Proprietà della trasformata di Fourier

- Commenti generali
- Proprietà

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Anno accademico 2024-2025
Ultimo aggiornamento: Settembre 2023

Commenti su trasformata di Fourier

- Nella lezione precedente abbiamo introdotto la Trasformata di Fourier tramite il seguente integrale

$$X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f\theta}\, d\theta = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- La trasformata di Fourier ha moltissime applicazioni in vari ambiti dell'Ingegneria e della Fisica
- Grazie alla trasformata di Fourier è possibile applicare il concetto di <u>scomposizione in componenti sinusoidali a frequenza f anche per segnali generici</u> (e non solo segnali periodici)

Commenti su trasformata di Fourier

- Molte osservazioni "qualitative" su una trasformata di Fourier saranno relative al suo modulo e in particolare a

$$\boxed{\left|X\left(f\right)\right|^2}$$

- Terminologia: il modulo al quadrato della trasformata di Fourier di un segnale $x(t)$ viene anche detto spettro (di energia) del segnale (o densità spettrale di energia)
  - Per ragioni che introdurremo più avanti
- In generale l'analisi dei segnali nel dominio delle frequenze viene chiamata analisi spettrale

Commenti su anti-trasformata di Fourier

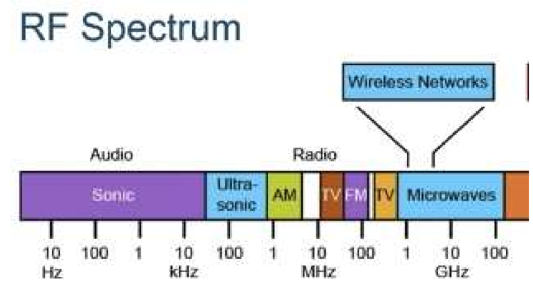
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

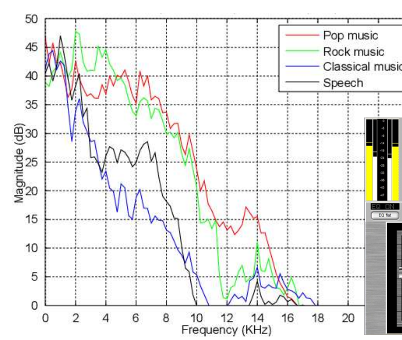
$$x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{+j2\pi f t}\, df$$

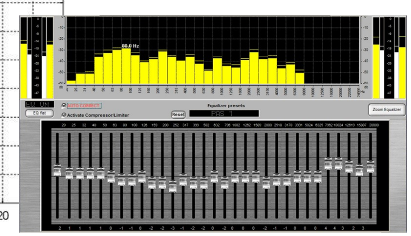
- L'espressione della anti-trasformata può essere interpretata come segue:
  - $X(f)$ indica il «peso» (complesso) della componente sinusoidale (complessa) a frequenza f per il generico segnale $x(t)$
  - In particolare si dimostrerà più avanti che $|X(f)|^2$ corrisponde all'energia (infinitesima) del segnale $x(t)$ attorno alla frequenza f

Che cosa NON esisterebbe senza il concetto di trasformata di Fourier…

- Multiplazione di frequenza
  - Alla base di TUTTI i sistemi di trasmissione radio "da Marconi in poi ☺"
- I moderni sistemi di compressione audio e video (mp3, MPEG, JPEG, etc)
- L'analisi spettrale
- Gli equalizzatori per segnali musicali
- E MOLTISSIME altre applicazioni ingegneristiche!
  - Analisi delle vibrazioni meccaniche
  - Applicazioni alla sismologia
  - Applicazioni alla bio-ingegneria







Proprietà della trasformata di Fourier

- In questa lezione discuteremo di alcune importanti proprietà della trasformata, e delle sue applicazioni pratiche
- Le proprietà sono fondamentali per il calcolo delle trasformate in molti esercizi di questo corso

- Proprietà:
  - Linearità
  - Anticipo o ritardo
  - Scalamento
  - Relazioni di parità
  - Modulazione e traslazione
  - Convoluzione e prodotto
  - Dualità
  - Derivazione e integrazione
  - Uguaglianza di Parseval

$$\boxed{X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f\theta}\, d\theta = \mathcal{F}\{x(t)\}}$$

Linearità della trasformata di Fourier

- Un operatore lineare ha la seguente proprietà (sovrapposizione degli effetti)

$$\mathcal{L}\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right] = a_1 \mathcal{L}\left[x_1(t)\right] + a_2 \mathcal{L}\left[x_2(t)\right]$$

- La trasformata di Fourier (e la sua inversa) sono operatori lineari
- Questa proprietà discende direttamente dalla linearità dell'operatore integrale

$$\mathcal{F}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] e^{-j2\pi ft}\, dt =$$

$$a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) e^{-j2\pi ft}\, dt + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j2\pi ft}\, dt = a_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + a_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 \mathcal{F}\{x_1(t)\} + a_2 \mathcal{F}\{x_2(t)\}}$$

… in pratica…

- Data la somma di due segnali, la trasformata di Fourier risultante è la somma delle due trasformate iniziali
  - Attenzione: da intendere sui valori complessi che *X(f)* assume frequenza per frequenza
    - *Commento: nel nostro corso i segnali nel tempo x(t) sono (quasi sempre) segnali reali. Da ricordare però che anche se x(t) è reale, la sua trasformata è in generale una funzione della frequenza che assume valori complessi*

- Osservazione: vedremo più avanti che questo risultato NON è in generale vero su $|X(f)|^2$
  - Cioè NON è vero sulla densità spettrale di energia

Anticipo e ritardo: dimostrazione

- Vogliamo calcolare la trasformata di Fourier del segnale $x(t-\theta)$ cioè $x(t)$ ritardato (θ negativo) o anticipato (θ positivo)

$$\mathcal{F}\{x(t-\theta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\theta)e^{-j2\pi f} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi f(t'+\theta)}dt' =$$

$$t' = t-\theta, dt' = dt$$

$$= e^{-j2} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{-j2\pi f t'}dt' = e^{-j2\pi f\theta}\mathcal{F}\{x(t)\}$$

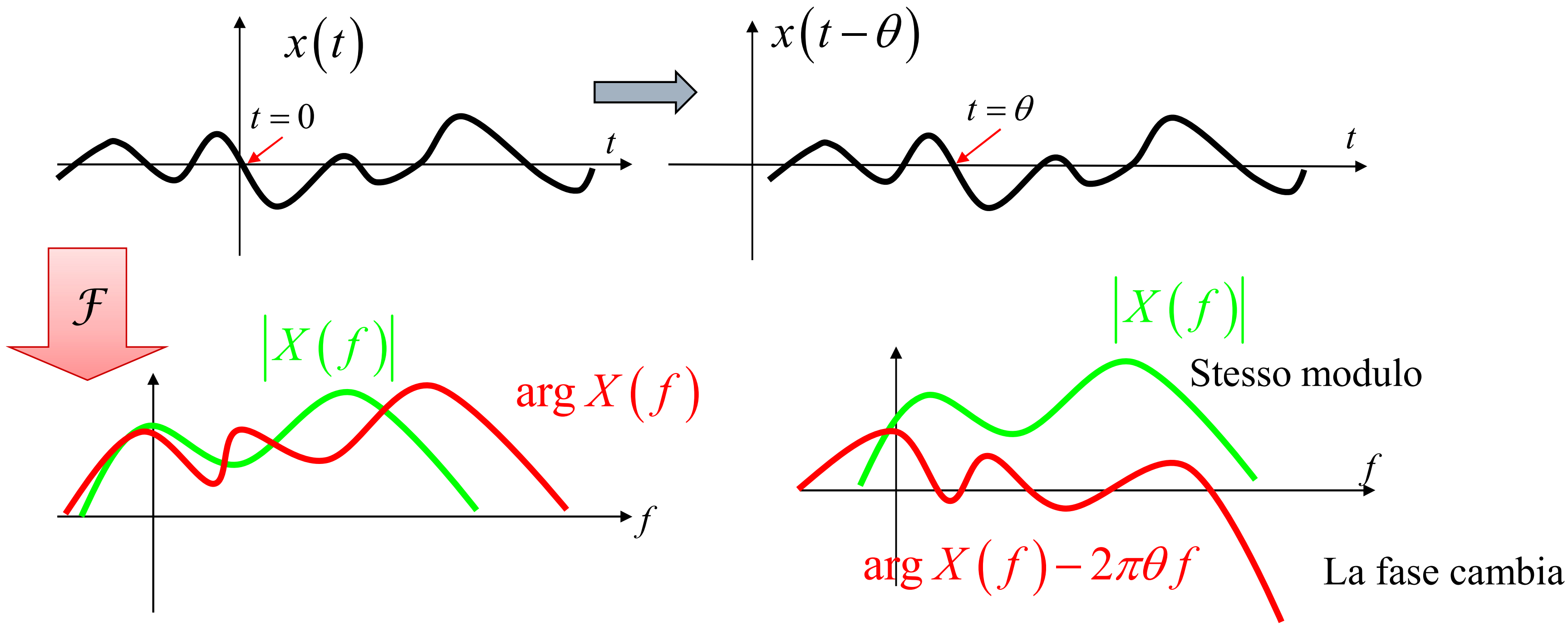
$$\boxed{\mathcal{F}\{x(t-\theta)\} = \mathcal{F}\{x(t)\}\, e^{-j2\pi\theta f}}$$

- Significato "fisico" di questa proprietà: una traslazione nell'asse dei tempi NON cambia il modulo della trasformata
  - Si vedrà più avanti che le densità spettrali di energia sono legate solo al modulo della trasformata di Fourier, che dunque riveste un significato particolarmente rilevante nell'analisi spettrale

Anticipo e ritardo nel tempo

$$\mathcal{F}\{x(t-\theta)\} = \mathcal{F}\{x(t)\}\, e^{-j2\pi\theta f}$$

"sfasamento" nel dominio delle trasformate di Fourier



Interpretazione "pratica" della proprietà relativa al ritardo nel tempo

- Ricordiamo che la trasformata di Fourier, al di là dei dettagli matematici, è "imparentata" (così come la serie di Fourier) ad una scomposizione in una "somma pesata" di seni e coseni
- Se si trasla il segnale nel tempo, si dovranno traslare anche i relativi seni e coseni
  - Ma un ritardo su una funzione trigonometrica equivale semplicemente ad un cambio di fase, mentre l'ampiezza rimane costante

$$x(t) = A\cos(2\pi f_o t) \rightarrow$$

$$x(t-T) = A\cos\left(2\pi f_o (t-T)\right) = A\cos\left(2\pi f_o t - 2\pi f_o T\right) = \boxed{A\cos\left(2\pi f_o t - \phi_0\right)} \quad \text{dove} \quad \phi_0 = 2\pi f_o T$$

Modulazione di ampiezza

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Vogliamo calcolare la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ moltiplicato per una sinusoide complessa

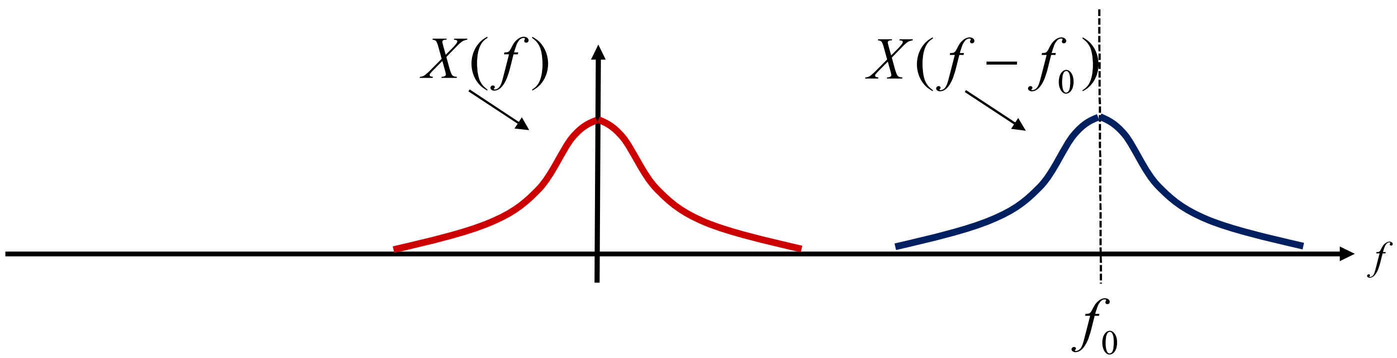
$$\mathcal{F}\left\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t}e^{-j2\pi f t}dt= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi (f-f_0)t}\,dt = X(f-f_0)$$

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}= X(f-f_0)}$$

- Questa proprietà è fondamentale nel campo delle telecomunicazioni

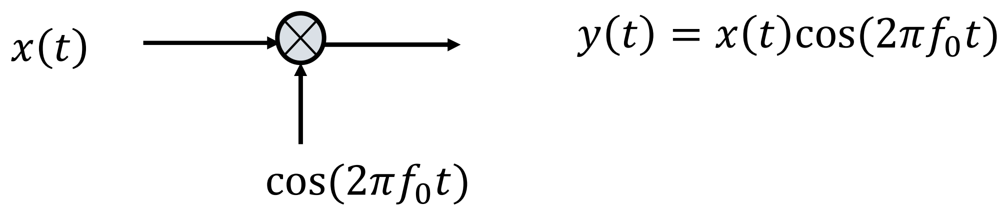
Modulazione di ampiezza

- Significato "fisico" di questa proprietà: $\mathcal{F}\left\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\} = X(f - f_0)$
- una moltiplicazione nel tempo per un'esponenziale complesso a frequenza f_0 sposta il contenuto spettrale della trasformata con uno shift sull'asse delle frequenze pari a f_0
  - Ad esempio, se il segnale di partenza ha contenuto spettrale attorno a $f = 0$, questo viene spostato attorno a $f = f_0$



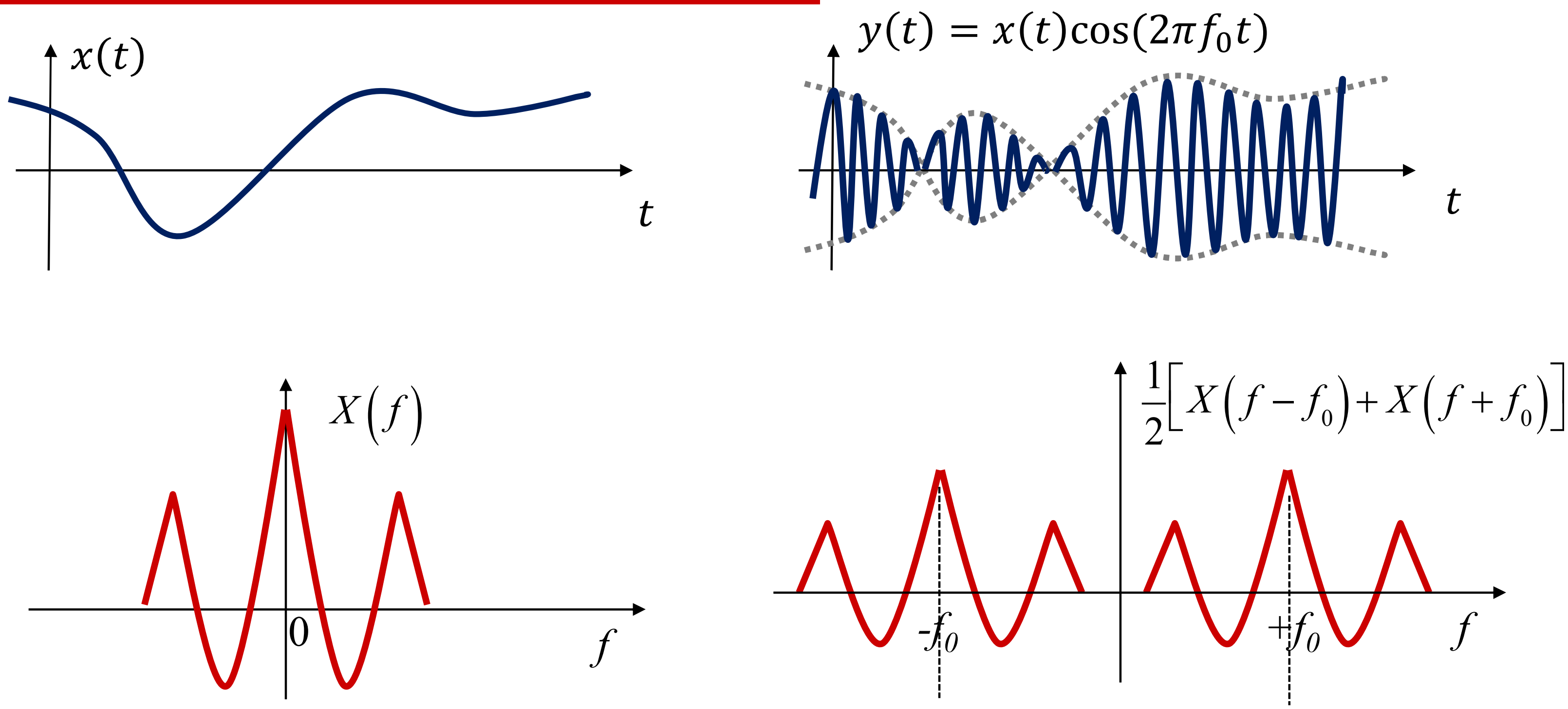
Modulazione di ampiezza tramite un coseno

- Moltiplicazione per funzione coseno



$$\mathcal{F}(x(t)\cos(2\pi f_0 t)) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}x(t)\left(e^{+j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}\right)\right) = \frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

Modulazione di ampiezza: esempi



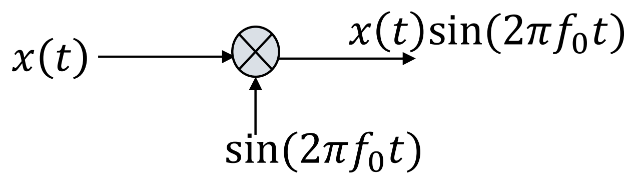
Dettaglio: in queste figure, la forma della X(f) è solo qualitativa, al fine di cercare di rappresentare graficamente il significato delle varie proprietà.

Inoltre, sono rappresentate come funzioni reali solo per semplicità grafica, ma in generale è importante ricordare che $X(f)$ assume valori complessi.

Questo risultato (e sue varianti) è FONDAMENTALE per la maggior parte delle modulazioni per la trasmissione, per poter spostare il contenuto spettrale del segnale di partenza in "banda base" nella banda di frequenza più opportuna

Modulazione: esempi

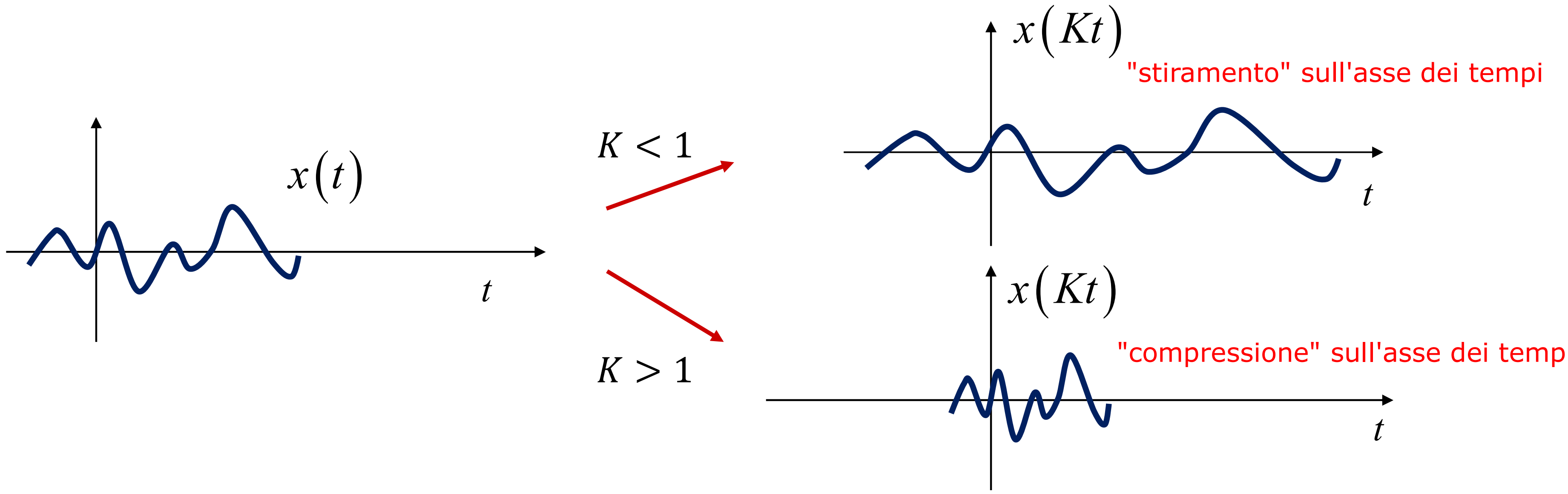
- in modo analogo per la funzione seno



$$\mathcal{F}\left(x(t)\sin(2\pi f_0 t)\right) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2j}x(t)\left(e^{+j2\pi\ {}_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}\right)\right) = \frac{1}{2j}\left[X(f - f_0) - X(f + f_0)\right]$$

Scalamento nel tempo

- Consideriamo un segnale $x(t)$ e la sua versione scalata nel tempo $x(Kt)$



Scalamento

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Calcoliamone la trasformata

$$\mathcal{F}\{x(Kt)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(Kt)e^{-j2} \quad dt =$$

$$t' = Kt, dt' = Kdt$$

$$= \frac{1}{|K|}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t')e^{\frac{-j2\pi f \quad '}{K}}dt' = \frac{1}{|K|}X\left(\frac{f}{K}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{x(Kt)\} = \frac{1}{|K|}X\left(\frac{f}{K}\right)}$$

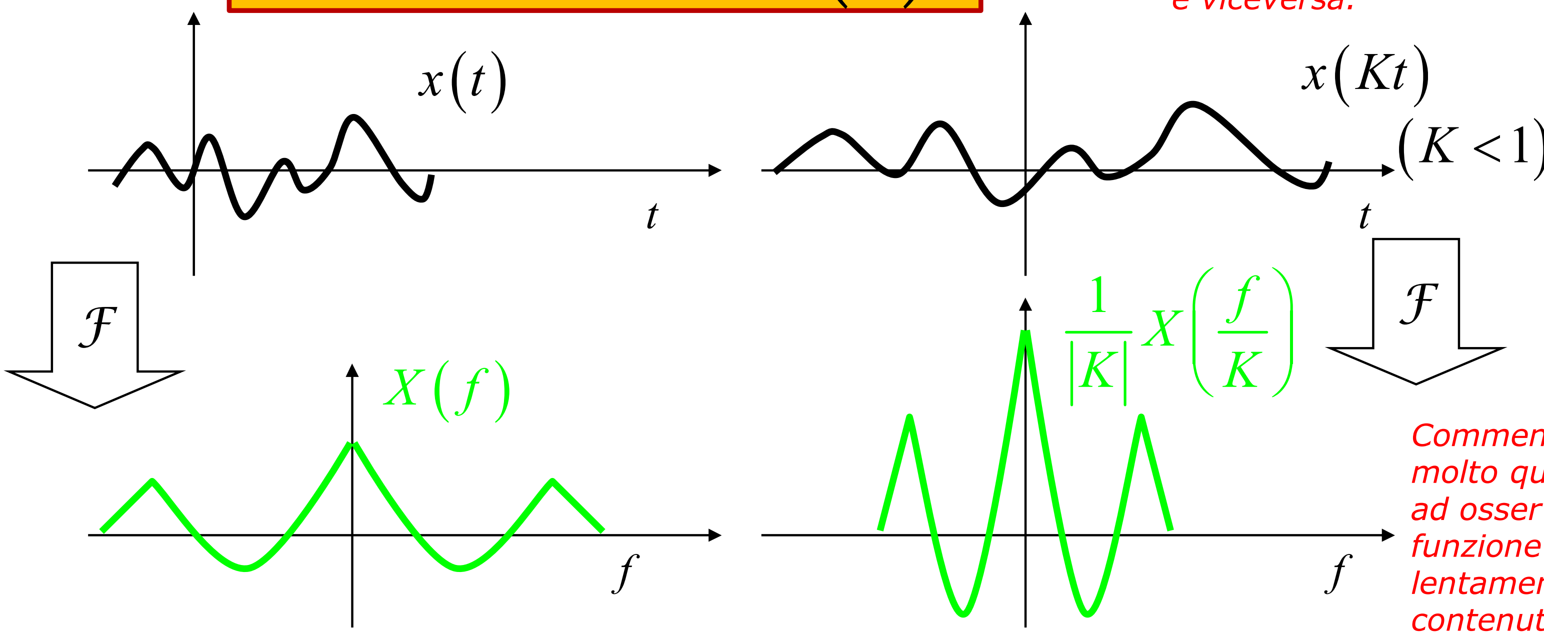
Scalamento

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Scalamento nel tempo e nella frequenza

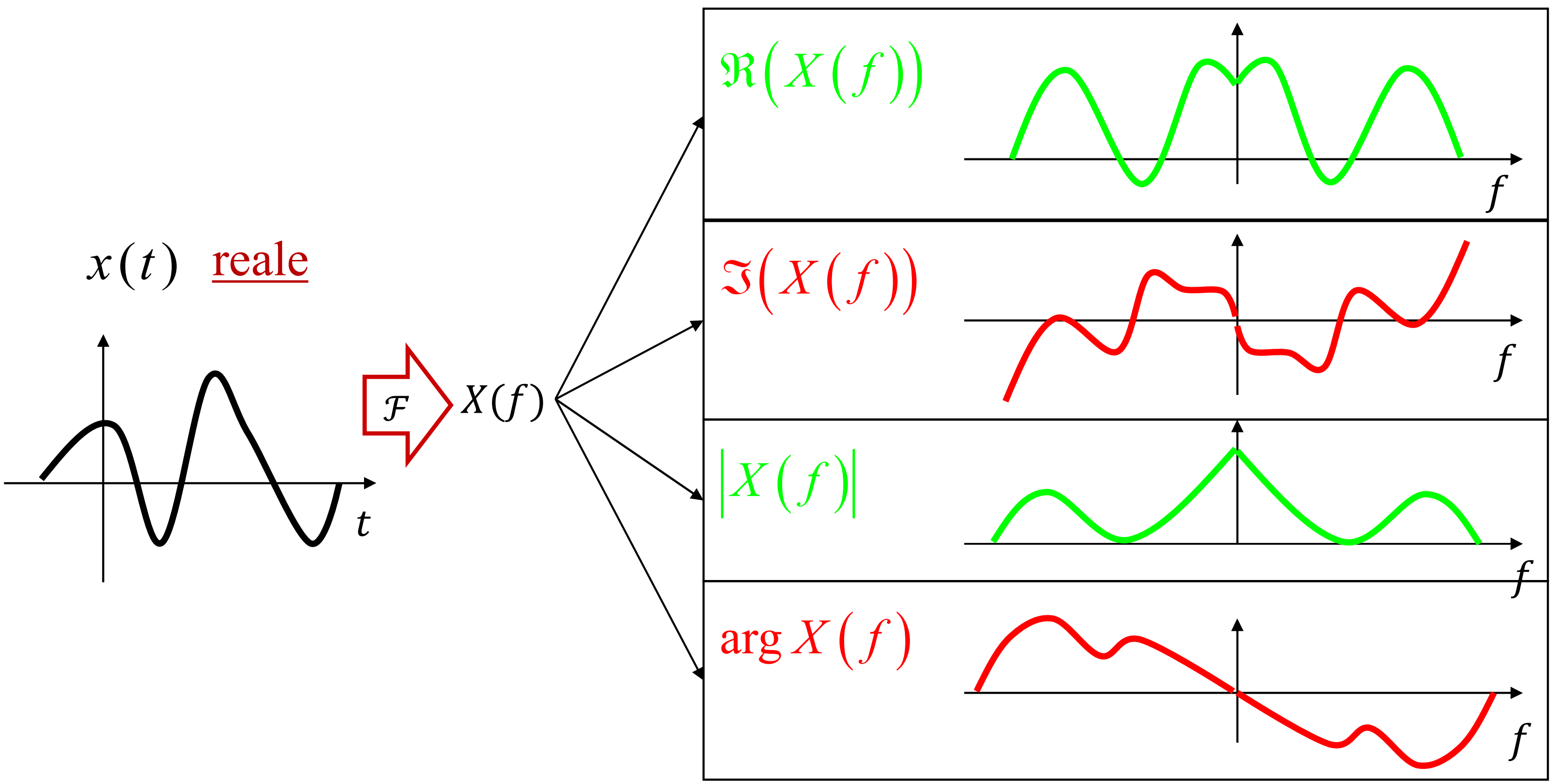
$$\mathcal{F}\{x(Kt)\} = \frac{1}{|K|} X\left(\frac{f}{K}\right)$$

Commento importante: si inizi a notare una sorta di "dualità" tra quanto avviene sull'asse dei tempi e sull'asse delle frequenze: ad esempio in questo caso se la funzione è "stirata" sull'asse dei tempi, risulterà "compressa" sull'asse delle frequenze e viceversa.



Commento: in maniera molto qualitativa, iniziamo ad osservare che se la funzione varia "più lentamente" nel tempo, il contenuto spettrale tende a restringersi

Relazioni di parità per segnali reali



Parte reale: PARI

Parte immaginaria: DISPARI

Modulo: PARI

Fase: DISPARI

Relazioni di parità: dimostrazione

$$\mathcal{F}\left(x(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left(\cos(2\pi ft) - j\sin(2\pi ft)\right)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt \triangleq X(f)$$

$$X^*(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi(-f)t)\,dt + j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi(-f)t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(2\pi ft)\,dt = X(f)$$

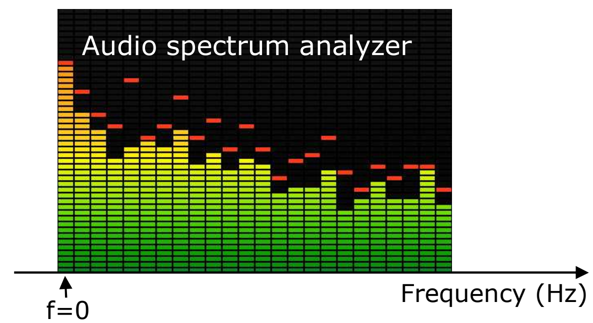
Per segnale reale nel dominio del tempo, la trasformata di Fourier ha dunque una simmetria Hermitiana, cioè:

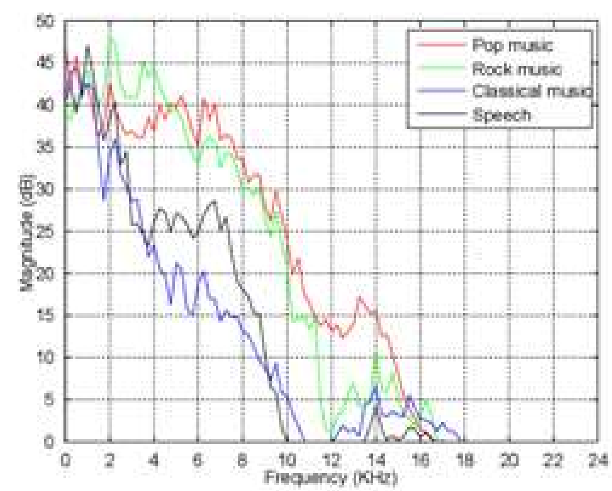
$$X^*(-f) = X(f) \Rightarrow \begin{cases} \Re\left[X(-f)\right] = \Re\left[X(f)\right] \\ \Im\left[X(-f)\right] = -\Im\left[X(f)\right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left|X(-f)\right| = \left|X(f)\right| \\ \arg\left[X(-f)\right] = -\arg\left[X(f)\right] \end{cases}$$

Relazioni di parità per segnali reali

- Per un segnale reale (nel tempo), la trasformata di Fourier sull'asse negative delle frequenze porta la stessa informazione già riportata sull'asse positive delle frequenze
  - Cioè i valori di *X(f)* per *f<0* sono immediatamente ricostruibili da quelli per *f≥0*

- Questo è il motivo principale per cui per segnali reali solitamente gli analizzatori di spettro riportano solo il grafico sull'asse positivo delle frequenze





Convoluzione e prodotto

- Definendo l'operatore "prodotto di convoluzione" tra due segnali continui come:

$$z(t) = x(t) * y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

- Si ha la proprietà

$$\boxed{x(t) * y(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow}} X(f)\, Y(f)}$$

Una convoluzione nel dominio del tempo diventa un prodotto nel dominio della frequenza

- Nel prossimo Capitolo relativo ai sistemi lineari tempo invarianti si vedrà che questa è la più importante proprietà delle trasformate di Fourier

Convoluzione e prodotto: dimostrazione

$$
\begin{aligned}
Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau) e^{-j2\pi ft}\, dt\, d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi\tau f} e^{+j2\pi\tau f}\, y(t-\tau) e^{-j2\pi ft}\, d\tau\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi\tau f}\, y(t-\tau) e^{-j2\pi f(t-\tau)}\, d\tau\, dt
\end{aligned}
$$

$$\boxed{t-\tau = t'}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi\tau f}\, y(t') e^{-j2\pi ft'}\, d\tau\, dt' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j2\pi\tau f}\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} y(t') e^{-j2\pi ft'}\, dt' \\
&= X(f)Y(f)
\end{aligned}
$$

si può dimostrare anche che a un prodotto nel dominio del tempo corrisponde una convoluzione nel dominio della frequenza

Derivazione ed integrazione

- Derivazione

$$\boxed{\dot{x}(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow}} j2\pi f X\left(f\right)}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} x\left(t\right) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow}} \left(j2\pi f\right)^n X\left(f\right)$$

- Integrazione

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x\left(r\right) dr \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{2} X\left(0\right)\delta\left(f\right) + \frac{X\left(f\right)}{j2\pi f}}$$

Derivazione ed integrazione: dimostrazione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Dimostrazione per la derivata

$$\mathcal{F}\{\dot{x}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt = \text{Integrazione per parti}$$

$$= \underbrace{\left[x(t)\exp(-j2\pi ft)\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty}}_{=0} + (j2\pi f)\int x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

$$= (j2\pi f)X(f)$$

Dettagli matematici: si dimostra che la trasformata di una derivata esiste sempre se *x(t)* è a modulo integrabile, cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt$ finito

Qui faremo questa ipotesi, che dunque richiede che:

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$$

E conseguentemente: $\left[x(t)\exp(-j2\pi ft)\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} = 0$

Dimostrazione per l'integrale

$$\int_{-\infty}^{t} x(r)\,dr = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-r)x(r)\,dt = u(t)*x(t)$$

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(r)\,dr\right] = U(f)X(f) = \frac{1}{2}X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

Abbiamo dimostrato nel capitolo precedente che: $U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\frac{1}{j\pi f}$

Dualità

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$\mathcal{F}\{X(f)\} = x(-t)$ e scambiando il significato di f e t: $\mathcal{F}\{X(t)\} = x(-f)$

- Interpretando la trasformata come funzione del tempo, si può trasformarla ancora, ottenendo la funzione di partenza ribaltata nel tempo
- A meno di un ribaltamento, l'operatore «trasformata di Fourier» è dunque l'inverso di se stesso

(Dimostrazione)

Sia $z(t) = \mathcal{F}\left(X(f)\right) = \int X(f) \cdot e^{-j2\pi ft}\, df$

Calcoliamo $z(-t) = \int X(f) \cdot e^{+j2\pi ft}\, df$

Questa è chiaramente la formula della antitrasformata di $X(f)$, cioè $x(t)$

Dunque: $z(-t) = x(t)$ e analogamente: $z(t) = x(-t)$

Applicazione della formula precedente

- Nelle tavole delle trasformate di Fourier questo risultato è utilizzato per ottenere facilmente relazioni duali a quelle di partenza. Infatti:

- Se nella tavola troviamo una certa relazione

$$x(t) \overset{F}{\Rightarrow} X(f)$$

- Allora è anche vera la seguente relazione

$$X(t) \overset{F}{\Rightarrow} x(-f)$$

Applicazione della formula precedente

- Se dobbiamo trasformare una funzione che ha l'espressione di una trasformata nota, conviene usare la relazione della slide precedente

- Esempio:

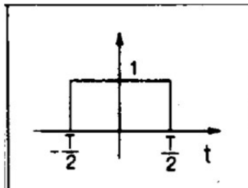
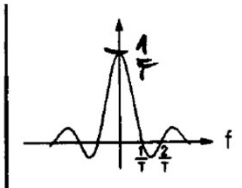
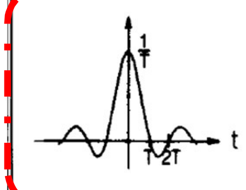
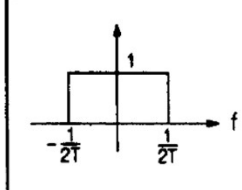
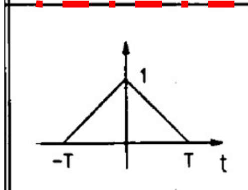
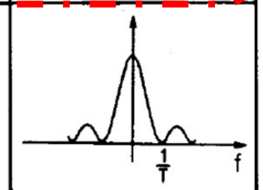
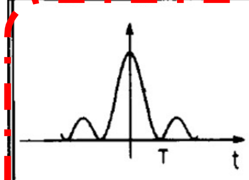
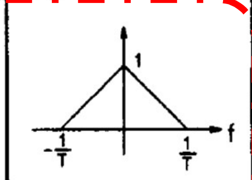
Consideriamo la funzione: $x(t) = \dfrac{\sin(\pi t / T)}{\pi t}$

sappiamo che se fosse una funzione della frequenza, sarebbe la trasformata di una porta larga $\dfrac{1}{T}$

Allora: $X(f) = \mathcal{F}\left(x(t)\right) = \mathcal{F}\mathcal{F}\left(p_{\frac{1}{T}}(f)\right) = p_{\frac{1}{T}}(-f)$ ma per simmetria della porta

$\Rightarrow X(f) = p_{\frac{1}{T}}(f)$

Estratto dalle tavole delle trasformate

	$p_T(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T/2 \\ 0, & \lvert t\rvert > T/2 \end{cases}$	$T\,\mathrm{Sinc}(fT) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$	
	$\frac{1}{T}\mathrm{Sinc}(t/T) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}$	$p_{1/T}(f) = \begin{cases} 1, & \lvert f\rvert < 1/2T \\ 0, & \lvert f\rvert > 1/2T \end{cases}$	
	$\mathrm{tri}(t/T) = \begin{cases} 1-\lvert t\rvert/T, & \lvert t\rvert < T \\ 0, & \lvert t\rvert > T \end{cases}$	$T\,\mathrm{Sinc}^2(fT) = T\frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$	
	$\frac{1}{T}\mathrm{Sinc}^2(t/T) = T\left[\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}\right]^2$	$\mathrm{tri}(fT) = \begin{cases} 1-\lvert f\rvert T, & \lvert f\rvert < 1/T \\ 0, & \lvert f\rvert > 1/T \end{cases}$	

Risultato ottenibile per dualità dalla “riga” precedente

Risultato ottenibile per dualità dalla “riga” precedente

Trasformata di Fourier come sviluppo su base (infinita)

- Riprendiamo la definizione di trasformata di Fourier

$$\boxed{X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt}$$

- Consideriamo l'insieme (infinito) di segnali

$$\boxed{w_f(t)=e^{-j2\pi ft}}$$

- I segnali sono tra di loro ortogonali per f diversi. Infatti:

$$\left\langle w_{f_1}(t),w_{f_2}(t)\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f_1 t}\cdot e^{j2\pi f_2 t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f_1-f_2)t}dt=\delta(f_1-f_2)$$

Per dimostrare quest'ultimo passaggio, si veda la dimostrazione della trasformata di una costante

Trasformata di Fourier come sviluppo su base (infinita)

$$\boxed{X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt}$$

- La trasformata di Fourier può dunque essere interpretata come uno sviluppo su una base ortogonale:

$$\boxed{w_f(t) = e^{-j2\pi ft}}$$

- Con coefficienti dati da: $\boxed{x(t)}$

… e analogamente sulla antitrasformata

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} dt$$

- La anti-trasformata di Fourier può dunque essere interpretata come uno sviluppo su una base ortogonale:

$$W_f(t) = e^{j2\pi ft}$$

- Con coefficienti dati da: $X(f)$

Proprietà trasformata di Fourier su energie e prodotti scalari

- Come conseguenza, si può dunque dimostrare che valgono le seguenti uguaglianze:

$$E(x) = \int \left| x(t) \right|^2 dt = \int \left| X(f) \right|^2 df$$

Uguaglianza di Parseval

$$\left\langle x(t), y(t) \right\rangle = \left\langle X(f), Y(f) \right\rangle$$

Invarianza prodotto scalare

$$\left| \left\langle X(f), Y(f) \right\rangle \right| \le \left\| X(f) \right\| \left\| Y(f) \right\|$$

Diseguaglianza di Schwarz

Relazioni Tempo-Frequenza

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Utilizzando le fondamentali proprietà introdotte in precedenza possiamo fare alcune considerazioni importanti a proposito della corrispondenza tra rappresentazione nel tempo e rappresentazione nel dominio della frequenza di un certo segnale
- La proprietà dello scalamento ci dice che espandere l'asse dei tempi corrisponde a comprimere l'asse delle frequenze e viceversa

$$\boxed{x(Kt) \Leftrightarrow \frac{1}{|K|} X\left(\frac{f}{K}\right)}$$

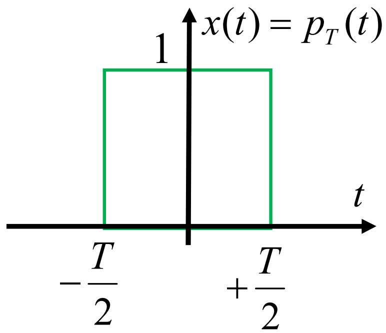
Relazione tempo frequenza

- Qualitativamente, questo significa che segnali «concentrati» nel tempo tendono ad avere spettro «largo» in frequenza e viceversa
- Tuttavia, per esprimere quantitativamente questa relazione non si può usare il "supporto" come misura della compattezza del segnale nei due domini
- Infatti si può dimostrare il seguente importante risultato:

$$x(t) \quad \text{supporto finito} \longrightarrow X(f) \quad \text{supporto infinito}$$

$$X(f) \quad \text{supporto finito} \longrightarrow x(t) \quad \text{supporto infinito}$$

Esempio: trasformata di una porta nel tempo

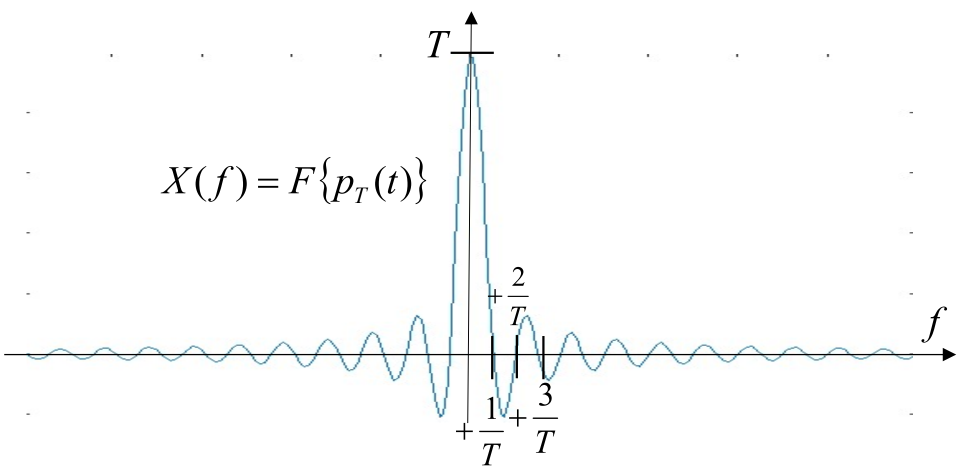


$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} 1 \cdot \left(\cos(2\pi f t) + j\sin(2\pi f t)\right) dt$$

$$X(f) = 2 \cdot \int_{0}^{+T/2} \cos(2\pi f t)\, dt = \frac{2}{2\pi f} \left[\sin(2\pi f t)\right]_0^{+T/2}$$

$$X(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T \cdot \mathrm{sinc}(f T)$$

Dove abbiamo introdotto la funzione speciale: $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$



Notare che la funzione nel dominio della frequenza oscilla per $f \to \infty$ ma non va mai a zero "definitivamente"

Esempio di funzione limitata nel tempo che dà luogo a funzione illimitata in frequenza

Funzioni limitate nel tempo

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Consideriamo ora una generica funzione $x(t)$ limitata nel tempo in $[-T/2, +T/2]$ e calcoliamone la trasformata
- Potremmo sempre scrivere che $x(t)$ è il prodotto tra una porta di durata T ed una funzione ausiliaria $x_I(t)$ illimitata nel tempo

$$x(t) = x_I(t) \cdot p_T(t) \Rightarrow X(f) = X_I(f) * \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$$

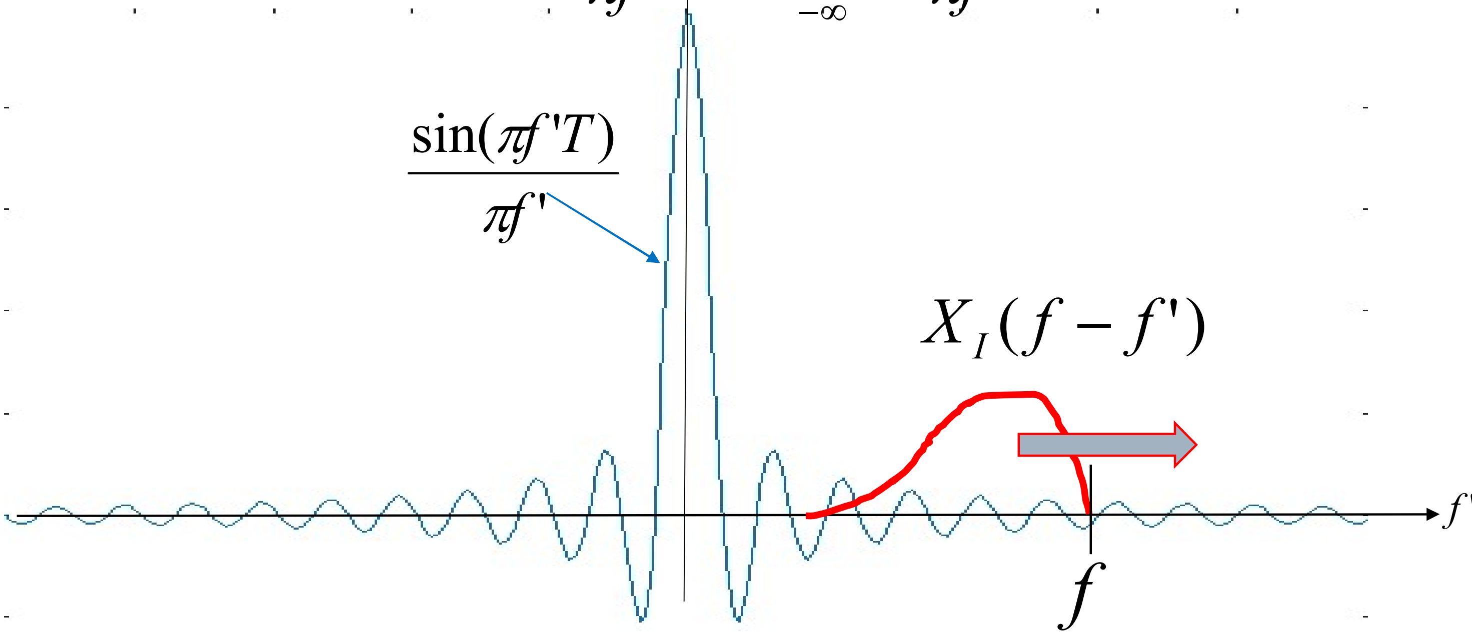
Qualunque sia l'andamento di $X_I(f)$, la convoluzione con una $sinc(\,)$ darà luogo ad una funzione illimitata in frequenza (dato che la $sinc(\,)$ oscilla sull'asse delle frequenze).

Abbiamo dunque qualitativamente dimostrato che <u>una funzione limitata nel tempo dà sempre luogo ad una sua trasformata di Fourier illimitata in frequenza</u>

Dettaglio sulla slide precedente

Stima qualitativa dell'andamento di questa convoluzione utilizzando il metodo grafico

$$X(f) = X_I(f) * \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f' T)}{\pi f'} \cdot X_I(f - f')\,df'$$



Relazione tempo-frequenza: analisi rigorosa

- Definendo l'**estensione** temporale e in frequenza come

$$\boxed{d^2 = \int t^2 \frac{|x(t)|^2}{E(x)} dt}$$

$$\boxed{D^2 = 4\pi^2 \int f^2 \frac{|X(f)|^2}{E(x)} df}$$

Estensione nel tempo
È proporzionale alla "varianza" del segnale nel dominio del tempo

Estensione in frequenza
È proporzionale alla "varianza" del segnale nel dominio della frequenza

- Si dimostrare che:

$$\boxed{d \cdot D \geq \frac{1}{2}}$$

La dimostrazione di questo risultato è abbastanza complessa e verrà omessa.

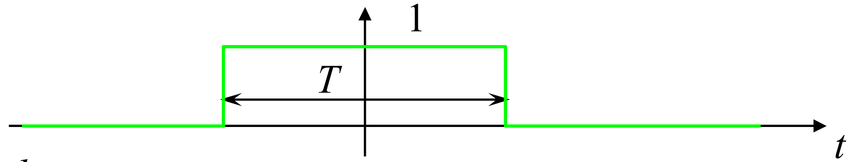
Curiosità: il risultato ha molte applicazioni nel campo delle fisica. Ad esempio è un risultato alla base del principio di indeterminazione, e infatti in alcuni testi questo risultato è indicato come "Disuguaglianza di Heisenberg" (in versioni più sofisticate, su funzioni in N dimensioni). Si veda ad esempio la pagina
https://it.wikipedia.org/wiki/Principio_di_indeterminazione_di_Heisenberg
alla sezione dove viene commentato questo risultato:

$$\sigma^2(f) \cdot \sigma^2(\tilde{f}) = \int (x-a)^2 |f(x)|^2 dx \int (\omega-b)^2 |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{\|f\|_{L^2}^4}{16\pi^2},$$

Esempio 1: porta e sua trasformata

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$x(t) = \Pi_T(t)$$



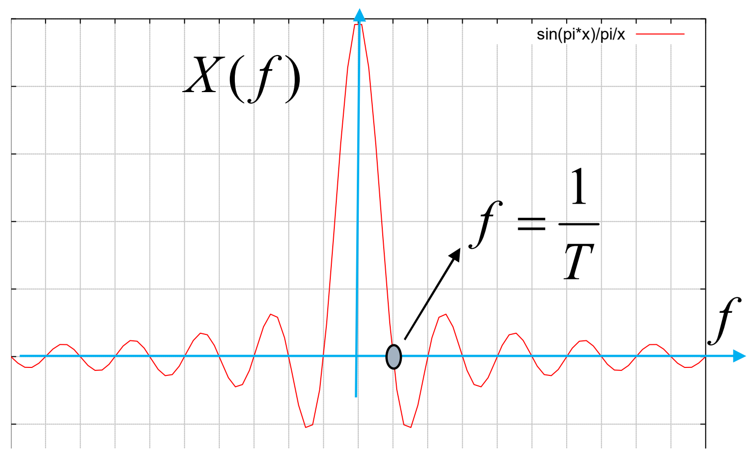
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_T(t) \exp(-j2\pi ft)\, dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j2\pi ft)\, dt$$

$$= -\frac{1}{j2\pi f}\left[\exp(-j2\pi ft)\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= -\frac{1}{j2\pi f}\left[-2j\sin(2\pi fT/2)\right]$$

$$\boxed{= \frac{1}{\pi f}\sin(\pi fT) = T\,\mathrm{sinc}(fT)}$$



- Conclusione: più è larga la porta nel dominio del tempo (cioè per *T* crescenti), più è stretta la “sinc” in frequenza

Tavole e proprietà Trasformate di Fourier

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

(disponibili sul portale del corso)

Proprietà	Segnale	Trasformata di Fourier
	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{+j2\pi ft} df$	$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$
	$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{+j2\pi ft} df$	$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt$
linearità	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
inversione assi	$x(-t)$	$X(-f)$
coniugazione	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
anticipo o ritardo	$x(t \pm \theta)$	$X(f) e^{\pm j2\pi f\theta}$
scalamento in t	$x(kt)$	$\frac{1}{\lvert k\rvert} X(\frac{f}{k})$
scalamento in f	$\frac{1}{\lvert k\rvert} x(\frac{t}{k})$	$X(kf)$
parità	$x(t)$ reale	$\mathcal{R}\{X(f)\}$ pari
	$x(t)$ reale	$\mathcal{I}\{X(f)\}$ dispari
	$x(t)$ reale	$\lvert X(f)\rvert$ pari
	$x(t)$ reale	$\arg\{X(f)\}$ dispari
	$x(t)$ reale e pari	$X(f)$ reale e pari
traslazione in f	$x(t) e^{\pm j2\pi f_0 t}$	$X(f \mp f_0)$
modulazione	$x(t)\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[X(f - f_0) + X(f + f_0)]$
convoluzione	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t-\tau)\, d\tau$	$X(f)Y(f)$
prodotto	$x(t)y(t)$	$\int_{-\infty}^{+\infty} X(a) Y(f-a)\, da$
derivazione	$\dot{x}(t)$	$j2\pi f X(f)$
integrazione	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{2} X(0)\delta(f) + X(f)/j2\pi f$
dualità	$X(t)$	$x(-f)$

	Funzione del tempo $x(t)$		Funzione della frequenza $X(f)$	
1		$e^{-at}u(t)$ $(a > 0)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	
2		$ate^{-at}u(t)$ $(a > 0)$	$\frac{a}{(a + j2\pi f)^2}$	
3		$e^{-a\lvert t\rvert}$ $(a > 0)$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$	
4		$\delta(t)$	1	
5		1	$\delta(f)$	
6		$\delta^{(n)}(t)$	$(j2\pi f)^n$	
7		$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{\delta(f)}{2}$	

Funzione del tempo $x(t)$		Funzione della frequenza $X(f)$	
	$tu(t) = \begin{cases} t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{-1}{(2\pi f)^2} + \frac{\delta(f)}{j4\pi f} = \frac{1}{(j2\pi f)^2} + \frac{j\delta'(f)}{4\pi}$	
	$t^n u(t) = \begin{cases} t^n, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{n!}{(j2\pi f)^{n+1}} + \frac{\delta(f) n!}{2(j2\pi f)^n} = \frac{n!}{(j2\pi f)^{n+1}} + j^n \frac{\delta^{(n)}(f)}{2(2\pi)^n}$	
	$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\pi f}$	
	$\lvert t\rvert$	$-\frac{1}{2\pi^2 f^2}$	
	t	$j\frac{\delta'(f)}{2\pi}$	
	t^n n intero ≥ 0	$\frac{j^n \delta^{(n)}(f)}{(2\pi)^n}$	
	$\lvert t^n\rvert$ n dispari	$\frac{2n!}{(j2\pi f)^{n+1}}$	

Altre versioni delle tavole disponibili online

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- https://en.wikibooks.org/wiki/Engineering_Tables/Fourier_Transform_Properties
- https://en.wikibooks.org/wiki/Engineering_Tables/Fourier_Transform_Table
- https://en.wikibooks.org/wiki/Engineering_Tables/Fourier_Transform_Table_2