Elaborazione dei Segnali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Lezione 10

Proprietà della trasformata zeta

Inversione della trasformata zeta

A.A. 2023-2024

Proprietà della trasfomata zeta

Riassunto delle proprietà più comuni presentate nelle successive slides

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Sequenza $x(n),\ y(n)$	$X(z),\ Y(z)$	ROC $R_x,\ R_y$
$x(n-N)$	$z^{-N}X(z)$	se $N>0 \rightarrow R_x \backslash \{z=0\}$ se $N<0 \rightarrow R_x \backslash \{z=\infty\}$
$\alpha_1 x(n)+\alpha_2 y(n),\ \alpha_1,\alpha_2$ costanti	$\alpha_1 X(z)+\alpha_2 Y(z)$	contiene $R_x \cap R_y$
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_x}$
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R_x
$x^*(-n)$	$X^*(\frac{1}{z^*})$	$\frac{1}{R_x}$
$\Re(x(n))$	$\frac{1}{2}\left[X(z)+X^*(z^*)\right]$	contiene R_x
$\Im(x(n))$	$\frac{1}{2j}\left[X(z)-X^*(z^*)\right]$	contiene R_x
$x(-n)u(-n-1)$	$X(z^{-1})-x(0),\ x(n)$ causali	$-$
$\alpha^n x(n)$	$X(z/\alpha)$	$\|\alpha\| \cdot R_x$
$nx(n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	R_x meno $z=\infty$ o $z=0$
$nx(-n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z^{-1})$	contiene $\frac{1}{R_x}$
$n\alpha^n x(n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z/\alpha)$	$\|\alpha\| \cdot R_x$ meno $z=\infty$ o $z=0$
$\cos(2\pi fn)x(n)$	$\frac{1}{2}\left[X(ze^{j2\pi f})+X(ze^{-j2\pi f})\right]$	$-$
$\sin(2\pi fn)x(n)$	$\frac{j}{2}\left[X(ze^{j2\pi f})-X(ze^{-j2\pi f})\right]$	$-$
$x(n)\star y(n)$	$X(z)Y(z)$	contiene $R_x \cap R_y$

Linearità

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Data la sequenza:

$$y(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$$

- La sua trasformata zeta è pari a:

$$Y(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$$

- La ROC di $Y(z)$ contiene l'intersezione delle ROC di $X_1(z)$ e $X_2(z)$.

Traslazione nel tempo

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Se $x(n)$ è una sequenza temporale discreta e $X(z)$ è la sua trasformata z con ROC $R_x=\{z:R_1<|z|<R_2\}$, la trasformata della sequenza:

$$y(n) = x(n-k)$$

  è data da:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-k) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-m-k} =$$

$$= z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-m} = z^{-k} X(z)$$

- La ROC è la stessa di $X(z)$, da cui bisogna togliere il punto $z=0$ se $k>0$ o $z=\infty$ se $k<0$.

Ribaltamento nel tempo

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Se $x(n)$ è una sequenza temporale discreta e X(z) è la sua trasformata z con ROC $R_x=\{z: R_1<|z|<R_2\}$, la trasformata della sequenza:

$$y(n) = x(-n)$$

è data da:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(-n) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{m} = X\left(z^{-1}\right)$$

- La ROC di $Y(z)$ è $R_y=\{z: 1/R_2<|z|<1/R_1\}$

Scalamento nel dominio trasformato

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- $x(n)$ è una sequenza temporale discreta e $X(z)$ è la sua trasformata z con ROC $R_x=\{z: R_1<|z|<R_2\}$
- Supponiamo di scalare tutti i coefficienti di $X(z)$ di uno stesso fattore α:

$$Y(z)=X\left(\frac{z}{\alpha}\right)=\left.\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}\right|_{\frac{z}{\alpha}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\alpha^{n}z^{-n}$$

- Dalla relazione precedente si ricava che $Y(z)$ è la trasformata zeta della sequenza:

$$y(n)=\alpha^{n}x(n)$$

- La ROC di $Y(z)$ è: $R_y=\{z: |\alpha|R_1<|z|<|\alpha|R_2\}$

Derivata nel dominio trasformato

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La trasformata zeta della sequenza:

$$y(n) = n\,x(n)$$

vale

$$Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

- Verifica:

$$-z\frac{dX(z)}{dz} = -z\frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\frac{d}{dz}z^{-n} =$$

$$= -z\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(-n\,z^{-n-1}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = Z[nx(n)]$$

- La ROC di Y(z) è la stessa di *X(z)*: $R_y = R_x$

Convoluzione lineare discreta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Siano *x(n)* e *y(n)* due sequenze aventi trasformata zeta:
  - $X(n)$, con ROC $R_x=\{z:R_1<|z|<R_2\}$
  - $Y(n)$, con ROC $R_y=\{z:R_3<|z|<R_4\}$

- La trasformata zeta della sequenza: $w(n)=x(n)*y(n)$

  è pari a: $W(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x(n)*y(n)\right]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)z^{-n}$

Convoluzione lineare discreta

$$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[x(n) * y(n) \right] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n-k) z^{-n} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-k) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) z^{-m-k} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} y(m) z^{-m} = X(z) \cdot Y(z)$$

- La ROC di *W(z)* contiene l'intersezione delle ROC di *X(z)* e *Y(z)*.

Teorema del valore iniziale

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Se *x(n)* è una sequenza causale:

$$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty}\left[x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \ldots\right]$$

- Esempi:
  - $$x(n) = n\alpha^n u(n)$$
    $$X(z) = \frac{\alpha\, z}{(z-\alpha)^2} \quad |z| > |\alpha|$$
    $\Rightarrow$ $$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = 0$$
  - $$x(n) = \alpha^n u(n)$$
    $$X(z) = \frac{z}{z-\alpha} \quad |z| > |\alpha|$$
    $\Rightarrow$ $$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) = 1$$

Inversione della trasformata zeta

Formula di inversione

- Per determinare l'espressione dell'anti-trasformata zeta si usa il teorema di Cauchy:

$$\frac{1}{j2\pi}\oint_{\gamma} z^{n-1}dz = \delta(n)$$

  - dove γ è un contorno di integrazione in senso anti-orario comprendente l'origine.

- Moltiplicando ambo i membri di: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$ per $z^{n-1}/2\pi j$

  e integrando lungo un opportuno percorso γ, si ottiene:

Formula di inversione

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\frac{1}{j2\pi}\oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{j2\pi}\oint_{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} z^{n-1} dz =$$

$$= \frac{1}{j2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \oint_{\gamma} z^{n-k-1} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) = x(n)$$

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{j2\pi}\oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz = Z^{-1}\left[X(z)\right]}$$

- La curva di integrazione γ appartenente alla regione di convergenza di $X(z)$.
- La curva γ è percorsa in senso antiorario e circoscrive l'origine $z=0$.

Teorema dei residui

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Il teorema dei residui di Cauchy stabilisce che l'integrale di linea si può esprimere come:

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^{N_p} R_i \left[X(z) z^{n-1} \right]_{poli \in \gamma}$$

- $R_i\left[X(z)z^{n-1}\right]$ è il residuo della funzione $X(z)z^{n-1}$ nel polo *i*-esimo all'interno della regione individuata dalla curva γ.

- L'integrale di linea assume un'espressione semplice nel caso in cui le trasformate zeta siano di tipo razionale.

Tecniche di inversione

POLITECNICO
DI TORINO
Dipartimento
di Elettronica
e Telecomunicazioni

- Tecniche di inversione per trasformate zeta di tipo razionale:
  - Metodo diretto (per ispezione)
  - Espansione in fratti semplici

Metodo diretto

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Il passaggio da *X(z)* a *x(n)* è immediato quando si conosce l’espressione di *X(z)* in forma di polinomio, oppure quando *X(z)* si riesce ad esprimere come combinazione lineare di sequenze elementari di cui si conosce l’anti-trasformata.
  - In sostanza: il metodo diretto si basa sulle tavole dell trasformate *Z* fondamentali e sulle proprietà delle trasformate *Z*

Esempio 1

- Calcolare l'antitrasformata della funzione:

$$X(z) = z^4 + 3z^{-1} + 4z^{-10}$$

- Usando la proprietà di linearità:

$$x(n) = Z^{-1}\left[z^4\right] + 3Z^{-1}\left[z^{-1}\right] + 4Z^{-1}\left[z^{-10}\right]$$

- Usando la proprietà del ritardo: $Z[\delta(n-N)] = z^{-N}$

$$x(n) = \delta(n+4) + 3\delta(n-1) + 4\delta(n-10)$$

Esempio 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Calcolare l'anti-trasformata della funzione:

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-\alpha)^2} \qquad |z| > |\alpha|$$

- *X(z)* si può scomporre come:

$$X(z) = \frac{\alpha\, z}{(z-\alpha)^2} + \frac{z}{z-\alpha}$$

- L'anti-trasformata vale quindi:

$$x(n) = \alpha^n u(n) + n\alpha^n u(n) = (n+1)\alpha^n u(n)$$

Espansione in fratti semplici

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Consideriamo una funzione *X(z)* razionale del tipo:

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_{p_n}z^{-p_n}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_{p_d}z^{-p_d}}$$

- <u>Ipotesi</u>:
  - Il grado del denominatore è maggiore del grado del numeratore
  - Le radici del denominatore sono semplici
  - La ROC di *X(z)* è del tipo $|z|>\rho$

Espansione in fratti semplici

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Modifichiamo l'espressione di *X(z)* in modo che i polinomi al numeratore e denominatore abbiano termine noto unitario:

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_{p_n}z^{-p_n}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_{p_d}z^{-p_d}}=\frac{b_0}{a_0}\frac{1+\frac{b_1}{b_0}z^{-1}+\ldots+\frac{b_{p_n}}{b_0}z^{-p_n}}{1+\frac{a_1}{a_0}z^{-1}+\ldots+\frac{a_{p_d}}{a_0}z^{-p_d}}$$

- Espandiamo in fratti semplici la funzione *X(z)*, espressa come rapporto tra polinomi nella variabile z^{-1}:

$$X(z)=\sum_i R_i\frac{1}{1-d_i\cdot z^{-1}}$$

  - Dove gli R_i sono i residui della funzione *X(z)*: $R_i=X(z)\left(1-d_i\cdot z^{-1}\right)\Big|_{z=d_i}$

Espansione in fratti semplici

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$X(z) = \sum_i R_i \frac{1}{1 - d_i \cdot z^{-1}}$$

- La sequenza *x(n)* può essere ricavata facilmente usando il risultato:

$$Z\left[a^n u(n)\right] = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \quad |z| > |a| \quad \Rightarrow \quad x(n) = \sum_i R_i (d_i)^n u(n)$$

$$\boxed{x(n) = u(n) \sum_i R_i (d_i)^n \qquad \text{con} \qquad R_i = X(z)\left(1 - d_i \cdot z^{-1}\right)\Big|_{z=d_i}}$$

Osservazione 1

- Se la La ROC di $X(z)$ è del tipo $|z|<\rho$, la sequenza $x(n)$ è anticausale:

$$Z\left[-a^n u(-n-1)\right]=\frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z|<|a|$$

$$\Downarrow$$

$$x(n)=-\sum_i R_i (d_i)^n u(-n-1)$$

$$\boxed{x(n)=-u(-n-1)\sum_i R_i (d_i)^n \qquad \text{con} \qquad R_i = X(z)\left(1-d_i z^{-1}\right)\Big|_{z=d_i}}$$

Osservazione 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Se il grado del denominatore è minore o uguale al grado del numeratore, ci si può sempre ricondurre al caso precedente, esprimendo *X(z)* come:

$$X(z) = P(z) + \frac{N'(z)}{D(z)}$$

  - *P(z)* è un polinomio della forma: $P(z) = \sum_n c_n z^{-n}$
  - *N'(z)/D(z)* è una funzione razionale fratta con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore

Esempio

- Calcolare la corrispondente sequenza causale per la seguente trasformata zeta:

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)}$$

- Espansione in fratti semplici di X(z):

$$X(z) = \sum_i R_i \frac{1}{1 - d_i z^{-1}} \qquad\qquad R_i = X(z)\left(1 - d_i z^{-1}\right)\Big|_{z=d_i}$$

- I poli di X(z) sono: $d_1=1/2$ e $d_2=1/3$

Esempio

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$R_1 = \left.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}\right|_{z=\frac{1}{2}} = 3 \qquad R_2 = \left.\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\right|_{z=\frac{1}{3}} = -2$$

$$X(z) = \sum_i R_i \frac{1}{1-d_i z^{-1}} = 3\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - 2\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

- Sequenza causale: $x(n) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) =$

$$= \left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$$