Teoria ed Elaborazione dei Segnali - Appello 18 giugno 2024

(1) **1a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri una funzione $x(t)$ continua in t e che rappresenta un segnale deterministico reale ad energia finita e non nulla. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. Nessuna delle altre risposte è corretta.
b. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t-t_2-t_1)$
c. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t_1-t_2)$
d. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t_2-t_1)\cdot\delta(t-t_2)$
e. $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t_2-t_1)$

SOLUZIONE Grazie alle proprietà della funzione δ di Dirac (si vedano anche le lezioni relative al teorema del campionamento), la risposta corretta è la seguente: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t_2-t_1)$

(2) **1b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri una funzione $x(t)$ continua in t e che rappresenta un segnale deterministico reale ad energia finita e non nulla. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. $x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2) = x(t_2-t_1)$
b. $x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2) = x(t_1-t_2)$
c. Nessuna delle altre risposte è corretta.
d. $x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2) = x(t_2-t_1)\cdot\delta(t-t_2)$
e. $x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2) = x(t-t_1-t_2)$

SOLUZIONE Grazie alle proprietà della funzione δ di Dirac (si vedano anche le lezioni relative al teorema del campionamento), la risposta corretta è la seguente: $x(t-t_1)\cdot\delta(t-t_2)dt = x(t_2-t_1)\cdot\delta(t-t_2)$

(3) **2a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un sistema LTI discreto, causale e stabile bounded-input bounded-output (BIBO). Dire quali delle seguenti affermazioni può essere vera:

a. la risposta all'impulso del sistema è data da $h[n] = e^{-0.1|n|}\cos(n/20)$
b. Nessuna affermazione può essere vera.
c. la risposta all'impulso del sistema è data da $h[n] = u[n]e^{+0.1|n|}\cos(n/20)$
d. la risposta all'impulso del sistema è data da $h[n] = u[n]e^{-0.1|n|}\cos(n/20)$
e. dato l'ingresso $x[n] = e^{-|n|}$ si ottiene l'uscita $y[n] = e^{+|n|}$

SOLUZIONE La risposta corretta è la seguente: "la risposta all'impulso del sistema è data da $h[n] = u[n]e^{-0.1|n|}\cos(n/20)$". Infatti, dalla teoria, la risposta all'impulso discreta di un sistema BIBO deve essere sommabile in modulo, requisito che è soddisfatto da questa risposta all'impulso, e inoltre la risposta è chiaramente causale.

Relativamente alle altre possibili risposte, sono tutte sbagliate in quanto:

- "dato l'ingresso $x[n] = e^{-|n|}$ si ottiene l'uscita $y[n] = e^{+|n|}$": ingresso limitato in ampiezza, e uscita illimitata, dunque NON BIBO
- "la risposta all'impulso del sistema è data da $h[n] = u[n]e^{+0.1|n|}\cos(n/20)$: risposta all'impulso chiaramente non sommabile
- la risposta all'impulso del sistema è data da $h[n] = e^{-0.1|n|}\cos(n/20)$: risposta all'impulso chiaramente non causale

(4) **2b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un sistema LTI discreto, causale e stabile bounded-input bounded-output (BIBO). Dire quali delle seguenti affermazioni può essere vera:

a. la risposta all'impulso del sistema è data da $h[n] = u[n]\cdot n\cos(n/20)$
b. la risposta all'impulso del sistema è data da $h[n] = e^{-|n|}\cos(n/20)$
c. dato l'ingresso $x[n] = \sin(n)$ si ottiene l'uscita $y[n] = n\cdot\sin(n)$
d. la risposta all'impulso del sistema è data da $h[n] = u[n]e^{-n}\cdot\cos(n/20)$
e. Nessuna affermazione può essere vera.

SOLUZIONE Si veda la traccia della soluzione precedente

(5) **3a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un processo casuale $x(t)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. $x(t)$ è detto "ergodico" se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo.
b. dato un processo casuale $x(t)$, la densità spettrale di potenza è reale solo se il processo casuale $x(t)$ assume valori reali.
c. se il processo è stazionario in senso stretto, la funzione di autocorrelazione dipende da una singola variabile temporale.
d. Nessuna affermazione è corretta.
e. $x(t)$ è detto "quasi determinato" se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo

SOLUZIONE La risposta corretta è questa: "se il processo è stazionario in senso stretto, la funzione di autocorrelazione dipende da una singola variabile temporale." in quanto i processi WSS hanno proprio come caratteristica il fatto che $R_x(t_1, t_2)$ dipenda solo da $\tau = t_2 - t_1$. Le altre risposte sono sbagliate, in quanto:

- $x(t)$ è detto "quasi determinato" se si tratta di un processo casuale con un'espressione analitica che dipende solo dal tempo e da variabili casuali, e questo non implica nessuna condizione rispetto al tempo.
- $x(t)$ è detto "ergodico" se le medie di insieme e quelle temporali sono uguali, e anche in questo caso ció non implica nessuna condizione in $x(t)$ rispetto al tempo.
- la densità spettrale di potenza di un processo casuale è sempre una funzione reale, indipendentemente dalle caratteristiche del processo casuale $x(t)$.

(6) **3b** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri un processo casuale $x(t)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

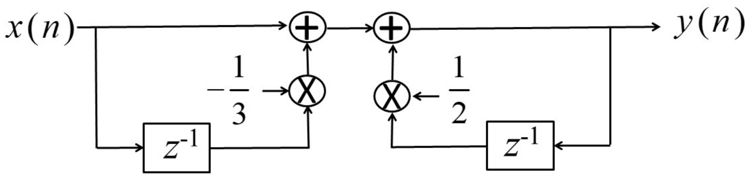
a. $x(t)$ è detto "ergodico" se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo.
b. $x(t)$ è detto stazionario solo se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo
c. affinchè $x(t)$ possa essere ergodico, le medie temporali devono assumere lo stesso valore per tutte le realizzazioni.
d. Nessuna affermazione è corretta.
e. la densità spettrale di potenza è sempre pari in f qualunque sia la tipologia di processo casuale $x(t)$.

SOLUZIONE La risposta corretta è questa: "affinchè $x(t)$ possa essere ergodico, le medie temporali devono assumere lo stesso valore per tutte le realizzazioni" in quanto per i processi ergodici le medie di insieme e quelle temporali devono coincidere, e da ciò consegue il fatto che le una determinata media temporale deve avere un valore costante su tutte le realizzazioni. Le altre risposte sono sbagliate, in quanto:

- la condizione $x(t)$ stazionario non implica necessariamente che le sue realizzazioni siano costanti nel tempo, ma solo che le medie di insieme abbiano determinate condizioni di regolarità nel tempo
- $x(t)$ è detto "ergodico" se le medie di insieme e quelle temporali sono uguali, e questo non implica che le sue realizzazioni siano costanti nel tempo
- la densità spettrale di potenza di un processo casuale può non essere pari se il processo casuale $x(t)$ è complesso

(7) **4a** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri il sistema LTI a tempo discreto descritto dal seguente schema a blocchi (dove z^{-1} rappresenta un ritardo di un campione nel dominio del tempo discreto):



La risposta del sistema al gradino unitario $u[n]$ vale:

a. $y[n] = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4\right] u[n]$
b. $y[n] = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] - \frac{1}{3}u[-n]$
c. Nessuna delle altre risposte è corretta.
d. $y[n] = -\frac{1}{3}u[n] + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$
e. $y[n] = -\frac{1}{3}u[n-1] - \frac{1}{2}\frac{1}{u[n-1]}$
f. $y[n] = \frac{1}{3}\left[4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right] u[n]$

Soluzione

Dallo schema a blocchi si ricava che il sistema è causale e che la relazione ingresso/uscita del sistema è:

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{3}x[n-1] + \frac{1}{2}y[n-1]$$

La trasformata zeta dell'espressione precedente vale:

$$Y(z) = X(z) - \frac{1}{3}X(z)z^{-1} + \frac{1}{2}Y(z)z^{-1}$$

Raccogliendo:

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right] = X(z)\left[1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right]$$

Quindi

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

La trasformata zeta del segnale in ingresso al filtro ($x[n] = u[n]$) vale:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

La trasformata zeta del segnale inuscita dal filtro vale quindi:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = Y(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - z^{-1}}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$R_2 = Y(z)\left(1 - z^{-1}\right)\big|_{z=1} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z=1} = \frac{4}{3}$$

Quindi:

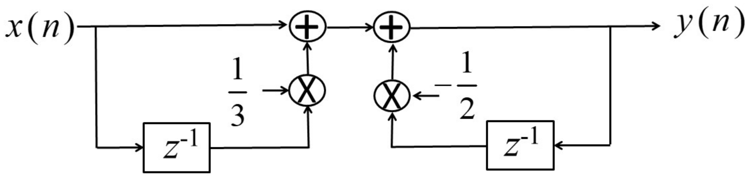
$$Y(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4}{3}\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$y[n] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{3}u[n] = \frac{1}{3}\left[4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

(8) **4b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il sistema LTI a tempo discreto descritto dal seguente schema a blocchi (dove z^{-1} rappresenta un ritardo di un campione nel dominio del tempo discreto):



La risposta del sistema al gradino unitario $u[n]$ vale:

a. $y[n] = \frac{1}{9}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 8\right]u[n]$
b. $y[n] = \frac{1}{9}\left[8 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$
c. Nessuna delle altre risposte è corretta.
d. $y[n] = -\frac{1}{3}u[n-1] + \frac{1}{2}\frac{1}{u[n-1]}$
e. $y[n] = \frac{1}{9}u[n] + \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
f. $y[n] = \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n] + \frac{1}{9}u[n]$

Soluzione

Dallo schema a blocchi si ricava che il sistema è causale e che la relazione ingresso/uscita del sistema è:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] - \frac{1}{2}y[n-1]$$

La trasformata zeta dell'espressione precedente vale:

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}X(z)z^{-1} - \frac{1}{2}Y(z)z^{-1}$$

Raccogliendo:

$$Y(z)\left[1+\frac{1}{2}z^{-1}\right] = X(z)\left[1+\frac{1}{3}z^{-1}\right]$$

Quindi

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

La trasformata zeta del segnale in ingresso al filtro ($x[n] = u[n]$) vale:

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

La trasformata zeta del segnale inuscita dal filtro vale quindi:

$$Y(z) = X(z)\cdot H(z) = \frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$Y(z) = \frac{R_1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1-z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = Y(z)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \left.\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-z^{-1}}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{9}$$

$$R_2 = Y(z)\left(1-z^{-1}\right)\Big|_{z=1} = \left.\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=1} = \frac{8}{9}$$

Quindi:

$$Y(z) = \frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{9}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$y[n] = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{8}{9}u[n] = \frac{1}{9}\left[8+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

(9) **5a** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Sia dato un sistema LTI numerico caratterizzato da questa relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = 2y[n-1] - y[n-2] + x[n] - 3x[n-1] + 2x[n-2]$$

e sia $h[n]$ la sua risposta all'impulso.

Dire quali delle seguenti affermazioni è corretta.

a. $h[n] = u[n] - 2u[n-1]$. Il sistema è causale e non è stabile.
b. $h[n] = u[n] - 2u[n-2]$. Il sistema è FIR e anticausale.
c. $h[n] = u[n+1] - 2u[n+2]$. Il sistema è stabile e anticausale.
d. $h[n] = 2u[n] - u[n-1]$. Il sistema è causale e non è stabile.
e. $h[n] = u[n+1] + 2u[n-2]$. Il sistema è non causale e stabile.
f. Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione

Dalla relazione ingresso/uscita si vede che il sistema è causale (l'uscita al tempo n dipende solo dal valore degli ingressi al tempo corrente e passato e dal valore dell'uscita ai tempi passati).

La trasformata zeta della relazione ingresso/uscita del sistema vale:

$$Y(z) = 2Y(z)z^{-1} - Y(z)z^{-2} + X(z) - 3X(z)z^{-1} + 2X(z)z^{-2}$$

Raccogliendo:

$$Y(z)\left[1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}\right]$$

Quindi

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)^2} = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$H(z)$ si può scrivere come:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - 2z^{-1}\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Essendo il sistema causale, la sua antitrasformata vale:

$$h[n] = u[n] - 2u[n-1]$$

Il sistema è causale, ma non è stabile in quanto ha un polo in $z = 1$ e quindi la ROC non comprende la circoferenza si raggio unitario.

(10) **5b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Sia dato un sistema LTI numerico caratterizzato da questa relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = 2y[n-1] - y[n-2] + x[n] - 4x[n-1] + 3x[n-2]$$

e sia $h[n]$ la sua risposta all'impulso.

Dire quali delle seguenti affermazioni è corretta.

a. $h[n] = u[n] - 3u[n-2]$. Il sistema è FIR e anticausale.
b. $h[n] = u[n+1] + 3u[n-2]$. Il sistema è non causale e stabile.
c. $h[n] = u[n+1] - 3u[n+2]$. Il sistema è stabile e anticausale.
d. $h[n] = 3u[n] - u[n-1]$. Il sistema è causale e non è stabile.
e. Nessuna delle altre risposte è corretta.
f. $h[n] = u[n] - 3u[n-1]$. Il sistema è causale e non è stabile.

Soluzione

Dalla relazione ingresso/uscita si vede che il sistema è causale (l'uscita al tempo n dipende solo dal valore degli ingressi al tempo corrente e passato e dal valore dell'uscita ai tempi passati).

La trasformata zeta della relazione ingresso/uscita del sistema vale:

$$Y(z) = 2Y(z)z^{-1} - Y(z)z^{-2} + X(z) - 4X(z)z^{-1} + 3X(z)z^{-2}$$

Raccogliendo:

$$Y(z)\left[1 - 2z^{-1} + z^{-2}\right] = X(z)\left[1 - 4z^{-1} + 3z^{-2}\right]$$

Quindi

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 4z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 3z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)^2} = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

$H(z)$ si può scrivere come:

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - 3z^{-1}\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Essendo il sistema causale, la sua antitrasformata vale:

$$h[n] = u[n] - 3u[n-1]$$

Il sistema è causale, ma non è stabile in quanto ha un polo in $z = 1$ e quindi la ROC non comprende la circoferenza si raggio unitario.

(11) **6a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Un processo casuale gaussiano bianco $n(t)$ costituisce l'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h_1(t)$ e uscita $z(t)$. Il processo $z(t)$ è posto all'ingresso in parallelo a due sistemi LTI con risposte all'impulso $h_2(t)$ e $h_3(t)$, producendo le uscite $x(t)$ e $y(t)$, rispettivamente. $h_1(t)$ ed $h_2(t)$ valgono 2 per $0 \leq t \leq T/2$ e 0 altrove, ed $h_3(t) = \delta(t) - \delta(t - T/2)$.

Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

a. Le variabili casuali $x(t_1)$ ed $y(t_2)$ sono statisticamente indipendenti per ogni $\tau_0 = t_1 - t_2$.
b. Le variabili casuali $x(t_1)$ ed $y(t_2)$ sono correlate per ogni $\tau_0 = t_1 - t_2$.
c. Le variabili casuali $x(t_1)$ ed $y(t_2)$ sono statisticamente dipendenti per ogni $\tau_0 = t_1 - t_2$.
d. Nessuna delle altre risposte è corretta.
e. Le variabili casuali $x(t_1)$ ed $y(t_2)$ sono statisticamente indipendenti per $\tau_0 = t_1 - t_2 = 0$.

(12) **6b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Un processo casuale gaussiano bianco $n(t)$ costituisce l'ingresso di un sistema LTI con risposta all'impulso $h_1(t)$ e uscita $z(t)$. Il processo $z(t)$ è posto all'ingresso in parallelo a due sistemi con risposte all'impulso $h_2(t)$ e $h_3(t)$, producendo le uscite $x(t)$ e $y(t)$, rispettivamente. $h_1(t)$ vale 1 per $0 \leq t \leq T/3$ e 0 altrove, $h_2(t) = -h_1(t)$, ed $h_3(t) = \delta(t) - \delta(t - T/3)$.

Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

a. Le variabili casuali $x(t_1)$ ed $y(t_2)$ sono statisticamente dipendenti per ogni $\tau_0 = t_1 - t_2$.
b. Le variabili casuali $x(t_1)$ ed $y(t_2)$ sono statisticamente indipendenti per ogni $\tau_0 = t_1 - t_2$.
c. Le variabili casuali $x(t_1)$ ed $y(t_2)$ sono statisticamente indipendenti per $\tau_0 = t_1 - t_2 = 0$.
d. Nessuna delle altre risposte è corretta.
e. Le variabili casuali $x(t_1)$ ed $y(t_2)$ sono correlate per ogni $\tau_0 = t_1 - t_2$.

Soluzione 6b:

Calcoliamo la mutua correlazione tra le variabili:

$$\begin{aligned} E\{(x(t_1)y(t_2)\} &= E\{x(t_1)(z(t_2) - z(t_2 - T/3)\} \\ &= R_{xz}(t_1 - t_2) - R_{xz}(t_1 - t_2 + T/3)\} \\ &= R_{xz}(\tau) - R_{xz}(\tau + T/3)\} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato esplicitamente la relazione ingresso uscita del terzo sistema $y(t) = z(t) * h_3(t) = z(t) - z(t - T/3)$.

La funzione di mutua correlazione tra x e z si ottiene convolvendo la mutua correlazione dell processo di ingresso con h_2, come segue:

$$\begin{aligned} R_{xz}(\tau) &= R_z(\tau) * h_2(\tau) \\ &= KR_{h_1}(\tau) * h_2(\tau) \\ &= -KR_{h_1}(\tau) * h_1(\tau) \end{aligned}$$

dove K rappresenta la psd del rumore bianco di ingresso e $R_{h_1}(\tau)$ è la funzione di autocorrelazione del segnale determinato h_1, una funzione triangolare simmetrica con supporto tra $-(T/3)$ e $(T/3)$ e ampiezza $(T/3)$:

$$R_{h_1}(\tau) = \frac{T}{3}\Lambda(3\tau/T).$$

Ponendo $\tau = 0$ calcoliamo la convoluzione nei due valori

$$\begin{aligned} R_{xz}(0) &= -\int_{-T/3}^{0} T/3\Lambda(t/(T/3)) = -KT^2/18 \\ R_{xz}(T/3) &= -\int_{0}^{T/3} T/3\Lambda(t/(T/3)) = -KT^2/18 \end{aligned}$$

I processi sono tutti gaussiani e stazionari perché lo é il processo di ingresso.

Quindi per $\tau = 0$ $E\{(x(t_1)y(t_2)\} = R_{xz}(0) - R_{xz}(T/3) = 0$.

Le variabili sono scorrelate e quindi anche s.i. perchè i processi sono Gaussiani.

Per valori di τ diversi da zero il risultato non e' **sempre** nullo e quindi le altre risposte non sono corrette.

(13) **7a** Risposta multipla | Una sola alternativa

E' dato un processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità $f_X(x,t)$ uniforme nell'intervallo $[-1, 1]$ e autocorrelazione $R_X(t_1, t_2) = 0$ se $|t_1 - t_2| > T$. Calcolare la varianza di una variable casuale ottenuta da $X(t)$ come $Y(t) = X(t) + 2X(t + 2T)$.

a. $\frac{T}{3}$
b. $\frac{1}{2}$
c. 1
d. $\frac{5}{3}$
e. Nessuna delle altre risposte è corretta.
f. $\frac{T}{4}$

(14) **7b** Risposta multipla | Una sola alternativa

E' dato un processo casuale $X(t)$ con densità di probabilità $f_X(x,t)$ uniforme nell'intervallo $[-1,1]$ e autocorrelazione $R_X(t_1,t_2) = 0$ se $|t_1 - t_2| > T$. Calcolare la varianza di una variabile casuale ottenuta da $X(t)$ come $Y(t) = X(t) + X(t+3T)$.

a. 2
b. $\frac{2}{3}$
c. $\frac{1}{10}$
d. $\frac{T}{3}$
e. $\frac{T}{2}$
f. Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione 7a:

Calcoliamo il valore quadratico medio di $Y(t)$:

$$\begin{aligned}
E\{Y^2(t)\} &= E\{(X(t) + 2X(t+2T))^2\} \\
&= E\{X^2(t) + 4X^2(t+2T) + 4X(t)X(t+2T)\} \\
&= E\{X^2(t)\} + 4E\{X^2(t+2T)\} + 4E\{X(t)X(t+2T)\} \\
&= E\{X^2(t)\} + 4E\{X^2(t+2T)\} + 4R_x(t,t+2T) \\
&= 5E\{X^2(t)\} \\
E\{X^2(t)\} &= \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2} dx = 1/3 \\
E\{Y^2(t)\} &= 5/3
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che il processo X é stazionario in senso stretto del primo ordine perché $f_X(x,t)$ non dipende da t.

Calcoliamo la media:

$$\begin{aligned}
E\{Y(t)\} &= E\{X(t) + 2X(t+2T)\} \\
&= E\{X(t)\} + 2E\{X(t+2T)\} \\
&= 3E\{X(t)\} \\
E\{X(t)\} &= \int_{-1}^{1} x \frac{1}{2} dx = 0 \\
E\{Y(t)\} &= 0
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato di nuovo il fatto che il processo X é stazionario in senso stretto del primo ordine perché $f_X(x,t)$ non dipende da t.

Infine:

$$E\{(Y(t) - E\{Y(t))^2\}\} = E\{Y^2(t)\} - E^2\{Y(t)\} = 5/3$$

(15) **8a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Sia dato il segnale $x(t)$ la cui trasformata di Fourier vale

$$X(f) = \frac{a}{(a + j2\pi f)^2} + \frac{b}{(b - j2\pi f)^2}$$

con $a = 2$ e $b = 3$. Determinare in quali istanti di tempo $x(t)$ assume il valore massimo

a. $x(t)$ assume il valore massimo in $t_1 = -3$ e $t_2 = 2$

b. $x(t)$ assume il valore massimo in $t_1 = \frac{1}{2}$ e $t_2 = -\frac{1}{3}$
c. $x(t)$ assume il valore massimo in $t_1 = -\frac{1}{2}$
d. $x(t)$ assume il valore massimo in $t_1 = -3$
e. $x(t)$ assume il valore massimo in $t_1 = 0$
f. Nessuna delle altre risposte è corretta.

(16) **8b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Sia dato il segnale $x(t)$ la cui trasformata di Fourier vale

$$X(f) = \frac{a}{(a + j2\pi f)^2} + \frac{b}{(b - j2\pi f)^2}$$

con $a = 3$ e $b = 2$. Determinare in quali istanti di tempo $x(t)$ assume il valore massimo

a. $x(t)$ assume il valore massimo in $t_1 = 0$
b. $x(t)$ assume il valore massimo in $t_1 = -2$
c. $x(t)$ assume il valore massimo in $t_1 = \frac{1}{3}$ e $t_2 = -\frac{1}{2}$
d. $x(t)$ assume il valore massimo in $t_1 = -3$ e $t_2 = 2$
e. $x(t)$ assume il valore massimo in $t_1 = -\frac{1}{3}$
f. Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione 8a

La trasfromata di Fourier inversa si ottiene dalle tavole osservando che

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\alpha}{(\alpha + j2\pi f)^2}\right) = \alpha t e^{-\alpha t} u(t)$$

e ricordando che a $X(-f)$ corrisponde $x(-t)$. Il segnale nel tempo vale quindi

$$x(t) = ate^{-at}u(t) - bte^{bt}u(-t) = x_1(t)u(t) + x_2(t)u(-t)$$

Il segnale é quindi fatto dalla somma dei due termini $x_1(t), x_2(t)$ che hanno supporto disgunto. Per trovare il massimo sul semiasse positivo calcoliamo la derivata del primo ordine di $x_1(t)$ che vale

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = ae^{-at} + at \cdot (-ae^{-at}) = ae^{-at} - a^2te^{-at}$$

Ponendo $\frac{dx_1(t)}{dt} = 0$ otteniamo

$$ae^{-at} - a^2te^{-at} = 0$$

$$at = 1 \rightarrow t = \frac{1}{a}$$

e il massimo vale

$$x_1(t)|_{t=1/a} = e^{-1}$$

Da cui $t_1 = \frac{1}{a}$

Sul semiasse negativo

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -be^{bt} - bt \cdot b(e^{bt}) = -be^{-at} - b^2te^{-at}$$

Ponendo $\frac{dx_2(t)}{dt} = 0$ otteniamo

$$-be^{-at} - b^2te^{-at} = 0$$

$$bt = -1 \rightarrow t = -\frac{1}{b}$$

e il massimo vale

$$x_2(t)|_{t=1/b} = e^{-1}$$

come sul semiasse positivo. La funzione complessiva $x(t)$ ha quindi due massimi in $t_1 = 1/a$ e $t_2 = -1/b$.

(17) **9a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$x(t) = \frac{1}{\pi} e^{-10|t-t_0|}$$

in cui t_0 è una costante reale, e sia $X(f)$ la trasformata di Fourier di $x(t)$. Si calcoli la banda a -3dB del segnale, definita come quella frequenza B_{3dB} tale per cui $S_x(B_{3dB}) = \frac{1}{2}S_x^{max}$, dove $S_x(f) = |X(f)|^2$ e S_x^{max} è il valore massimo assunto da $S_x(f)$. Essa vale:

a. $B_{3dB} = \frac{5}{\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
b. $B_{3dB} = 10\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
c. $B_{3dB} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
d. $B_{3dB} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
e. Nessuna delle altre risposte è corretta.

(18) **9b** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$x(t) = \frac{1}{\pi^2}e^{-8|t-t_0|}$$

n cui t_0 è una costante reale, e sia $X(f)$ la trasformata di Fourier di $x(t)$. Si calcoli la banda a -3dB del segnale, definita come quella frequenza B_{3dB} tale per cui $S_x(B_{3dB}) = \frac{1}{2}S_x^{max}$, dove $S_x(f) = |X(f)|^2$ e S_x^{max} è il valore massimo assunto da $S_x(f)$. Essa vale:

a. $B_{3dB} = 8\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
b. $B_{3dB} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
c. $B_{3dB} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$
d. Nessuna delle altre risposte è corretta.
e. $B_{3dB} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$

Soluzione

(a) Si può scrivere:

$$x(t) = K_1 e^{-K_2|t|} * \delta(t-t_0)$$

Dalle tavole:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a|t|}\right\} = \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$$

Pertanto

$$X(f) = K_1\frac{2K_2}{K_2^2+(2\pi f)^2}e^{-j2\pi f t_0}$$

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = \frac{4K_1^2K_2^2}{[K_2^2+(2\pi f)^2]^2}$$

(b) B_{3dB} risolve l'equazione

$$S_x(B_{3dB}) = \frac{1}{2}S_x(0)$$

$$\frac{4K_1^2K_2^2}{[K_2^2+(2\pi B_{3dB})^2]^2} = \frac{1}{2}\frac{4K_1^2K_2^2}{K_2^4}$$

$$[K_2^2+(2\pi B_{3dB})^2]^2 = 2K_2^4$$

$$K_2^2+(2\pi B_{3dB})^2 = \sqrt{2}K_2^2$$

$$(2\pi B_{3dB})^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)K_2^2$$

$$2\pi B_{3dB} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}K_2$$

$$B_{3dB} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}K_2$$

versione a $K_2 = 10 \longrightarrow B_{3dB} = \frac{5}{\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$

versione b $K_2 = 8 \longrightarrow B_{3dB} = \frac{4}{\pi}\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)}$

(19) **10a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Sia dato il segnale

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \cos\left(3\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{\sin^2(\pi t/T)}{\pi^2 t^2} + T$$

Quale delle seguenti risposte è corretta?

a. Non è possibile campionare e ricostruire esattamente il segnale.
b. È possibile campionare e ricostruire esattamente il segnale utilizzando un flitro ricostruttore con banda $B = 1/T$
c. È possibile campionare e ricostruire esattamente il segnale utilizzando un flitro ricostruttore con banda $B = 2/T$
d. È possibile campionare e ricostruire esattamente il segnale utilizzando un flitro ricostruttore con banda $B = 3/2T$

Soluzione
La trasformata di Fourier di $x(t)$ vale:

$$X(f) = P_{1/T}(f) * \left[\delta\left(f - \frac{3}{2T}\right) + \delta\left(f + \frac{3}{2T}\right)\right] + \mathrm{tri}\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right) + T\delta(f) = P_{1/T}\left(f - \frac{3}{2T}\right) + P_{1/T}\left(f + \frac{3}{2T}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right) + T\delta(f)$$

La frequenza massima di $X(f)$ corrisponde al lato destro della porta $P_{1/T}\left(f - \frac{3}{2T}\right)$ ed è pari a $f_{max} = \frac{1}{2T} + \frac{3}{2T} = \frac{2}{T}$. Campionando il segnale con una frequenza di campionamento $f_c > 2f_{max}$, si può ricostruire esattamente il segnale utilizzando un flitro ricostruttore con banda $B = f_c/2 = 2/T$.

(20) **10b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Sia dato il segnale

$$x(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t} \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{\sin^2(\pi t/T)}{\pi^2 t^2} + T$$

Quale delle seguenti risposte è corretta?

a. É possibile campionare e ricostruire esattamente il segnale utilizzando un flitro ricostruttore con banda $B = 3/2T$
b. Non è possibile campionare e ricostruire esattamente il segnale.
c. É possibile campionare e ricostruire esattamente il segnale utilizzando un flitro ricostruttore con banda $B = 1/2T$
d. É possibile campionare e ricostruire esattamente il segnale utilizzando un flitro ricostruttore con banda $B = 1/T$

Soluzione
La trasformata di Fourier di $x(t)$ vale:

$$X(f) = P_{1/T}(f) * \left[\delta\left(f - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{T}\right)\right] + \mathrm{tri}\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right) + T\delta(f) = P_{1/T}\left(f - \frac{1}{T}\right) + P_{1/T}\left(f + \frac{1}{T}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}\right) + T\delta(f)$$

La frequenza massima di $X(f)$ corrisponde al lato destro della porta $P_{1/T}\left(f - \frac{1}{T}\right)$ ed è pari a $f_{max} = \frac{1}{2T} + \frac{1}{T} = \frac{3}{2T}$. Campionando il segnale con una frequenza di campionamento $f_c > 2f_{max}$, si può ricostruire esattamente il segnale utilizzando un flitro ricostruttore con banda $B = f_c/2 = 3/2T$.

Punteggio complessivo: 20