Teoria dei Segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Diagrammi a blocchi
- Definizioni di Banda
- Distorsione lineare
- Modulazione e demodulazione

Anno accademico 2024-2025

Ultimo aggiornamento: Settembre 2023

Combinazioni di sistemi lineari

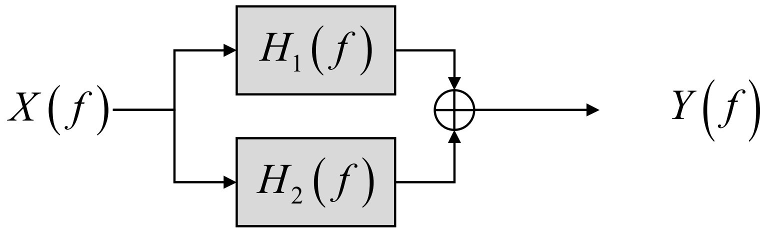
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Insiemi interconnessi di sistemi lineari (LTI) possono costituire a loro volta un sistema lineare la cui funzione di trasferimento è ricavabile con semplici operazioni da quella dei sistemi costituenti

- Sono spesso descritti graficamente tramite diagrammi a blocchi

- Ciascun blocco è caratterizzato dalla sua funzione di trasferimento $H(f)$ (o dalla risposta all'impulso $h(t)$)

“Parallelo” di due sistemi lineari



$$Y(f) = X(f)H_1(f) + X(f)H_2(f) = X(f)\big(H_1(f) + H_2(f)\big)$$

$$\boxed{Y(f) = X(f)\big(H_1(f) + H_2(f)\big)}$$

$$\boxed{H_{tot}(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = H_1(f) + H_2(f)}$$

“Serie” di due sistemi lineari

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

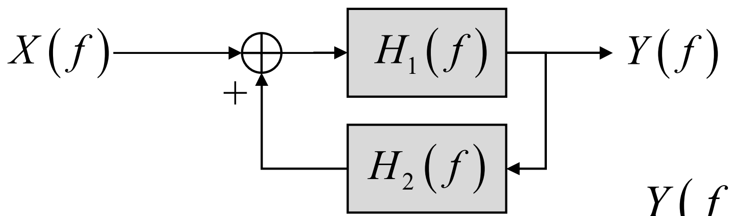
$$X(f) \longrightarrow \boxed{H_1(f)} \longrightarrow \boxed{H_2(f)} \longrightarrow Y(f)$$

$$Y(f) = \left(X(f)H_1(f)\right)H_2(f) = X(f)\left[H_1(f)H_2(f)\right]$$

$$\boxed{Y(f) = X(f)H_1(f)H_2(f)}$$

$$\boxed{H_{tot}(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = H_1(f) \cdot H_2(f)}$$

Diagrammi a blocchi - Retroazione



$$Y(f) = \left(X(f) + Y(f)H_2(f)\right)H_1(f)$$

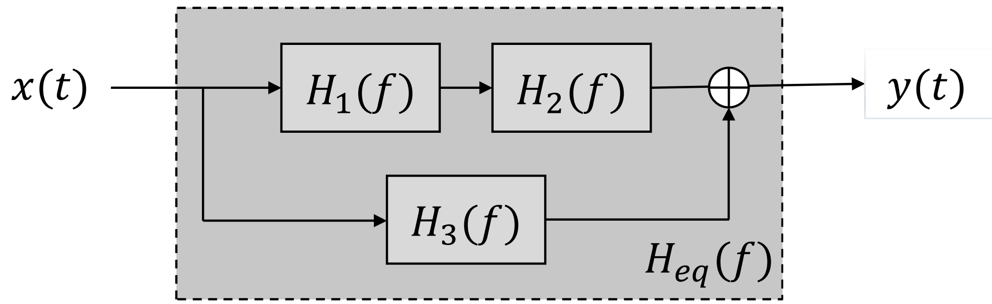
$$Y(f)\left[1 - H_2(f)H_1(f)\right] = X(f)H_1(f)$$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 - H_2(f)H_1(f)}$$

$$\boxed{H_{tot}(f) = \frac{H_1(f)}{1 - H_1(f)H_2(f)}}$$

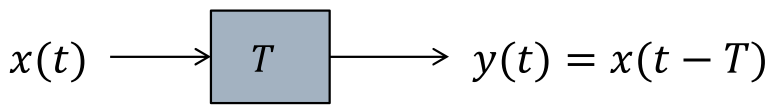
Esempio: combinazione generica dei casi precedenti

- Si consideri il sistema in figura e si determini la funzione di trasferimento equivalente $H_{eq}(f)$



Due particolari sistemi LTI: Il ritardatore e l'amplificatore

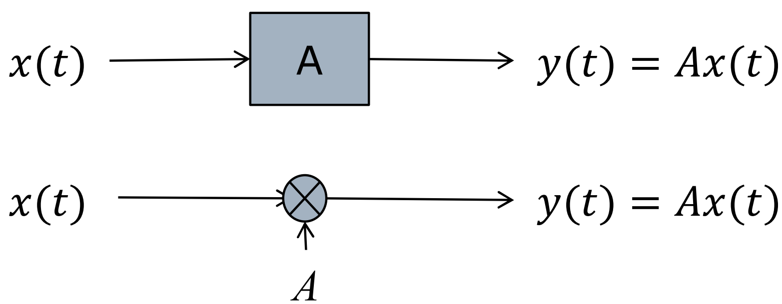
- Il ritardatore



$$h(t) = \delta(t - T)$$

$$H(f) = \exp(-j2\pi fT)$$

- Moltiplicazione per una costante (amplificatore)



$$h(t) = A \cdot \delta(t)$$

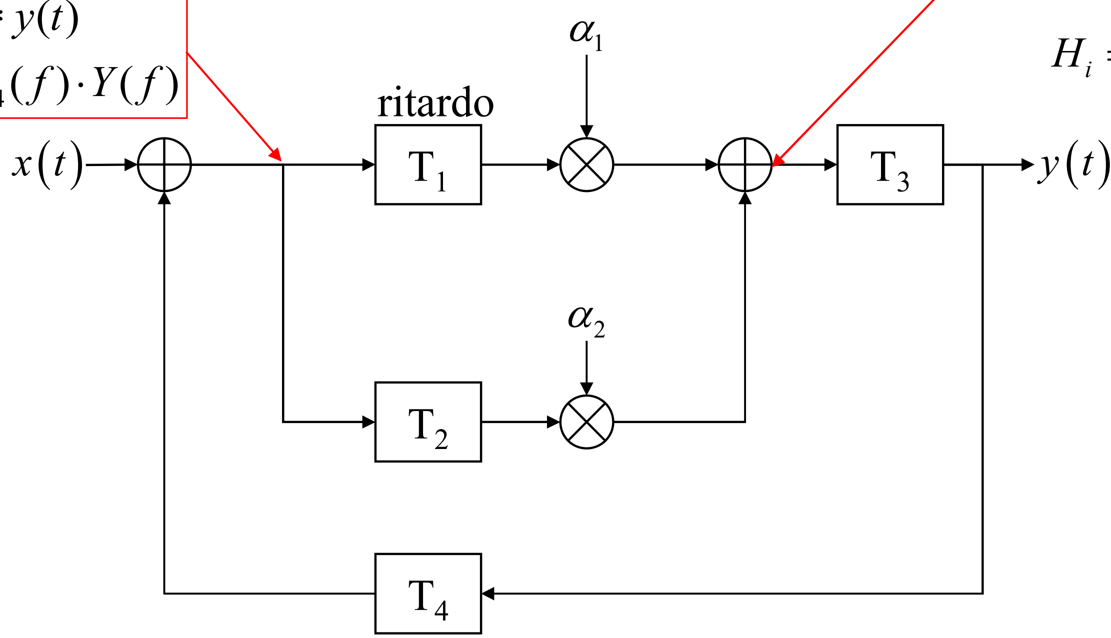
$$H(f) = A$$

Malgrado la loro semplicità, questi due sistemi lineari sono alla base di molti algoritmi per il processamento del segnale, come vedremo nella seconda parte del semestre.

Esempio 1

$$z(t) = \left(\left(\alpha_1 \cdot h_1(t) + \alpha_2 \cdot h_2(t)\right) * w(t)\right)$$
$$Z(f) = \left(\alpha_1 \cdot H_1(f) + \alpha_2 \cdot H_2(f)\right) W(f)$$

$$w(t) = x(t) + h_4(t) * y(t)$$
$$W(f) = X(f) + H_4(f) \cdot Y(f)$$



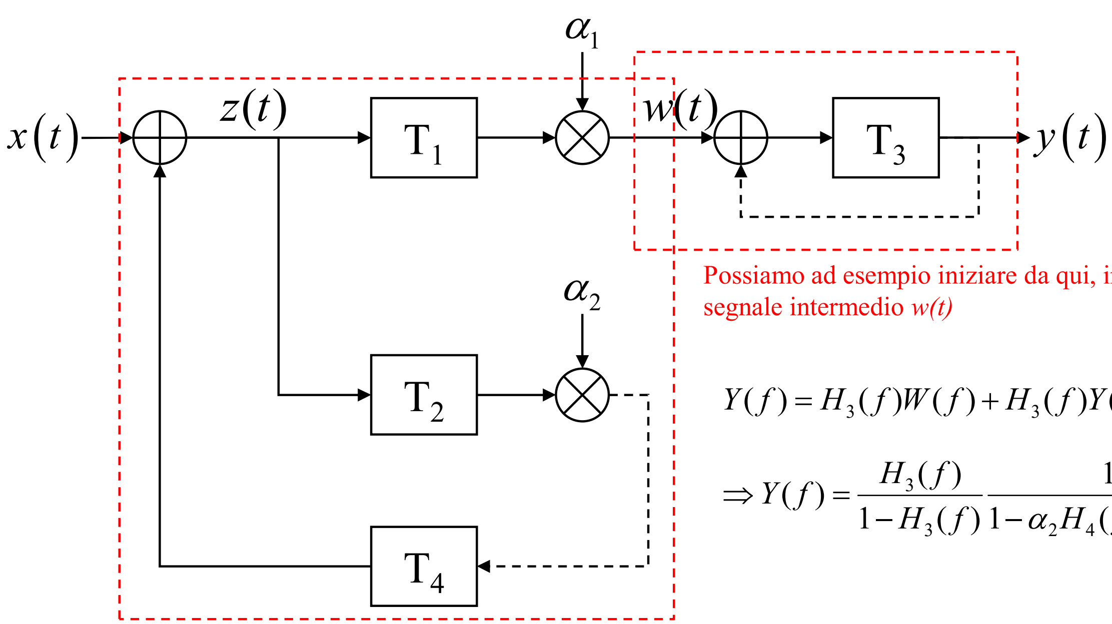
$$H_i = \exp\left(-j 2\pi f T_i\right)$$

Funzione di trasferimento dei ritardatori

$$H_{tot} = \frac{H_3\left(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2\right)}{1 - H_4 H_3\left(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2\right)}$$

Esempio 2

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



Possiamo ad esempio iniziare da qui, introducendo il segnale intermedio *w(t)*

$$Y(f) = H_3(f)W(f) + H_3(f)Y(f) \Rightarrow Y(f) = \frac{H_3(f)}{1-H_3(f)}W(f)$$

$$\Rightarrow Y(f) = \frac{H_3(f)}{1-H_3(f)} \frac{1}{1-\alpha_2 H_4(f) H_2(f)} \alpha_1 H_1(f) X(f)$$

Possiamo concentrarci su questo altro gruppo di blocchi, introducendo il segnale intermedio *z(t)* come:

$$Z(f) = X(f) + \alpha_2 H_2(f) H_4(f) Z(f)$$

$$\Rightarrow Z(f) = \frac{1}{1-\alpha_2 H_2(f) H_4(f)} X(f)$$

$$\boxed{H_{tot} = \frac{1}{1-\alpha_2 H_4 H_2} \alpha_1 H_1 \frac{H_3}{1-H_3}}$$

Reti di amplificatori e ritardatori

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Con ritardatori e amplificatori opportunamente concatenati si possono ottenere sistemi LTI con funzioni di trasferimento desiderate della forma:

$$\boxed{H_{FIR}(f) = \sum_i \alpha_i \exp(-j2\pi f \tau_i)}$$

Senza retroazione

Queste strutture saranno alla base dei cosiddetti filtri Finite Impulse Response (FIR), molto importanti nella seconda parte del Corso

$$\boxed{H_{IIR}(f) = \frac{\sum_i \alpha_i \exp(-j2\pi f \tau_i)}{\sum_j \beta_j \exp(-j2\pi f \tau_j)}}$$

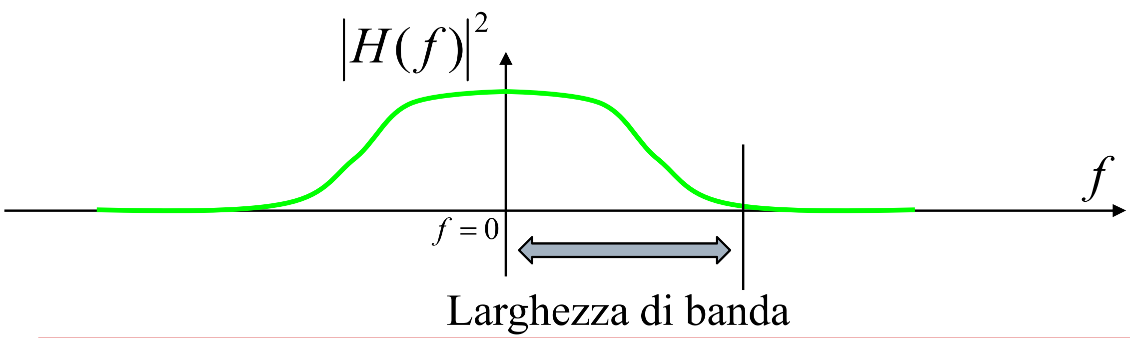
Con retroazione

Queste strutture saranno alla base dei cosiddetti filtri Infinite Impulse Response (IIR)

Larghezza di Banda

- La larghezza di banda (o semplicemente «banda») è definita come l’intervallo di frequenze occupato da un segnale o da una funzione di trasferimento
- Si usano varie definizioni, solitamente tutte legate al modulo al quadrato delle trasformate

$$|H(f)|^2 \quad \text{oppure} \quad |X(f)|^2$$



Nota importante: il motive per cui è così rilevante il modulo al quadrato delle trasformate (cioè il cosidetto "spettro di un segnale") sarà chiarito meglio in una delle lezioni successive.

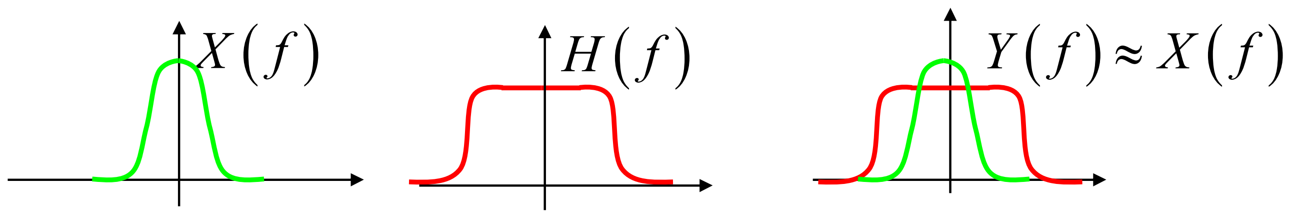
Per ora, si anticipa solo che questa quantità è legata al contenuto di energia (o di Potenza) del segnale per ciascuna frequenza: indicativamente cioè $|X(f)|^2$ indica la quantità di energia del segnale alla frequenza f

Larghezza di Banda in un sistema lineare

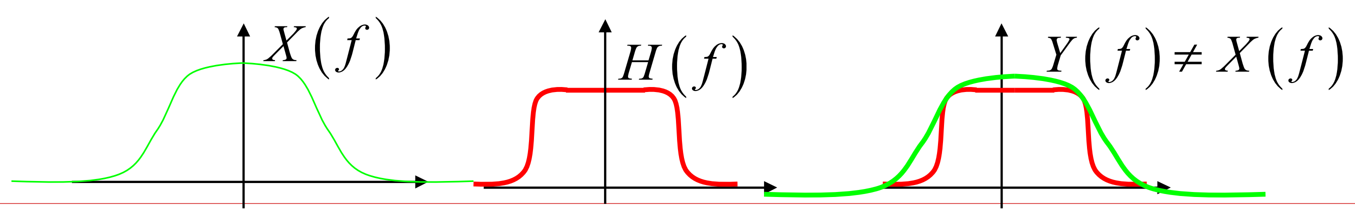
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- È solitamente molto importante la relazione tra la banda di un filtro e quella del segnale al suo ingresso
- Dato che infatti $|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot |X(f)|^2$ si ha:

Situazione di segnali in ingresso con banda più stretta di quella del filtro



Situazione di segnali in ingresso con banda più larga di quella del filtro



Definizioni di banda

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Spesso la definizione di banda come “misura del supporto” della trasformata è troppo restrittiva perchè molti segnali e sistemi hanno in realtà trasformate con supporto infinito
- Molti sistemi tuttavia presentano un intervallo di frequenze dove la funzione di trasferimento è “quasi” nulla
- E’ quindi necessario dare delle definizioni di banda con un utilità pratica
- L’utilizzo di una particolare definizione dipende dal contesto applicativo

Possibili definizioni di banda

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Misura del supporto
  - Intervallo di frequenze al di fuori del quale del quale lo spettro è esattamente nullo
- Banda a 3dB
- Banda equivalente di rumore
- Estensione di frequenza
- Banda che contiene una data percentuale dell’ energia totale

Nota sulla terminologia:

- *Per spettro di un segnale si intende* $|X(f)|^2$
- *Impropriamente, a volte si usa lo stesso termine anche per i filtri su* $|H(f)|^2$

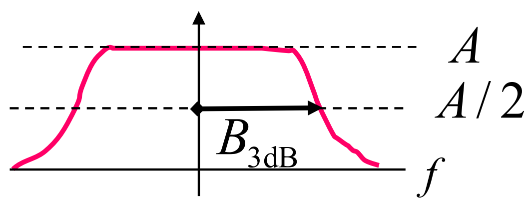
Banda unilatera e banda bilatera

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- I segnali e i sistemi reali hanno TdF con modulo pari

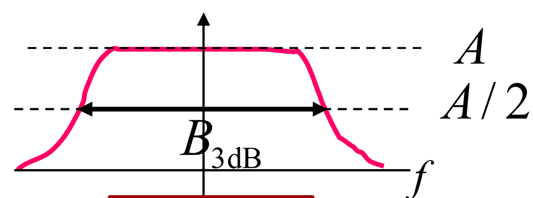
$$\left|H(f)\right|^2 = \left|H(-f)\right|^2$$

- Spesso si misura quindi la banda considerando solo la parte positiva dell'asse delle frequenze
  - Si parla in tal caso di banda "unilatera" e nell'altro caso di banda "bilatera"



Definizione di banda Unilatera

Normalmente useremo questa definizione

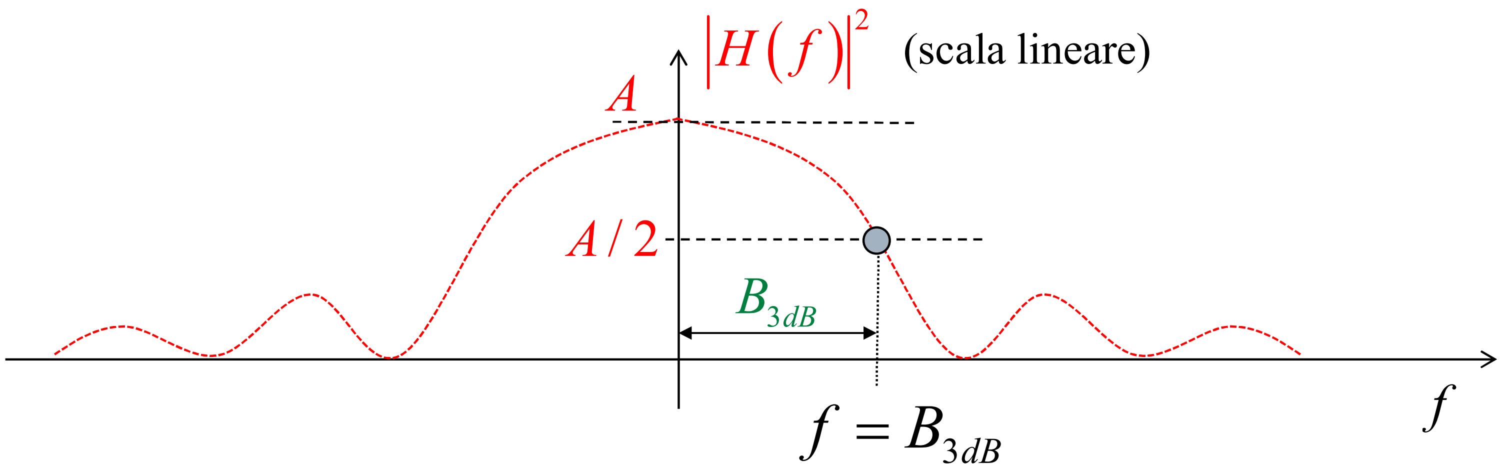


Bilatera

Banda a 3dB

- Punto nel quale il modulo quadro della funzione di trasferimento (impropriamente definito anche come spettro) diminuisce del 50% rispetto al picco
  - Diminuisce cioè di -3 dB

$$\left.|H(f)|^2\right|_{dB} = 10\log_{10}\left(|H(f)|^2\right)$$

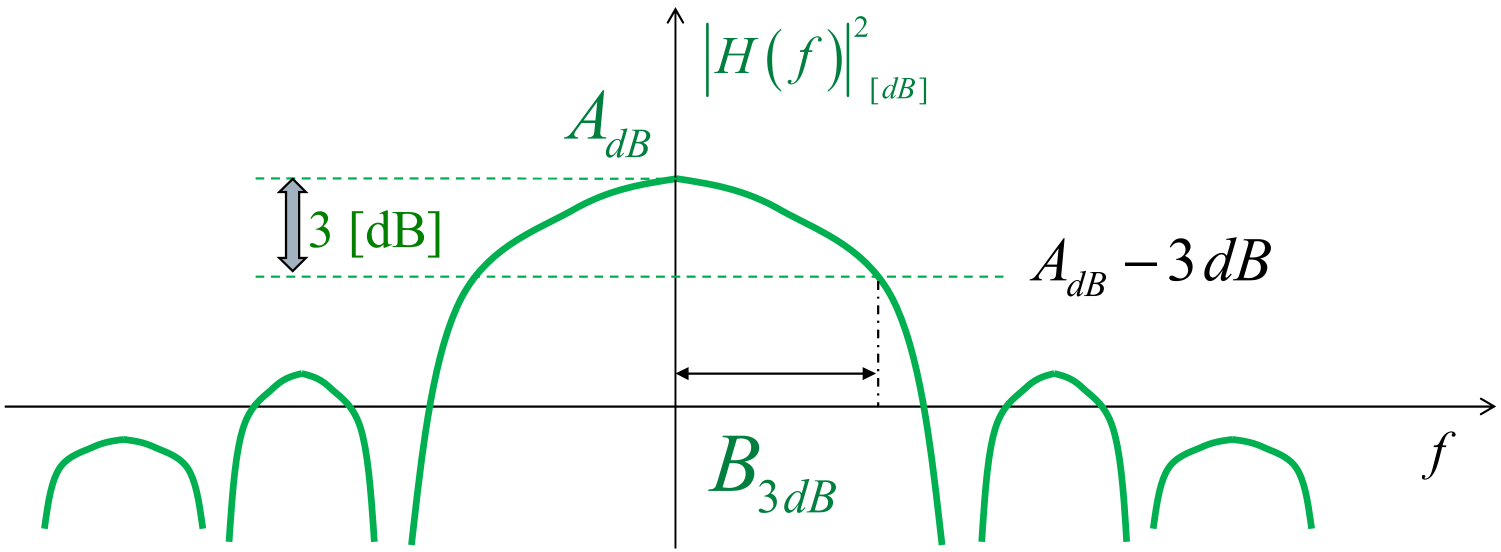


Banda a 3dB

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Stesso grafico precedente, ma rappresentato in decibel

$$\left.|H(f)|^2\right|_{dB} = 10\log_{10}\left(|H(f)|^2\right)$$

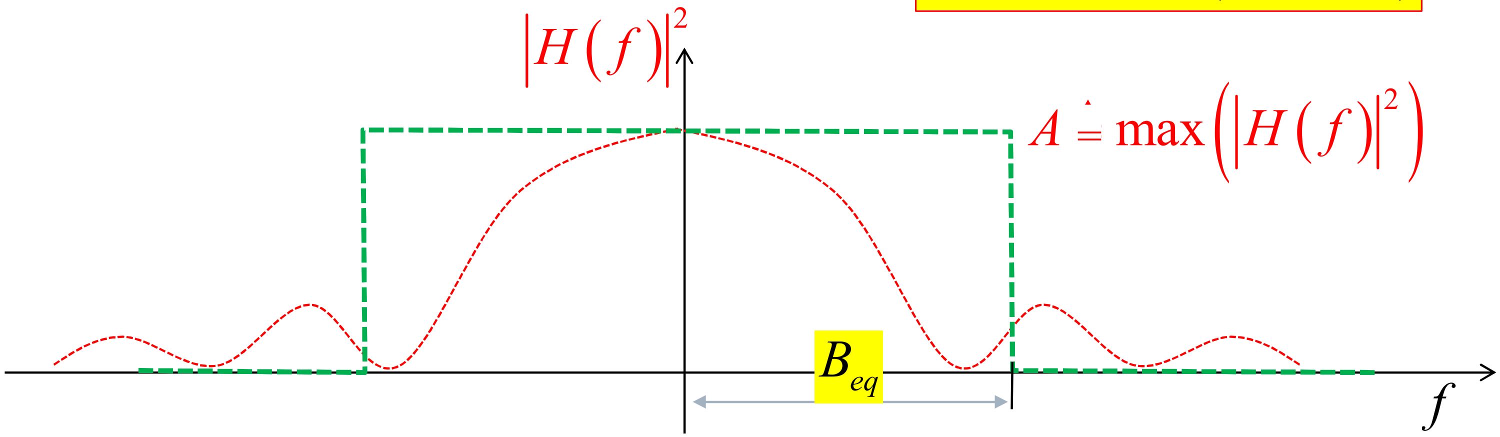


Banda equivalente di rumore

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- È definita come:

$$B_{eq} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \, df}{2 \cdot \max\left(|H(f)|^2\right)}$$



Come si discuterà più avanti (processi casuali), il concetto di banda equivalente di rumore è rilevante in problemi relative al filtraggio di rumore gaussiano bianco
In particolare, per quanto riguarda la potenza di rumore in uscita, un generico filtro è equivalente al filtro rettangolare tratteggiato in verde

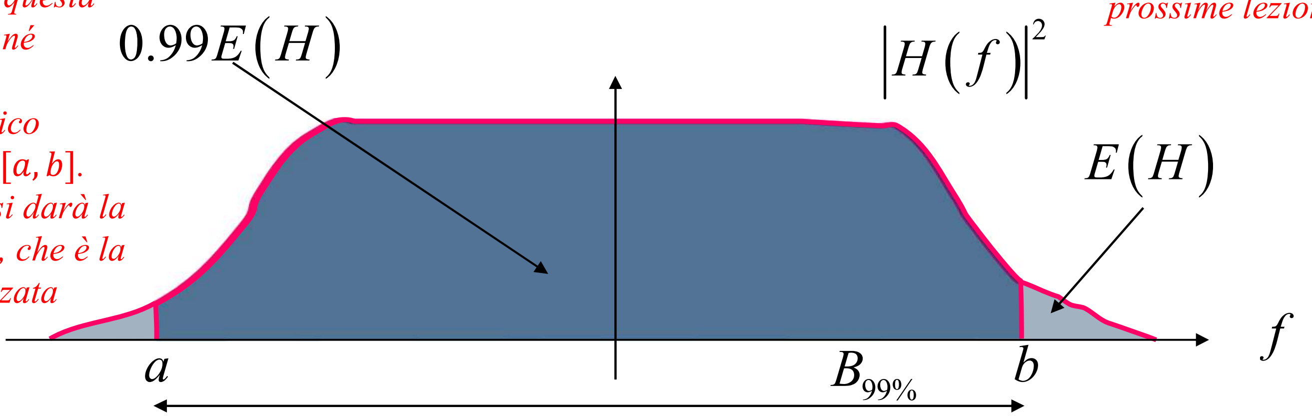
Banda che contiene una data percentuale di energia

- È definita come la larghezza dell'intervallo $[a, b]$ di frequenze che contengono $x\%$ di energia del filtro stesso
  - Ad esempio il 99%dell'energia

Commento:
Come già anticipato, il modulo al quadrato di una trasformata è legato alla distribuzione dell'energia del segnale sull'asse delle frequenze, come verrà studiato nel dettaglio in una delle prossime lezioni

$$B_{x\%} = |a-b| : \int_a^b |H(f)|^2 \, df = \frac{x}{100} E(H)$$

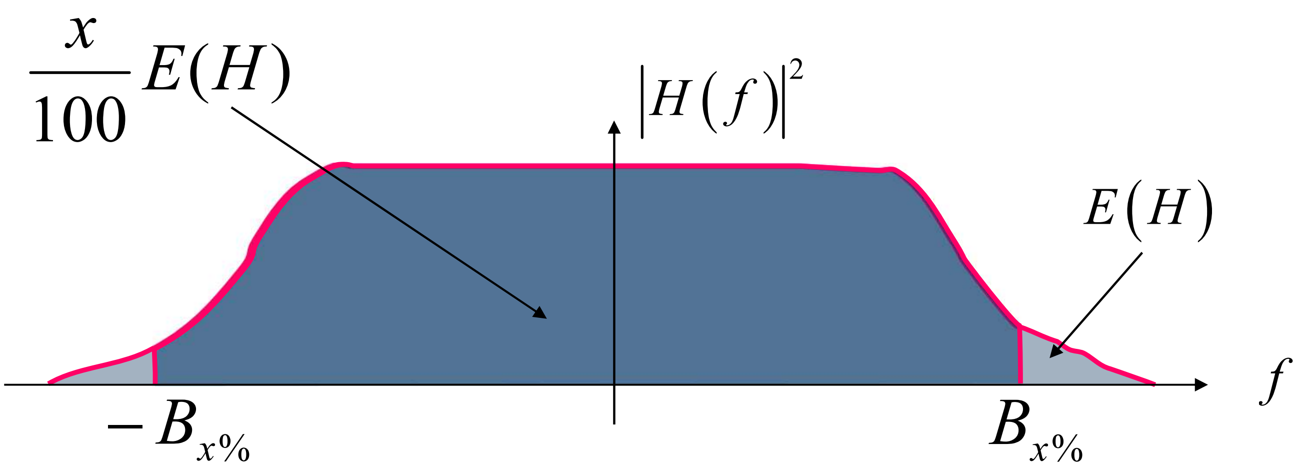
Commento:
La definizione usata in questa slide non è in generale né unilatera né bilatera, considerando un generico intervallo di frequenze $[a, b]$. Nella slide successiva si darà la definizione monolatera, che è la più comunemente utilizzata



Banda che contiene una data percentuale di energia

- La definizione <u>monolatera</u> della banda al x% di energia è la seguente

$$\int_{-B_{x\%}}^{+B_{x\%}} |H(f)|^2 df = \frac{x}{100} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$



Altre possibili definizioni di larghezza di Banda

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Banda a -10dB, -20 dB etc

- Estensione di Frequenza (già introdotta in precedenza)

$$\boxed{D^2 = \frac{4\pi^2}{E\left(H\left(f\right)\right)} \int f^2 \left|H\left(f\right)\right|^2 df}$$

<u>Commento</u>:
Questa definizione, a parte le normalizzazioni, è molto simile alla definizione di varianza su una densità di probabilità.

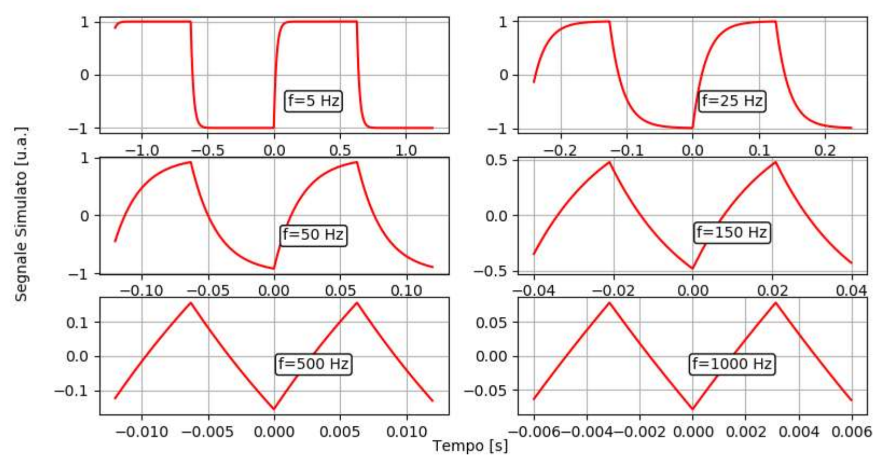
Distorsione lineare

- Per un sistema generico (anche NON LTI) si intende come «distorsione» il fatto che in generale il segnale di uscita NON ha le stesse caratteristiche del segnale in ingresso
  - La «forma» del segnale è in generale modificata
- La distorsione avviene anche nei sistemi lineari tempo invarianti, e di parla dunque di «distorsione lineare»
  - Si pensi infatti ad un semplice filtro RC ad un polo: l'uscita è chiaramente diversa dall'ingresso

Esempio:
- *ingresso: onda quadra in ingresso a periodicità diverse (corrispondenti frequenze indicate in figura)*
- *Filtro passabasso RC ad un polo con banda a 3dB pari a 15 Hz*
- *Il grafico riporta il segnale in uscita*

Si noti che all'aumentare della frequenza dell'onda quandra in ingresso, e a parità di f_{3dB} del filtro, il segnale è sempre più distorto

Grafico tratto da: https://it.wikipedia.org/wiki/Filtro_passa_basso



Sistema lineare non distorcente

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Un fattore moltiplicativo o un ritardo non modificano la forma e quindi sono considerati non distorcenti

In questa slide, si analizzano quali sono le condizioni molto particolari sotto le quali un sistema lineare non "cambia la forma" del segnale di ingresso

$$y(t) = k \cdot x(t - t_D)$$

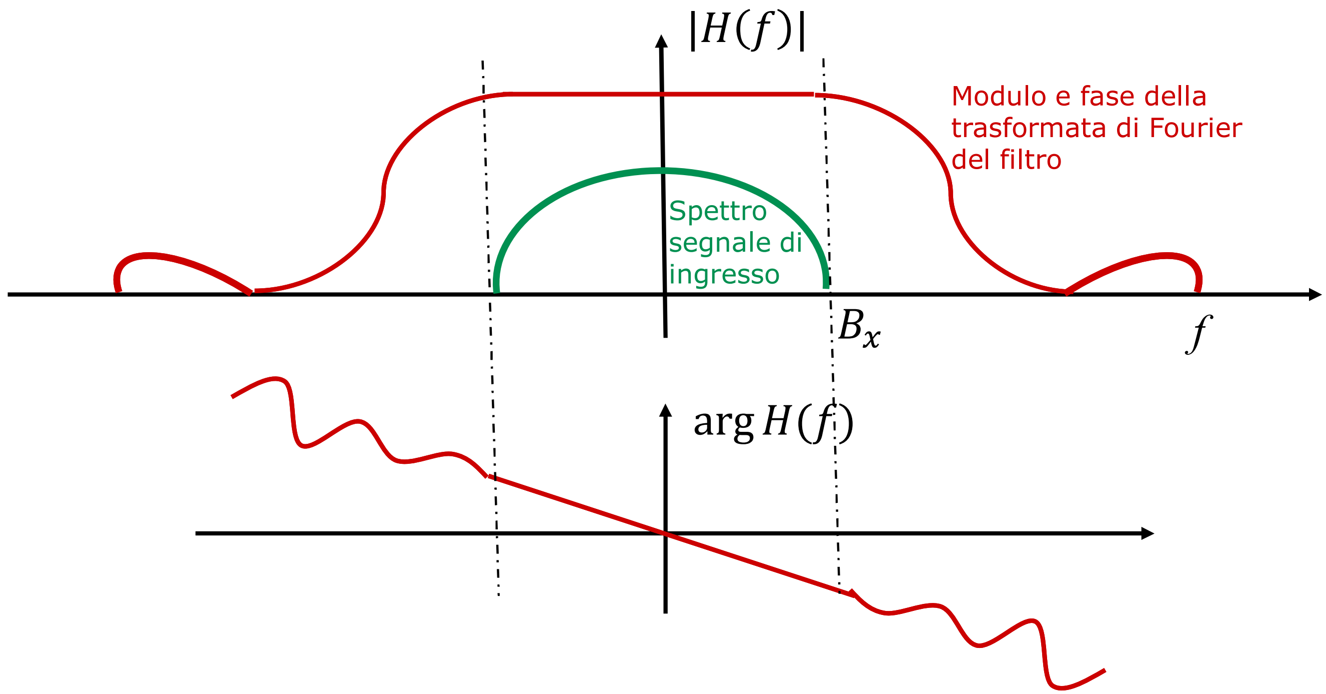
$$\boxed{H(f) = \underbrace{k}_{\text{Modulo costante}} \cdot e^{\overbrace{-j2\pi t_D f}^{\text{Fase lineare}}}}$$

La relazione può valere anche solo all'interno della banda di x

- Il filtro deve essere a modulo costante e fase lineare
  - lascia inalterata la forma del segnale nel tempo
- E' sufficiente che la condizione sia verificata sulla banda del segnale di ingresso

Sistema lineare non distorcente reale

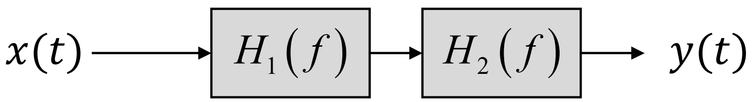
- La condizione di non distorsione deve essere valida sulla banda del segnale che viene elaborato



Instant Poll

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Si consideri il sistema in figura in cui
  - $x(t)$ è un segnale di banda $B_x = 3B$
  - $H_1(f) = p_{2B}(f)$
  - $H_2(f) = p_{6B}(f)$



- Qual è la banda B_y del segnale $y(t)$?

Nota: i termini equalizzazione e modulazione sono utilizzati in molti ambiti applicativi, spesso con accezioni tra di loro leggermente diverse

ALCUNI ESEMPI APPLICATIVI:

- EQUALIZZAZIONE DI UN SEGNALE FILTRATO
- MODULAZIONE
- MULTIPLAZIONE DI FREQUENZA

Equalizzazione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Una distorsione lineare è (in teoria) sempre compensabile con un altro sistema lineare (detto equalizzatore) posto in serie

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H_c(f)} \xrightarrow{x'(t)} \boxed{\begin{array}{c}\text{Equalizzatore}\\ H_e(f)\end{array}} \longrightarrow x_{out}(t)$$

"canale" con funzione di trasferimento generica

Si vuole un'uscita che sia una versione con la stessa forma dell'ingresso, anche se eventualmente scalata e ritardata

$$X_{out}(f) = k \cdot e^{j2\pi t_d f} X(f) = H_c(f) \cdot H_e(f) \cdot X(f)$$

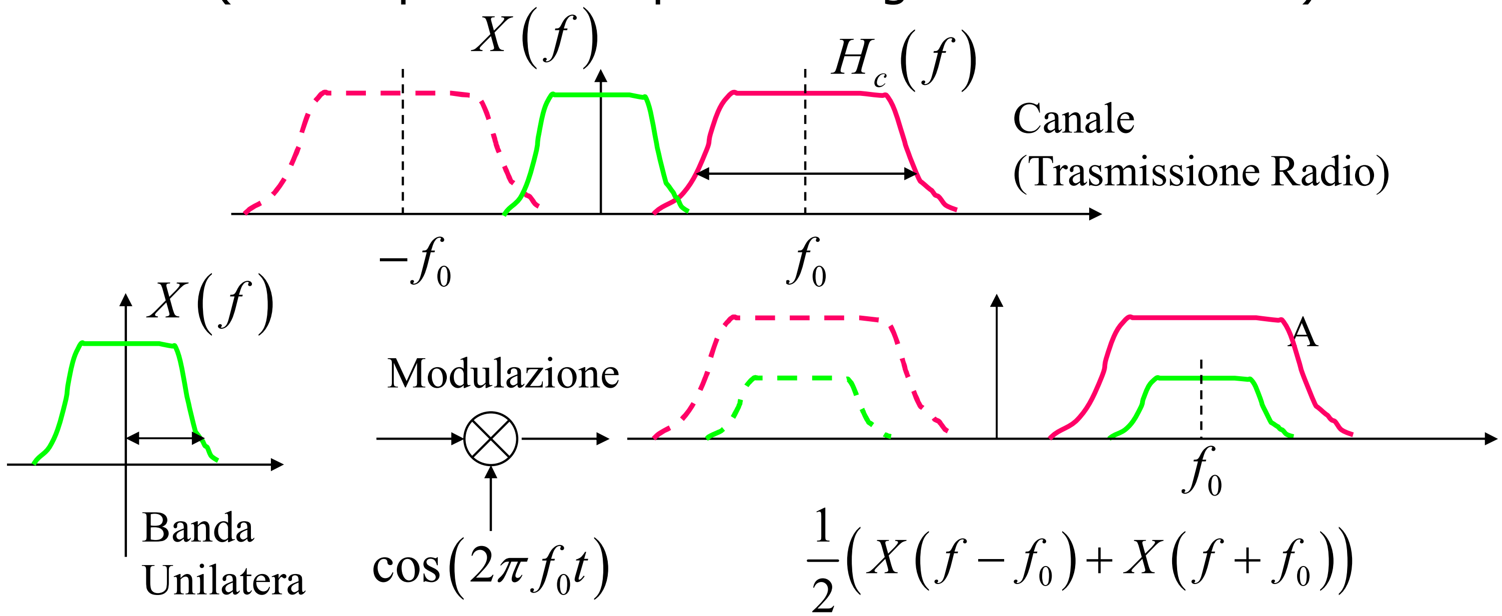
$$\boxed{H_e(f) = \frac{k \cdot e^{j2\pi t_d f}}{H_c(f)}}$$

Funzione di trasferimento necessaria per "equalizzare" un canale con una certa $H_c(f)$

Si può notare che il "canale" $H_c(f)$ non può essere nullo per nessuna frequenza, al fine di evitare che $H_e(f)$ vada all'infinito e dunque non sia realizzabile.
Questa condizione deve essere rispettata almeno all'interno della banda del segnale $x(t)$

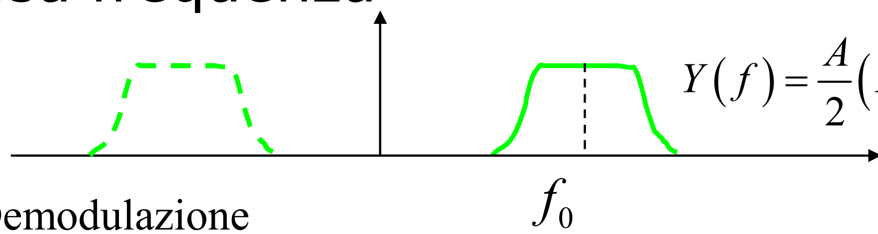
Modulazione

- Un sistema lineare che ha funzione di trasferimento di tipo passa-banda può essere usato per la trasmissione di un segnale in banda base solo dopo aver spostato il suo contenuto spettrale utilizzando la modulazione (=moltiplicazione per un segnale sinusoidale)



Demodulazione

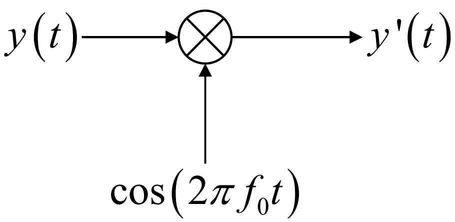
- In ricezione il segnale trasmesso può essere ricostruito moltiplicando il segnale ricevuto per un segnale sinusoide alla stessa frequenza



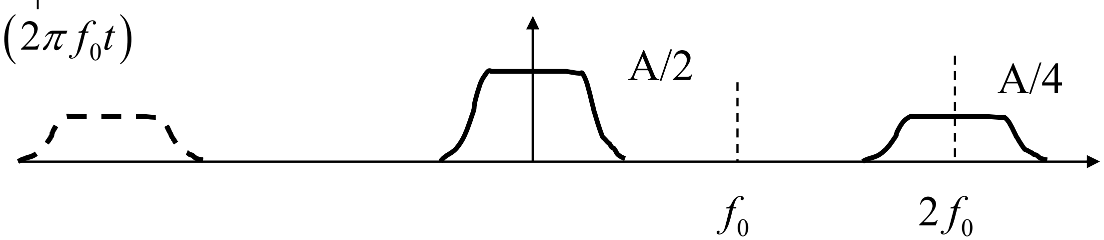
$$Y(f) = \frac{A}{2}\left(X(f - f_0) + X(f + f_0)\right)$$

Nota: condizione su f_0 affinché gli spettri non si sovrappongano

Demodulazione

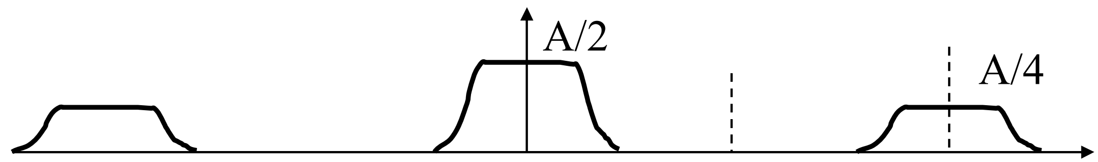


$$Y'(f) = \frac{A}{2}X(f) + \frac{A}{4}\left(X(f - 2f_0) + X(f + 2f_0)\right)$$

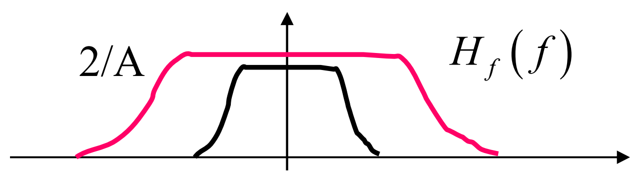


Modulazione e Demodulazione

- Le componenti ad alta frequenza possono poi essere eliminate con un <u>filtro passa-basso</u>

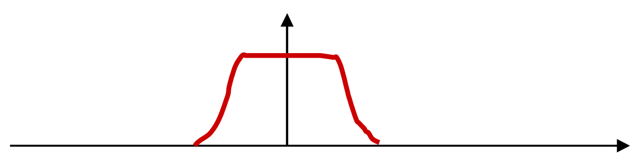


$$Y'(f) = \frac{A}{2} X(f) + \frac{A}{4}\left(X(f-2f_0) + X(f+2f_0)\right)$$



$$y'(t) \longrightarrow \boxed{H_f(f)} \longrightarrow y''(t) = x(t)$$

$$Y''(f) = X(f)$$



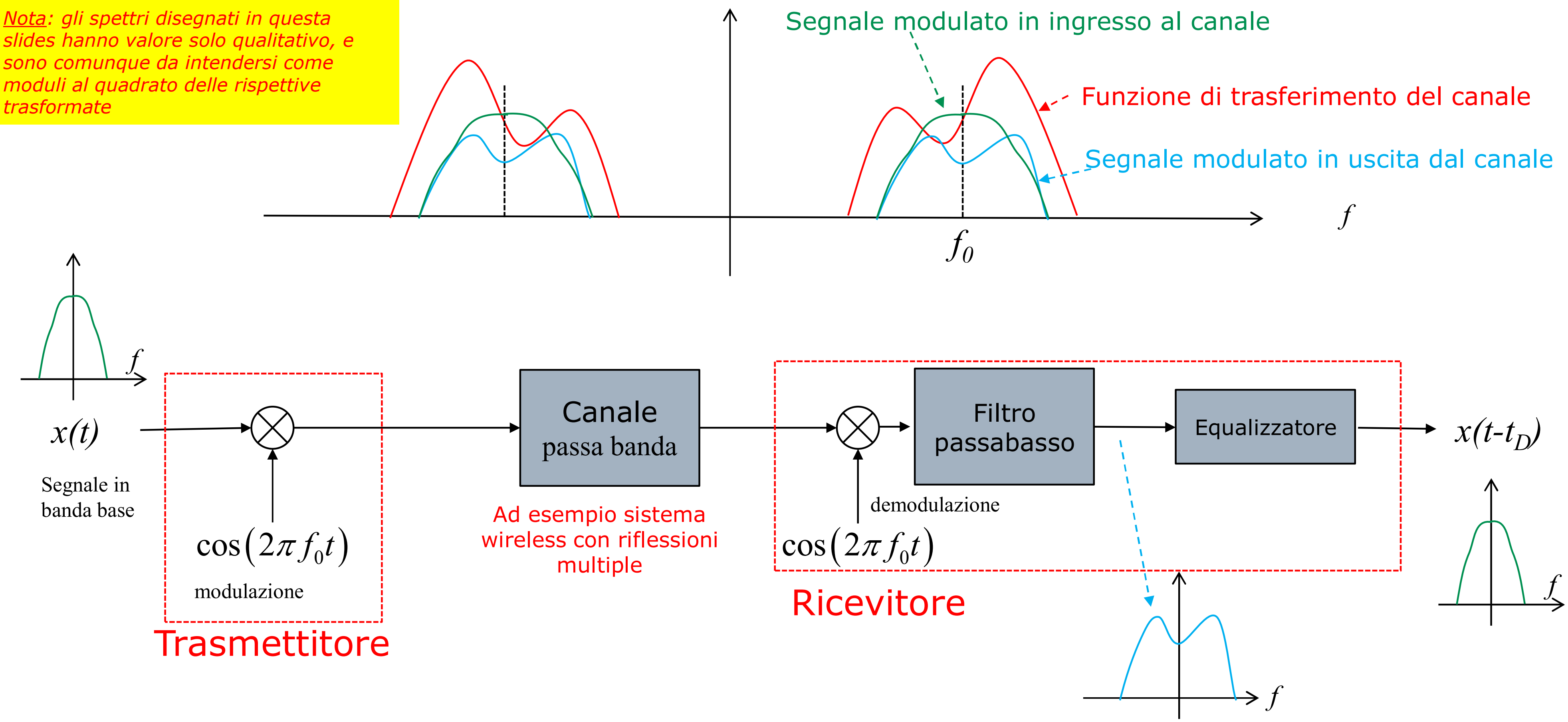
Modulazione e Demodulazione

- Perchè il sistema funzioni devono essere rispettate le seguenti condizioni
  - La banda del segnale modulato deve essere piu’ piccola della banda passante del canale
  - La banda del filtro in ricezione deve essere piu’ grande della banda del segnale trasmesso
  - La frequenza centrale f_0 deve essere maggiore della metà della banda del segnale da trasmettere (=segnale modulato)

  - Se la funzione di trasferimento del canale non è piatta (cioè distorcente) nell’ intervallo di frequenze del segnale trasmesso il filtro di ricezione puo’ compensare la distorsione e quindi servire anche da filtro di equalizzazione

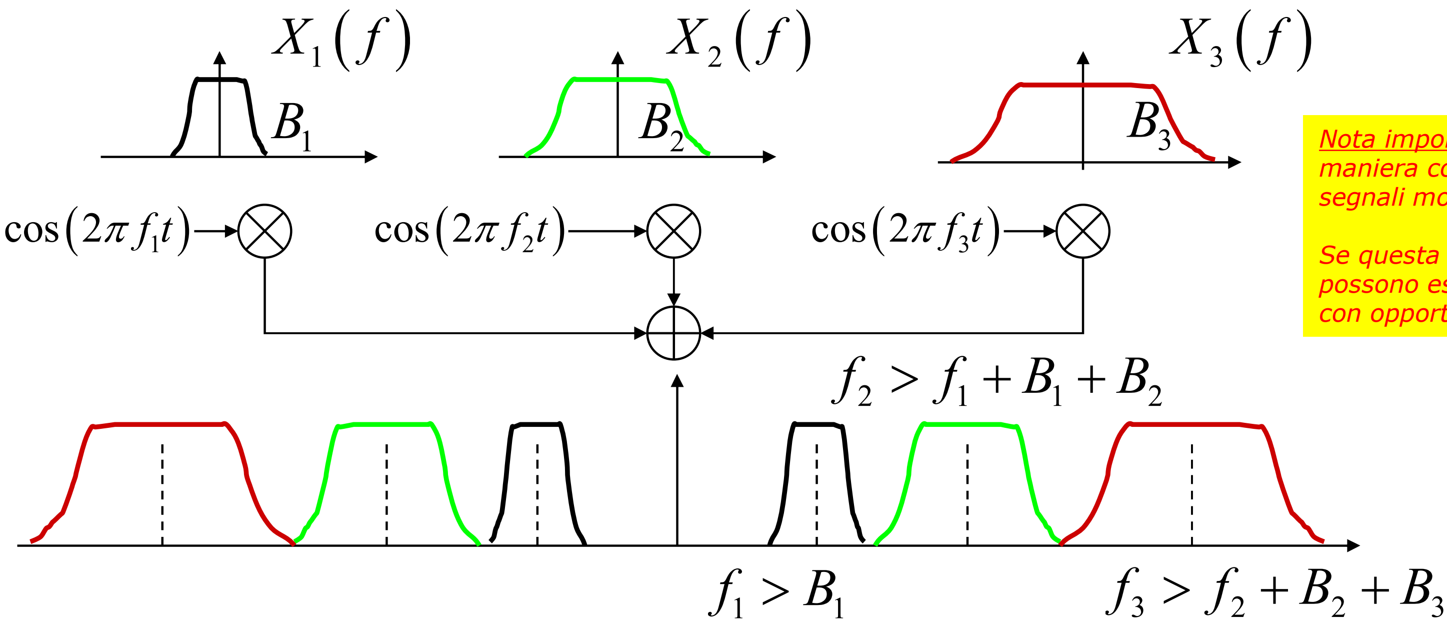
Sistema completo

<u>Nota</u>: gli spettri disegnati in questa slides hanno valore solo qualitativo, e sono comunque da intendersi come moduli al quadrato delle rispettive trasformate



Multiplazione in frequenza

- Diversi segnali con occupazione di banda sovrapposta possono essere multiplati su di un singolo canale usando lo stesso procedimento di modulazione ma su frequenze diverse. I segnali possono essere poi demultiplati senza distorsione (dopo opportuni filtraggi).

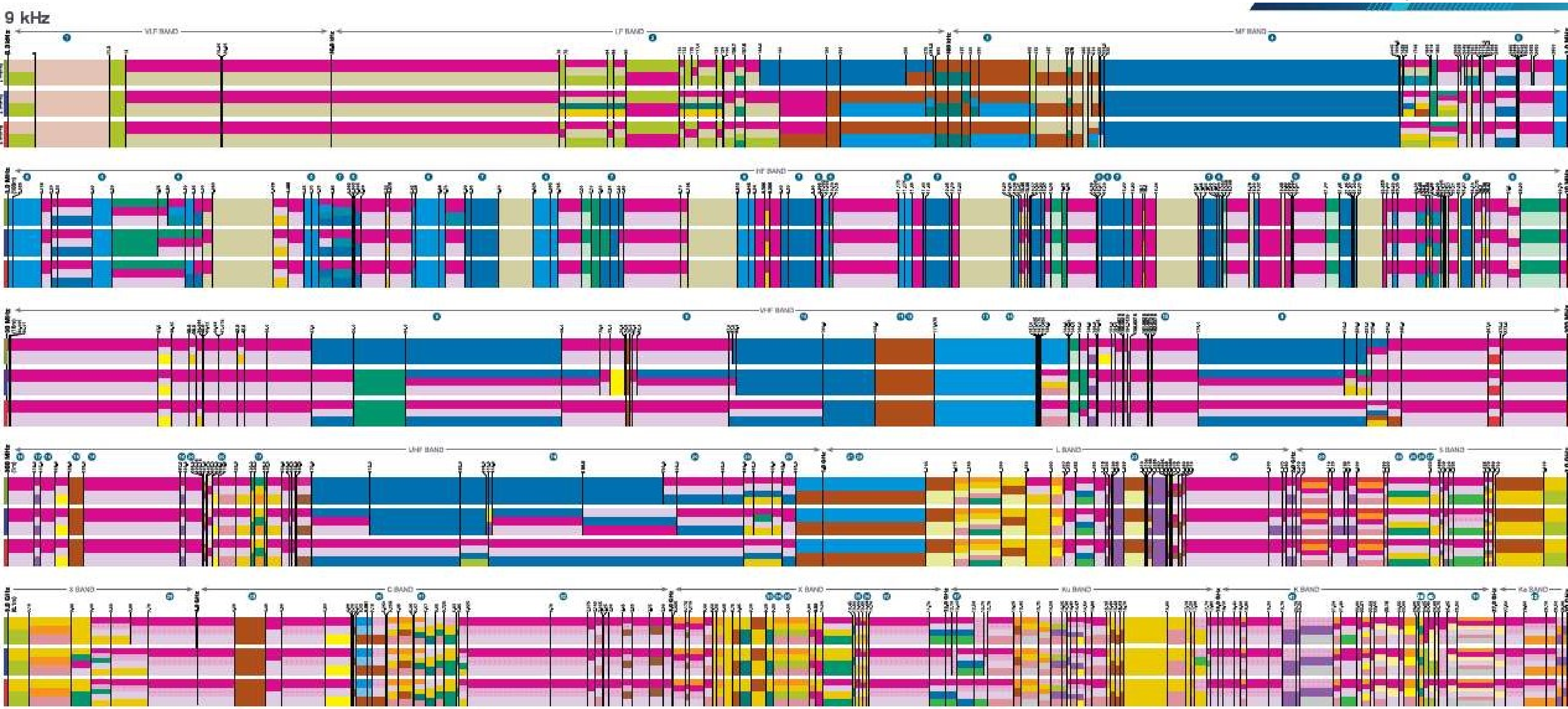


Nota importante: è possibile demodulare in maniera corretta SOLO SE gli spettri dei vari segnali modulati NON si sovrappongono.

Se questa condizione è rispettata, i singoli segnali possono essere demodulati in maniera corretta con opportuni filtraggi

Carta internazionale delle allocazioni in frequenza per trasmissioni wireless
https://www.tek.com/document/poster/ww-spectrum-allocations-poster

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



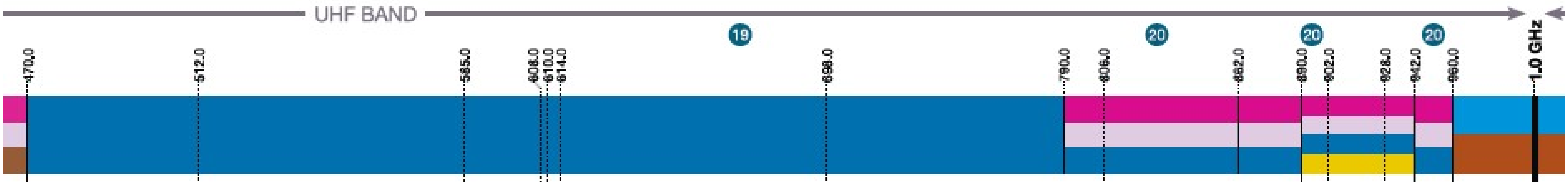
Note: the three (or more) horizontal bars are for different regions of the world

Zooming in…

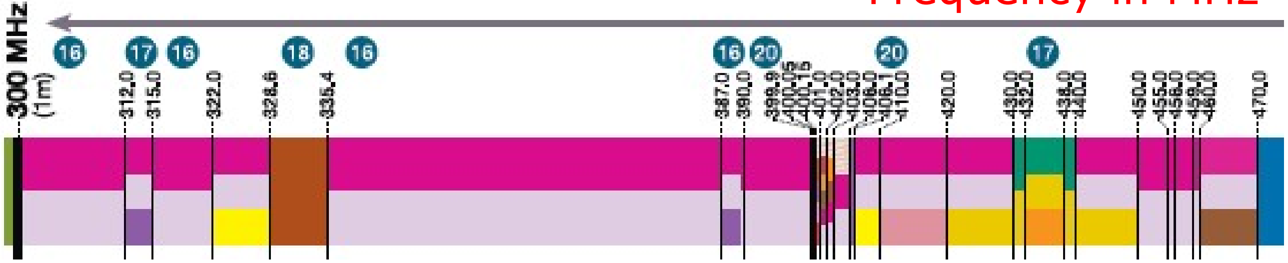
19 UHF Television (TV)

20 Cellular Phone Bands

Frequency in MHz



Frequency in MHz



16 Garage Door Openers

17 Automobile Remote Keyless Entry (RKE)

18 Aircraft Landing Glide Slope (GS)

19 UHF Television (TV)

20 Cellular Phone Bands