Elaborazione dei Segnali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Lezione 7

Analisi in frequenza di segnali a tempo continuo tramite DFT

A.A. 2023-2024

Ipotesi

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Il segnale x(t) ha durata limitata nel tempo → supporto $(0,T_x)$
- Il segnale x(t) è a banda limitata (pari a B_x)
- Il segnale x(t) viene campionato con una frequenza di campionamento $f_c \geq 2B_x$, generando la sequenza:

$$x(n) = x(nT_c) \quad n = 0,\ldots,N-1$$

- Il numero N di campioni è tale per cui $T_0 = NT_c \geq T_x$

Segnale campionato

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Il campionamento ideale di un segnale a tempo continuo x(t) si può esprimere come:

$$x_c(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\,\delta(t - nT_c)$$

  - dove T_c è il periodo di campionamento

- L'applicazione del criterio del teorema del campionamento garantisce che le repliche della trasformata di Fourier $X_c(f_a)=F\{x_c(t)\}$, le quali nascono a causa del campionamento nel tempo, non si sovrappongano tra di loro nel dominio della frequenza

Trasformata di Fourier "analogica"

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La trasformata di Fourier (FT) del segnale campionato si può esprimere come:

$$X_c(f_a) = F\left\{x(t)\cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_c)\right\} = F\{x(t)\} * F\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT_c)\right\} =$$

$$= X(f) * \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f_a - n\frac{1}{T_c}\right) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f_a - n\frac{1}{T_c}\right)$$

- Quindi:

$$\boxed{X(f_a) = T_c X_c(f_a) \qquad \text{per} \quad f_a \in \left[-\frac{f_c}{2}, \frac{f_c}{2}\right]}$$

Trasformata di Fourier “analogica”

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La trasformata di Fourier (FT) del segnale campionato si può esprimere anche come:

$$X_c(f_a) = F\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c)\cdot\delta(t-kT_c)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c)F\{\delta(t-kT_c)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c)e^{-j2\pi kT_c f_a}$$

- La DTFT di una generica sequenza di campioni x(k) è pari a:

$$X\left(e^{j2\pi f}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j2\pi f k}$$

e coincide con $X_c(f_a)$ se $f = T_c \cdot f_a = \dfrac{f_a}{f_c}$

$$\boxed{X\left(e^{j2\pi f}\right) = X_c(f_a)\Big|_{f_a = f\cdot f_c}}$$

Relazione tra FT e DFT

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La FT del segnale campionato (su N campioni) si può esprimere come:

$$X_c(f_a) = F\left\{\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_c)\cdot\delta(t-nT_c)\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_c) F\{\delta(t-nT_c)\} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_c) e^{-j2\pi nT_c f_a}$$

- Campionando $X_c(f_a)$ nel dominio della frequenza nel periodo $[0,f_c]$ con passo di campionamento pari a $\Delta f=f_C/N$:

$$X_c(f_a)\Big|_{f_a=\frac{k}{N}f_c} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_c) e^{-j2\pi nT_c\frac{k}{N}f_c} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_c) e^{-j2\pi n\frac{k}{N}} \qquad k=0,\dots,N-1$$

$$X_c(f_a)\Big|_{f_a=\frac{k}{N}f_c} = DFT[x(n)] \Longrightarrow \boxed{X_c\left(\frac{k}{N}f_c\right) = DFT[x(n)]} \qquad k=0,\dots,N-1$$

FT di un segnale analogico tramite DFT

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Nell'intervallo $f_a \in [0, f_c]$: $X(f_a) = T_c X_c(f_a)$

- Quindi la relazione che lega i campioni della FT di un segnale analogico con la DFT della sequenza di campioni è:

$$\boxed{X\left(\frac{k}{N} f_c\right) = T_c \cdot X_c\left(\frac{k}{N} f_c\right) = T_c \cdot DFT[x(n)]} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

- Si hanno a disposizione $N = T_0/T_c$ campioni della FT
  - Con spaziatura in frequenza $f_c/N = 1/T_0$
  - Nel range di frequenze: $\left[0, \frac{N-1}{N}\right] f_c = \left[0, f_c - \frac{f_c}{N}\right]$

Risoluzione in frequenza

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Aumentando l'intervallo T_0 su cui si osserva il segnale, mantenendo fissa la frequenza di campionamento, si può aumentare la risoluzione in frequenza

$$\Delta f = \frac{f_c}{N} \quad \text{con} \quad N = \frac{T_0}{T_c}$$

- Per aumentare la risoluzione in frequenza viene spesso utilizzata la tecnica dello "zero padding":

$$y(kT_c) = \begin{cases} x(kT_c) & k = 0, \ldots, N-1 \\ 0 & k = N, \ldots, N'-1 \end{cases}$$

- Lo spettro non viene modificato, ma lo si rappresenta su una griglia più fitta.

Commenti

- Volendo analizzare il segnale $X(f_a)$ tramite la DFT, ci si trova, a causa della discretizzazione dell'asse dei tempi e delle frequenze, ad esaminare segnali periodicizzati.

- Lo spettro identificato dalla DFT è una sezione di N campioni, a partire dell'origine, dello spettro periodicizzato.

- Le componenti di $X(f_a)$ sulle frequenze negative sono rappresentate nell'intervallo $[f_c/2, f_c - f_c/N]$

Parametri della DFT

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- T_0: intervallo di osservazione del segnale x(t)
- T_c: intervallo di campionamento del segnale x(t)
- N: numero di campioni prelevati dal segnale x(t)
- f_c: frequenza di campionamento (periodo della DFT)
- Δf: risoluzione in frequenza della DFT

- I parametri liberi sono 2:

$$T_0 = NT_c \qquad f_c = \frac{1}{T_c} \qquad \Delta f = \frac{1}{T_0}$$

- La scelta dei parametri deve essere fatta in modo da limitare l'aliasing nel tempo e in frequenza

Esempio 1

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Calcolo della DFT di un segnale x(t) aperiodico di durata T_s nota e con banda B_x

- Scelgo $f_c=2B_x$ in modo da evitare il fenomeno dell'aliasing in frequenza: $T_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{2B_x}$

- Scelgo $T_0 \geq T_s$ in modo da evitare il fenomeno dell'aliasing nel tempo. Maggiore è T_0, maggiore è la risoluzione in frequenza: $\Delta f = \frac{1}{T_0}$

- Il numero di campioni è quindi dato da: $N = \frac{T_0}{T_c} = T_0 f_c \geq 2B_x T_s$

Esempio 1

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Per motivi di complessità computazionale, conviene scegliere come valore di N una potenza di due

- Se il segnale non ha banda limitata, si può contenere l'aliasing in frequenza stimando la banda B_x come quella che contiene la maggior parte dell'energia del segnale (ad esempio il 99%).

- Se il segnale non è limitato nel tempo, si può contenere l'aliasing nel tempo scegliendo un numero N di campioni tali per cui i campioni del segnale oltre a $T_0=NT_c$ possano essere ritenuti ragionevolmente nulli.

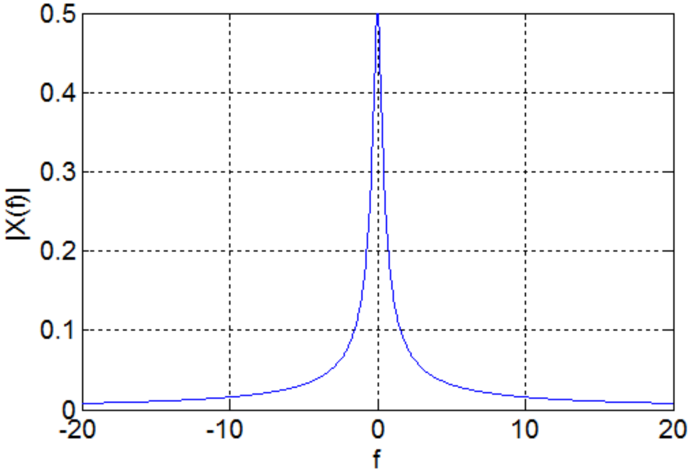
Esempio 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Calcolo DFT del segnale: $x(t) = e^{-2t} u(t)$

- Il segnale x(t) non ha né durata né banda finite.
- Il suo spettro vale:

$$X(f_a) = \frac{1}{2 + j2\pi f_a}$$



- Valutiamo la banda del segnale in cui è contenuta il 99% dell'energia:

$$\int_{-B_x}^{B_x} \left| \frac{1}{2 + j2\pi f_a} \right|^2 df_a = 0.99 \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Esempio 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = -\frac{1}{4} e^{-4t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{4}$$

$$\int_{-B_x}^{B_x} \left| \frac{1}{2 + j2\pi f_a} \right|^2 df_a = \frac{1}{4} \int_{-B_x}^{B_x} \frac{1}{1 + \pi^2 f_a^2} df_a = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi B_x}^{\pi B_x} \frac{1}{1 + \xi^2} d\xi =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \arctan(\xi) \Big|_{-\pi B_x}^{\pi B_x} = \frac{1}{2\pi} \arctan(\pi B_x)$$

$$\frac{1}{2\pi} \arctan(\pi B_x) = \frac{0.99}{4} \Rightarrow \arctan(\pi B_x) = 0.99 \frac{\pi}{2}$$

$$B_x = \frac{1}{\pi} \tan\left(0.99 \frac{\pi}{2}\right) \cong 20.26\,\text{Hz}$$

Esempio 2

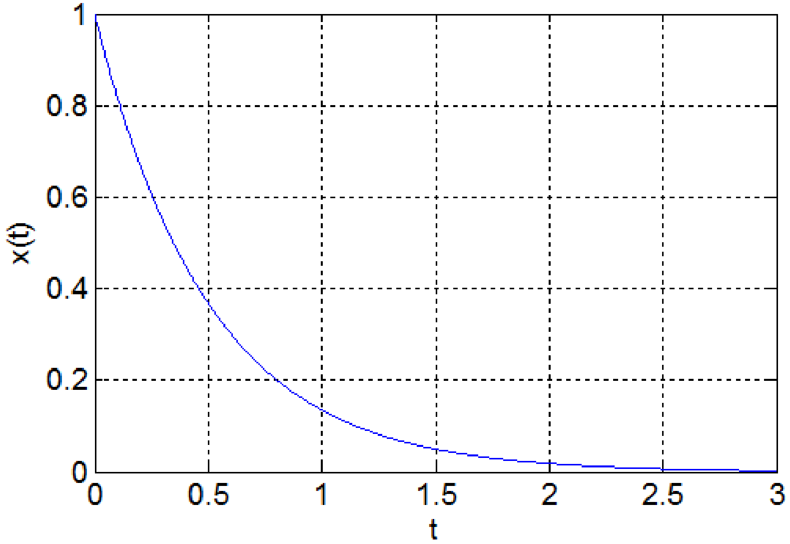
- La frequenza di campionamento vale quindi:

$$f_c = 2B_x = 40.52\,\mathrm{Hz}$$

- Scegliamo $T_0 \cong 3$ s, istante di tempo oltre il quale il segnale x(t) può essere ritenuto ragionevolmente nullo:

$$N = \frac{T_0}{T_c} = T_0 f_c \cong 121.56$$

- Scegliamo l'intero superiore potenza di due: $N = 128$



Esempio 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

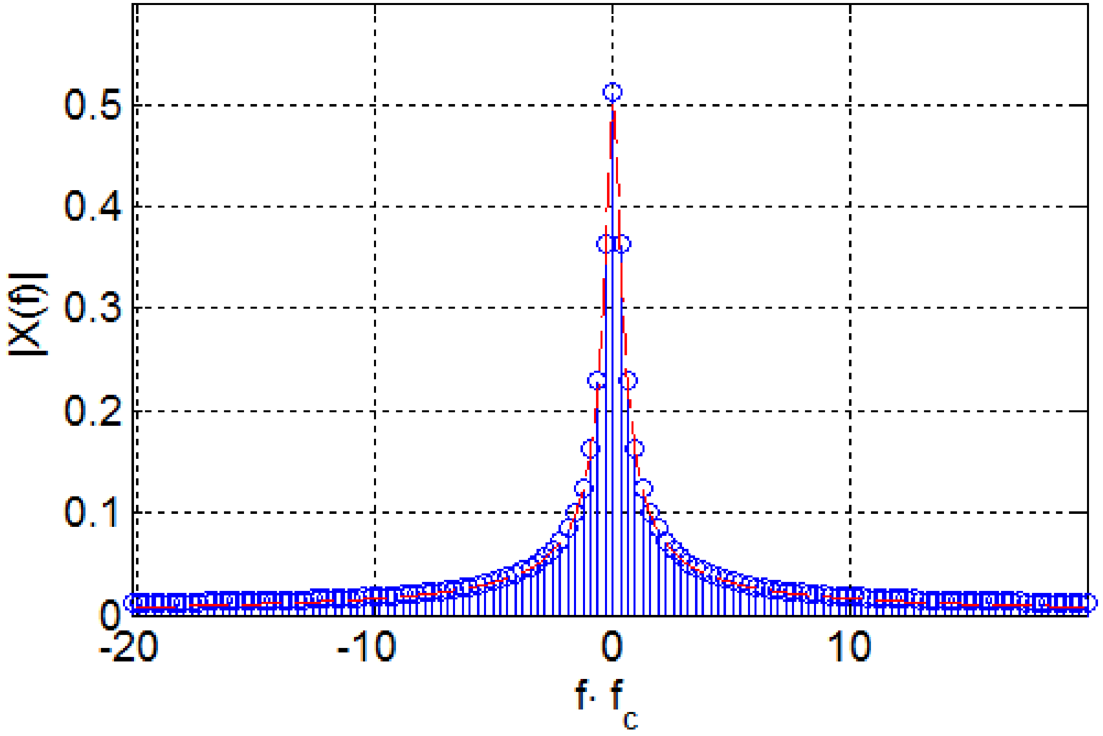
$$f_c = 40.52\,\mathrm{Hz}$$

$$\mathrm{N} = 128$$

$$\mathrm{T_c} = \frac{1}{f_c} \cong 0.025\,\mathrm{s}$$

$$\mathrm{T_0} = NT_c = 3.16\,\mathrm{s}$$

$$\Delta f = \frac{1}{T_0} \cong 0.316\,\mathrm{Hz}$$



Esempio 2 –Codice Matlab

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

```
fc=40.52;
N=128;

Tc=1/fc;
T0=N*Tc;
Df=1/T0;

n=[0:N-1];
x_samp=exp(-2*n*Tc);

f=[-N/2:N/2-1]*Df;
DFT=fftshift(fft(x_samp,N));
```

```
figure
set (gca,'FontSize',14)
stem(f,abs(DFT)*Tc)
xlabel('f\cdot f_c')
ylabel('|X(f)|')
axis([-20 20 0 0.6])
grid on
hold on

f=[-N/2:0.01:N/2-1]*Df;
X=abs(1./(2+j*2*pi*f));
plot(f,X,'r--')
```

Esempio 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

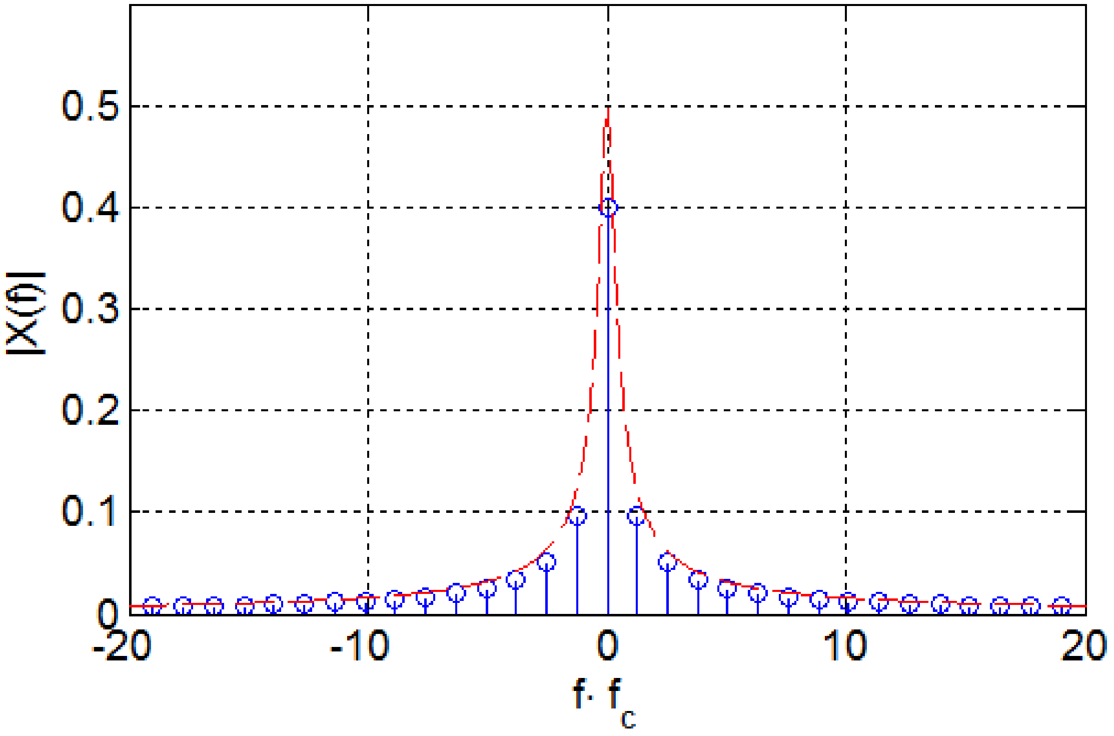
$$f_c = 4 \cdot 40.52\,\mathrm{Hz}$$

$$\mathrm{N} = 128$$

$$\mathrm{T_c} = \frac{1}{f_c} \cong 0.0062\,\mathrm{s}$$

$$\mathrm{T_0} = NT_c = 0.79\,\mathrm{s}$$

$$\Delta f = \frac{1}{T_0} \cong 1.27\,\mathrm{Hz}$$



Esempio 2

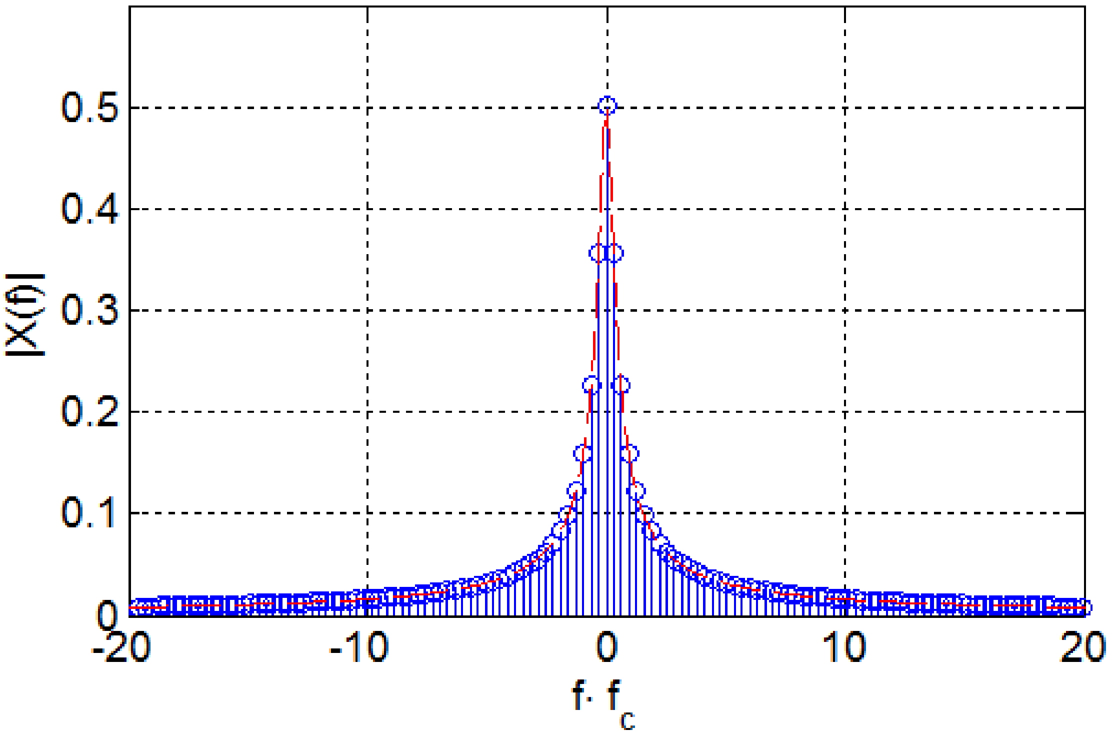
$$f_c = 4 \cdot 40.52\,\text{Hz}$$

$$\text{N} = 4 \cdot 128$$

$$\text{T}_\text{c} = \frac{1}{f_c} \cong 0.0062\,\text{s}$$

$$\text{T}_0 = NT_c = 3.16\,\text{s}$$

$$\Delta f = \frac{1}{T_0} \cong 0.316\,\text{Hz}$$



DFT di segnali analogici periodici

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Supponiamo di voler analizzare in frequenza tramite la DFT un segnale analogico $x_T(t)$, periodico di periodo T.

- La scelta di f_c deve essere eseguita cercando di rispettare il teorema del campionamento:
  - Se $x_T(t)$ ha banda limitata pari a $B_x \rightarrow f_c \geq 2B_x$

- L'intervallo di osservazione nel tempo T_0 dovrà contenere un numero intero di periodi, in modo da far coincidere il segnale periodico originario $x_T(t)$ con il segnale periodicizzato in seguito al campionamento in frequenza.

Esempio

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x_T(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

- Bisogna scegliere l'intervallo temporale T_0 dal quale estrarre N campioni: $x_T(t_k) \quad \text{con} \quad t_k = kT_c,\ k = 0, \ldots, N-1$

- Il segnale $x_T(t)$ osservato sull'intervallo T_0 può essere espresso come:

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \cdot p_{T_0}\left(t - \frac{T_0}{2}\right)$$

- La sua trasformata di Fourier vale:

$$X(f_a) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f_a - \frac{1}{T}\right) + \delta\left(f_a + \frac{1}{T}\right)\right] * \left[\operatorname{sinc}(f_a T_0) e^{-j\pi f_a T_0}\right]$$

Esempio

$$X\left(f_a\right)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(\left(f_a-\frac{1}{T}\right)T_0\right)e^{-j\pi\left(f_a-\frac{1}{T}\right)T_0}+\operatorname{sinc}\left(\left(f_a+\frac{1}{T}\right)T_0\right)e^{-j\pi\left(f_a+\frac{1}{T}\right)T_0}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(f_aT_0-\frac{T_0}{T}\right)e^{-j\pi\left(f_aT_0-\frac{T_0}{T}\right)}+\operatorname{sinc}\left(\left(f_aT_0+\frac{T_0}{T}\right)\right)e^{-j\pi\left(f_aT_0+\frac{T_0}{T}\right)}\right]$$

- Campioni della FT (k=-N/2, …,N/2-1):

$$X\left(f_a\right)\Big|_{f_a=\frac{k}{N}\cdot f_c}=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{N}\frac{T_0}{T_c}-\frac{T_0}{T}\right)e^{-j\pi\left(\frac{k}{N}\frac{T_0}{T_c}-\frac{T_0}{T}\right)}+\operatorname{sinc}\left(\left(\frac{k}{N}\frac{T_0}{T_{c\ 0}}+\frac{T_0}{T}\right)\right)e^{-j\pi\left(\frac{k}{N}\frac{T_0}{T_c}+\frac{T_0}{T}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(k-\frac{T_0}{T}\right)e^{-j\pi\left(k-\frac{T_0}{T}\right)}+\operatorname{sinc}\left(k+\frac{T_0}{T}\right)e^{-j\pi\left(k+\frac{T_0}{T}\right)}\right]$$

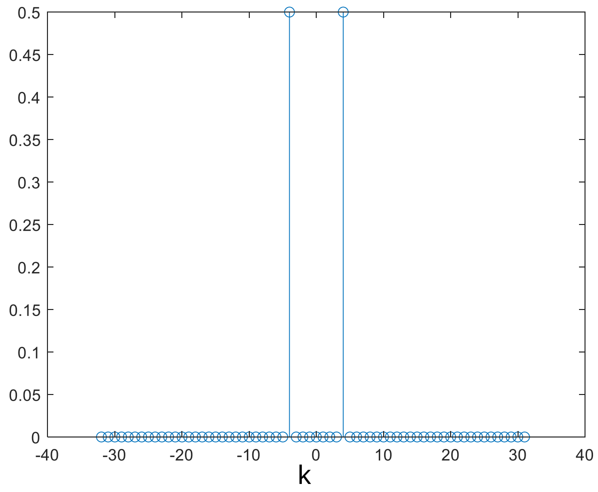
Esempio

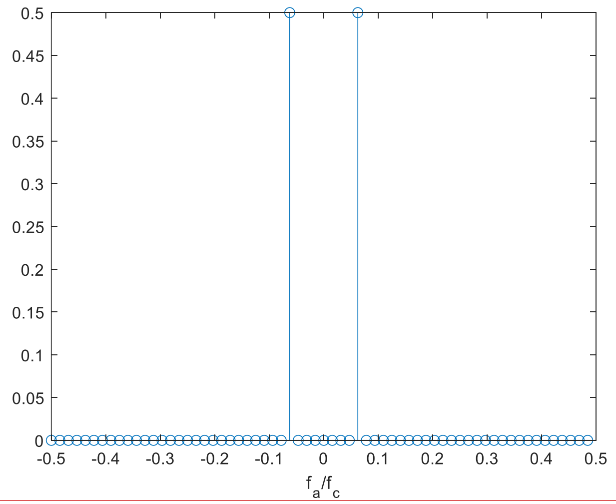
$$X\left(f_a\right)\Big|_{f_a=\frac{k}{N}\cdot f_c}=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sinc}\left(k-\frac{T_0}{T}\right)e^{-j\pi\left(k-\frac{T_0}{T}\right)}+\operatorname{sinc}\left(k+\frac{T_0}{T}\right)e^{-j\pi\left(k+\frac{T_0}{T}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sinc}(k-p)e^{-j\pi(k-p)}+\operatorname{sinc}(k+p)e^{-j\pi(k+p)}\right]$$

- Se $T_0=pT$ (con p intero), le due sinc hanno solamente due campioni diversi da zero, per k=p la prima e k=-p la seconda:

p=4
$T/T_c=16$





Esempio

- Altrimenti, compaiono altre frequenze spurie nello spettro:

$p=2.25$
$T/T_c=16$