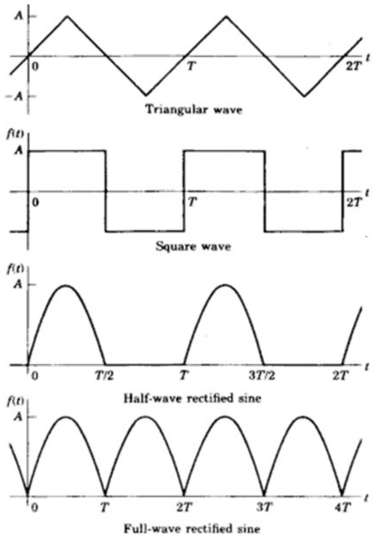
Teoria dei Segnali

- Segnali periodici e loro trasformate



Anno accademico 2024-2025

Ultimo aggiornamento: Settembre 2024

Introduzione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- I segnali periodici (e le loro trasformate) sono particolarmente rilevanti nell'ambito della teoria dei segnali
  - Ad esempio, gli argomenti di questa lezione sono rilevanti per i legami con il teorema del Campionamento e la successiva evoluzione relativa ai segnali discreti

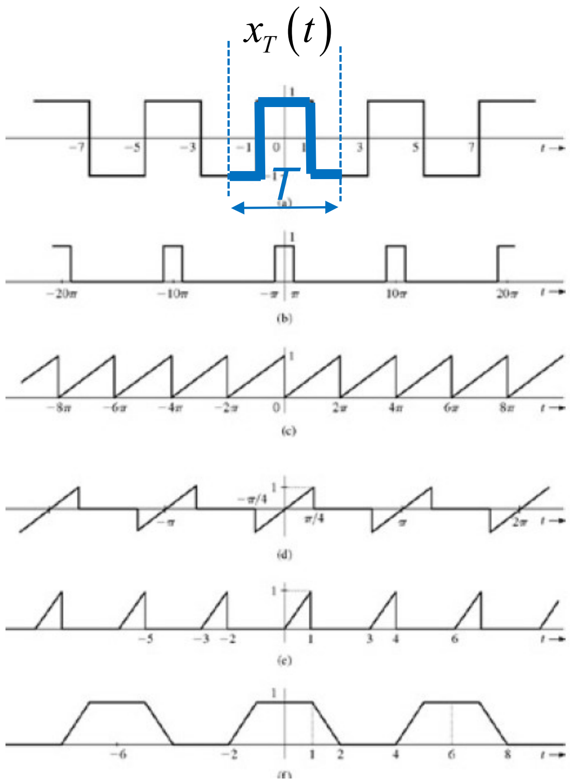
- In questo capitolo, ci si focalizzerà sui segnali periodici e sul calcolo della loro Trasformate di Fourier

Segnali periodici

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Definizione di segnale periodico di periodo T

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{per ogni } t$$



- Possibile espressione di un segnale periodico in funzione del segnale $x_T(t)$ su intervallo T, cioè del segnale definito su un periodo del segnale periodico:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_T(t-nT)$$

Segnali ciclici

- Definizione di segnale ciclico

$$x_c(t) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x_T(t - nT) \neq x_c(t+T)$$

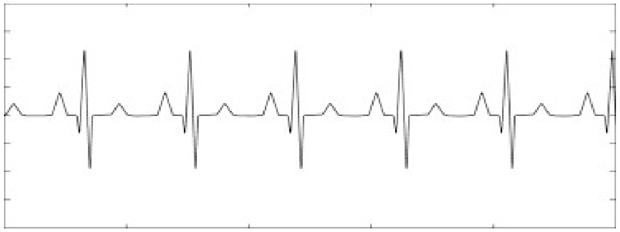
Con n_1, n_2 finiti

  - Questi segnali sono più adatti a rappresentare la realtà fisica, in quanto hanno un inizio ed una fine
  - Qualitativamente, un segnale ciclico può essere inteso come un segnale periodico «troncato» ad un certo numero finito di periodi

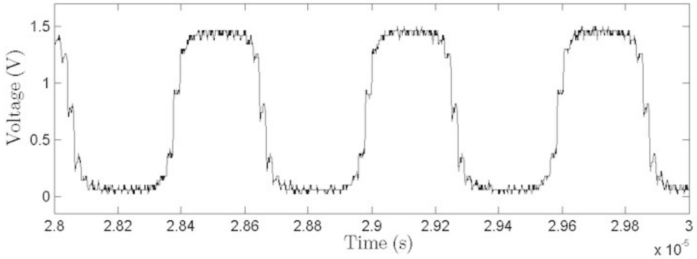
- I segnali periodici sono una buona astrazione per i segnali ciclici (molto comuni nella pratica ingegneristica) e sono più facili da trattare matematicamente, soprattutto dal punto di vista dell'analisi spettrale

Esempi pratici

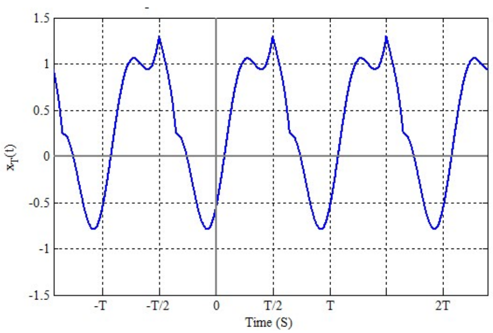
- Molti segnali nella pratica ingegneristica sono <u>approssimativamente</u> periodici:
  - sono ciclici
  - i vari periodi sono in buona approssimazione simili tra di loro



Elettro-cardiogramma



Segnale di clock



Altro esempio di segnale di clock

Serie di Fourier

- La serie di Fourier permette di rappresentare un qualunque segnale periodico $x(t)$ come:

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} \quad \forall t}$$

- dove i coefficienti sono calcolati sulla versione di $x(t)$ troncata su una periodicità:

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

$x_T(t)$ Versione di $x(t)$ troncata su un tempo T

TdF di segnali periodici

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- La trasformata di Fourier del segnale periodico si può dunque ottenere come segue:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}\right)e^{-j2\pi ft}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_n\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\frac{2\pi}{T}nt}e^{-j2\pi ft}dt$$

- Ricordando che: $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi f t}dt=\delta(f)$

- Otteniamo: $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{+j2\pi\frac{n}{T}t}e^{-j2\pi f t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j2\pi\left(f-\frac{n}{T}\right)t}dt=\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)$

$$\boxed{X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_n\cdot\delta(f-n/T)}$$

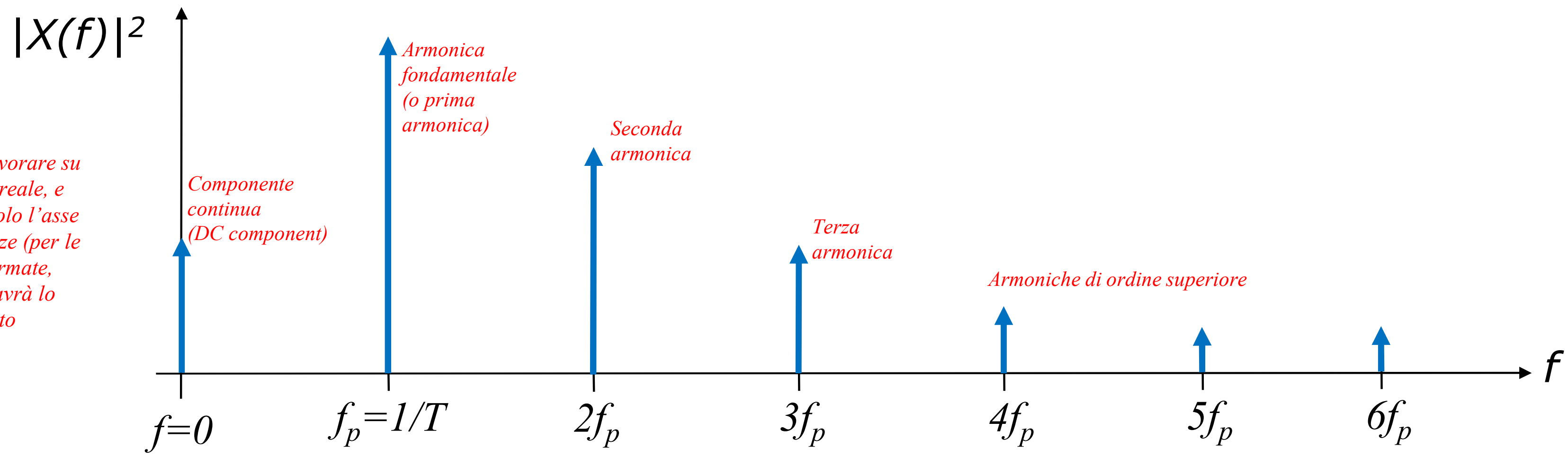
Trasformata di Fourier di un segnale periodico in termini dei coefficienti della serie di Fourier (che dipendono a loro volta dal segnale troncato in $[0,T]$)

Nota: si osservi lo spettro a "righe" sui multipli dell'inverso del periodo

Terminologia per spettro segnali periodici

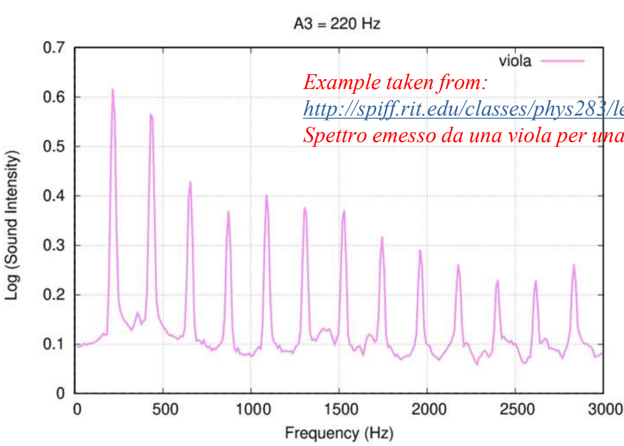
- Lo spettro di segnali periodici è dunque uno spettro «a righe» in frequenza, posizionati sui multipli della frequenza fondamentale del segnale periodico ($f_p=1/T$)
- Si tratta di un risultato molto noto in vari ambiti, e che ha una sua «terminologia»

Supponiamo qui di lavorare su un segnale periodico reale, e dunque disegniamo solo l'asse positivo delle frequenze (per le proprietà delle trasformate, sull'asse negativo si avrà lo stesso spettro, ribaltato attorno a f=0)

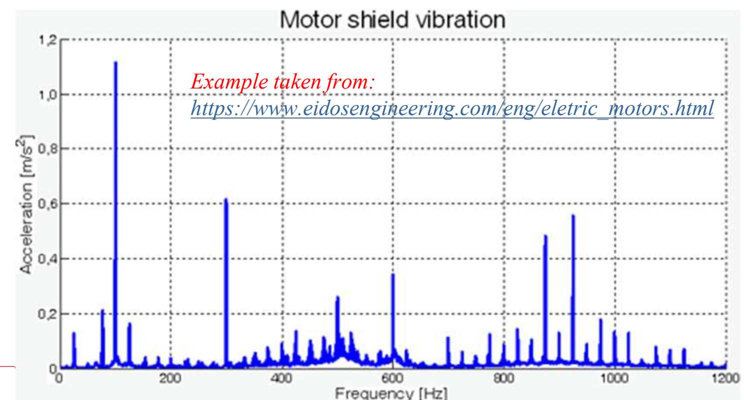


Commento su slide precedente

- La caratteristica di avere uno spettro a righe è vera solo per i segnali periodici (che sono però una astrazione matematica)
- I segnali ciclici (cioè quelli reali) hanno comunque uno spettro molto simile, e dunque, in prima approssimazione, a righe spettrali
  - Esempi pratici:
    - Suono emesso da una corda in vibrazione, quasi-ciclico entro un certo intervallo temporale
    - Vibrazioni meccaniche di un motore



Example taken from:
http://spiff.rit.edu/classes/phys283/lectures/timbre/timbre.html
Spettro emesso da una viola per una nota con fondamentale a 220 Hz



Example taken from:
https://www.eidosengineering.com/eng/eletric_motors.html

TdF di segnali periodici: altro approccio

- I coefficienti della serie di Fourier possono anche essere espressi utilizzando la TdF del segnale troncato. Infatti:

$$\mu_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T} X_T(n/T)$$

- Conseguentemente si può ottenere una seconda utile espressione per la trasformata di Fourier di un segnale periodico:

$$\boxed{X(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T\left(\frac{n}{T}\right)\cdot\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)}$$

Si tratta di una espressione in funzione della trasformata di Fourier del segnale troncato

Commenti su TdF di segnali periodici

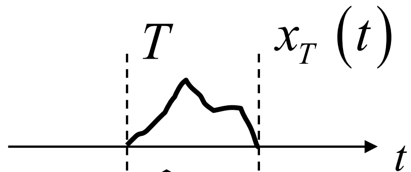
$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T\left(\frac{n}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

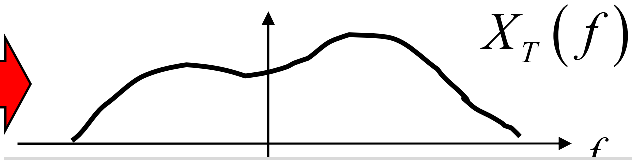
- Si tratta di una trasformata costituita da impulsi equispaziati di $1/T$ (spettro a righe)
  - Come già ottenuto nella espressione di una slide precedente

- Ciascuna riga è moltiplicata per un coefficiente che dipende dal valore assunto dalla trasformata del segnale troncato in corrispondenza di quella frequenza $f_n = \frac{n}{T}$

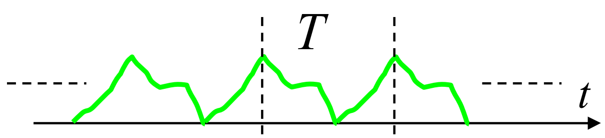
Esempio grafico, segnale con periodo T

Segnale troncato ad un periodo





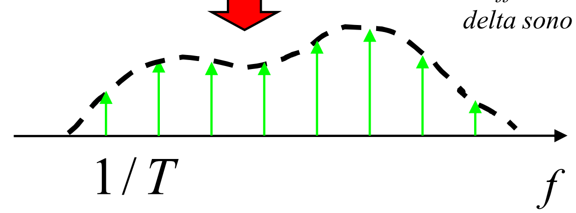
Trasformata di Fourier del segnale troncato



Segnale periodico

$$x(t) = \sum_n x_T(t - nT)$$

Nota: *si tratta di una rappresentazione «qualitativa» in quanto in generale i coefficienti moltiplicativi delle delta sono complessi*

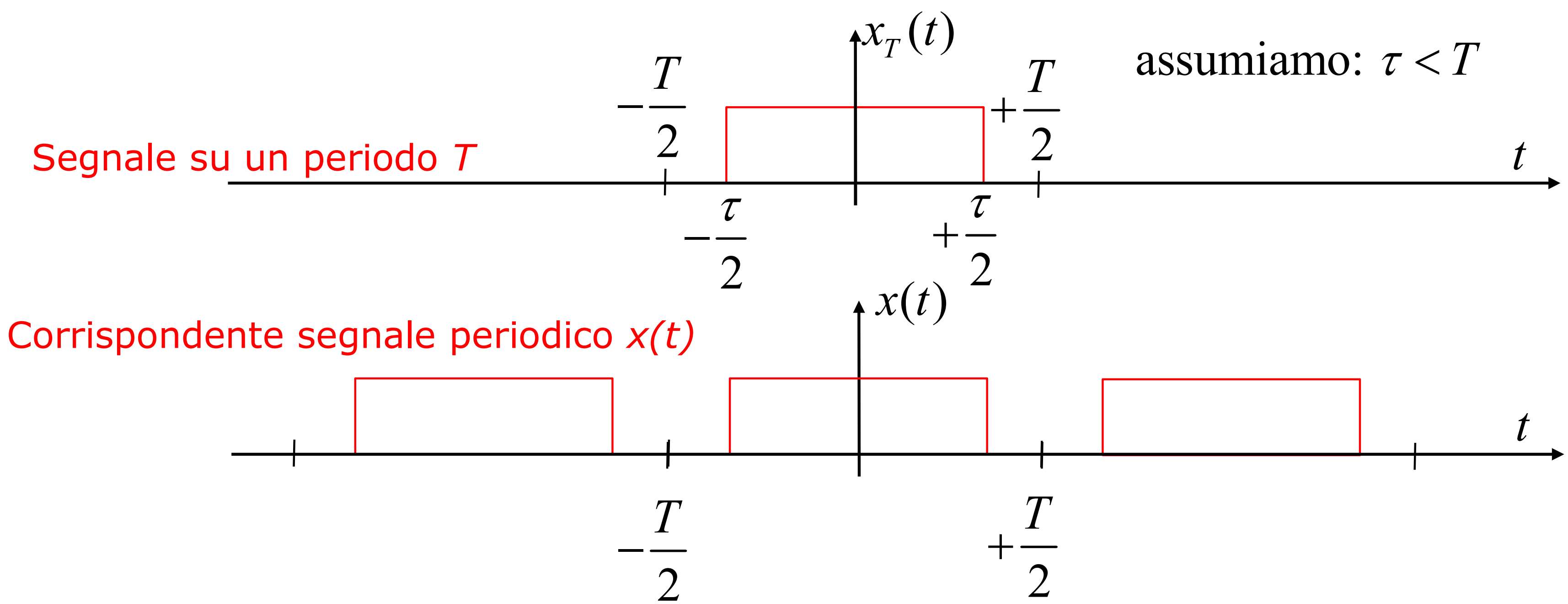


$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_n X_T\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Trasformata di Fourier del segnale periodico (a “righe” spettrali)

Esempio pratico: onda quadra

- Consideriamo un'onda quadra con le seguenti caratteristiche

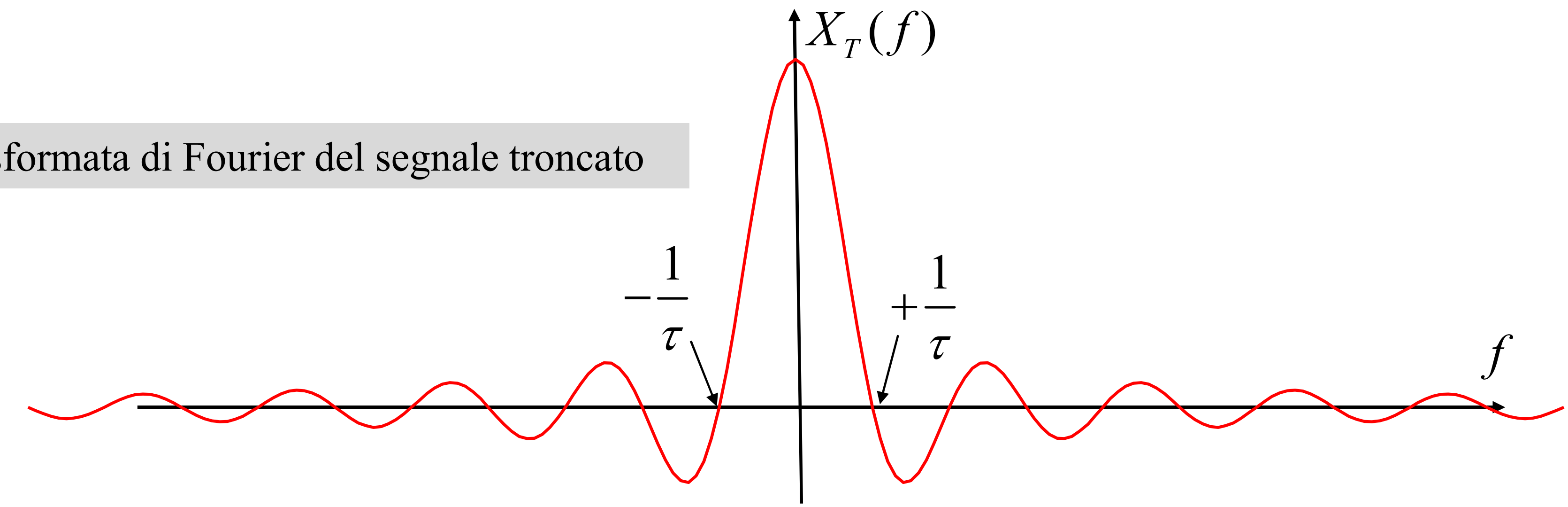


- Calcoliamo la trasformata di Fourier

Esempio pratico: onda quadra

$$X_T(f) = \mathcal{F}\left[x_T(t)\right] = \frac{\sin\left(\pi f \tau\right)}{\pi f}$$

Trasformata di Fourier del segnale troncato

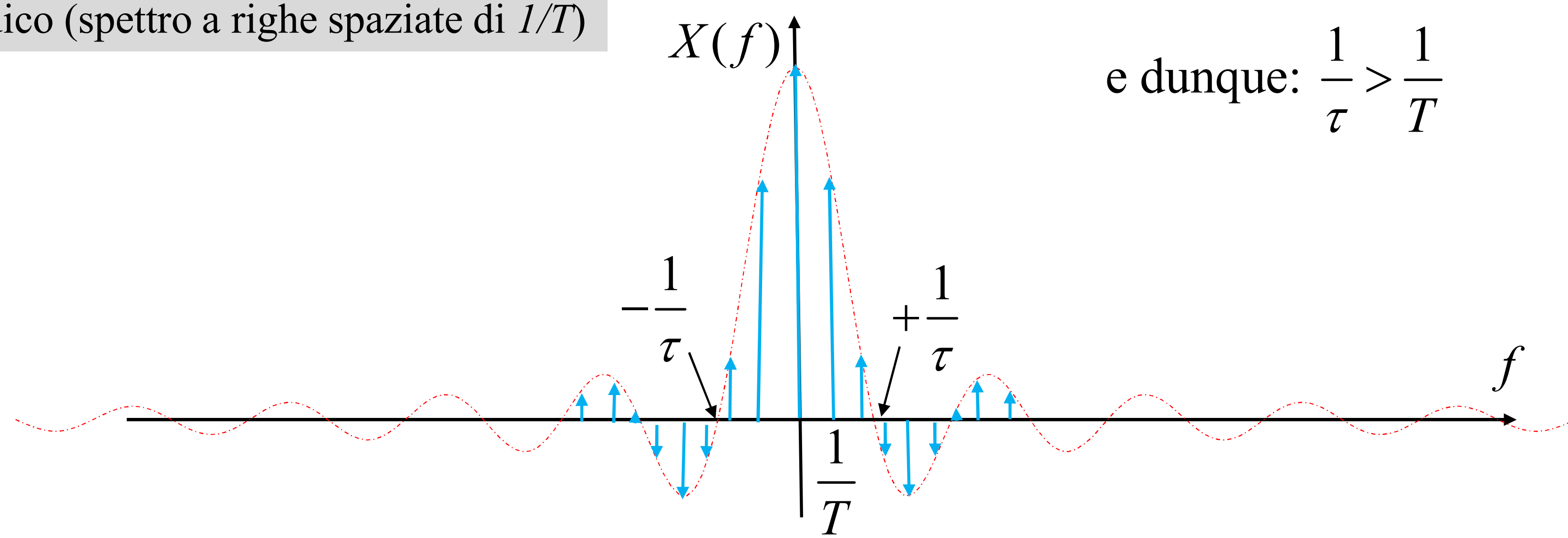


Esempio pratico: onda quadra

Trasformata di Fourier del segnale periodico (spettro a righe spaziate di *1/T*)

assumiamo: $\tau < T$

e dunque: $\frac{1}{\tau} > \frac{1}{T}$



Nota: può succedere che alcune righe spettrali siano nulle, in quanto cadono su zeri di $X_T(f)$

Il segnale «treno di impulsi»

- Definiamo il segnale <u>"campionatore" o treno di impulsi</u> nel tempo

$$c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- Questo segnale è alla base della teoria del campionamento
  - È inoltre ovviamente un segnale periodico, ed è per questo che lo trattiamo in questo capitolo

- Nelle prossime slides faremo alcune deduzioni su questo segnale e sulla sua trasformata di Fourier

Trasformata del «treno di impulsi»

$$c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Sfruttando direttamente le proprietà delle trasformate (linearità e ritardo) e ricordando che:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$$

$$\Rightarrow \quad C_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-j2\pi f \cdot nT)$$

- Alternativamente, applichiamo il risultato sui segnali periodici a $c_T(t)$:

$$C_T(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Dimostrazione alla slides successiva

Trasformata del «treno di impulsi»

- Sfruttando la formula: $X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu_n\cdot\delta(f-n/T)$

  dove : $\mu_n=\dfrac{1}{T}X_T(n/T)$

  qui abbiamo: $X_T(f)=F\{\delta(t)\}=1\rightarrow\mu_n=\dfrac{1}{T}$ da cui:

$$\boxed{C_T(f)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)}$$

Espressione alternativa a quella della slide precedente per la trasformata di Fourier di un treno di Delta con spaziatura T

- Ne segue dunque la relazione:

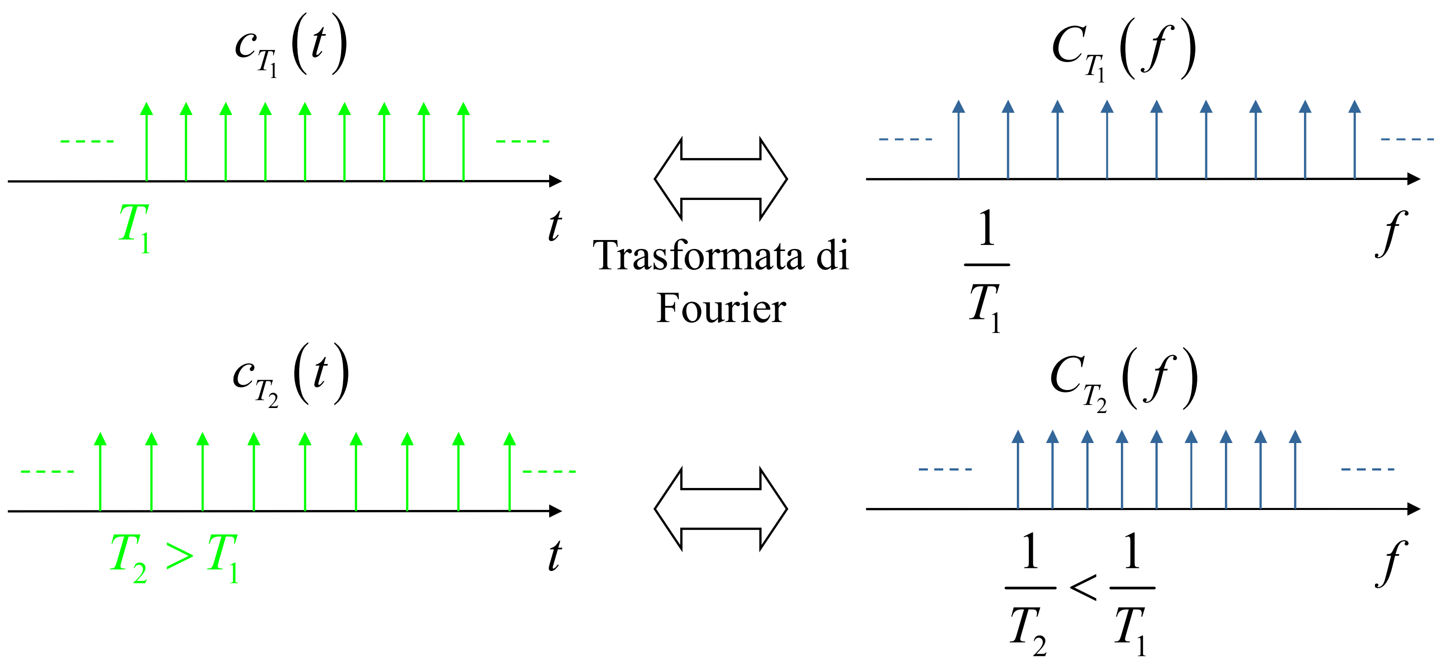
$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-j2\pi nfT)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T}\right)}$$

Nota: useremo questa uguaglianza più volte in diverse dimostrazioni nei capitoli successivi

Il segnale «treno di impulsi»

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Confrontiamo due treni di impulsi con periodi diversi T_1 e T_2



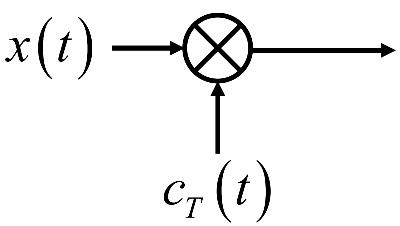
Per un treno di impulsi con periodo temporale più largo, otteniamo in frequenza un treno di delta più stretto

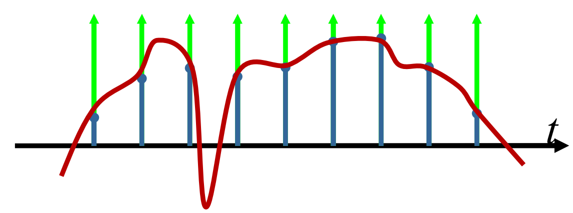
Prodotto per treno di delta

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Come già visto in precedenza, moltiplicando un segnale per un treno di impulsi otteniamo una sequenza equispaziata di suoi campioni
  - $c_T(t)$ è dunque detto anche «segnale campionatore» nel tempo

Prodotto nel tempo

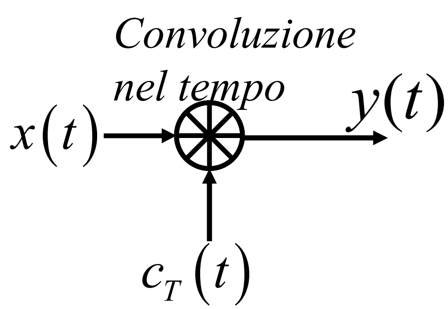




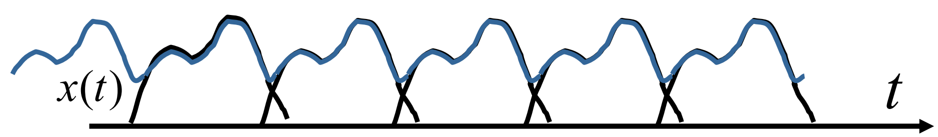
$$x(t)\cdot c_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\cdot\delta(t-nT)$$

Convoluzione per treno di delta

- Facendo il prodotto di convoluzione di un segnale generico per un treno di impulsi otteniamo invece un <u>segnale periodico di periodo pari alla spaziatura degli impulsi (periodicizzazione)</u>

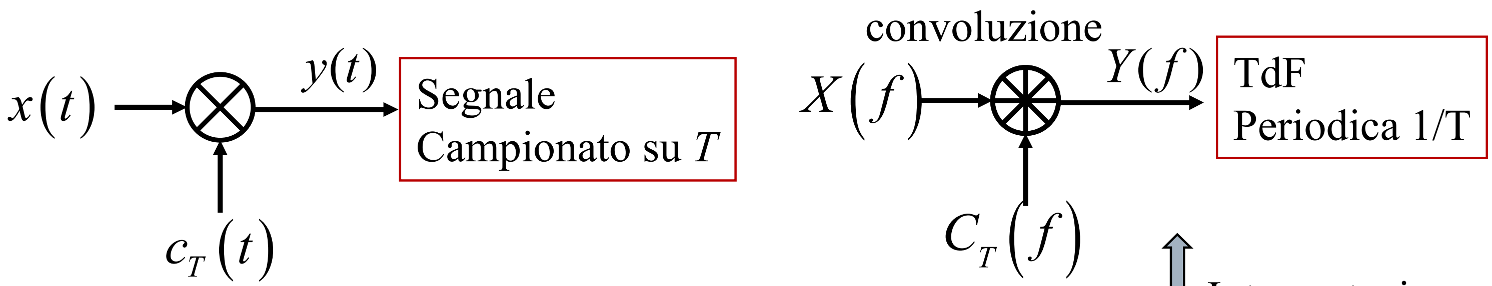


$$y(t) = x(t) * c_T(t)$$



$$x(t) * c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT)$$

TdF del prodotto con treno di delta

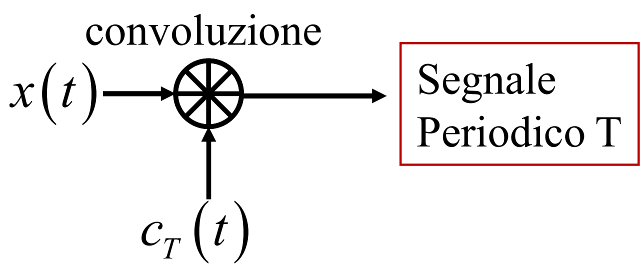


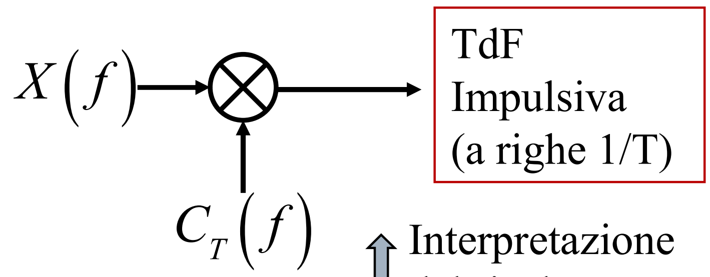
Interpretazione del risultato ottenuto:

$$y(t) = x(t)\cdot c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\cdot \delta(t-nT)$$

$$Y(f) = X(f) * \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f-\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f-\frac{n}{T}\right)$$

TdF della convoluzione con treno di delta





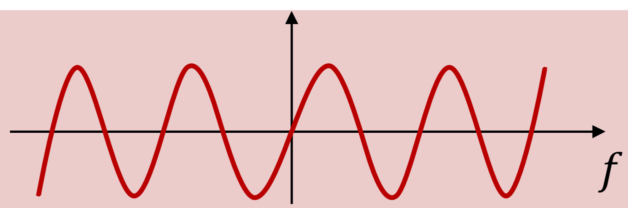
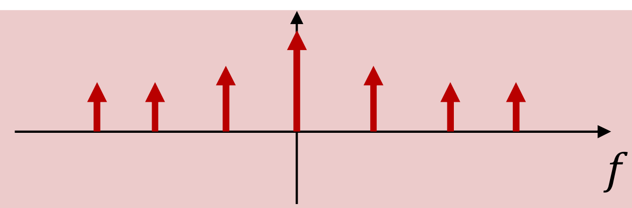
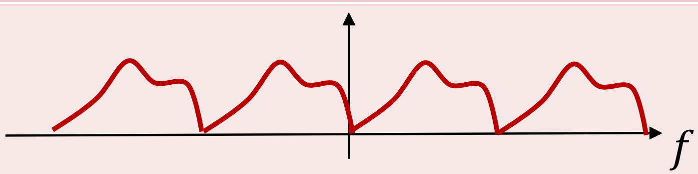
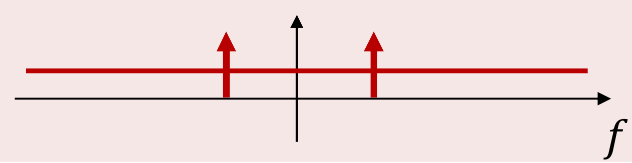
Interpretazione del risultato ottenuto:

$$y(t) = x(t) * c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT)$$

$$Y(f) = X(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Instant Poll

- Quale dei seguenti è la trasformata di Fourier di un segnale periodico?

A)		C)	
B)		D)	

Segnali periodicizzati

- Dato un generico segnale $z(t)$, il segnale:

$$\boxed{x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t-nT)}$$

Nota: $z(t)$ è qui un segnale del tutto generico (non è necessariamente né a supporto limitato né periodico)

- risulta essere periodico di periodo *T* anche quando il segnale $z(t)$ non è a supporto limitato in $[0,T]$. Infatti:

$$x(t+T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t-nT+T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t-(n-1)\cdot T) \quad \text{sia } m=(n-1)$$

$$x(t+T)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} z(t-mT)=x(t)$$

Segnali periodicizzati

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t - nT)$$

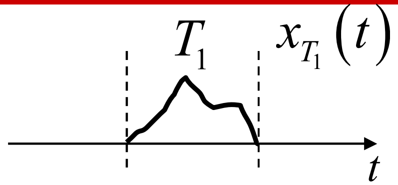
- La trasformata può essere calcolata osservando che:

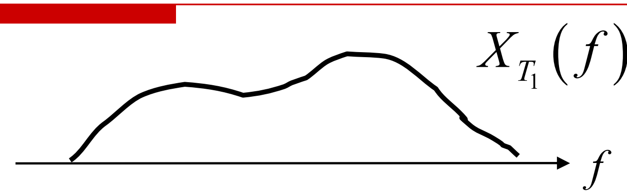
$$x(t) = z(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

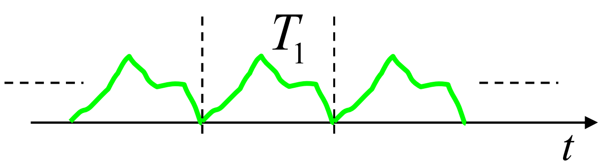
- E dunque:

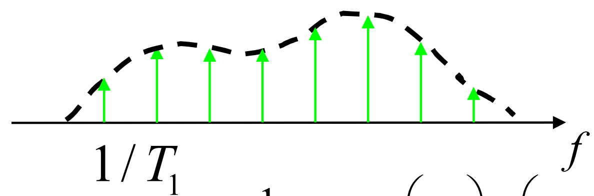
$$X(f) = Z(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z\left(\frac{n}{T}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Riassunto su TdF di segnali periodici





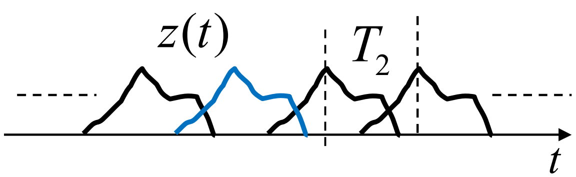


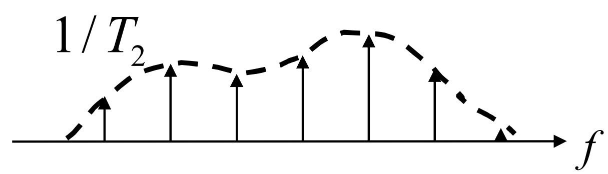


$$x_1(t) = \sum_n x_{T_1}(t - nT_1)$$

$$X_1(f) = \frac{1}{T_1} \sum_n X_{T_1}\left(\frac{n}{T_1}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_1}\right)$$

Più in generale, vale anche la seguente situazione:





$$x_2(t) = \sum_n z(t - nT_2)$$

$$X_2(f) = \frac{1}{T_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_{T_2}\left(\frac{n}{T_2}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_2}\right)$$

Ma vale anche: $X_2(f) = \dfrac{1}{T_2} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z\left(\frac{n}{T_2}\right) \cdot \delta\left(f - \frac{n}{T_2}\right)$

Rappresentazioni di un segnale periodico

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Conseguenza: la seguente rappresentazione di un determinato segnale $x(t)$ periodico

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t-nT)=x(t+T)$$

- NON è univoca

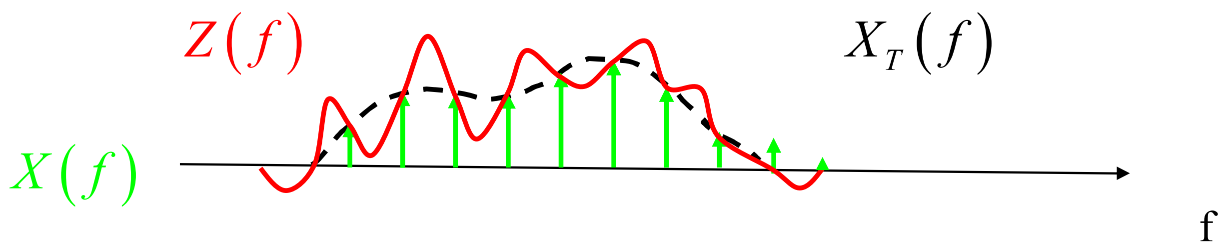
- Infatti può essere utilizzato qualunque segnale $z(t)$ che soddisfa la seguente relazione nell'intervallo $[0,T]$

$$z(t): \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t-nT)=x_T(t) \quad \forall t\in[0,T]$$

Nel dominio della frequenza

Commento: valgono dunque entrambe le formule:

$$X(f) = \frac{1}{T}\sum_n X_T\left(\frac{n}{T}\right)\delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T}\sum_n Z\left(\frac{n}{T}\right)\delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$



- Nel dominio della frequenza i due segnali assumono gli stessi valori della TdF nelle frequenze n/T, le uniche che contano nella trasformata del segnale periodico

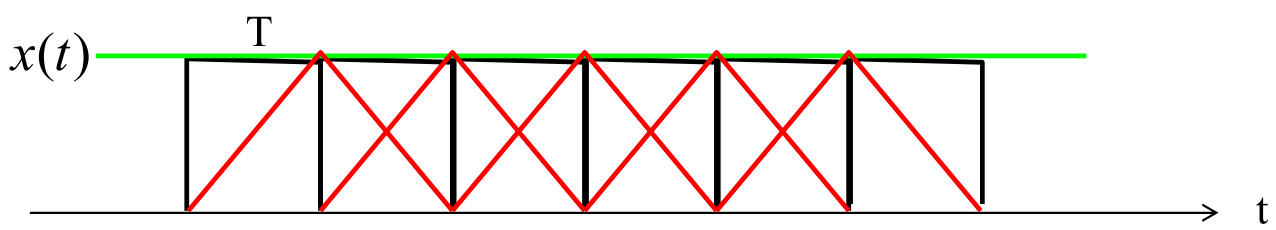
Esempio (particolarmente semplificato…)

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Segnale costante interpretato come segnale periodico

- Può essere espresso come somma di varie porte
- Può essere espresso come somma di opportuni segnali triangolari

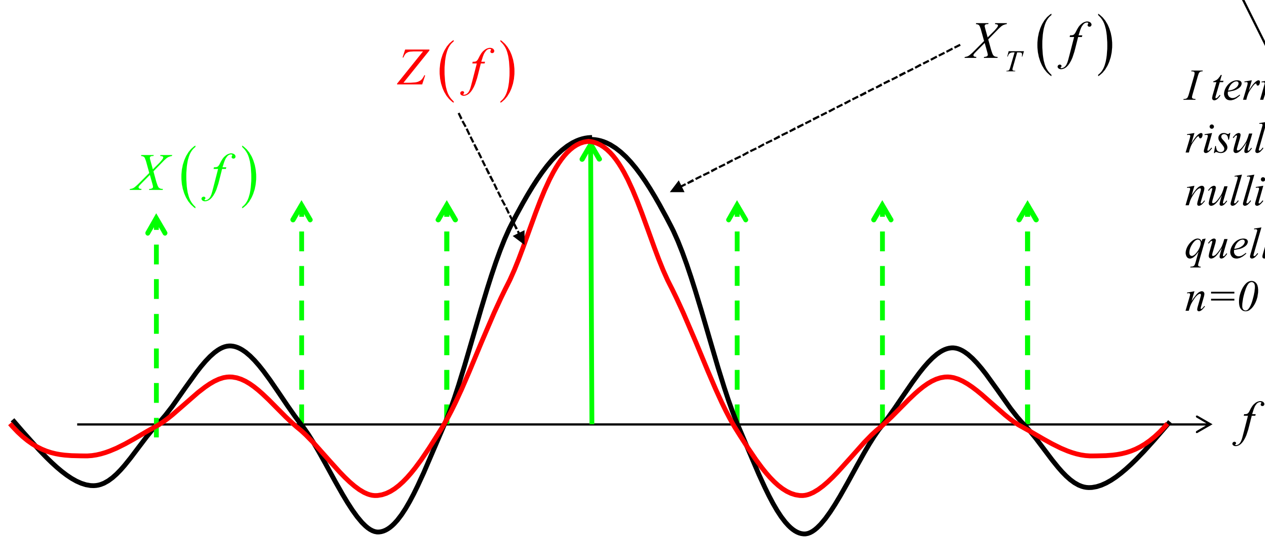
$$x(t) = 1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_T(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Lambda_T(t - nT)$$



In frequenza

$$F\left(\Pi_T(t)\right) = T\cdot \mathrm{sinc}(fT) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} \Rightarrow F\left(\Pi_T\left(\frac{n}{T}\right)\right) = T\cdot\frac{\sin(\pi n)}{\pi n}$$

Dalle tavole delle trasformate



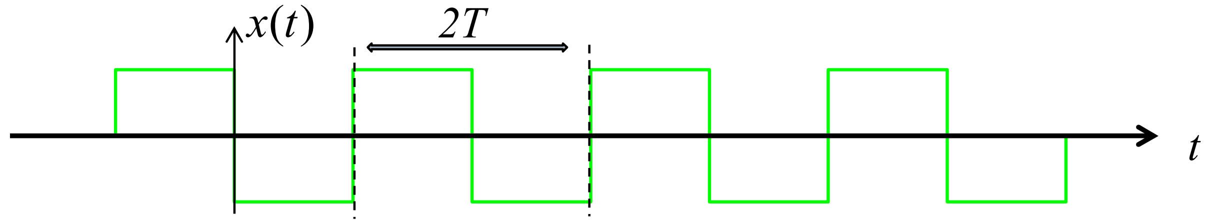
I termini risultano tutti nulli tranne quello per n=0

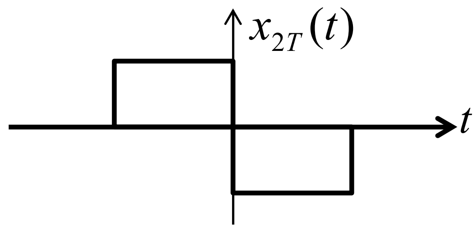
$$F\left(\Lambda_T(t)\right) = T\cdot \mathrm{sinc}^2(fT) = T\cdot\frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} \Rightarrow F\left(\Lambda_T\left(\frac{n}{T}\right)\right) = T\cdot\frac{\sin^2(\pi n)}{(\pi n)^2}$$

Esempio 2

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

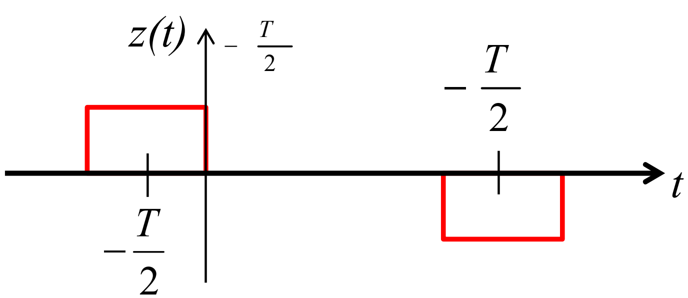
Onda quadra $x(t)$ con periodicità $2T$





$$x_{2T}(t) = \Pi_T(t + T/2) - \Pi_T(t - T/2)$$

Alternativamente, $x(t)$ può essere interpretata come ripetizione periodica del segnale *z(t)*:



In frequenza

- Calcoliamo le due trasformate di Fourier

$$x_{2T}(t) = \Pi_T(t + T/2) - \Pi_T(t - T/2)$$

$$X_{2T}(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}\right)$$

$$z(t) = \Pi_T(t + T/2) - \Pi_T(t - 5T/2)$$

$$Z(f) = T\,\mathrm{sinc}(fT)\left(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi f 5T}\right)$$

Commento: le due trasformate sono ovviamente diverse

- Calcoliamole ora nei multipli di $1/2T$

$$X_{2T}\left(\frac{n}{2T}\right) = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\left(e^{jn\pi/2} - e^{-jn\pi/2}\right) = jT\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

$$Z\left(\frac{n}{2T}\right) = T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\left(e^{j\pi n/2} - e^{-j\pi n5/2}\right) = jT\,\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Commento: si ottengono esattamente gli stessi valori nei multipli di 1/2T