Teoria dei Segnali

Esercitazione 5

Segnali periodici e sistemi lineari

Esercizio 1

È dato il segnale

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(t - 2iT),$$

dove

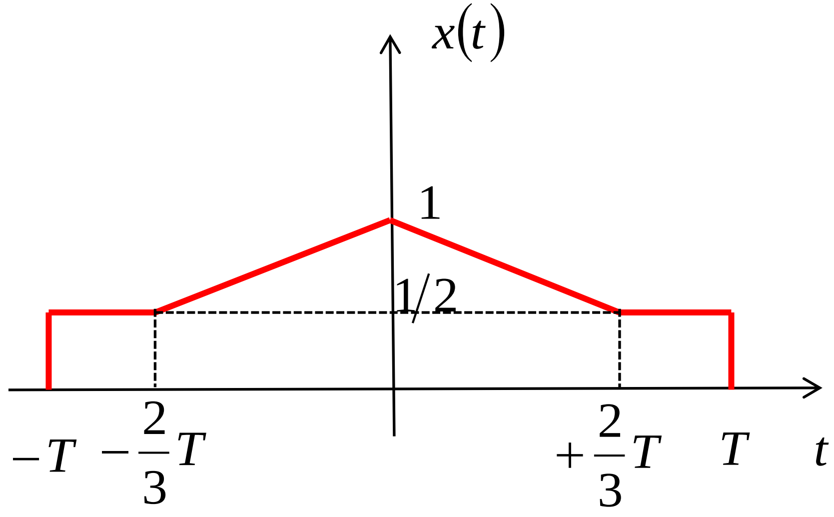
$$x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{3|t|}{4T} & \text{per} \quad |t| < 2T/3 \\ 1/2 & \text{per} \quad 2T/3 < |t| < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$y(t)$ viene filtrato con un passabasso ideale la cui funzione di trasferimento vale 1 per $|f| < B = \frac{3}{4T}$ e 0 altrove. Calcolare l'espressione del segnale $z(t)$ in uscita dal filtro.

Soluzione Esercizio 1

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(t - 2iT)$$

$$x(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3|t|}{4T} & \text{per } |t| < 2T/3 \\ \dfrac{1}{2} & \text{per } 2T/3 < |t| < T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$$x(t) = \frac{1}{2} p_{2T}(t) + \frac{1}{2} \mathrm{tri}\left(\frac{t}{2T/3}\right)$$

$$Y(f) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{2T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)$$

Soluzione Esercizio 1

$$x(t) = \frac{1}{2} p_{2T}(t) + \frac{1}{2} \mathrm{tri}\left(\frac{t}{2T/3} \right)$$

- Usando le tavole, si ottiene la trasformata di Fourier di x(t):

$$X(f) = \frac{1}{2} 2T \,\mathrm{sinc}(f\,2T) + \frac{1}{2} \frac{2T}{3} \mathrm{sinc}^2\left(f \frac{2T}{3} \right) =$$

$$= T \,\mathrm{sinc}(f\,2T) + \frac{T}{3} \mathrm{sinc}^2\left(f \frac{2T}{3} \right)$$

Soluzione Esercizio 1

$$Y(f) = \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{2T}\right)\delta\left(f - \frac{n}{2T}\right) =$$

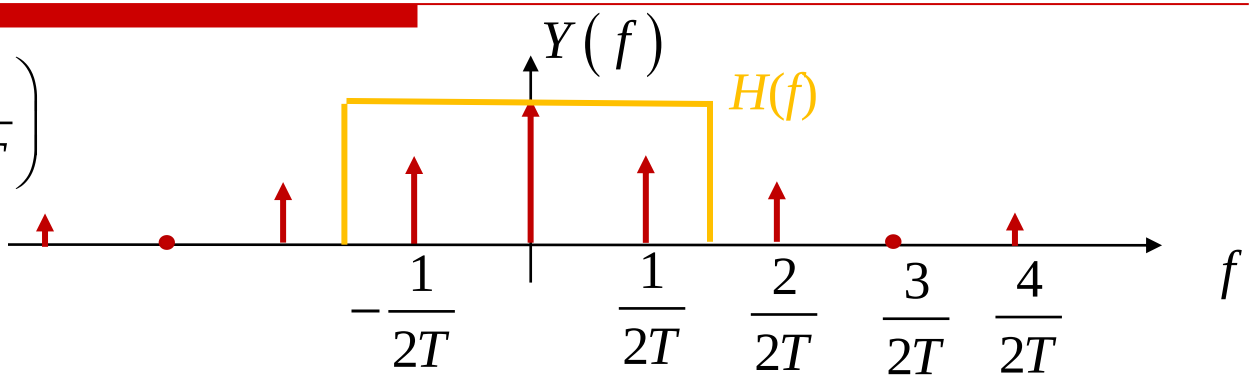
$$= \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2T}2T\right) + \frac{T}{3}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{2T}\frac{2T}{3}\right)\right]\delta\left(f - \frac{n}{2T}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}(n)\delta\left(f - \frac{n}{2T}\right) + \frac{1}{6}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{3}\right)\delta\left(f - \frac{n}{2T}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{6}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{3}\right)\delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)$$

Soluzione Esercizio 1

$$Y(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{6}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{n}{3}\right)\delta\left(f-\frac{n}{2T}\right)$$



- Solo le tre delta centrali passano attraverso il filtro:

$$Z(f)=\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{6}\mathrm{sinc}^2\left(-\frac{1}{3}\right)\delta\left(f+\frac{1}{2T}\right)+\frac{1}{6}\mathrm{sinc}^2(0)\delta(f)+\frac{1}{6}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{1}{3}\right)\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\delta(f)+\frac{1}{6}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2}\left(\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2T}\right)\right)=\frac{2}{3}\delta(f)+\frac{9}{8\pi^2}\left(\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{2T}\right)\right)$$

$$z(t)=\frac{2}{3}+\frac{9}{4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi t}{2T}\right)=\frac{2}{3}+\frac{9}{4\pi^2}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)$$

Esercizio 2

Il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{|t-kT|}{T}\right\}$$

viene filtrato con un passabasso ideale la cui funzione di trasferimento vale 1 per $|f| < B = \frac{3}{2T}$ e 0 altrove. Quanto vale il segnale $y(t)$ in uscita dal filtro?

Soluzione Esercizio 2

- Calcoliamo la trasformata di Fourier di x(t):

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{|t-kT|}{T}\right\}=\exp\left\{-\frac{|t|}{T}\right\}*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)$$

$$x_T(t)=\exp\left\{-\frac{|t|}{T}\right\} \quad \Rightarrow \quad X_T(f)=\frac{2/T}{1/T^2+4\pi^2 f^2}$$

$$X(f)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X_T\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2/T}{1/T^2+4\pi^2\left(k/T\right)^2}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+4\pi^2k^2}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Soluzione Esercizio 2

$$X(f)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{2}{1+4\pi^2k^2}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

$$H(f)=p_{2B}(f)\quad \text{con}\quad B=\frac{3}{2T}$$

$$Y(f)=X(f)H(f)=2\delta(f)+\frac{2}{1+4\pi^2}\left[\delta\left(f-\frac{1}{T}\right)+\delta\left(f+\frac{1}{T}\right)\right]$$

$$y(t)=2+\frac{4}{1+4\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Esercizio 3

È dato il segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\pi}{2}(t - nT)^2\right\}.$$

Tale segnale passa attraverso un sistema LTI con risposta all'impulso $h(t)$ rettangolare di supporto $[-T/2, T/2]$ e ampiezza pari a 1. Sia $y(t)$ il segnale in uscita dal sistema. Calcolare la potenza media di $y(t)$.

Soluzione Esercizio 3

- Calcoliamo la trasformata di Fourier di x(t):

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{\pi}{2}(t-nT)^2\right\}=\exp\left\{-\frac{\pi}{2}t^2\right\}*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

$$x_T(t)=\exp\left\{-\frac{\pi}{2}t^2\right\} \Longrightarrow X_T(f)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\frac{f^2}{\pi}}=\sqrt{2}e^{-2\pi f^2}$$

$$X(f)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_T\left(\frac{n}{T}\right)\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)=\frac{\sqrt{2}}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi\frac{n^2}{T^2}}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

$$h(t)=p_T(t) \Longrightarrow H(f)=T\,\mathrm{sinc}(fT)$$

$$Y(f)=X(f)H(f)=\frac{\sqrt{2}}{T}T\,\mathrm{sinc}(fT)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi\frac{n^2}{T^2}}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

Soluzione Esercizio 3

$$Y(f) = X(f)H(f) = \frac{\sqrt{2}}{T} T \,\mathrm{sinc}(fT) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi \frac{n^2}{T^2}} \delta\left(f - \frac{n}{T} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi \frac{n^2}{T^2}} \,\mathrm{sinc}(n) \delta\left(f - \frac{n}{T} \right) = \sqrt{2}\delta(f)$$

$$P(y) = 2$$

Esercizio 4

Il segnale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi(2t/T - 2k)$$

dove $\Pi(t) = 1$ se $t \in [-1/2, 1/2]$ e zero altrove, viene posto all'ingresso di un filtro passabanda ideale con frequenza centrale $f_c = L/T$, L intero positivo, e banda $1/(2T)$. Si scriva l'espressione del segnale d'uscita $y(t)$.

Soluzione Esercizio 4

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Pi\left(\frac{2t}{T}-2k\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Pi\left(\frac{2\left(t-kT\right)}{T}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}s\left(t-kT\right)\qquad s\left(t\right)=\Pi\left(\frac{2t}{T}\right)=p_{T/2}\left(t\right)$$

- Il segnale x(t) ha periodo T e trasformata di Fourier:

$$X\left(f\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mu_k\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)\qquad \mu_k=\frac{1}{T}S\left(\frac{k}{T}\right)\qquad S\left(f\right)=\frac{T}{2}\operatorname{sinc}\left(f\frac{T}{2}\right)$$

$$\mu_k=\frac{1}{T}\frac{T}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{T}\frac{T}{2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

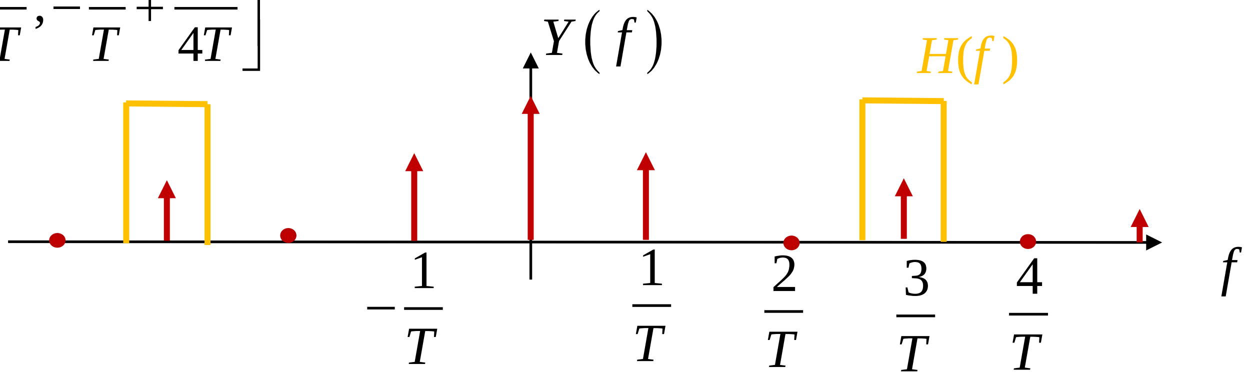
Se k=0: $\mu_0=\dfrac{1}{2}$

Se k≠0: $\mu_k=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{\pi k}=\begin{cases}\dfrac{\left(-1\right)^m}{\left(2m+1\right)\pi} & k=2m+1\\ 0 & k=2m\end{cases}$

Soluzione Esercizio 4

- Il filtro passabasso ha funzione di trasferimento:

$$H(f)=\begin{cases}1 & f\in\left[\frac{L}{T}-\frac{1}{4T},\frac{L}{T}+\frac{1}{4T}\right] \text{o } f\in\left[-\frac{L}{T}-\frac{1}{4T},-\frac{L}{T}+\frac{1}{4T}\right]\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$



- Quindi solo la componente L-esima di x(t) viene lasciata passare dal filtro:

$$Y(f)=H(f)X(f)=\mu_L\left(\delta\left(f-\frac{L}{T}\right)+\delta\left(f+\frac{L}{T}\right)\right)$$

- Antitrasformando:

$$y(t)=2\mu_L\cos\left(2\pi\frac{L}{T}t\right)=\begin{cases}\frac{2(-1)^m}{(2m+1)\pi}\cos\left(2\pi\frac{L}{T}t\right) & L=2m+1\\ 0 & L=2m\end{cases}$$

Esercizio 5

Il segnale $x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}(-1)^i p_T(t - iT)$, dove $p_T(t)$ vale 1 per $|t| < T/2$ e 0 altrove, subisce una trasformazione LTI caratterizzata da $H(f) = 1$ per $|f| < B$ e 0 altrove. Nel caso $BT = 1/3$, quanto vale il segnale $y(t)$ ottenuto?

Soluzione Esercizio 5

- Calcoliamo la trasformata di Fourier di x(t):

$$x(t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(-1)^i p_T(t-iT)$$

$$x(t)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}q(t-2iT)=q(t)*\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2iT)$$

con $q(t)=p_T(t)-p_T(t-T)$

$$Q(f)=T\,\text{sinc}(fT)-T\,\text{sinc}(fT)e^{-j2\pi fT}=T\,\text{sinc}(fT)\left(1-e^{-j2\pi fT}\right)$$

$$X(f)=\frac{1}{2T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}Q\left(\frac{i}{2T}\right)\delta\left(f-\frac{i}{2T}\right)=\frac{1}{2T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}T\,\text{sinc}\left(\frac{i}{2}\right)\left(1-e^{-j\pi i}\right)\delta\left(f-\frac{i}{2T}\right)=$$

$$=\frac{1}{2T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}T\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)}{\frac{\pi}{2}i}\left(1-e^{-j\pi i}\right)\delta\left(f-\frac{i}{2T}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)}{i}\left(1-e^{-j\pi i}\right)\delta\left(f-\frac{i}{2T}\right)$$

Soluzione Esercizio 5

$$\left(1-e^{-j\pi n}\right)=\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0 & n \text{ pari}\\ 1 & n \text{ dispari}\end{cases}$$

- Solo i termini con indice dispari sono diversi da zero:

$$X(f)=\frac{1}{\pi}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}i\right)}{i}\left(1-(-1)^i\right)\delta\left(f-\frac{i}{2T}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(2l+1)\right)}{2l+1}2\delta\left(f-\frac{2l+1}{2T}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^l}{2l+1}2\delta\left(f-\frac{2l+1}{2T}\right)$$

$$H(f)=p_{2B}(f)\quad \text{con}\quad B=\frac{1}{3T}$$

$$Y(f)=X(f)H(f)=0 \quad \Rightarrow \quad y(t)=0$$

Esercizio 6

Dato il segnale $x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i r(t - iT)$, dove $r(t) = e^{-at}u(t)$, calcolare lo spettro di ampiezza. E' possibile ottenere da $x(t)$ un segnale sinusoidale di frequenza f_0 filtrando opportunamente? Motivare la risposta. Escludendo il caso $f_0 = 0$, qual è il minimo valore di f_0 ottenibile?

Soluzione Esercizio 6

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i r(t - iT) \qquad r(t) = e^{-at} u(t)$$

- Possiamo scrivere x(t) come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{2n} r(t - 2nT) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{2n+1} r(t - (2n+1)T) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - 2nT) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - T - 2nT) =$$

$$= y(t) - y(t - T) \quad \text{con} \quad y(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r(t - 2nT)$$

- La trasformata di Fourier di x(t) vale:

$$X(f) = Y(f) - Y(f) e^{-j2\pi fT} = Y(f)\left(1 - e^{-j2\pi fT}\right)$$

Soluzione Esercizio 6

$$Y(f)=\frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}R\left(\frac{n}{2T}\right)\delta\left(f-\frac{n}{2T}\right)$$

$$r(t)=e^{-at}u(t) \Rightarrow R(f)=\frac{1}{a+j2\pi f} \qquad R\left(\frac{n}{2T}\right)=\frac{1}{a+j\pi\frac{n}{T}}$$

$$Y(f)=\frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a+j\pi\frac{n}{T}}\delta\left(f-\frac{n}{2T}\right)$$

$$X(f)=\frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a+j\pi\frac{n}{T}}\delta\left(f-\frac{n}{2T}\right)\left(1-e^{-j2\pi fT}\right)=$$

$$=\frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a+j\pi\frac{n}{T}}\delta\left(f-\frac{n}{2T}\right)\left(1-e^{-j\pi n}\right)$$

Soluzione Esercizio 6

$$\left(1-e^{-j\pi n}\right)=\begin{cases}0 & n \text{ pari}\\ 2 & n \text{ dispari}\end{cases}$$

$$X(f)=\frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a+j\pi\frac{2i+1}{T}}\delta\left(f-\frac{2i+1}{2T}\right)$$

- Filtrando in modo da conservare solo le delta in $\pm\frac{1}{2T}$

  si ottiene un segnale sinusoidale a frequenza $f_0=\frac{1}{2T}$

Soluzione Esercizio 6

- Segnale all’uscita del filtro:

$$Y(f)=\frac{1}{T}\frac{1}{a+j\frac{\pi}{T}}\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+\frac{1}{T}\frac{1}{a-j\frac{\pi}{T}}\delta\left(f+\frac{1}{2T}\right)=$$

$$=c\,\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+c^{*}\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)$$

$$c=\frac{1}{T}\frac{1}{a+j\frac{\pi}{T}}$$

- Esprimendo il coefficiente c in coordinate cartesiane: $c=c_R+jc_I$

$$Y(f)=\left[c_R+jc_I\right]\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+\left[c_R-jc_I\right]\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)=$$

$$=c_R\left[\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)+\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)\right]+j\,c_I\left[\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)-\delta\left(f-\frac{1}{2T}\right)\right]$$

- Antitrasformando:

$$y(t)=2c_R\cos\left(2\pi f_0t\right)-2c_I\sin\left(2\pi f_0t\right)$$

Soluzione Esercizio 6

- In alternativa, si può esprimere il coefficiente c in coordinate polari:

$$c = Ae^{j\varphi}$$

$$Y(f) = Ae^{j\varphi}\,\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right) + Ae^{-j\varphi}\delta\left(f - \frac{1}{2T}\right)$$

- Antitrasformando:

$$y(t) = Ae^{j\varphi}e^{j2\pi f_0 t} + Ae^{-j\varphi}e^{-j2\pi f_0 t} = 2A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$