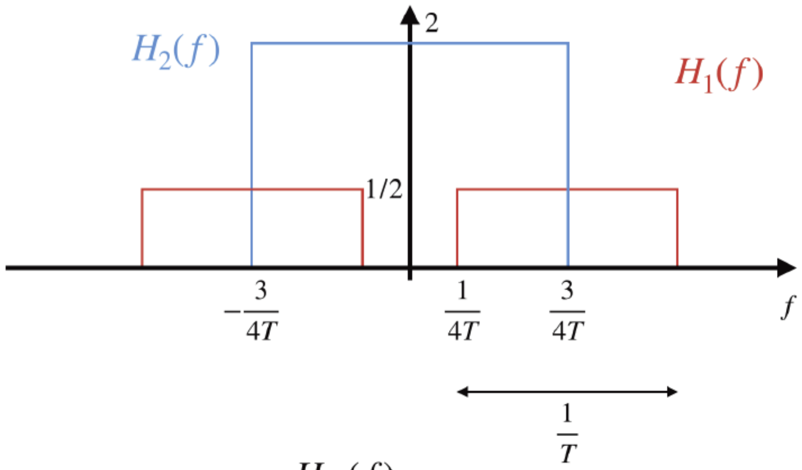
$$H_1(f) = p_{\frac{1}{T}}(f) * \frac{1}{2}\left(\delta\left(f - \frac{3}{4T}\right) + \delta\left(f + \frac{3}{4T}\right)\right) =$$

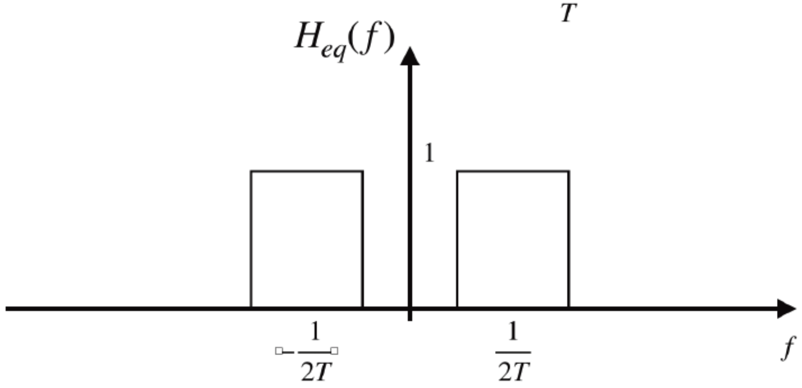
$$= \frac{1}{2}\left(p_{\frac{1}{T}}\left(f - \frac{3}{4T}\right) + p_{\frac{1}{T}}\left(f + \frac{3}{4T}\right)\right)$$

$$H_2(f) = 2p_{\frac{3}{2T}}(f)$$

$$H_{eq}(f) = H_1(f)H_2(f) =$$

$$= p_{\frac{1}{2T}}\left(f - \frac{1}{2T}\right) + p_{\frac{1}{2T}}\left(f + \frac{1}{2T}\right)$$





Soluzione Esercizio 5.1

- Il segnale x(t) è periodico di periodo 2T e la sua trasformata di Fourier vale:

$$X(f)=\frac{1}{2T}\sum_k R\left(\frac{k}{2T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right) \qquad \text{con} \qquad R(f)=\frac{2}{1+4\pi^2 f^2}$$

$$X(f)=\frac{1}{2T}\sum_k \frac{2}{1+4\pi^2\left(\frac{k}{2T}\right)^2}\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right)=T\sum_k \frac{1}{T^2+\pi^2 k^2}\delta\left(f-\frac{k}{2T}\right)$$

- Lo spettro del segnale periodico è a righe spaziate di 1/2T, quindi è facile osservare che attraverso il filtro passano unicamente le componenti corrispondenti a k=-1 e k=+1:

Soluzione Esercizio 5.1

$$Y(f) = \frac{T}{T^2+\pi^2}\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+\frac{T}{T^2+\pi^2}\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)=\frac{2T}{T^2+\pi^2}\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+\left(f-\frac{1}{2T}\right)\right]$$

- Antitrasformando:

$$y(t)=\frac{2T}{T^2+\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi t}{2T}\right)=\frac{2T}{T^2+\pi^2}\cos\left(\pi\frac{t}{T}\right)$$

Soluzione Esercizio 5.2

- Spettro di potenza:

$$G_y(f)=\left(\frac{T}{T^2+\pi^2}\right)^2\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+\left(\frac{T}{T^2+\pi^2}\right)^2\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)=\left(\frac{T}{T^2+\pi^2}\right)^2\left[\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+\left(f-\frac{1}{2T}\right)\right]$$

- Potenza:

$$P_y=\left(\frac{T}{T^2+\pi^2}\right)^2+\left(\frac{T}{T^2+\pi^2}\right)^2=2\left(\frac{T}{T^2+\pi^2}\right)^2$$