Teoria dei Segnali

Esercitazione 7

Teorema del campionamento

Esercizio 1

Con il termine *frequenza di Nyquist* si indica la minima frequenza di campionamento necessaria per la ricostruzione di un segnale analogico senza *aliasing*. Calcolare la frequenza di Nyquist f_N dei seguenti segnali analogici:

a) $x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$

b) $x(t) = \dfrac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}$

c) $x(t) = \left(\dfrac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\right)^2$

Soluzione Esercizio 1

a) $x(t) = 1 + \cos(2000\pi t) + \sin(4000\pi t)$

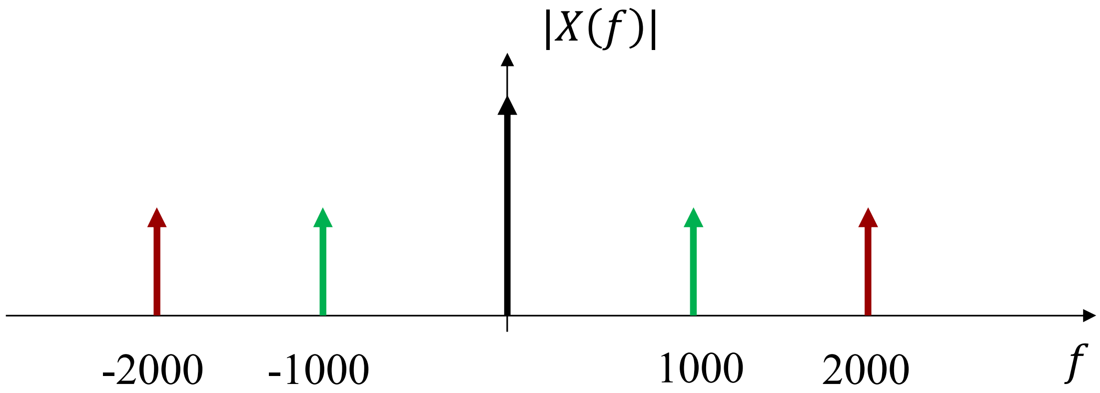
- La frequenza di Nyquist f_N è legata alla massima frequenza B_x del segnale tramite la relazione:

$$f_N = 2B_x$$

- Calcolo la trasformata di Fourier di $x(t)$:

$$X(f) = \delta(f) + \frac{1}{2}\left[\delta(f - 1000) + \delta(f + 1000)\right] + \frac{1}{2j}\left[\delta(f - 2000) - \delta(f + 2000)\right]$$

Soluzione esercizio 1



- Da cui si vede chiaramente che

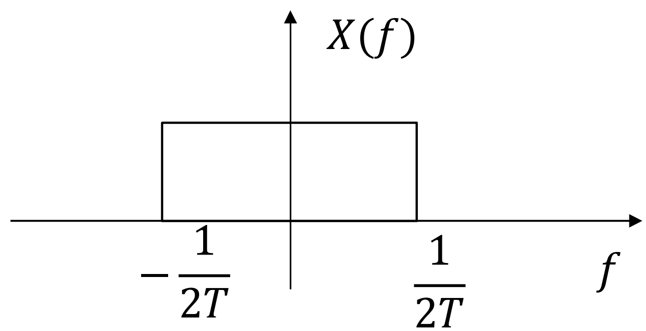
$$B_x = 2000 \text{ Hz} \Longrightarrow f_N = 4000 \text{ Hz}$$

Soluzione Esercizio 1

b) $$x(t)=\frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}=\frac{1}{T}\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi\frac{t}{T}}=\frac{1}{T}\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) \qquad \text{con } T=\frac{1}{4000}$$

- Calcolo la trasformata di Fourier di $x(t)$:

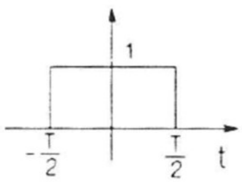
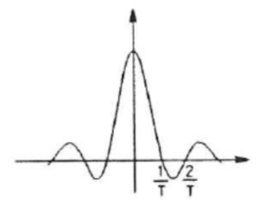
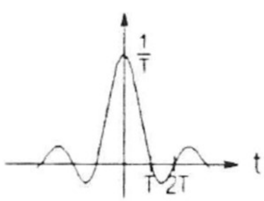
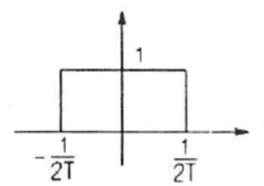
$$X(f)=p_{1/T}(f)$$



$$B_x=\frac{1}{2T}=2000\text{ Hz} \Rightarrow f_N=2B_x=4000\text{ Hz}$$

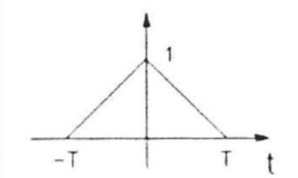
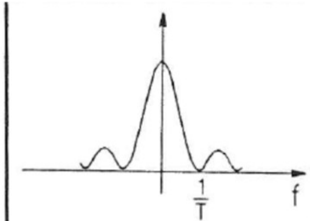
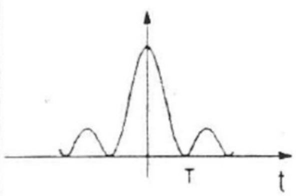
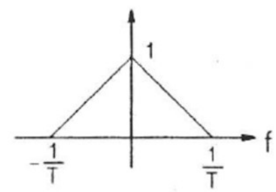
Soluzione Esercizio 1

$$x(t) = \frac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}$$

23		$p_T(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T/2 \\ 0, & \lvert t\rvert > T/2 \end{cases}$	$T\,\mathrm{Sinc}(fT) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$	
24		$\frac{1}{T}\,\mathrm{Sinc}(t/T) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}$	$p_{1/T}(f) = \begin{cases} 1, & \lvert f\rvert < 1/2T \\ 0, & \lvert f\rvert > 1/2T \end{cases}$	

Soluzione esercizio 1

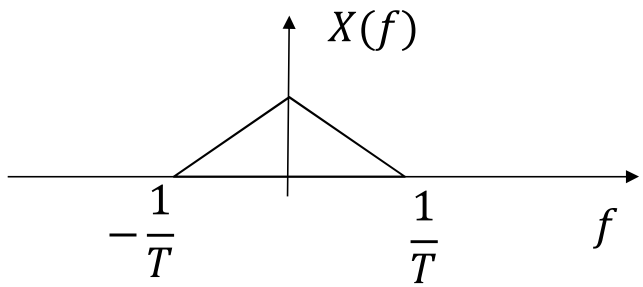
c) $x(t)=\left(\dfrac{\sin(4000\pi t)}{\pi t}\right)^2=\dfrac{1}{T^2}\operatorname{sinc}^2\left(\dfrac{t}{T}\right)$ con $T=\dfrac{1}{4000}$

25		$\mathrm{tri}(t/T) = \begin{cases} 1-\lvert t\rvert/T, & \lvert t\rvert < T \\ 0, & \lvert t\rvert > T \end{cases}$	$T\,\mathrm{Sinc}^2(fT) = T\dfrac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$	
26		$\dfrac{1}{T}\mathrm{Sinc}^2(t/T) = T\left[\dfrac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}\right]^2$	$\mathrm{tri}(fT) = \begin{cases} 1-\lvert f\rvert T, & \lvert f\rvert < 1/T \\ 0, & \lvert f\rvert > 1/T \end{cases}$	

Soluzione Esercizio 1

- Calcolo la trasformata di Fourier di $x(t)$:

$$X(f) = \frac{1}{T}\,\mathrm{tri}(fT)$$



$$B_x = \frac{1}{T} = 4000\ \text{Hz} \Rightarrow f_N = 2B_x = 8000\ \text{Hz}$$

Esercizio 2

Si consideri un segnale $x(t)$ reale e pari, con banda B=1 kHz. Si costruisca il segnale $y(t) = 2x(t)\cos^2(2\pi f_x t)$, dove f_x=5 kHz. Qual è la minima frequenza di campionamento necessaria per campionare $y(t)$?

Si supponga di campionare $y(t)$ con una frequenza di campionamento uguale a 8 kHz e di ricostruire un segnale analogico con la nota operazione di filtraggio, utilizzando un filtro ideale con funzione di trasferimento $H(f) = 1$, per $|f| < 4$ kHz e nulla altrove. Valutare il segnale ricostruito $z(t)$ in funzione del tempo, mettendone in evidenza la dipendenza da $x(t)$.

Soluzione Esercizio 2

$$y(t) = 2x(t)\cos^2(2\pi f_x t) = x(t)[1 + \cos(4\pi f_x t)]$$

$$Y(f) = X(f) * \left[\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f - 2f_x) + \frac{1}{2}\delta(f + 2f_x)\right] =$$

$$= X(f) + \frac{1}{2}X(f - 2f_x) + \frac{1}{2}X(f + 2f_x)$$

- La massima frequenza di *Y*(*f*) è:

$$f_{\max} = 2f_x + B_x$$

- La minima frequenza di campionamento è quindi:

$$f_s = 2f_{\max} = 4f_x + 2B_x = 22\,\mathrm{KHz}$$

Soluzione Esercizio 2

- Supponendo di campionare il segnale con frequenza $f_s=1/T_s=8$ KHz, si ottiene il segnale:

$$y_c(t)=\sum_n y(nT_s)\delta(t-nT_s)=y(t)\sum_n \delta(t-nT_s)$$

$$Y_c(f)=Y(f)*\frac{1}{T_s}\sum_n \delta\left(f-\frac{n}{T_s}\right)=\frac{1}{T_s}\sum_n Y\left(f-\frac{n}{T_s}\right)$$

$$Y(f)=X(f)+\frac{1}{2}X(f-2f_x)+\frac{1}{2}X(f+2f_x)$$

$$Y_c(f)=\frac{1}{T_s}\sum_n\left[X\left(f-\frac{n}{T_s}\right)+\frac{1}{2}X\left(f-2f_x-\frac{n}{T_s}\right)+\frac{1}{2}X\left(f+2f_x-\frac{n}{T_s}\right)\right]$$

Soluzione Esercizio 2

$$Y_c(f) = \frac{1}{T_s}\sum_n \left[X(f - nf_s) + \frac{1}{2}X(f - 2f_x - nf_s) + \frac{1}{2}X(f + 2f_x - nf_s) \right]$$

- Filtrando con $T_s \cdot H(f)$ rimangono le repliche:

$$Z(f) = X(f) + \frac{1}{2}X(f - 2f_x + f_s) + \frac{1}{2}X(f + 2f_x - f_s)$$

- Il segnale ricostruito è quindi:

$$z(t) = x(t) + x(t)\cos(2\pi(2f_x - f_s)t) = x(t) + x(t)\cos(4000\pi t)$$

Esercizio 3

Il segnale $s(t) = 2f_0 \mathrm{sinc}^2(f_0 t)\cos(6\pi f_0 t)$ viene campionato idealmente con passo di campionamento $T_c = \frac{1}{4f_0}$, e viene successivamente filtrato con un filtro passa basso ideale avente banda $[-2f_0; +2f_0]$. Calcolare l'espressione analitica del segnale in uscita dal filtro.

Soluzione Esercizio 3

$$s(t) = 2 f_0 \operatorname{sinc}^2(f_0 t)\cos(6\pi f_0 t)$$

- Il campionamento con frequenza $f_c = \dfrac{1}{T_c} = 4 f_0$ produce il segnale:

$$s_c(t) = \sum_n s(nT_c)\delta(t - nT_c)$$

la cui trasformata di Fourier vale:

$$S_c(f) = \frac{1}{T_c}\sum_n S\left(f - \frac{n}{T_c}\right) = 4 f_0 \sum_n S(f - 4nf_0)$$

Soluzione Esercizio 3

$$s(t) = 2 f_0 \operatorname{sinc}^2(f_0 t) \cos(6\pi f_0 t)$$

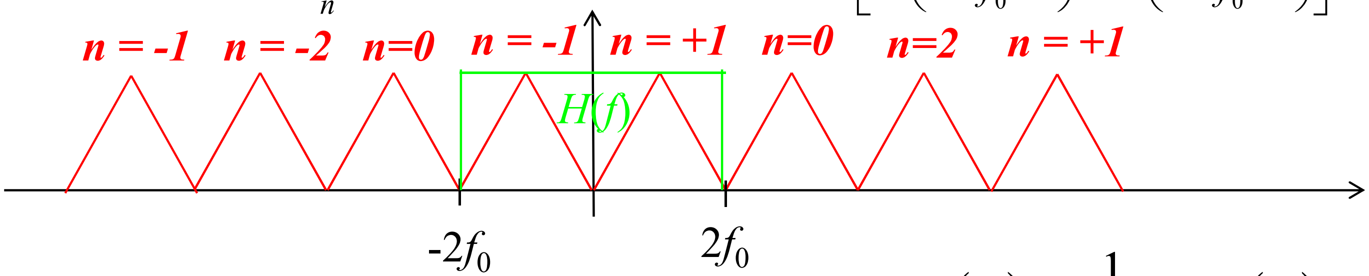
- La trasformata di Fourier di s(t) è data da:

$$S(f) = 2 f_0 \frac{1}{f_0} \operatorname{tri}\left(\frac{f}{f_0}\right) * \frac{1}{2}\left[\delta(f - 3 f_0) + \delta(f + 3 f_0)\right] =$$

$$= \left[\operatorname{tri}\left(\frac{f - 3 f_0}{f_0}\right) + \operatorname{tri}\left(\frac{f + 3 f_0}{f_0}\right)\right]$$

Soluzione Esercizio 3

$$S_c(f) = 4f_0 \sum_n S(f - 4nf_0) \qquad S(f) = \left[\mathrm{tri}\left(\frac{f-3f_0}{f_0}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{f+3f_0}{f_0}\right) \right]$$



$$H(f) = \frac{1}{4f_0} p_{4f_0}(f)$$

$$S_r(f) = H(f) S_c(f) =$$

$$= \mathrm{tri}\left(\frac{f-f_0}{f_0}\right) + \mathrm{tri}\left(\frac{f+f_0}{f_0}\right)$$

$$s_r(t) = f_0 \,\mathrm{sinc}^2(f_0 t) e^{-j2\pi f_0 t} + f_0 \,\mathrm{sinc}^2(f_0 t) e^{+j2\pi f_0 t} =$$

$$= 2f_0 \,\mathrm{sinc}^2(f_0 t) \cos(2\pi f_0 t)$$

Esercizio 4

Il segnale $x(t)$ con banda B_x è campionato ogni T_s secondi ed il seguente segnale:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\mathrm{tri}(t - nT_s)$$

é generato, dove:

$$\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T_s} & \mathrm{per}|t| < T_s \\ 0 & \mathrm{altrimenti} \end{cases}$$

Attenzione: in questa definizione la funzione tri(t) ha una definizione diversa da quanto solitamente usato (normalmente infatti è con supporto temporale [-1,+1]

Questo tipo di campionamento è detto *first-order sampling*.

- Trovare la trasformata di Fourier di $x_p(t)$
- Sotto quali condizioni è possibile ricostruire il segnale analogico $x(t)$ a partire da $x_p(t)$?
- Determinare il filtro che consenta la ricostruzione perfetta del segnale $x(t)$ a partire dal segnale $x_p(t)$.

Soluzione Esercizio 4

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\,\mathrm{tri}(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) * \mathrm{tri}(t)$$

$$X_p(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)\cdot T_s\,\mathrm{sinc}^2(fT_s) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right)\cdot \mathrm{sinc}^2(fT_s)$$

Soluzione Esercizio 4

- Il segnale $x(t)$ può essere ricostruito a partire da $x_p(t)$ se le repliche non si sovrappongono:

$$f_s = \frac{1}{T_s} \geq 2B_x$$

- Il filtro che consente la ricostruzione perfetta è:

$$H(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{sinc}^2(fT_s)} & \text{per } |f| \leq B_x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esercizio 5

Il segnale $x(t)$ con banda B_x è campionato alla frequenza di Nyquist $1/T_s$. In seguito si genera il seguente segnale:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

- Trovare la trasformata di Fourier di $x_p(t)$
- È possibile ricostruire $x(t)$ partendo da $x_p(t)$, utilizzando un sistema LTI?

Soluzione Esercizio 5

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x(nT_s)\delta(t - nT_s) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t - nT_s)$$

- Il treno di delta può essere scomposto nella somma di due segnali:

$$x_p(t) = x(t)\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{2k} \delta(t - 2kT_s) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^{2k+1} \delta(t - (2k+1)T_s)\right] =$$

$$= x(t)\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2kT_s) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - (2k+1)T_s)\right]$$

Soluzione Esercizio 5

$$x_p(t) = x(t)\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t - k(2T_s)) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t - (k(2T_s) + T_s))\right]$$

- Calcolo la trasformata di Fourier:

$$X_p(f) = X(f) * \left[\frac{1}{2T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{k}{2T_s}\right) - \frac{1}{2T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{k}{2T_s}\right)e^{-j2\pi f T_s}\right] =$$

$$= X(f) * \left[\frac{1}{2T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{k}{2T_s}\right)\left(1 - e^{-j\pi k}\right)\right] =$$

$$= X(f) * \left[\frac{1}{T_s}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f - \frac{2l+1}{2T_s}\right)\right] = \frac{1}{T_s}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}X\left(f - \frac{2l+1}{2T_s}\right) = 2B_x\sum_{l=-\infty}^{+\infty}X\left(f - (2l+1)B_x\right)$$

- Rimangono solo le repliche dispari del segnale, che sono sufficientemente distanziate da consentire la perfetta ricostruzione del segnale (ma non con un sistema LTI, perché c'è bisogno di una traslazione in frequenza → moltiplicazione per un esponenziale complesso nel tempo).

Esercizio 6

Si consideri il segnale $s(t)$ di tipo passabasso con banda $B = 50Hz$; tale segnale viene campionato senza perdita alla minima frequenza di campionamento $f_{c,min}$, dando luogo ad una serie di campioni:

$$s(nT_c) = \begin{cases} \text{-1} & n = -2, -1 \\ +1 & n = +1, +2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Determinare il valore del segnale nell'istante $t = 0.005s$.

Soluzione Esercizio 6

$$s(nT_c) = \begin{cases} -1 & n = -2, -1 \\ +1 & n = +1, +2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- Campionamento senza perdite alla frequenza:

$$f_{c.\min} = 2B = 100\,\text{Hz}$$

$$s(t) = \sum_n s(nT_c) k(t - nT_c) = \sum_n s(nT_c) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - n\right) =$$

$$= \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - 1\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - 2\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_c} + 1\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_c} + 2\right)$$

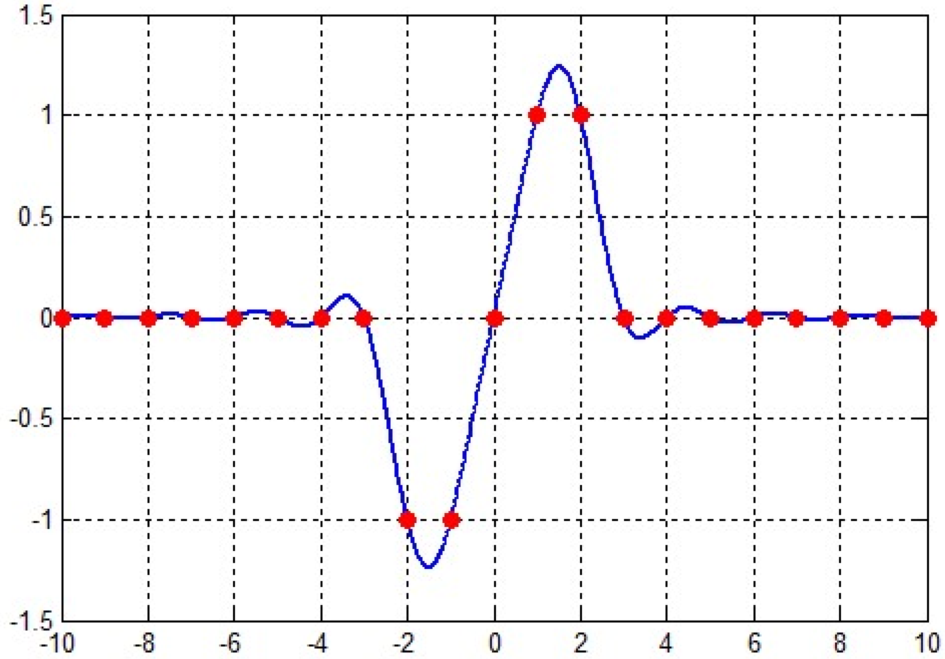
$$s(t_0) = \operatorname{sinc}\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{sinc}\left(-\frac{3}{2}\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{3}{2}\right) - \operatorname{sinc}\left(\frac{5}{2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{3\pi} - \frac{2}{5\pi} = \frac{8}{5\pi} \cong 0.5093$$

$$t_0 = 0.005\,\text{s}$$

$$\frac{t_0}{T_c} = 0.005\,\text{s} \cdot 100\,\text{Hz} = \frac{1}{2}$$

Soluzione Esercizio 6



Esercizio 7

Il segnale sinusoidale $x(t) = 2\sin(2\pi f_0 t)$ con $f_0 = 3$ kHz viene campionato senza perdite e quantizzato usando un quantizzatore uniforme a 256 livelli, seguito da un codificatore alla cui uscita è presente un flusso di bit. Quale è la minima velocità $R_{b;min}$ di generazione dei bit?

Soluzione Esercizio 7

- X(f) ha frequenza massima pari a 3 kHz, quindi la minima frequenza di campionamento f_N necessaria per campionarlo senza perdite è pari a 6 kHz.

- Il quantizzatore a 256 livelli utilizza $n_{bit}=\log_2(256)=8$ bit per rappresentare ogni campione.

- La minima velocità di generazione dei bit è quindi pari a:

$$R_{b;\min} = n_{bit} \cdot f_N = 8\,\text{bit/camp} \cdot 6000\,\text{camp/s} = 48000\,\text{bit/s} = 48\,\text{kbit/s}$$