Elaborazione numerica dei segnali

Esercitazione 3

Sistemi lineari a tempo discreto

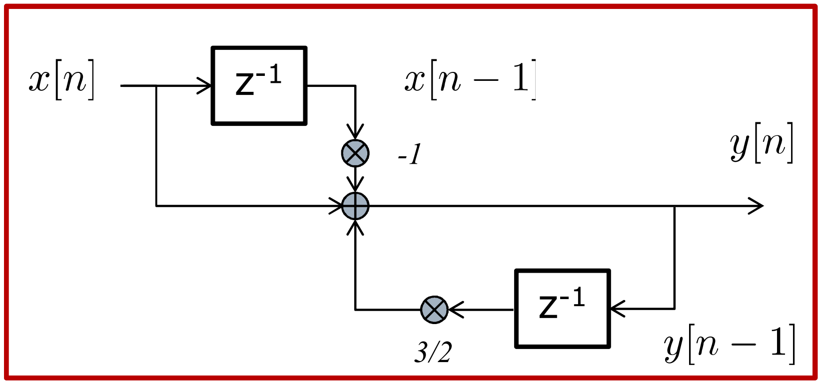
Esercizio 1

Calcolare la risposta all'impulso del filtro numerico specificato dalla seguente equazione ricorsiva:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{3}{2}y[n-1]$$

Iniziamo disegnando il relativo schema a blocchi basato solo su:

- Ritardatori di 1 passo temporale
- Moltiplicatori
- Sommatori



Esercizio 1

Per il calcolo della risposta all'impulso sono possibili (almeno) due strade:

- Calcolo della *H(z)* e sua successiva inversione
- Calcolo "diretto" nel tempo discreto della risposta all'impulso

Soluzione 1

$$y[n]=x[n]-x[n-1]+\frac{3}{2}y[n-1]$$

- Trasformata zeta:

$$Y(z)=X(z)-X(z)z^{-1}+\frac{3}{2}Y(z)z^{-1}$$

$$Y(z)\left[1-\frac{3}{2}z^{-1}\right]=X(z)\left[1-z^{-1}\right]$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}}=\frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}}-\frac{z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}}$$

- Anti-trasformata di H(z):

$$h[n]=\left(\frac{3}{2}\right)^{n}u[n]-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}u[n-1]=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\{u[n-1]+\delta[n]\}-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}u[n-1]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}u[n-1]+\delta[n]$$

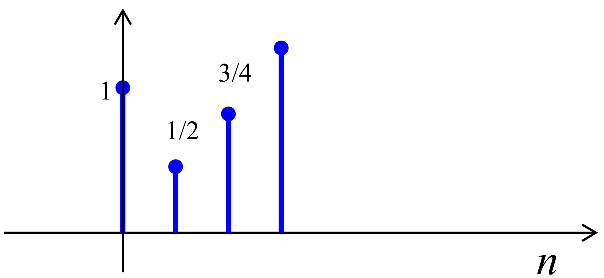
Soluzione alternativa direttamente nel tempo discreto

per definizione

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + \frac{3}{2}h[n-1]$$

considero il sistema scarico $h[i]_{i=-\infty}^{-1} = 0$

$$\begin{aligned} h[0] &= 1 - 0 + \frac{3}{2}h[-1] = 1 \\ h[1] &= 0 - 1 + \frac{3}{2}h[0] = \frac{1}{2} \\ h[2] &= 0 - 0 + \frac{3}{2}h[1] = \frac{3}{2}\frac{1}{2} \\ h[3] &= 0 - 0 + \frac{3}{2}h[2] = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

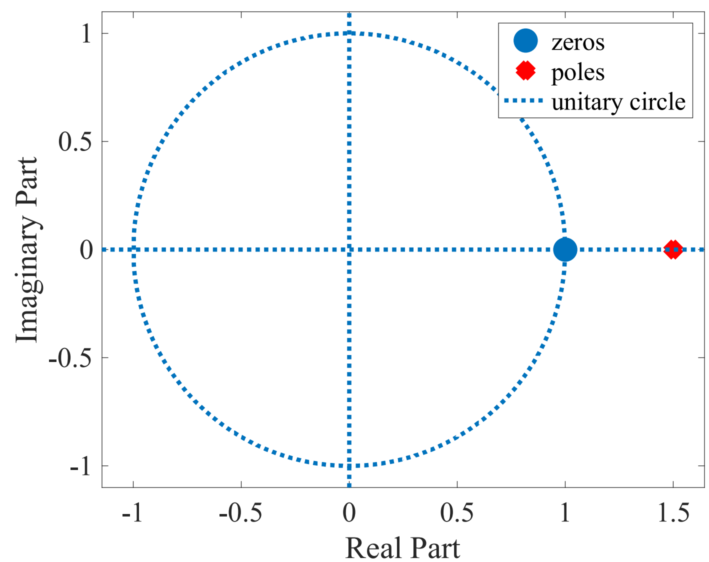


$$\Longrightarrow \quad h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}u[n-1]\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Soluzione 1

- Si noti che il sistema non è stabile in quanto il polo si trova al di fuori del cerchio unitario

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1}} = \frac{z - 1}{z - \frac{3}{2}}$$



- Ed in effetti anche la risposta all'impulso diverge…
  - Nei sistemi a tempo discreto è questo il motivo per cui il calcolo dei poli della *H(z)* è particolarmente rilevante.

Esercizio 2

Dato il filtro FIR

$$y[n] = x[n] - x[n-4]$$

1. Calcolare e disegnare il modulo e la fase della funzione di trasferimento $H(f) = H(e^{j2\pi f})$.

2. Calcolare la sequenza in uscita dal filtro quando in ingresso abbiamo la sequenza

$$x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right] + \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]$$

3. giustificare il risultato di 2) utilizzando il risultato di 1)

Soluzione 2.1 $y[n] = x[n] - x[n-4]$

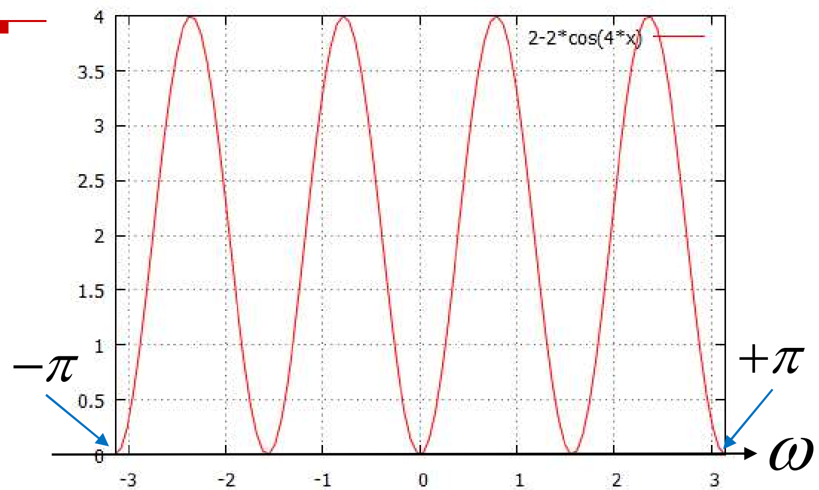
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) - X(e^{j\omega})e^{-j4\omega}$$

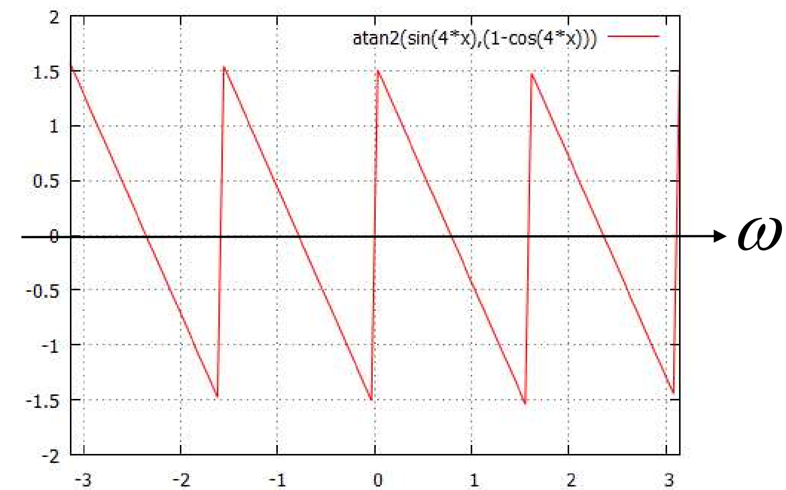
$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = 1 - e^{-j4\omega} = 1 - \cos(4\omega) + j\sin(4\omega)$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \left[1 - \cos(4\omega)\right]^2 + \left[\sin(4\omega)\right]^2$$

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = 2 - 2\cos(4\omega) = 4\sin^2(2\omega)$$

$$\arg\left[H(e^{j\omega})\right] = \arctan\left[\frac{\sin(4\omega)}{1-\cos(4\omega)}\right]$$





Soluzione 2.2 – 2.3

ingresso $\boxed{x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right] + \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]}$

$$\begin{aligned}
y[n] &= \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right] + \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] - \cos\left[\frac{\pi}{2}(n-4)\right] - \cos\left[\frac{\pi}{4}(n-4)\right] \\
&= \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right] + \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] - \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right] + \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right] \\
&= 2\cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]
\end{aligned}$$

- Commenti: La pulsazione $\pi/2$ è azzerata dal modulo della FdT, la pulsazione $\pi/4$ è amplificata di 2 e ha fase nulla

$$|H(e^{j\pi/2})| = 0$$

$$|H(e^{j\pi/4})| = 2 \quad \arg[H(e^{j\pi/4})] = 0$$

Esercizio 3

Si consideri un sistema LTI a tempo discreto, descritto dalla seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = \alpha x(n-1) + 2\beta y(n-1) - \beta^2 y(n-2)$$

dove α e β sono numeri reali.

1. Disegnare lo schema circuitale del sistema.

2. Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$ e discutere la stabilità del sistema al variare dei parametri α e β.

3. Calcolare la risposta all'impulso $h(n)$ e la risposta in frequenza $H(e^{j2\pi f})$.

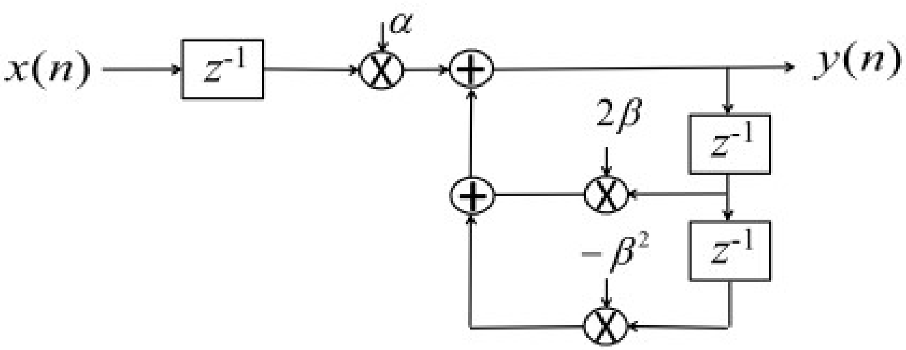
4. Ponendo $\alpha = 1$ e $\beta = \sqrt{2}$, calcolare l'uscita l'uscita $y(n)$ quando all'ingresso è posto il segnale $x(n)$ ottenuto dal campionamento della sinusoide analogica $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ con frequenza di campionamento pari al quadruplo della frequenza di Nyquist.

Soluzione 3.1

$$y(n) = \alpha x(n-1) + 2\beta y(n-1) - \beta^2 y(n-2)$$

1. Disegnare lo schema circuitale del sistema.

- Diagramma a blocchi:



Soluzione 3.2

2. Calcolare la funzione di trasferimento $H(z)$ e discutere la stabilità del sistema al variare dei parametri α e β.

- Calcolo la trasformata zeta della relazione ingresso/uscita:

$$Y(z) = \alpha X(z) z^{-1} + 2\beta Y(z) z^{-1} - \beta^2 Y(z) z^{-2}$$
$$Y(z)\left[1 - 2\beta Y(z) z^{-1} + \beta^2 Y(z) z^{-2}\right] = \alpha\, z^{-1} X(z)$$

- La funzione di trasferimento nel dominio della trasformata zeta vale quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\alpha\, z^{-1}}{1 - 2\beta\, z^{-1} + \beta^2\, z^{-2}} = \frac{\alpha\, z^{-1}}{\left(1 - \beta\, z^{-1}\right)^2}$$

- Il sistema è causale, in quanto l'uscita al tempo n non dipende dai valori futuri degli ingressi e delle uscite. Il sistema inoltre ha un polo doppio in $z = \beta$.
- Un sistema causale e stabile se tutti i poli sono contenuti all'interno del cerchio di raggio unitario, quindi in questo caso il sistema e stabile se $|\beta| < 1$.

Soluzione 3.3

$$H(z) = \frac{\alpha\, z^{-1}}{\left(1-\beta\, z^{-1}\right)^2} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\beta\, z^{-1}}{\left(1-\beta\, z^{-1}\right)^2}$$

- Dalle tavole delle trasformate si ricava:

$$\boxed{n\alpha^n u(n) \longrightarrow \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2} \qquad |z| > |\alpha|}$$

$$h(n) = \frac{\alpha}{\beta} n\beta^n u(n) = \alpha n \beta^{n-1} u(n)$$

- Sostituendo z con $e^{j2\pi f}$ nell'espressione di $H(z)$ si ottiene:

$$H(e^{j2\pi f}) = \frac{\alpha\, e^{-j2\pi f}}{\left(1-\beta\, e^{-j2\pi f}\right)^2}$$

Soluzione 3.4

- La frequenza massima del segnale $x(t) = \cos(2f_0 t)$ è pari a f_0, quindi la frequenza di Nyquist vale $2f_0$ e la frequenza di campionamento è quindi $f_c = 8f_0$.
- Il segnale numerico $x(n)$ può quindi essere scritto come:

$$x(n) = \cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{8f_0}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right)$$

  - ossia una sinusoide numerica con frequenza $f_N = 1/8$.
- Se l'ingresso e una funzione sinusoidale con frequenza numerica f_N, l'uscita può essere scritta come:

$$y(n) = \left|H\left(e^{j2\pi f_N}\right)\right| \cdot \cos\left(2\pi f_N n + \arg\left(H\left(e^{j2\pi f_N}\right)\right)\right)$$

Soluzione 3.4

- La risposta in frequenza calcolata in f_N=1/8 vale:

$$H(e^{j2\pi f_N}) = \frac{\alpha\, e^{-j2\pi f_N}}{\left(1-\beta\, e^{-j2\pi f_N}\right)^2} = \frac{\alpha\, e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\left(1-\beta\, e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^2} = \frac{\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(1-\beta\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2}$$

- Sostituendo $\alpha = 1$ e $\beta = \sqrt{2}$:

$$H(e^{j2\pi f_N}) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)}{\left(1-(1-j)\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)$$

Soluzione 3.4

$$H(e^{j2\pi f_N}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-j)$$

- Modulo e fase di $H(e^{j2\pi f})$ sono pari a:

$$\left|H(e^{j2\pi f_N})\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} = 1$$

$$\arg\left(H(e^{j2\pi f_N})\right) = \frac{3}{4}\pi$$

- Quindi:

$$y(n) = \left|H\left(e^{j2\pi f_N}\right)\right|\cos\left(2\pi f_N n + \arg\left(H\left(e^{j2\pi f_N}\right)\right)\right) =$$

$$= \cos\left(2\pi\frac{1}{8}n + \frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}n + \frac{3}{4}\pi\right)$$

Esercizio 4

Si consideri il sistema LTI discreto con la seguente relazione tra ingresso e uscita

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] + x[n-1] - 2x[n-2]$$

a. Studiare poli e zeri della funzione di trasferimento.

b. Dire se il sistema è di tipo FIR o IIR.

c. Il filtro è a fase minima?

Soluzione 4

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] + x[n-1] - 2x[n-2]$$

$$Y(z)(1 - \frac{1}{4}z^{-1}) = X(z)(1 + z^{-1} - 2z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} - 2z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \frac{z^2 + z - 2}{z^2 - \frac{1}{4}z}$$

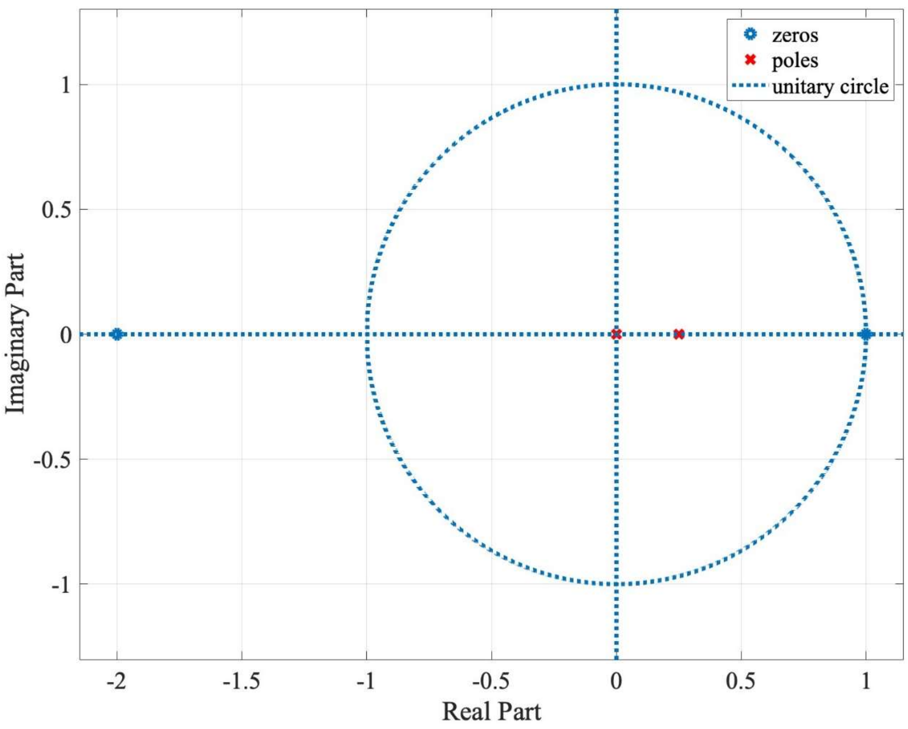
$$z_i = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+8})$$

$$z_{p1} = 0$$

$$z_{p2} = \frac{1}{4}$$

$$z_{z1} = 1$$

$$z_{z2} = -2$$



Soluzione 4

- Il sistema è causale, poiché l'uscita al tempo n dipende solamente dal valore degli ingressi e delle uscite ai tempi precedenti → ROC: $|z|>1/4$

- Il sistema è recursivo e quindi IIR.

- Non è a fase minima perchè non tutti i poli e gli zeri sono all'interno del cerchio di raggio unitario.

Esercizio 5

Si consideri il filtro di tipo FIR con

$$H(z) = (1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1-1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1-1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})$$

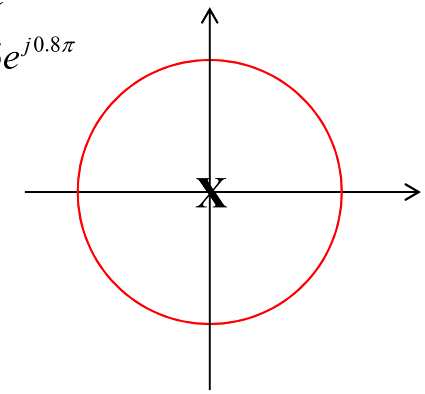
a. Studiare poli e zeri di $H(z)$

b. Studiare la stabilità del sistema inverso $1/H(z)$

Soluzione 5

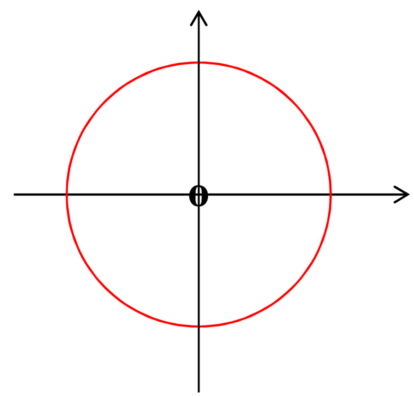
$$H(z)=\left(1-p_1z^{-1}\right)\left(1-p_1^*z^{-1}\right)\left(1-p_2z^{-1}\right)\left(1-p_2^*z^{-1}\right)$$

$$p_1=0.9e^{j0.6\pi}$$
$$p_1=1.25e^{j0.8\pi}$$



a) zeri in p_1, p_2, p_1^*, p_2^*
polo quadruplo in z=0 ⟹ Filtro FIR

b) $\frac{1}{H(z)}$ poli in p_1, p_2, p_1^*, p_2^*
zero quadruplo in z=0 ⟹ Filtro IIR



Il sistema è causale, in quanto H(z) è espressa in termini di potenze di z^{-1} → ROC: $|z|>1.25$

⟹ non stabile

Esercizio 6

Data la funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

a. Studiare zeri e poli e discutere la stabilità

b. Calcolare il modulo della funzione di trasferimento $|H(e^{j2\pi f})|$

Soluzione 6

- Calcolo della relazione ingresso/uscita:

$$Y(z) = H(z)X(z) \qquad \text{con} \qquad H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)Y(z) = \left(z^{-1} - \frac{1}{3}\right)X(z)$$

$$Y(z) = -\frac{1}{3}X(z) + z^{-1}X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}Y(z)$$

- Antitrasformando:

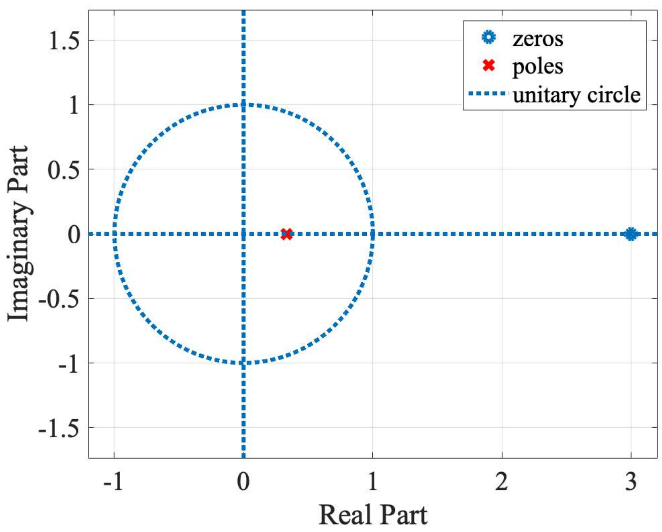
$$y(n) = -\frac{1}{3}x(n) + x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1) \longrightarrow \text{Sistema causale}$$

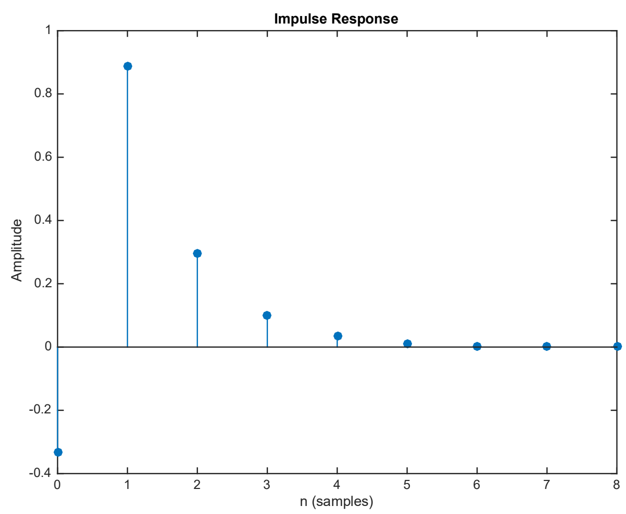
Soluzione 6

$$H(z) = \frac{z^{-1} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1 - \frac{1}{3}z}{z - \frac{1}{3}}$$

Zero in z = 3 Polo in z = 1/3

Il polo è contenuto all'interno del cerchio di raggio unitario → il sistema è stabile



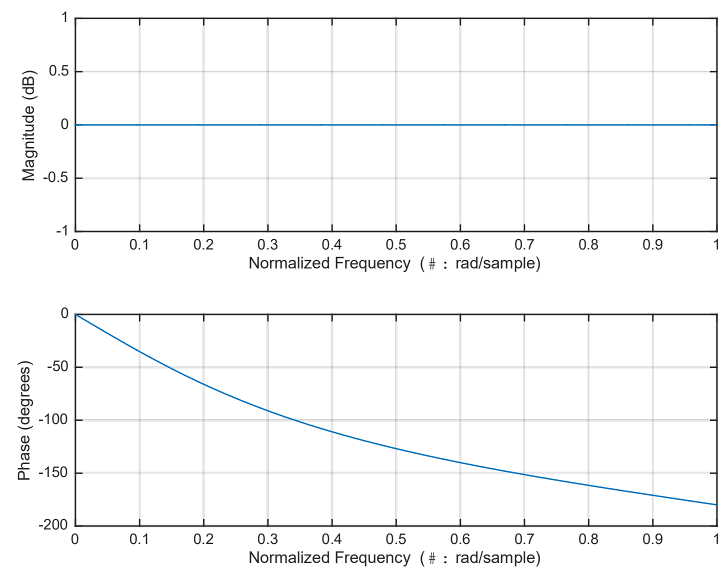


Soluzione 6

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 = \left|\frac{e^{-j\omega}-\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}\right|^2 = \frac{\left(\cos(\omega)-\frac{1}{3}\right)^2+\sin^2(\omega)}{\left(1-\frac{1}{3}\cos(\omega)\right)^2+\frac{1}{9}\sin^2(\omega)} = \frac{1+\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\cos(\omega)}{1+\frac{1}{9}-\frac{2}{3}\cos(\omega)} = 1$$

$$\arg\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right) = \arctan\left(\frac{-\sin(\omega)}{\cos(\omega)-\frac{1}{3}}\right) - \arctan\left(\frac{\sin(\omega)}{1-\frac{1}{3}\cos(\omega)}\right)$$

Filtro “passatutto”



Esercizio 7

La funzione di trasferimento di un sistema numerico vale

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{3}{4} z^{-1}}$$

Al sistema viene messo in ingresso il segnale

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + u[-n-1]$$

a. Si calcoli la risposta all'impulso $h[n]$ del sistema

b. Si calcoli l'uscita $y[n]$

c. Il sistema è stabile?

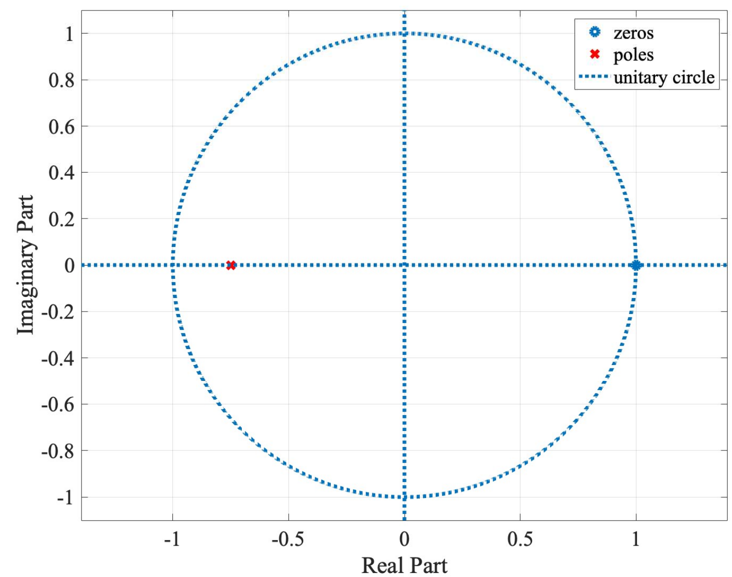
Soluzione 7 (a)

- Calcolo della relazione ingresso/uscita:

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad \text{con} \quad H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

$$\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)Y(z) = \left(1 - z^{-1}\right)X(z)$$

$$Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z)$$



- Antitrasformando:

$$y(n) = x(n) - x(n-1) - \frac{3}{4}y(n-1) \longrightarrow \text{Sistema causale}$$

Soluzione 7 (a/c)

- Calcolo dell'antitrasformata di H(z):

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}} - \frac{z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1}}$$

- Sistema causale → ROC:|z|>3/4

$$h(n) = \left(-\frac{3}{4}\right)^{n} u(n) - \left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$$

- Il sistema è quindi stabile, in quanto la ROC contiene la circonferenza di raggio unitario

Soluzione 7 (b)

- La trasformata z dell'uscita si può trovare moltiplicando H(Z) con X(z), dove:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-z^{-1})} \qquad \frac{1}{3} < |z| < 1$$

La regione di convergenza di X(z) è una corona circolare in quanto sono presenti sia una parte causale che una anticausale

$$Y(z) = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})\cancel{(1-z^{-1})}} \cdot \frac{\cancel{1-z^{-1}}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}} = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})}$$

Cancellazione del polo in z=1

- La ROC di Y(z) è:

$$|z| > \frac{3}{4}$$

Soluzione 7 (b)

- Scomposizione in fratti semplici di Y(z):

$$Y(z) = \sum_i R_i \left(1 - d_i z^{-1}\right) \qquad R_i = Y(z)\left(1 - d_i z^{-1}\right)\Big|_{z=d_i}$$

  - $d_1=1/3$, $d_2=-3/4$

$$Y(z) = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)} \qquad R_1 = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{3}} = -\frac{8}{13} \qquad R_2 = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\Bigg|_{z=-\frac{3}{4}} = \frac{8}{13}$$

$$Y(z) = \frac{-\frac{8}{13}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})} + \frac{\frac{8}{13}}{(1+\frac{3}{4}z^{-1})}$$

- Antitrasformando:

$$y(n) = -\frac{8}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \frac{8}{13}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u(n)$$

- ROC: $|z| > \frac{3}{4}$