Teoria dei Segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- **Conversione analogico-digitale**
- **Teorema del campionamento**

Ultimo aggiornamento: ottobre 2024

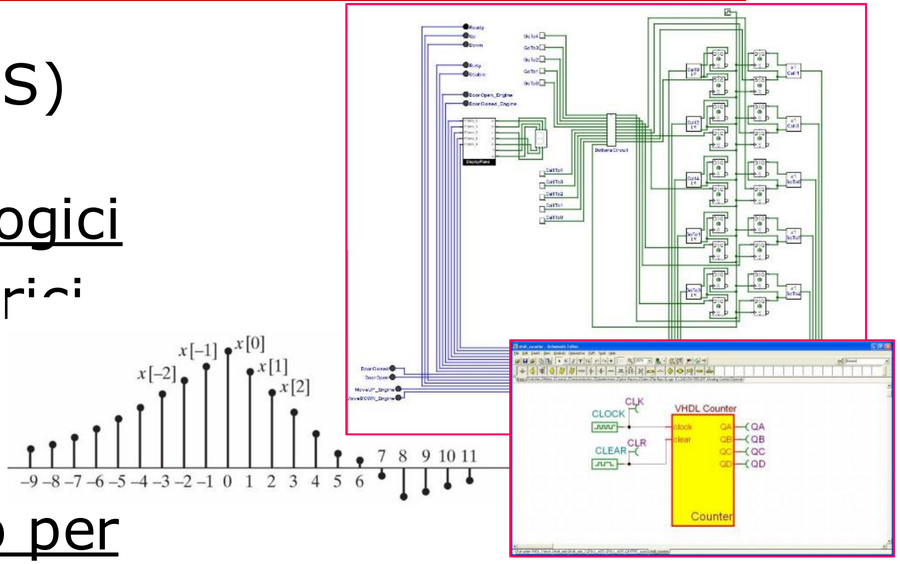
Introduzione

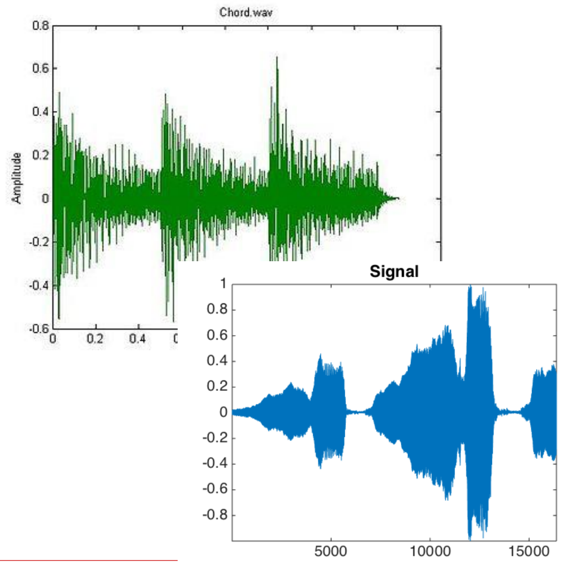
Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications

- Le tecniche di elaborazione numerica dei segnali (ENS) oggi consentono di processare i <u>segnali numerici in maniera molto più sofisticata rispetto ai segnali analogici</u>
- È quindi oggi fondamentale disporre di segnali numerici, cioè discretizzati nel tempo e in ampiezza.

<u>TUTTAVIA:</u>

- moltissimi segnali di grande importanza pratica <u>sono per loro natura "nativamente" analogici</u>:
  - Segnali elettrici, rappresentativi di segnali di altra natura (per esempio musica e/o voce) che variano con continuità nel tempo
  - Possono assumere un qualsiasi valore compreso tra un minimo ed un massimo, ed in un istante di tempo anch’esso variabile con continuità.





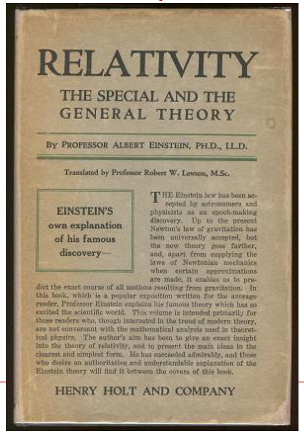
La "convergenza digitale": molteplici sorgenti in flussi di bit

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

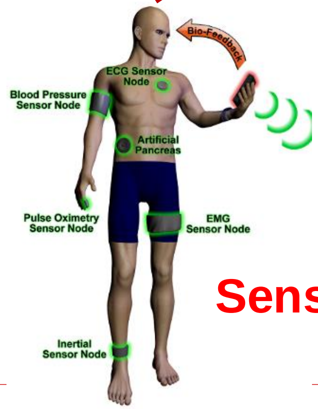
Video

Images

Text


RELATIVITY
THE SPECIAL AND THE GENERAL THEORY
By PROFESSOR ALBERT EINSTEIN, PH.D., LL.D.
Translated by Professor Robert W. Lawson, M.Sc.
EINSTEIN'S own explanation of his famous discovery—
HENRY HOLT AND COMPANY

Sensors

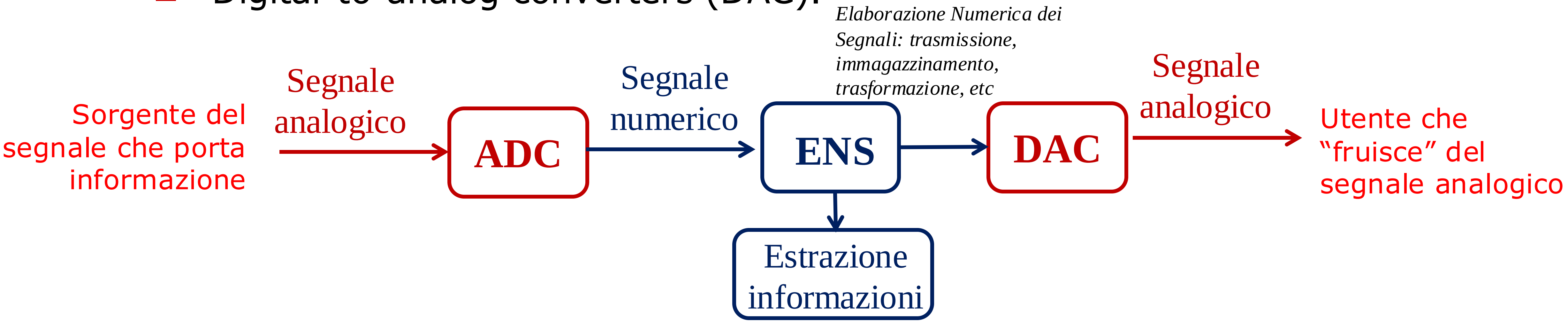


Voice/Music

Conversion techniques

Conversione analogico/digitale

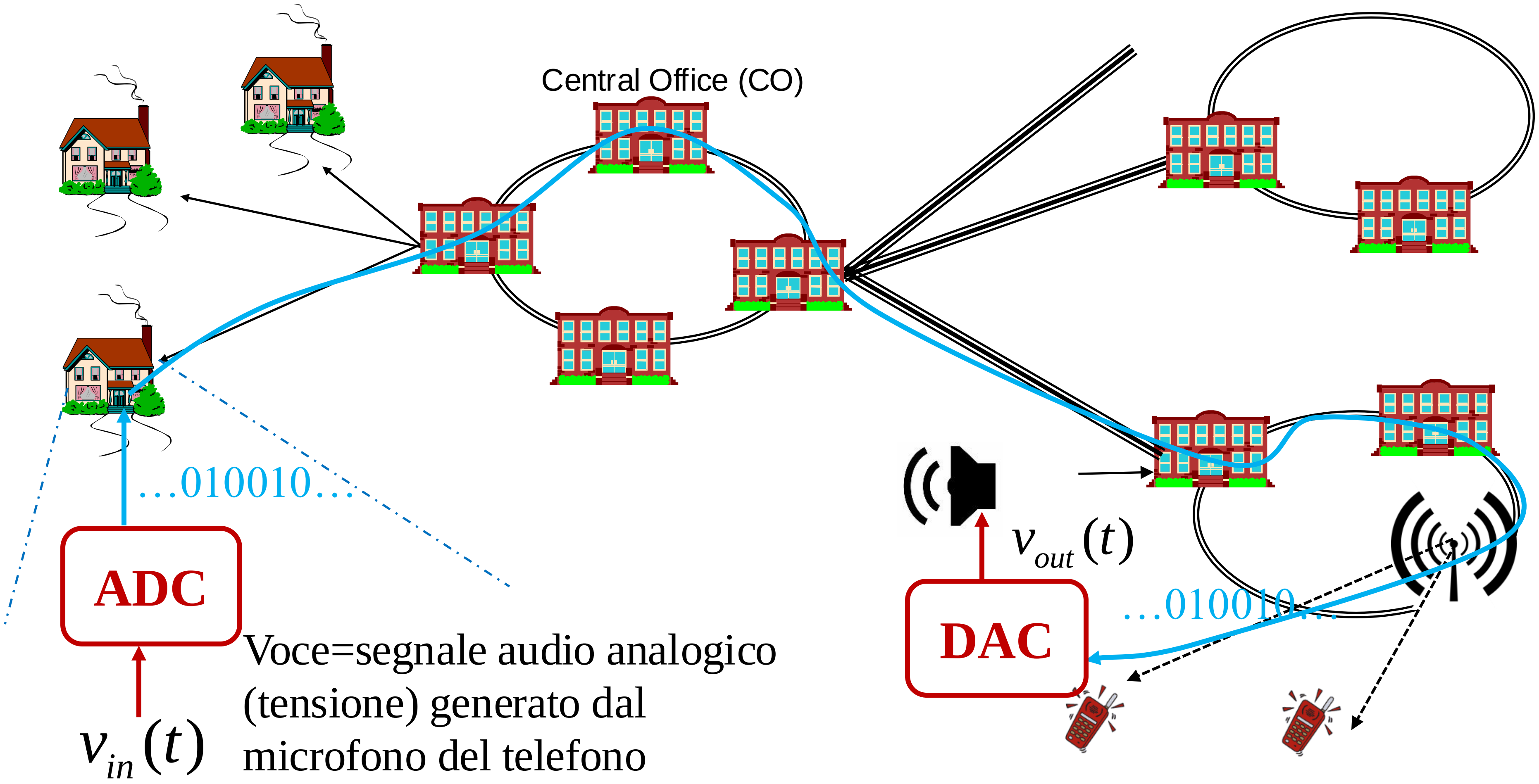
- Per applicare le tecniche di Elaborazione Numerica dei Segnali (ENS) ai segnali “reali” è necessario convertirli in formato numerico (e viceversa). Sono dunque fondamentali:
- Convertitori analogico-digitale
  - Analog-to-digital converters (ADC)
- Convertitori digitale-analogico
  - Digital-to-analog converters (DAC).



Sistemi di telecomunicazioni digitali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

I moderni sistemi di telefonia: conversione ADC e DAC direttamente negli apparati utente



Sistemi ADC e DAC

Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications

- Nell’esempio della slide precedente, un buon dimensionamento del sistema richiede che il segnale analogico di uscita sia il più simile possibile a quello di ingresso
- Questo obiettivo impone due diversi e fondamentali requisiti:
  - I bit generati dal ADC siano trasmessi <u>senza errori</u>
  - La cascata delle due conversioni ADC e DAC assicuri la relazione:

*Obiettivo che esula da questo corso (è trattato nel dettaglio nella Laurea LM **Communications Engineering CE**)*

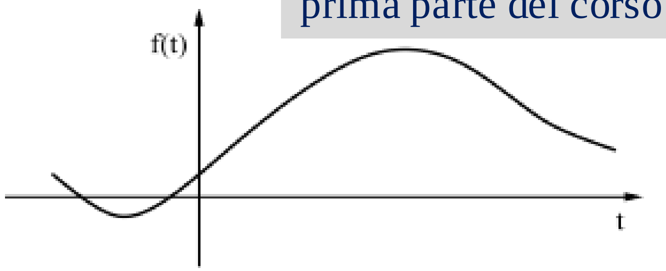
$$v_{out}(t) \;;\; v_{in}(t)$$

Obiettivo di questo capitolo

Importante: l’uguaglianza non sarà mai esatta, ma approssimata secondo certi livelli di qualità che dipendono dalle applicazioni

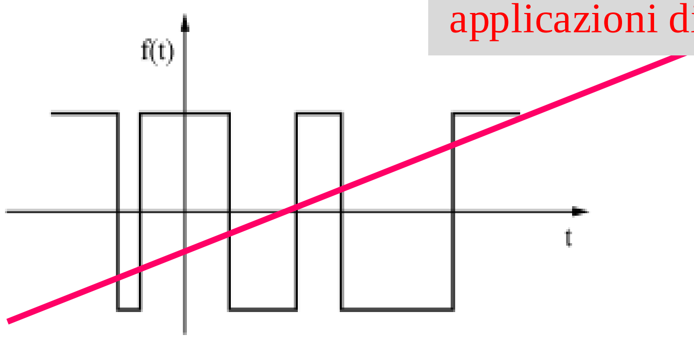
Classificazione delle tipologie di segnali

Fondamentale per la prima parte del corso



1) segnale continuo nelle ampiezze e nei tempi (segnale analogico)

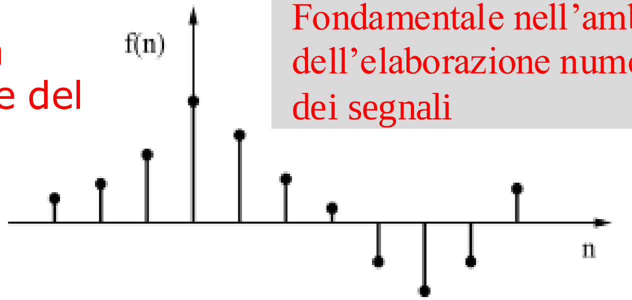
Non rilevante salvo applicazioni di nicchia



2) Segnale a tempo continuo e valori finiti

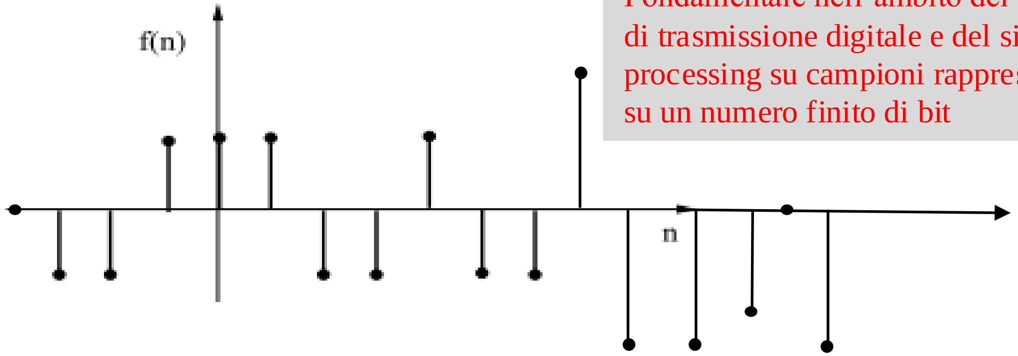
Obiettivo della prossima parte del corso

Fondamentale nell'ambito dell'elaborazione numerica dei segnali



3) Segnale a tempo discreto e continuo nelle ampiezze

Fondamentale nell'ambito dei sistemi di trasmissione digitale e del signal processing su campioni rappresentati su un numero finito di bit



4) Segnale a tempo discreto e valori finiti (segnale digitale o numerico)

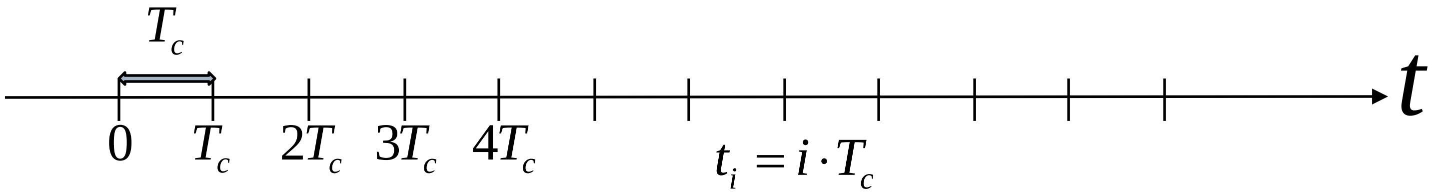
Dal punto di vista applicativo: il caso 3) di fatto viene implementato con rappresentazione dei dati in floating point mentre il caso 4) su rappresentazione intera (tipicamente su 8 o 16 bit)

Introduzione alla conversione analogico-digitale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Un convertitore analogico-digitale effettua due tipi di operazioni:

- **Campionamento (discretizzazione del tempo)**
  - «selezione» del valore del segnale a determinati istanti temporali, tipicamente equi-spaziati sull’asse dei tempi

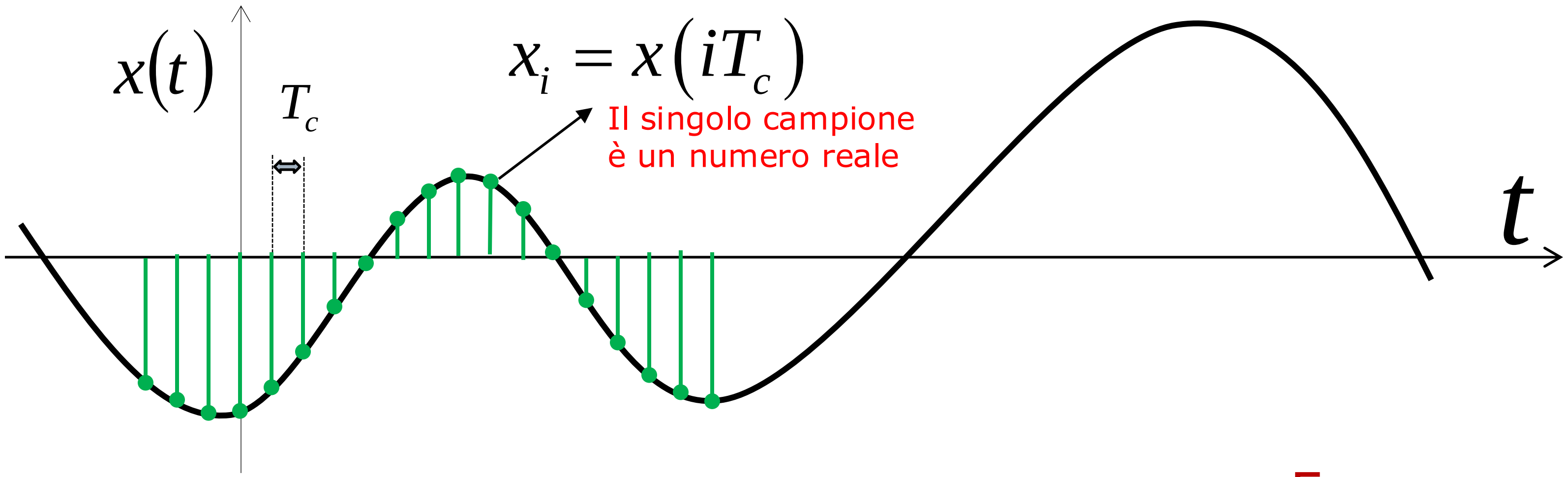


- **Quantizzazione (discretizzazione delle ampiezze)**
  - Conversione di ciascun valore campionato in un gruppo (finito) di bit

Campionamento

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Concetto base: considerare i valori del segnale analogico SOLO in istanti di tempo multipli di T_c, detto «tempo di campionamento»



Nota: in questo corso si considererà solo un campionamento uniforme nel tempo.

Esistono tuttavia altri ambiti che usano tecniche più complesse, con frequenze di campionamento variabili (ad esempio, una delle modalità di simulazione nel tempo di Simulink è a campionamento variabile e adattativo)

Terminologia:
Frequenza di campionamento

$$\boxed{f_c = \frac{1}{T_c}}$$

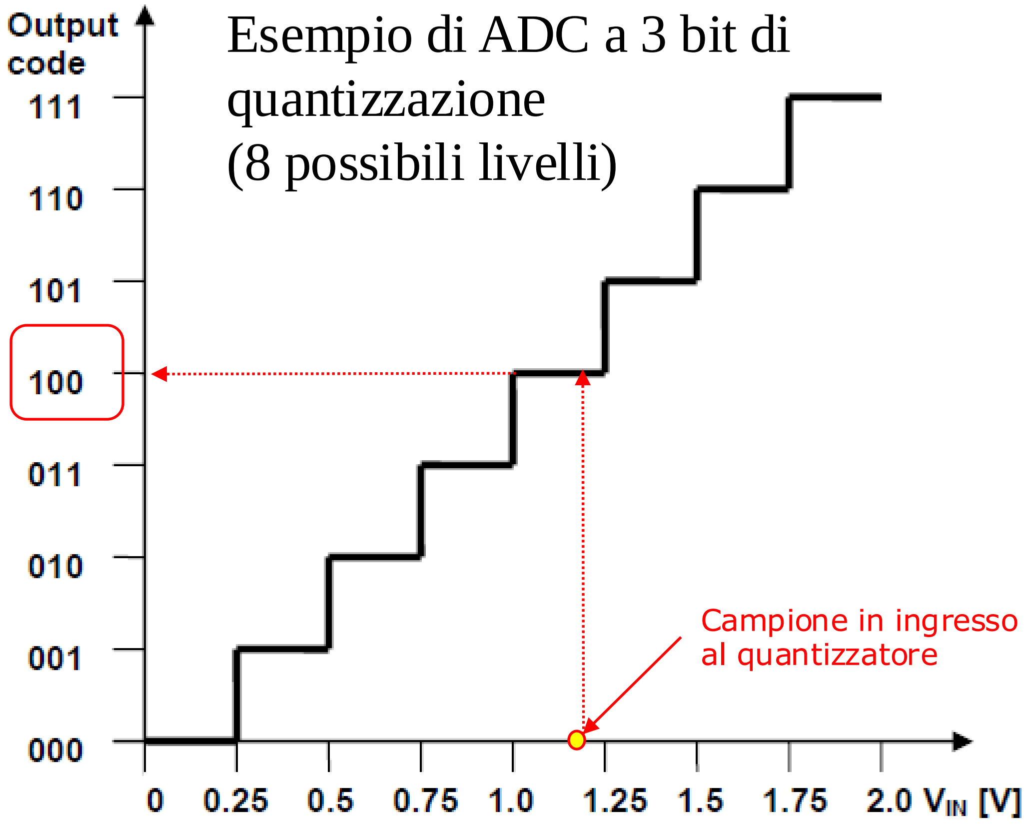
- Intuitivamente, è ragionevole che più è piccolo T_c, tanto migliore sarà l'operazione di campionamento

Quantizzazione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

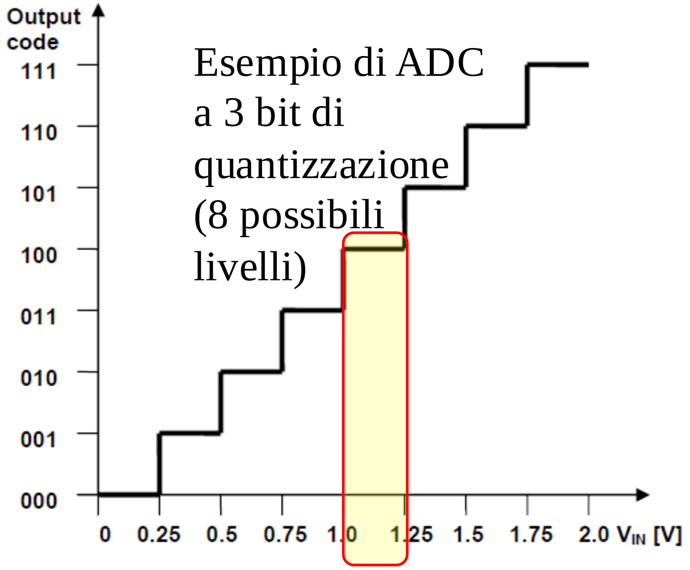
- Tramite un opportuno algoritmo, si associa a ciascun intervallo di ampiezza di ingresso un singolo valore discreto
  - e lo si associa ad un gruppo di bit di lunghezza n_{bit}
- Tipicamente, si usa una relazione come quella indicata in figura (quantizzatore uniforme)
  - Nell'esempio, ciascun valore viene rappresentato con $n_{bit} = 3$
    - Nelle applicazioni pratiche, il numero di bit utilizzati è più elevato
- Nella quantizzazione uniforme su n_{bit} il numero di valori in uscita dal quantizzatore è dunque dato da $2^{n_{bit}}$
- La conversione analogico-digitale è poi solitamente associata alla operazione inversa (conversione digitale-analogica) dal lato opposto del sistema

Esempio di ADC a 3 bit di quantizzazione
(8 possibili livelli)



Nota: esistono tecniche di quantizzazione più sofisticate, dette "non uniformi"

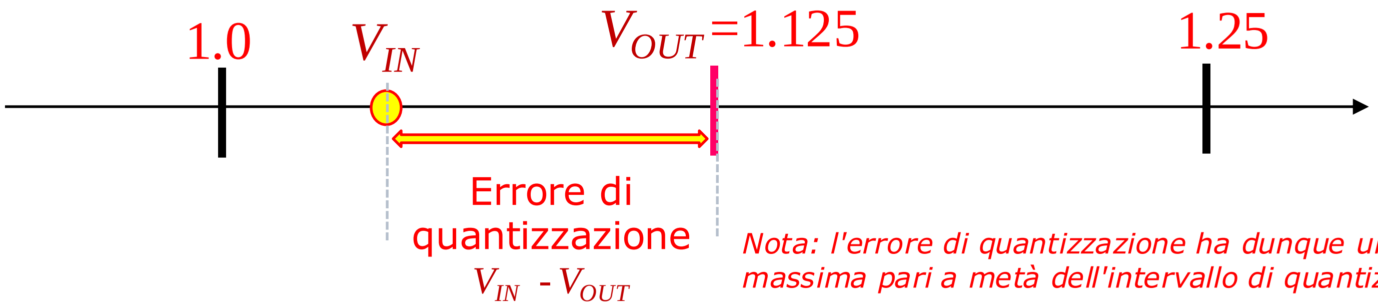
Errore nella cascata di ADC e DAC



Focalizziamoci su uno qualunque degli intervalli di ingresso, ad esempio quello tra 1.0 e 1.25 nell'esempio

Qualunque valore della tensione di ingresso che cada in questo intervallo sarà "codificata" all'uscita del ADC come "100"

Dal lato opposto del sistema, il DAC riceverà dunque "100" e dovrà generare un valore analogico di uscita. La "scelta migliore" è generare il valore al centro dell'intervallo, cioè V_{OUT} =1.125



Nota: l'errore di quantizzazione ha dunque una ampiezza massima pari a metà dell'intervallo di quantizzazione

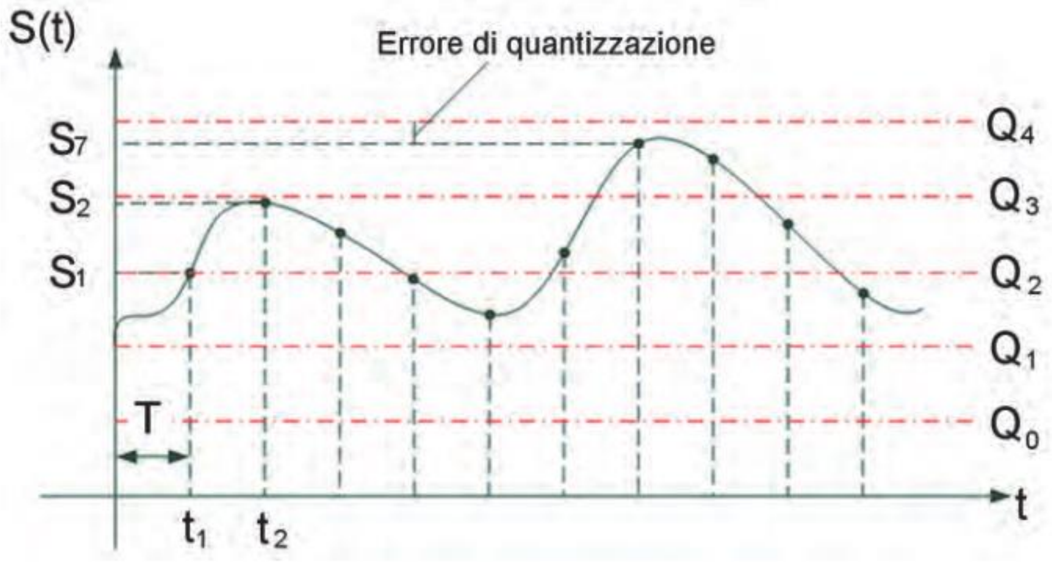
Per ulteriori informazioni: una pagina web interessante e pratica sulla quantizzazione e i suoi effetti su un segnale audio: https://dspillustrations.com/pages/posts/misc/how-does-quantization-noise-sound.html

Errore di quantizzazione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Quantizzando introduciamo sempre un errore detto **errore di quantizzazione** che sarà tanto minore quanto maggiore è il numero di bit utilizzati.

- A differenza del campionamento, l'operazione di quantizzazione NON può essere invertita senza introdurre errore → genera sempre una perdita di informazione



Questa perdita di qualità tuttavia può essere resa piccola a piacere aumentando n_{bit}

- Spesso al fine di semplificare lo studio dei segnali numerici se ne considera una versione ideale ottenuta trascurando la discretizzazione delle ampiezze
  - <u>Questa è l'ipotesi alla base delle prossime slides</u>
  - Esempi:
    - Molte applicazioni audio utilizzano 16 bit, cioè 65536 livelli di quantizzazione, e conseguentemente l'errore di quantizzazione è estremamente piccolo
    - Altre applicazioni usano rappresentazione in floating point su 4 o 8 byte, ancora più accurata

Bit rate in uscita da un sistema ADC

- Bit rate (R_b)= numero di bit generati al secondo

$$R_b = n_{bit} \cdot f_c$$

Esempi importanti:

- Telefonia fissa (PCM)

$$n_{bit} = 8$$
$$f_c = 8\,kHz$$
$$\text{bit rate} = n_{bit} \cdot f_c = 64\,kbit/s$$

- CD audio (per canale stereofonico)

$$n_{bit} = 16$$
$$f_c = 44.1\,kHz$$
$$\text{bit rate} = n_{bit} \cdot f_c = 705.6\,kbit/s$$

Formati audio musicali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- I formati audio più comunemente utilizzati campionano e quantizzano secondo quanto descritto in questo Capitolo
- Successivamente usano tecniche di compressione dell'informazione (argomento che esula da questo corso) per poter ridurre il bit rate risultante

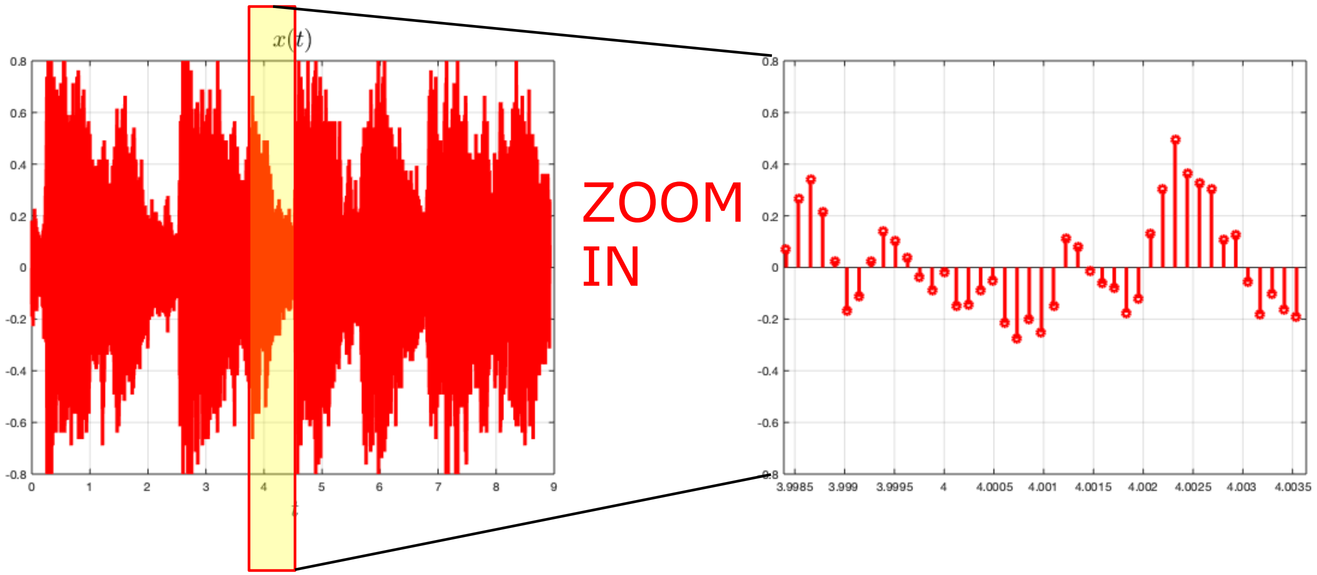
Format	Sampling	Bit Rate	Quality	Size
MP3	8000 - 16000 Hz	16 - 96 kbps	Very low	Very small
	16000 - 32000 Hz	96 - 196 kbps	Decent	Small
	44100 Hz	256 - 320 kbps	Good	Medium
	48000 Hz	320 kbps	Excellent	Large

Format	Sampling	Bit Depth	Quality	Size
Wave / AIFF	8000 - 16000 Hz	8 bit	Very low	Very small
	16000 - 32000 Hz	16 bit	Decent	Medium
	44100 Hz	16 bit	Excellent	Large
	48000 Hz and above	16 bit - 32 bit	Pristine	Very large

Tabella tratta da: https://soundbridge.io/audio-formats-file-types/

Esempio

- Il segnale *handel.wav* utilizzato per descrivere l'effetto dei filtri analogici passabasso e passalto, era in realtà <u>un segnale a tempo discreto</u> (preso dalla libreria di esempi di Matlab)



f_s =8192 Hz

n_{bit}=16

- Emulazione di un sistema analogico attraverso una rappresentazione a tempo discreto del segnale e dei filtri.
  - <u>Sotto quali condizioni questo è possibile</u>? (con qualità elevata)

Teorema del campionamento

Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications

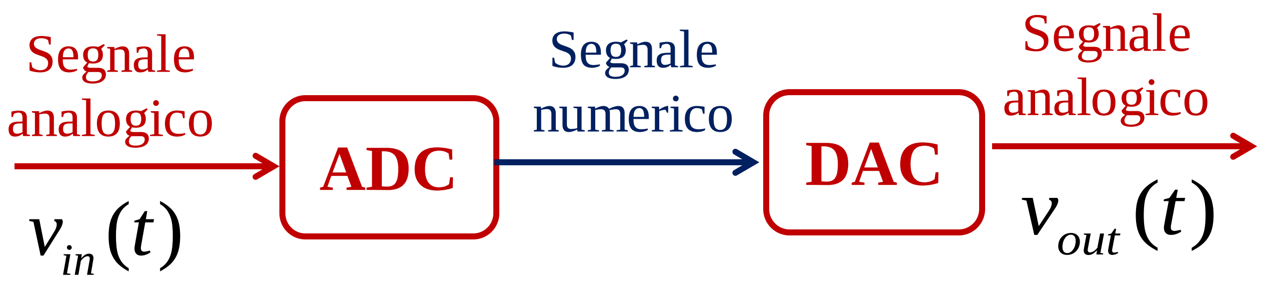
- Ipotizziamo da qui in poi che la quantizzazione sia ideale, cioè che le ampiezze siano ancora numeri reali e NON ampiezze discretizzate
  - Ipotizziamo cioè n_{bit} "arbitrariamente" elevato
    - O, di fatto, che i campioni siano rappresentati in floating-point
  - Vogliamo dunque dare le basi per trattare i segnali campionati:
    - Discreti nel tempo
    - Continui in ampiezza

Introduzione alla teoria del campionamento

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- In questo capitolo considereremo una conversione analogico-digitale dal solo punto di vista del campionamento
  - NON considereremo invece la quantizzazione
- Essenzialmente dunque studieremo il passaggio:
  - Da un segnale analogico a tempo continuo ed ampiezze continue
  - Ad un segnale a tempo discreto ed ampiezze continue
- **L'obiettivo del capitolo è trovare le condizioni per le quali il campionamento generi in uscita un segnale del tutto simile a quello in ingresso**
  - **In particolare deriveremo la <u>frequenza di campionamento necessaria + opportune tecniche di ricostruzione del segnale analogico</u>**

Introduzione alla teoria del campionamento



- L’obiettivo del capitolo è capire sotto quali condizioni la cascata di ADC e DAC consente di ottenere un segnale uguale (o simile) a quello di partenza

$$v_{out}(t) \approx v_{in}(t)$$

- Considereremo per ora e per semplicità un sistema che NON faccia nessuna elaborazione sul segnale numerico

Campionamento ideale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

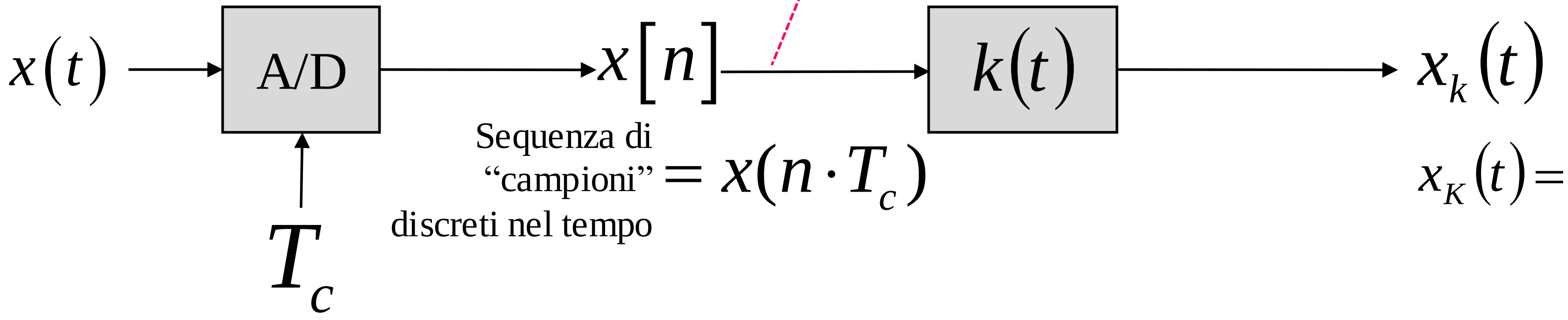
- Schema di riferimento per il campionamento nel tempo e la successiva <u>ricostruzione</u> del segnale analogico:

Rappresentazione matematica del segnale campionato come «treno di delta» moltiplicato per $x[n]$

<u>Attenzione, passaggio fondamentale</u>: il segnale campionato $x_c(t)$ è solo una <u>utile rappresentazione matematica</u>, come si vedrà nelle prossime slides.

In un sistema pratico, quello che viene memorizzato ed elaborato è il <u>vettore di valori</u> $x[n]$

"segnale campionato" $$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta(t - nT_c)$$



Sequenza di "campioni" discreti nel tempo $= x(n \cdot T_c)$

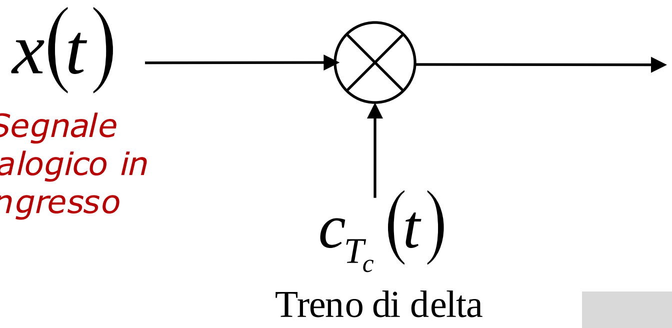
$$x_K(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]k(t - nT_c)$$

<u>Obiettivo del teorema del campionamento</u>:

- Quali sono le condizioni sul segnale di ingresso, il periodo di campionamento T_c ed il filtro interpolatore $K(t)$ affinché il segnale ricostruito coincida con il segnale di partenza?

Modello matematico del campionamento

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



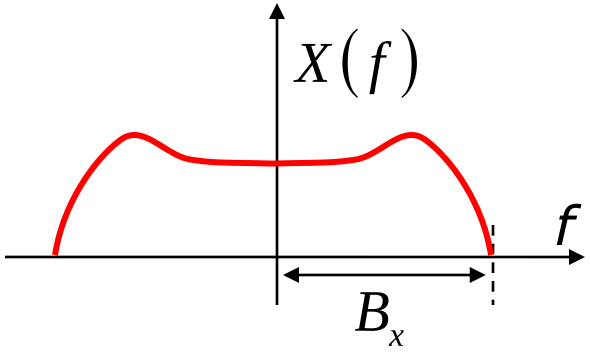
$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\,\delta(t - nT_c)$$

"segnale campionato"

Notare che è un segnale formalmente a tempo continuo, anche se contiene solo l'informazione su x(t) "campionata"

Avevamo già introdotto questo schema nel Capitolo sui segnali periodici

Rappresentazione matematica del segnale campionato come «treno di delta» moltiplicate per i campioni del segnale.
Si noti che questo segnale contiene SOLO una "informazione" sui campioni del segnale di ingresso



Ipotesi: supponiamo per ora che il segnale *x(t)* da campionare abbia uno spettro di ingresso a supporto limitato in frequenza in una **banda B_x (unilatera)**

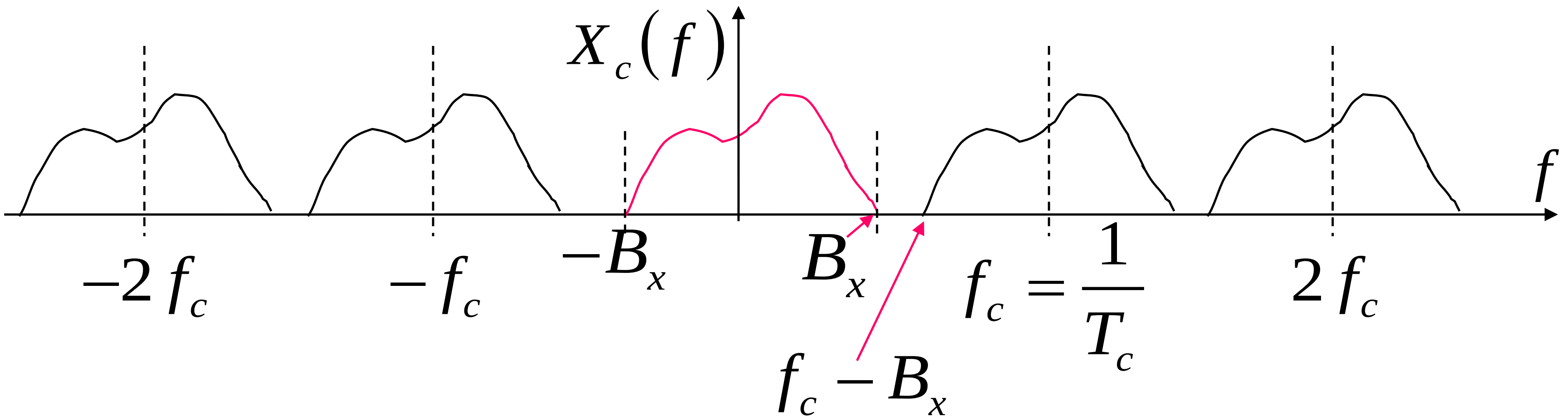
Segnale campionato nel dominio della frequenza

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Calcoliamo la trasformata di Fourier del segnale campionato

$$x_c(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\delta(t-nT_c) \Longrightarrow \boxed{X_c(f)=\frac{1}{T_c}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{n}{T_c}\right)}$$

Risultato già dimostrato nel Capitolo sui segnali periodici



Osservazione chiave: le «repliche» dello spettro di $X(f)$ **NON si sovrappongono** SE:

$$f_c-B_x>B_x \Rightarrow \boxed{f_c>2B_x}$$

Dimostrazione

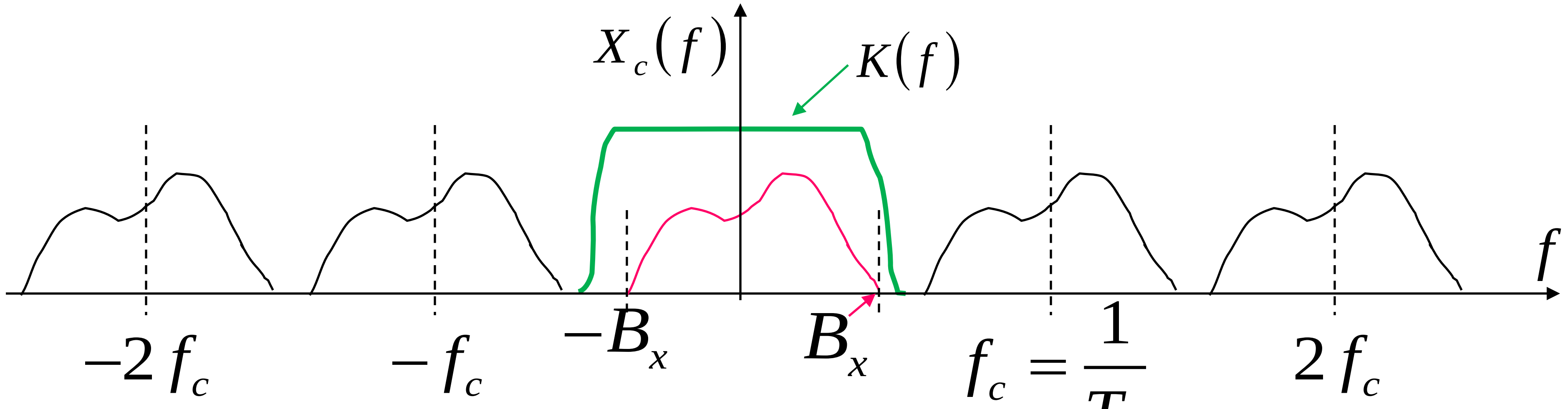
Cioè se gli spettri NON si sovrappongono

SE le condizioni della slide precedente sono rispettate, è possibile "selezionare" $X(f)$ da $X_c(f)$ tramite un opportuno filtro passabasso $K(f)$

Nota: l'obiettivo finale è quello di ottenere un sistema DAC+ADC di ricostruzione che implementi il più possibile le condizioni di "canale non distorcente"

Filtro ricostruttore

$$x_c(t) \longrightarrow \boxed{K(f)} \longrightarrow x_k(t)$$



Sotto queste condizioni si ottiene un campionamento ideale, cioè:

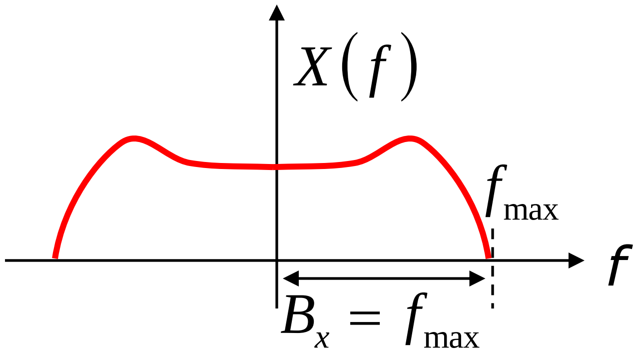
$$x_k(t) = x(t)$$

Teorema del campionamento

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Un segnale tempo continuo $x(t)$ può essere campionato e perfettamente ricostruito dai suoi campioni se la frequenza di campionamento è maggiore del doppio della "banda" B_x del segnale

… probabilmente il risultato più «famoso» di questo corso!



$$f_c > 2B_x$$

$$\rightarrow T_c < \frac{1}{2B_x}$$

Ipotesi: spettro di ingresso a supporto limitato in una **<u>banda B_x (unilatera) cioè con spettro che non abbia componenti a frequenza superiore di una certa f_{max}</u>**

Questa frequenza è spesso denominata «frequenza di Nyquist»

Attenzione: la quantità B_x qui è da intendere come la <u>frequenza massima del segnale</u> (come si vedrà nel dettaglio negli esercizi)

Riassunto sul teorema del campionamento

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Il segnale deve essere a banda limitata B_x
- La frequenza di campionamento deve essere:

$$\boxed{f_c = \frac{1}{T_c} > 2B_x \rightarrow T_c < \frac{1}{2B_x}}$$

B_x é la banda unilatera del segnale analogico di ingresso (nel senso della sua frequenza massima

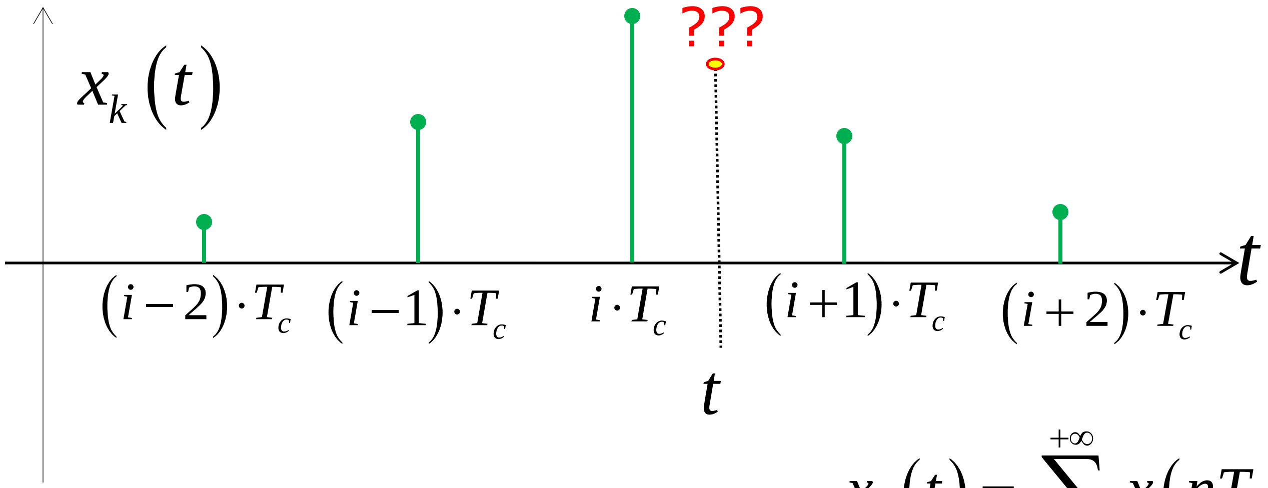
- Il filtro ricostruttore ottimo $K(f)$ deve essere:
  - piatto nella banda del segnale (non distorcente)
  - nullo per $|f| > f_c - B_x$ per eliminare le repliche sullo spettro del segnale campionato
- Nel dominio del tempo l'operazione di ricostruzione è dunque un'interpolazione dei valori campionati «pesati» dalla convoluzione con *k(t)* (slide successiva)

$$K(f) = \begin{cases} T_c & \forall |f| < B_x \\ \text{qualsiasi valore} & \forall B_x < |f| < f_c - B_x \\ 0 & \forall |f| > f_c - B_x \end{cases}$$

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Filtri *K(f)* interpretati come interpolatori

- E' utile interpretare il filtro *K(f)* come un <u>interpolatore</u> nel tempo
  - Infatti, è necessario "interpolare" l'andamento del segnale in uscita tra campioni successivi



Il DAC riceve solo i valori del segnale agli istanti di campionamento.
Deve "generare" anche i valori del segnale ricostruito in tutti gli istanti di tempo al di fuori di quelli di campionamento

Ricostruzione del valore del segnale ad un istante generico

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c)\delta(t-nT_c) \quad \text{segnale campionato}$$

$$x_k(t) = x_c(t) * k(t) = \sum_n x(nT_c)k(t-nT_c) \quad \text{segnale ricostruito}$$

Alcuni interpolatori ideali: passabasso rettangolare

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Passabasso rettangolare in frequenza su banda <u>bilatera</u> *B*
  - Funzione sinc nel tempo

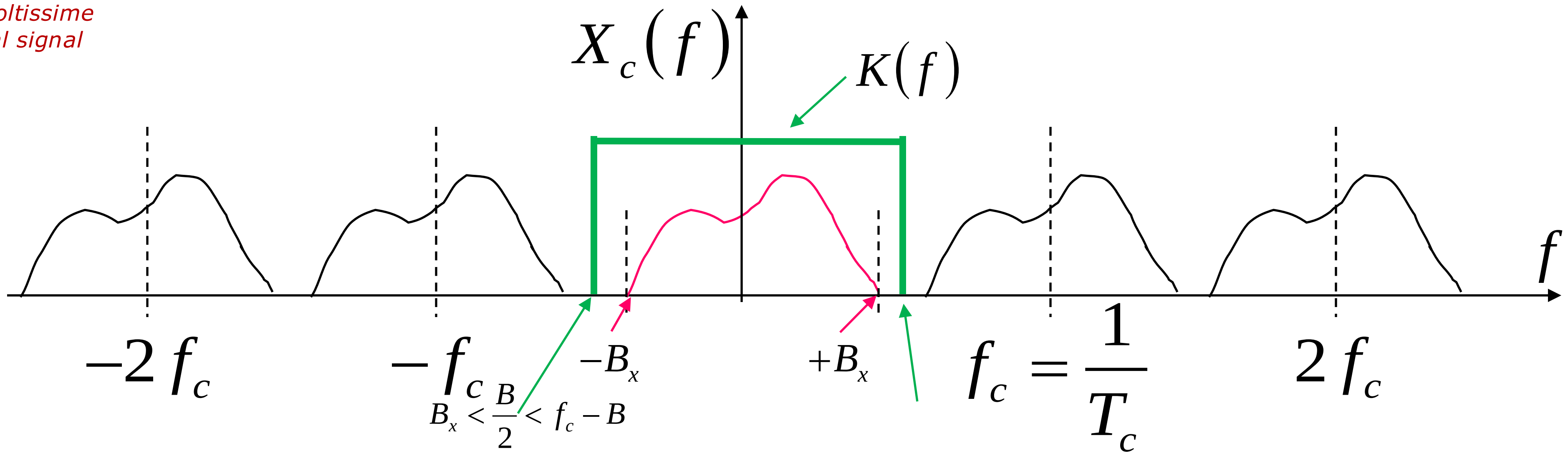
$$K(f) = T_c \Pi_B(f)$$

$$k(t) = BT_c \operatorname{sinc}(Bt)$$

Condizione da rispettare sulla banda *B* del passabasso: ricordiamo che il segnale $x(t)$ ha banda B_x e $f_c > 2Bx$

$$B_x < \frac{B}{2} < f_c - B$$

Nota: anche in questo contesto, si evince come i filtri passabasso con fronti molto "ripidi" in frequenza sono fondamentali per moltissime applicazioni di digital signal processing



Alcuni filtri interpolatori ideali: passabasso rettangolare

- Notiamo che in questo caso

$$k(t) = BT_c \operatorname{sinc}(Bt)$$

$$x_k(t) = x(t) = x_c(t) * k(t) =$$
$$= \sum_n x(nT_c) k(t - nT_c)$$

$$x_k(t) = BT_c \sum_n x(nT_c) \operatorname{sinc}(B(t - nT_c))$$

- Se le condizioni del teorema del campionamento sono rispettate, il segnale campionato risulta essere identico al segnale di partenza.

- Abbiamo dunque dimostrato che, sotto le condizioni del teorema del campionamento, è vera la seguente identità:

$$x(t) = BT_c \sum_n x(nT_c) \operatorname{sinc}(B(t - nT_c))$$

Questo è un primo esempio di come si può ricostruire perfettamente un segnale $x(t)$ a partire dai suoi campioni

Alcuni filtri interpolatori ideali: passabasso rettangolare

Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications

- Nel caso limite $B = f_c = \dfrac{1}{T_c}$

- Si ha dunque

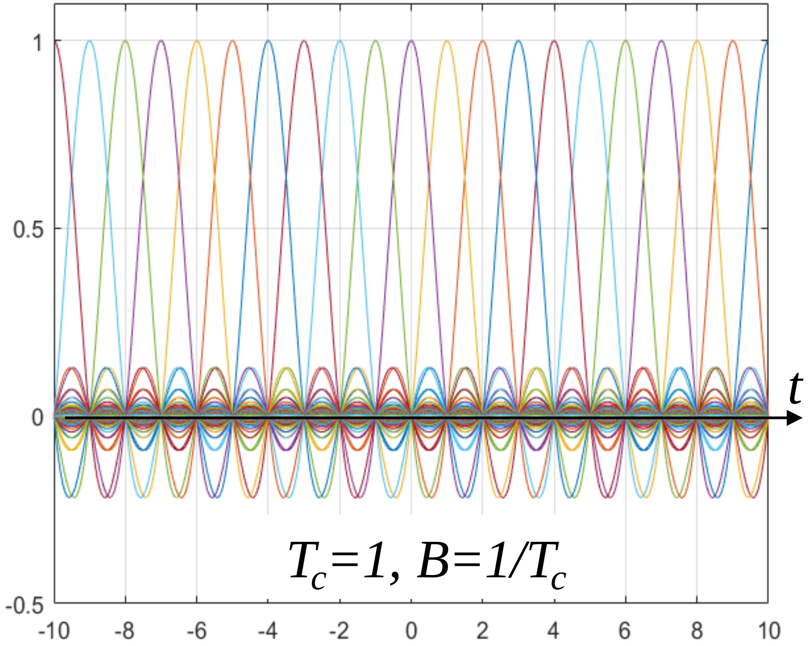
$$\boxed{x(t) = \sum_n x(nT_c)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{T_c} - n\right)}$$

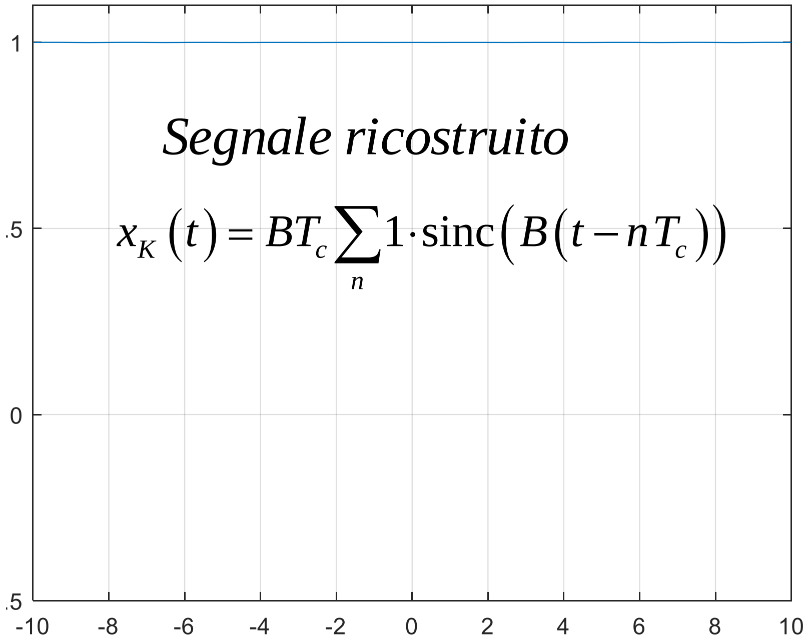
Esempio: campionamento di un segnale costante

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Funzione $K(f)$ rettangolare in frequenza

- Campionamento di un segnale costante $x(t) = 1$





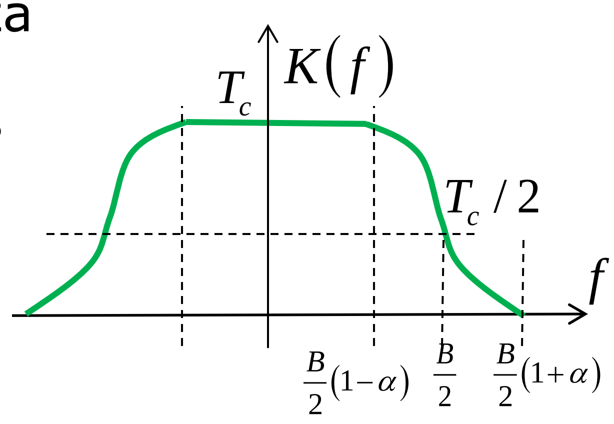
MEMO:
Ulteriore esempio preparato in [Matlab] su segnale sinusoidale

Alcuni filtri interpolatori ideali: filtro a coseno rialzato

Filtro a Coseno Rialzato in frequenza

- Si tratta di un filtro molto usato nella pratica ingegneristica per implementare un passabasso senza delle discontinuità nella funzione di trasferimento
- Evita i problemi numerici legati al fenomeno di Gibbs

$$K(f)=\begin{cases} T_c & |f|<B\frac{1-\alpha}{2} \\ \frac{T_c}{2}\left\{1-\sin\left[\frac{\pi}{\alpha B}\left(|f|-\frac{1}{2}\right)\right]\right\} & B\frac{1-\alpha}{2}<|f|<B\frac{1+\alpha}{2} \\ 0 & |f|>B\frac{1+\alpha}{2} \end{cases}$$



Nota: questo filtro ha due parametri liberi
- La banda a 3dB, corrispondente a *B/2*
- Il parametro α, chiamato «roll-off» che permette di regolare la transizione tra la banda passante e la banda bloccata
  - Per α=0, si ricade nel caso rettangolare delle slides precedenti

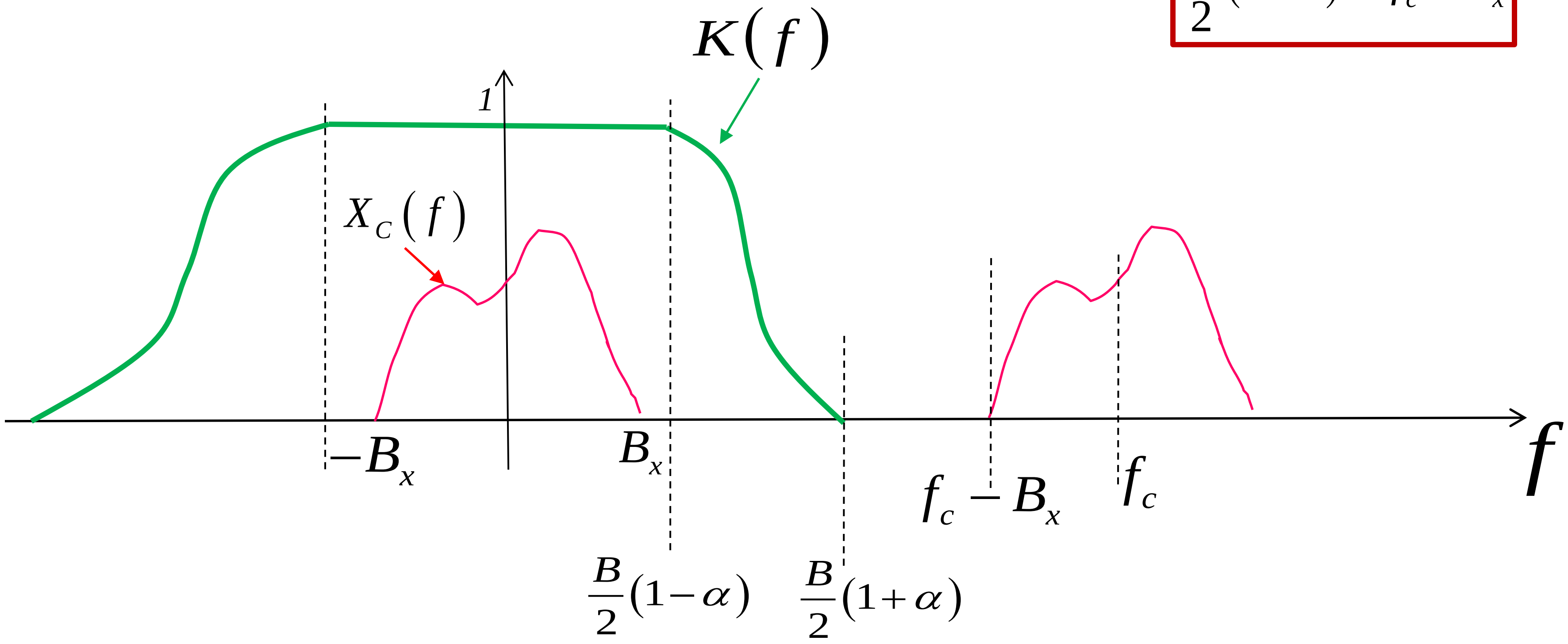
Si può dimostrare che la anti-trasformata è:

$$k(t)=BT_c\text{sinc}(Bt)\cdot\frac{\cos(\alpha B\pi t)}{1-(\alpha Bt)^2}$$

Alcuni filtri interpolatori ideali: filtro a coseno rialzato

- Le condizioni da rispettare sono:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{B}{2}(1-\alpha) > B_x \\ &\frac{B}{2}(1+\alpha) < f_c - B_x \end{aligned}}$$



Introduzione di varie non-idealità

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Nelle slide precedenti abbiamo trovato le condizioni sotto le quali il campionamento può essere ideale (segnale ricostruito=segnale di ingresso)

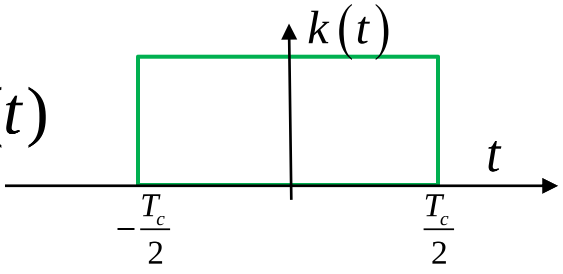
- Nelle slide successive introdurremo invece vari tipi di non-idealità che si riscontrano in tutti i sistemi pratici di campionamento
  - Non-idealità del filtro di ricostruzione $K(f)$ (interpolatori distorcenti)
  - Segnali di ingresso a banda illimitata
  - Campionamento non istantaneo

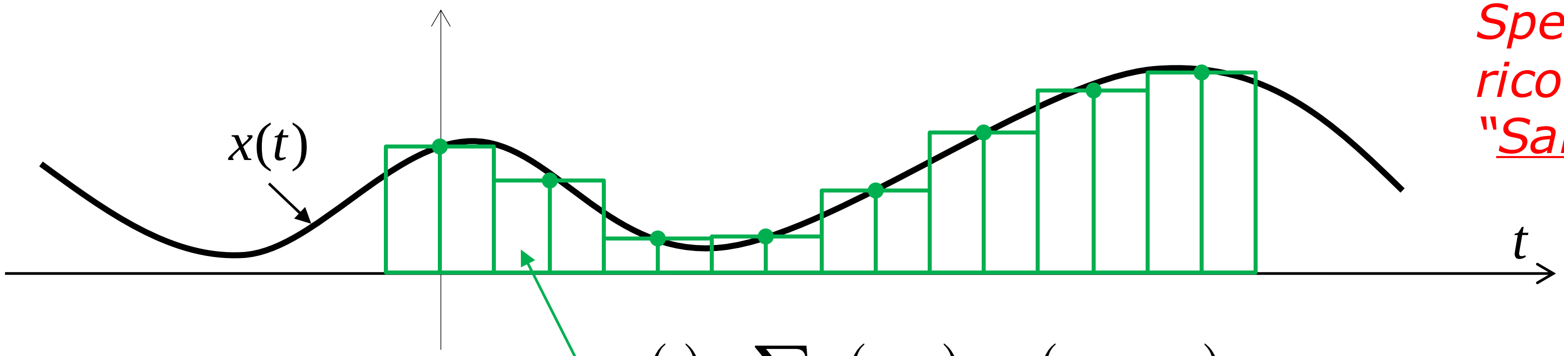
Interpolatori «pratici» ma distorcenti: Sample&Hold

Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications

k(t) costante a tratti
(nel tempo)

$$k(t) = \Pi_{T_c}(t)$$





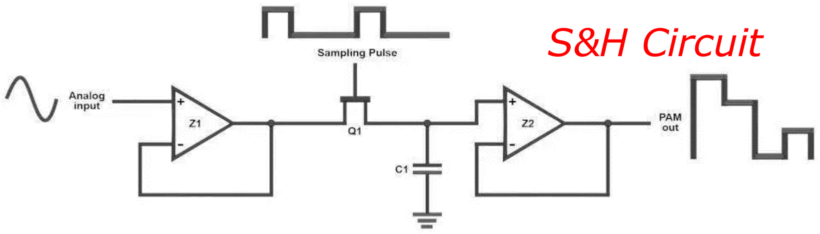
$$x_k(t) = \sum_n x(nT_c)\Pi_{T_c}(t - nT_c)$$

Spesso questo tipo di ricostruttore è chiamato "Sample&Hold"

$$K(f) = T_c \cdot \mathrm{sinc}(f\,T_c)$$

Questa funzione di trasferimento NON è piatta in banda, e dunque provoca una distorsione sul segnale ricostruito.
La soluzione S&H è però facile da implementare in circuiti elettronici semplici, e dunque è spesso utilizzata nella pratica

S&H Circuit



From: https://www.eeweb.com/wp-content/uploads/articles-quizzes-sample-and-hold-circuit-1415348194-171116-033839.jpg?fit=1024%2C337

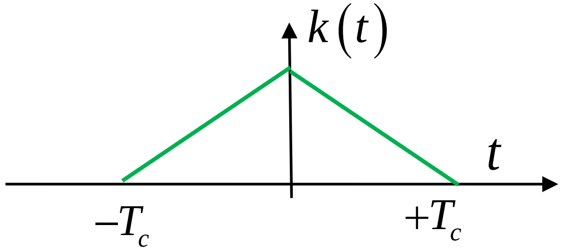
Interpolatori «pratici» ma distorcenti: interpolatore lineare tra due punti successivi

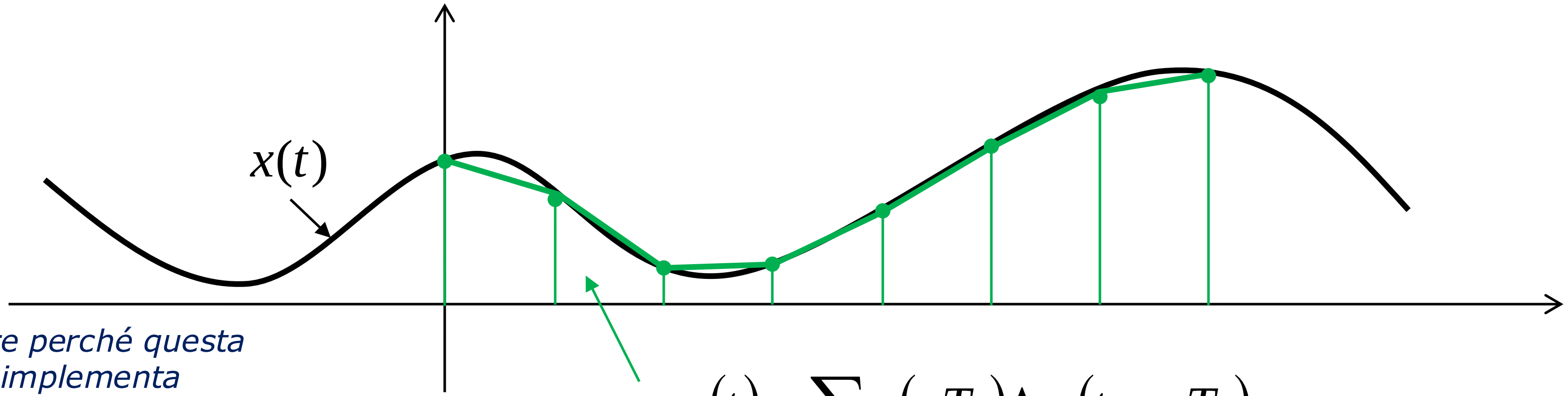
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Interpolazione lineare nel tempo tra due campioni successivi

- $k(t)$ triangolare

$$k(t) = \Lambda_{T_c}(t)$$





$$x_k(t) = \sum_n x(nT_c)\Lambda_{T_c}(t - nT_c)$$

Esercizio per casa: capire perché questa risposta all'impulso k(t) implementa effettivamente una interpolazione lineare tra due campioni successivi

$$K(f) = T_c \operatorname{sinc}^2(f T_c)$$

Anche in questo caso, questa funzione di trasferimento NON è piatta in banda, e dunque provoca una distorsione sul segnale ricostruito.
Tuttavia ha solitamente prestazioni migliori rispetto al caso precedente

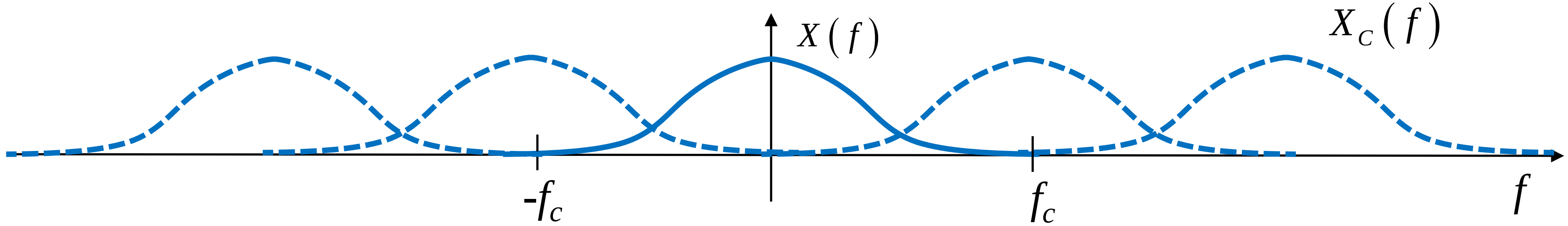
Altri tipi di interpolazione

Materiale "extra",
... for further reading!

- Esistono anche altri tipi di interpolazione più complessi, quali ad esempio:
  - Spline interpolation
    - https://en.wikipedia.org/wiki/Spline_interpolation
  - Polynomial interpolation
    - https://en.wikipedia.org/wiki/Polynomial_interpolation

Segnali a banda illimitata: Fenomeno dell’aliasing

- La maggioranza dei segnali analogici di interesse pratico hanno in realtà <u>supporto in frequenza illimitato</u>
  - Cioè la banda B_X per applicare il teorema del campionamento risulterebbe a rigore infinita, e dunque anche la frequenza di campionamento dovrebbe essere infinita
- In questi casi il campionamento produce una (inevitabile!) sovrapposizione degli spettri (<u>detto fenomeno dell’aliasing</u>)



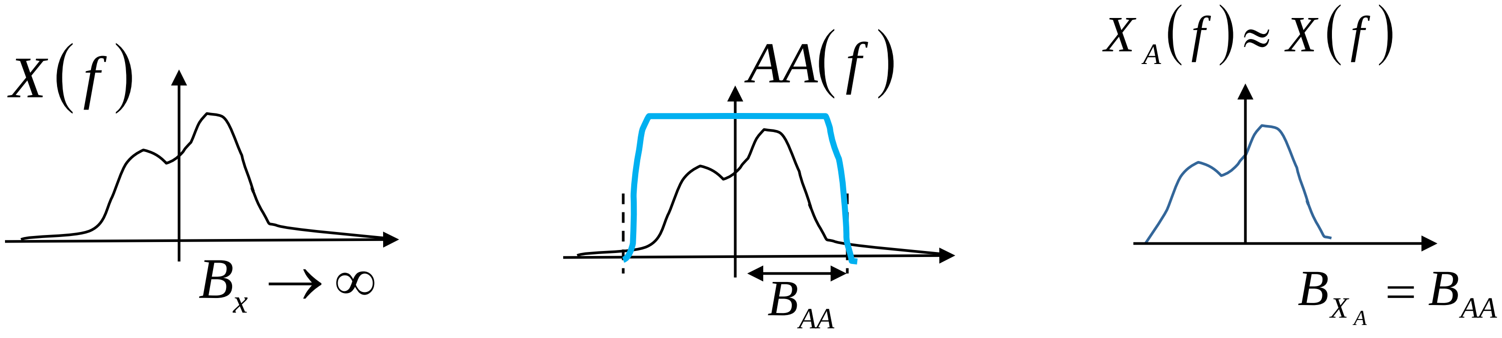
Spettro segnale di ingresso
a banda con supporto illimitato

Filtro anti-aliasing

- Per evitare questa sovrapposizione spettrale, prima del campionatore viene solitamente inserito un filtro **anti-aliasing** $AA(f)$, che elimina "alla fonte" le componenti spettrali che si sovrapporrebbero nel campionamento fatto sul segnale originale

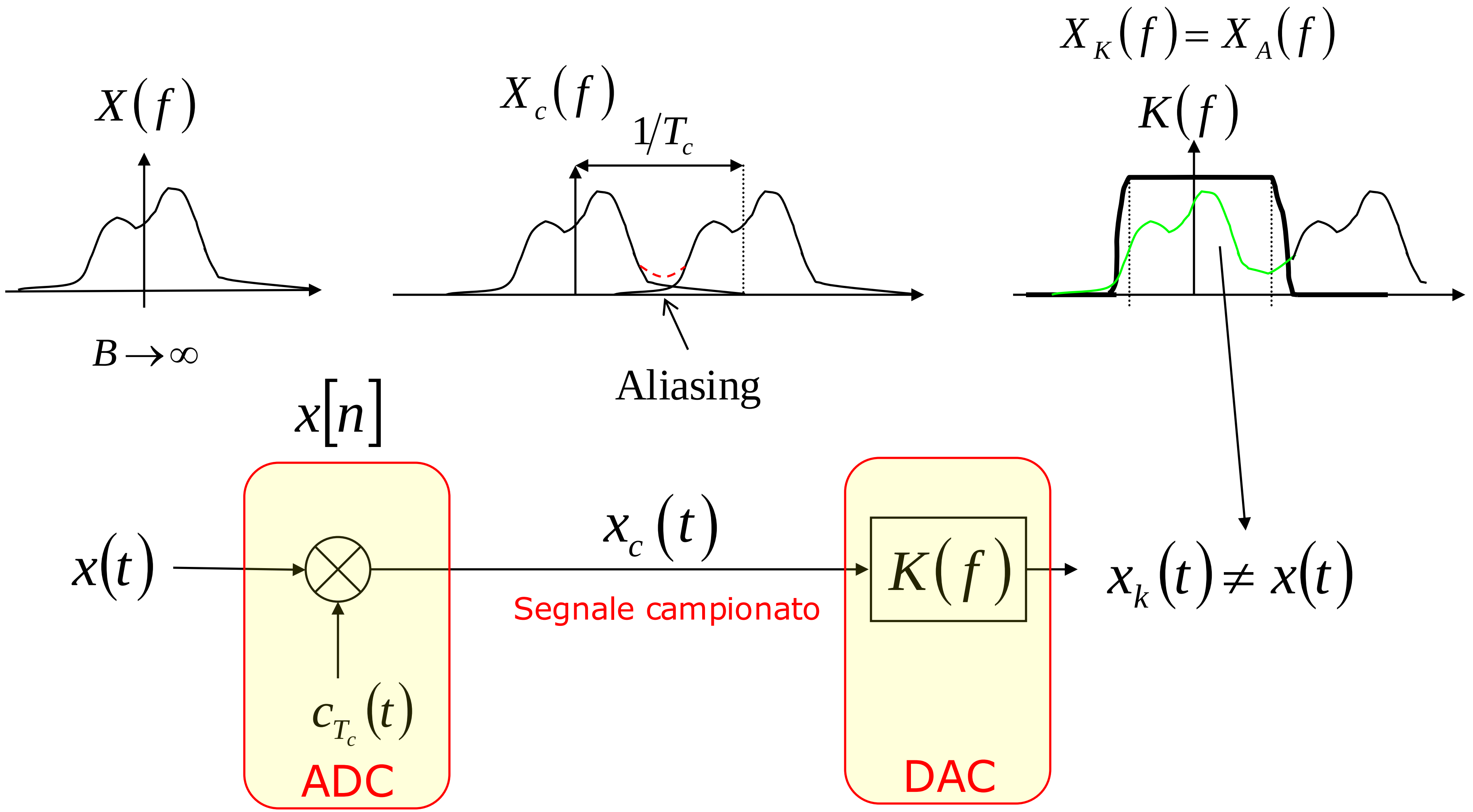
In pratica si realizza come segue:

$$x(t) \Rightarrow \boxed{AA(f)} \Rightarrow \boxed{\text{ADC}} \Rightarrow$$



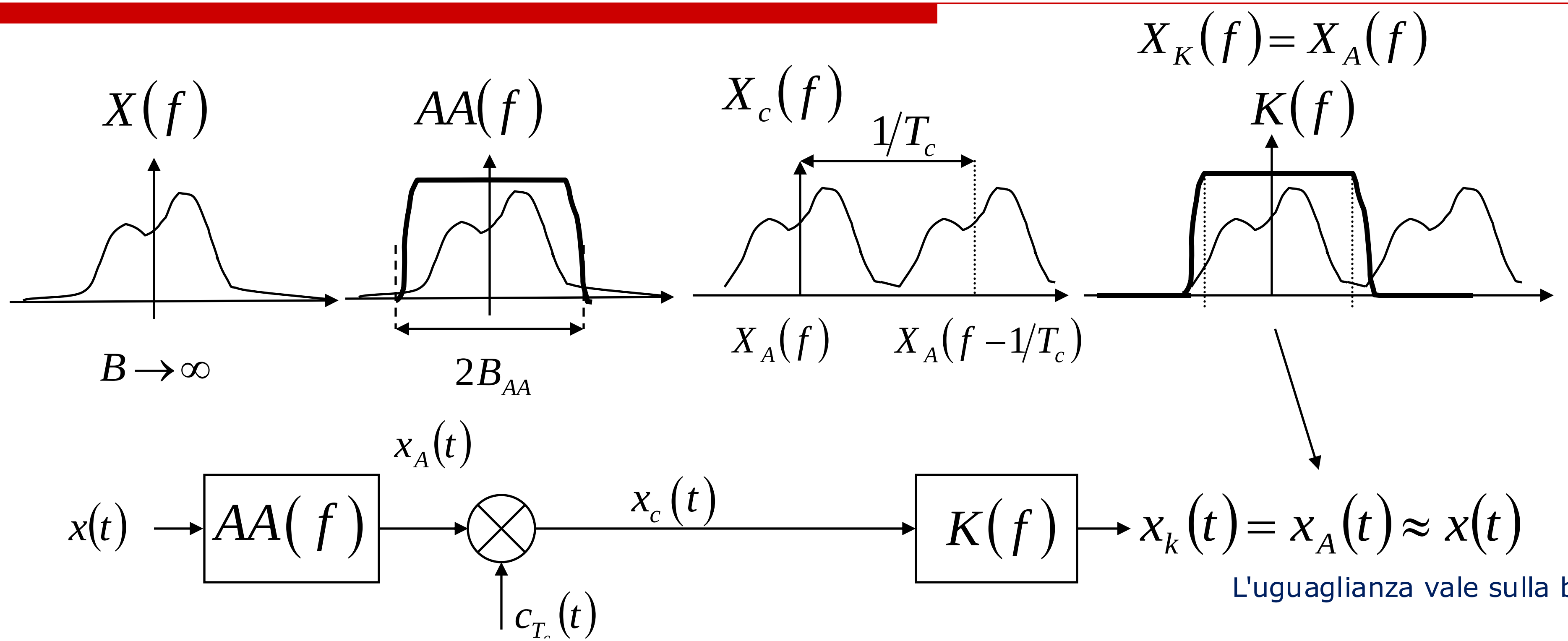
- L’effetto di troncamento in frequenza introdotto dal filtro anti-aliasing solitamente è preferibile all’effetto di aliasing
  - Nel senso che il segnale ricostruito risulta più vicino a quello originale

Senza filtro anti-aliasing



Con filtro anti-aliasing

Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications



L'uguaglianza vale sulla banda del filtro AA

In sostanza:

- Usando il filtro di anti-aliasing si ha una "perdita di qualità" legata al filtraggio iniziale (limitazione di banda) ma sul segnale filtrato il successivo campionamento è ideale

- NON usando il filtro di anti-aliasing non si tagliano le alte frequenze del segnale di ingresso, ma si ha una "perditá di qualità" dovuta alla sovrapposizione delle code dello spettro sul segnale campionato

Nelle applicazioni pratiche, il primo caso è solitamente quello che dà risultati migliori

Esempio pratica: sistemi audio

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

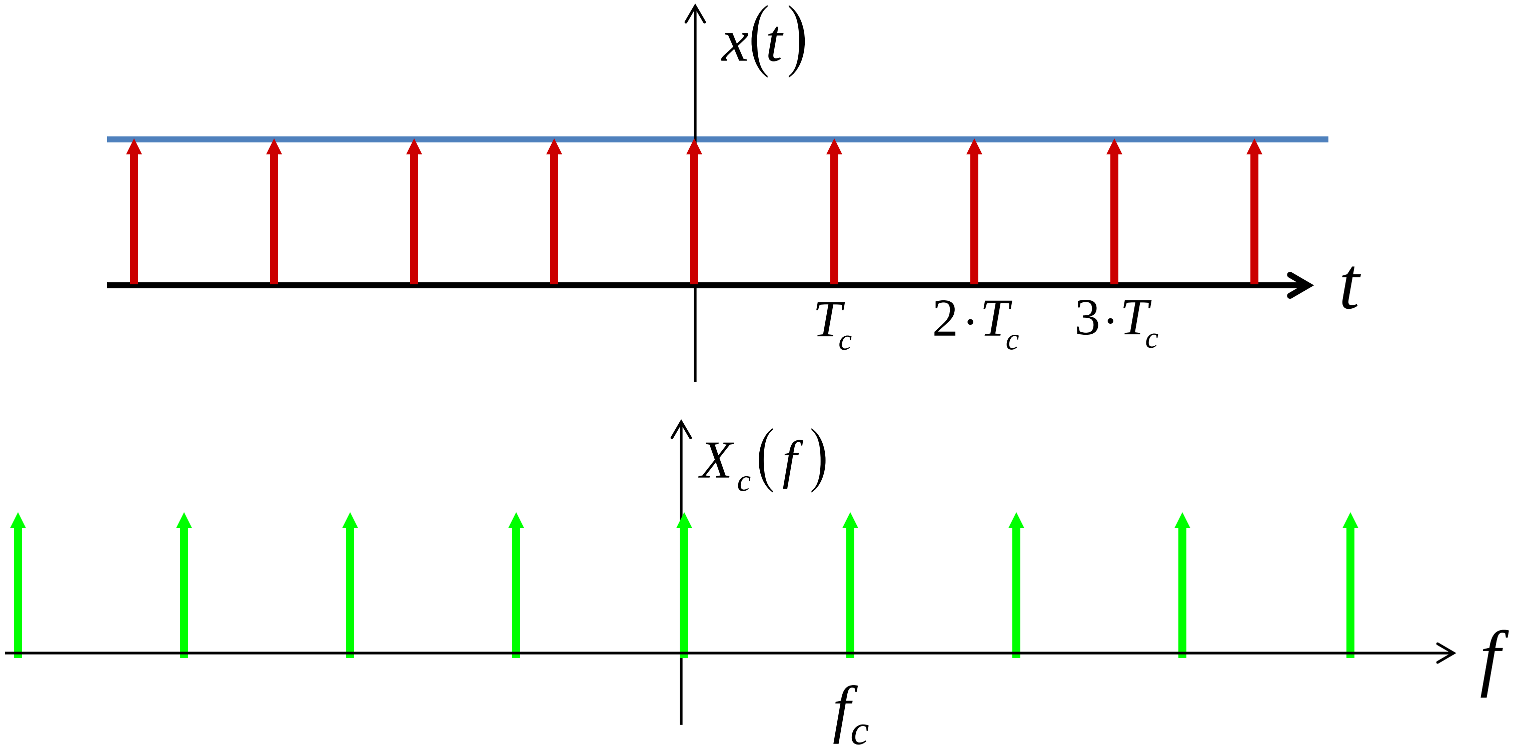
- Nei sistemi audio (di elevata qualità) si inseriscono tipicamente negli ADC dei filtri di anti-aliasing che tagliano a 20 kHz quando si vuole campionare alla frequenza standard di 44.1 Ksample/s
  - Per segnali musicali con frequenze di campionamento più basse, si dovrà scalare il filtro di anti-aliasing di conseguenza
    - Ad esempio 22 Ksample/s è opportuno inserire un filtro di anti-aliasing attorno a 10 kHz

- Un buon esempio pratico è disponibile a questo link
  - https://dspillustrations.com/pages/posts/misc/aliasing-and-anti-aliasing-filter.html
    - Si provi in particolare il terzo esempio sul segnale con chirp

Esempio 1: campionamento di un segnale costante nel tempo

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

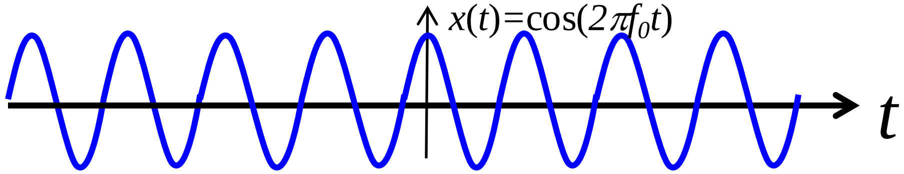
Campionamento di un segnale costante nel tempo

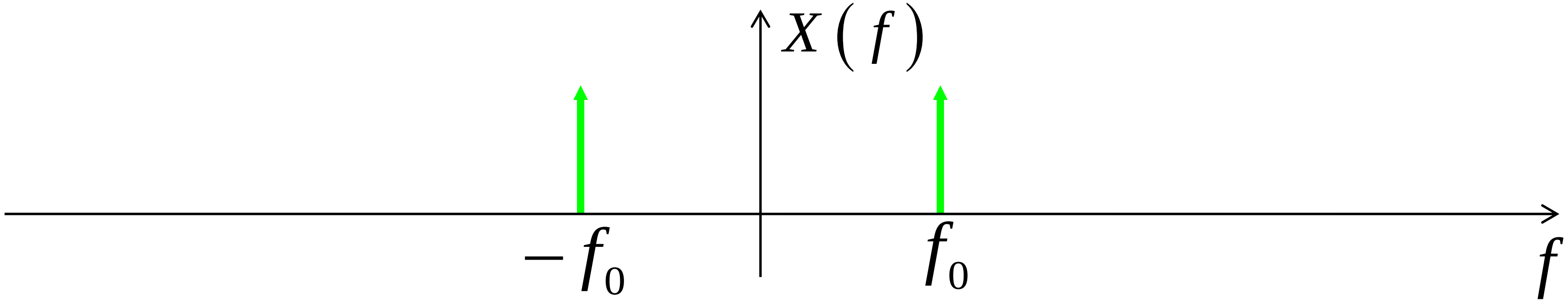


Dato che un segnale costante ha una banda "nulla", qualunque valore di f_c rispetta il teorema del campionamento

Esempio 2: campionamento di una sinusoide

$x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$





- Il supporto in frequenza (=banda) di questo segnale è pari a f_0
- In questo caso, il teorema del campionamento richiede dunque una frequenza di campionamento

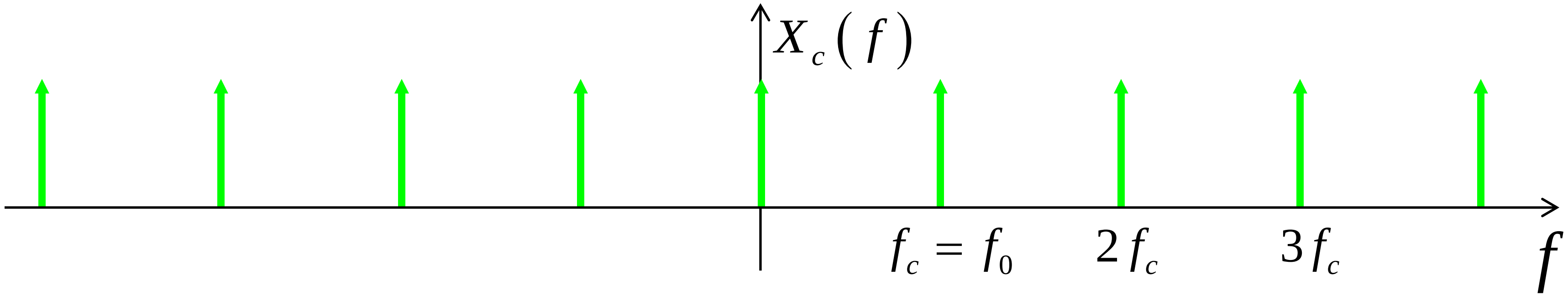
$$\boxed{f_c > 2 f_0}$$

Esempio 2: campionamento di una sinusoide

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$

Supponiamo invece di sceglier un valore errato di frequenza di campionamento, in particolare una frequenza di campionamento $f_c = f_0$

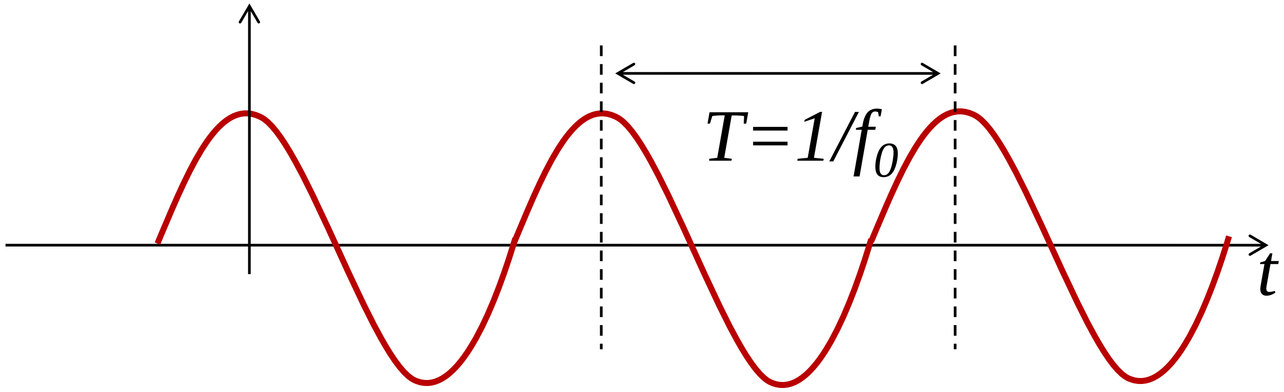


Si ottiene su $X_c(f)$ lo stesso spettro del caso del segnale costante → dopo il filtro ricostruttore si otterrebbe quindi un segnale di uscita costante, il che dimostra che il campionamento non è corretto in questo esempio

Il fenomeno dell'aliasing visto nel caso specifico di un ingresso sinusoidale

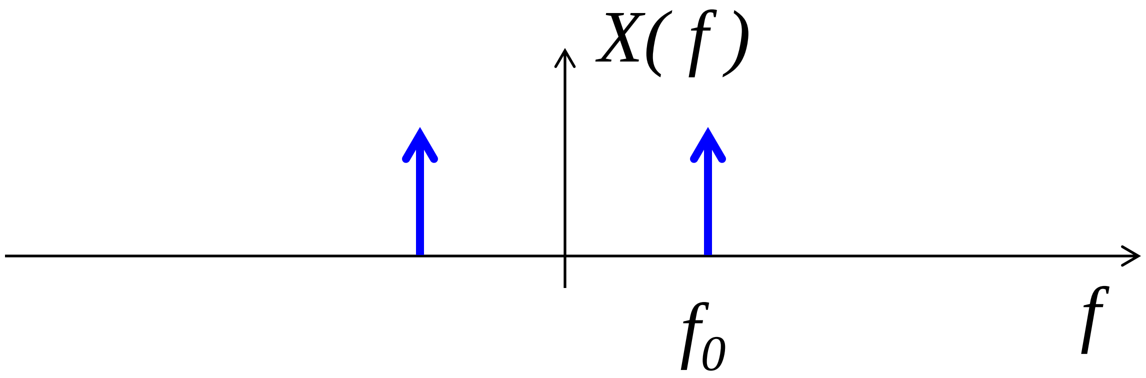
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$



frequenza di campionamento corretta:

$f_c > 2f_0$



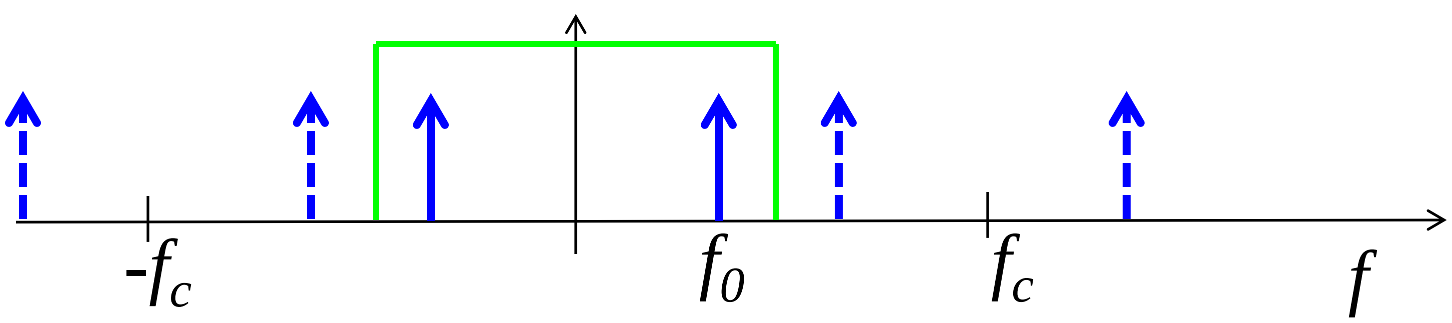
banda filtro ricostruzione

$B = f_c/2$

Il fenomeno dell'aliasing visto nel caso specifico di un ingresso sinusoidale

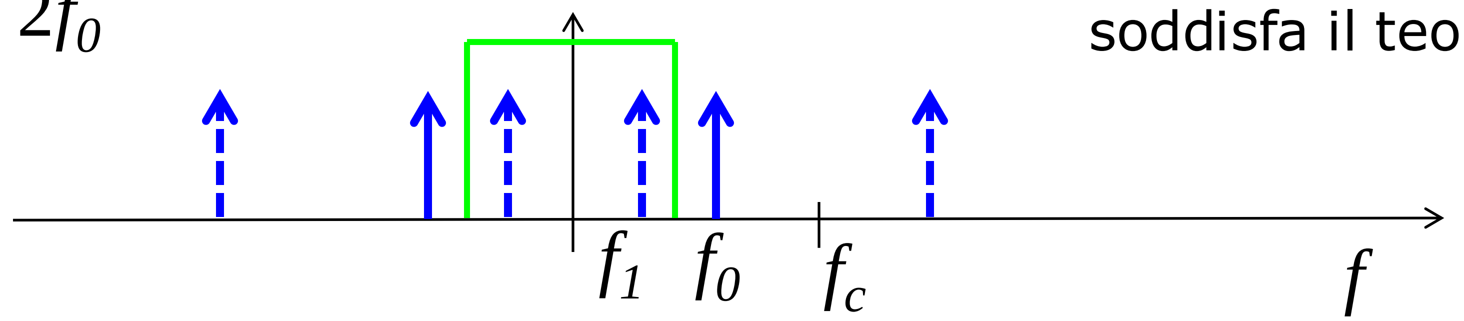
<u>Situazione corretta</u>:

$f_c > 2f_0$



<u>Sotto-campionamento</u>:
Situazione che NON soddisfa il teorema

$f_c < 2f_0$



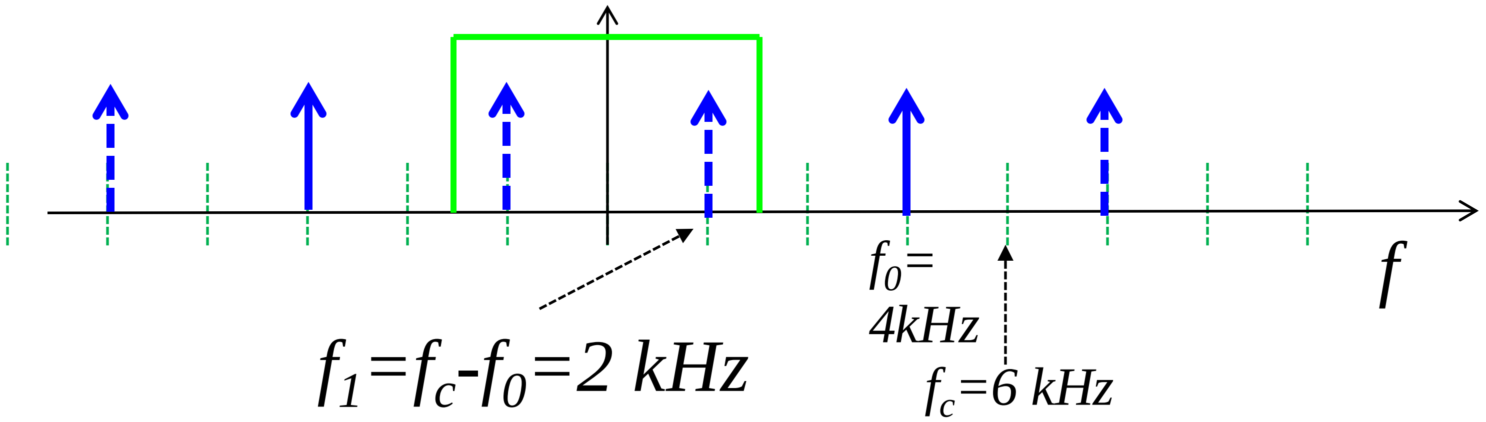
Esempio numerico su segnale sinusodale

- Esempio: segnale audio sinusoidale (si considerino i grafici della slide precedente) $\boxed{f_0 = 4kHz}$

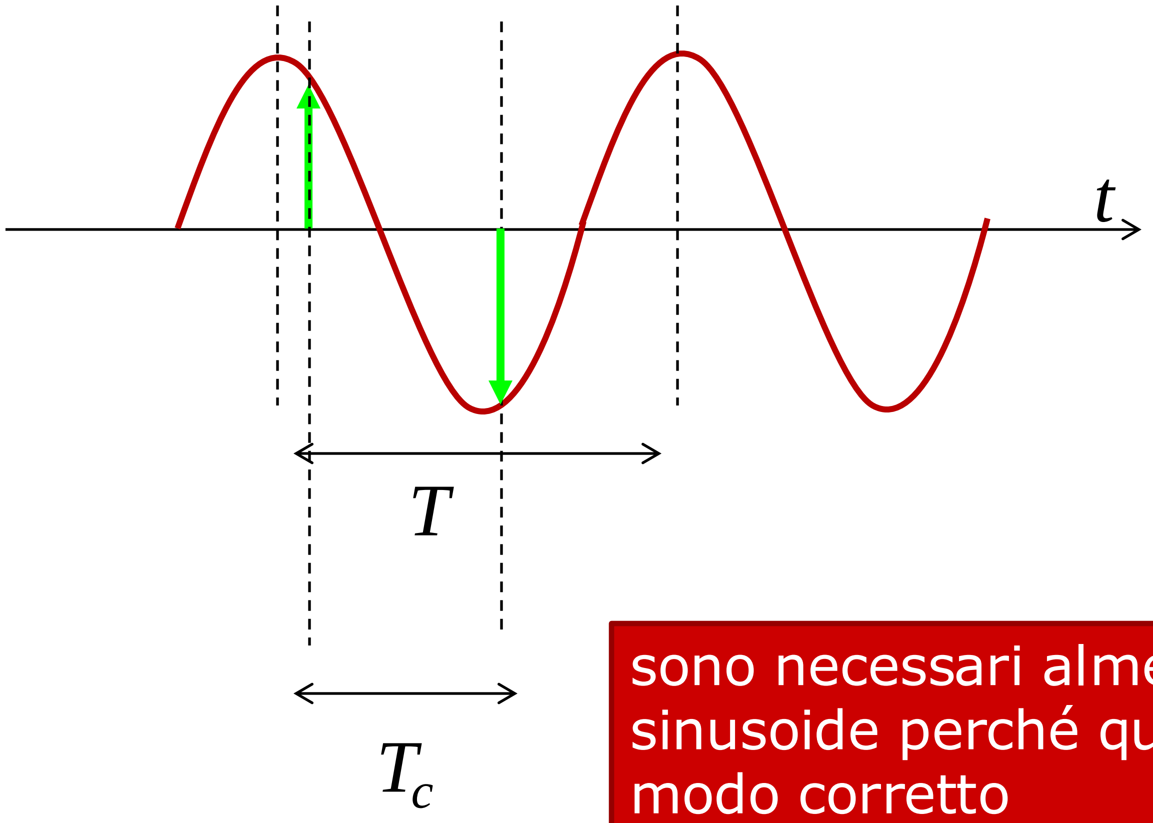
Sotto-campionamento
(Teorema campionamento non rispettato)

$f_c = 6\ kHz \qquad B = 3\ kHz$

Il segnale ricostruito è ancora una sinusoide, ma ad una frequenza completamente <u>sbagliata !!</u> $f_1 = 2\ kHz$



Ulteriori commenti su sinusoide



$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

frequenza di campionamento minima

$$f_c > 2f_0$$

$$T_c < \frac{1}{2f_0} = \frac{T_0}{2}$$

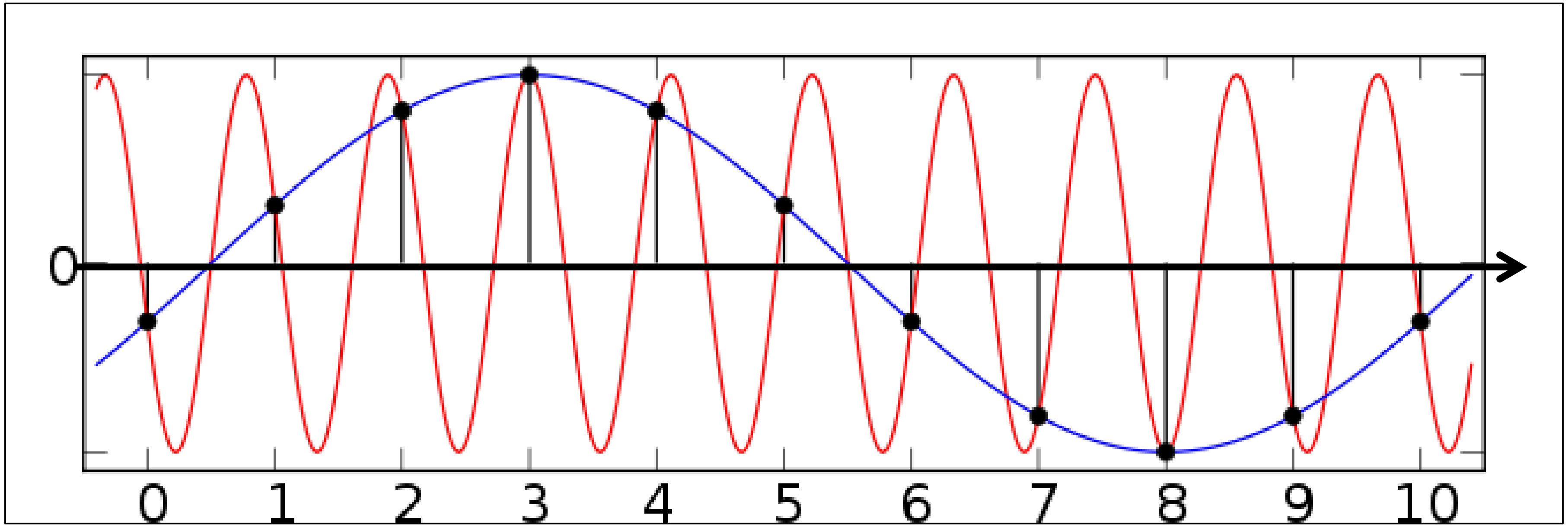
sono necessari almeno 2 campioni per periodo della sinusoide perché questa possa essere ricostruita in modo corretto

(limite teorico, in realtà si implementa sempre un certo livello di sovra-campionamento)

Il fenomeno dell’aliasing su sinusoide

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Se la sinusoide è sotto-campionata, viene ricostruita una sinusoide a frequenza inferiore



Curiosità: ragionamenti simili spiegano perché in un video (ad esempio “campionato” a 24 frame al secondo) a volte si crea un effetto ottico per il quale le ruote delle auto sembrano “girare” più piano (o addirittura girare all’indietro)

Esempio

Il segnale $x(t) = sinc(f_0 t)\cos(2\pi f_1 t)$ con $f_0 = 5$ kHz e f_1=8 kHz viene campionato a 25 kHz, e ogni campione viene quantizzato su 64 livelli.

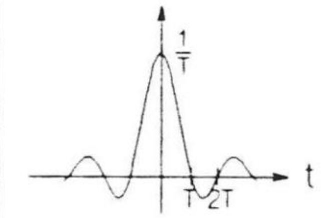
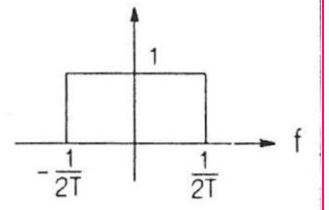
- Verificare se si soddisfa il teorema del campionamento
- Calcolare il bit rate generato

Soluzione

$x(t) = sinc(f_0 t)\cos(2\pi f_1 t)$ con $f_0 = 5$ kHz e f_1=8 kHz

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

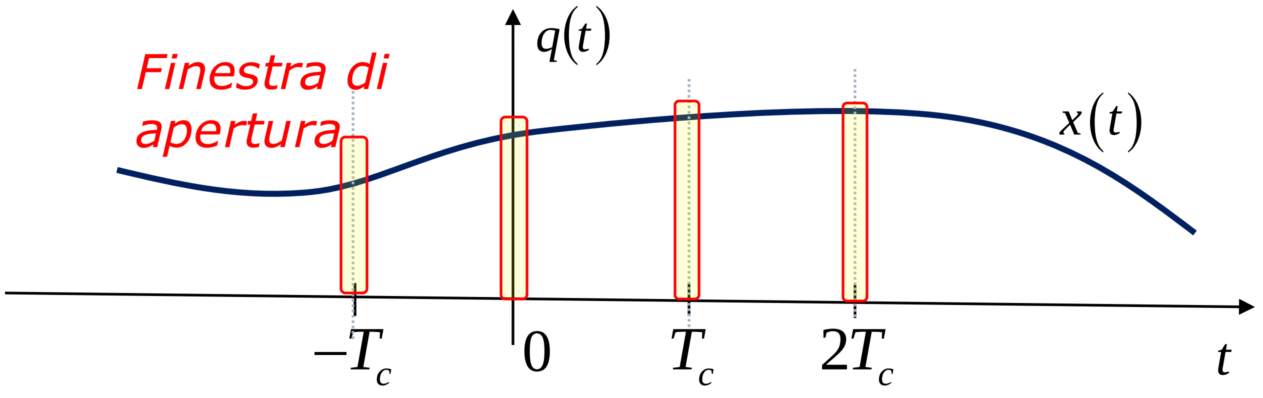
Si ricorda che dalle tavola delle trasformate

24		$\frac{1}{T}\text{Sinc}(t/T) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t}$	$p_{1/T}(f) = \begin{cases} 1, & \lvert f\rvert < 1/2T \\ 0, & \lvert f\rvert > 1/2T \end{cases}$	

Campionatori realistici (pratici)

- Il campionatore a "treno di delta" è impossibile da realizzare
  - Richiederebbe infatti per ciascun campione una "finestra di apertura temporale" di supporto infinitesimo
  - Richiederebbe cioè una elettronica per il chip ADC a banda infinita

- Nella pratica, i circuiti di ADC hanno un "finestra di apertura" nel tempo minore del tempo T_c, ma non infinitesima

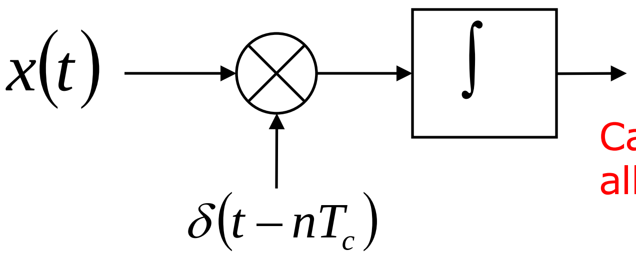


In pratica: un certo campione è ottenuto come una "media pesata" del valore di x(t) nelle immediate vicinanze del relativo istante di campionamento

Campionatori realistici (pratici)

- Il campionatore ideale (treno di delta) è impossibile da realizzare
- Nella pratica i campionatori campionano il segnale con un treno di funzioni che approssimano una delta, ma non esattamente

Campionatore Ideale
(schema per ottenere ciascun singolo campione)

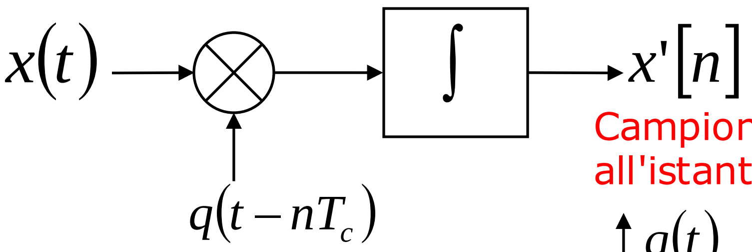


Campione all'istante nT_c

$$x[n]=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-nT_c)x(\tau)d\tau=x(nT_c)$$

$$x_c(t)=\sum_n x(nT_c)\delta(t-nT_c)$$

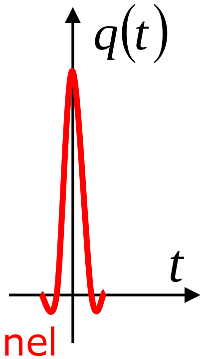
Campionatore Reale
(schema per ottenere ciascun singolo campione)



Campione "realistico" all'istante nT_c

$$x'[n]=\int_{-\infty}^{+\infty}q(\tau-nT_c)x(\tau)d\tau=x'(nT_c)$$

$$x'(t)=x(t)*q(-t)$$

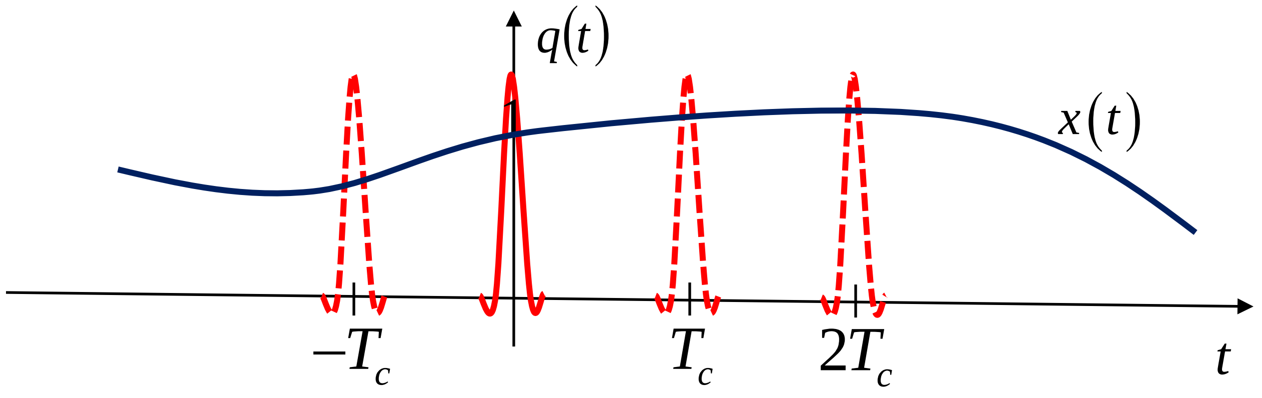


Nota: otteniamo una convoluzione nel tempo, cioè un filtraggio in frequenza

Campionatori realistici (pratici)

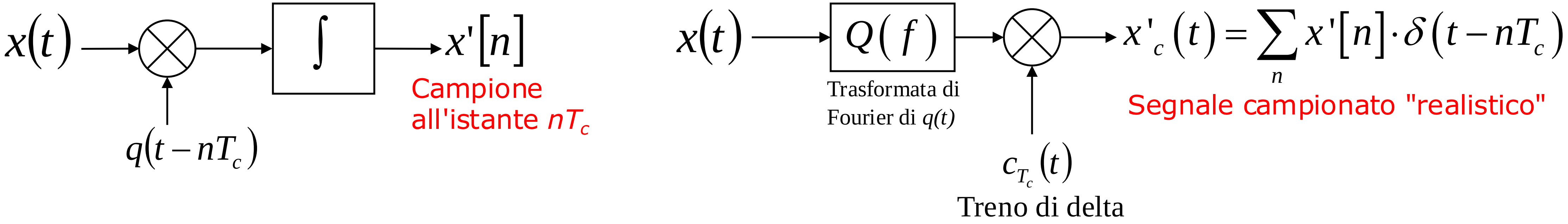
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Il segnale $q(t)$ deve essere ovviamente il più possibile simile ad una delta
- Nel caso specifico, deve essere significativamente più stretto del tempo di campionamento



Campionatori Reali

- L'effetto di cui alle slide precedenti si può interpretare come un filtraggio sul segnale di ingresso con una certa *Q(f)*



- In sostanza, un campionatore reale aggiunge una funzione di trasferimento $Q(f)$ rispetto ad un campionatore ideale a treno di delta
  - Non si tratta solo una questione matematica
  - Anche i datasheet commerciale dei chip di ADC riportano infatti informazioni sulla "banda analogica" del chip ADC

Chip ADC commerciali

Materiale "extra",
… for further reading!

- Alcuni esempi di datasheet di ADC commerciali. Si noti che sono riportati DUE dati diversi
  - La frequenza massima di campionamento f_c (in campioni al secondo)
  - La banda analogica a 3dB $B_{a,3dB}$ (in Hz)
  - È opportuno che sia $B_{a,3dB} >> f_c$ ma non sempre è così

TEXAS INSTRUMENTS — ADC12QJ800-Q1, ADC12DJ800-Q1, ADC12SJ800-Q1
SBASA52 – JULY 2021

ADC12xJ800-Q1 Quad, Dual, Single Channel, 800-MSPS, 12-bit, Analog-to-Digital Converter (ADC) with JESD204C Interface

1 Features

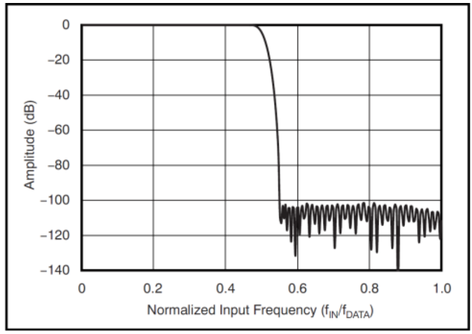
- AEC-Q100 qualified for automotive applications:
  - Temperature grade 1: –40°C to +125°C, T_A
- ADC Core:
  - Resolution: 12 Bit
  - Maximum sampling rate: 800 MSPS
  - Non-interleaved architecture
  - Internal dither reduces high-order harmonics
- Performance specifications (–1 dBFS):
  - SNR (97 MHz): 57.6 dBFS
  - ENOB (97 MHz): 9.0 Bits
  - SFDR (97 MHz): 62 dBFS
  - Noise floor (–20 dBFS): –146.1 dBFS/Hz
- Full-scale input voltage: 800 $mV_{PP\text{-}DIFF}$
- Full-power input bandwidth: 6 GHz

TEXAS INSTRUMENTS — ADS1278-EP
www.ti.com — SBAS579 – AUGUST 2012

OCTAL SIMULTANEOUS-SAMPLING 24-BIT ANALOG-TO-DIGITAL CONVERTER
Check for Samples: ADS1278-EP

FEATURES

- **Simultaneously Measure Eight Channels**
- **Up to 128-kSPS Data Rate**
- **AC Performance:**
  62-kHz Bandwidth
  111-dB SNR (High-Resolution Mode)
  –108-dB THD
- **DC Accuracy:**
  0.8-µV/°C Offset Drift
  1.3-ppm/°C Gain Drift
- **Selectable Operating Modes:**
  High-Speed: 128 kSPS, 106 dB SNR
  High-Resolution: 52 kSPS, 111 dB SNR
  Low-Power: 52 kSPS, 31 mW/ch
  Low-Speed: 10 kSPS, 7 mW/ch



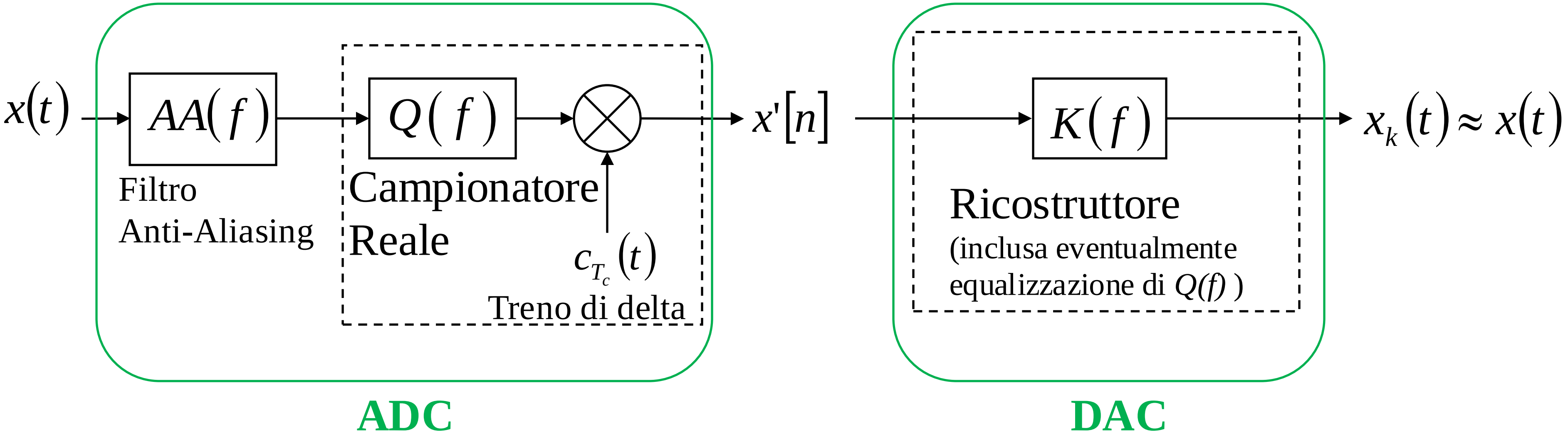
Campionatori Reali ed equalizzazione nel DAC

- L'effetto di un campionamento reale con una certa $q(t)$ può essere però «compensato» dal filtro ricostruttore se questo implementa anche una sorta di «equalizzazione» rispetto a $Q(f)$
  - Abbiamo visto che per equalizzare una certa $Q(f)$ è necessario tuttavia che:

$$Q(f) \neq 0 \quad \forall |f| < B$$

- In tal caso, si può «compensare» aggiungendo un filtraggio nel DAC con funzione di trasferimento che tiene conto anche di: $\dfrac{1}{Q(f)}$

Schema finale sistemi di campionamento reali



Sommario: condizioni realistiche di progetto di un sistema di campionamento

Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications

- Anti-Aliasing:

$$AA(f) = \begin{cases} = 0 & \forall |f| > B_{AA} < f_c/2 \\ \neq 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

- Campionatore reale: $Q(f) \neq 0 \quad \forall |f| < B_{AA}$

- Ricostruttore (inclusa equalizzazione dei filtri anti-aliasing e campionatore reale):

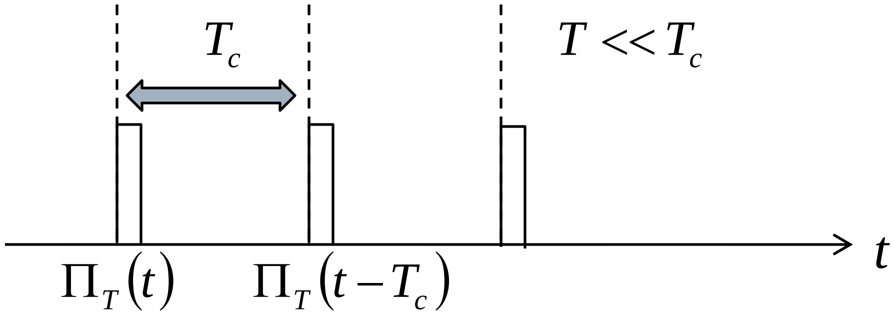
$$K(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{AA(f)Q(f)} & \forall |f| < B_{AA} \\ 0 & \forall |f| > f_c - B_{AA} \end{cases}$$

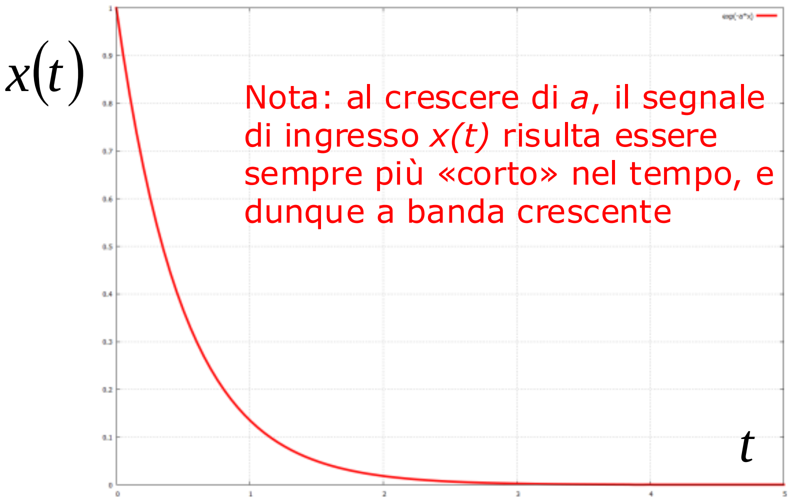
Esempio: campionamento con porta di durata *T<Tc* su un segnale esponenziale decrescente

***Materiale "extra"*, … for further reading!**

- Dati: $x(t) = u(t)\exp(-at)$

  $q(t) = \Pi_T(t)$

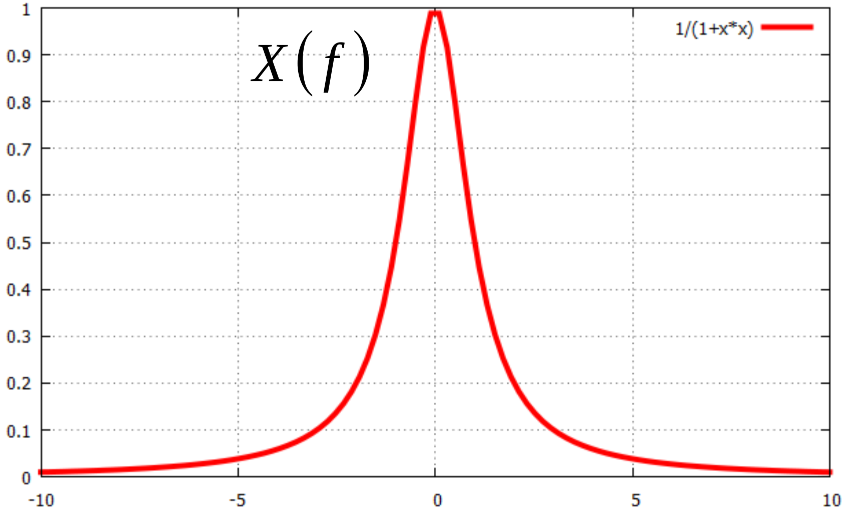




- Scegliere il filtro Anti-Aliasing e la larghezza della porta in maniera da ricostruire fedelmente il segnale

Scelta del periodo di campionamento e banda filtro AA

Materiale "extra",
... for further reading!



$$|X(f)|^2 = \frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2}$$

E' un segnale a supporto spettrale illimitato.

Calcolo della banda unilatera al 99% di energia:

$$\int_0^{B_{99\%}} \frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2} df = 0.99 \int_0^{\infty} \frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2} df$$

$$\operatorname{atan}\left(B_{99\%} \frac{2\pi}{a} \right) = 0.99 \frac{\pi}{2}$$

$$B_{99\%} = \frac{a}{2\pi} \tan\left(0.99 \frac{\pi}{2} \right) \cong 10.13a$$

Scelta della banda del filtro di anti-aliasing: scegliamo un valore leggermente superiore della banda al 99%

$$B_{AA} = 11a$$

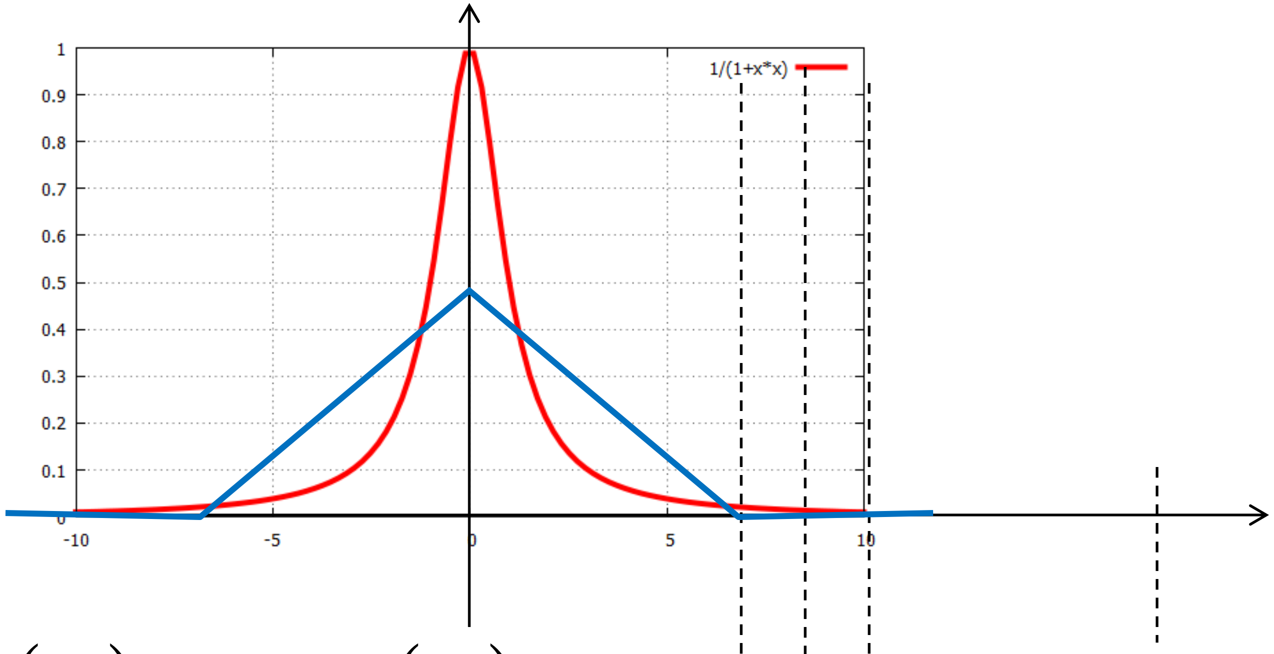
Scelta della frequenza di campionamento:

$$\frac{f_c}{2} > B_{AA} \rightarrow f_c = 24a$$

Esempio filtro AA

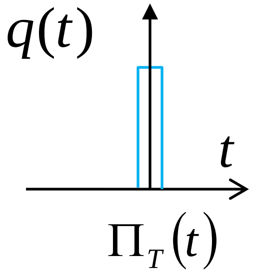
Materiale "extra",
… for further reading!

Come esempio, scegliamo un filtro di anti-aliasing triangolare in frequenza



$$AA(f) = \Lambda_{11a}(f)$$

Scelta larghezza porta campionatrice

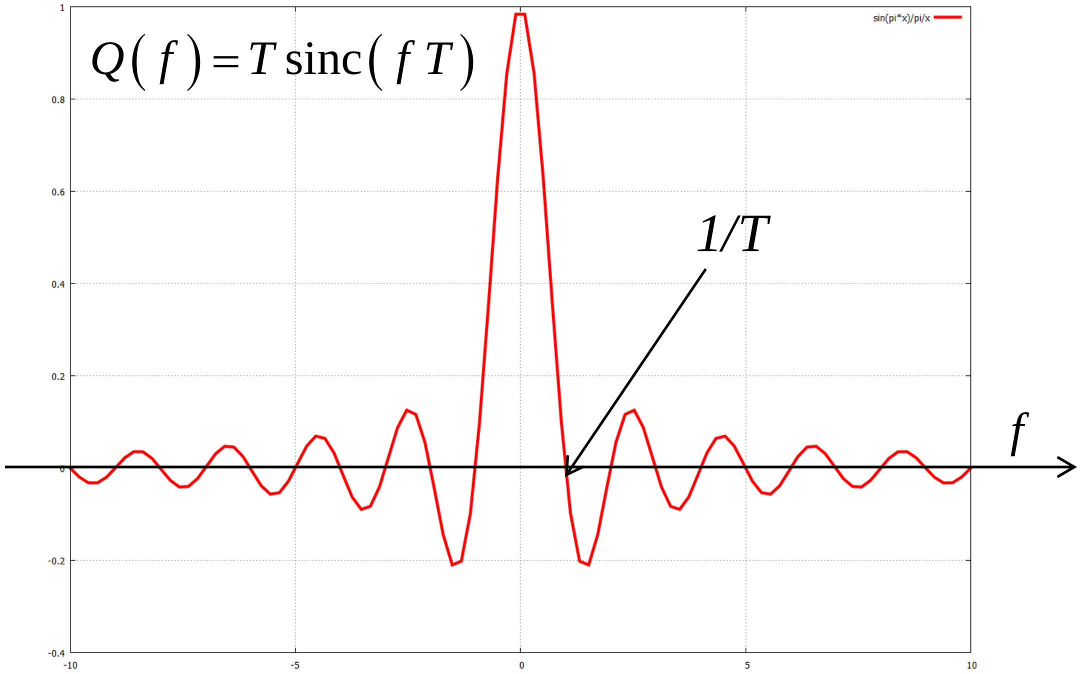


Deve essere rispettata la relazione:

$$Q(f) \neq 0 \quad \forall |f| < B_{AA}$$

Il primo zero su *Q(f)* è in 1/T e dunque:

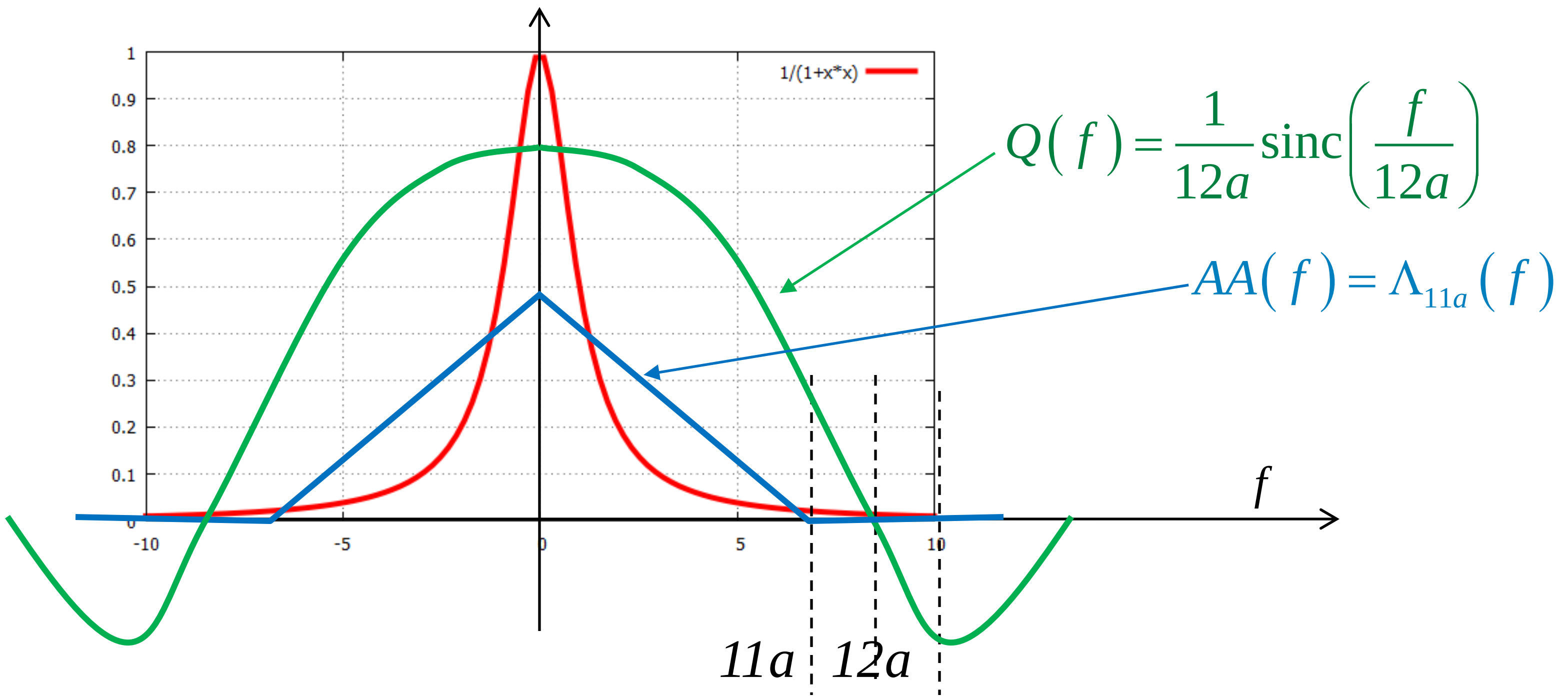
$$\frac{1}{T} > B_{AA} = 11a$$



Possibile scelta:

$$\rightarrow T \leq \frac{1}{11a} \rightarrow T = \frac{1}{12a}$$

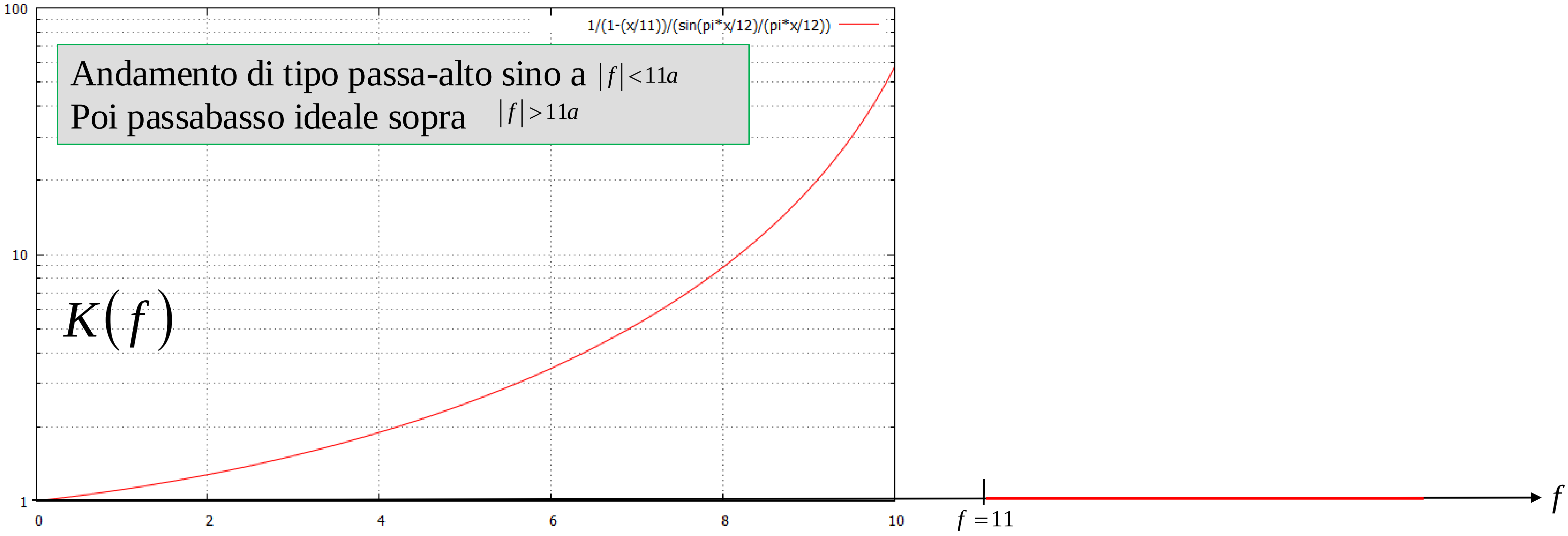
Filtro di ricostruzione



$$K(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{AA(f)Q(f)}=\dfrac{1}{24a}\dfrac{12a}{\Lambda_{11a}(f)\mathrm{sinc}(f/12a)} & |f|<11a\\ 0 \qquad |f|>11a\end{cases}$$

Filtro di ricostruzione (per a=1)

Materiale "extra", *… for further reading!*



Per chi fosse curioso: ulteriori approfondimenti sul tema

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Esempi di DAC commerciali che implementano tecniche avanzate
  - https://www.analog.com/media/en/training-seminars/tutorials/MT-017.pdf
  - https://www.dsprelated.com/showarticle/167.php
- Una review della "storia" del teorema del campionamento
  - https://ieeexplore-ieee-org.ezproxy.biblio.polito.it/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=755459
  - https://ieeexplore-ieee-org.ezproxy.biblio.polito.it/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=1455040
- … per "giocare" con i suoni con Matlab
  - https://it.mathworks.com/matlabcentral/answers/48717-create-a-piece-of-music-using-matlab
  - Ci sono inoltre molti esempi in Matlab se cercate "Audio Processing Algorithm Design" nella documentazione