Elaborazione dei Segnali

POLITECNICO
DI TORINO

Dipartimento
di Elettronica
e Telecomunicazioni

Lezione 12

Sistemi LTI e trasformata zeta:

Stabilità e realizzabilità fisica

Sistemi inversi e a fase minima

A.A. 2023-2024

Stabilità e realizzabilità fisica di sistemi LTI

Stabilità (BIBO)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La condizione di stabilità più usata nella pratica è il criterio BIBO (Bounded-Input Bounded-Output):
  - Un sistema si dice BIBO-stabile se e solo se, per ogni ingresso limitato x(n), anche la sequenza di uscita y(n) assume ampiezze limitate.
  - $|x(n)| \le X_0 < \infty \quad \Rightarrow \quad |y(n)| \le Y_0 < \infty$

    con X_0 e Y_0 costanti reali, positive e finite.

- TEOREMA: un sistema LTI discreto è stabile secondo il criterio BIBO se e solo se la sua risposta all'impulso h(n) è sommabile in modulo:

$$h_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

Stabilità (BIBO)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

DIMOSTRAZIONE

- Si consideri un sistema con risposta all'impulso h(n) con al suo ingresso un segnale x(n) con ampiezze limitate: $|x(n)| \le X_0 < \infty$
- La sequenza in uscita è pari a: $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k)$

$$|y(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k) \right| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| |x(n-k)| \le$$

$$\le X_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = X_0 h_s < \infty$$

  - Quindi la condizione $h_s < \infty$ è sufficiente a garantire la stabilità

Stabilità (BIBO)

POLITECNICO
DI TORINO
Dipartimento
di Elettronica
e Telecomunicazioni

- Per dimostrare che la condizione $h_s < \infty$ è anche necessaria, occorre mostrare che, se $h_s \to \infty$, allora esiste un segnale in ingresso limitato in grado di far divergere l'uscita.
- Si prenda ad esempio:

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{h^*(-n)}{|h(-n)|} & h(-n) \neq 0 \\ 0 & h(-n) = 0 \end{cases}$$

- Il valore dell'uscita in n=0 è:

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\frac{h^*(k)}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = h_s$$

  - Se $h_s \to \infty$ è possibile trovare un segnale x(n) limitato che fa divergere l'uscita.

Stabilità e trasformata zeta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Il criterio di stabilità BIBO dei sistemi LTI richiede che la risposta all'impulso *h(n)* sia sommabile in modulo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

- Se il sistema è causale, questo equivale a imporre che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

- Si può dimostrare che la relazione precedente è soddisfatta quando tutti i poli di *H(z)* <u>cadono all'interno del cerchio di raggio unitario</u>.

Stabilità di sistemi causali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Esempio:
  - sistema causale
  - *H(z)* con poli semplici
  - $p_n < p_d$
- *H(z)* si può scrivere come: $H(z) = \sum_{i=1}^{p_d} \frac{R_i}{1 - d_i z^{-1}}$
- Antitrasformata di H(z):

$$h(n) = Z^{-1}[H(z)] = \sum_{i=1}^{p_d} R_i Z^{-1}\left[\frac{1}{1 - d_i z^{-1}}\right] = \sum_{i=1}^{p_d} R_i (d_i)^n u(n)$$

Stabilità di sistemi causali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Per la condizione di stabilità BIBO: $\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < \infty$

$$h(n) = \sum_{i=1}^{p_d} R_i (d_i)^n u(n) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{i=1}^{p_d} R_i (d_i)^n u(n) \right| < \infty$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{i=1}^{p_d} R_i (d_i)^n u(n) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{p_d} |R_i| |d_i|^n = \sum_{i=1}^{p_d} |R_i| \sum_{n=0}^{+\infty} |d_i|^n$$

- Se tutti i poli d_i hanno modulo minore di 1 (ossia cadono all'interno del cerchio di raggio unitario), allora vale la condizione: $\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < \infty$

  e il sistema causale è stabile.

Stabilità di sistemi causali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Viceversa, se un sistema LTI causale è stabile, allora vale la relazione:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| < \infty$$

- Deve quindi valere anche la relazione: $\lim_{n \to +\infty} h(n) = 0$

$$h(n) = \sum_{i=1}^{p_d} R_i (d_i)^n u(n) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} (d_i)^n = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, p_d$$

- Quindi, se il sistema è causale e stabile, i poli sono tutti contenuti nel cerchio di raggio unitario.

Stabilità di distemi anticausali e bilateri

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Una condizione analoga alla precedente vale per sistemi anticausali, per i quali la condizione di stabilità richiede che tutti i poli della risposta di sistema H(z) siano esterni al cerchio di raggio unitario.

- Per i sistemi LTI bilateri, la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità richiede che la circonferenza di raggio unitario sia contenuta nell'anello circolare che costituisce la ROC di H(z).

Riepilogo

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La ROC di un sistema stabile contiene sempre la circonferenza di raggio unitario, indipendentemente dalla causalità del sistema.
  - Un sistema stabile possiede sempre la DTFT $H(e^{j\omega})$ della risposta all'impulso h(n).

- Un **sistema causale** possiede una $H(z)$ con ROC pari all'esterno di un cerchio di raggio R_h .
- Perché il sistema sia anche stabile, allora i suoi poli devono giacere all'interno del cerchio di raggio unitario → la ROC di un sistema causale e stabile è del tipo: $R_h<| z |$ con $R_h<1$.

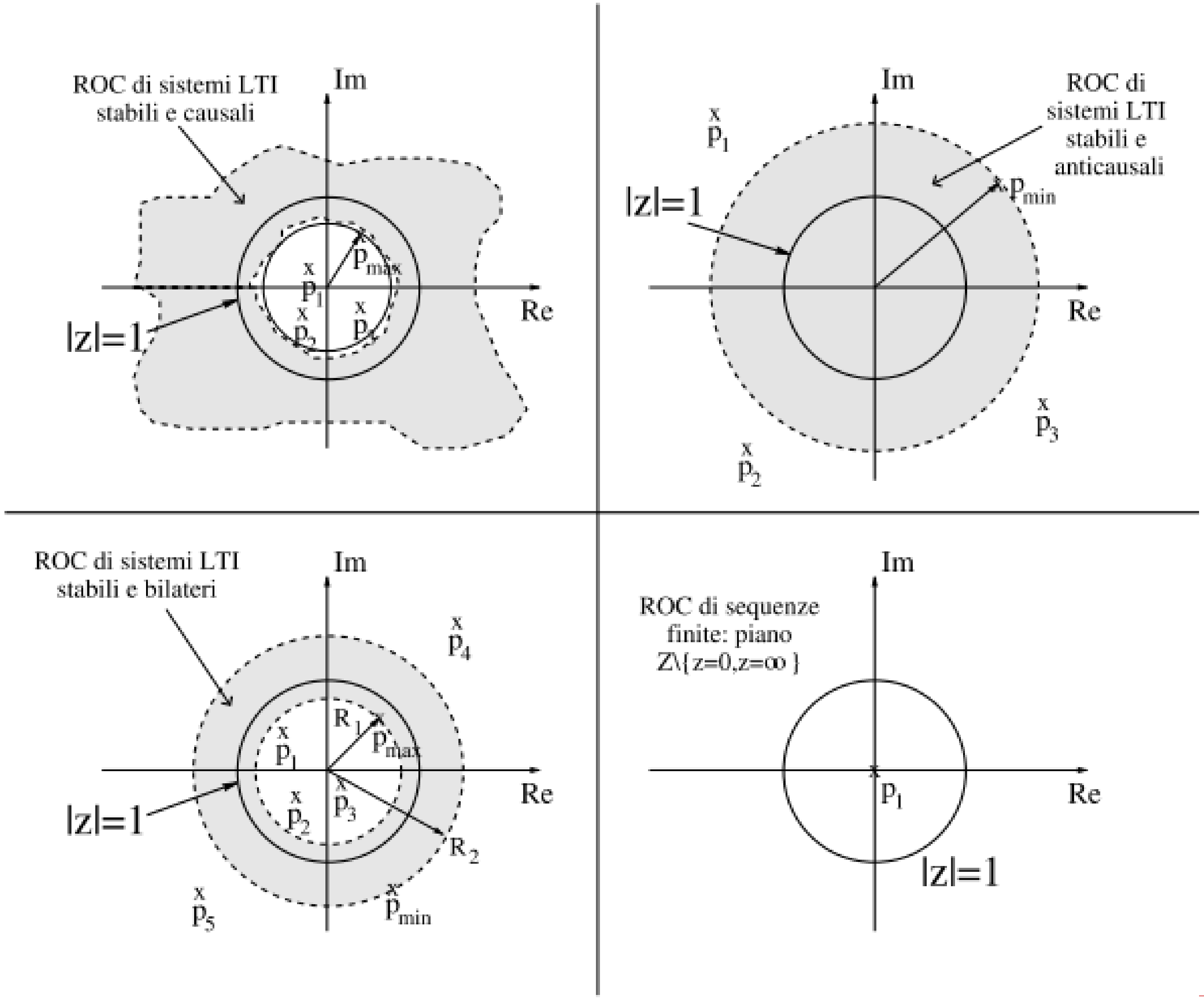
Riepilogo

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Un **sistema anticausale** ha una $H(z)$ con ROC pari all'interno di un cerchio di raggio R_h, cerchio escluso.
- Affinché il sistema sia anche stabile, i suoi poli devono giacere all'esterno del cerchio di raggio unitario → la ROC di un sistema anticausale e stabile è del tipo
$|z| < R_h$ con $R_h > 1$.

- Un **sistema bilatero** possiede una $H(z)$ con ROC pari ad un anello circolare $R_{h,1} < |z| < R_{h,2}$.
- Perché il sistema sia anche stabile, allora la circonferenza $|z| = 1$ deve essere contenuta nell'anello circolare → la ROC di un sistema bilatero e stabile è del tipo $R_{h,1} < |z| < R_{h,2}$ e $R_{h,1} < 1$, $R_{h,2} > 1$.

ROC di sistemi LTI stabili



POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Esempio 1

- Dire per quali valori di α il seguente sistema LTI causale è stabile:

$$y(n) = -2\alpha\, y(n-1) - \alpha^2 y(n-2) + x(n)$$

- Calcolo la trasformata zeta:

$$Y(z) = -2\alpha\, z^{-1} Y(z) - \alpha^2 z^{-2} Y(z) + X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + 2\alpha\, z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 + \alpha\, z^{-1}\right)^2}$$

- Data la causalità del sistema, la stabilità è garantita se il polo z=-α cade all'interno del cerchio di raggio unitario → $|\alpha|<1$.

Realizzabilità fisica

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Un sistema si dice fisicamente realizzabile se possiede una risposta all'impulso h(n) reale e causale.
- In alternativa, un sistema LTI si dice fisicamente realizzabile se l'equazione alle differenze è causale e i coefficienti $\{a_1,\ldots,a_M\}$ e $\{b_1,\ldots,b_N\}$ sono tutti reali:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

- Quindi anche la funzione di trasferimento H(z) deve avere coefficienti reali:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_M z^{-M}}$$

e la sua ROC deve corrispondere all'esterno di una circonferenza che racchiuda tutti i poli di H(z).

Realizzabilità fisica

- I coefficienti di $H(z)$ sono tutti reali se e solo se per ogni polo o zero è presente anche il rispettivo complesso coniugato.

- Infatti un polinomio di grado N con coefficienti reali può presentare radici sia reali sia complesse coniugate.

Esempio 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Si consideri un sistema LTI fisicamente realizzabile attuato con un'architettura di tipo FIR.
- E' noto che:
  - La funzione di trasferimento *H(z)* presenta due zeri in $z = e^{jk\frac{\pi}{2}}, k = 1,2$
  - $H(z)\big|_{z=1} = 1$
  - Il numero di coefficienti della risposta all'impulso è minore di 5
- Calcolare la funzione di trasferimento del sistema LTI considerato.

Esempio 2

- Il sistema LTI in esame possiede solo zeri e un polo multiplo nell'origine (perché è FIR) → è stabile.
- Essendo fisicamente realizzabile, i coefficienti della riposta all'impulso (e della funzione di trasferimento) sono reali → gli zeri complessi sono presenti assieme ai rispettivi complessi coniugati.
- Data la causalità, la funzione di trasferimento H(z) può essere scritta in termini di potenze negative di z:

$$H(z) = K\left(1 - e^{j\frac{\pi}{2}} z^{-1}\right)\left(1 - e^{-j\frac{\pi}{2}} z^{-1}\right)\left(1 - e^{j\pi} z^{-1}\right) =$$

$$= K\left(1 - j\,z^{-1}\right)\left(1 + j\,z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right) = K\left(1 + z^{-2}\right)\left(1 + z^{-1}\right)$$

#coefficienti < 5 → grado massimo del polinomio = 3

- Dalla condizione $H(z)\big|_{z=1} = 1$ si ricava K=1/4, quindi: $H(z) = \frac{1}{4}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}\right)$

Sistemi inversi

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Molto spesso nelle applicazioni pratiche è richiesta l'implementazione di un sistema LTI che inverta le caratteristiche di un altro sistema caratterizzato dalla trasformata H(z).
  - Esempio: trasmissione di dati attraverso il canale telefonico.

- Il **SISTEMA INVERSO** di un sistema LTI caratterizzato dalla funzione di trasferimento *H(z)* si definisce come:

$$\boxed{H_I(z) = H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)}}$$

- Cascata di un sistema con il suo inverso (sistema identità):

$$H_C(z) = H(z)H_I(z) = 1 \quad \Rightarrow \quad h_C(n) = \delta(n)$$

Esempio 3

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Determinare la funzione di trasferimento $H_I(z)$ del sistema causale inverso di un sistema LTI descritto dall'equazione alle differenze:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + \frac{2}{5}y(n-1)$$

- Calcoliamo la funzione di trasferimento H(z), mediante la trasformata z dell'equazione alle differenze:

$$Y(z) = X(z) + 2X(z)z^{-1} + \frac{2}{5}Y(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+2z^{-1}}{1-\frac{2}{5}z^{-1}} \quad |z| > \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1-\frac{2}{5}z^{-1}}{1+2z^{-1}} \quad |z| > 2$$

- Entrambi i sistemi sono causali, ma il sistema inverso non è stabile (polo in z=-2 fuori dalla circonferenza di raggio unitario).

Sistemi inversi

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Se *H(z)* ha forma razionale:

$$H(z)=\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{i=1}^{p_n}\left(1-c_i z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{p_d}\left(1-d_i z^{-1}\right)}$$

  la funzione di trasferimento del sistema inverso vale:

$$H_I(z)=\frac{a_0}{b_0}\frac{\prod_{i=1}^{p_d}\left(1-d_i z^{-1}\right)}{\prod_{i=1}^{p_n}\left(1-c_i z^{-1}\right)}$$

  - Se $H_I(z)$ è causale, la sua regione di convergenza è del tipo $|z|>\max|c_i|$.
  - Affinché $H_I(z)$ sia anche stabile, la sua ROC deve contenere il cerchio di raggio unitario → tutti gli zeri c_i del sistema originario devono essere contenuti nel cerchio di raggio unitario.

Sistemi a fase minima

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Un sistema LTI causale e stabile con poli e zeri contenuti nel cerchio di raggio unitario ammette un sistema inverso causale e stabile.

- DEFINIZIONE

  Un sistema LTI si dice “a fase minima” se tutti i poli e tutti gli zeri della funzione di trasferimento sono collocati all’interno del cerchio di raggio unitario.

  - I sistemi LTI causali, stabili e a fase minima garantiscono la minor distorsione di fase possibile tra tutti i sistemi con il medesimo modulo della risposta in frequenza.

  - E’ possibile ottenere un sistema LTI inverso e stabile di un sistema LTI causale solo se quest’ultimo possiede funzione di trasferimento con fase minima.

Esempio 4

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Determinare la funzione di trasferimento $H_I(z)$ del sistema causale inverso di un sistema LTI descritto dall'equazione alle differenze:

$$y(n) = x(n) - \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{9}{10}y(n-1)$$

- Calcoliamo la funzione di trasferimento H(z), mediante la trasformata z dell'equazione alle differenze:

$$Y(z) = X(z) - \frac{1}{2}X(z)z^{-1} + \frac{9}{10}Y(z)z^{-1}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{9}{10}z^{-1}} \quad |z| > \frac{9}{10} \Rightarrow H_I(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1-\frac{9}{10}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

- Anche il sistema inverso è stabile → fase minima