Teoria dei Segnali

- Esempi applicazione rappresentazione geometrica
- Proprietà delta di Dirac
- La serie di Fourier
- La trasformata di Fourier

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Anno accademico 2024-2025
Ultimo aggiornamento: Settembre 2024

Esempio di applicazione rappresentazione geometrica dei segnali

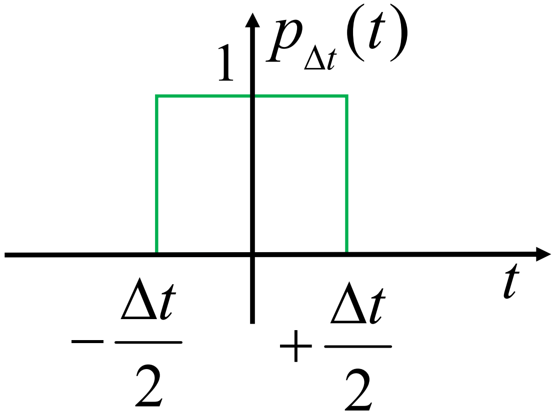
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Rappresentazione dei segnali continui tramite funzioni «porta» nel tempo

Premesse: La funzione «porta» nel tempo

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Definizione di "funzione porta" di durata Δt



$$p_{\Delta t}(t) = \begin{cases} 1 & t \in \left[-\frac{\Delta t}{2}, +\frac{\Delta t}{2}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

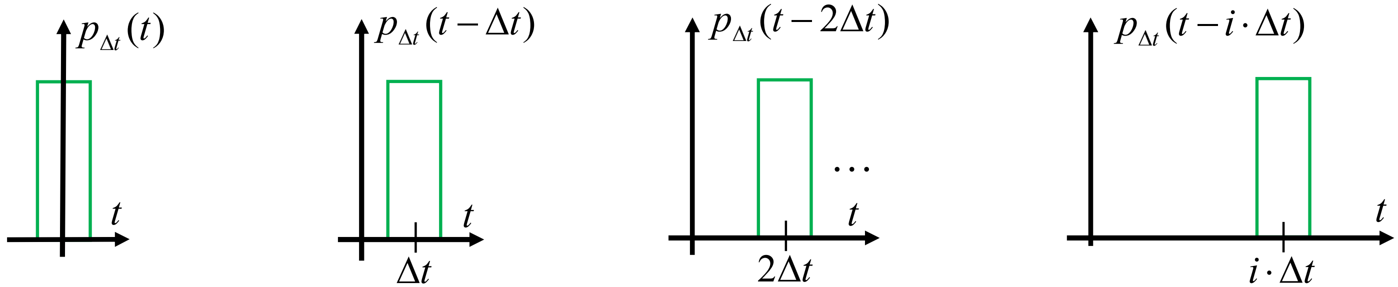
Viene talvolta anche usata la notazione $\Pi_{\Delta t}(t)$ facendo uso della funzione rettangolare Heaviside

$$\Pi_{\Delta t}(t) = \Pi\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$$

$\Pi(t) = 1 \; per \; t \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$ e 0 altrove

Base ortogonale costituita da porte

- Consideriamo questo insieme di segnali



Versioni traslate nel tempo della quantità $i\Delta t$

- Si può facilmente verificare che questo insieme di segnali sono tra di loro ortogonali secondo la definizione da noi usata:

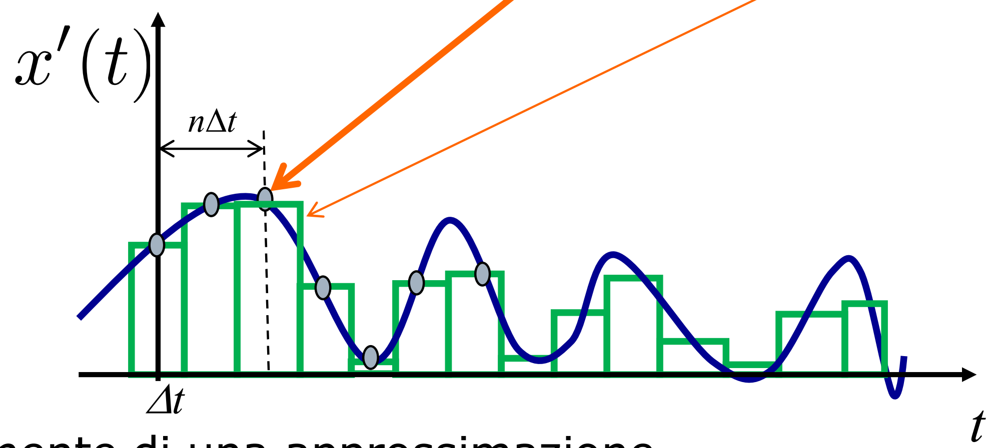
$$\boxed{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle x(t), y(t) \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt}$$

Conseguentemente, questo insieme di funzioni costituisce una possibile base (non è però normalizzata a 1)

Approssimazione di un segnale continuo tramite funzioni porta

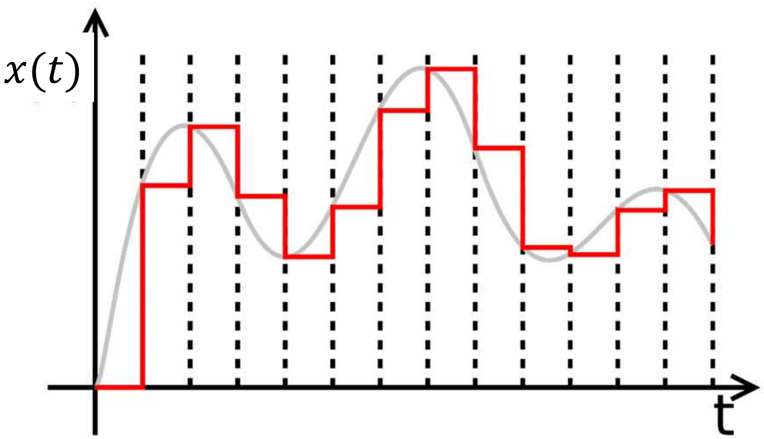
- Un segnale continuo può essere approssimato mediante una base costituita dalle traslazioni nel tempo della funzione “porta” nel tempo

$$x(t) \sim x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \boxed{x(n\Delta t)}\,\boxed{p_{\Delta t}(t - n\Delta t)}$$



- Si tratta chiaramente di una approssimazione
- Osserviamo che è tanto «migliore» quanto più Δt è piccolo

Commenti



- Se $x(t)$ è a supporto limitato, la base ha un numero *N* finito di elementi
- Viceversa, se $x(t)$ è a supporto illimitato, è necessaria una base di dimensione infinita

Passaggio al limite per $\Delta t \to 0$

- Facendo tendere il supporto Δt a zero è intuitivo che la approssimazione risultante migliora

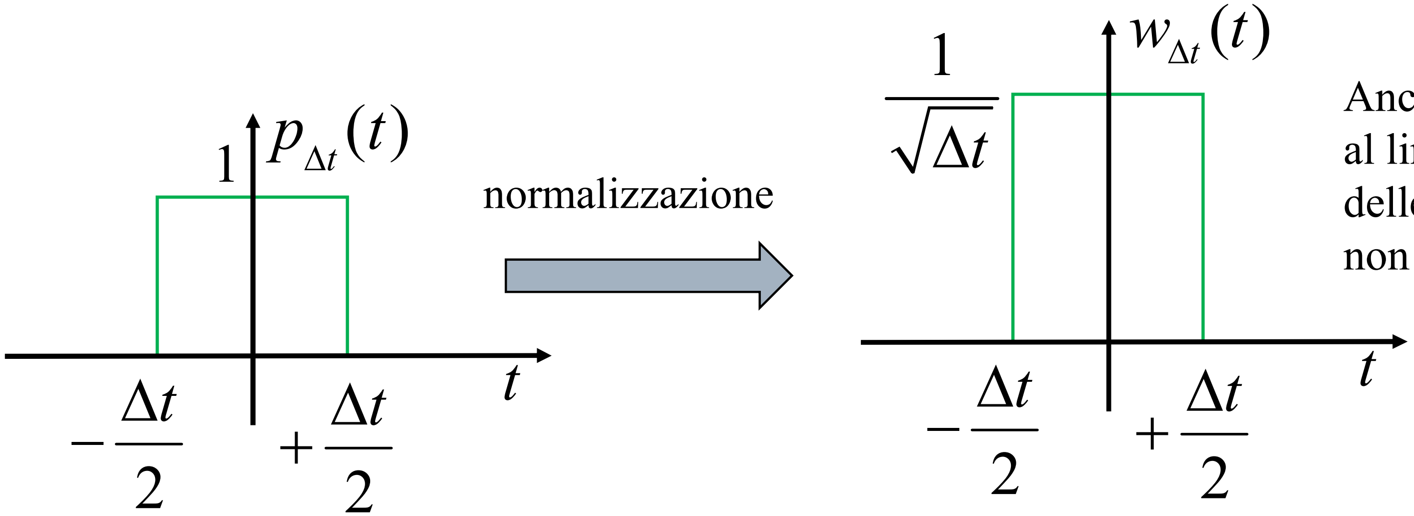
$$x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) p_{\Delta t}(t - n\Delta t)$$

- Questo risultato sarà fondamentale più avanti nell'ambito del «teorema del campionamento»
- Si osserva che in questa situazione è richiesto un insieme infinito e non numerabile di funzioni ortogonali per ottenere una "base completa" per lo spazio dei segnali
  - Il passaggio al limite su Δt a zero comporta però delle conseguenze matematiche non banali sulla funzione porta

Base ortonormale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Per essere una base ortonormale, le funzioni porta devono però essere normalizzate in modo da avere energia unitaria



Anche qui, l'eventuale passaggio al limite su Δt a zero comporta delle conseguenze matematiche non banali sulla funzione porta

L'approssimazione è dunque in questo caso:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n \cdot \Delta t) \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot w_{\Delta t}(t)$$

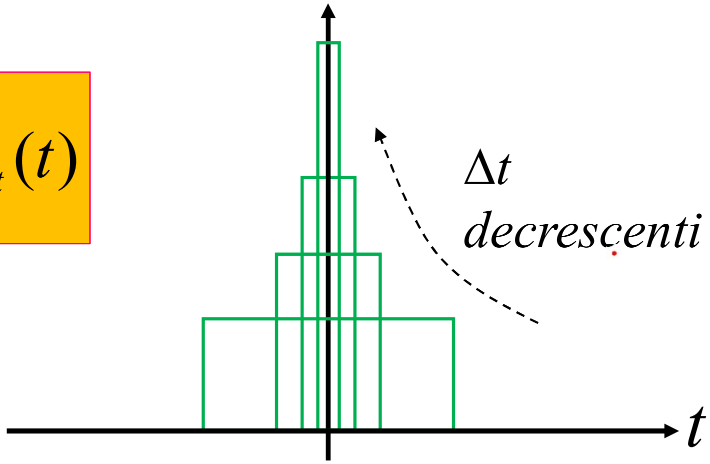
La funzione «speciale» delta di Dirac

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

La «funzione speciale» delta di Dirac

- Si tratta di una «funzione speciale» molto utile nel campo della Teoria dei Segnali
- In realtà, NON è una funzione tradizionale, ma matematicamente è una «distribuzione» che si può costruire come limite delle seguenti funzioni porta:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} p_{\Delta t}(t)$$



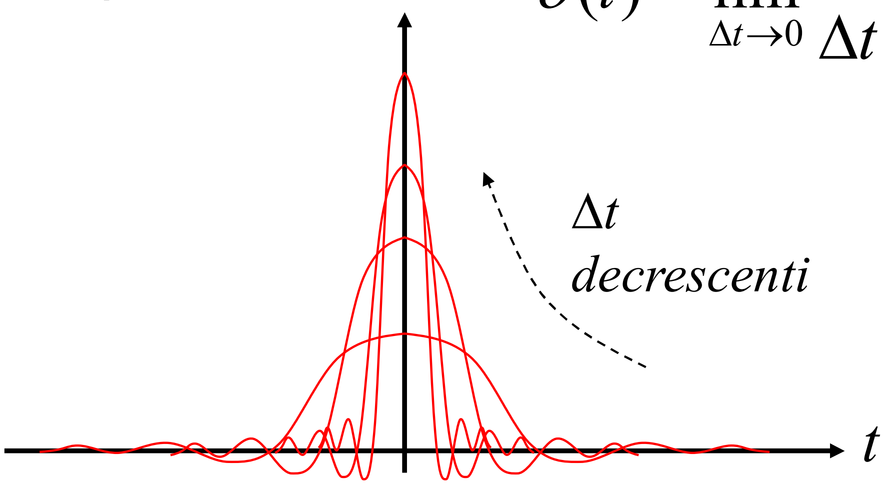
La «funzione speciale» delta di Dirac

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Esistono in letteratura scientifica anche altre definizioni della delta di Dirac, che portano allo stesso risultato

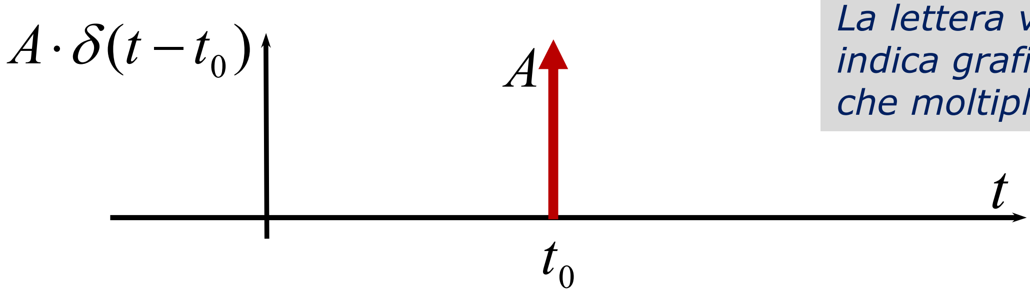
- A titolo di esempio:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{\sin(t/\Delta t)}{(t/\Delta t)}$$



Rappresentazione grafica

- Useremo spesso versioni traslate nel tempo e moltiplicate per una costante, e graficamente le rappresenteremo come:



La lettera vicino alla freccia indica graficamente la costante che moltiplica la delta

Proprietà Delta di Dirac

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- La delta di Dirac $\delta(t)$ ha «area» unitaria (proprietà importante!), infatti:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\Delta t}(t)\,dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta t = 1}$$

- Attenzione invece al fatto che ha energia infinita:

$$\boxed{E(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\delta(t))^2\,dt = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{1}{\Delta t}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (p_{\Delta t}(t))^2\,dt = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \cdot \Delta t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} = \infty}$$

Proprietà Delta di Dirac

- Un'altra proprietà fondamentale della Delta di Dirac è la seguente: dato un segnale continuo $x(t)$ si ha che:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\,dt = x(0)}$$

$$\text{Dim.: } \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)\,dt = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot p_{\Delta t}(t)\,dt = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\cdot x(0)\cdot \Delta t$$

- Per il nostro corso, questa sarà di gran lunga la proprietà più importante della delta di Dirac, soprattutto nella sua versione più generale presentata nella seguente equazione:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)}$$

$$\text{Dim.: } \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot p_{\Delta t}(t-t_0)\,dt = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\cdot x(t_0)\cdot \Delta t$$

Proprietà del «campionamento» tramite delta di Dirac

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Interpretando il risultato della slide precedente, si deduce che l'integrale della moltiplicazione tra un generico segnale continuo e la delta "campiona" il valore del segnale nella posizione temporale della delta

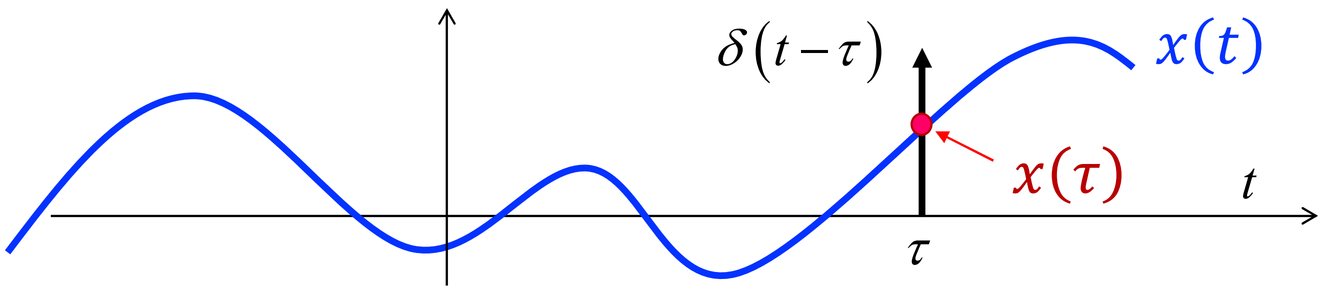
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

- Useremo anche la seguente espressione relativa alla moltiplicazione per una delta:

$$x(t)\cdot\delta(t-t_0) = x(t_0)\cdot\delta(t-t_0)$$

Moltiplicazione per una delta

- La delta vale zero dappertutto tranne che in τ, quindi il solo valore che conta della funzione che la moltiplica è solo quello che essa assume in τ



$$x(t)\delta(t-\tau) = x(\tau)\delta(t-\tau)$$

ATTENZIONE: la sola moltiplicazione per la delta non campiona il segnale secondo quanto visto nella slide precedente. Infatti il risultato è ancora una funzione delta con un coefficiente che dipende dal valore del segnale in quel punto.

Proprietà della Delta di Dirac

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- In una delle lezioni successive (sistemi lineari), definiremo il prodotto di convoluzione come:

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

- Data la proprietà di campionamento ne consegue che:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$$

La convoluzione di un segnale continuo $x(t)$ con una delta fornisce il segnale di partenza $x(t)$

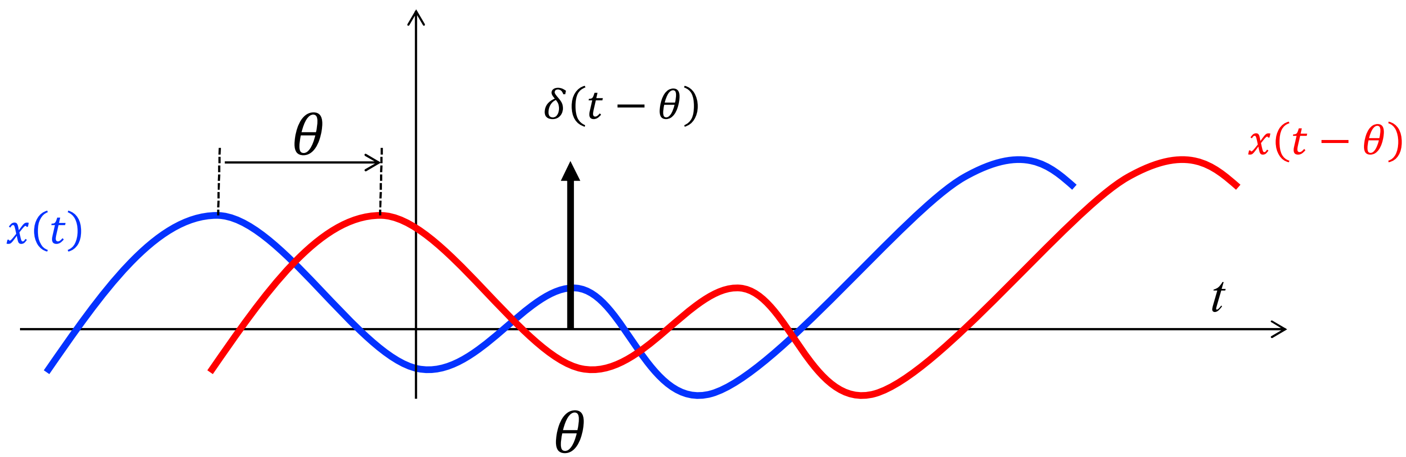
$$x(t) * \delta(t-\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\theta-\tau) d\tau = x(t-\theta)$$

Analogamente, la convoluzione con una delta traslata fornisce il segnale traslato

*Si noti che la variabile di integrazione della convoluzione è τ, quindi t è una traslazione in cui è "centrata" la $\delta(\tau)$

Proprietà delta: traslazione e convoluzione

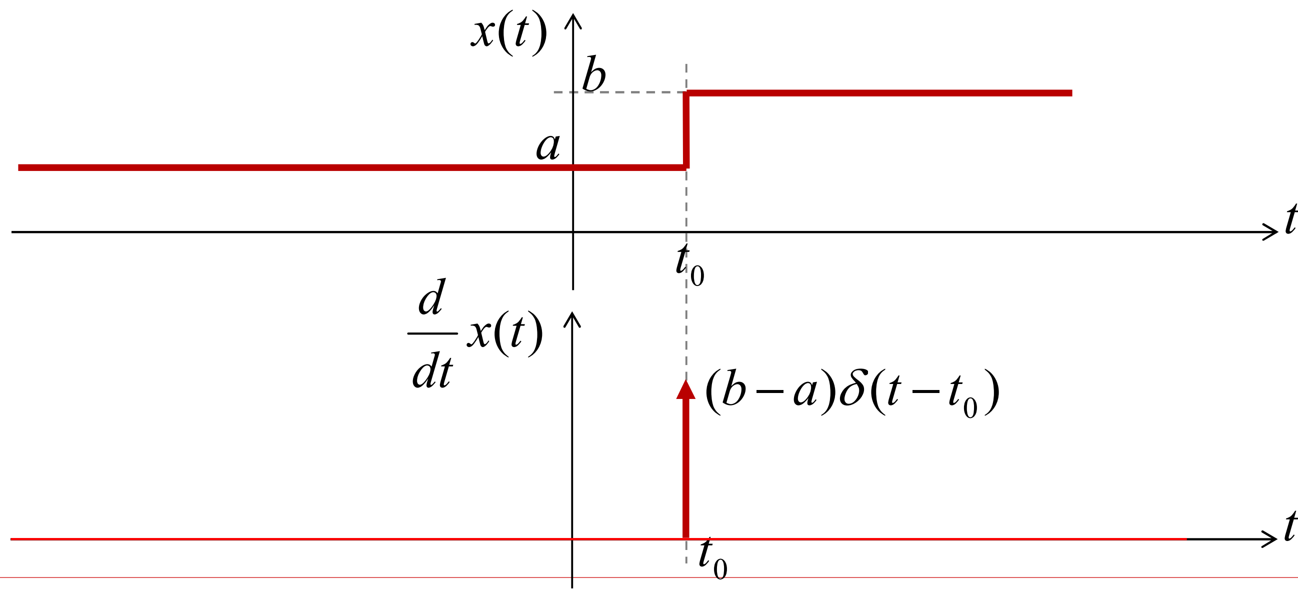
$$x(t) * \delta(t-\theta) = x(t-\theta)$$



Derivata di funzioni discontinue

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Un'ulteriore utile applicazione della delta di Dirac è quella di poter definire la derivata anche sulle discontinuità di una funzione.
- Ad esempio per la seguente funzione "a gradino" si può dimostrare il seguente risultato:



La serie di Fourier

- Rappresentazione in serie di seni e coseni di un segnale periodico
- Già presentata in corsi precedenti, qui viene solo «richiamata» come:
  - Introduzione alla trasformata di Fourier
  - Un esempio "particolare" di rappresentazione geometrica dei segnali su una base di funzioni sinusoidali

Per questo motivo, non faremo nessuna dimostrazione dettagliata

La serie di Fourier

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Si può dimostrare che l'insieme infinito ma numerabile costituito dalle seguenti funzioni:

$$w_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \qquad -T/2 \le t \le T/2$$

- è una possibile base completa per tutti i segnali (anche complessi) ad energia finita definiti nell'intervallo $[-T/2, T/2]$

Quali segnali posso rappresentare esattamente con la serie di Fourier?

- La serie di Fourier permette di scrivere un segnale $x(t)$ con supporto tra $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ come combinazione lineare di esponenziali complesse
- Se osserviamo il segnale ricostruito anche al di fuori dell'intervallo$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$, data la natura periodica delle sinusoidi otterremo un segnale periodico che in ciascun periodo è pari a $x(t)$, cioè del tipo:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-nT) \qquad \text{in cui } x(t) \neq 0 \text{ solo per } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

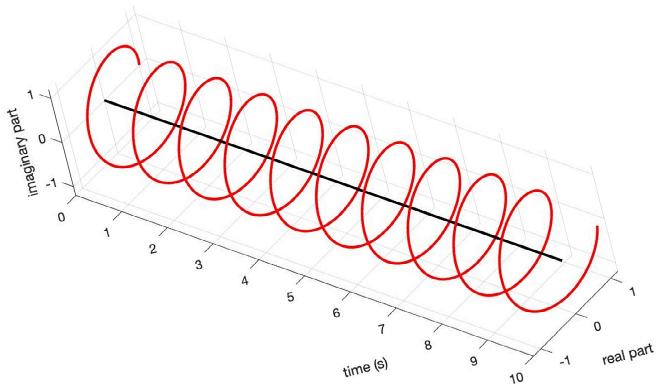
- Quindi la stessa base permette ANCHE di rappresentare tutti i segnali periodici di periodo T

Il segnale sinusoidale complesso

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Ricordando la formula di Eulero

$$e^{j2\pi\frac{n}{T}t} = \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) + j\sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)$$



- Si nota che la scomposizione si basa su <u>segnali sinusoidali (*sin* e *cos*) alle frequenze</u> $f_n = \frac{n}{T}$.

Un segnale periodico di periodo T si può dunque scomporre in una somma di seni e coseni (opportunamente pesati) alle frequenze multiple intere di 1/T

La serie di Fourier per segnali periodici

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- In particolare, si può dimostrare che, per qualunque segnale periodico di periodo *T* si può scrivere che:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}}$$

Espansione in serie di Fourier

$$\boxed{c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \langle x(t), w_n(t) \rangle}$$

Coefficienti dello sviluppo, che si possono interpretare come prodotto scalare con i termini della base ortogonale:

$$w_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \qquad -T/2 \le t \le T/2$$

$$E(x) = \sum_n |c_n|^2$$

Energia su un periodo *T* *(dimostrazione più avanti)*

$$x(t) \Leftrightarrow (c_n)_{n=-\infty}^{\infty}$$

Vettore a infinite dimensioni (sequenza)

Altre forme di scrittura della serie di Fourier

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Nei vari testi si trovano anche espressioni della Serie di Fourier leggermente diverse da quella introdotta nella slide precedente, quali:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

In questo Corso useremo questa notazione nell'ambito della Trasformata di Fourier di segnali periodici

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{T}} c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

Coefficienti dello sviluppo

Energia segnali periodici utilizzando la serie di Fourier

- Calcoliamo l'energia su un singolo periodo nell'intervallo $[-T/2, T/2]$

$$E_T(x) = \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j2\pi \frac{n}{T}t} \right|^2 dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \mu_{n_1} e^{j2\pi \frac{n_1}{T}t} \cdot \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \mu_{n_2}^* e^{-j2\pi \frac{n_2}{T}t} dt =$$

$$= \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \mu_{n_1} \cdot \mu_{n_2}^* \left(\int_{-T/2}^{+T/2} e^{j2\pi \frac{n_1-n_2}{T}t} dt \right)$$

Il termine in parentesi tonda è nullo per indici diversi, mentre è pari a T per indici uguali.

Infatti per indici diversi, l'esponenziale complessa si può scomporre in seni e coseni con periodo multiplo intero di T, e dunque l'integrale su T risulterà sempre nullo per tutti questi termini

$$\boxed{E_T(x) = T \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2}$$

Energia su un periodo T

- L'energia su tutto il segnale periodico (cioè su tutto l'asse dei tempi) è dunque ovviamente infinita

Potenza segnali periodici utilizzando la serie di Fourier

- Per quanto riguarda la potenza media di un segnale periodico, abbiamo dunque:

$$\boxed{P(x) = \frac{E_T(x)}{T} = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \left|\mu_n\right|^2}$$

Interpretazione della serie di Fourier

- Scrivere un segnale (eventualmente complesso) ad energia finita con supporto nell'intervallo [-T/2,T/2] (o un segnale periodico di periodo *T*) come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \quad -T/2 \le t \le T/2$$

- significa scrivere il segnale come combinazione lineare di infinite sinusoidi di frequenza $f_n = n/T$, in quanto:

$$e^{j2\pi\frac{n}{T}t} = \cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) + j\sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)$$

- L'ampiezza di ciascun coefficiente μ_n ci dice, per ciascuna componente a frequenza f_n , quanto essa è «forte» nel segnale $x(t)$

Serie di Fourier per segnali reali

- Nel caso che *x(t)* sia reale, si dimostra facilmente che:

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\,dt \qquad \mu_{-n} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot e^{+j\frac{2\pi}{T}nt}\,dt \Rightarrow \boxed{\mu_{-n} = \mu_n^*}$$

- Si può dunque riscrivere la serie di Fourier come segue

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} + \mu_n^* e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\right) = \mu_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\right\}$$

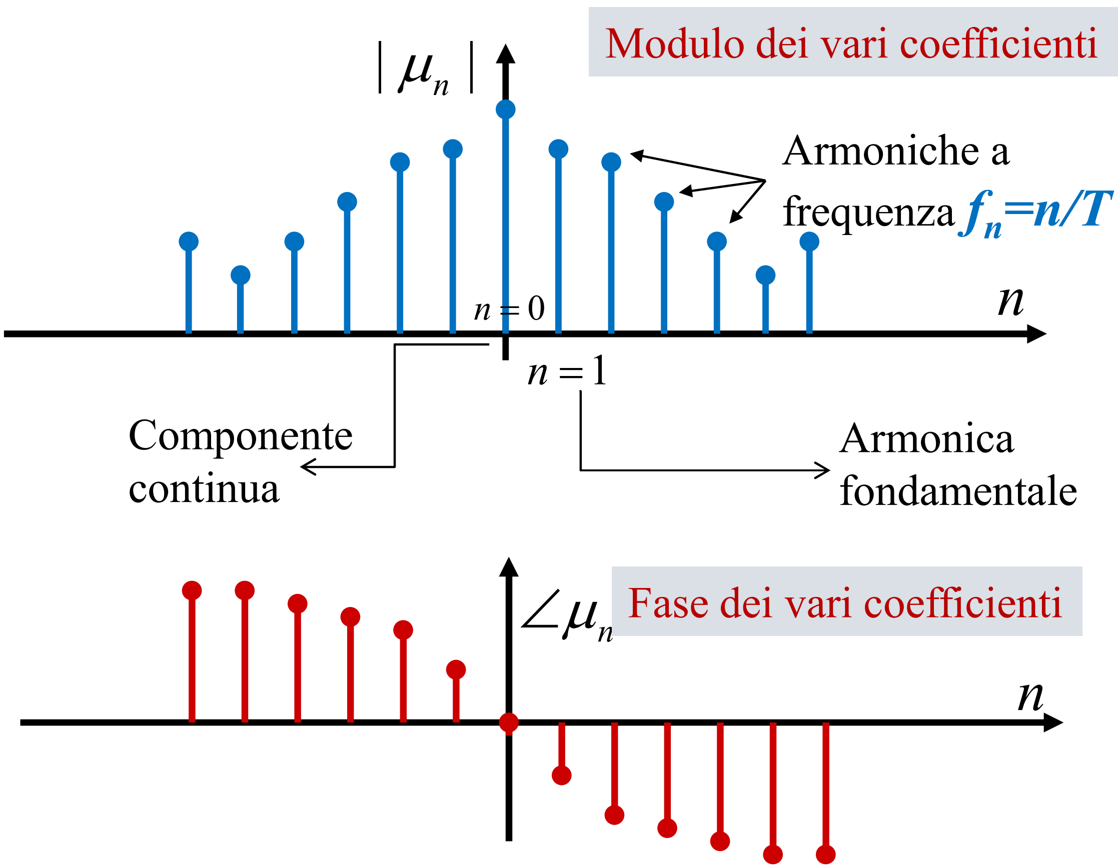
$$\text{sia } \mu_n = |\mu_n| e^{j\phi_n} \Rightarrow x(t) = \mu_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{|\mu_n| e^{j\left(\frac{2\pi}{T}nt+\phi_n\right)}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \mu_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n|\cdot\cos\left(2\pi f_n t + \phi_n\right)}$$

Questa formula evidenza (ancora più chiaramente) che tramite la serie di Fourier è possibile scomporre un segnale reale *x(t)* in una somma (infinita) di segnali sinusoidali alle frequenze f_n con opportune ampiezze e fasi

Rappresentazione grafica e terminologia dei coefficienti della serie di Fourier

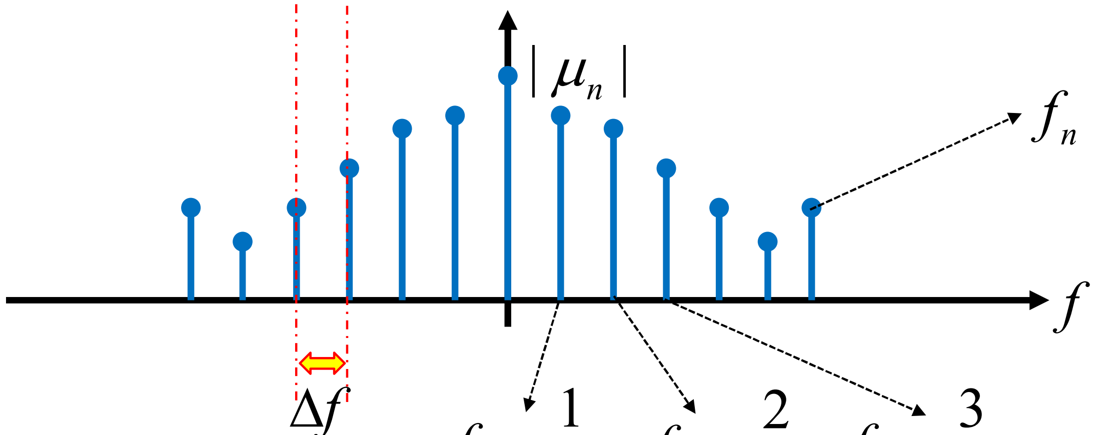
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



Interpretazione in termini di "<u>analisi in frequenza</u>" per segnali periodici $x(t)$ di periodo T:

- $x(t)$ è esprimibile come una sommatoria di seni a coseni alle frequenze $f_n = \frac{n}{T}$ i cui "pesi" (cioè la potenza per armonica) dipendono dalla "forma" del segnale $x(t)$
- *Terminologia: <u>analisi spettrale del segnale</u>*

Un'osservazione sulla serie di Fourier



$$f_n = \frac{n}{T}$$

"Asse delle frequenze"

$$f_1 = \frac{1}{T} \qquad f_2 = \frac{2}{T} \qquad f_3 = \frac{3}{T}$$

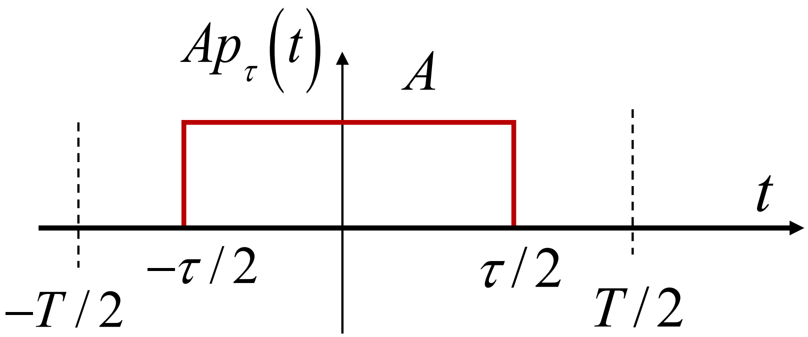
$$\boxed{\Delta f = f_n - f_{n-1} = \frac{1}{T}}$$

- Notare che la "separazione spettrale" tra due frequenze dello sviluppo in serie di Fourier è pari a *1/T*

Osservazione per ora apparentemente irrilevante… ma che tornerà molto utile più avanti per interpretare la Serie di Fourier

Esempio: serie di Fourier per porta simmetrica

- Calcoliamo i coefficienti per una porta di ampiezza A e durata $\tau < T$:



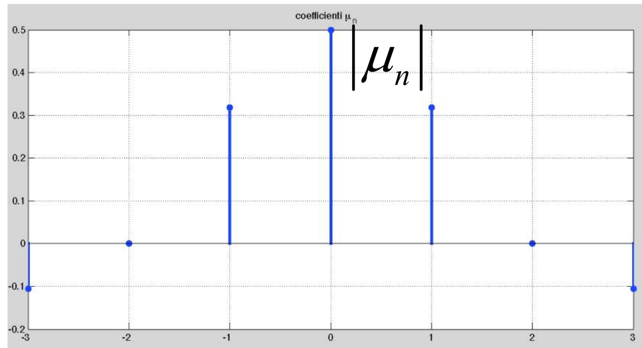
$$
\begin{aligned}
\mu_n &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\,dt \\
&= \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\,dt \\
&= -\frac{A}{j2\pi n}\left(e^{-j\frac{\pi}{T}n\tau} - e^{j\frac{\pi}{T}n\tau}\right) \\
&= -\frac{-2jA}{j2\pi n}\sin\frac{\pi}{T}n\tau \\
&= \frac{A}{\pi n}\sin\frac{\pi}{T}n\tau = A\frac{\tau}{T}\frac{\sin \pi n\frac{\tau}{T}}{\pi n\frac{\tau}{T}} \\
&= A\frac{\tau}{T}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\tau}{T}\right)
\end{aligned}
$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo introdotto la funzione speciale:

$$\boxed{\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}}$$

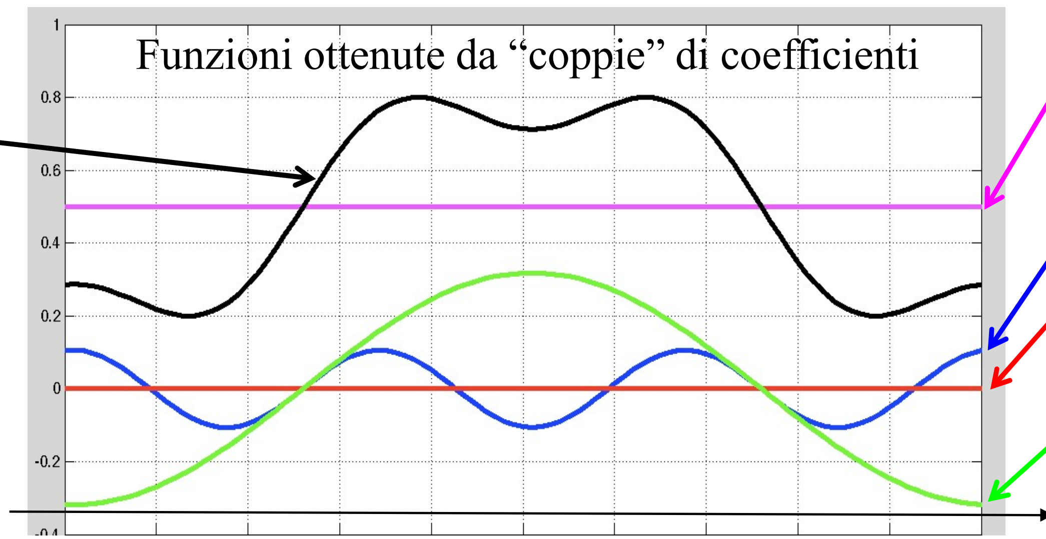
Andamento dei coefficienti

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$



Segnale risultante tenendo conto SOLO dei termini sino a *n*=3

$$x(t) = \sum_{n=-3}^{+3} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$



μ_0

$\mu_{-3}e^{-j\frac{2\pi}{T}3t} + \mu_3 e^{j\frac{2\pi}{T}3t}$

$\mu_{-2}e^{-j\frac{2\pi}{T}2t} + \mu_2 e^{j\frac{2\pi}{T}2t}$

$\mu_{-1}e^{-j\frac{2\pi}{T}t} + \mu_1 e^{j\frac{2\pi}{T}t}$

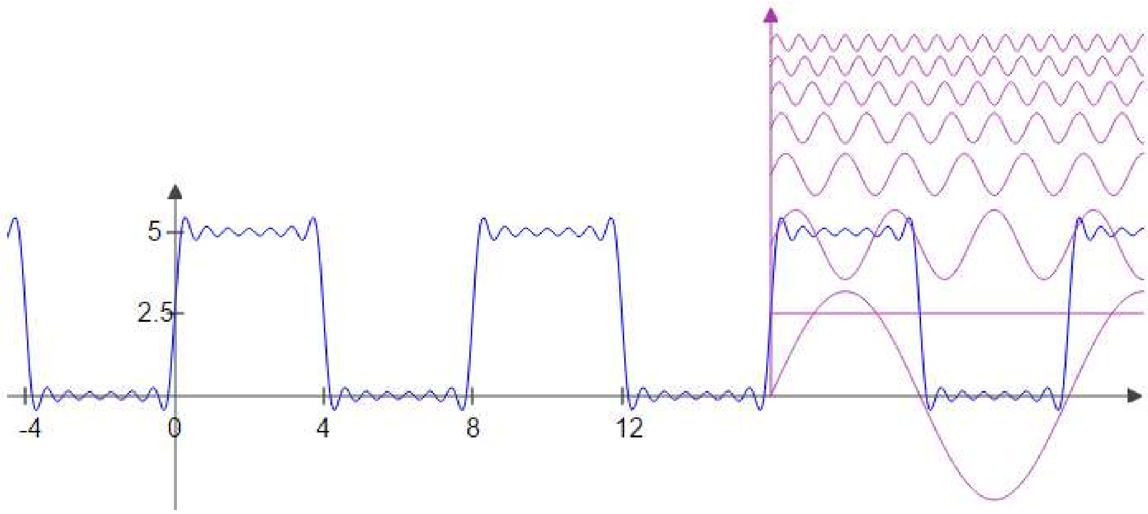
tempo

Altro esempio: onda quadra periodica

- Dal sito: http://www.intmath.com/fourier-series/fourier-graph-applet.php

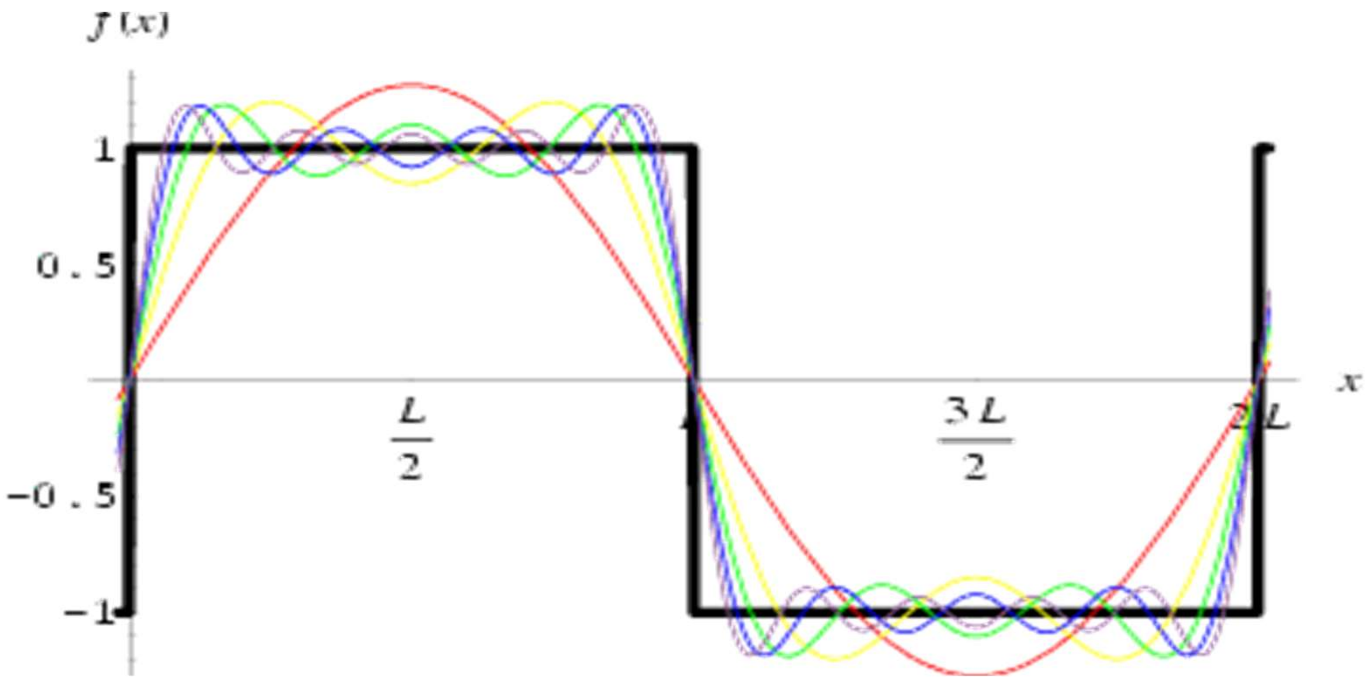
Number of terms = 8

$$f(t) \approx 2.5 + \frac{10}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{4} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{4} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi t}{4} + \frac{1}{7}\sin\frac{7\pi t}{4} + \frac{1}{9}\sin\frac{9\pi t}{4} + \frac{1}{11}\sin\frac{11\pi t}{4} + \frac{1}{13}\sin\frac{13\pi t}{4}\right)$$



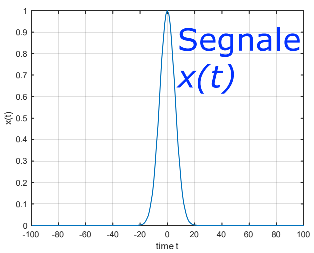
Esempio: onda quadra

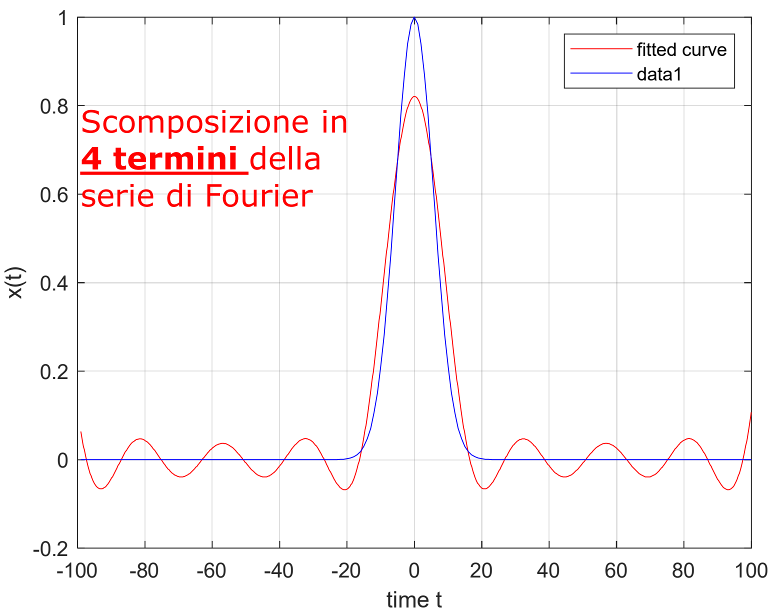
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

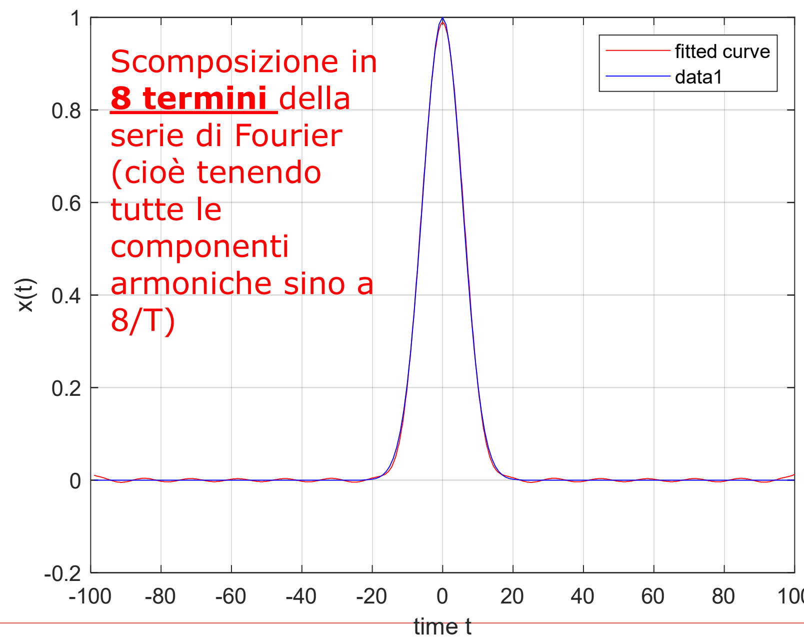


Esempio Matlab: scomposizione in serie di Fourier di un segnale "a campana" (gaussiana)

```
% Fouries Serie simple example
%   on a Gaussian-shaped signal
clear all; close all;
npoint=200;
time=1:npoint; time=(time-npoint/2)';
signal=zeros(size(time));
%
signal=exp(-(time/8).^2);
f = fit(time,signal,'fourier8')
%
figure(1)
plot(f); hold on; plot (time,signal);
grid on; zoom on;
```

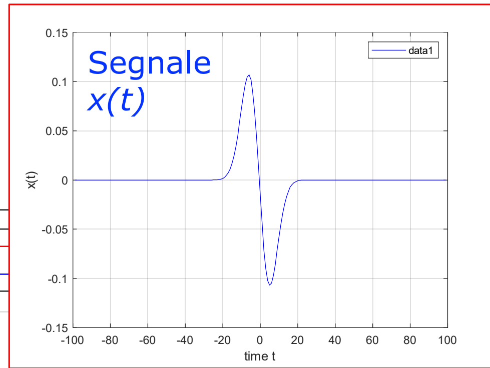


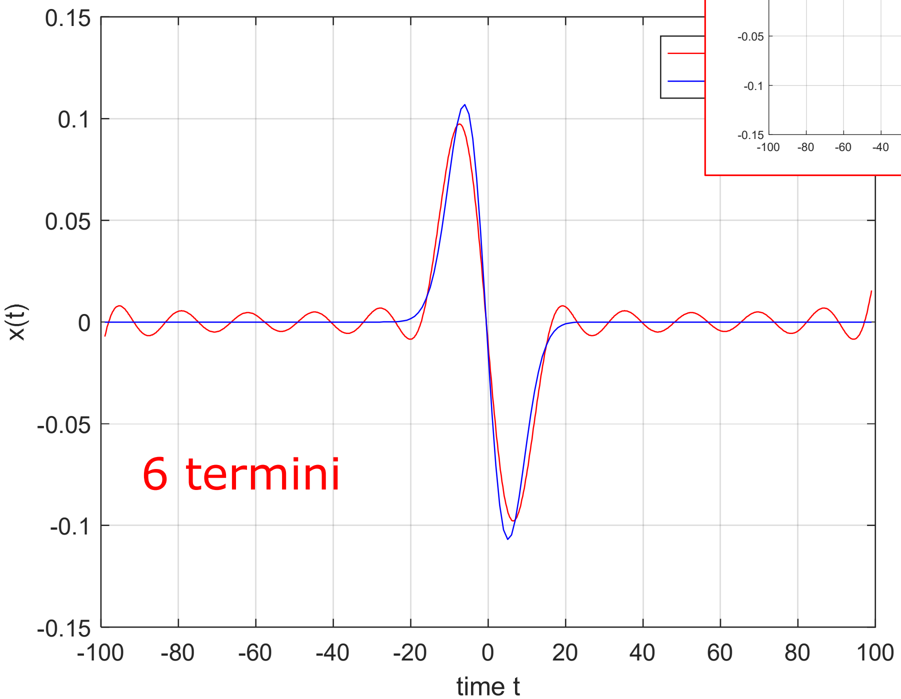


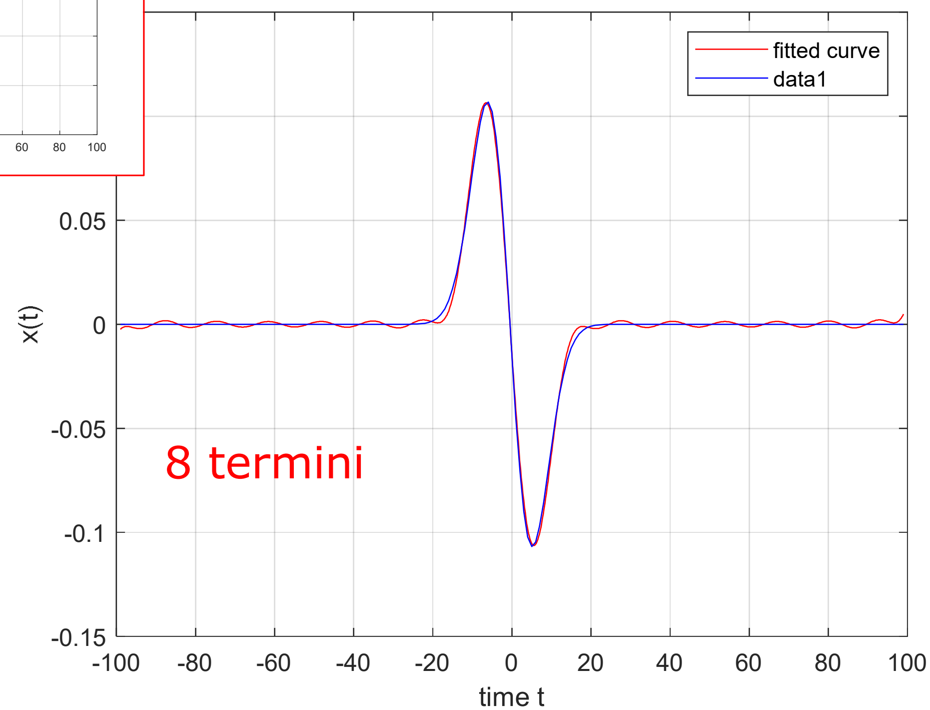


Un'altra funzione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications







Commento sull'esempio precedente

- Per lo specifico segnale $x(t)$ considerato nell'esempio precedente, la "approssimazione" ottenuta è già molto buona con 8 termini

- Curiosità: si noti dunque che si potrebbe rappresentare "abbastanza bene" $x(t)$ con soli 17 coefficienti reali (sulla base data dai termini in sin e cos della serie di Fourier), cioè
  - I 2x8 coefficienti reali delle varie armoniche
  - Il coefficiente della componente continua

Esempio di applicazione su segnale audio

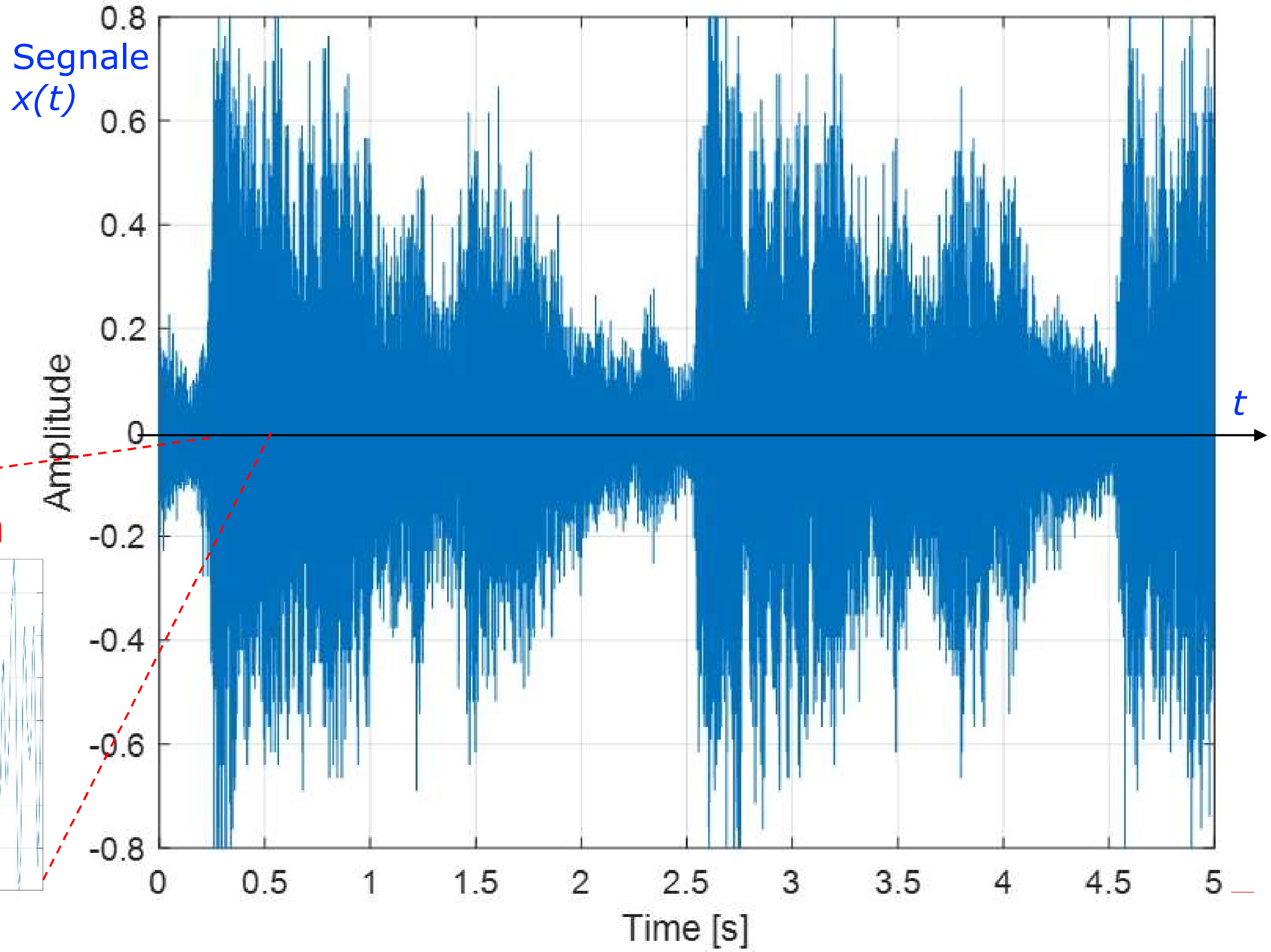
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

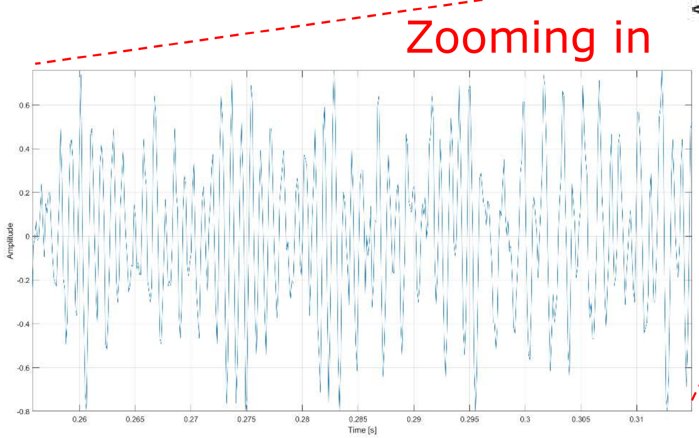
Calcolo (in Matlab) della serie di Fourier relativa ad un breve brano musicale

- Hallelujah di Handel (disponibile in Matlab tramite "*load handel*")
- Seleziono *T=5* secondi iniziali del brano e lo elaboro calcolandone i coefficienti della serie di Fourier
- Notare che per la formula vista in precedenza la separazione tra le armoniche risulta pari a: $$\Delta f = f_n - f_{n-1} = \frac{1}{T} = \frac{1}{5\,[s]} = 0.2\,Hz$$
- Il brano ha una frequenza di campionamento di 8192 Hz e dunque contiene componenti spettrali sino a circa 4 kHz
  - Si analizzerà nel dettaglio questa questione a metà corso, nell'ambito del Teorema del Campionamento… per ora prendetela per buona ☺
- I coefficienti da calcolare sono dunque molto numerosi (!!), all'incirca 40000
  - Si vedrà nella seconda parte del corso che tramite la "Fast Fourier Transform" i software numerici possono calcolare questi coefficienti in modo numericamente molto efficiente

Esempio di applicazione su segnale audio

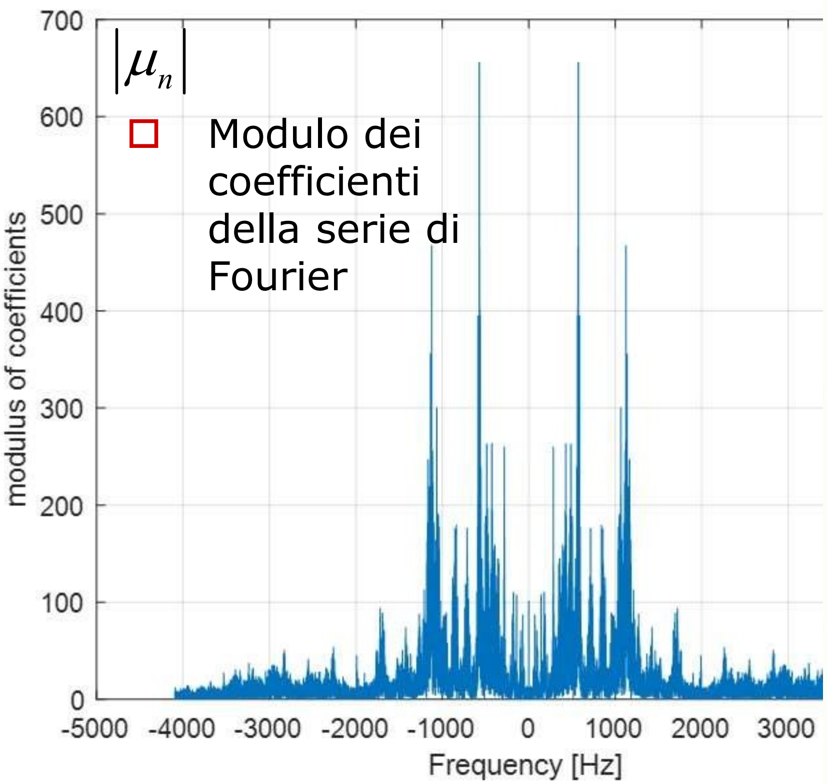
- Evoluzione del segnale nel tempo



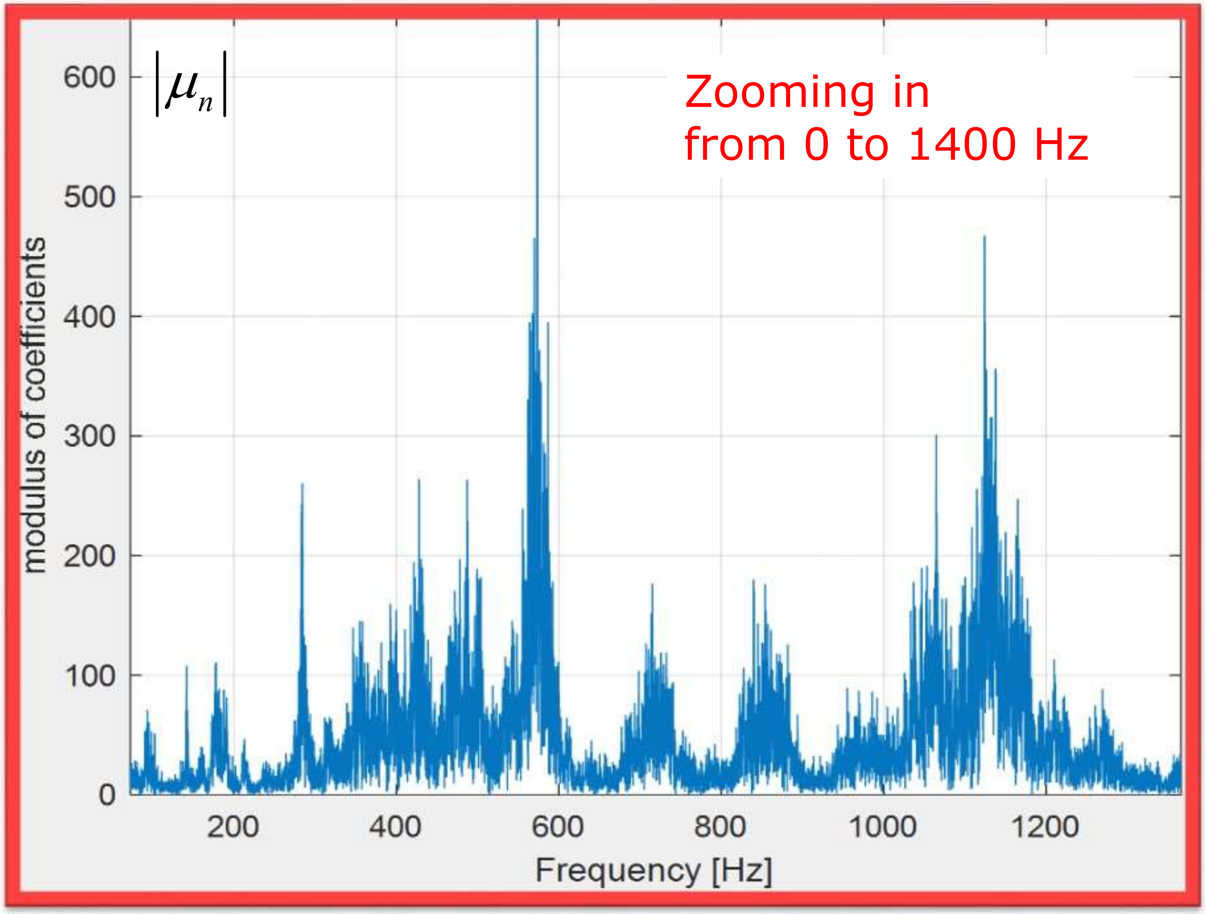


Esempio di applicazione su segnale audio

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



- Modulo dei coefficienti della serie di Fourier

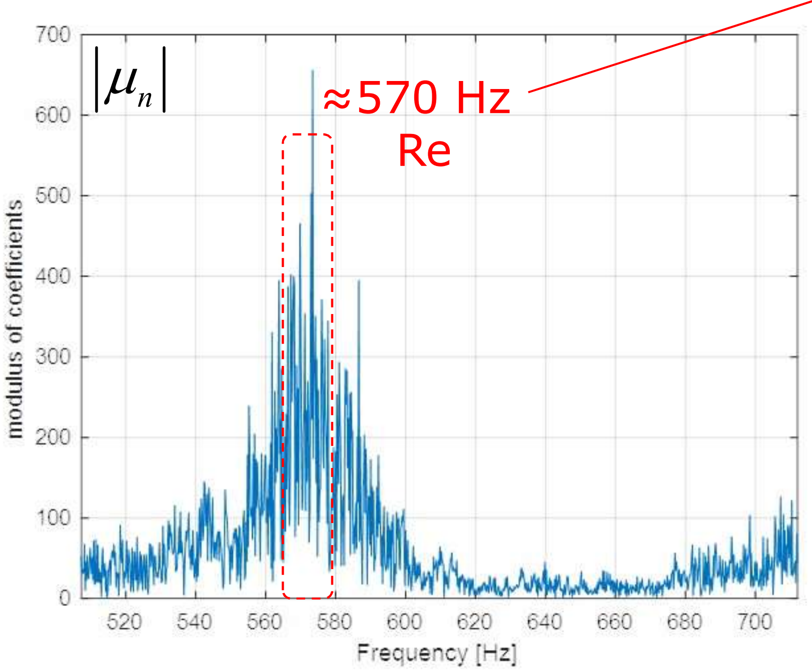


Let's play... ☺

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Il brano è in Re Maggiore
  - Si riesce ad "intuire" dalla serie di Fourier?
- Zoom attorno al "picco" principale

Note	ottave									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Do	16,35	32,70	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093	4186	8372
Do#-Reb	17,32	34,65	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217	4435	8870
Re	18,35	36,71	73,42	146,8	293,7	$\boxed{587,3}$	1175	2349	4699	9397
Re#-Mib	19,45	38,89	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489	4978	9956
Mi	20,60	41,20	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637	5274	10548
Fa	21,83	43,65	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794	5588	11175
Fa#-Solb	23,12	46,25	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960	5920	11840
Sol	24,50	49,00	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136	6272	12544
Sol#-Lab	25,96	51,91	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322	6645	13290
La	27,50	55,00	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520	7040	14080
La#-Sib	29,14	58,27	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729	7459	14917
Si	30,87	61,74	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951	7902	15804

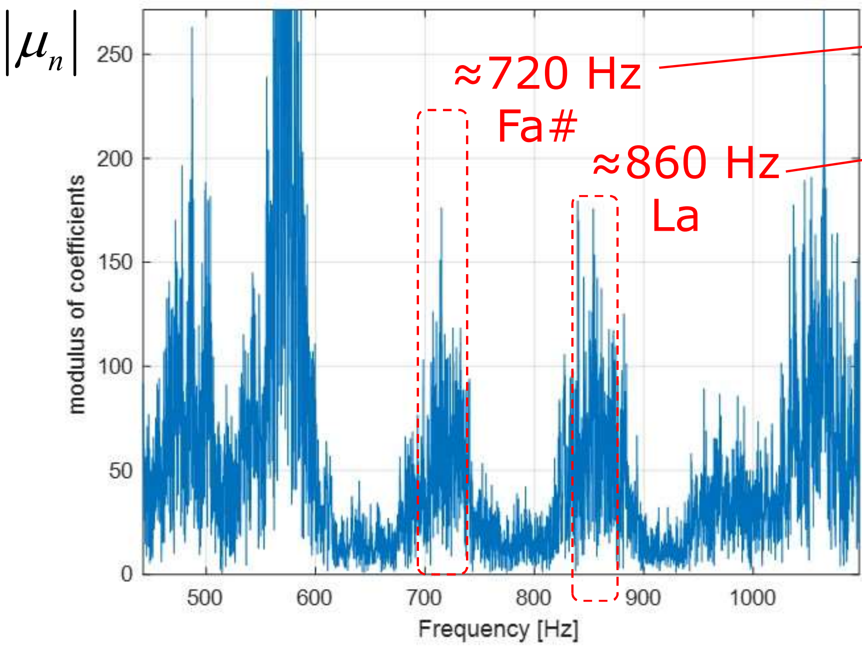


Let's play… ☺

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Diamo un'occhiata ai due "picchi" successivi…

Note	ottave									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Do	16,35	32,70	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093	4186	8372
Do#-Reb	17,32	34,65	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217	4435	8870
Re	18,35	36,71	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349	4699	9397
Re#-Mib	19,45	38,89	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489	4978	9956
Mi	20,60	41,20	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637	5274	10548
Fa	21,83	43,65	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794	5588	11175
Fa#-Solb	23,12	46,25	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960	5920	11840
Sol	24,50	49,00	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136	6272	12544
Sol#-Lab	25,96	51,91	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322	6645	13290
La	27,50	55,00	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520	7040	14080
La#-Sib	29,14	58,27	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729	7459	14917
Si	30,87	61,74	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951	7902	15804

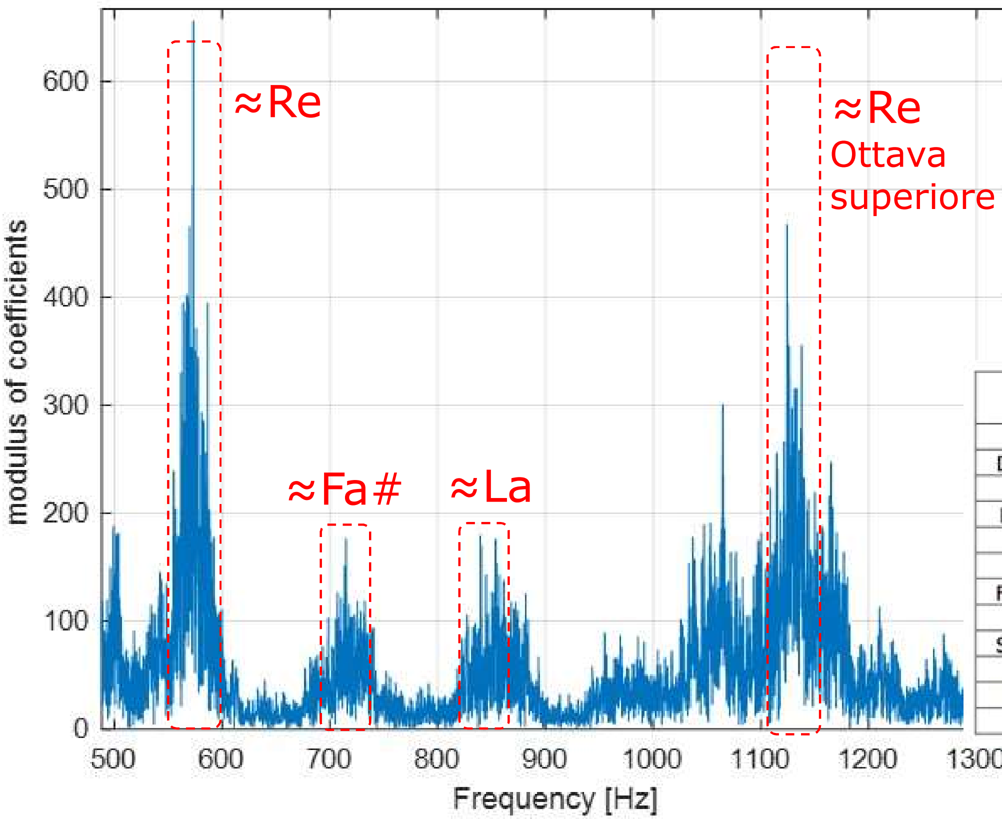


- I 3 "picchi" sono all'incirca sulle note Re - Fa#- La
- … cioè sull'accordo di Re Maggiore !!

Let's play… ☺

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- In conclusione



Curiosità: la tabella sottostante riporta l'accordatura "ufficiale" con il La a 440Hz.

Tuttavia, molte esecuzioni di musica barocca usano un'accordatura leggermente più bassa, con il La attorno a 420-430 Hz

… come si vede dalla nostra analisi!

Note	ottave									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Do	16,35	32,70	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093	4186	8372
Do#-Reb	17,32	34,65	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217	4435	8870
Re	18,35	36,71	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349	4699	9397
Re#-Mib	19,45	38,89	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489	4978	9956
Mi	20,60	41,20	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637	5274	10548
Fa	21,83	43,65	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794	5588	11175
Fa#-Solb	23,12	46,25	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960	5920	11840
Sol	24,50	49,00	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136	6272	12544
Sol#-Lab	25,96	51,91	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322	6645	13290
La	27,50	55,00	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520	7040	14080
La#-Sib	29,14	58,27	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729	7459	14917
Si	30,87	61,74	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951	7902	15804

Esempio di applicazione su segnale audio

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Il codice Matlab usato nelle slides precedenti:

```
% Carica file musicale
load handel
time_window=5; % in secondi
x=y(1:ceil(time_window*Fs));
soundsc(x,Fs); % riproduce il suono originale
pause(length(x)/Fs+0.5)
%
figure(1)
time=(1:length(x))./Fs;
plot(time,x);
xlabel('Time [s]'); ylabel('Amplitude'); grid on; zoom on;
%
% serie di Fourier tramite FFT
%
fft_vector=fft(x);
figure(2)
frequency_axis=((1:length(fft_vector))-length(fft_vector)/2)*(Fs/length(fft_vector));
plot(frequency_axis,fftshift(abs(fft_vector)));
xlabel('Frequency [Hz]'); ylabel('modulus of coefficients'); grid on; zoom on;
```

La trasformata di Fourier

- Rappresentazione in frequenza di segnali *x(t)* generici anche non periodici

Dalla serie alla trasformata

Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications

- Come rappresentare segnali che non hanno supporto limitato all'intervallo $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$?
  - O equivalentemente generici segnali *x(t)* NON periodici e su un supporto temporale illimitato?

- Consideriamo nuovamente la serie di Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \qquad \mu_n = \frac{1}{\sqrt{T}} c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

- E uniamo le due equazioni, ottenendo l'espressione:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\theta) e^{-j2\pi\frac{n}{T}\theta} d\theta \right] e^{j2\pi\frac{n}{T}t}$$

Dalla serie alla trasformata di Fourier

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\theta) e^{-j2\pi \frac{n}{T}\theta} d\theta \right] e^{j2\pi \frac{n}{T}t}$$

- Proviamo ora a vedere cosa succede per *T* arbitrariamente grande

- La trasformata di Fourier si ottiene in particolare facendo tendere T a infinito nella precedente espressione

- Si devono fare le seguenti «modifiche»

$$T \to \infty \quad \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{T} = \Delta f \to df \\ \frac{n}{T} \to f \\ \sum \to \int \end{cases}$$

Dalla serie alla trasformata di Fourier

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(\theta) e^{-j2\pi \frac{n}{T} \theta} d\theta \right] e^{j2\pi \frac{n}{T} t}$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[df \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f \theta} d\vartheta \right] e^{j2\pi f t}$$

I passaggi matematici presenti in questa slides sono FONDAMENTALI per capire "intuitivamente" che cosa rappresenta la trasformata di Fourier.

Ricordare l'obiettivo: "estendere" il concetto della serie di Fourier a segnali non periodici

La Trasformata di Fourier

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Definizione: $$X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f\theta} d\theta = \mathcal{F}\{x(t)\}$$
- Anti-trasformata di Fourier $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}$$
- Queste due relazioni fondamentali definiscono la trasformata e l'anti-trasformata di Fourier

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$$

$$X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t)$$

Commenti

- Le due definizioni di trasformata e anti-trasformata di Fourier introdotte della slides precedente hanno una fondamentale importanza in tantissimi campi dell'Ingegneria
  - Grazie a queste formule, come vedremo durante le prossime lezioni del corso, è possibile introdurre il concetto di contenuto spettrale attorno ad una certa frequenza *f* anche per un segnale generico

- A titolo di esempio: SENZA il concetto di rappresentazione in frequenza, NON esisterebbero
  - Le trasmissioni radio, tutte basate (anche) sulla cosiddetta multiplazione di frequenza
  - Gli equalizzatori per segnali musicali
  - Molte tecniche di compressione dei segnali audio e video
  - L'analisi in frequenza delle vibrazioni di un sistema meccanico
  - Etc. etc. etc.

Dettagli matematici sulle trasformate di Fourier

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Esistono alcune condizioni per l'esistenza e l'invertibilità della trasformata $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

  Si tratta di una condizione sufficiente ma non necessaria. Una importante eccezione sono ad esempio i segnali periodici, che NON soddisfano questa condizione ma di cui esiste comunque la trasformata di Fourier

- La trasformata di Fourier e quella di Laplace sono legate. Infatti:

$$X_{Laplace}(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- Quando la regione di convergenza della trasformata di Laplace contiene l'asse immaginario si ha

$$X(f) = X_{Laplace}(j2\pi f) + \frac{1}{2}\sum_i A_i \delta(f - f_i)$$

- Dove f_i sono le eventuali singolarità sull'asse immaginario

Calcolo di trasformate di Fourier

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Il calcolo della trasformata di Fourier tramite la definizione integrale è solitamente abbastanza complicato, come vedremo nelle slide successive su alcuni esempi

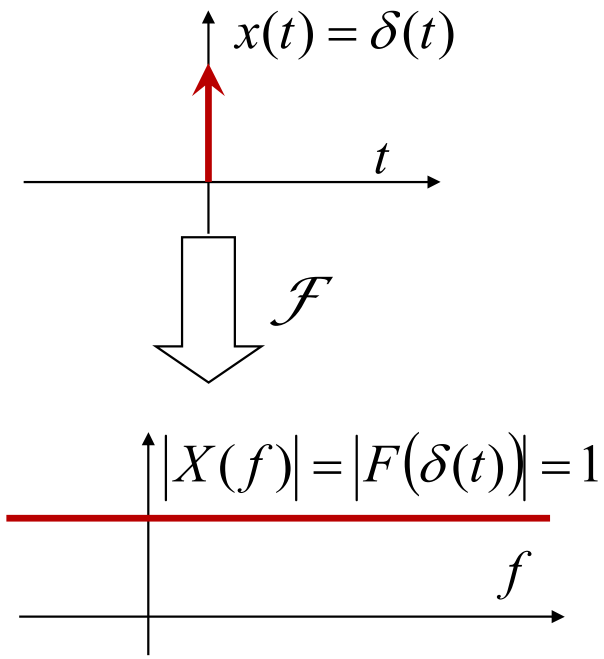
- Nel capitolo successivo si vedrà tuttavia che tramite:
  1. Tavole delle trasformate di Fourier fondamentali
  2. Proprietà delle trasformate di Fourier
  - gli effettivi calcoli si possono spesso semplificare notevolmente negli esercizi di questo corso
    - A partire da un numero limitato di "trasformate fondamentali"

- Nelle prossime slides calcoleremo comunque alcune trasformate fondamentali a partire dalla definizione

Alcune trasformate fondamentali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Delta



$$\mathcal{F}\left(\delta(t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\exp\left(-j2\pi ft\right)dt$$

$$=\exp\left(-j2\pi f0\right)=1$$

$$\boxed{X(f)=F(\delta(t))=1}$$

$\mathcal{F}^{-1}$ Anti-trasformando

$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(j2\pi ft\right)df$$

Questa formula è una ulteriore possibile definizione della delta di Dirac

Inoltre, è un'espressione che utilizzeremo in varie altre dimostrazioni nel resto del corso, anche al di fuori dell'ambito della trasformata di Fourier.

Trasformata di una costante

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$\boxed{x(t)=1}$$

$$X(f)=F\{x(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi ft}dt=$$

In una slide precedente, avevamo dimostrato che:

$$\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(j2\pi ft)df$$

Analogamente dunque

$$X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi ft}dt=\delta(f)$$

$$\boxed{X(f)=F(1)=\delta(f)}$$

Trasformata Funzione «Segno»

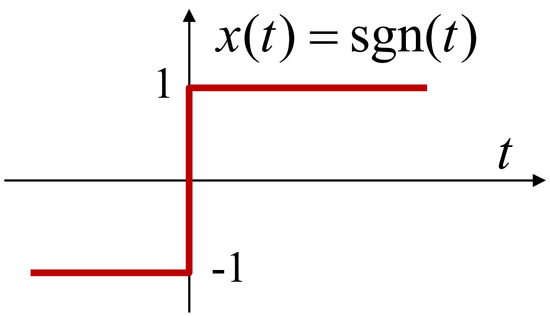
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{sgn}(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(t) \exp\left(-j2\pi f t\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sgn}(t)\left[\cos\left(2\pi f t\right) - j\sin\left(2\pi f t\right)\right] dt$$

$$= -2j\int_{0}^{\infty} \sin\left(2\pi f t\right) dt$$

Sfruttiamo le relazioni di parità delle funzioni sin(), cos() e sgn()



$$= \frac{j}{\pi f}\left[\cos\left(2\pi f t\right)\right]_0^{\infty}$$

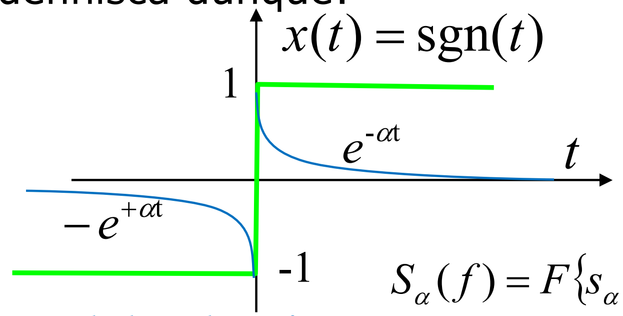
$$= \lim_{a\to\infty} j\frac{\cos\left(2\pi f a\right)}{\pi f} - \frac{j}{\pi f} = -\frac{j}{\pi f} = \frac{1}{j\pi f}$$

Distribuzione che tende a zero a limite $a\to\infty$. Questo risultato non è affatto banale da dimostrare. Intuitivamente, per $a\to\infty$ il coseno oscilla in modo "infinitamente veloce" tra +1 e -1

$$\boxed{X(f) = F(\mathrm{sgn}(t)) = \frac{1}{j\pi f}}$$

Trasformata Funzione «Segno»

- Il risultato della slide precedente può essere ottenuto in maniera più rigorosa mediante la seguente dimostrazione, che si avvale di una funziona ausiliaria che al limite coincide con la funzione segno.
- Si definisca dunque:



$$s_\alpha(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{per } t\geq 0 \\ -e^{+\alpha t} & \text{per } t<0 \end{cases}$$

Si ha che: $\mathrm{sgn}(t)=\lim\limits_{\alpha\to 0^+} s_\alpha(t)$

Calcoliamo la trasformata di Fourier

$$S_\alpha(f)=F\{s_\alpha(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty} s_\alpha(t)e^{-j2\pi ft}dt=\int_{-\infty}^{0} -e^{+\alpha t}e^{-j2\pi ft}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j2\pi ft}dt=$$

$$S_\alpha(f)=-\int_{-\infty}^{0} e^{-(j2\pi f-\alpha)t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{-(j2\pi f+\alpha)t}dt=\frac{-1}{-(j2\pi f-\alpha)}\left[e^{-(j2\pi f-\alpha)t}\right]_{-\infty}^{0}+\frac{1}{-(j2\pi f+\alpha)}\left[e^{-(j2\pi f+\alpha)t}\right]_{0}^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{(j2\pi f-\alpha)}\left[1-\lim_{t\to-\infty}\cancel{\left(e^{-(j2\pi f-\alpha)t}\right)}\right]-\frac{1}{(j2\pi f+\alpha)}\left[\lim_{t\to\infty}\cancel{\left(e^{-(j2\pi f+\alpha)t}\right)}-1\right]$$

Tende a zero per α positivo

Tende a zero per α positivo

Trasformata Funzione «Segno»

$$S_\alpha(f) = \frac{1}{(j2\pi f - \alpha)} + \frac{1}{(j2\pi f + \alpha)}$$

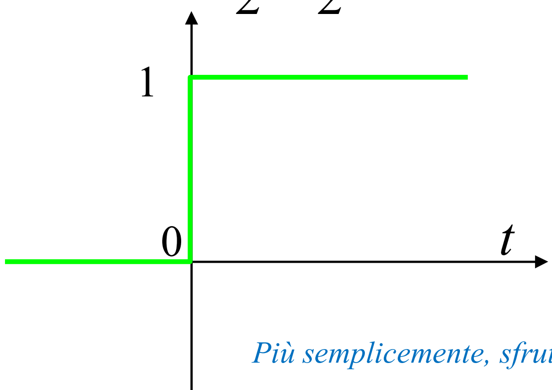
$$F\{\mathrm{sgn}(t)\} = \lim_{\alpha \to 0^+} S_\alpha(f) = \lim_{\alpha \to 0^+}\left(\frac{1}{(j2\pi f - \alpha)} + \frac{1}{(j2\pi f + \alpha)}\right) = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{j2\pi f} = \frac{1}{j\pi f}$$

$$\boxed{X(f) = F(\mathrm{sgn}(t)) = \frac{1}{j\pi f}}$$

Trasformata «gradino» nel tempo

- Gradino $u(t)$

$$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$



$$\mathscr{F}\left(u(t)\right)=\int_0^\infty \exp\left(-j2\pi ft\right)dt$$
$$=\int_0^\infty \cos\left(2\pi ft\right)dt-j\int_0^\infty \sin\left(2\pi ft\right)dt$$
$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\sin\left(2\pi fa\right)}{2\pi f}+j\lim_{a\to\infty}\frac{\cos\left(2\pi fa\right)}{2\pi f}-\frac{j}{2\pi f}$$
$$=\frac{1}{2}\delta\left(f\right)+\frac{1}{j2\pi f}$$

Più semplicemente, sfruttando la linearità della trasformata di Fourier (si veda il gruppo di slides successive):

$$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\Rightarrow F(u(t))=F\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\right)=$$

$$F(u(t))=\frac{1}{2}F\left(1\right)+\frac{1}{2}F\left(\operatorname{sgn}(t)\right)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{2}\frac{1}{j\pi f}$$

Trasformata di Fourier di segnali periodici

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Utilizzando la Serie di Fourier su segnali periodici di periodo T

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}}$$

- Possiamo ottenere l'espressione della trasformata di Fourier
  - Applichiamo infatti la definizione di Trasformata di Fourier e successivamente una proprietà della delta di Dirac dimostrata qualche slide prima

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f\theta} d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{+j2\pi f_n \theta} \right) e^{-j2\pi f\theta} d\theta =$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_n)\theta} d\theta = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \cdot \delta(f-f_n)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \cdot \delta(f-f_n)}$$

Trasformata di Fourier di segnali periodici

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \cdot \delta(f - f_n)$$

- In uno dei capitoli successivi del corso riprenderemo nel dettaglio questo risultato relativo alla trasformata di segnali periodici

- Per ora osserviamo che un segnale periodico ha componenti spettrali non nulle SOLO per frequenze multiple della frequenza fondamentale *1/T* del segnale periodico
  - E su queste frequenze $f_n = n/T$ compaiono delle delta di Dirac