Elaborazione dei Segnali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Lezione 9

Funzione di trasferimento
Trasformata zeta

A.A. 2023-2024

Funzione di trasferimento dei sistemi LTI a tempo discreto

Funzione di trasferimento

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Supponiamo di avere un sistema LTI a tempo discreto con risposta all'impulso h(n) e di inviare all'ingresso al sequenza:

$$x(n) = z_0^n$$

con z_0 una costante complessa.

- L'uscita del sistema sarà:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = z_0^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)z_0^{-k} = z_0^n H(z_0)$$

- L'uscita del sistema, quando l'ingresso è $x(n) = z_0^n$, è una sequenza avente lo stesso andamento z_0^n, moltiplicato per il numero complesso

$$H(z_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z_0^{-k}$$

Funzione di trasferimento

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La funzione:

$$\boxed{H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k}}$$

è detta **funzione di trasferimento** del sistema LTI.

- Dal punto di vista matematico, data una generica sequenza x(n), la funzione complessa di variabile complessa

$$\boxed{X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k}}$$

si dice **trasformata zeta** di x(n).

Esempio: ritardatore di N passi

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Sia dato un sistema LTI a tempo discreto con la seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = x(n - N)$$

- Se poniamo all'ingresso del sistema la sequenza

$$x(n) = z^n$$

in uscita si ha

$$y(n) = z^{n-N} = z^n \cdot z^{-N}$$

- Deduciamo quindi che la funzione di trasferimento del ritardatore di N passi è $H(z) = z^{-N}$

Trasformata zeta

Definizione della trasformata zeta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La trasformata zeta si definisce come:

$$\boxed{X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}}$$

  - dove z è una generica variabile complessa:

$$z = \rho \cdot e^{j\omega}$$

- *X*(*z*) costituisce una rappresentazione alternativa del segnale considerato:
  - Il coefficiente del generico termine z^{-n} è il valore del segnale all'istante n.
  - L'esponente di *z* contiene l'informazione temporale di cui abbiamo bisogno per identificare i campioni temporali del segnale.

Analogia con la trasformata di Laplace

- Trasformata di Fourier di x(t):

$$X(f_a)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f_a t}\,dt$$

- Trasformata di Laplace di x(t):

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt$$

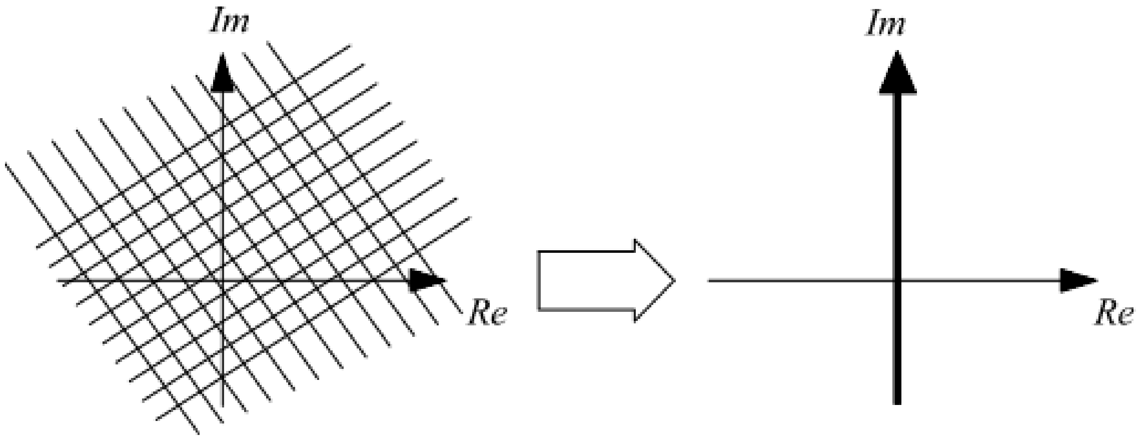
  - con $s=\sigma+j2\pi f_a$.

- Nella trasformata di Fourier si usa la variabile puramente immaginaria $j\Omega$ (con $\Omega= 2\pi f_a$), mentre nella trasformata di Laplace si usa la variabile complessa $s=\sigma+j\Omega$.

Trasformate di Fourier e Laplace

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La trasformata di Fourier è una particolarizzazione della trasformata di Laplace: quest'ultima è definita nel piano complesso (non su tutto, solo nella regione di convergenza), mentre la trasformata di Fourier solo sull'asse immaginario (sottoinsieme del piano complesso).



trasformata di Laplace

trasformata di Fourier

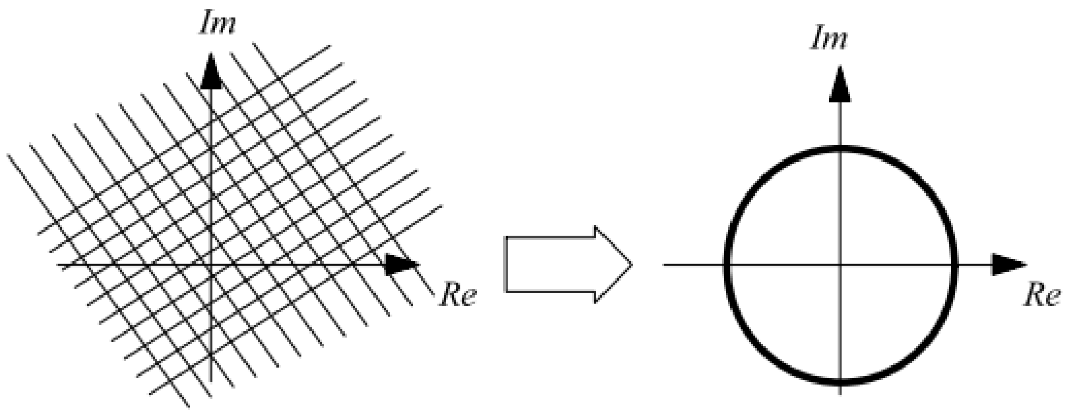
DTFT e trasformata zeta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La trasformata zeta è definita su tutto il piano complesso, mentre la DTFT si ottiene a partire dalla trasformata *z* ponendo $z = e^{j\omega}$:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

  - Luogo dei punti nel piano complesso su cui è definita la DTFT: circonferenza di raggio unitario (|*z*|=1):

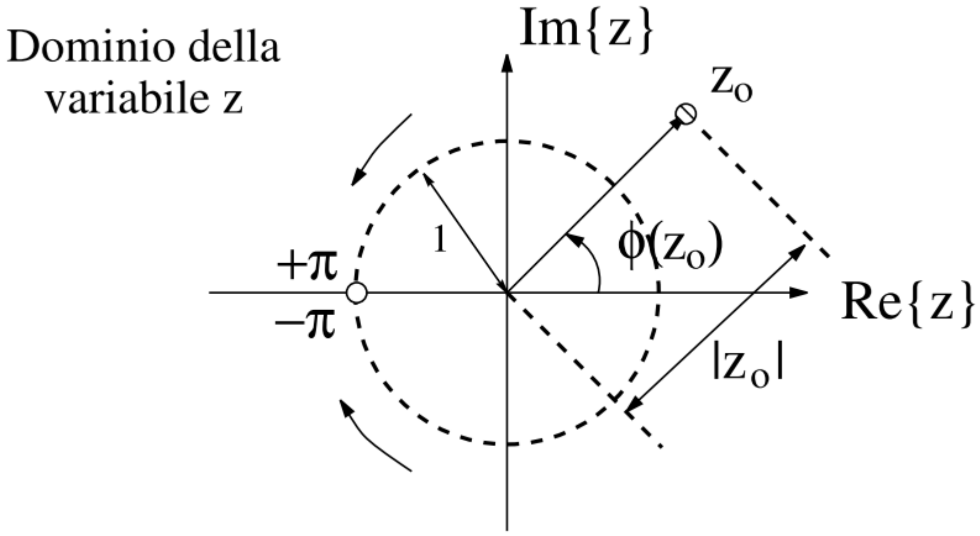


trasformata Zeta **trasformata di Fourier discreta (DTFT)**

DTFT e trasformata zeta

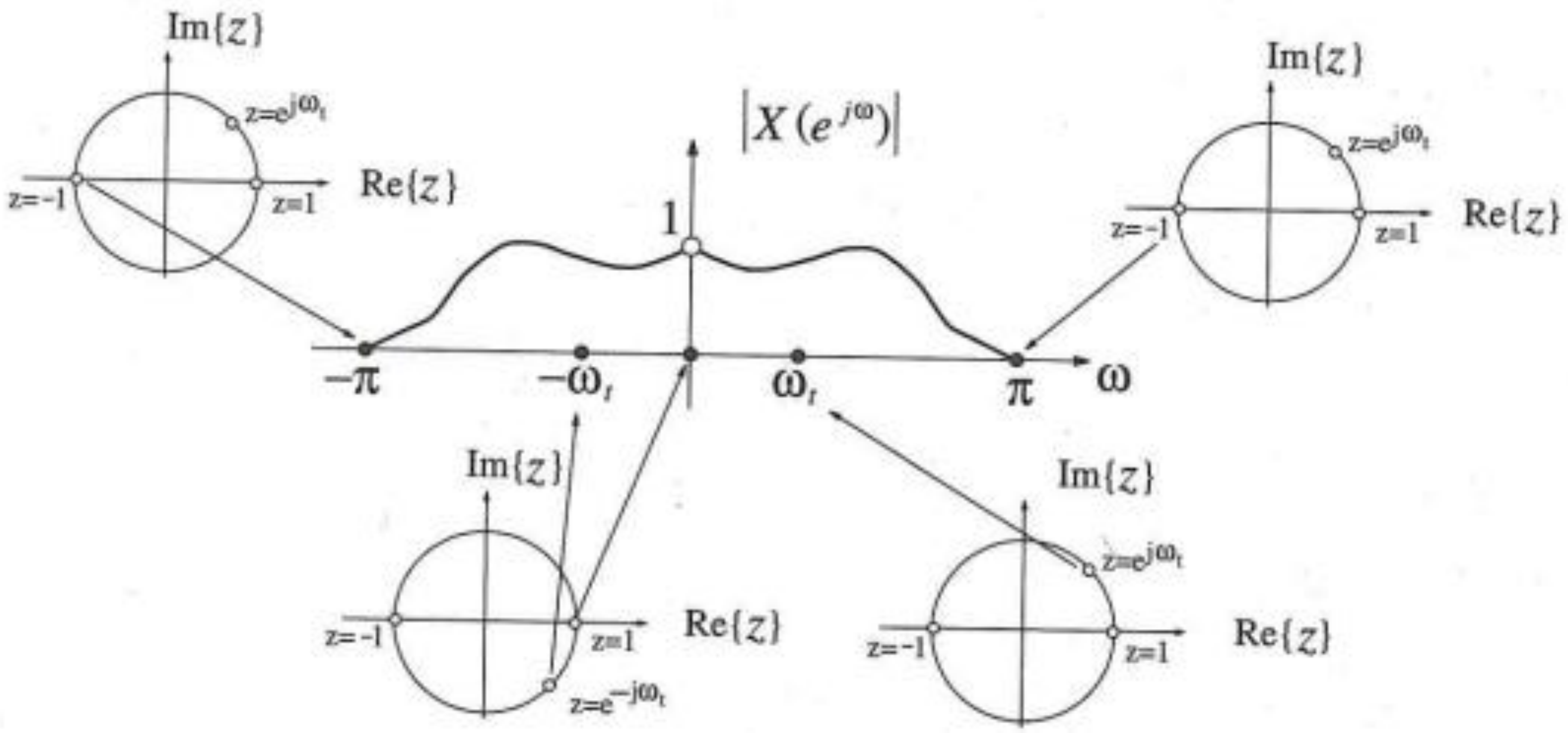
POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Al variare della frequenza numerica f o della pulsazione numerica $\omega=2\pi f$, vengono individuati tutti i punti a modulo costante sulla circonferenza di raggio unitario.
- I punti z= $e^{j\pi}$ e z=$e^{-j\pi}$ sono gli estremi della circonferenza e coincidono nel medesimo punto z=-1:



DTFT e trasformata zeta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni



Analisi della regione di convergenza

Regione di convergenza (ROC)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- L'espressione della trasformata *z* è detta serie di Cauchy-Laurent.

- Il luogo dei punti per cui la serie converge in modo uniforme è detta regione di convergenza, o "Region of Convergence" (ROC) della trasformata *Z* di $x(n)$.

- Nella ROC, $X(z)$ è una funzione analitica (ossia continua e infinitamente derivabile, con derivate continue).

Regione di convergenza (ROC)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Sostituendo l'espressione di *z* in modulo e fase nell'espressione della trasformata zeta:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\left(\rho e^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x(n)\rho^{-n}\right) e^{-j\omega n}$$

  - L'espressione precedente equivale alla DTFT della sequenza $x(n)\rho^{-n}$.
- Condizione di esistenza della DTFT:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| x(k)\rho^{-k} \right| < \infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| \rho^{-k} < \infty$$

  - La ROC dipende solo dal modulo delle pulsazioni complesse, e non dalla loro fase.
  - Le regioni di convergenza nel piano *z* sono delimitate da circonferenze (ossia luoghi dei punti a modulo costante)

Tipologie di sequenze

- Le caratteristiche delle ROC della trasformata zeta dipendono dalla tipologia di sequenza.

- Tipologie di sequenze:
  - <u>Bilatere</u>: sequenze con supporto che si estende sia su istanti di tempo negativi, sia su istanti di tempo positivi
  - <u>Unilatere causali</u>: sequenze che possiedono coefficienti identicamente nulli per istanti di tempo negativi (origine esclusa)
  - <u>Unilatere anticausali</u>: sequenze che possiedono coefficienti identicamente nulli per istanti di tempo positivi (origine inclusa)

Termine causale e anticausale

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La serie della trasformata *z* converge se e solo se la sequenza $x(n)\rho^{-n}$ è assolutamente sommabile.
- La ricerca della ROC di $X(z)$ equivale alla ricerca della regione in cui la serie $x(n)\rho^{-n}$ risulta assolutamente sommabile.
- Per facilitare questa ricerca, è utile separare i termini della sommatoria per n positivo e per n negativo (causale/anticausale):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|\rho^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}|x(n)|\rho^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}|x(n)|\rho^{-n}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}|x(-i)|\rho^{i}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|x(k)|}{\rho^{k}}$$

Termine anticausale

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|\rho^{-n}=\sum_{i=1}^{\infty}|x(-i)|\rho^{i}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|x(k)|}{\rho^{k}}$$

- Se *X(z)* converge in una qualche regione del piano complesso, entrambe le sommatorie a secondo membro devono a loro volta dare un valore finito.

- PRIMA SOMMATORIA
  - Se la prima sommatoria (su *i*) converge, significa che esiste un valore di ρ abbastanza piccolo affinché la sequenza $x(-i)\ \rho^{i}$, per $i=1,\ldots,\infty$, risulti assolutamente sommabile.
  - La regione di convergenza per la prima sommatoria consiste in tutti i punti situati all'interno di una circonferenza di raggio $\rho_1<\infty$.

Termine causale

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(k)| \rho^{-n} = \sum_{i=1}^{\infty} |x(-i)| \rho^{i} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x(k)|}{\rho^{k}}$$

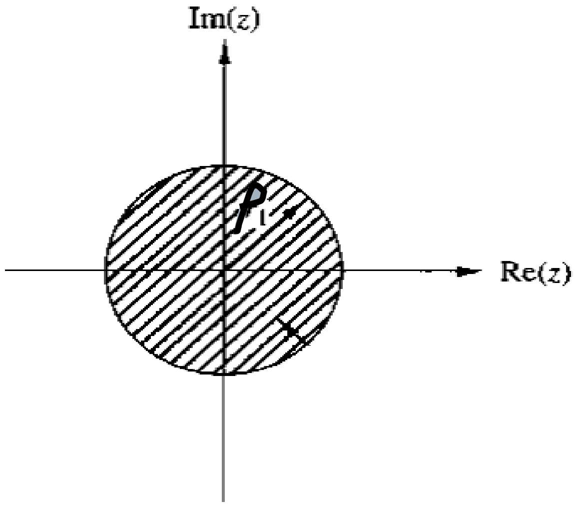
- Se X(z) converge in una qualche regione del piano complesso, entrambe le sommatorie a secondo membro devono a loro volta dare un valore finito.

- SECONDA SOMMATORIA
  - Se la seconda sommatoria (su *k*) converge, significa che esiste un valore di ρ abbastanza grande affinché la sequenza $x(k)/\rho^{k}$, per $k=0,\ldots,\infty$, risulti assolutamente sommabile.
  - La regione di convergenza per la seconda sommatoria consiste in tutti i punti situati all'esterno di una circonferenza di raggio $\rho_2<\infty$.

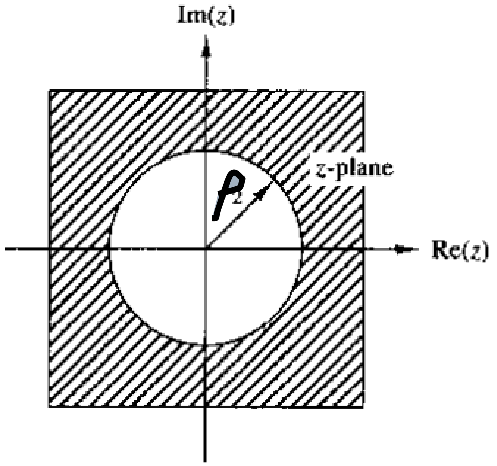
ROC di sequenze unilatere

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Termine anti-causale



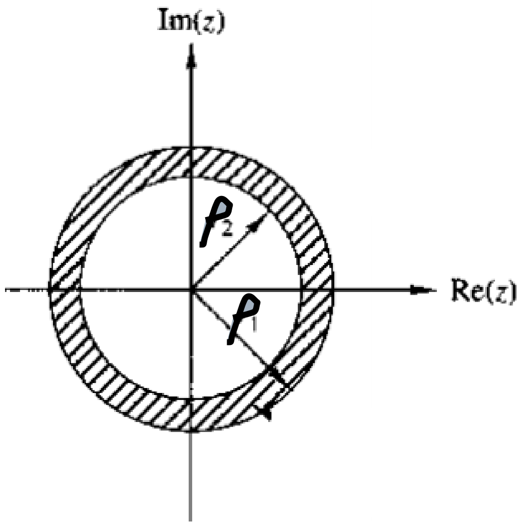
Termine causale



- Se la sequenza x(n) è bilatera, dato che è richiesta la convergenza contemporanea delle due sommatorie, la regione di convergenza di X(z) è in generale la corona circolare data dal'intersezione delle due regioni

ROC di sequenze bilatere

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni



- Tutto dipende dai valori di ρ_1 e ρ_2.
- Se $\rho_1 < \rho_2$, l'intersezione tra le due regioni è nulla, per cui *X(z)* non converge.

Esempi

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- $x(n) = u(n)$ (gradino unitario, e dunque causale)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-z^{-1}} \;,\; \left|z^{-1}\right| < 1$$

  - ROC: $\left|z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 1$ → luogo dei punti esterni alla circonferenza di raggio unitario.

- $x(n) = -u(-n-1)$ (gradino anticausale)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(z^{-1}\right)^n = -\sum_{m=1}^{\infty} z^m =$$

$$= -\frac{1}{1-z} + 1 = -\frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \; |z| < 1$$

  - Il gradino e il gradino anticausale hanno la stessa trasformata *z*, ma regioni di convergenza differenti.

ROC di sequenze a supporto finito

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Le sequenze a supporto finito possiedono un numero finito di coefficienti non nulli:

$$x(n) = \sum_{k=n_1}^{n_2} x(k)\delta(n-k)$$

- La trasformata zeta è esprimibile in forma chiusa come:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) z^{-n}$$

- La trasformata z converge per qualunque punto nel piano complesso eccetto:
  - $z=0$, se esistono termini del tipo z^{-k} con $k>0$
  - $|z|=\infty$, se esistono termini del tipo z^{-k} con $k<0$

Esempi

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- $x(n)=\delta(n) \Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n)z^{-n} = 1$
  - Converge su tutto il piano complesso.

- $x(n)=\delta(n-n_0) \Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n-n_0)z^{-n} = z^{-n_0}$
  - Se $n_0=0$, converge sempre (caso precedente)
  - Se $n_0>0$, diverge per $z=0$
  - Se $n_0<0$, diverge per $|z|=\infty$.

- $x(n)=2\delta(n+1)+\delta(n)+4\delta(n-2) \Rightarrow X(z)=2z+1+4z^{-2}$
  - La serie converge sempre tranne nei punti $z=0$ e $|z|=\infty$
    → ROC: $\{z: 0<|z|<\infty\}$.

Trasformate zeta razionali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Nella maggior parte dei casi, la trasformata zeta possiede una forma chiusa di tipo razionale:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{p_n} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{p_d} a_i z^{-i}}$$

- *N(z)* e *D(z)* sono due polinomi nella variabile z^{-1}, di grado p_n e p_d, rispettivamente.
- La stessa espressione si può esprimere anche in termini di potenze positive di z:

$$X(z) = \frac{z^{-p_n} \sum_{i=0}^{p_n} b_i z^{p_n - i}}{z^{-p_d} \sum_{i=0}^{p_d} a_i z^{p_d - i}} = z^{p_d - p_n} \frac{\sum_{i=0}^{p_n} b_i z^{p_n - i}}{\sum_{i=0}^{p_d} a_i z^{p_d - i}}$$

Poli e zeri della trasformata zeta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Fattorizzando i due polinomi in termini delle rispettive radici elementari, si ha:

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{i=1}^{p_n} \left(1 - c_i z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{p_d} \left(1 - d_i z^{-1}\right)} = \frac{b_0}{a_0} z^{p_d - p_n} \frac{\prod_{i=1}^{p_n} \left(z - c_i\right)}{\prod_{i=1}^{p_d} \left(z - d_i\right)}$$

- Le radici $c_1, \ldots, c_{p_n}$ del numeratore sono dette **ZERI** di X(z)
- Le radici $d_1, \ldots, d_{p_d}$ del denominatore sono dette **POLI** di X(z)

Sequenze a supporto illimitato

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- <u>SEQUENZE CAUSALI</u>
  - La regione di convergenza è del tipo $|z|>d_M$, dove d_M è il modulo del polo più distante dall'origine di $X(z)$
  - Poiché la regione di convergenza non può contenere poli, deve necessariamente corrispondere all'esterno di una circonferenza che li racchiuda tutti.
    - Non ci possono essere poli in $z \to \infty$
- <u>SEQUENZE ANTICAUSALI</u>
  - La regione di convergenza è del tipo $|z|<d_m$, dove d_m è il modulo del polo più vicino all'origine di $X(z)$
  - Poiché la regione di convergenza non può contenere poli, deve necessariamente corrispondere all'interno di una circonferenza che li escluda tutti.

Sequenze bilatere a supporto illimitato

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La trasformata zeta è del tipo:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}=\ldots+x(-k)z^{k}+\ldots+x(-1)z^{1}+x(0)+x(1)z^{-1}+\ldots+x(p)z^{-p}+\ldots$$

- $x(n)$ può essere vista come somma della parte causale e della parte anticausale
- Analogamente, $X(z)$ può essere vista come la somma delle trasformate zeta delle due componenti: $X(z)=X^{+}(z)+X^{-}(z)$
  - $X^{-}(z)$ converge all'interno di un cerchio di raggio d_m, mentre $X^{+}(z)$ converge all'esterno di un cerchio di raggio d_M → La ROC è una corona circolare nel piano z.
  - La trasformata zeta converge in modo uniforme alla funzione $X(z)$ solo se $d_M<d_m$.

Esempio

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Calcolare la trasformata zeta e le regioni di convergenza delle sequenze:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$x_2(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

$$x_3(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

Esempio

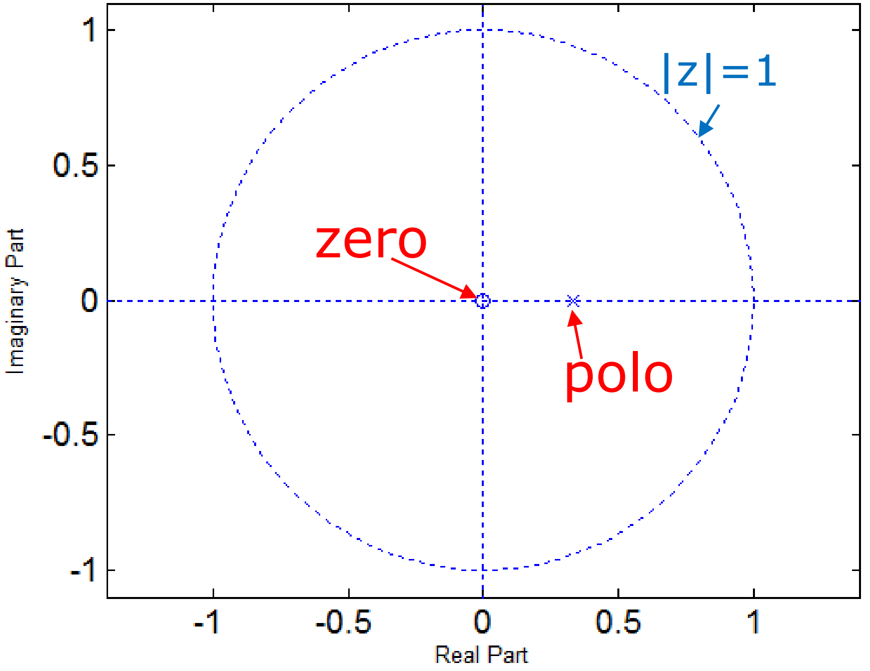
$$x_1(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\,,\ \left|\frac{1}{3}z^{-1}\right|<1$$

$$X_1(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}\qquad |z|>\frac{1}{3}$$

```
% Matlab code:
b=[1 0];
a=[1 -1/3];

figure
set (gca,'FontSize',14)
zplane(b,a)
```



Esempio

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x_2(n) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

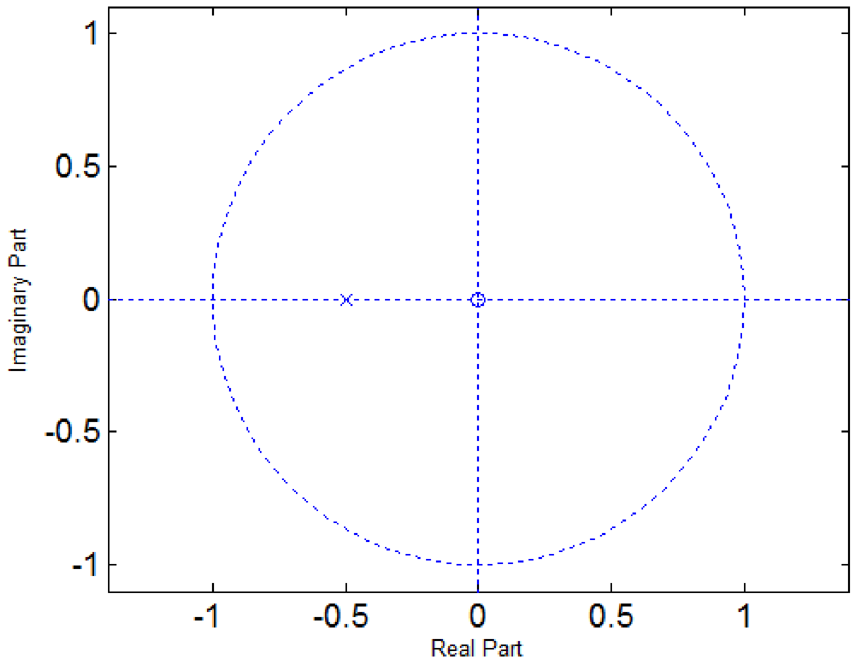
$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n) z^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{-k} z^k = -1 + \sum_{k=0}^{+\infty} (-2z)^k =$$

$$= -1 + \frac{1}{1-(-2z)} = \frac{-2z}{1+2z}, \quad |-2z| < 1$$

$$X_2(z) = \frac{-z}{z+\frac{1}{2}} \quad |z| < \frac{1}{2}$$

```
b=[1 0];
a=[1 1/2];

figure
set (gca,'FontSize',14)
zplane(b,a)
```



Esempio

POLITECNICO
DI TORINO
Dipartimento
di Elettronica
e Telecomunicazioni

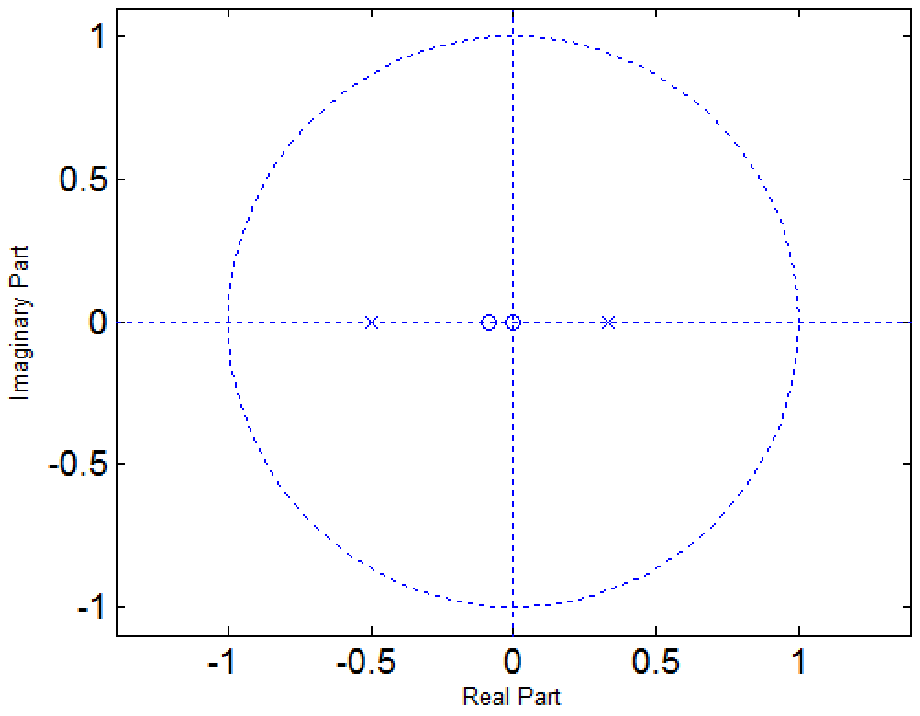
$$x_3(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)-\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

$$X_3(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}+\frac{z}{z+\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{z\left(2z+\frac{1}{6}\right)}{z^2+\frac{1}{6}z-\frac{1}{6}} \qquad \text{con } \frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$$

```
b=[2 1/6 0];
a=[1 +1/6 -1/6];

figure
set (gca,'FontSize',14)
zplane(b,a)
```



Sequenza $x(n)$	$X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$\delta(n-N),\ N>0$	z^{-N}	$\forall z - \{z=0\}$
$\delta(n+N),\ N>0$	z^{+N}	$\forall z - \{z=\infty\}$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert < 1$
$\alpha^n u(n)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$n\alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$n\alpha^{n-1} u(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$(n-1)\alpha^n u(n)$	$\frac{2\alpha z^{-1}-1}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$n^2\alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}(1+\alpha z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})^3}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-n\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$\sin(\omega_o n)u(n)$	$\frac{\sin(\omega_o)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_o)z^{-1}+z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > 1$
$\cos(\omega_o n)u(n)$	$\frac{1-\cos(\omega_o)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_o)z^{-1}+z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > 1$
$\alpha^n \sin(\omega_o n)u(n)$	$\frac{\alpha\sin(\omega_o)z^{-1}}{1-2\alpha\cos(\omega_o)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > \alpha$
$\alpha^n \cos(\omega_o n)u(n)$	$\frac{1-\alpha\cos(\omega_o)z^{-1}}{1-2\alpha\cos(\omega_o)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > \alpha$
$\alpha^n\left[u(n)-u(n-N)\right]$	$\frac{1-\alpha^N z^{-N}}{1-\alpha z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert > 0$

Tavola delle Trasformate *Z* fondamentali