Elaborazione numerica dei segnali

Esercitazione 3

Trasformata zeta

Versione 2023

Richiami Teorici

- Definizione della trasformata *Z:*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

- Principali applicazioni
  - Per un sistema discreto lineare e tempo invariante, la funziona di Trasferimento è legata alla trasformata *Z* della risposta all'impulso discreta

$$\text{Se: } x(n) = z_0^n \rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, x(n-k) = z_0^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)\, z_0^{-k} = z_0^n\, H(z_0)$$

  - Conseguentemente
    - La risposta in frequenza è legata alla trasformata *Z*
    - La convoluzione lineare nel tempo discreto diventa un prodotto nelle trasformate *Z*

Alcune Trasformate Z

Sequenza $x(n)$	$X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$\delta(n-N),\ N>0$	z^{-N}	$\forall z - \{z=0\}$
$\delta(n+N),\ N>0$	z^{+N}	$\forall z - \{z=\infty\}$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert < 1$
$\alpha^n u(n)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$n\alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$n\alpha^{n-1} u(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$(n-1)\alpha^n u(n)$	$\frac{2\alpha z^{-1}-1}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$n^2\alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}(1+\alpha z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})^3}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-n\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$\sin(\omega_o n)u(n)$	$\frac{\sin(\omega_o)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_o)z^{-1}+z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > 1$
$\cos(\omega_o n)u(n)$	$\frac{1-\cos(\omega_o)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_o)z^{-1}+z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > 1$
$\alpha^n \sin(\omega_o n)u(n)$	$\frac{\alpha\sin(\omega_o)z^{-1}}{1-2\alpha\cos(\omega_o)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > \alpha$
$\alpha^n \cos(\omega_o n)u(n)$	$\frac{1-\alpha\cos(\omega_o)z^{-1}}{1-2\alpha\cos(\omega_o)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > \alpha$
$\alpha^n[u(n)-u(n-N)]$	$\frac{1-\alpha^N z^{-N}}{1-\alpha z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert > 0$

E' inoltre utile ricordare quanto segue:

SERIE GEOMETRICA

- infinita

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$ per $|a|<1$ (altrimenti non converge)

- versione "finita"

$$\sum_{n=0}^{K} a^n = \frac{1-a^{K+1}}{1-a}$$

Proprietà Trasformate *Z*

Sequenza $x(n),\ y(n)$	$X(z),\ Y(z)$	ROC $R_x,\ R_y$
$x(n-N)$	$z^{-N}X(z)$	se $N>0 \to R_x \backslash \{z=0\}$ se $N<0 \to R_x \backslash \{z=\infty\}$
$\alpha_1 x(n)+\alpha_2 y(n),\ \alpha_1,\alpha_2$ costanti	$\alpha_1 X(z)+\alpha_2 Y(z)$	contiene $R_x \cap R_y$
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_x}$
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R_x
$x^*(-n)$	$X^*(\frac{1}{z^*})$	$\frac{1}{R_x}$
$\Re(x(n))$	$\frac{1}{2}\left[X(z)+X^*(z^*)\right]$	contiene R_x
$\Im(x(n))$	$\frac{1}{2j}\left[X(z)-X^*(z^*)\right]$	contiene R_x
$x(-n)u(-n-1)$	$X(z^{-1})-x(0)$, $x(n)$ causali	$-$
$\alpha^n x(n)$	$X(z/\alpha)$	$\|\alpha\| \cdot R_x$
$nx(n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	R_x meno $z=\infty$ o $z=0$
$nx(-n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z^{-1})$	contiene $\frac{1}{R_x}$
$n\alpha^n x(n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z/\alpha)$	$\|\alpha\| \cdot R_x$ meno $z=\infty$ o $z=0$
$\cos(2\pi fn)x(n)$	$\frac{1}{2}\left[X(ze^{j2\pi f})+X(ze^{-j2\pi f})\right]$	$-$
$\sin(2\pi fn)x(n)$	$\frac{j}{2}\left[X(ze^{j2\pi f})-X(ze^{-j2\pi f})\right]$	$-$
$x(n)\star y(n)$	$X(z)Y(z)$	contiene $R_x \cap R_y$

Esercizio 1 *(in forma di quiz)*

- Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ che abbia una trasformata zeta $X(z)$ razionale. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

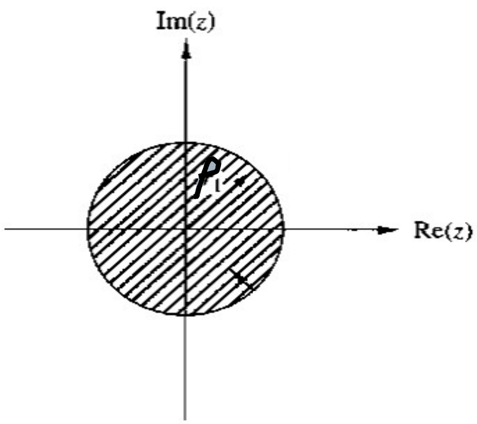
1. per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo minimo
2. per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo massimo
3. per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo massimo
4. per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo minimo

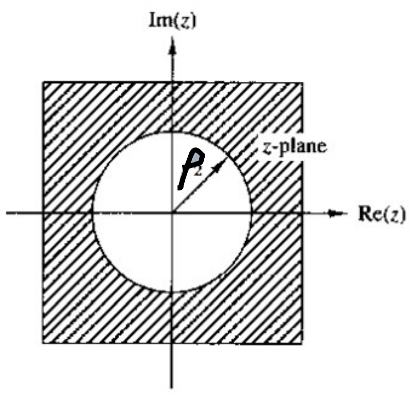
Regione di convergenza (ROC)

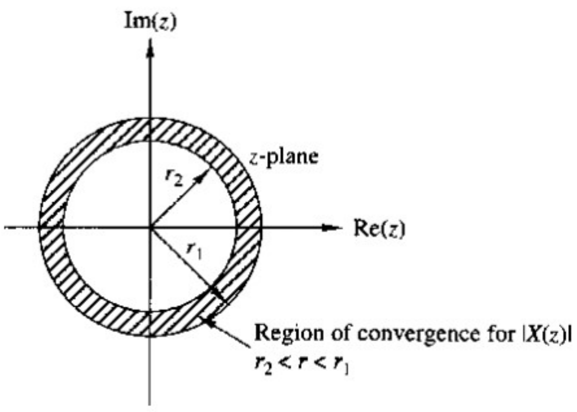
- Il luogo dei punti complessi *z* per cui la serie che esprime *H(z)* converge in modo uniforme è detta regione di convergenza, o “Region of Convergence” (ROC) della trasformata *Z* di *x(n)*.

  - Nella ROC, *X(z)* è una funzione analitica (ossia continua e infinitamente derivabile, con derivate continue).

Regione di convergenza (ROC)







Sequenze anticausali:
la ROC è l'interno di una circonferenza

Sequenze causali:
la ROC è l'esterno di una circonferenza

Sequenze bilatere:
la ROC è una "corona circolare" delimitate da due circonferenze

Nota: le precedenti definizioni di ROC possono comprendere anche situazioni in cui il raggio di una delle circonferenze coinvolte vada a infinito o a zero

Regione di convergenza (ROC)

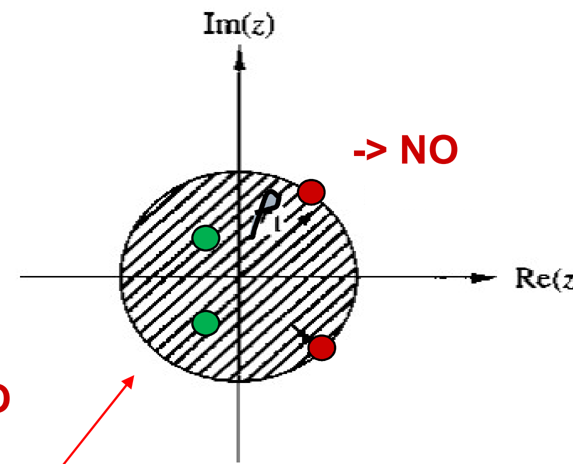
- Per le **sequenze a supporto finito** la trasformata *z* converge per qualunque punto nel piano complesso eccetto:
  - $z = 0$, se esistono termini del tipo z^{-k} con $k > 0$
  - $|z| = \infty$, se esistono termini del tipo z^{-k} con $k < 0$

- Per le sequenze a supporto infinito di tipo razionale $X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{i=1}^{p_n} (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{p_d} (1 - d_i z^{-1})} = \frac{b_0}{a_0} z^{p_d - p_n} \frac{\prod_{i=1}^{p_n} (z - c_i)}{\prod_{i=1}^{p_d} (z - d_i)}$
- CAUSALI
  - La regione di convergenza è del tipo $|z| > d_M$, dove d_M è il modulo del polo più distante dall'origine di $X(z)$
    - Non ci possono essere poli in $z \rightarrow \infty$
- ANTICAUSALI
  - La regione di convergenza è del tipo $|z| < dm$, dove d_m è il modulo del polo più vicino all'origine di $X(z)$

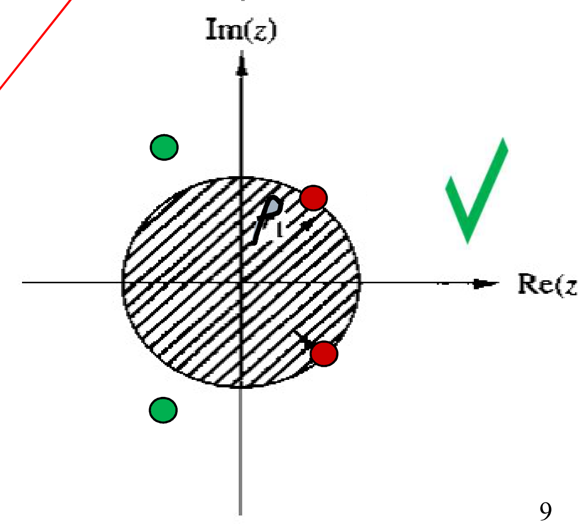
Soluzione 1

- Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ che abbia una trasformata zeta $X(z)$ razionale. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

1. ~~per un segnale $x[n]$ **causale** la regione di convergenza è l'**interno** di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo minimo~~ **-> NO**
2. ~~per un segnale $x[n]$ **causale** la regione di convergenza è l'**interno** di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo massimo~~ **-> NO**
3. per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo massimo
4. per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al modulo del polo di modulo minimo



-> NO



Esercizio 2

- Calcolare la trasformata zeta e la regione di convergenza dei seguenti segnali a tempo discreto:

1. $x[n] = \alpha^{|n|}$

2. $x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

3. $x[n] = \begin{cases} n & 0 \leq n \leq N \\ 2N-n & N+1 \leq n \leq 2N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Soluzione 2.1

$x[n] = \alpha^{|n|}$ (è una "esponenziale bilatera" discrete)

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|n|} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{n} z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \alpha^{-n} z^{-n} = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha z^{-1})^{n} + \sum_{m=0}^{+\infty} (\alpha z)^{m} - 1 = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha z} - 1 = \\
&= \frac{1-\alpha z + 1 - \alpha z^{-1} - 1 - \alpha^2 + \alpha z^{-1} + \alpha z}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)} = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}
\end{aligned}
$$

- Regione di convergenza (osservando la convergenza delle serie geometriche utilizzate):

$$|\alpha z^{-1}| < 1, |\alpha z| < 1 \quad \Rightarrow \quad |z| > |\alpha|, |z| < \frac{1}{|\alpha|}$$

Soluzione 2.1

$$X(z) \quad = \quad \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$$

$$\text{ROC} \quad : \quad |\alpha| < |z| < \frac{1}{|\alpha|}$$

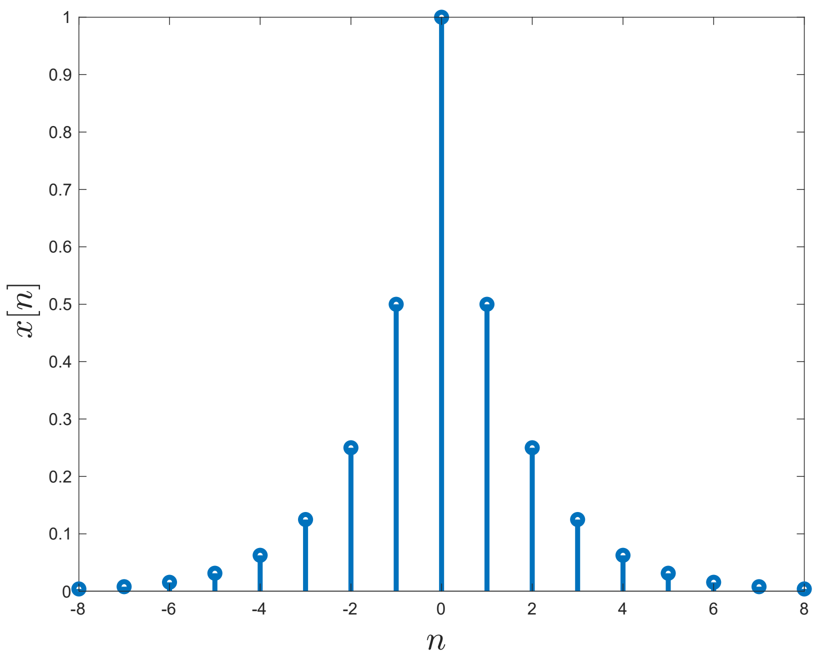
- La ROC è diversa da zero solo se $|\alpha|<1$.

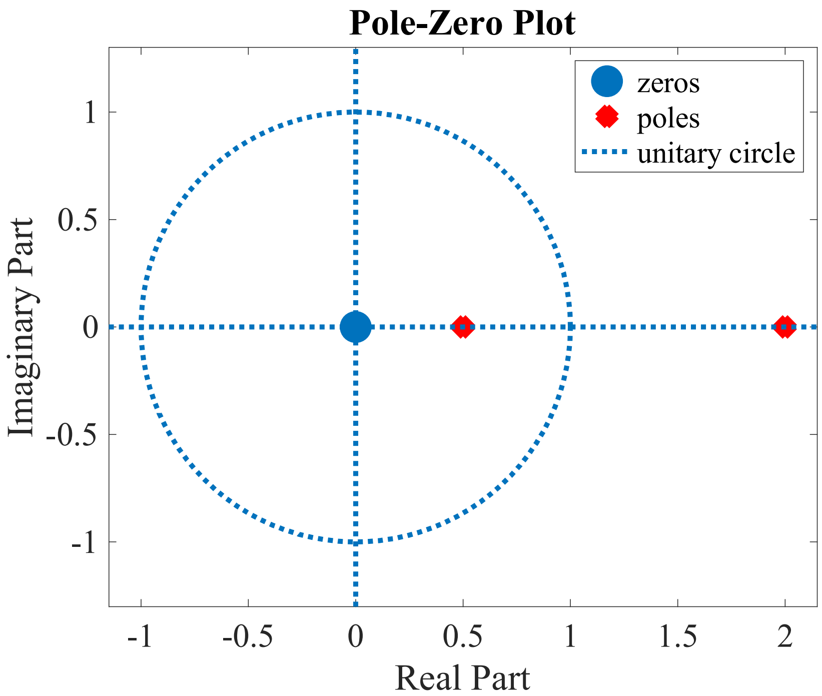
Soluzione 2.1

Funzione Matlab
`zplane(num,den)`

$$X(z) = \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)} = \frac{z(1-\alpha^2)}{-\alpha z^2 + (1+\alpha^2)z - \alpha}$$

$\alpha = 0.5$





Soluzione 2.2

$$x[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{z^{-N}}{z^{-1}} \frac{z^N - 1}{z - 1} = \frac{z^N - 1}{z^{N-1}(z-1)}$$

- Zeri: $z = e^{j\frac{2\pi k}{N}} \quad k = 0, \ldots, N-1$

$$ROC : |z| > 0$$

- Lo zero in z=1(k=0) cancella il polo in z=1:
- Infatti si può ricordare che $z^N - 1 = (z-1)(z^{N-1} + z^{N-2} + \ldots + 1)$

Soluzione 2.2

Funzione Matlab
`zplane(num,den)`

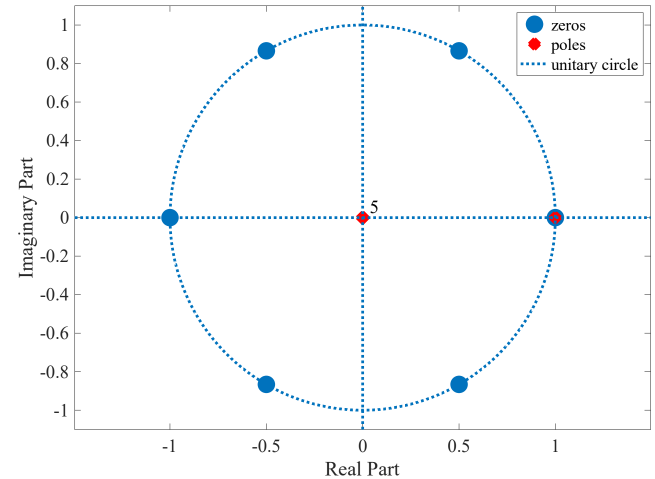
- Ad esempio per $N = 6$

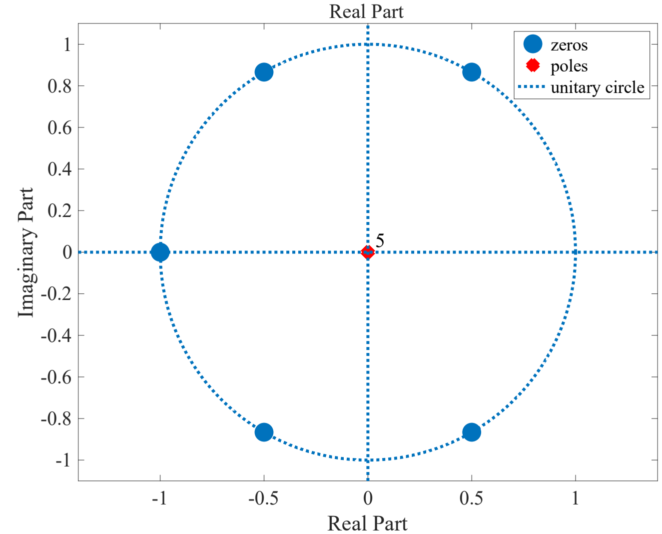
$$X(z) = \frac{z^6 - 1}{z^5(z-1)}$$

- Ricordando che

$$z^6 - 1 = (z-1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)$$

$$X(z) = \frac{z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^5}$$





Soluzione 2.3

$$x[n] = \begin{cases} n & 0 \le n \le N \\ 2N - n & N+1 \le n \le 2N \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

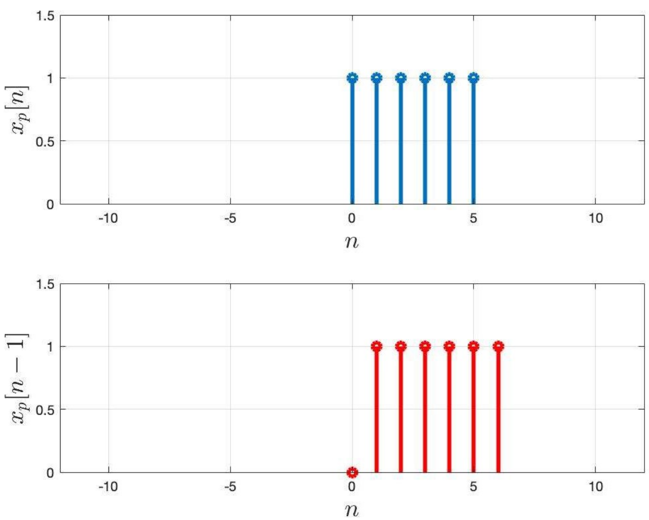
- $x[n]$ si può scrivere come la convoluzione tra due sequenze "porta":

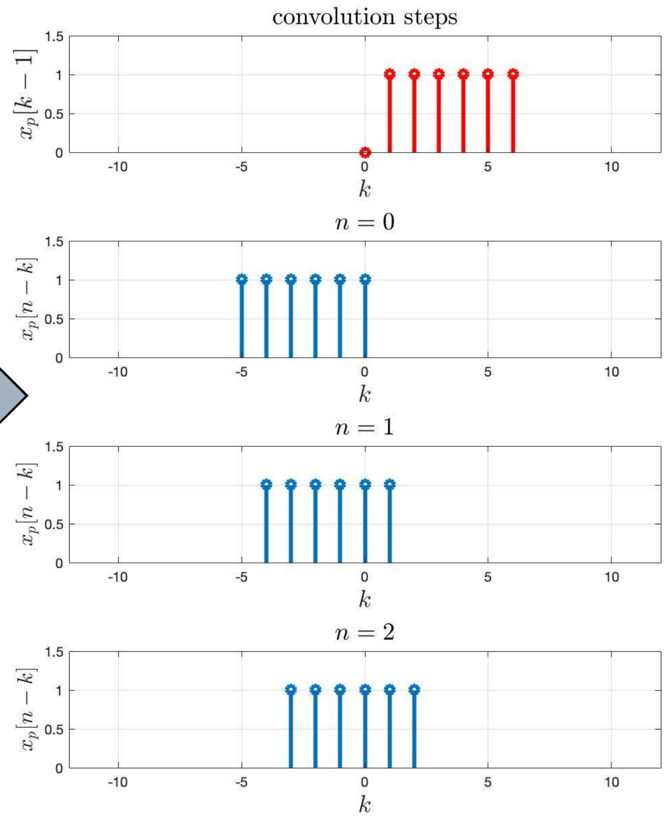
$$x[n] = x_p[n] * x_p[n-1] \qquad x_p[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

  - Ricordando poi le proprietà delle trasformate Z:
    - La convoluzione diventa un prodotto nel dominio Z
    - Il ritardo è facilmente trattabile

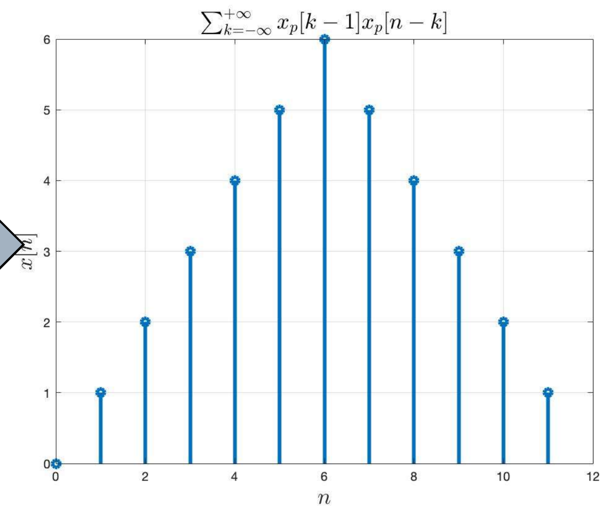
$$X(z) = X_p(z) \cdot \left(X_p(z) \cdot z^{-1} \right) = \left(X_p(z) \right)^2 \cdot z^{-1}$$

Soluzione 2.3 - esempio: *x[n]* per *N*=6





$$x[n] = x_p[n] * x_p[n-1]$$



Esercizio 2.3

$$X_p(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad X(z) = z^{-1}[X_p(z)]^2 = z^{-1}\left(\frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}\right)^2$$

$$X(z) = z^{-1}\frac{1 - 2z^{-N} + z^{-2N}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} \quad \Rightarrow \quad X(z) = \frac{1}{z^{2N-1}}\frac{z^{2N} - 2z^{N} + 1}{z^2 - 2z + 1}$$

$$X(z) = \frac{z^{2N} - 2z^{N} + 1}{z^{2N+1} - 2z^{2N} + z^{2N-1}} \quad \text{ROC} \quad : \quad 0 < |z| < +\infty$$

Soluzione 2.3

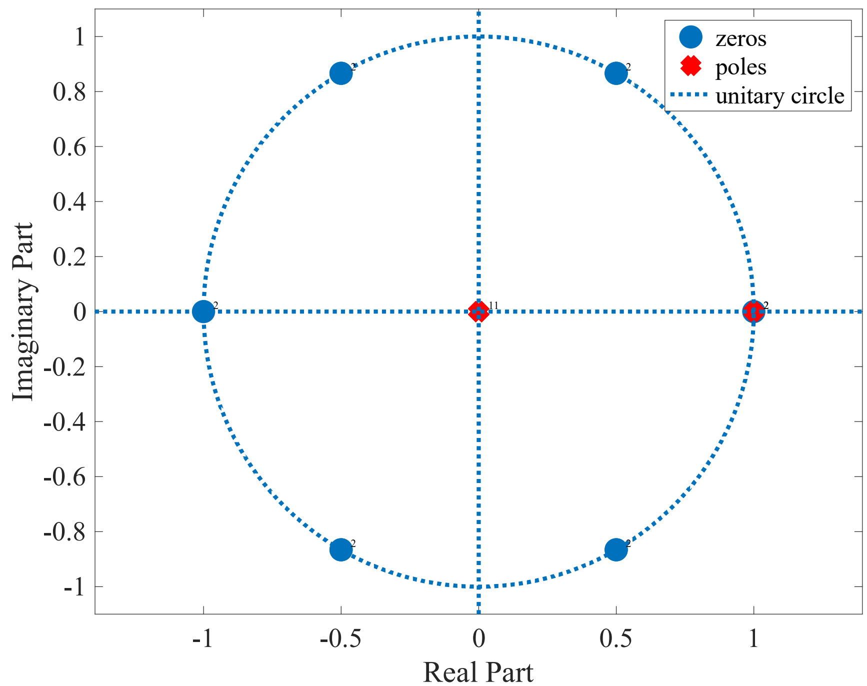
$N = 6$

- Sviluppando i quadrati:

$$X(z) = \frac{z^{12} - 2z^{6} + 1}{z^{13} - 2z^{12} + z^{11}}$$

Zeri calcolati da Matlab	Poli
	0
-1.0000 + 0.0000i	0
-1.0000 + 0.0000i	0
-0.5000 + 0.8660i	0
-0.5000 - 0.8660i	0
-0.5000 + 0.8660i	0
-0.5000 - 0.8660i	0
0.5000 + 0.8660i	0
0.5000 - 0.8660i	0
0.5000 + 0.8660i	0
0.5000 - 0.8660i	0
1.0000 + 0.0000i	1
1.0000 + 0.0000i	1

Cancellazione zero-polo



Esercizio 3

- Calcolare la trasformata zeta delle sequenze:
  1. $x[n] = \alpha^n u[n]$
  2. $x[n] = \sin[\omega_0 n]\, u[n]$
  3. $x[n] = \cos[\omega_0 n] u[n]$
  4. $x[n] = \alpha^n \cos[\omega_0 n] u[n]$
  5. $x[n] = n\alpha^n u[n]$
  6. $x[n] = n^2 \alpha^n u[n]$

calcolandone zeri e poli, e determinando di conseguenza la ROC

Soluzione 3.1

- $x[n] = \alpha^n u[n]$ α reale

per definizione

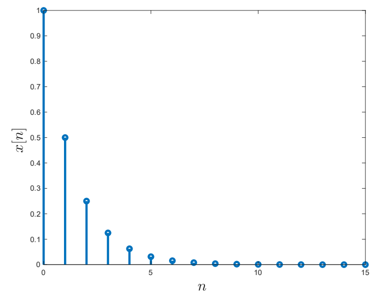
$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} = \frac{z}{z-\alpha} \qquad |z| > \alpha$$

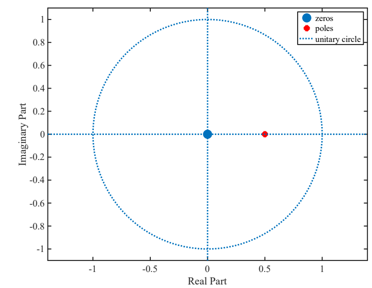
- Zero:
  - $z = 0$
- Poli:
  - $z = \alpha$

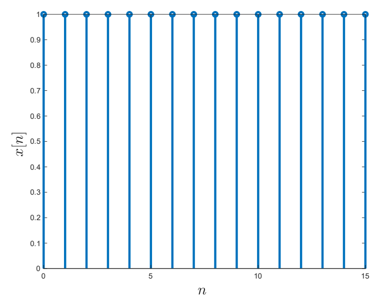
Soluzione 3.1

- Sequenza $x[n]$ causale con un solo polo reale positivo

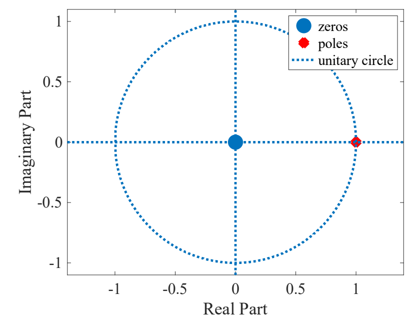


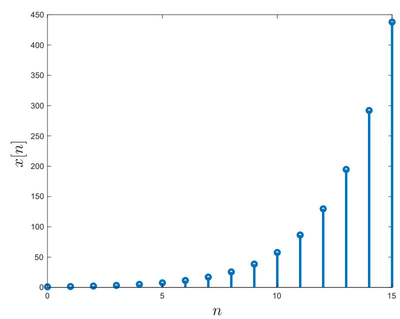
$\alpha = 0.5$



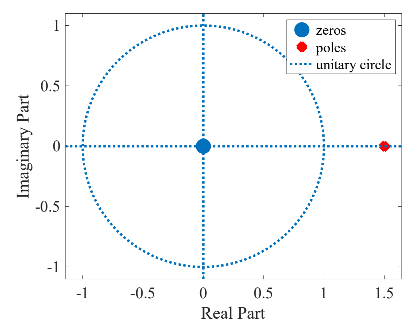


$\alpha = 1$



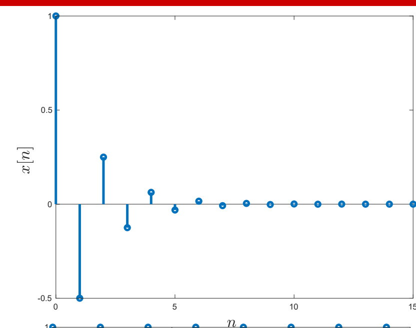


$\alpha = 1.5$

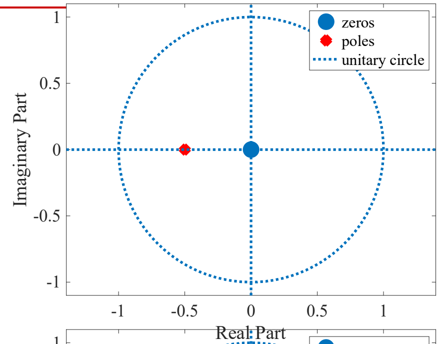


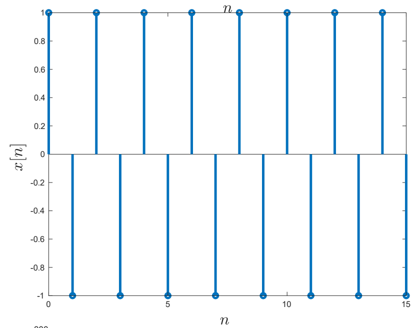
Soluzione 3.1

- Sequenza $x[n]$ causale con un solo polo reale negativo

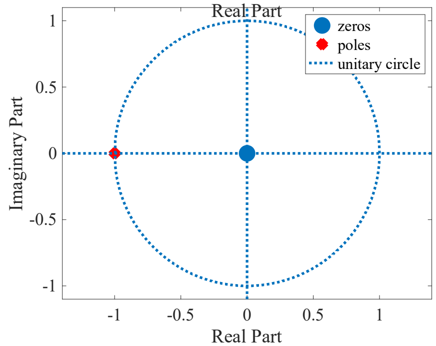


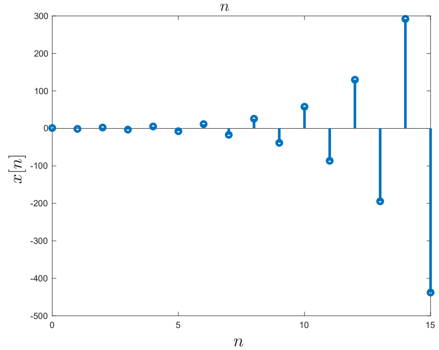
$\alpha = -0.5$



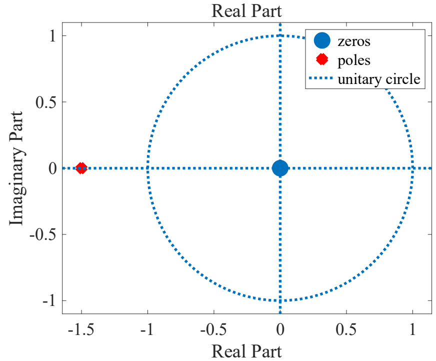


$\alpha = -1$





$\alpha = -1.5$



Soluzione 3.2

$x[n] = \sin[\omega_0 n]u[n]$

$$
\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sin[\omega_0 n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j} \right) z^{-n} = \\
&= \frac{1}{2j} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{j\omega_0} z^{-1})^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-j\omega_0} z^{-1})^n \right] = \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right] = \\
&= \frac{1}{2j} \left[\frac{z^{-1}(e^{j\omega_0} - e^{-j\omega_0})}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} \right] = \\
&= \frac{z^{-1} \sin \omega_0}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} = \\
&= \frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}
\end{aligned}
$$

$$|e^{j\omega_0} z^{-1}| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$|z| > 1$$

Soluzione 3.2

$$x[n] = \sin[\omega_0 n]u[n]$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z^{-1}\sin\omega_0}{(1-e^{j\omega_0}z^{-1})(1-e^{-j\omega_0}z^{-1})} \qquad |z|>1 \\ &= \frac{z^{-1}\sin\omega_0}{z^{-2}(z-e^{j\omega_0})(z-e^{-j\omega_0})} \\ &= \frac{z\sin\omega_0}{(z-e^{j\omega_0})(z-e^{-j\omega_0})} \end{aligned}$$

- Zero: $z = 0$
- Poli: $z = e^{\pm j\omega_0}$

Soluzione 3.3

$$x[n] = \cos[\omega_0 n]u[n]$$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \cos[\omega_0 n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} \right) z^{-n} = \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{j\omega_0} z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-j\omega_0} z^{-1})^n \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{2 - e^{j\omega_0} z^{-1} - e^{-j\omega_0} z^{-1}}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} \right] = \\
&= \frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})} = \\
&= \frac{1 - \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\cos(\omega_0) z^{-1} + z^{-2}}
\end{aligned}$$

$$|e^{j\omega_0} z^{-1}| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$|z| > 1$$

Soluzione 3.3

$$x[n] = \cos[\omega_0 n]u[n]$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{(1-e^{j\omega_0}z^{-1})(1-e^{-j\omega_0}z^{-1})} \qquad |z|>1 \\ &= \frac{z^{-1}[z-\cos(\omega_0)]}{z^{-2}(z-e^{j\omega_0})(z-e^{-j\omega_0})} \\ &= \frac{z[z-\cos(\omega_0)]}{(z-e^{j\omega_0})(z-e^{-j\omega_0})} \end{aligned}$$

- Zeri:
  - $z = \cos(\omega_0) \quad z = 0$
- Poli:
  - $z = e^{\pm j\omega_0}$

Soluzione 3.4

$$x[n] = \alpha^n \cos[\omega_0 n]u[n]$$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \cos[\omega_0 n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n \left(\frac{e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}}{2} \right) z^{-n} = \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{j\omega_0} \alpha z^{-1})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-j\omega_0} \alpha z^{-1})^n \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \alpha e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega_0} z^{-1}} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{2 - \alpha e^{j\omega_0} z^{-1} - \alpha e^{-j\omega_0} z^{-1}}{(1 - \alpha e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - \alpha e^{-j\omega_0} z^{-1})} \right] = \\
&= \frac{1 - \alpha \cos(\omega_0) z^{-1}}{(1 - \alpha e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - \alpha e^{-j\omega_0} z^{-1})} = \\
&= \frac{1 - \alpha \cos(\omega_0) z^{-1}}{1 - 2\alpha \cos(\omega_0) z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}}
\end{aligned}$$

$$|\alpha e^{j\omega_0} z^{-1}| < 1$$

$$|\alpha e^{-j\omega_0} z^{-1}| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$|z| > |\alpha|$$

Soluzione 3.4

$$x[n] = \alpha^n \cos[\omega_0 n] u[n]$$

$$X(z) \quad = \quad \frac{1 - \alpha\cos(\omega_0) z^{-1}}{(1 - \alpha e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - \alpha e^{-j\omega_0} z^{-1})} \qquad |z| > \alpha$$

- Zeri: $z = \alpha\cos(\omega_0)$ $\qquad z = 0$
- Poli: $z = \alpha e^{\pm j\omega_0}$

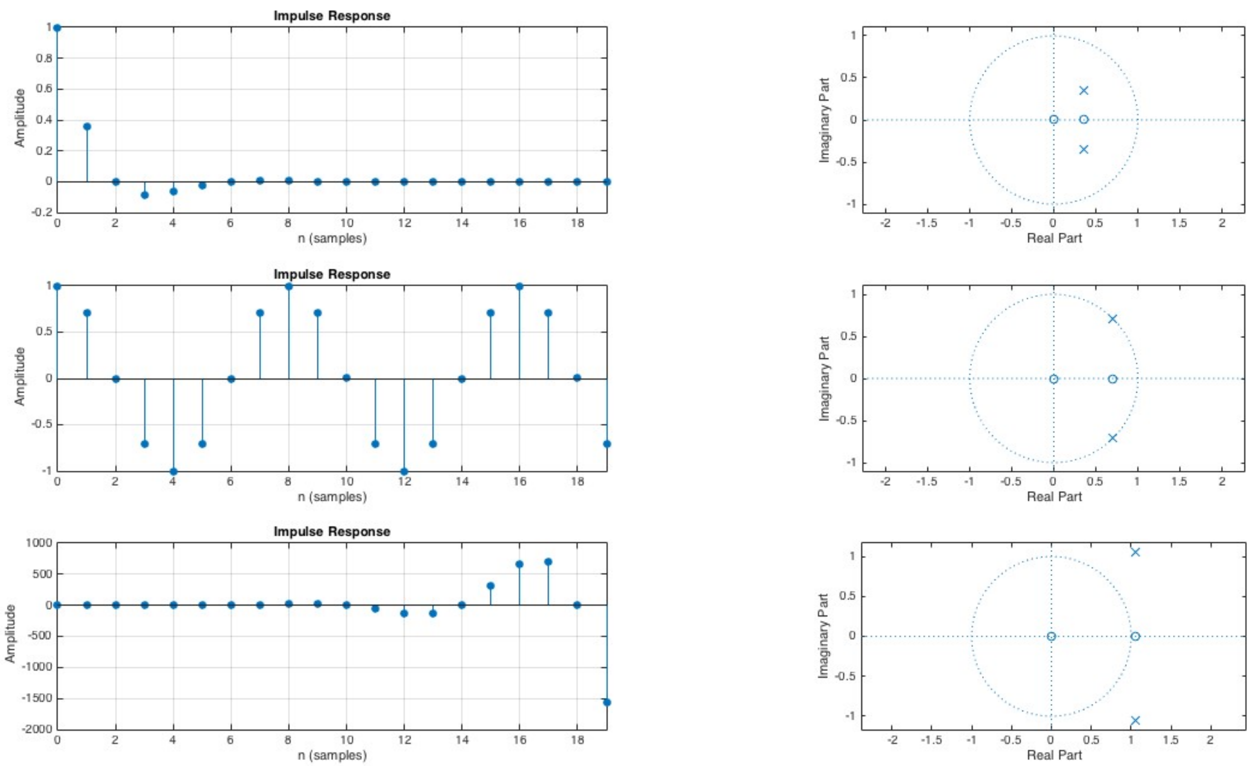
Soluzione 3.4

- Sequenza $x[n]$ causale con poli complessi coniugati

$\alpha = 0.5$

$\alpha = 1$

$\alpha = 1.5$



Soluzione 3.5

$$x[n] = n\alpha^n u[n]$$

Usando la proprietà della derivata in frequenza:

$$X(z) = \mathcal{Z}\{nx[n]\} = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-\alpha}\right] = -z\frac{z-\alpha-z}{(z-\alpha)^2} = \frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}$$

$$ROC: \quad |z| > |a|$$

Si ricordi che

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

Soluzione 3.6

$$x_3(n) = n^2 a^n u(n)$$

- Usando la proprietà della derivata in frequenza:

$$X_3(z) = Z[n\,x_2(n)] = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{a\,z}{(z-a)^2}\right] = -z\frac{a(z-a)^2 - 2(z-a)az}{(z-a)^4} =$$

$$= \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$$

$$ROC: \quad |z| > |a|$$

Esercizio 4 (sotto forma di quiz)

Sia data la sequenza $x[n] = (-a)^n u[n]$ con $u[n]$ la sequenza gradino unitario e $a = 0.5$.
La trasformata z di $x[n]$, $X(z)$:

a) non ha poli
b) non ha zeri e ha due poli semplici reali in $z = \pm 0.5$
c) ha uno zero nell'origine, uno zero reale in $z = -0.5$ e due poli complessi coniugati in $z = \pm j0.5$
d) ha uno zero nell'origine e due poli complessi coniugati in $z = \pm j0.5$
e) ha uno zero nell'origine e un polo reale semplice in $z = -0.5$

Soluzione 4

- $X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-a)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-az^{-1}\right)^n = \frac{1}{(1+az^{-1})} = \frac{z}{z+a}$

- Si vede dunque che:
- Zero:
  - $z = 0$
- Poli:
  - $z = -a$

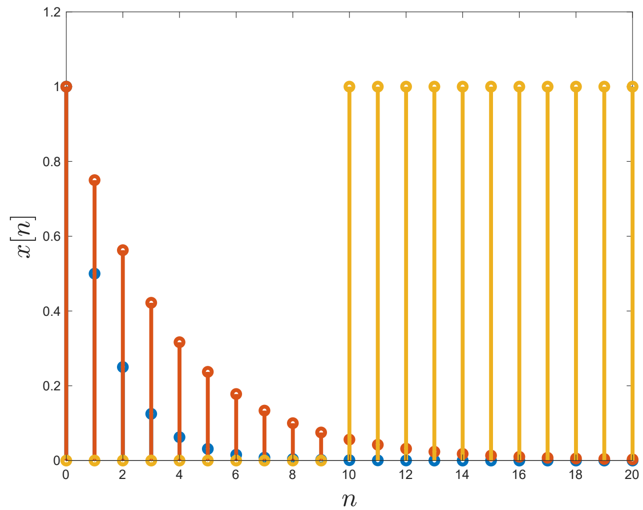
- La risposta corretta è dunque:
  - ha uno zero nell'origine e un polo reale semplice in $z = -0.5$

Esercizio 5

Calcolare la trasformata zeta e la regione di convergenza dei seguenti segnali discreti:

1. $x[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] u[n-10]$
2. $x[n] = \begin{cases} 1 & -10 \leq n \leq 10 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

Soluzione 5.1



$$x(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]u(n-10)$$

$$x(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-10}+\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-10}\right]u(n-10)=y(n-10)$$

$$y(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right]u(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)+\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}u(n)$$

- Per la linearità:

$$Y(z)=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}Z\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)\right]+\left(\frac{3}{4}\right)^{10}Z\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n}u(n)\right]$$

Soluzione 5.1

$$Y(z) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} Z\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u(n)\right] + \left(\frac{3}{4}\right)^{10} Z\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{n} u(n)\right] =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \frac{z}{z-\frac{3}{4}} \qquad |z| > \frac{1}{2}, |z| > \frac{3}{4}$$

- Per la proprietà della traslazione nel tempo:

$$X(z) = z^{-10}\, Y(z) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \frac{z^{-9}}{z-\frac{1}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \frac{z^{-9}}{z-\frac{3}{4}} \qquad ROC : |z| > \frac{3}{4}$$

Soluzione 5.2

$$x(n)=\begin{cases}1 & -10\le n\le 10\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

$$x(n)=y(n+10) \qquad \text{con} \qquad y(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le 20\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

- Dall'esercizio 2.2 ricaviamo:

$$Y(z)=\frac{1-z^{-21}}{1-z^{-1}} \qquad 0<|z|\le\infty$$

$$X(z)=z^{10}Y(z)=\frac{z^{10}\left(1-z^{-21}\right)}{1-z^{-1}} \qquad ROC: 0<|z|<\infty$$

Esercizio 6

Determinare le sequenze casuali associate alle seguenti trasformate zeta:

1. $X_a(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

2. $X_b(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$

3. $X_c(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$

Soluzione 6.1

$$X_a(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

- Sequenza causale: $ROC: |z| > \frac{1}{2}$

$$x_a[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Sequenza $x(n)$	$X(z)$	ROC
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$\delta(n-N),\ N>0$	z^{-N}	$\forall z - \{z=0\}$
$\delta(n+N),\ N>0$	z^{+N}	$\forall z - \{z=\infty\}$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert > 1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert < 1$
$\alpha^n u(n)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$n\alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$n\alpha^{n-1} u(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$(n-1)\alpha^n u(n)$	$\frac{2\alpha z^{-1}-1}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$n^2\alpha^n u(n)$	$\frac{\alpha z^{-1}(1+\alpha z^{-1})}{(1-\alpha z^{-1})^3}$	$\forall \lvert z\rvert > \lvert\alpha\rvert$
$-n\alpha^n u(-n-1)$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$\forall \lvert z\rvert < \lvert\alpha\rvert$
$\sin(\omega_o n)u(n)$	$\frac{\sin(\omega_o)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_o)z^{-1}+z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > 1$
$\cos(\omega_o n)u(n)$	$\frac{1-\cos(\omega_o)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_o)z^{-1}+z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > 1$
$\alpha^n \sin(\omega_o n)u(n)$	$\frac{\alpha\sin(\omega_o)z^{-1}}{1-2\alpha\cos(\omega_o)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > \alpha$
$\alpha^n \cos(\omega_o n)u(n)$	$\frac{1-\alpha\cos(\omega_o)z^{-1}}{1-2\alpha\cos(\omega_o)z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$	$\forall \lvert z\rvert > \alpha$
$\alpha^n[u(n)-u(n-N)]$	$\frac{1-\alpha^N z^{-N}}{1-\alpha z^{-1}}$	$\forall \lvert z\rvert > 0$

Soluzione 6.2

$$X_b(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

- Espansione in fratti semplici di X(z):

$$X_b(z) = \sum_i R_i \frac{1}{\left(1-d_i z^{-1}\right)} \qquad R_i = X_b(z)\left(1-d_i z^{-1}\right)\Big|_{z=d_i}$$

- I poli di $X_b(z)$ sono: $d_1 = 1/2$ e $d_2 = 1$
- I residui corrispondenti valgono:

$$R_1 = \frac{1}{1-z^{-1}}\Bigg|_{z=\frac{1}{2}} = -1 \qquad R_2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Bigg|_{z=1} = 2$$

Soluzione 6.2

$$X_b(z) = 2 \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} - 1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

- Sequenza causale:

$$x[n] = 2u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] = \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] u[n]$$

Soluzione 6.3

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)$$

con:

$$Y(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$x(n)=y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)$$

- Sequenza causale: $y(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$x(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left[u(n)+u(n-1)\right]=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left[u(n)+u(n)-\delta(n)\right]=2\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\delta(n)$$

Qualche precisazione sulla scomposizione in fratti semplici

- Alcune precisazioni sulla scomposizione in fratti semplici

- Ricordiamo innanzitutto che (dalle slides di teoria) ci siamo posti in un caso semplificato (e non nel caso generale). In particolare faremo sempre le seguenti Ipotesi:
  - **Il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore**
  - **Le radici del denominatore sono semplici**
  - **La ROC di *$X(z)$* è del tipo $|z|>\rho$**

Qualche precisazione sulla scomposizione in fratti semplici

- Sotto le precedenti ipotesi, possiamo elaborare l'espressione di *X(z)* in modo che i polinomi al numeratore e denominatore abbiano termine noto unitario:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_{p_n} z^{-p_n}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_{p_d} z^{-p_d}} = \frac{b_0}{a_0} \frac{1 + \frac{b_1}{b_0} z^{-1} + \ldots + \frac{b_{p_n}}{b_0} z^{-p_n}}{1 + \frac{a_1}{a_0} z^{-1} + \ldots + \frac{a_{p_d}}{a_0} z^{-p_d}}$$

- Espandiamo in fratti semplici la funzione *X(z)*, espressa come rapporto tra polinomi nella variabile z^{-1}:

$$X(z) = \sum_i R_i \frac{1}{1 - d_i \cdot z^{-1}}$$

  - Dove gli R_i sono i residui della funzione *X(z)*: $R_i = X(z)\left(1 - d_i \cdot z^{-1}\right)\Big|_{z=d_i}$

Qualche precisazione sulla scomposizione in fratti semplici

- Qualche eccezione alle precedenti ipotesi che siamo in grado di trattare:

- Il grado del denominatore è minore o uguale del grado del numeratore. In questo caso (si veda l'ultimo esercizio)
  - Si può scrivere la frazione in una somma di frazioni su tutti i termini del numeratori
  - Su ciascuna frazione, possiamo "scomporre" il numeratore isolando un opportuno termine z^{-M} e poi usare le proprietà del ritardo

- I casi più generali (poli multipli, poli complessi) esulano dagli obiettivi di questo corso
  - Esiste tuttavia una trattazione generale, si veda ad esempio http://www.dii.unimo.it/~zanasi/didattica/Fondamenti%20CA_Mec/Luc_CA_06_Fratti_semplici.pdf

Esercizio 7

Calcolare la sequenza corrispondente alle seguenti trasformate zeta:

1. $X(z) = (1 + 2z)(1 + 3z^{-1})(1 - z^{-1})$

2. $X(z) = \frac{3z}{(z-\frac{1}{2})(z+\frac{1}{4})} \qquad |z| > \frac{1}{2}$

3. $X(z) = \frac{2z^3+z^2}{(z+3)(z-1)} \qquad |z| > 3$

Soluzione 7.1

$$
\begin{aligned}
X(z) &= (1+2z)\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)= \\
&= \left(1+3z^{-1}+2z+6\right)\left(1-z^{-1}\right)= \\
&= 1+3z^{-1}+2z+6-z^{-1}-3z^{-2}-2-6z^{-1} = \\
&= 2z+5-4z^{-1}-3z^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
x(n) = 2\delta(n+1)+5\delta(n)-4\delta(n-1)-3\delta(n-2)
$$

Soluzione 7.2

$$X(z)=\frac{3z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{4}\right)} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

- Moltiplico numeratore e denominatore per z^{-2}:

$$X(z)=\frac{3z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

- Espansione in fratti semplici di X(z):

$$X(z)=\sum_i R_i \frac{1}{\left(1-d_i z^{-1}\right)} \qquad R_i = X(z)\left(1-d_i z^{-1}\right)\Big|_{z=d_i}$$

- I poli di X (z) sono: $z_1=1/2$ e $z_2=-1/4$

Soluzione 7.2

- I residui corrispondenti valgono:

$$R_1 = \left.\frac{3z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = 4 \qquad R_2 = \left.\frac{3z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\right|_{z=-\frac{1}{4}} = -4$$

$$X(z) = \frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{4}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}$$

- Anti-trasformata:

$$x(n) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 4\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) = 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

Soluzione 7.3

$$X(z) = \frac{2z^3 + z^2}{(z+3)(z-1)} \qquad |z| > 3$$

- Moltiplico numeratore e denominatore per z^{-3}:

$$X(z) = \frac{2 + z^{-1}}{z^{-1}(1+3z^{-1})(1-z^{-1})} = z\frac{2 + z^{-1}}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}$$

- Posso quindi scrivere X(z) come:

$$X(z) = zY(z) \qquad Y(z) = \frac{2 + z^{-1}}{(1+3z^{-1})(1-z^{-1})}$$

- Quindi: $x(n) = y(n+1)$

Soluzione 7.3

- Espansione in fratti semplici di Y(z):

$$Y(z)=\frac{2+z^{-1}}{\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

$$Y(z)=\sum_i R_i \frac{1}{\left(1-d_i z^{-1}\right)} \qquad R_i = Y(z)\left(1-d_i z^{-1}\right)\Big|_{z=d_i}$$

- I poli di Y(z) sono: $d_1=-3$ e $d_2=1$
- I residui corrispondenti valgono:

$$R_1 = \left.\frac{2+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right|_{z=-3} = \frac{5}{4} \qquad R_2 = \left.\frac{2+z^{-1}}{1+3z^{-1}}\right|_{z=1} = \frac{3}{4}$$

$$Y(z)=\frac{5}{4}\frac{1}{1+3z^{-1}}+\frac{3}{4}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Soluzione 7.3

- Anti-trasformata:

$$y(n) = \frac{3}{4}u(n) + \frac{5}{4}(-3)^n u(n)$$

$$x(n) = y(n+1) = \frac{1}{4}\left[3 + 5(-3)^{n+1}\right]u(n+1)$$