Politecnico di Torino

Department of Electronics and Telecommunications

Teoria dei Segnali

Sistemi Lineari

Anno accademico 2024-2025

Ultimo aggiornamento: Settembre 2024

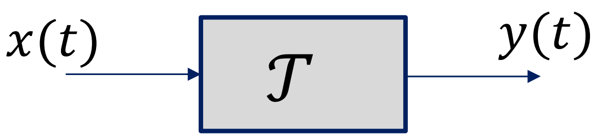
Legami con le lezioni precedenti

Proprietà della trasformata di Fourier	
Linearità	$\mathcal{F}\{a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\}=a_1\mathcal{F}\{x_1(t)\}+a_2\mathcal{F}\{x_2(t)\}$
Anticipo o ritardo	$\mathcal{F}\{x(t-\theta)\}=\mathcal{F}\{x(t)\}\ e^{-j2}$
Modulazione e traslazione	$\mathcal{F}\left\{x(t)e^{-j2\pi\ _0 t}\right\}=X(f-f_0)$
Scalamento	$\mathcal{F}\{x(Kt)\}=\frac{1}{\lvert K\rvert}X\left(\frac{f}{K}\right)$
Relazioni di parità per $x(t)$ reale	$\begin{cases}\mathcal{R}\{X(f)\}\text{ e }\lvert X(f)\rvert\ \text{ sono pari}\\ \mathfrak{I}\{X(f)\}\text{ e }\arg\{X(f)\}\ \text{ sono dispari}\end{cases}$
Convoluzione e prodotto	$x(t)*y(t)\Leftrightarrow X(f)\cdot Y(f)$
Dualità	$\mathcal{F}\{X(f)\}=x(-t)$

Fondamentale nell'ambito dei sistemi lineari

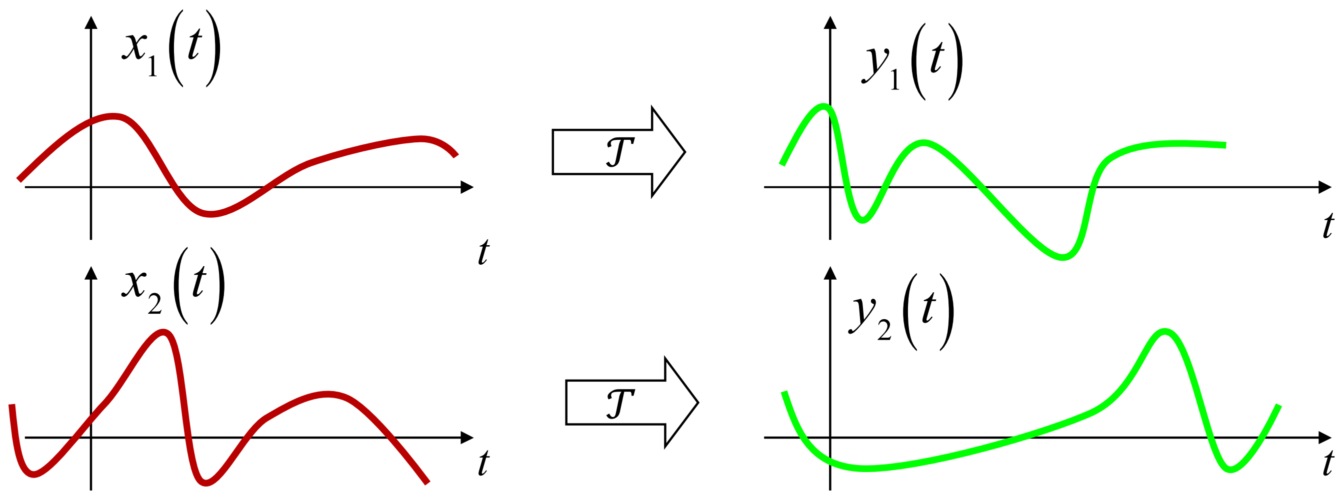
Definizione di «Sistemi» nell'ambito della Teoria dei Segnali

- Un <u>sistema</u> in generale è un elemento che trasforma un segnale in un altro segnale



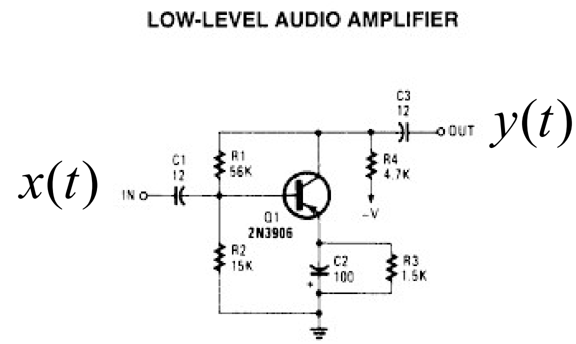
$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\}$$

La lettera $\mathcal{T}$ sta ad indicare una generica "trasformazione" del segnale di ingresso in un altro segnale in uscita

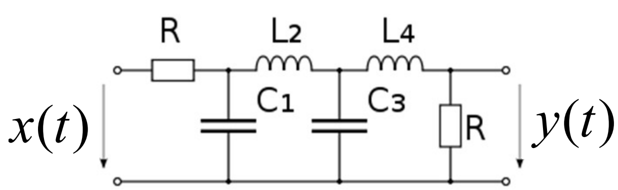


Esempi (pratici) di sistemi

- Amplificatori elettronici



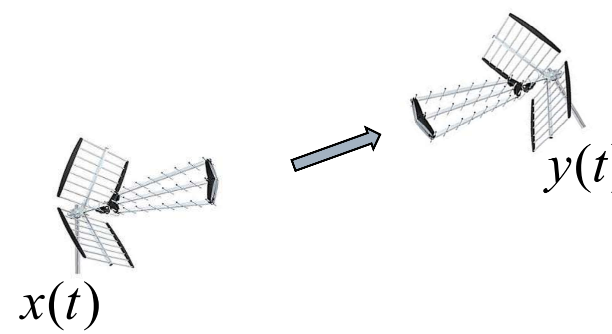
- Filtri analogici



Ma anche:

- *Sistemi di registrazione audio o video e successiva riproduzione*
- *Trasduttori fisici (sensori di temperatura, pressione)*
- *…*

- Sistemi di trasmissione su lunga distanza di segnali di vario genere



Classificazione sistemi

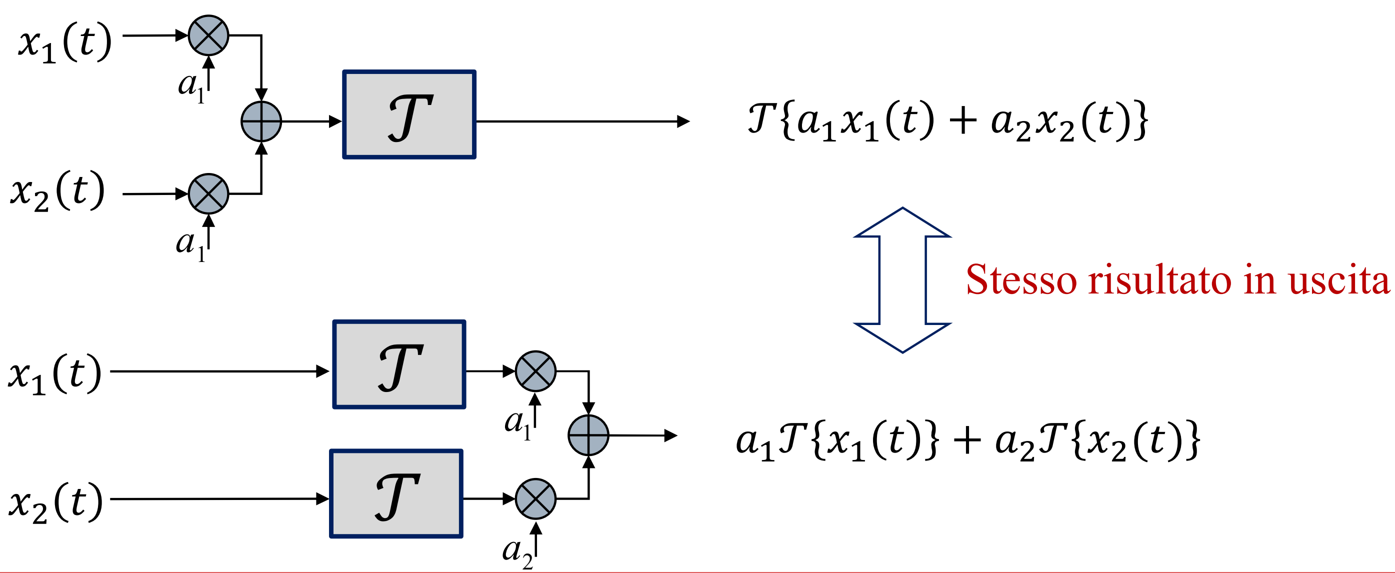
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Lineari - non lineari
- Senza memoria - con memoria
- Tempo invarianti - tempo varianti
  - Lineari Tempo Invarianti (LTI)
- Causali - non causali
- Reali - non reali
  - Fisicamente realizzabili
- Stabili - non stabili

Sistemi lineari

- Sistemi per cui vale il principio della sovrapposizione degli effetti:

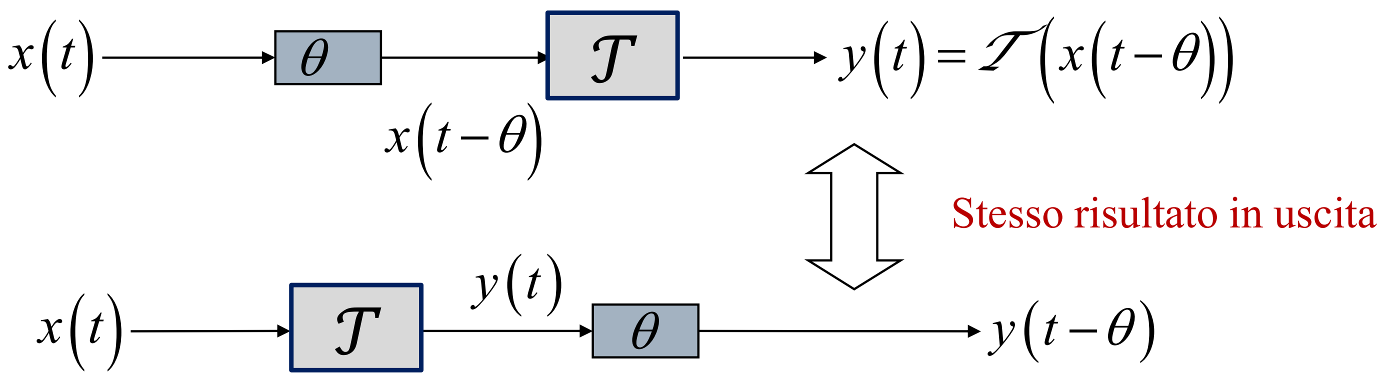
$$\mathcal{T}\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\} = a_1 \mathcal{T}\{x_1(t)\} + a_2 \mathcal{T}\{x_2(t)\}$$



Sistemi <u>tempo invarianti</u>

- Un ritardo sugli ingressi si traduce in un ritardo sulle uscite

$$\mathcal{T}\{x(t)\} = y(t) \Leftrightarrow \mathcal{T}\{x(t-\theta)\} = y(t-\theta)$$

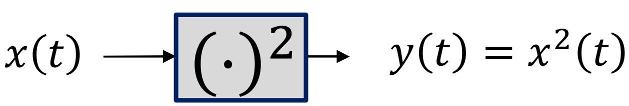


Importante:

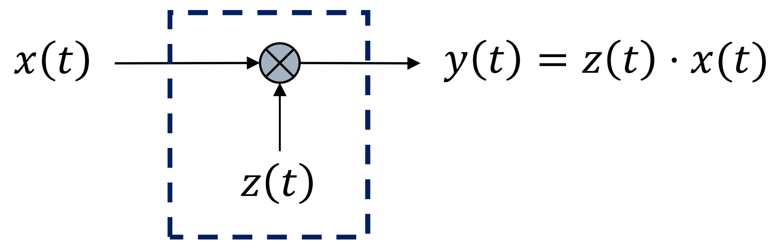
Nel resto del corso tratteremo soprattutto i sistemi «**Linear and Time Invariant**» (acronimo **LTI**) cioè i sistemi che soddisfano <u>entrambe</u> le proprietà

Sistemi senza memoria

- L’uscita dipende solo dall’ingresso in quell’istante
  - La relazione ingresso-uscita può eventualmente essere funzione del tempo
- Esempi:



- Senza memoria
- Non lineare
- Tempo Invariante



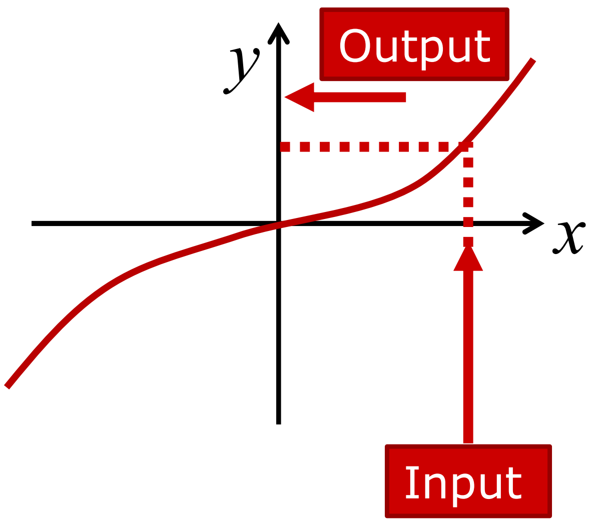
- Senza memoria
- Lineare
- Tempo Variante

Sistemi senza memoria e tempo invarianti

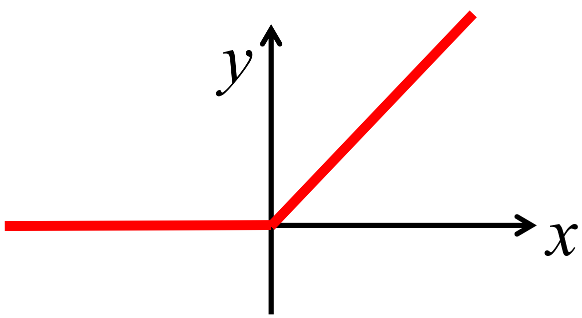
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- I Sistemi senza memoria e tempo invarianti vengono spesso caratterizzati dalla loro **relazione ingresso uscita**
  - (e sono tipicamente non lineari)

Esempio #1



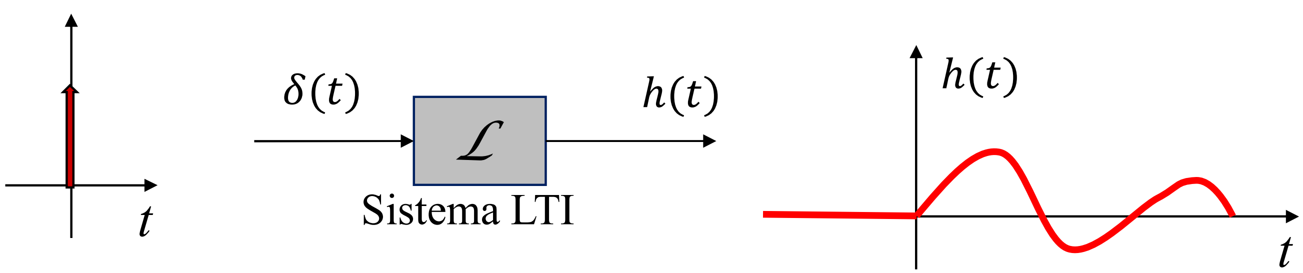
Esempio #2



Curiosità: questa relazione è chiamata ReLU (Rectified Linear Unit)
E' una delle «activation functions» più usate in ambito di reti neurali (AI)
https://en.wikipedia.org/wiki/Rectifier_(neural_networks)

- Nei sistemi LTI assume particolare rilevanza la cosiddetta «**risposta all'impulso**»
- **Si tratta dell'uscita del sistema (o «risposta») quando all'ingresso sia applicata una delta di Dirac**
- È indicata solitamente come $h(t)$, ed è definita come:

$$\boxed{h(t) \triangleq \mathcal{L}(\delta(t))}$$



Sistemi lineari tempo invarianti (LTI) e risposta all'impulso

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- La risposta all'impulso $h(t)$ ha un ruolo fondamentale nei sistemi lineari tempo invarianti
- Ricordando infatti la proprietà della delta per cui:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta(t-u)du$$

- Si ha che

linearità

$$y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\delta(t-u)du\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\mathcal{L}\{\delta(t-u)\}du$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\boxed{h(t-u)}du =$$

tempo invarianza

Risultato fondamentale per i sistemi LTI

$$= x(t) * h(t) = y(t)$$

Operatore di convoluzione

- Si dimostra quindi che, nota $h(t)$, è possibile calcolare l'uscita dato un qualunque ingresso $x(t)$ *(tramite l'integrale di convoluzione tra il segnale di ingresso e la risposta all'impulso)*

Sistemi lineari tempo invarianti (LTI) e risposta all'impulso

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- In sostanza, la risposta all'impulso $h(t)$ identifica completamente un determinato sistema lineare tempo invariante
- Infatti, nota $h(t)$, potremo sempre calcolare l'uscita $y(t)$ generata da un ingresso $x(t)$ tramite l'integrale di convoluzione tra $x(t)$ e $h(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int x(u) h(t-u) du$$

Terminologia: prodotto di convoluzione per calcolare l'uscita di un Sistema LTI

Prodotto di convoluzione

- Il prodotto di convoluzione riveste una elevata importanza nell'ambito della teoria dei segnali per sistemi LTI
- Lo scriveremo spesso come:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Si può facilmente dimostrare che vale anche:
  - (simmetria dell'operatore di convoluzione)

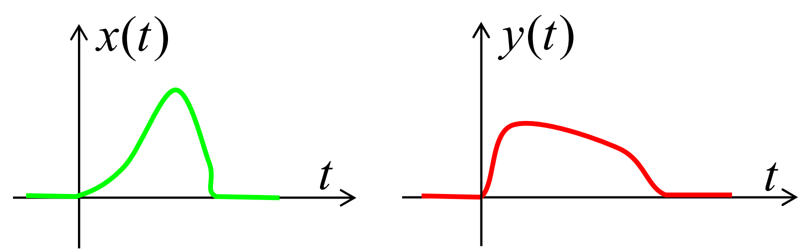
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

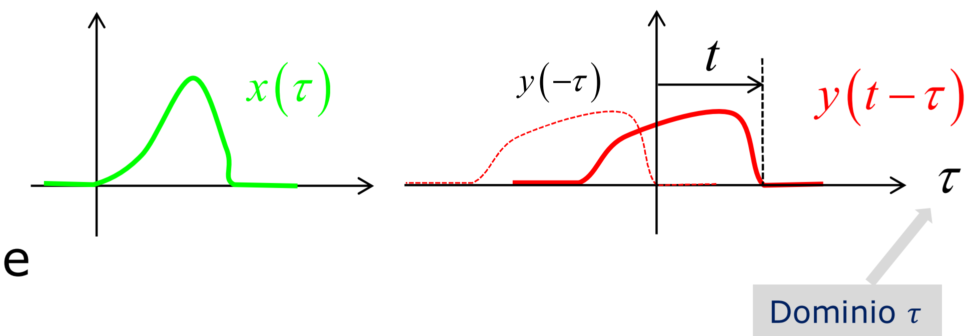
Convoluzione:
costruzione grafica

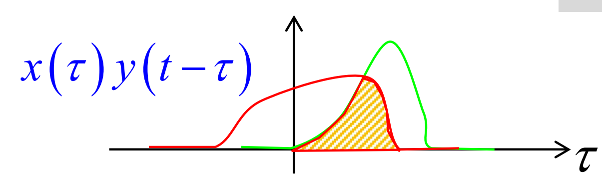
$$z(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Consideriamo due funzioni generiche di cui vogliamo calcolare la convoluzione.
- Dovendo fare un integrale rispetto a τ, interpretiamole graficamente come funzioni di τ
- Costruzione grafica:
  1) Ribalta uno dei due segnali rispetto all'asse τ e traslalo di "t"…
  2) Moltiplica le due funzioni tra di loro e integra rispetto a τ…
  3) …ripeti per ogni t, facendo graficamente traslare la funzione $y(\cdot)$ verso destra e poi integra





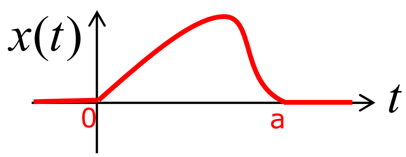


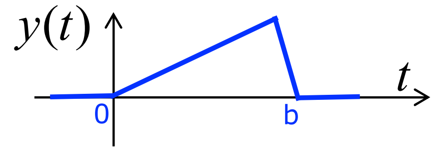
MOLTO IMPORTANTE!!!

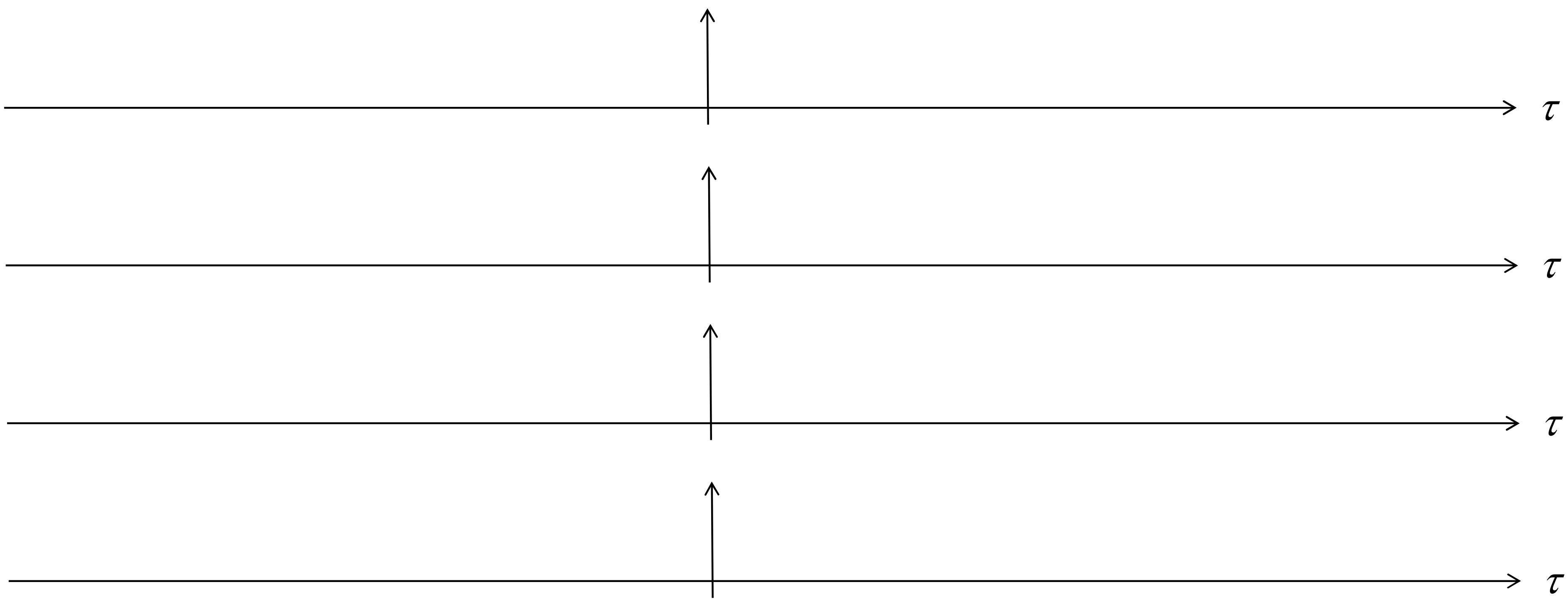
Esempio di
costruzione grafica

$$z(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications





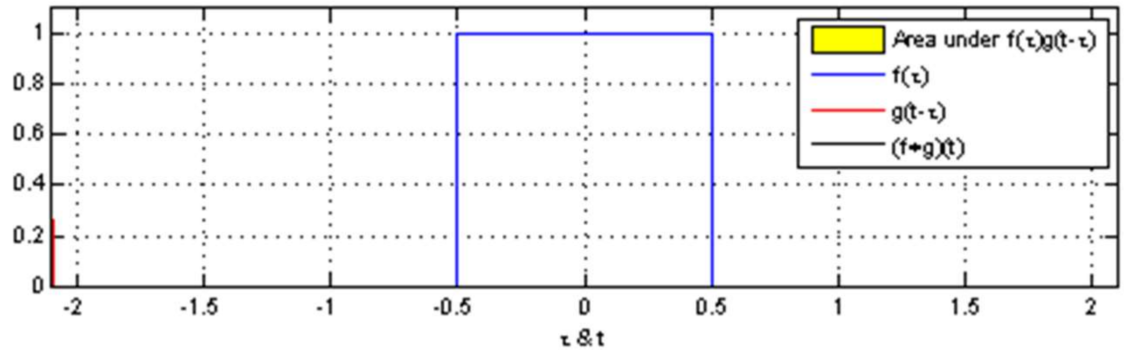


Convoluzione: costruzione grafica

Esempi di costruzione grafica tratti da
https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

$$z(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

Convoluzione tra due porte di eguale durata nel tempo

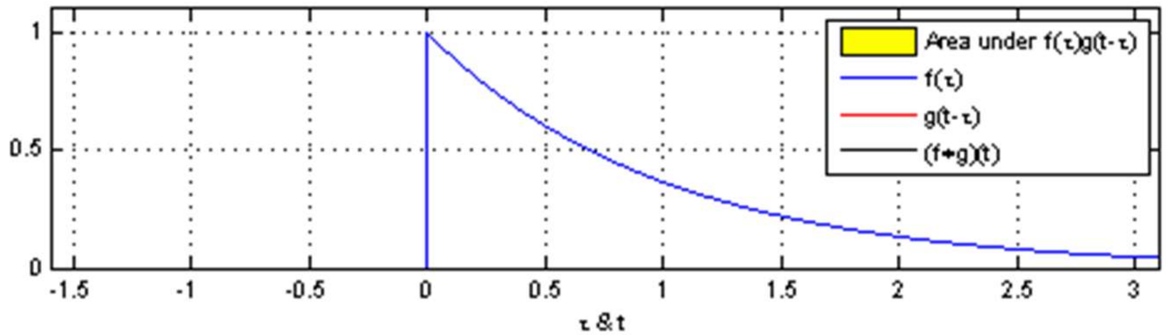


Convoluzione: costruzione grafica

Esempi di costruzione grafica tratti da
https://en.wikipedia.org/wiki/Convolution

$$z(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Convoluzione tra una porta ed una esponenziale decrescente unilatera



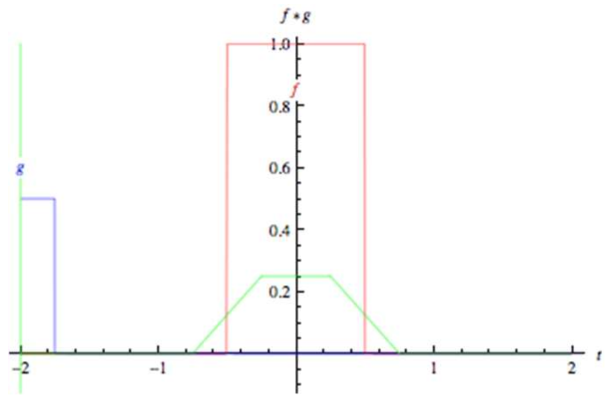
Convoluzione: costruzione grafica

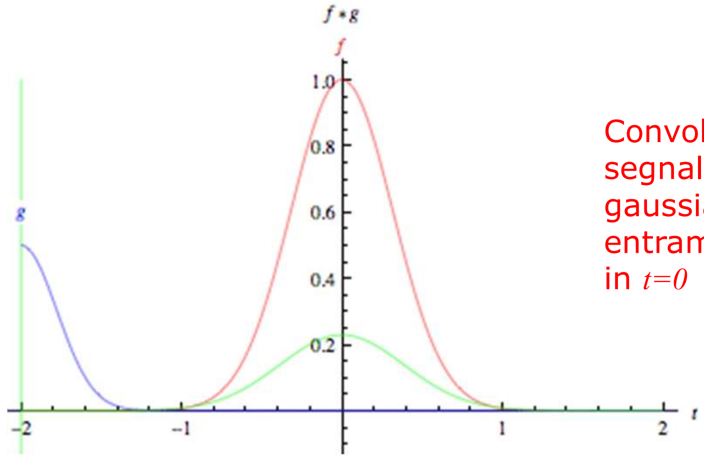
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Esempi di costruzione grafica tratti da
http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html

$$z(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

Convoluzione tra due porte centrate in *t=0* ma di durata diversa



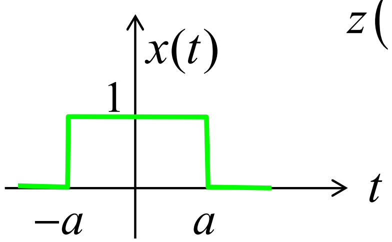


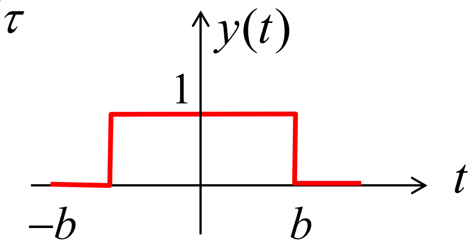
Convoluzione tra segnali di tipo gaussiano, entrambi centrati in $t=0$

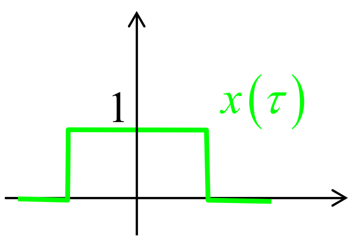
Esempio: Convoluzione di due porte di diverse durate

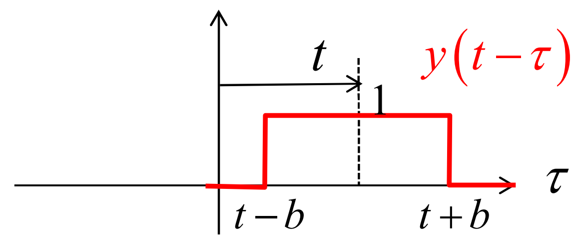
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

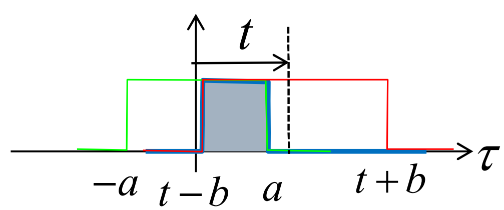
$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$









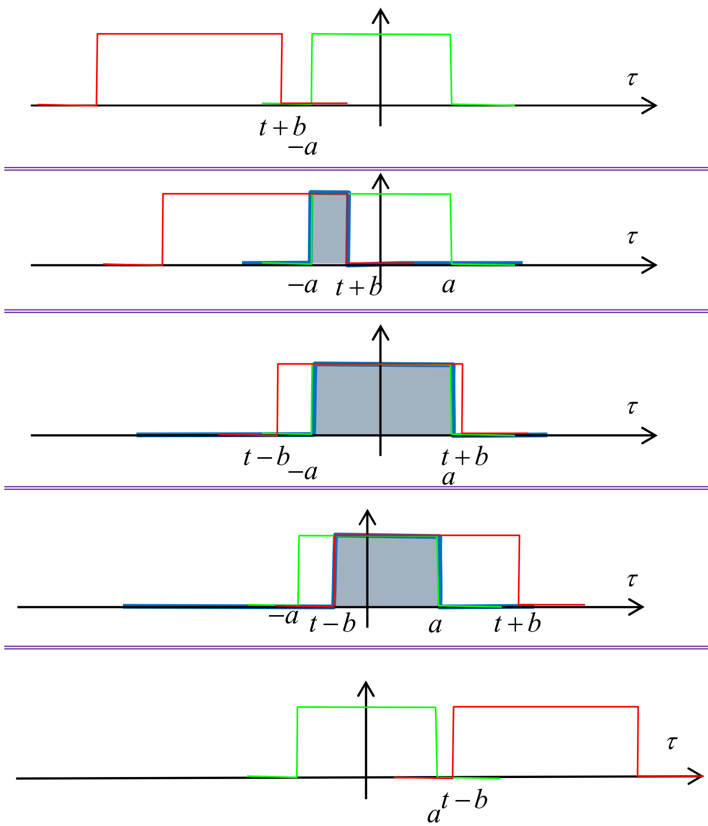


$$z(t) = x(t) * y(t)$$

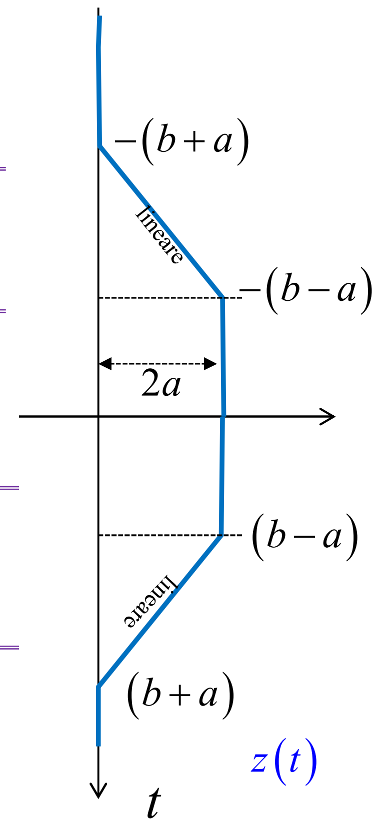
...ripeti per ogni *t*.

Convoluzione di due porte

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



$t+b<-a$	$z(t)=0$
$t+b>-a$ $t+b<a$	$z(t)=t+b+a$
$t+b>a$ $t-b<-a$	$z(t)=2a$
$t-b>-a$ $t-b<a$	$z(t)=a+b-t$
$t-b>a$	$z(t)=0$



Si noti come il supporto della funzione $z(t)$ sia pari alla somma dei supporti di $x(t)$ e $y(t)$

Supporti temporali e convoluzione

- Generalizzando il risultato dell'esempio precedente:
  - Dati due segnali entrambi a supporto temporale limitato T_1 e T_2
  - La loro convoluzione è anch'essa a supporto temporale limitato T_{out}
  - Il supporto temporale risultate in uscita è la somma dei supporti in ingresso $T_{out}=T_1 + T_2$

Proprietà prodotto di convoluzione

- Il prodotto di convoluzione tra due segnali condivide le stesse proprietà del prodotto, cioè:

$$x(t)*y(t)=y(t)*x(t)$$
$$X(f)Y(f)=Y(f)X(f)$$

Commutatività

$$x(t)*\left[y(t)*w(t)\right]=\left[x(t)*y(t)\right]*w(t)=x(t)*y(t)*w(t)$$
$$X(f)\left[Y(f)W(f)\right]=\left[X(f)Y(f)\right]W(f)=X(f)Y(f)W(f)$$

Associatività

$$x(t)*\left(y(t)+w(t)\right)=x(t)*y(t)+x(t)*w(t)$$
$$X(f)\left(Y(f)+W(f)\right)=X(f)Y(f)+X(f)W(f)$$

Distributività

- Attenzione invece che:

$$x(t)*\left(y(t)w(t)\right)\neq\left(x(t)*y(t)\right)w(t)$$

Sistemi LTI: definizione della funzione di trasferimento

- Si definisce **funzione di trasferimento di un sistema lineare tempo invariante** **<u>la trasformata di Fourier della risposta all'impulso</u>**

Definizione fondamentale per i sistemi LTI

$$H(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{L}\{\delta(t)\}\}$$

"funzione di trasferimento"

- La funzione di trasferimento di un sistema LTI è molto utilizzata nella pratica
- È spesso detta «<u>risposta in frequenza</u>» di un sistema lineare

Uso della funzione di trasferimento

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Calcoliamo la trasformata di Fourier dell'uscita $y(t)$ di un sistema LTI

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)e^{-j2\pi} \quad dt \text{ in cui } y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

sostituendo nell'integrale

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, e^{-j2\pi f t} dt d\tau$$

- facciamo un cambio di variabile $u = t - \tau$ da cui $du = dt$ e $t = u + \tau$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(u)\, e^{-j2\pi f(u+\tau)}\, du d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\, h(u)\, e^{-j2\pi f u}\, du d\tau$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)e^{-j2\pi} \quad du \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau = H(f)X(f)$$

- Otteniamo dunque che $\boxed{Y(f) = H(f)X(f)}$

Sistemi LTI: definizione della funzione di trasferimento

- Abbiamo dunque dimostrato che la funzione di trasferimento di un sistema LTI è il prodotto della tdF del segnale di ingresso per la funzione di trasferimento, cioè:

$$\boxed{Y(f) = H(f)X(f)}$$

Osservazione importante derivante da questa formula:
*i sistemi lineari **non «mischiano»** le frequenze*
(cioè l'uscita a frequenza f dipende solo dall'ingresso a frequenza f, e non ad altre frequenze)

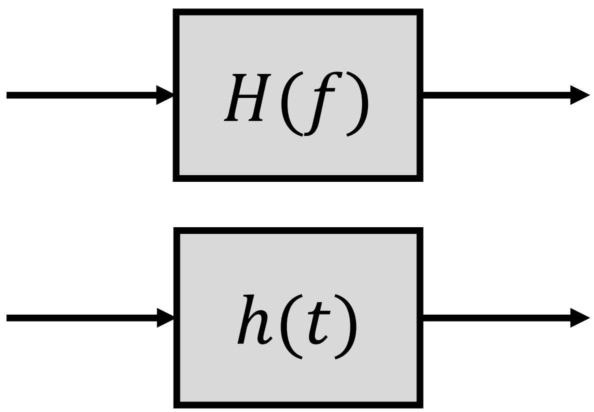
- Questo è un risultato fondamentale

$$\boxed{H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}}$$

Definizione della funzione di trasferimento nel dominio delle frequenze

Risposta all'impulso e funzione di trasferimento

- Un sistema lineare tempo invariante (LTI) è dunque completamente caratterizzato dalla sua risposta all'impulso $h(t)$ o dalla sua funzione di trasferimento $H(f)$
- Graficamente si indica dunque il sistema lineare come un blocco «etichettato» da $h(t)$ oppure da $H(f)$



Sistemi LTI e ingresso "esponenziale complesso"

- Poniamo all'ingresso di un sistema LTI una sinusoide complessa alla frequenza f_0

$$e^{j2\pi f_0 t} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(f) \end{matrix}} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = \exp(j2\pi f_0 t) \Rightarrow X(f) = \delta(f - f_0)$$

$$Y(f) = X(f)H(f) = \delta(f - f_0)H(f) = \delta(f - f_0)H(f_0)$$

proprietà campionamento della delta

$$\boxed{y(t) = H(f_0)\exp(j2\pi f_0 t) = H(f_0) \cdot x(t)}$$

Nota: per questo particolare ingresso, l'uscita dipende solo dalla funzione di trasferimento calcolata in f_0

Risposta alla sinusoide in sistemi LTI

- Poniamo in ingresso $x(t) = \cos(2\,\pi f_0 t)$ con TdF $X(f) = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
- Otteniamo in uscita

$$Y(f) = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]H(f)$$

- Ricordando le proprietà di "campionamento" della delta possiamo scrivere

$$Y(f) = \frac{1}{2}[H(f_0)\ \delta(f - f_0) + H(-f_0)\ \delta(f + f_0)]$$

- Da cui antitrasformando e scrivendo modulo e fase di $H(f)$ in $\pm f_0$

$$y(t) = \frac{1}{2}|H(f_0)|e^{j\,\arg\{H(f_0)\}}e^{j2\pi f_0 t} + \frac{1}{2}|H(-f_0)|e^{j\,\arg\{H(-f_0)\}}\,e^{-j2\pi f_0 t}$$

$$= \frac{1}{2}|H(f_0)|e^{j(2\pi f_0 t + \arg\{H(f_0)\})} + \frac{1}{2}|H(-f_0)|e^{-j(2\pi f_0 t - \arg\{H(-f_0)\})}$$

Risposta alla sinusoide in sistemi LTI

- Se $h(t)$ è reale, per le proprietà della trasformata di Fourier

$$H(f_0) = H(-f_0) \qquad \textit{Modulo pari}$$

$$\arg\{H(f_0)\} = -\arg\{H(-f_0)\} \qquad \textit{Fase dispari}$$

- Da cui otteniamo

$$y(t) = \frac{1}{2}|H(f_0)|e^{j(2\pi f_0 t + \arg\{H(f_0)\})} + \frac{1}{2}|H(f_0)|e^{-j(2\pi f_0 t + \arg\{H(f_0)\})}$$

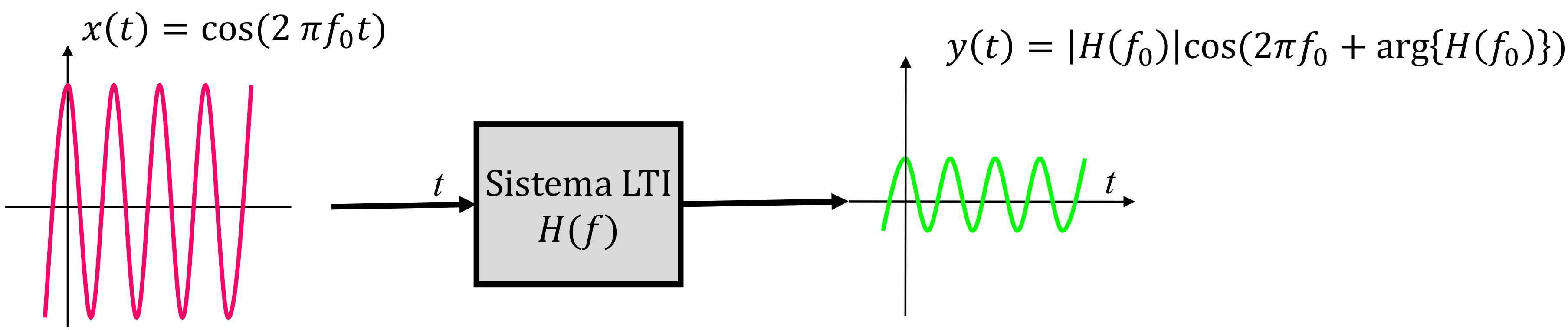
$$y(t) = |H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \arg\{H(f_0)\})$$

- Conclusione importante: un sistema LTI reale trasforma un segnale sinusoidale in un altro segnale sinusoidale alla stessa frequenza
  - Ma in generale con ampiezza e fase diverse da quelle dell'ingresso

Nota: si può ottenere un risultato analogo ponendo in ingresso il segnale $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

Sistemi LTI e segnali sinusoidali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

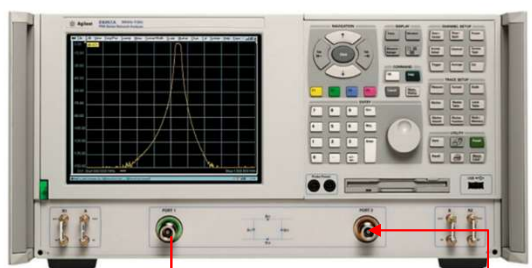


- I sistemi LTI non alterano la frequenza di un segnale sinusoidale posto al loro ingresso ma solo la sua fase e l’ampiezza
  - Le sinusoidi sono "autofunzioni" di un sistema LTI
  - La fase e l’ampiezza in uscita dipendono SOLO dal valore di $H(f)$ alla frequenza f_0

Caratterizzazione sperimentale di un sistema lineare

- Questa proprietà è alla base del più comune metodo sperimentale per caratterizzare un sistema lineare

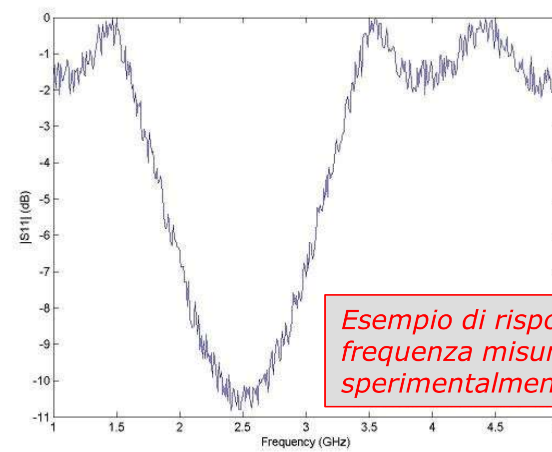
Apparato automatico di misura *(Network Analyzer)*



Per ogni frequenza, lo strumento misura modulo e fase della sinusoide in uscita dal sistema lineare, e può così ricostruire la funzione di trasferimento

Lo strumento genera una sinusoide ad ampiezza costante.
Ad intervalli successivi, lo strumento fa crescere la frequenza («sweep» in frequenza)

in → Sistema lineare da caratterizzare → *out*



Esempio di risposta in frequenza misurata sperimentalmente

Concetto di causalità nei sistema LTI

- Riscriviamo opportunamente l'integrale di convoluzione

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\theta)h(\theta)d\theta$$

- Operando la sostituzione $t - \tau = \theta$ e spezzando l'integrale

$$y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x(t-\theta)h(\theta)d\theta}_{\theta < 0} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} x(t-\theta)h(\theta)d\theta}_{\theta > 0}$$

Questa parte dipende dai valori di $x(\cdot)$ per tempi ***successivi*** *a t*

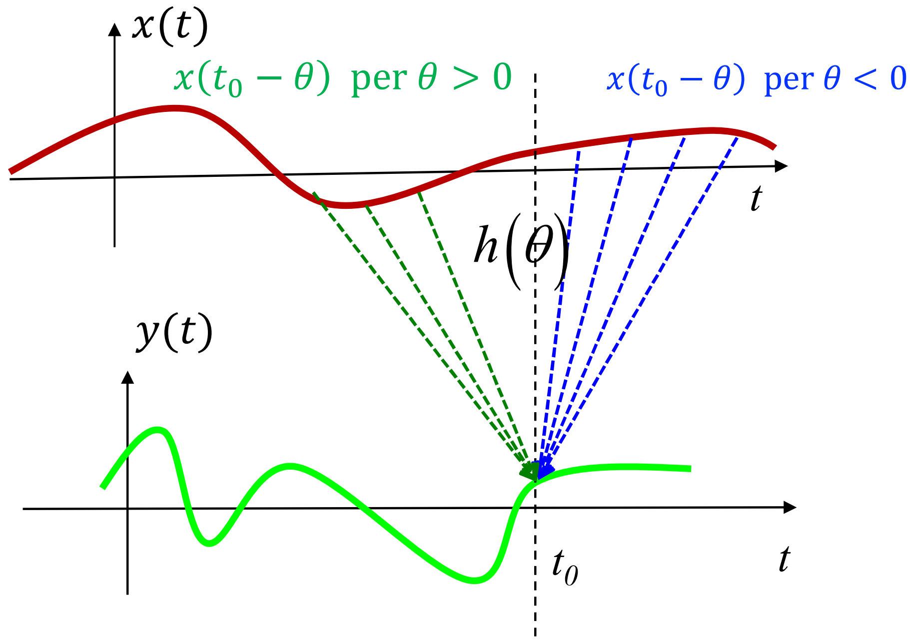
Questa parte dipende dai valori di $x(\cdot)$ per tempi ***precedenti*** *a t*

In generale dunque, l'uscita $y(t)$ all'istante *t* dipende dai valori dell'ingresso $x(t)$ sia agli istanti precedenti che agli istanti successivi a *t*

Concetto di causalità nei sistema LTI

Il risultato della slide precedente può anche essere interpretato come segue:

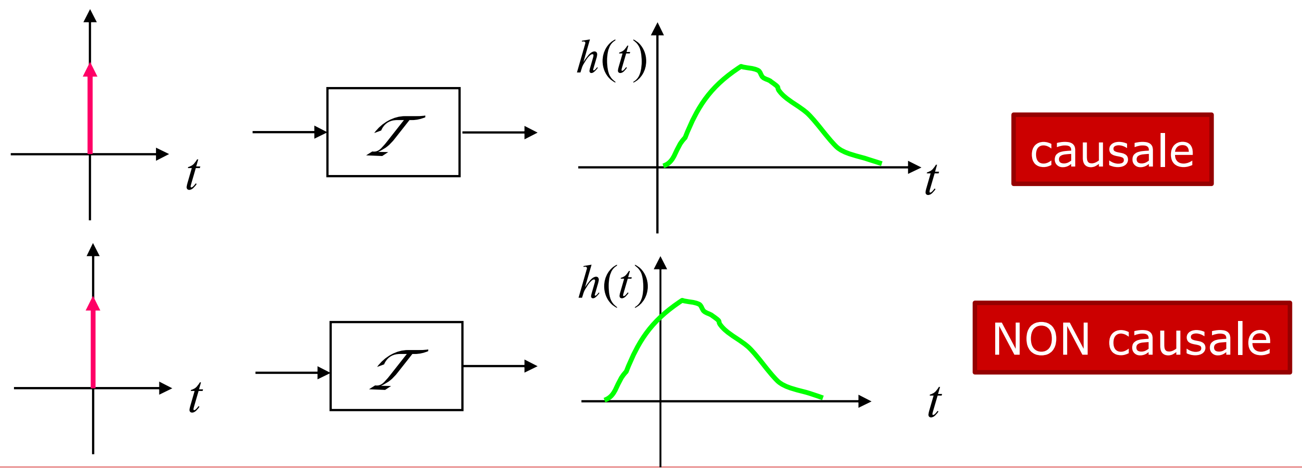
- In un generico integrale di convoluzione l'uscita ad un istante t_0 può dipendere anche dai valori successivi a t_0 dell'ingresso $x(t)$
- Questa situazione però NON è realistica per un sistema fisico
  - Si tratterebbe infatti di un sistema che in uscita «predice» cosa avverrà in futuro



Condizione di causalità in un sistema LTI

- Per un sistema causale l'uscita in un certo istante non può dipendere dagli ingressi nel futuro
- Nei sistemi LTI la causalità richiede che la risposta all'impulso sia nulla per $t < 0$

$$\boxed{h(t) = 0} \qquad \forall t < 0$$



Sistemi reali e condizioni di parità sulla funzione di trasferimento $H(f)$

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Per un sistema reale, ad un ingresso reale deve corrispondere un uscita reale

Conseguentemente:

- La risposta all'impulso $h(t)$ deve essere reale
- La funzione di trasferimento $H(f)$ deve avere
  - Parte reale pari
  - Parte immaginaria dispari
  - Modulo pari
  - Fase dispari

Fisica realizzabilità

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

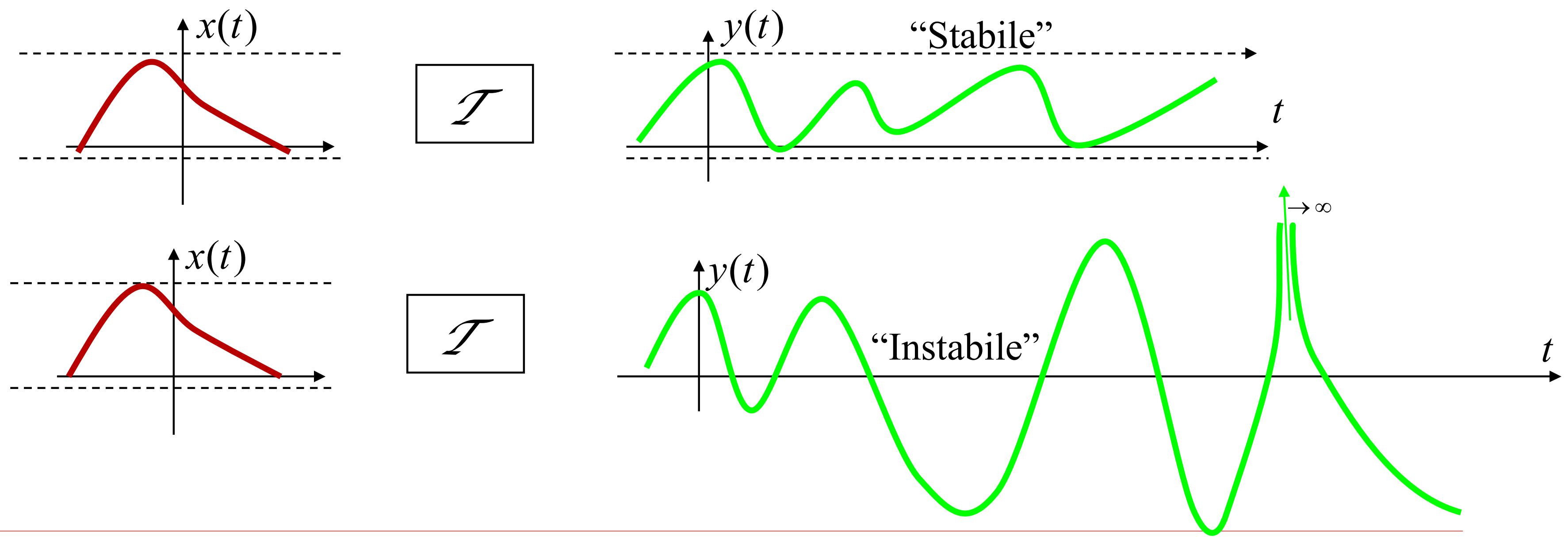
- Corrisponde alle due condizioni
  - **Sistema Causale** : risponde alle leggi fisiche di causa-effetto
  - **Sistema Reale**: ad un ingresso reale corrisponde un'uscita reale

- Riassumendo, la condizione di fisica realizzabilità richiede che la risposta all'impulso $h(t)$ sia
  - Reale
  - Nulla per $t < 0$

Stabilità Bounded Input Bounded Output (BIBO)

- Definizione: ad un ingresso limitato in ampiezza deve corrispondere un uscita limitata in ampiezza

$$\forall x(t) : |x(t)| < \infty, \forall t \Rightarrow |y(t)| < \infty, \forall t$$



Condizioni di stabilità nei sistemi LTI

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Si dimostra che:

$$\text{Sistema LTI stabile} \Leftrightarrow \int |h(t)|\,dt < \infty \Rightarrow |H(f)| < \infty \quad \forall f$$

Calcoliamo infatti il modulo dell'uscita:

$$|y(t)| = \left|\int x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\right| < \int |x(t-\tau)||h(\tau)|\,d\tau$$

(per la disuguaglianza di Schwarz)

$$< \int \max|x(t-\tau)||h(\tau)|\,d\tau$$

$$= \boxed{\max|x(t-\tau)|}\boxed{\int |h(\tau)|\,d\tau} < \infty$$

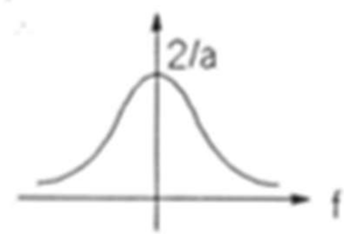
$$|y(t)| = \left(\max|x(\cdot)|\right)\cdot\left(\text{quantità finita}\right)$$

Esempio

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Valutare la stabilità e la fisica realizzabilità di un sistema con risposta all'impulso $h(t) = e^{-\left(\frac{|t|}{T}\right)}$ con $T > 0$

- Dalle tavole, la condizione risulta subito verificata nel dominio della frequenza:

	$e^{-a\|t\|}$ $(a > 0)$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$	

Esempio

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Valutare la stabilità e la fisica realizzabilità di un sistema con risposta all'impulso $h(t) = e^{-\left(\frac{|t|}{T}\right)}$ con $T > 0$

- Verifichiamo anche la condizione nel dominio del tempo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{|t|}{T}\right)} dt = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{T}\right)} dt = -T\left[e^{-\left(\frac{t}{T}\right)}\right]_0^{+\infty} = -T[0-1] = T < +\infty$$

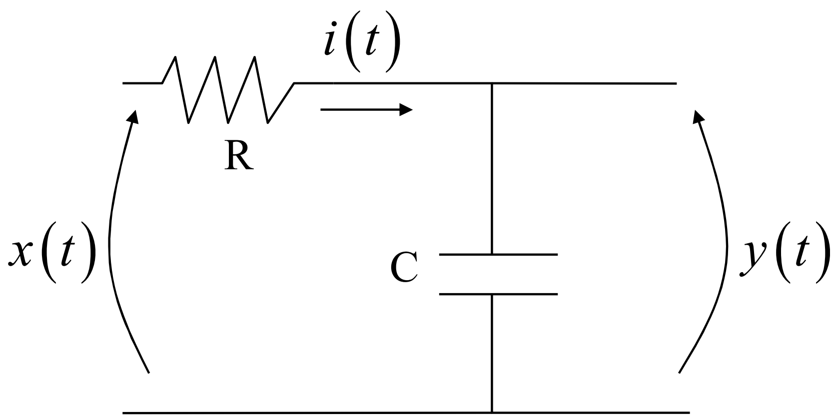
- <u>Il sistema rispetta la condizione di stabilità</u>
  - Tuttavia si osserva che il sistema non è causale quindi non è fisicamente realizzabile

Calcolo della funzione di trasferimento

- La funzione di trasferimento può essere valutata nei sistemi pratici in vari modi diversi:
  - Tramite una misura con un analizzatore automatico (Network Analyzer, come già accennato in slide precedenti)
  - Misurando il segnale di uscita dato un segnale di ingresso noto
  - In alcuni tipologie di problema: risolvendo nel dominio delle frequenze il sistema lineare differenziale che descrive la realtà fisica
    - Si veda slide successiva per il "famoso" filtro RC

Esempio di calcoli di funzioni di trasferimento: Filtro RC

- Si assuma che i segnali $x(t)$ e $y(t)$ siano le tensioni in ingresso e uscita di un filtro RC



(dal corso di Elettrotecnica)

$$x(t) - y(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

$$x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

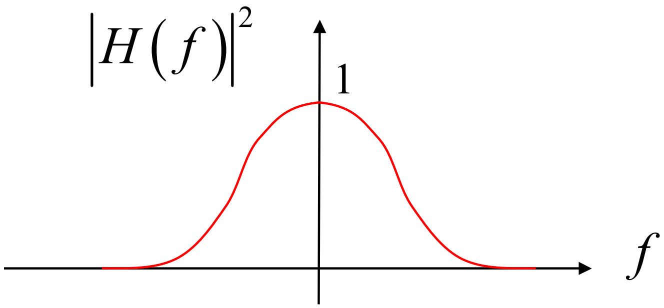
Trasformiamo l'ultima espressione tenendo conto delle proprietà della trasformata di Fourier per la derivata

$$X(f) = (1 + j2\pi fRC)Y(f) \Rightarrow H(f) = \frac{1}{(1 + j2\pi fRC)}$$

Esempio di calcoli di funzioni di trasferimento: Filtro RC

- Calcoliamone il modulo

$$\left|H(f)\right|^2 = \frac{1}{1+\left(2\pi RCf\right)^2}$$



Questo tipo di funzione di trasferimento è chiamata "passabasso" in quanto fa passare le basse frequenze e "annulla" le alte frequenze

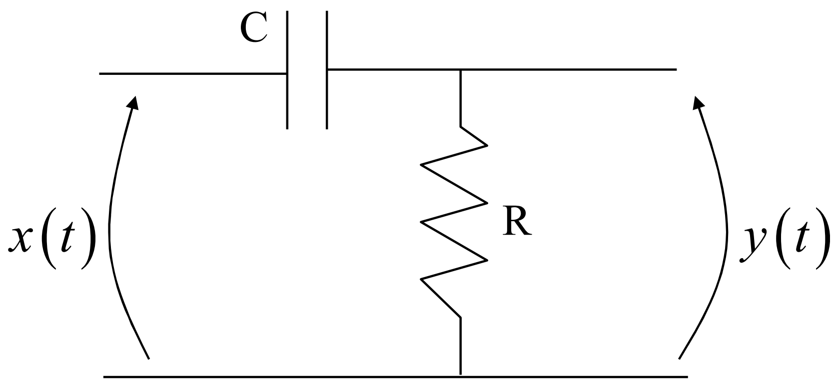
Calcoliamo la frequenza alla quale la funzione di trasferimento si dimezza rispetto al massimo (cioè vale 0.5 in questo caso)

È detta "frequenza a -3dB"

$$f_{3dB} = \frac{1}{2\pi RC}$$

Esempio a casa

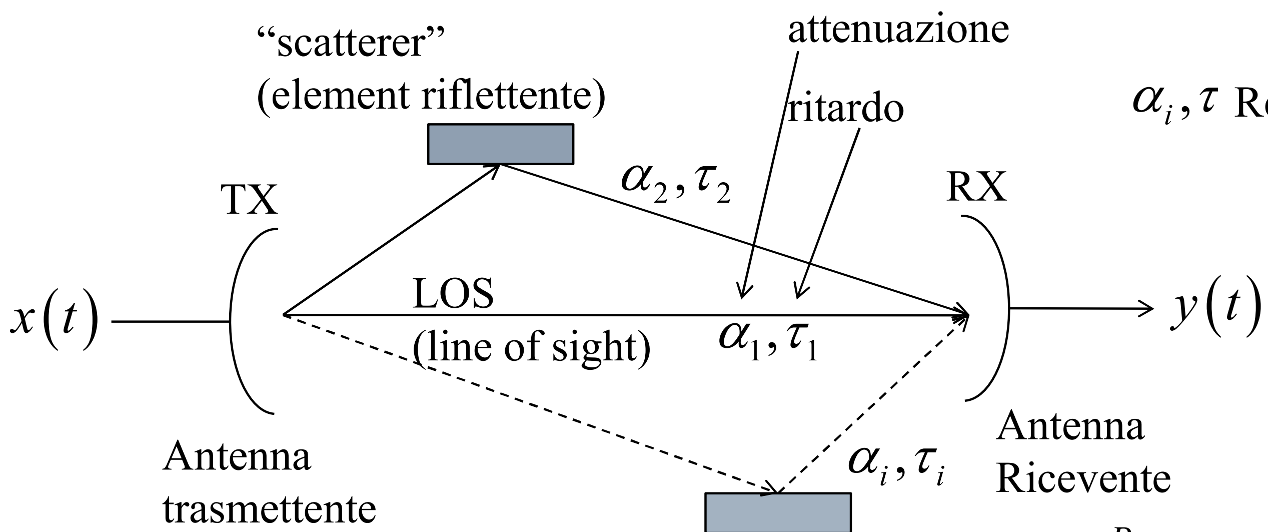
- Calcolare la funzione di trasferimento per questa altra combinazione circuitale



(dal corso di Elettrotecnica)

Esempio: Canale di trasmissione radio con eco per riflessioni multiple

α_i, τ Reali positivi



P = numero di percorsi multipli tra le due antenne

$$y(t) = \sum_{i=1}^{P} \alpha_i \cdot x(t - \tau_i)$$

$$\delta(t) \Rightarrow h(t) = \sum_{i=1}^{P} \alpha_i \cdot \delta(t - \tau_i)$$

Esempio: Canale di trasmissione con eco per riflessioni multiple

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Calcoliamo la funzione di trasferimento: $\sum_{i=1}^{P} \alpha_i \delta(t-\tau_i) \Rightarrow H(f) = \sum_{i=1}^{P} \alpha_i \exp(-j2\pi f \tau_i)$

Calcoliamo il modulo della funzione di trasferimento

$$
\begin{aligned}
|H(f)|^2 &= \sum_{i=1}^{P} \alpha_i \exp(-j2\pi f \tau_i) \sum_{k=1}^{P} \alpha_k^* \exp(j2\pi f \tau_k) \\
&= \sum_{i=1}^{P} \sum_{k=1}^{P} \alpha_i \alpha_k \exp(-j2\pi f (\tau_i - \tau_k)) \\
&= \sum_{i=1}^{P} |\alpha_i|^2 + \sum_{i=1}^{P} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{P} \alpha_i \alpha_k \exp(-j2\pi f \Delta\tau_{ik}) \\
&= \sum_{i=1}^{P} |\alpha_i|^2 + \sum_{i=1}^{P} \sum_{\substack{k=1 \\ k > i}}^{P} 2\alpha_i \alpha_k \cos(2\pi f \Delta\tau_{ik})
\end{aligned}
$$

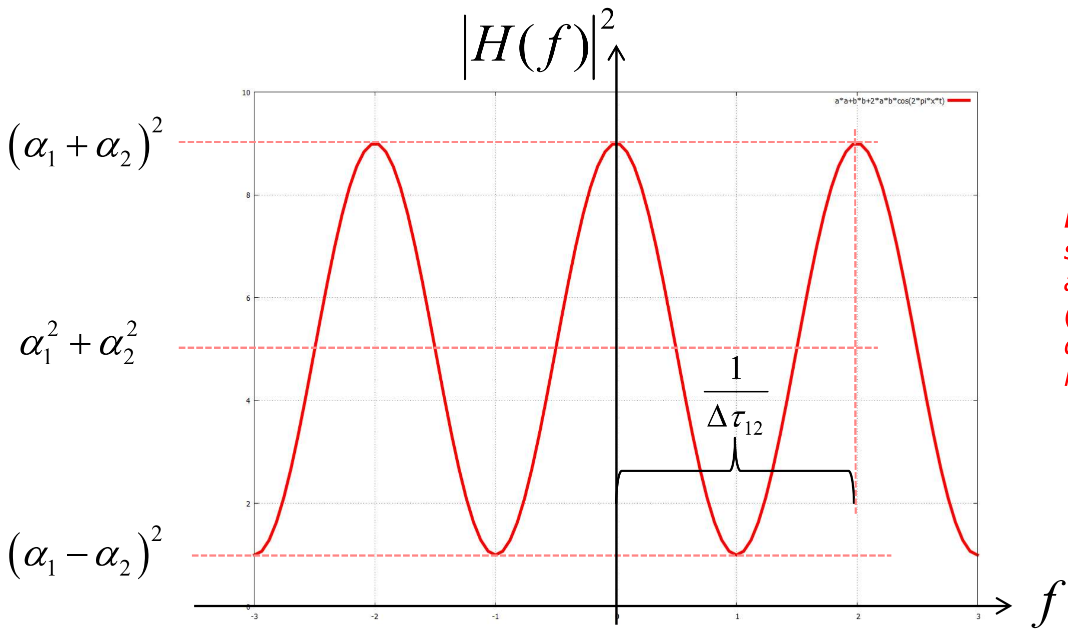
Sia: $\Delta\tau_{ik} =: (\tau_i - \tau_k)$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_i \alpha_k \exp(-j2\pi f \Delta\tau_{ik}) + \alpha_k \alpha_i \exp(-j2\pi f \Delta\tau_{ki}) \\
&= \alpha_i \alpha_k \exp(-j2\pi f \Delta\tau_{ik}) + \alpha_k \alpha_i \exp(j2\pi f \Delta\tau_{ik}) \\
&= 2\alpha_i \alpha_k \cos(2\pi f \Delta\tau_{ik})
\end{aligned}
$$

Esempio: funzione di trasferimento risultante per *P*=2 percorsi multipli

Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications

$$\left|H(f)\right|^2=\sum_{i=1}^{2}\left|\alpha_i\right|^2+\sum_{i=1}^{2}\sum_{\substack{k=1\\k>i}}^{2}2\alpha_i\alpha_k\cos\left(2\pi f\Delta\tau_{ik}\right)=\left|\alpha_1\right|^2+\left|\alpha_2\right|^2+2\alpha_1\alpha_2\cos\left(2\pi f\Delta\tau_{12}\right)$$



Nota:
si tratta di un risultato molto rilevante per molte applicazioni di trasmissione wireless (denominato "fading in frequenza"): in presenza di percorsi multipli la funzione di Trasferimento NON è piatta in frequenza

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Teoria dei Segnali

- Tipologie di filtri realizzabili
  - Esempi di sistemi LTI (linear and time invariant)

Che cosa si intende per "filtri"

- Strettamente parlando, si tratta semplicemente di sistemi lineari LTI

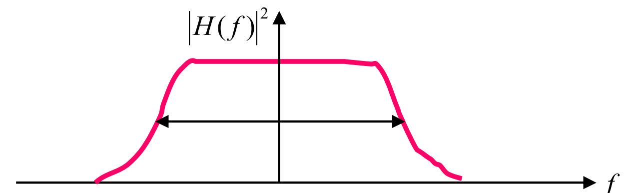
- Tuttavia, nella pratica ingegneristica si parla di "filtri" quando il sistema ingresso-uscita è stato esplicitamente progettato per ottenere delle specifiche tipologie di risposta in frequenza

  - In moltissimi campi dell'ingegneria è fondamentale selezionare alcuni intervalli di frequenza rispetto ad altri

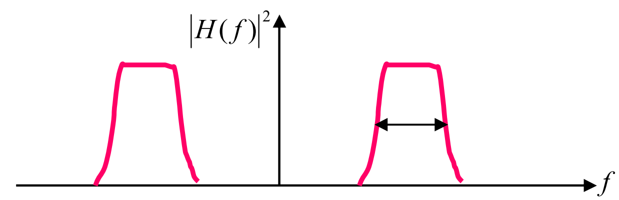
Classificazione dei filtri in base alla loro risposta in frequenza

Funzioni di trasferimento sull’asse delle frequenze

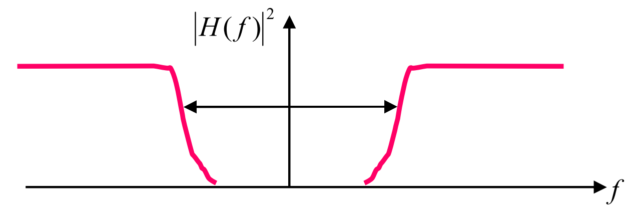
- **Passa basso**: Il filtro ha banda finita centrata intorno all’origine (DC) (banda base)



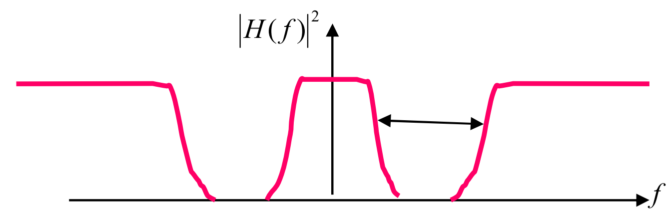
- **Passa banda**: Il filtro ha banda finita, che non include l’origine



- **Passa alto**: il filtro ha banda infinita, che non include l’origine



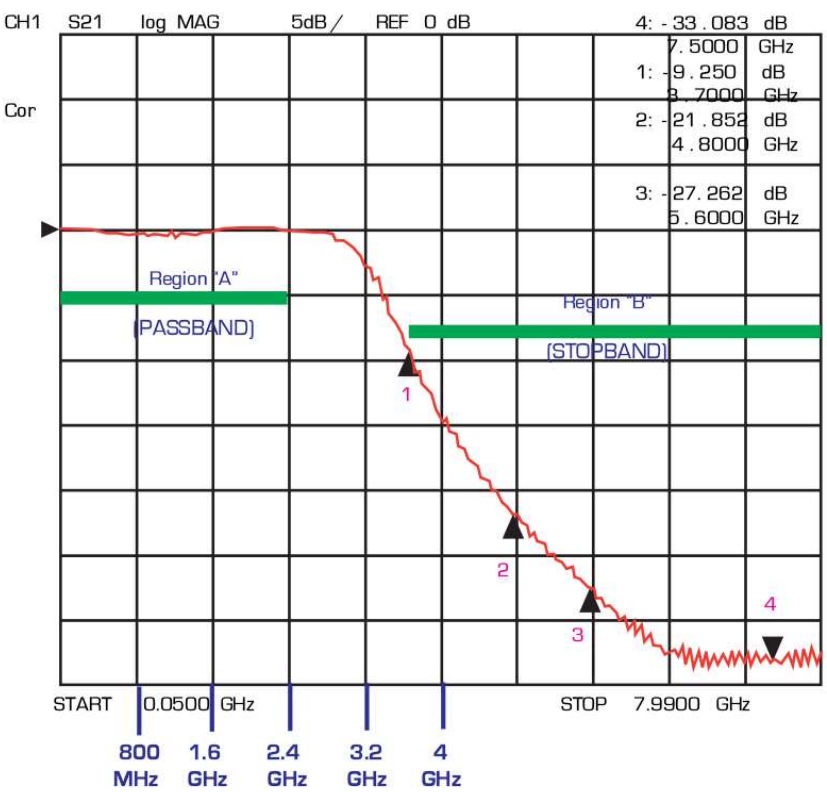
- **Elimina banda**: il filtro ha banda infinita, e non include un certo intervallo di frequenze



Esempi pratici di filtri passabasso

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Typical Low Pass Filter Frequency Response



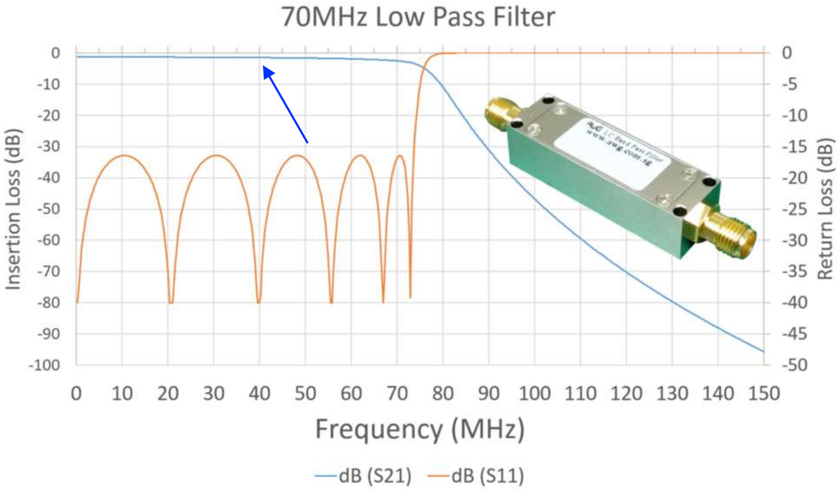


Immagine tratta da: https://awgrf.com/vhf-band-low-pass-filter/

Immagine tratta da: https://ims-resistors.com/specifying-a-low-pass-filter/

Esempi pratici di filtri passabanda

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- I filtri passabanda sono fondamentali in tutti i sistemi radio, dove è sempre necessario selezionare un certo intervallo di frequenze e "annullare" il meglio possibile tutte le altre

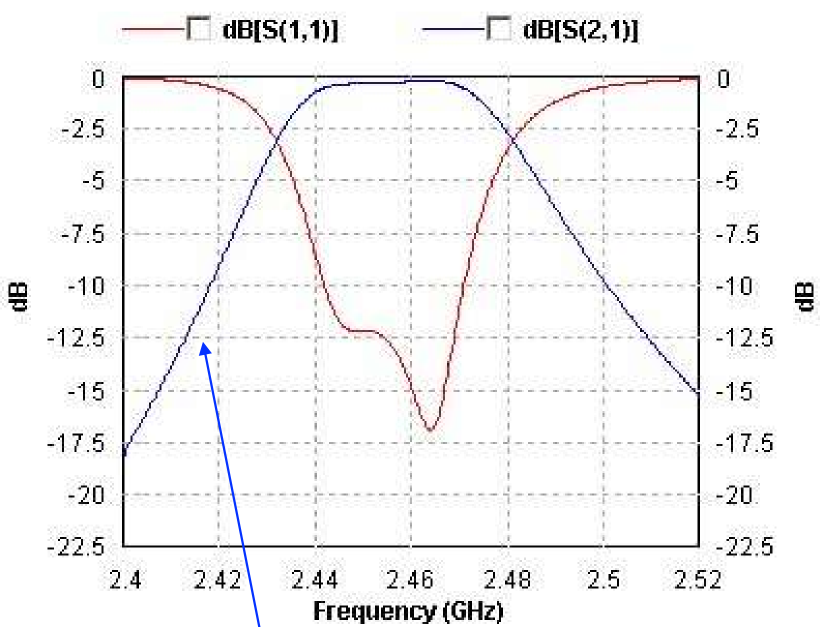


Immagine tratta da:
https://www.researchgate.net/publication/255711055_A_New_Miniature_Narrowband_Microstrip_Bandpass_Filter_Design_Based_on_Peano_Fractal_Geometry/figures?lo=1

Esempi pratici di filtri passabanda

- Applicazioni: ad esempio per selezionare un canale nello spettro usato per il broadcasting televisivo DVB-T

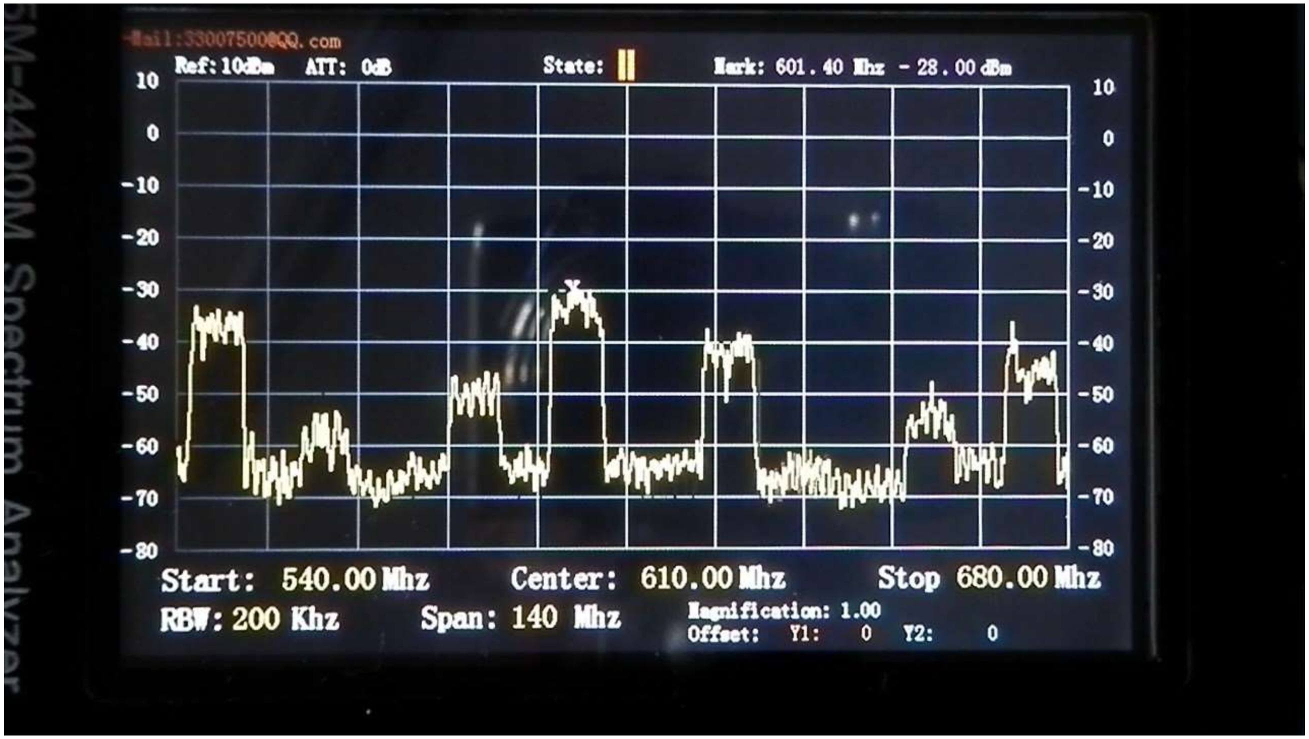
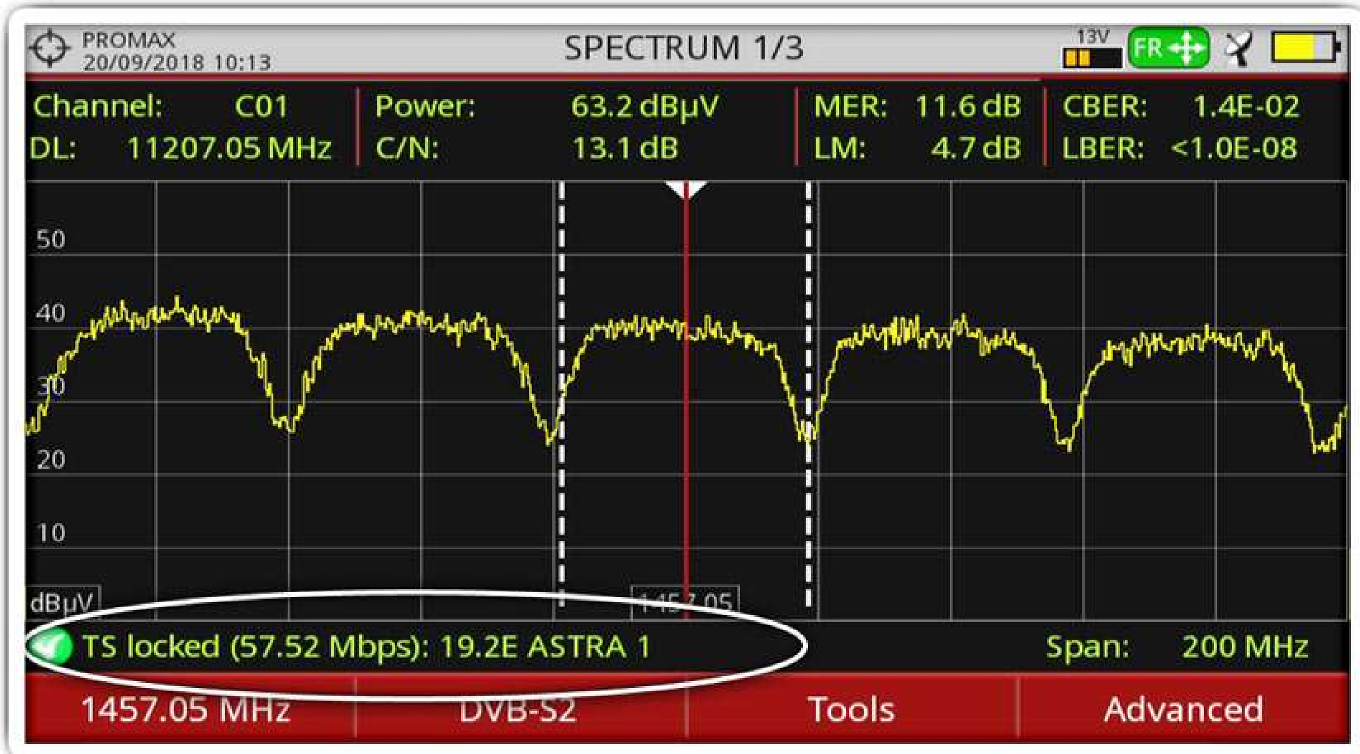


Immagine tratta da: https://www.youtube.com/watch?v=cFt2mKvD1OM

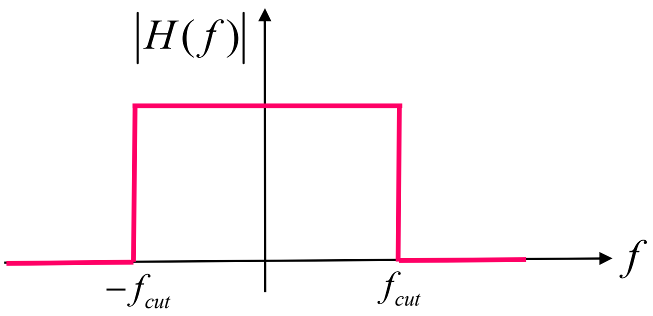
Esempi pratici di filtri passabanda

- Applicazioni: ad esempio per selezionare un canale nello spettro usato per il broadcasting televisivo DVB-S



Filtri “ideali” (passabasso)

- Un filtro “ideale” (ad esempio passabasso) dovrebbe avere un supporto strettamente limitato in frequenza
  - I filtri ideali richiederebbero dunque una risposta all’impulso di durata infinita, essendo a supporto limitato nel dominio delle frequenze



- Abbiamo visto che le condizioni di fisica realizzabilità richiedono che la risposta all’impulso del filtro sia:
  - Reale
  - Causale

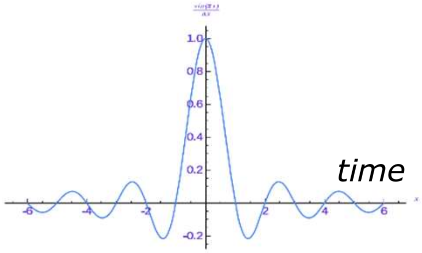
- Ma una risposta all’impulso di durata infinita non può essere causale
  - Nel mondo reale i filtri devono dunque essere «approssimati»

Esempio: filtro passabasso ideale rettangolare in frequenza

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Consideriamo un filtro passabasso ideale di tipo porta in frequenza

- Avrà una risposta all'impulso di tipo *sinc(·)*
  - Chiaramente tuttavia questa risposta è non nulla anche per t <0 e dunque NON è causale
  - Conseguentemente, non può essere realizzata in pratica

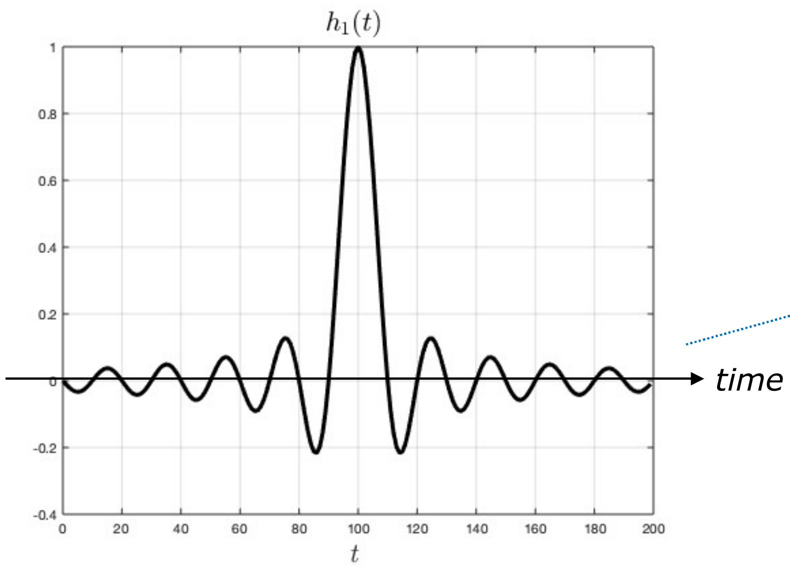


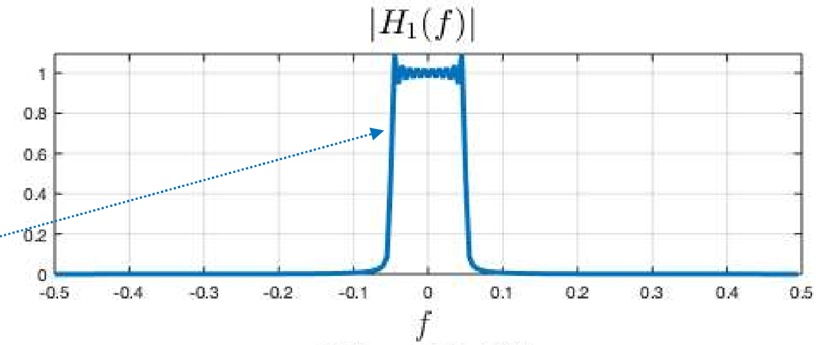
- Nelle prossime slides vedremo come si può ottenere un sistema lineare che può approssimare il filtro in questione

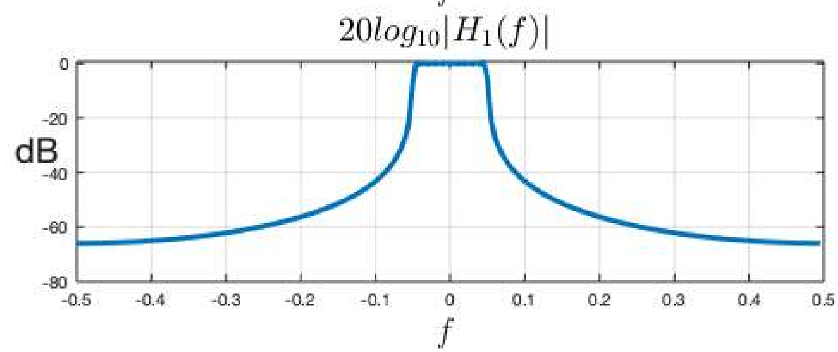
Implementazione pratica di un Filtro passabasso reale

(I grafici in queste slides sono stati ottenuti tramite simulazioni in Matlab)

$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow y_1(t)$







Approssimazione della risposta all'impulso ideale come una funzione *sinc* troncata (durata finita) e ritardata
Questa è ora una risposta all'impulso fisicamente realizzabile

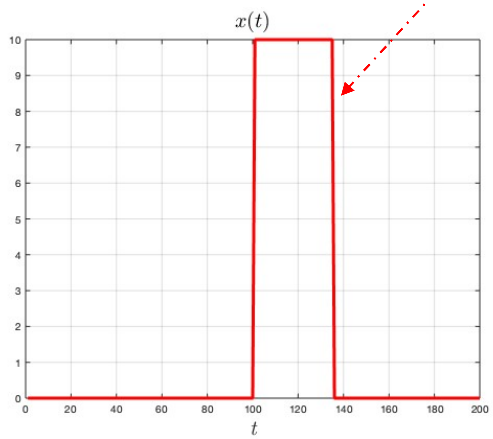
Modulo della funzione di trasferimento (in lineare e in dB)

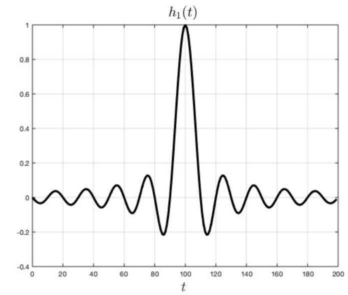
Uscita di un filtro passabasso reale con un segnale porta nel tempo all'ingresso

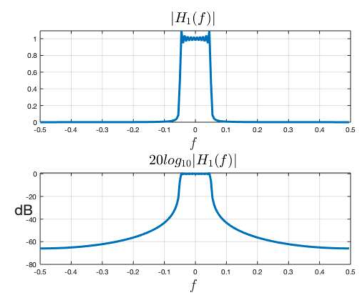
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

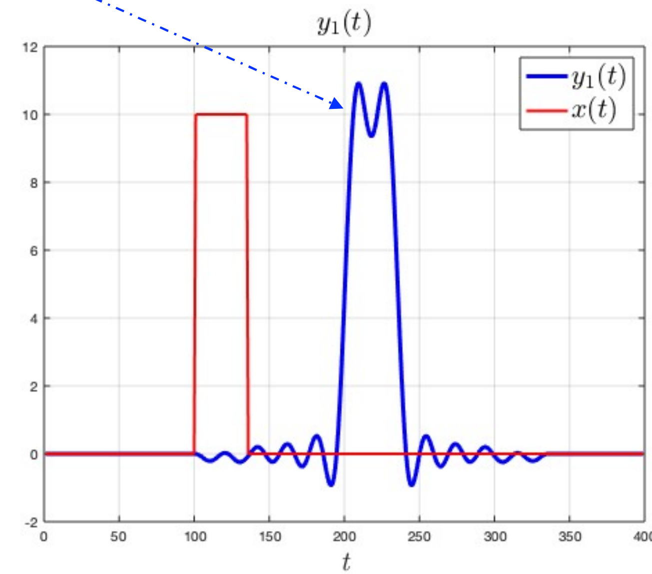
Consideriamo ora cosa succede quando si invia un segnale rettangolare nel tempo al filtro descritto nella slide precedente

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_1(t)} \longrightarrow y_1(t)$$









Qualitativamente possiamo osservare che il filtraggio delle componenti spettrali ad alta frequenza fa sì che che vengano "attenuate" in $y_1(t)$ le variazioni “veloci”

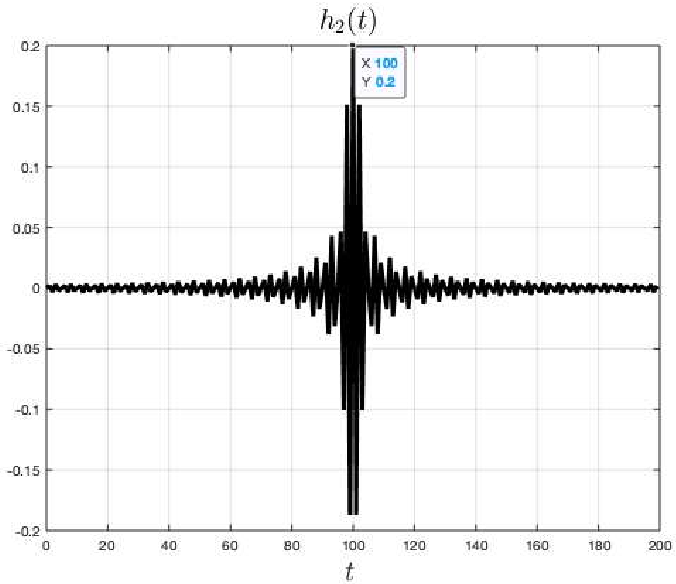
Si noti anche l’effetto della memoria del filtro (l’uscita ha un supporto temporale maggiore dell’ingresso) e del fatto che introduce un ritardo nel tempo

Filtro passa-alto reale

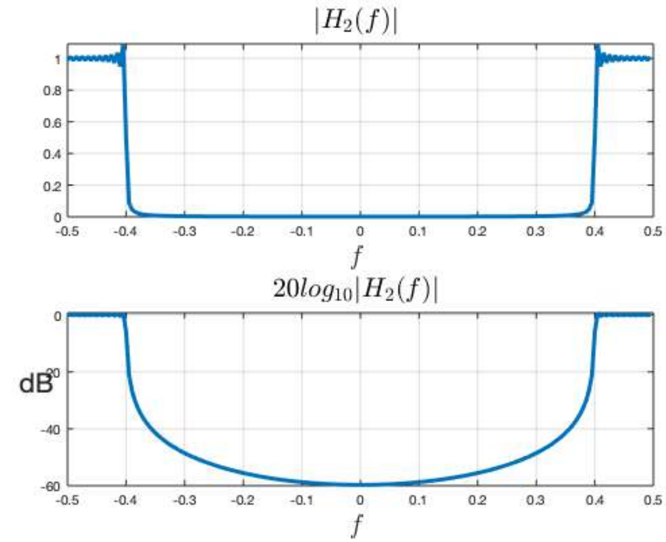
Analogamente è possibile "progettare" una risposta all'impulso fisicamente realizzabile che implementi una buona approssimazione di un filtro passa-alto «quasi-ideale»

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow y_2(t)$$

$$H_2(f) = 1 - H_{low-pass}(f)$$



Esempio di una possibile risposta all'impulso di tipo passa-alto (dopo troncamento e ritardo per renderlo causale)

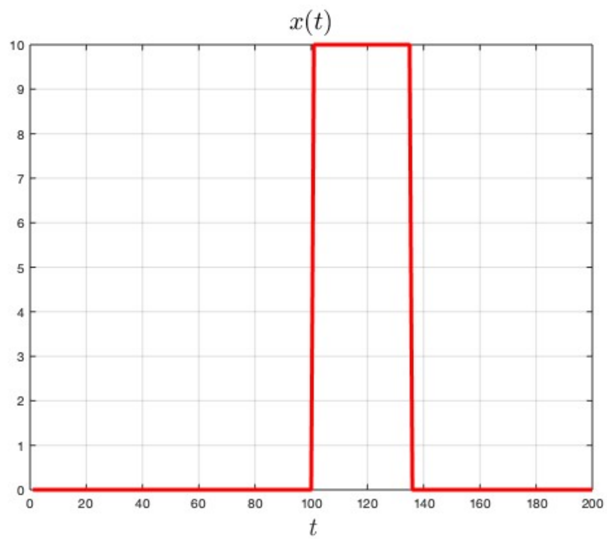


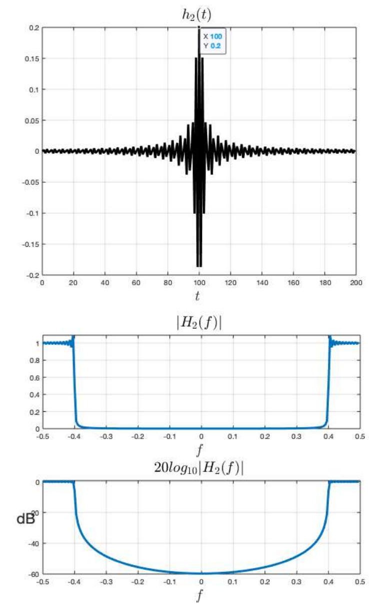
Modulo della funzione di trasferimento

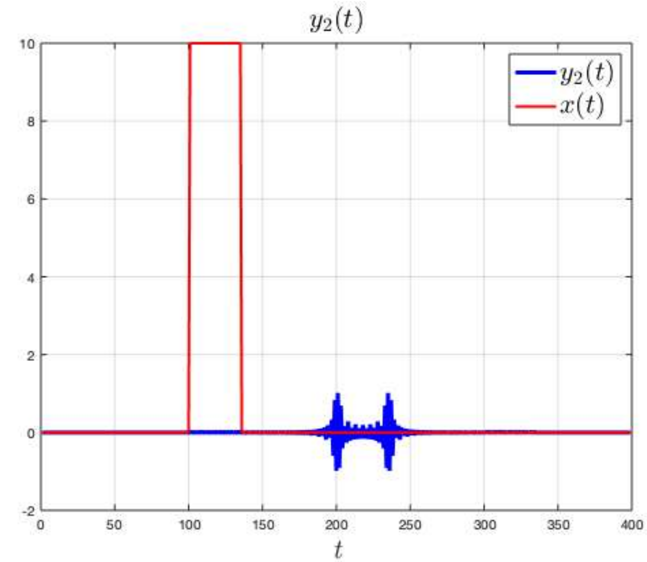
Filtro passaalto reale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_2(t)} \longrightarrow y_2(t)$$





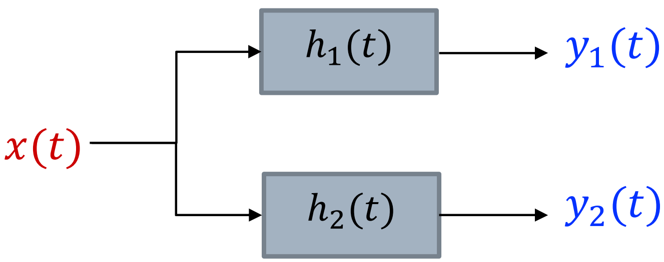


Qualitativamente possiamo osservare che il filtraggio delle componenti spettrali a bassa frequenza fa sì che compaiano in $y_2(t)$ quasi unicamente le variazioni "veloci" dell'ingresso

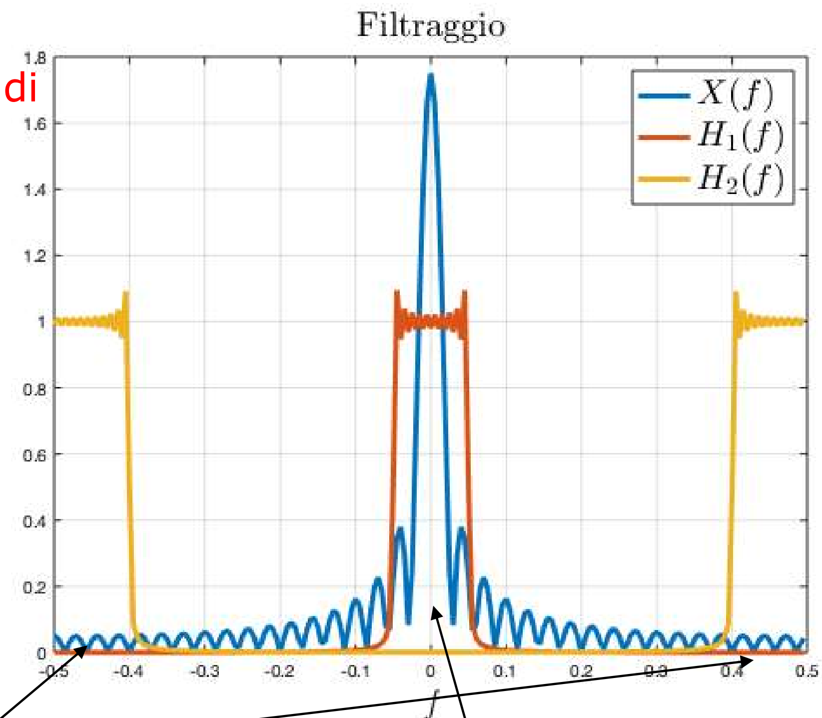
Si noti anche l'effetto della memoria del filtro e la ridotta energia del segnale di uscita

Filtraggio

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



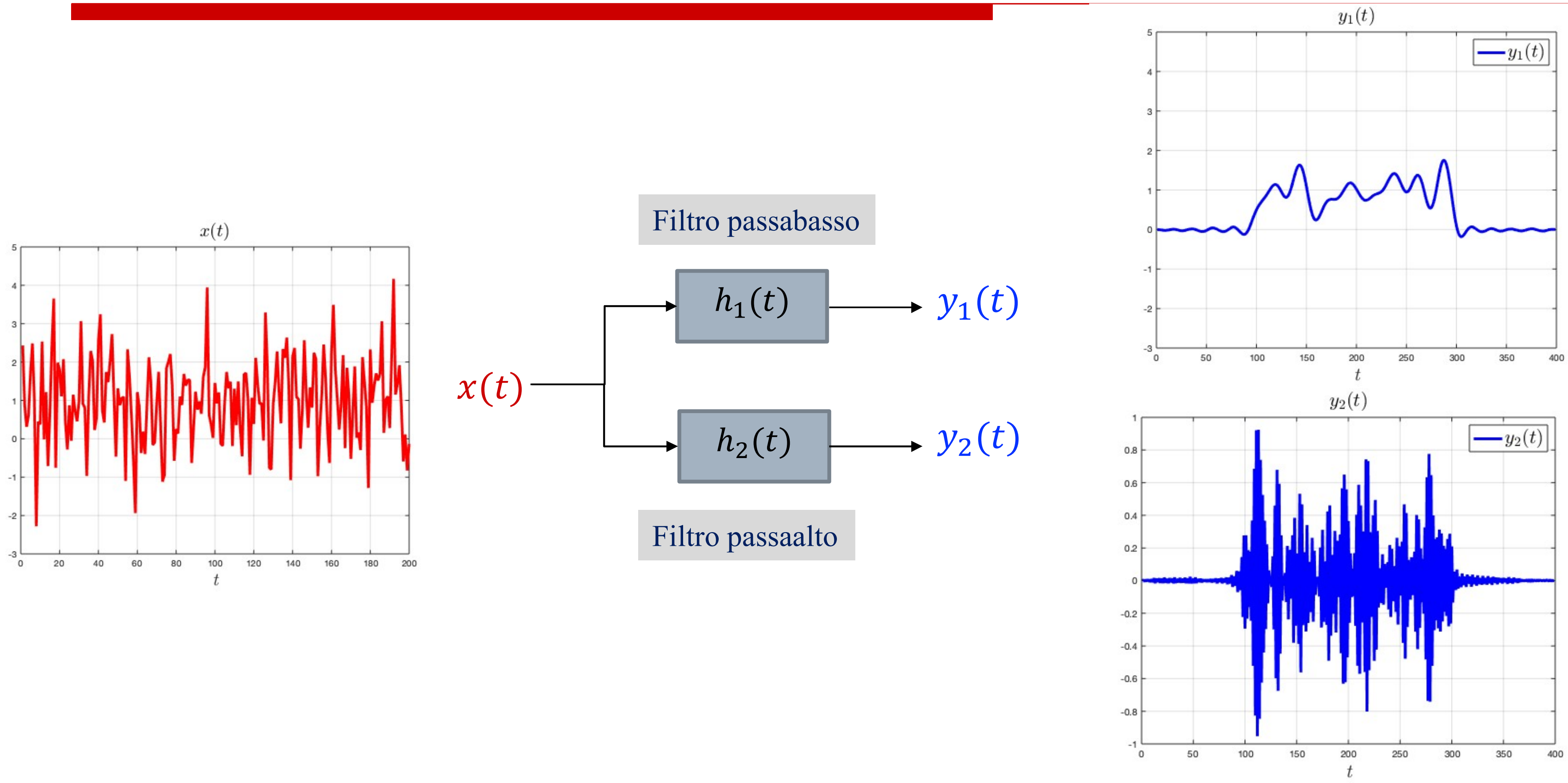
Moduli delle trasformate di Fourier



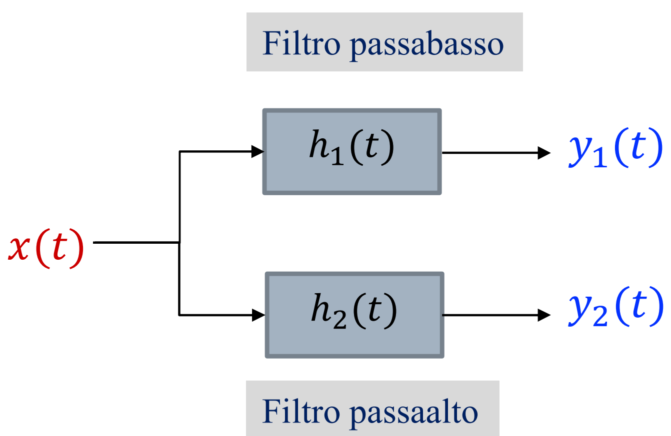
Componenti che «passano» attraverso il filtro passaalto

Componenti che «passano» attraverso il filtro passabasso

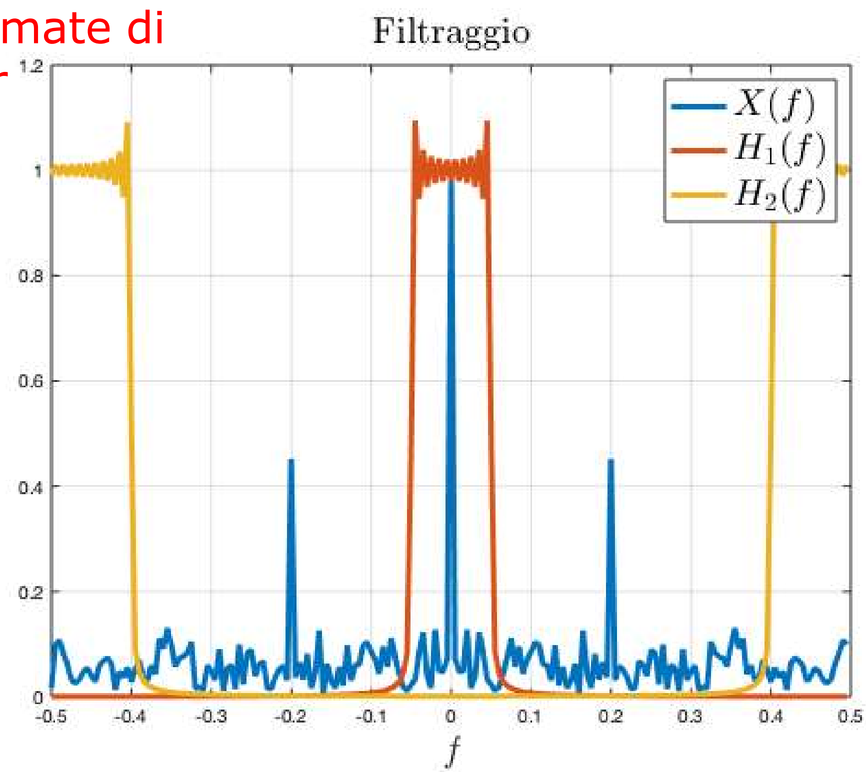
Filtraggio – segnale generico



Filtraggio



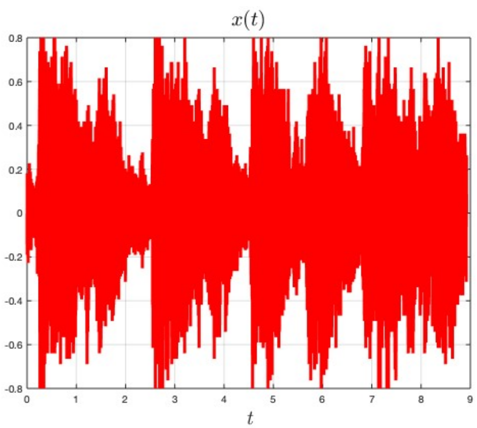
Moduli delle trasformate di Fourier

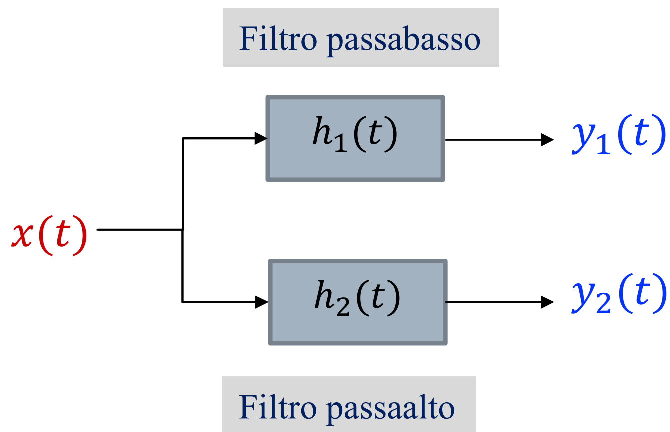


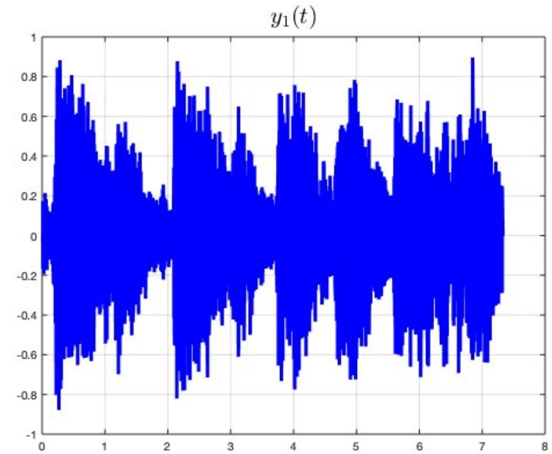
Filtraggio – segnale audio

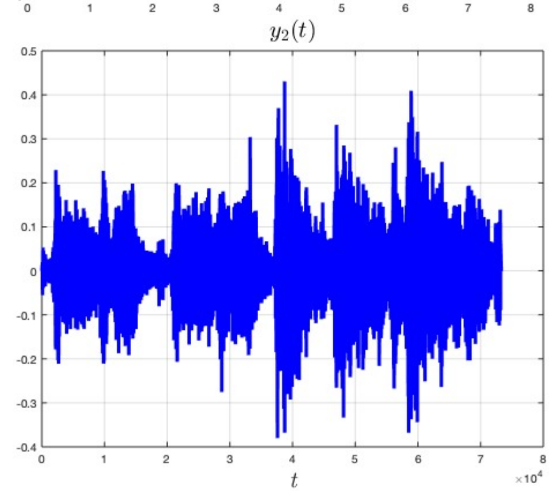
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

(stesso esempio già utilizzato nel capitolo sulla Serie di Fourier)

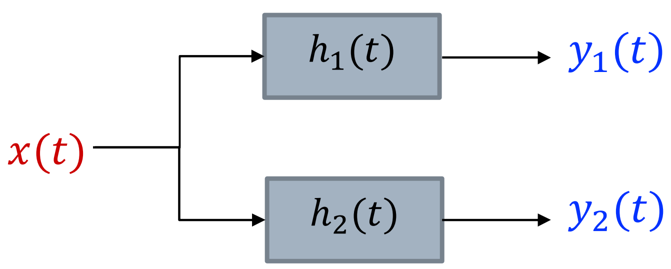




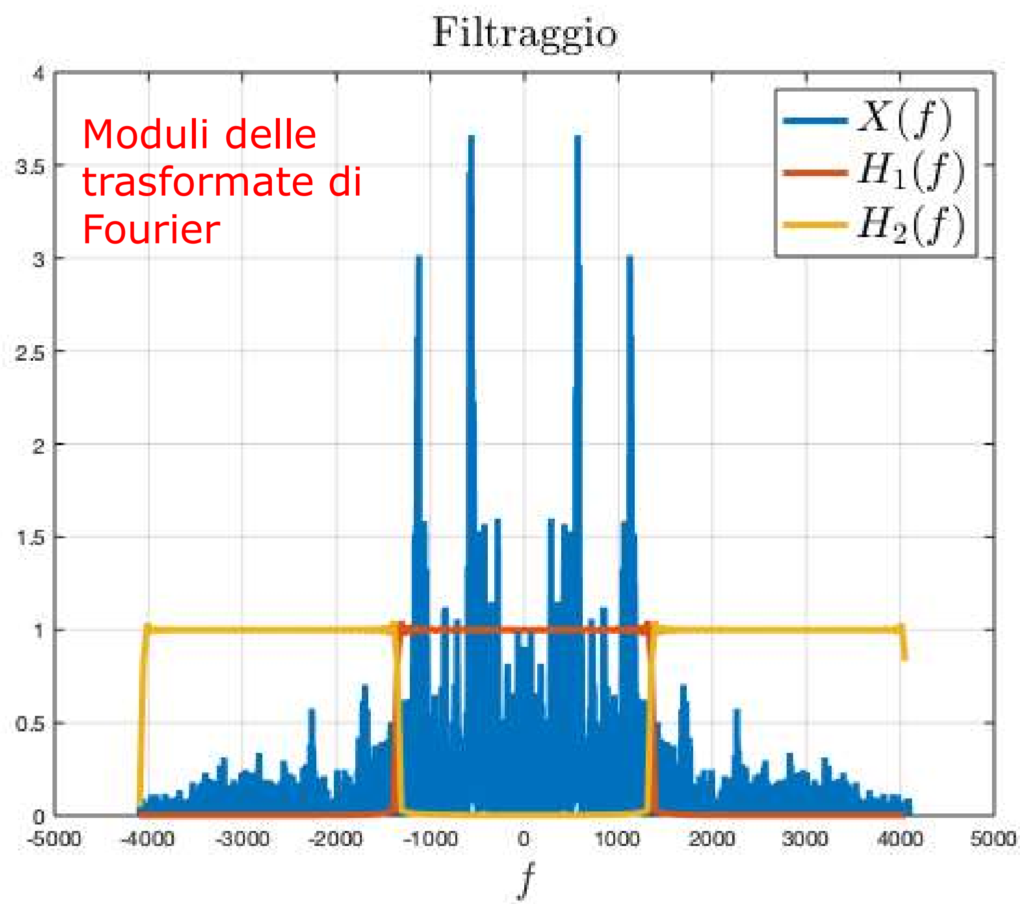




Filtraggio



$x(t)$
$h_1(t)$
$h_2(t)$
$y_1(t)$
$y_2(t)$



Filtraggio
Moduli delle trasformate di Fourier
$X(f)$
$H_1(f)$
$H_2(f)$
f

Tutorial in rete

- https://www.youtube.com/watch?v=46Ep4ecxG2I
- https://www.youtube.com/watch?v=2R7qSYa_G8Y
- https://www.youtube.com/watch?v=0wvlrBx3U4c
- https://www.youtube.com/watch?v=oLVzhSw7hcw
- … etc etc. ☺

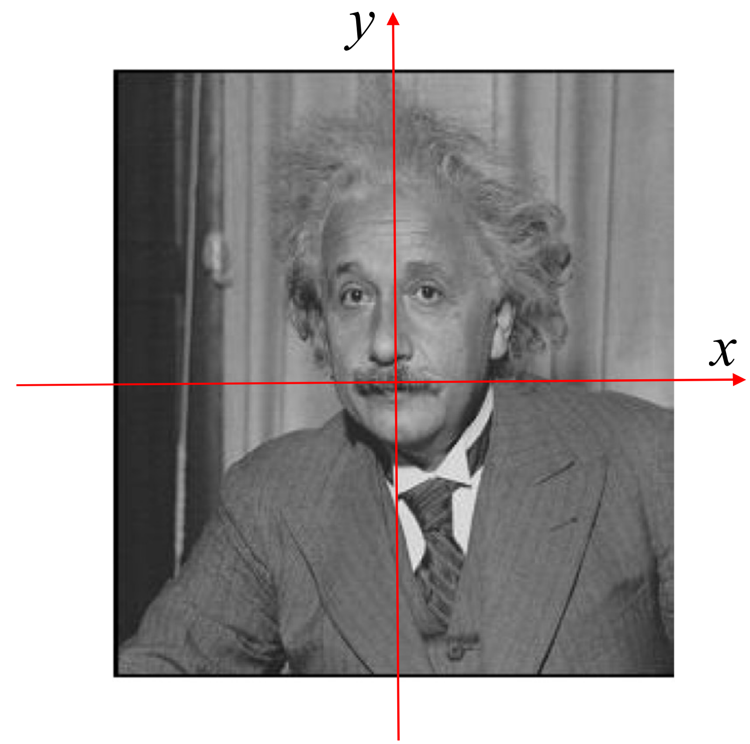
Cenni ai segnali e sistemi multidimensionali

Esempi di applicazione

- Immagine in scala di grigi (segnale a due dimensioni x e y)
- Immagine a colori (tre segnali RGB, ciascuno a due dimensioni x e y)
- Video in scala di grigi (segnale a tre dimensioni t, x e y)
- Video a colori (tre segnali RGB, ciascuno a tre dimensioni t, x e y)

Immagine in scala di grigi

- Descrivibile come una funzione *f(x,y)* nelle due dimensioni *x* e *y* che in ogni posizione è proporzionale alla intensità del grigio in quel punto dell'immagine



- Si può definire una trasformata di Fourier bidimensionale

$$F(f_x, f_y) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi f_x x} e^{-j2\pi f_y y} dx\, dy$$

Le due componenti f_x e f_y sono chiamate frequenze spaziali ("spatial frequencies")

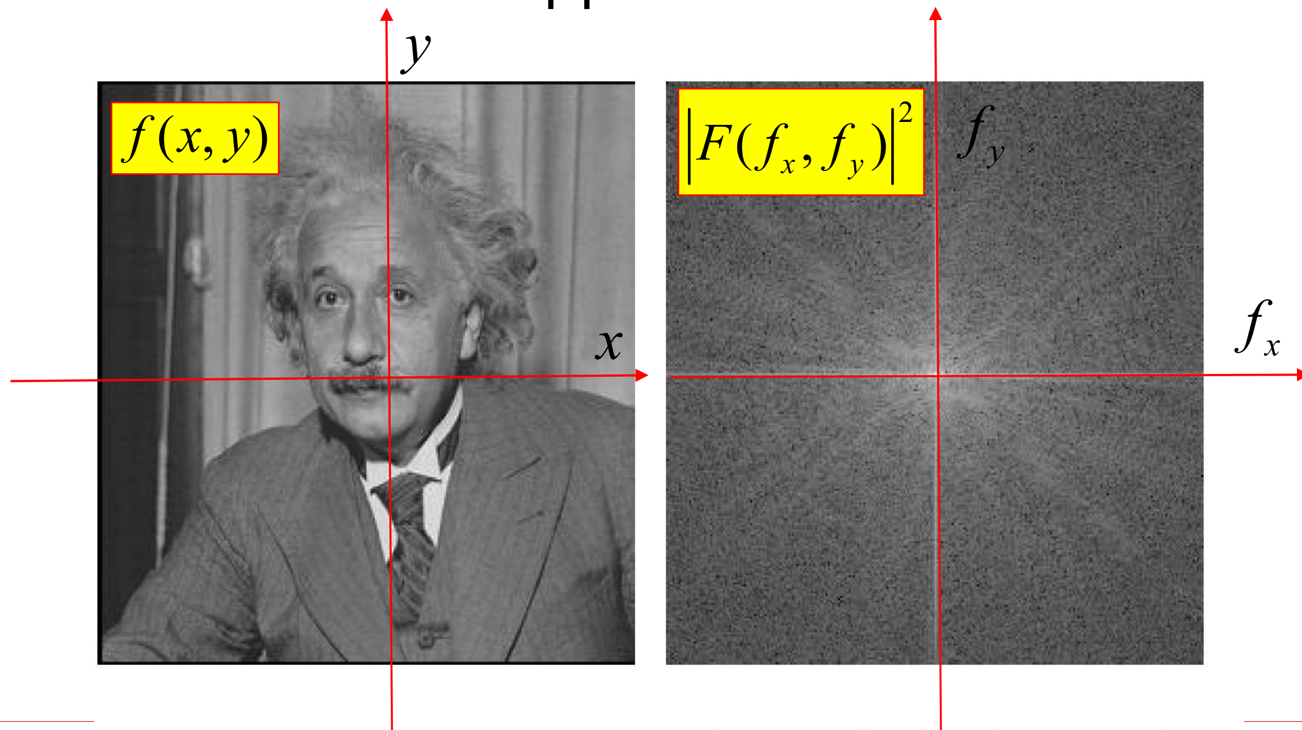
Figure tratte da: https://www.corsi.univr.it/documenti/OccorrenzaIns/matdid/matdid346761.pdf

Figure tratte da: https://www.corsi.univr.it/documenti/OccorrenzaIns/matdid/matdid346761.pdf

Trasformata di Fourier bidimensionale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

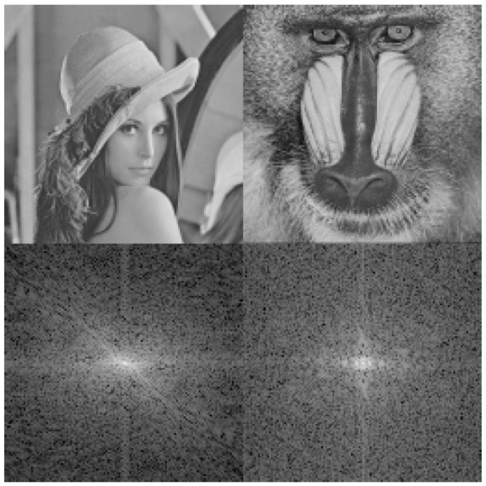
- Nell'ambito del trattamento delle immagini, si usa dunque una rappresentazione spettrale bidimensionale, tramite il modulo della trasformata appena introdotta

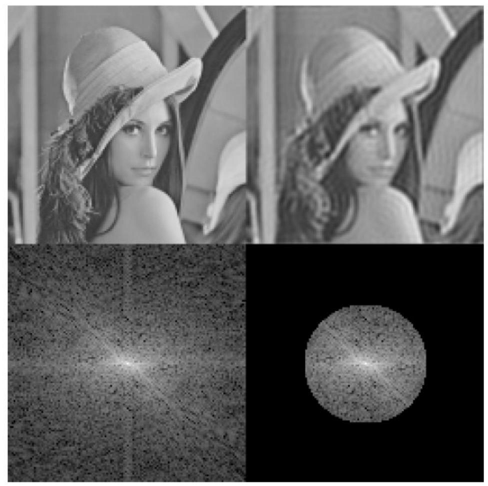


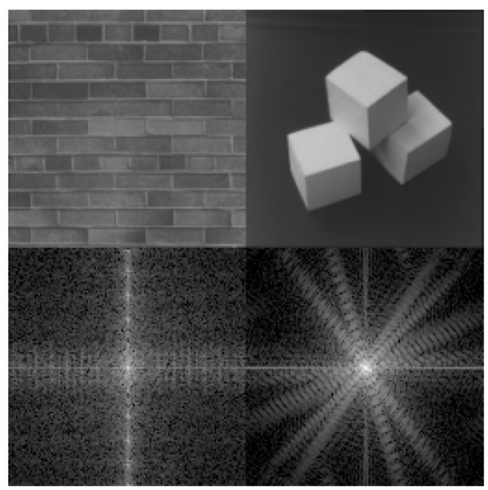
log amplitude of the spectrum

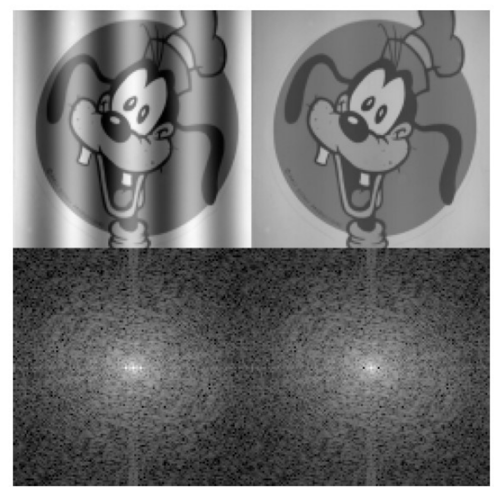
Altri esempi di trasformate di Fourier 2D

Figure tratte da: https://www.corsi.univr.it/documenti/OccorrenzaIns/matdid/matdid346761.pdf





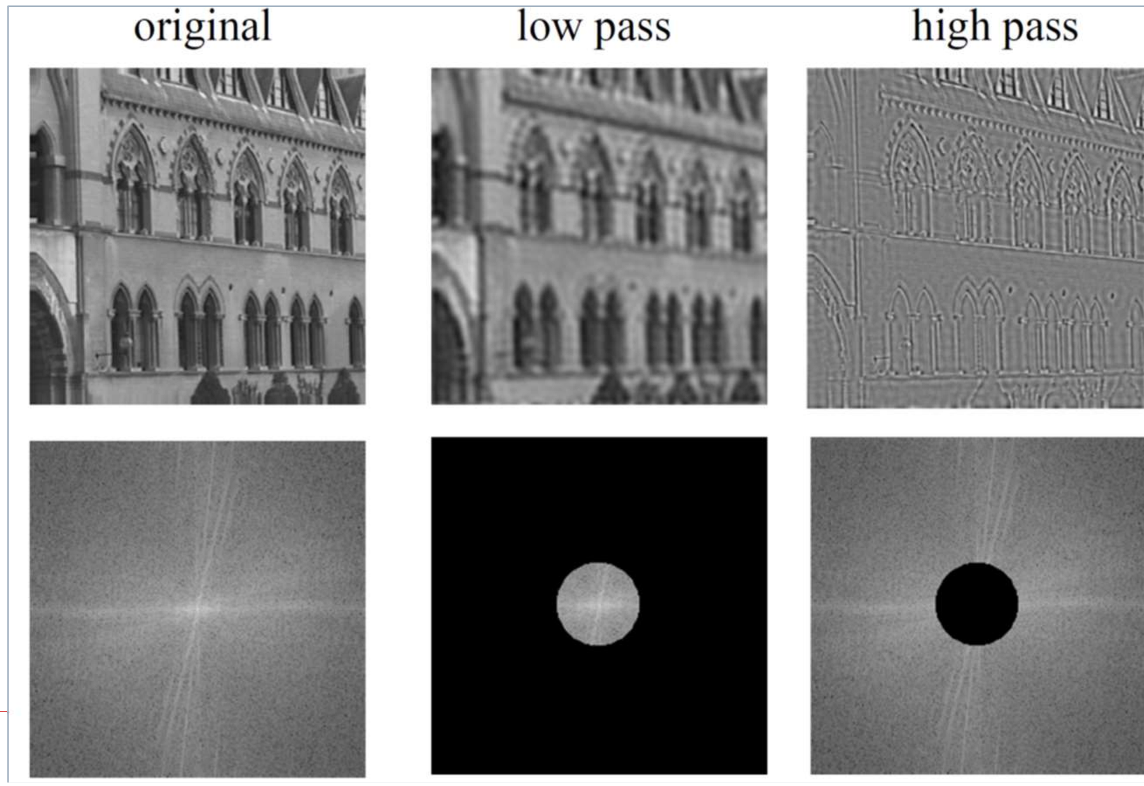




Immagini e sistemi lineari

Figure tratte da: https://www.robots.ox.ac.uk/~az/lectures/ia/lect2.pdf

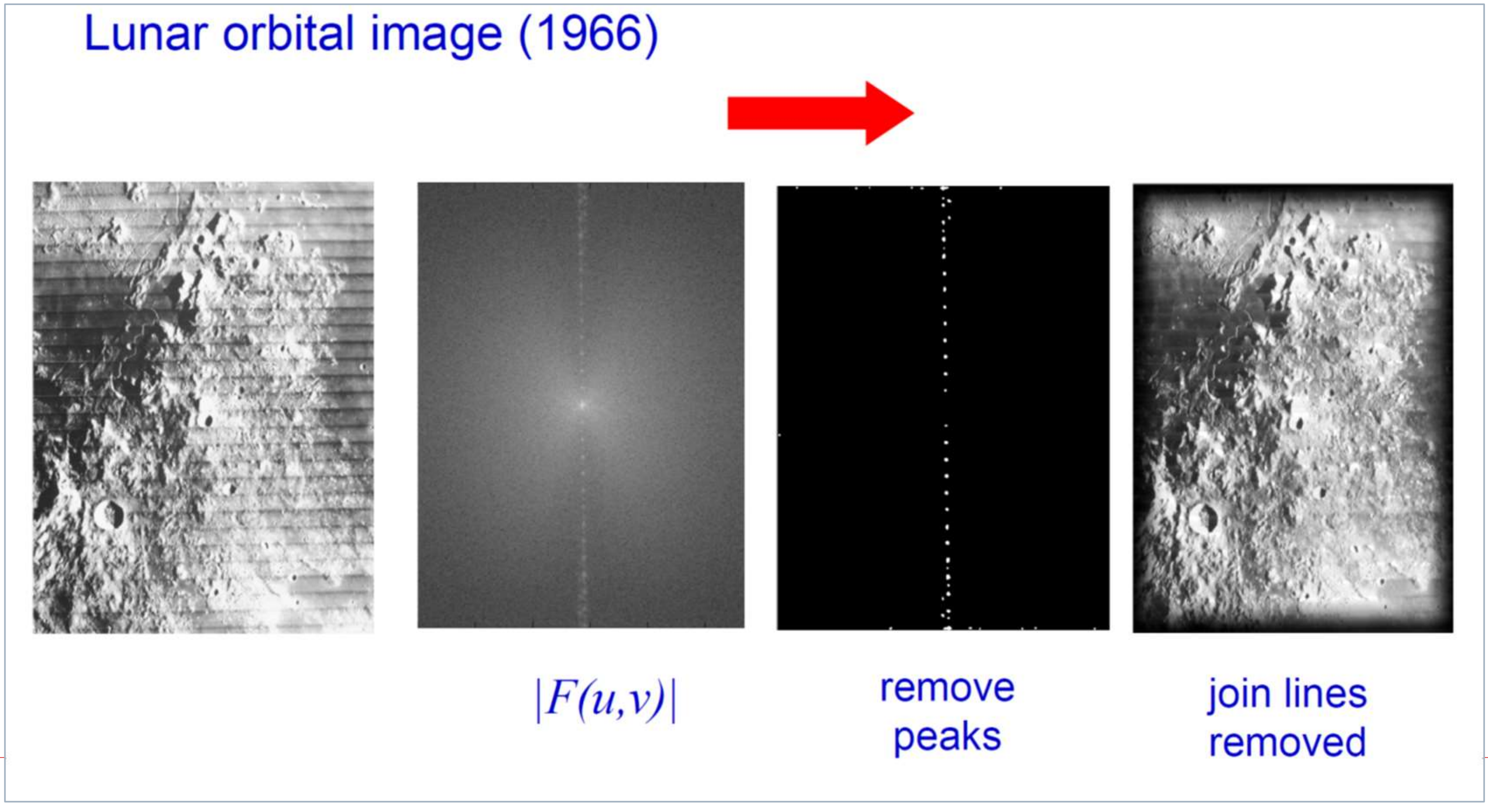
- Anche in questo ambito, si usano i sistemi lineari per trasformare l'immagine
  - Terminologia: filtraggio spaziale (spatial filtering)



Immagini e sistemi lineari

Figure tratte da: https://www.robots.ox.ac.uk/~az/lectures/ia/lect2.pdf

- Per chi fosse interessato, è disponibile in rete moltissimo materiale su questo argomento, che ha importanti applicazioni nel trattamento delle immagini

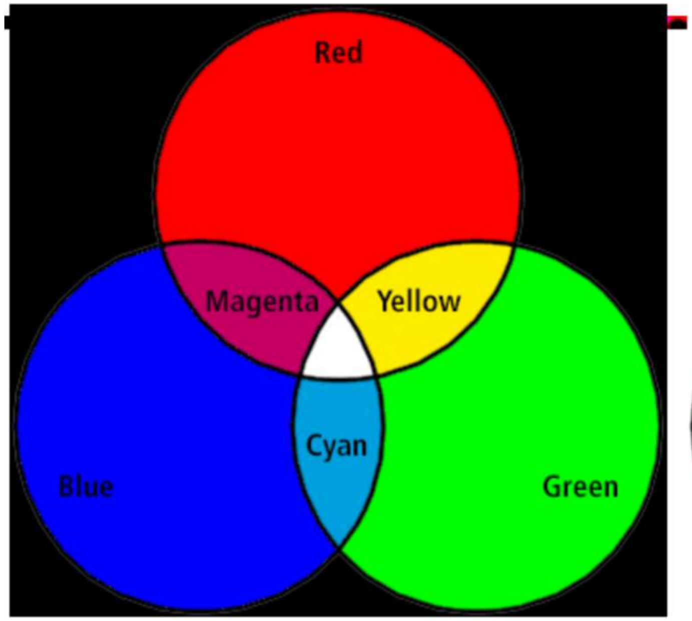


Immagini a colori

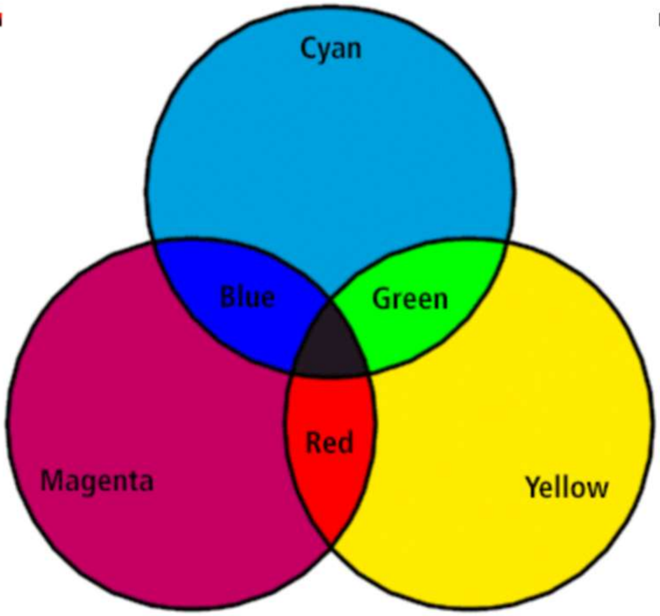
Figure tratte da: https://eeweb.engineering.nyu.edu/~yao/EL6123_s16/Color_ContrastEnhancement.pdf

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Rappresentate come una terna di segnali bidimensionali su 3 colori fondamentali (tipicamente RGB: Red, Green, Blue)



Magenta = Red + Blue
Cyan = Blue + Green
Yellow = Green + Red



Magenta = White - Green
Cyan = White - Red
Yellow = White - Blue

Immagini a colori

Figure tratte da: https://eeweb.engineering.nyu.edu/~yao/EL6123_s16/Color_ContrastEnhancement.pdf

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Immagine a colori

e scomposizione sull'intensità di ciascuna delle 3 component RGB

red

Green

Blue

Video a colori

- Nel video a colori si aggiunge un'ulteriore dimensione, cioè la variabile tempo
- Si devono dunque "trattare" 3 segnali RGB, ciascuno del tipo $f(x,y,t)$