Teoria dei Segnali

Esercitazione 8

Processi casuali

Esercizio 1

Dato un processo casuale stazionario $X(t) = A + \cos(2\pi t + \phi)$, dove A e ϕ sono due variabili casuali statisticamente indipendenti, che variano da realizzazione a realizzazione, con distribuzione uniforme negli intervalli $1 \leq A \leq 3$, e $-\pi \leq \phi \leq +\pi$, rispettivamente.

1. Determinare se il processo è ergodico
2. Determinare la densità spettrale di potenza del processo
3. Determinare la potenza del processo $Y(t)$ ottenuto filtrando il processo $X(t)$ con un filtro con funzione di trasferimento $H(f) = \frac{1}{1+j2\pi f}$

Soluzione Esercizio 1.1

$$\boxed{X(t) = A + \cos(2\pi\, t + \phi)} \qquad \boxed{f_A(x) = \frac{1}{2}\, p_2(x-2) \quad f_\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\, p_{2\pi}(x)}$$

- Una realizzazione del processo: $x(t;s_0) = \alpha + \cos(2\pi\, t + \theta)$

- Media temporale:

$$\langle x(t;s_0)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\alpha + \cos(2\pi f_0 t + \theta)]dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \alpha\, dt + \underbrace{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f_0 t + \theta)dt}_{=0} = \alpha$$

Soluzione Esercizio 1.1

$$\boxed{X(t) = A + \cos(2\pi t + \phi)}$$

$$\boxed{f_A(x) = \frac{1}{2} p_2(x-2) \quad f_\phi(x) = \frac{1}{2\pi} p_{2\pi}(x)}$$

- Media di insieme:

$$E_{A,\phi}\{X(t)\} = E_{A,\phi}\{A + \cos(2\pi t + \phi)\} =$$

$$= E_A\{A\} + E_\phi\{\cos(2\pi t + \phi)\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_A(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi t + x) f_\phi(x)dx =$$

$$= \int_1^3 x \frac{1}{2} dx + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2\pi t + x)dx = 2$$

=0 (il coseno ha periodo 2π in x)

- Media temporale e media di insieme sono diverse → il processo non è ergodico

Soluzione Esercizio 1.2

$$\boxed{X(t) = A + \cos(2\pi t + \phi)}$$

$$\boxed{f_A(x) = \frac{1}{2} p_2(x-2) \qquad f_\phi(x) = \frac{1}{2\pi} p_{2\pi}(x)}$$

- Autocorrelazione (processo WSS):

$$R_X(\tau) = E_{A,\varphi}\{X(t)X(t+\tau)\} = E_{A,\varphi}\{[A+\cos(2\pi t+\varphi)][A+\cos(2\pi(t+\tau)+\varphi)]\} =$$

$$= E_A\{A^2\} + E_\varphi\{\cos(2\pi t+\varphi)\cos(2\pi(t+\tau)+\varphi)\} +$$

$$+ \underbrace{E_{A,\varphi}\{A\cos(2\pi t+\varphi)\}}_{\to 0} + \underbrace{E_{A,\varphi}\{A\cos(2\pi(t+\tau)+\varphi)\}}_{\to 0} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 x\,dx + \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(4\pi t + 2\pi\tau + 2x) + \cos(2\pi\tau)\right)dx =$$

$$= \frac{13}{3} + \frac{1}{2}\cos(2\pi\tau)$$

- Densità spettrale di potenza: $S_X(f) = \frac{13}{3}\delta(f) + \frac{1}{4}[\delta(f-1) + \delta(f+1)]$

Soluzione esercizio 1.3

- Determinare la potenza del processo Y(t) ottenuto filtrando il processo X(t) con un filtro con funzione di trasferimento: $H(f)=\dfrac{1}{1+j2\pi f}$

$$S_X(f)=\frac{13}{3}\delta(f)+\frac{1}{4}\left[\delta(f-1)+\delta(f+1)\right]$$

$$X(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow Y(t)$$

$$S_Y(f)=\left|\frac{1}{1+(2\pi f)^2}\right|\left[\frac{13}{3}\delta(f)+\frac{1}{4}\left[\delta(f-1)+\delta(f+1)\right]\right]$$

$$=\frac{13}{3}\delta(f)+\frac{1}{4}\frac{1}{1+(2\pi)^2}\left[\delta(f-1)+\delta(f+1)\right]$$

$$P(Y)=\frac{13}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+4\pi^2}=\frac{29+104\pi^2}{6\left(1+4\pi^2\right)}$$

Esercizio 2

Il processo casuale stazionario $X(t)$ è noto statisticamente. Determinare la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale di potenza del processo casuale:

$$Y(t) = X(t) - X(t - t_0)$$

Se il processo $X(t)$ è gaussiano con densità spettrale di potenza

$$S_x(f) = p_4(f) + \eta_x \delta(f)$$

determinare la densità spettrale del processo $Y(t)$ con $t_0 = 1/4$.

Soluzione Esercizio 2

$$Y(t) = X(t) - X(t - t_0)$$

- Funzione di auto-correlazione:

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= E\{Y(t)Y^*(t+\tau)\} = E\{[X(t) - X(t-t_0)][X^*(t+\tau) - X^*(t+\tau-t_0)]\} = \\ &= E\{X(t)X^*(t+\tau)\} + E\{X(t-t_0)X^*(t+\tau-t_0)\} - E\{X(t)X^*(t+\tau-t_0)\} - E\{X(t-t_0)(t+\tau)\} = \\ &= 2R_X(\tau) - [R_X(\tau - t_0) + R_X(\tau + t_0)] \end{aligned}$$

- Densità spettrale di potenza:

$$\begin{aligned} S_Y(f) &= 2S_X(f) - \left[S_X(f)e^{-j2\pi f t_0} + S_X(f)e^{-j2\pi f t_0}\right] \\ &= 2S_X(f)\left[1 - \cos(2\pi f t_0)\right] = 4S_X(f)\sin^2(\pi f t_0) \end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 2

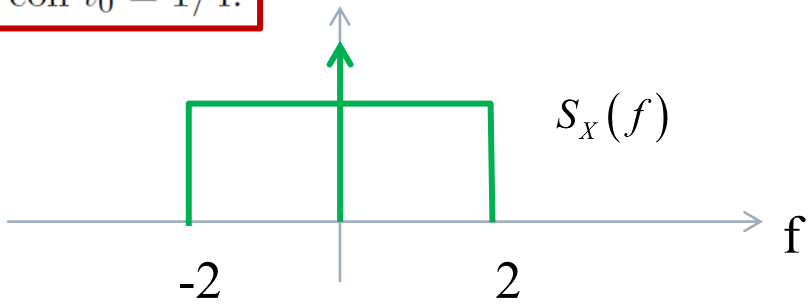
Se il processo $X(t)$ è gaussiano con densità spettrale di potenza

$$S_x(f) = p_4(f) + \eta_x \delta(f)$$

determinare la densità spettrale del processo $Y(t)$ con $t_0 = 1/4$.

$$S_X(f) = p_4(f) + \eta_x \delta(f)$$

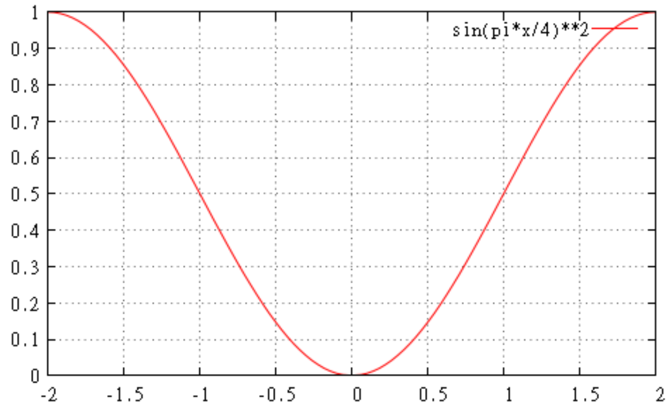
$$S_Y(f) = 4 S_X(f) \sin^2(\pi f t_0)$$



$$S_Y(f) = 4\left(p_4(f) + \eta_x \delta(f)\right)\sin^2\left(\frac{\pi f}{4}\right) =$$

$$= 4 p_4(f)\sin^2\left(\frac{\pi f}{4}\right) + 4\eta_x \delta(f)\sin^2\left(\frac{\pi 0}{4}\right) =$$

$$= 4 p_4(f)\sin^2\left(\frac{\pi f}{4}\right)$$



Esercizio 3

Un rumore gaussiano $n(t)$ con densità spettrale di potenza $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$ per $|f| < B$ passa attraverso un sistema lineare con risposta all'impulso $h(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t - T)$. Il segnale in uscita passa attraverso un sistema non lineare che ne fa il quadrato. Calcolare il valor medio dell'uscita, nel caso $B = 3/4T$.

Soluzione Esercizio 3

- Sistema lineare:

$$n(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{n'(t)} \boxed{(\bullet)^2} \longrightarrow n''(t)$$

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} \quad \text{per} \quad |f| < B \qquad h(t) = \delta(t) + 0.5\,\delta(t-T) \qquad B = \frac{3}{4T}$$

$$H(f) = 1 + \frac{1}{2}\exp(-j2\pi fT) \quad \Rightarrow \quad |H(f)|^2 = \frac{5}{4} + \cos(2\pi fT)$$

- Lo spettro di n’(f) vale:

$$S_{n'}(f) = \frac{N_0}{2}\, p_{2B}(f) \left[\frac{5}{4} + \cos(2\pi fT)\right]$$

Soluzione Esercizio 3

$$n(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{n'(t)} \boxed{(\bullet)^2} \longrightarrow n''(t)$$

$$S_{n'}(f) = \frac{N_0}{2} p_{2B}(f) \left[\frac{5}{4} + \cos(2\pi f T) \right]$$

- Il valor medio di n"(f) vale:

$$E\left[n''(t)\right] = E\left[\left(n'(t)\right)^2\right] = R_{n'}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{n'}(f)\,df$$

$$= \int_{-B}^{B} \frac{N_0}{2} \left[\frac{5}{4} + \cos(2\pi f T) \right] df = \frac{5}{4} \frac{N_0}{\cancel{2}} \cancel{2} B + \frac{1}{2\pi T} \frac{N_0}{2} \left[\sin(2\pi f T) \right]_{-B}^{B}$$

$$= \frac{15}{16} \frac{N_0}{T} - \frac{N_0}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}}{2\pi T} = \frac{N_0 (15\pi - 8)}{16\pi T}$$

$B = 3/4T$

Esercizio 4

Si consideri un processo casuale $X(t) = \xi + \cos(2\pi f_o t + \theta)$, dove ξ è una variabile casuale discreta che assume i due valori ± 1 con uguale probabilità, e θ è una variabile casuale indipendente da ξ distribuita uniformemente nell'intervallo $[-\pi; +\pi]$. Calcolare $E\{X^2(t)\}$.

Soluzione Esercizio 4

$$E\{X^2(t)\} = E\{[\xi + \cos(2\pi f_0 t + \theta)]^2\} =$$

$$= E\{\xi^2 + [\cos(2\pi f_0 t + \theta)]^2 + 2\xi\cos(2\pi f_0 t + \theta)\} =$$

$$= E\{\xi^2\} + E\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t + 2\theta)\right\} + 2E\{\xi\}E\{\cos(2\pi f_0 t + \theta)\} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}E\{\cos(4\pi f_0 t + 2\theta)\} =$$

INDIPENDENTI

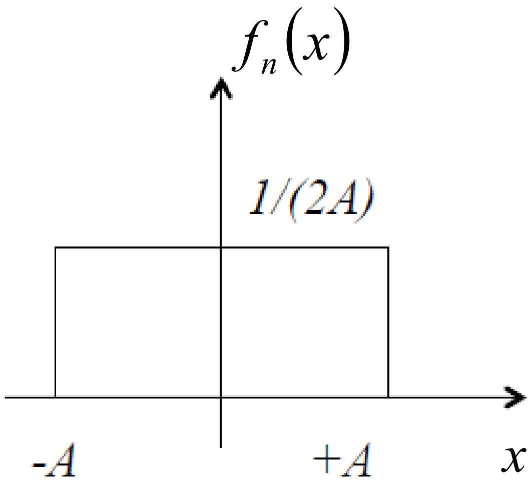
$$= \frac{3}{2}$$

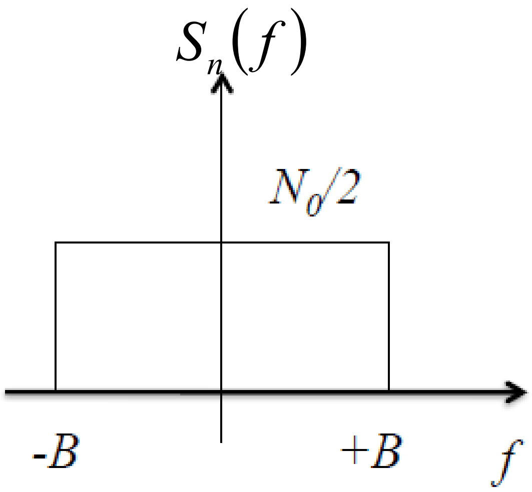
Esercizio 5

Un processo casuale $n(t)$ WSS ha una densita' di probabilita' del primo ordine uniforme nell'intervallo $[-A; +A]$ e spettro di potenza $S_n(f) = \frac{N_0}{2} p_{2B}(f)$. Ricavare la relazione che lega A, B e N_0.

Soluzione Esercizio 5

- Per rispondere a questa domanda bisogna chiedersi quale relazione leghi la densità di probabilità allo spettro di potenza del processo:





Soluzione Esercizio 5

- Ricordiamo che lo spettro di potenza di un processo casuale rappresenta la distribuzione nel dominio della frequenza del valor quadratico medio, quindi:

$$E\{n^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\,df \qquad\qquad E\{n^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n(x)\,dx$$

(n(t) ha densità di prob. uniforme in [-A,A] -> è reale)

$$\int_{-A}^{+A} x^2 \frac{1}{2A}\,dx = \int_{-B}^{+B} \frac{N_0}{2}\,df$$

$$\frac{1}{6A}\left[A^3 + A^3\right] = \frac{N_0}{2} 2B \quad \Rightarrow \quad A^2 = 3N_0 B$$

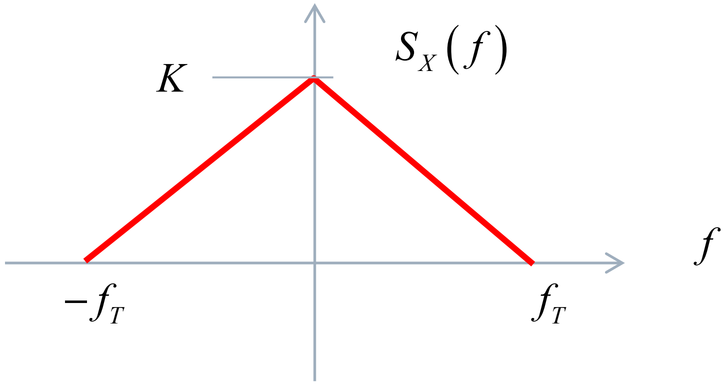
Esercizio 6

Dato il processo casuale $X(t)$ stazionario con valor medio nullo, potenza 10 e densità spettrale di potenza triangolare nella banda $-5Hz \leq f \leq +5Hz$, determinare T_c in modo che i campioni $X(nT_c)$, ottenuti campionando $X(t)$ con passo T_c risultino incorrelati.
Il segnale $X(t)$ entra in un filtro ideale passa-basso con guadagno A e frequenza di taglio $f_0 = 2.5Hz$. Calcolare il valor quadratico medio del segnale in uscita.

Soluzione Esercizio 6

- Autocorrelazione:

$$R_X(\tau) = Kf_T \,\mathrm{sinc}^2(f_T \tau)$$



- La potenza di X(t) è pari a 10:

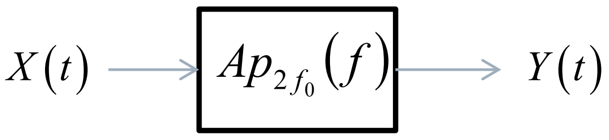
$$P(X) = \int S_x(f)df = Kf_T \quad \Rightarrow \quad Kf_T = 10 \Rightarrow K = 2$$

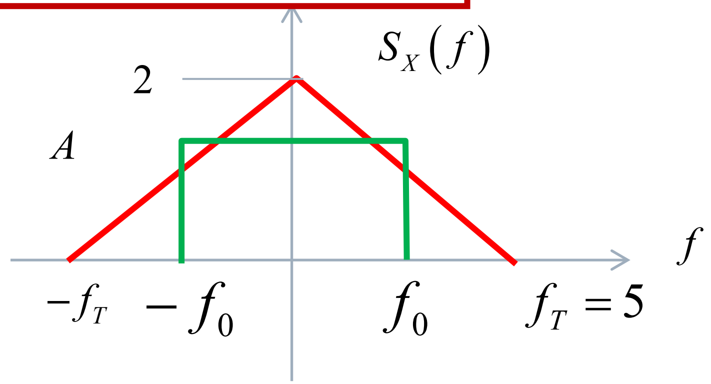
- I campioni $X(nT_c)$ e $X(mT_c)$ sono incorrelati se:

$$E\{X(nT_c)X(mT_c)\} = R_X((m-n)T_c) = 0 \quad \forall n \neq m \quad \Rightarrow \quad T_C = \frac{k}{f_T} = 0.2k$$

Soluzione Esercizio 6

Il segnale $X(t)$ entra in un filtro ideale passa-basso con guadagno A e frequenza di taglio $f_0 = 2.5Hz$. Calcolare il valor quadratico medio del segnale in uscita.

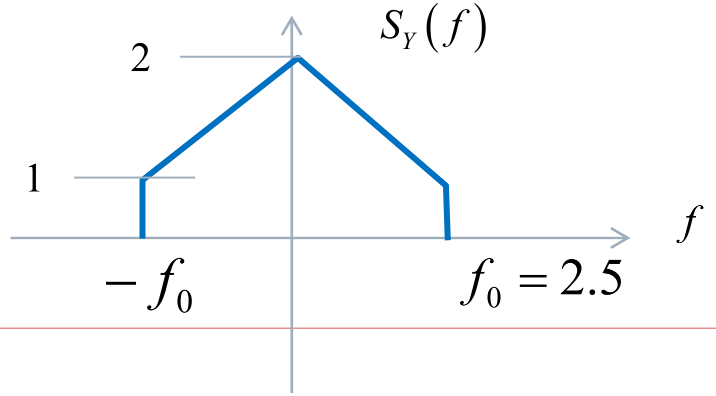




- Il valor quadratico medio coincide con l'integrale dello spettro di potenza:

$$E\{Y^2(t)\} = \int S_Y(f)\,df = A^2 3 f_0 = 7.5\,A^2$$

Area della figura



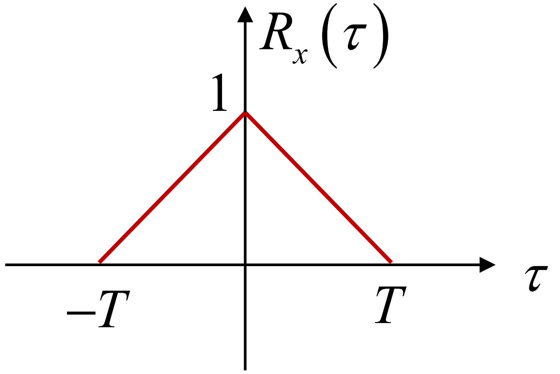
Esercizio 7

Sia $x(t)$ un processo casuale Gaussiano stazionario con funzione di autocorrelazione

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T} & \text{per } |\tau| < T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si consideri il processo $y(t) = x(t) + x(t - T)$, dove $T > 0$ è un ritardo fisso. Calcolare valor medio e varianza di $y(t)$.

Soluzione Esercizio 7



$$E\left[y(t)\right]=E\left[x(t)+x(t-T)\right]=E\left[x(t)\right]+E\left[x(t-T)\right]$$

- Il processo x(t) ha media nulla, in quanto:

$$\lim_{\tau\to\infty} R_x(\tau)=\mu_x^2=0$$

- Quindi: $E\left[y(t)\right]=0$

- La varianza coincide con il valor quadratico medio:

$$\sigma_y^2=E\left[y^2(t)\right]=E\left[\left(x(t)+x(t-T)\right)^2\right]=E\left[x^2(t)\right]+E\left[x^2(t-T)\right]+2E\left[x(t)x(t-T)\right]=$$

$$=R_x(0)+R_x(0)+R_x(T)=1+1+0=2$$