Elaborazione dei Segnali

POLITECNICO
DI TORINO

Dipartimento
di Elettronica
e Telecomunicazioni

Lezione 5

Spettro di energia e banda di un segnale a tempo discreto

Introduzione alla DFT

Trasformata di Fourier veloce (FFT)

A.A. 2023-2024

Spettro di energia e banda di un segnale a tempo discreto

Spettro di energia

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Definizione di spettro di energia:

$$\boxed{S_x(f) = \left| X\left(e^{j2\pi f}\right) \right|^2}$$

  - Rappresenta la distribuzione dell'energia di x(n) sulle componenti armoniche che lo costituiscono.

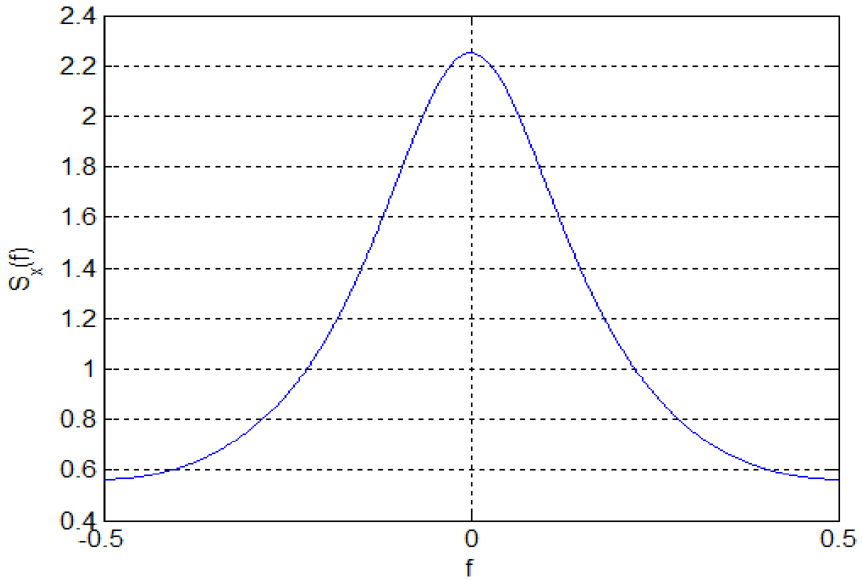
- Proprietà:
  - se $x(n)$ è reale, lo spettro di energia è reale e pari
  - $S_x(f) \geq 0 \quad \forall f$

Esempio

$$a^n u(n) \Rightarrow \frac{1}{1-ae^{-j2\pi f}}$$ per a reale e $|a|<1$

$$S_x(f) = \left|X\left(e^{j2\pi f}\right)\right|^2 = \frac{1}{\left(1-ae^{-j2\pi f}\right)\left(1-ae^{+j2\pi f}\right)} = \frac{1}{1+a^2-ae^{-j2\pi f}-ae^{+j2\pi f}} =$$

$$= \frac{1}{1+a^2-2a\cos(2\pi f)}$$



Relazione di Parseval

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Consente di valutare l'energia di un segnale *x(n)* a partire dalla conoscenza della DTFT:

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| x(k) \right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) x^*(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X\left(e^{j2\pi f}\right) e^{j2\pi fk} df \right)^* =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X^*\left(e^{j2\pi f}\right) e^{-j2\pi fk} df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X^*\left(e^{j2\pi f}\right) \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi fk} \right) df =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X^*\left(e^{j2\pi f}\right) X\left(e^{j2\pi f}\right) df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| X\left(e^{j2\pi f}\right) \right|^2 df$$

Relazione di Parseval

- Relazione di Parseval:

$$\boxed{E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| x(k) \right|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| X\left(e^{j2\pi f}\right) \right|^2 df}$$

  - l’energia di una sequenza corrisponde a quella della sua DTFT calcolata sul suo periodo.

Banda assoluta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La **BANDA ASSOLUTA** della sequenza *x(n)* si definisce come la frequenza numerica $B_x<1/2$ tale per cui il modulo dello spettro $|X(e^{j2\pi f})|$ è identicamente nullo al di fuori dell'intervallo $[-B_x,B_x]$

- Come per i segnali analogici, esistono vari modi alternativi per definire la banda di una sequenza, tutti basati sulle caratteristiche dello spettro di energia:

$$S_x(f)=\left|X\left(e^{j2\pi f}\right)\right|^2$$

Banda equivalente

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La **BANDA EQUIVALENTE** è definita come la frequenza B_{eq} tale per cui il rettangolo con base $[-B_{eq},B_{eq}]$ e altezza pari al massimo $|X_M|^2$ dello spettro di energia possiede la medesima energia del segnale $x(n)$:

$$2B_{eq}\left|X_M\right|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_x(f)\,df = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left|x(n)\right|^2$$

Banda $B_{x\%}$

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La **BANDA $B_{x\%}$** corrisponde all'estremo superiore della banda di frequenze che contiene *x%* dell'energia totale del segnale:

$$\int_{-B_{x\%}}^{B_{x\%}} S_x(f)df = \frac{x}{100}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_x(f)df = \frac{x}{100}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}|x(n)|^2$$

Banda a 3 dB

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La **banda a 3 dB** è definita come la frequenza numerica B_{3dB} a cui l'ampiezza dello spettro di energia si riduce di 3 dB rispetto al massimo:

$$S_x(B_{3dB}) = \frac{|X_M|^2}{2}$$

Trasformata di Fourier discreta (DFT)

Introduzione

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- DTFT: rappresentazione in frequenza di sequenze di durata infinita (funzione continua della variabile ω).
- La DTFT è di difficile applicazione nella pratica:
  - l'implementazione su un calcolatore richiede che la variabile ω venga discretizzata su un numero finito di valori.
  - per sequenze $x(n)$ di supporto finito e pari a N, la complessità pratica dell'algoritmo è dell'ordine di circa N^2 moltiplicazioni e addizioni complesse.
- I segnali che si incontrano nella pratica sono generalmente diversi da zero in un intervallo di tempo N finito → conviene cercare una tecnica alternativa, più efficiente dal punto di vista computazionale, adatta a sequenze di durata finita.

Trasformata di Fourier discreta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La trasformata di Fourier discreta su *N* punti di un segnale *x(n)* costituito da *N* soli campioni è definita come segue:

$$\boxed{X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi n\frac{k}{N}}, \quad \forall k=0,1,2,\ldots,N-1}$$

- *X(k)* può essere interpretata come la DTFT $X(e^{j2\pi f})$ valutata nelle *N* frequenze equi-spaziate:

$$f_k=\frac{k}{N}, \quad \forall k=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]=X\left(e^{j2\pi f_k}\right)$$

Inversione della DFT

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Analogamente si definisce l'anti-trasformata discreta di Fourier come:

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi n\frac{k}{N}}, \quad \forall n = 0,1,2,\ldots,N-1}$$

  - L'indice adimensionato k individua una specifica frequenza all'interno dell'intervallo *[0,N-1]* in frequenza, mentre n individua un istante di tempo discreto all'interno dell'intervallo *[0,N-1]* nel tempo.

Verifica dell'inversione

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j2\pi n\frac{k}{N}}, \quad \forall n=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j2\pi n\frac{k}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{i=0}^{N-1}x(i)e^{-j2\pi i\frac{k}{N}}\right]e^{j2\pi n\frac{k}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x(i)\left[\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j2\pi\frac{(i-n)}{N}k}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}e^{-j2\pi\frac{(i-n)}{N}k}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}1=N & i=n\\[2ex] \dfrac{1-e^{-j2\pi\frac{(i-n)}{N}N}}{1-e^{-j2\pi\frac{(i-n)}{N}}}=0 & i\neq n\end{cases}$$

Serie geometrica troncata:

$$\sum_{k=0}^{N-1}x^k=\frac{1-x^N}{1-x} \qquad \forall x\neq 1$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j2\pi n\frac{k}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}x(i)N\delta(i-n)=x(n)$$

Estensioni periodiche

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Le **ESTENSIONI PERIODICHE** di *x(n)* e *X(k)* si definiscono come:

$$\bar{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad , \forall k$$

$$\bar{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N} \quad , \forall n$$

- $\bar{x}(n)$ e $\bar{X}(k)$ sono funzioni periodiche di periodo *N*.
- Nel loro periodo fondamentale *([0,N-1]),* sono coincidenti con *X(k)* e *x(n)*.

Implementazione numerica

- Le due relazioni precedenti (DFT e IDFT) sono implementabili con tecniche numeriche in quanto le variabili tempo e frequenza risultano discretizzate su N punti.
  - Ciascun campione della DFT é una somma pesata di tutti i campioni di x(n) ognuno moltiplicato per l'esponenziale di Eulero $e^{-j2\pi nk/N}$.
  - La DFT ha una complessità pari a N^2 operazioni complesse, in quanto per ogni indice $k = 0, \ldots, N-1$ bisogna valutare N moltiplicazioni e $N-1$ addizioni.
  - Algoritmo efficiente per implementare DFT e IDFT di sequenze numeriche di lunghezza finita N: trasformata di Fourier veloce (FFT), con complessità $N \cdot \log_2(N)$ se il numero dei campioni N è una potenza del 2.

Trasformata di Fourier veloce (FFT)

Complessità della DFT

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}, \quad \forall k = 0,1,2,\dots,N-1}$$

- Per ogni *k*, cioè per il calcolo di un punto della DFT, sono necessarie *N* moltiplicazioni e *N-1*≈*N* somme tra numeri complessi.

- In totale, il numero di somme e moltiplicazioni tra numeri complessi è quindi pari a $2N^2$.

Algoritmi FFT - Fast Fourier Transform

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Il termine FFT si riferisce ad una classe di algoritmi veloci di calcolo della DFT, che consentono di ridurre il numero di operazioni associate ad una trasformata di dimensione N da N^2 a $N \cdot log_2 N$, sfruttando le proprietà di simmetria/periodicità degli esponenziali complessi.

- Caratteristica comune di tutti gli algoritmi è che possono essere ottenuti come un'applicazione del principio "divide et impera":
  - Risolvere ricorsivamente un problema di dimensione finita su sottoinsiemi di dati ("divide")
  - Ricombinare i risultati parziali ("impera") in modo tale da ottenere la soluzione del problema originale

Osservazioni

- All’operazione della divisione dell’insieme di dati di partenza in sottoinsiemi è associato un certo guadagno in termini di complessità di calcolo.
- Questo guadagno deve essere confrontato con il costo legato alla ricombinazione e/o ricostruzione dei sottoproblemi.
- Ad ogni scelta della partizione dell’insieme di dati di partenza in sottoinsiemi corrisponde un algoritmo diverso con costi di partizione/ricombinazione differenti.
- Tutte le considerazione sulla DFT valgono anche per la IDFT.

Rappresentazione della DFT in termini di matrici

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n\frac{k}{N}}, \quad \forall k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

$$\mathbf{x} = [x(0)\, x(1) \ldots x(N-1)]^T$$

$$\mathbf{X} = [X(0)\, X(1) \ldots X(N-1)]^T$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{x} \qquad H_N = e^{-j2\pi\frac{1}{N}}$$

$$\mathbf{H} = \left[e^{-j2\pi n\frac{k}{N}} \right] = \left[H_N^{nk} \right] \quad k,n = 0,\ldots,N-1$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & H_N^1 & H_N^2 & \ldots & H_N^{N-1} \\ 1 & H_N^2 & H_N^4 & \ldots & H_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & H_N^{N-1} & H_N^{2(N-1)} & \ldots & H_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Proprietà di simmetria

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$e^{-j2\pi\frac{n}{N}} = e^{-j2\pi\frac{n+N}{N}} \qquad \Rightarrow \qquad H_N^{n+N} = H_N^n$$

$$e^{-j2\pi\frac{n}{N}} = -e^{-j2\pi\frac{n+N/2}{N}} \qquad \Rightarrow \qquad H_N^{n+N/2} = -H_N^n$$

$$e^{-j2k\pi} = e^{-j2\pi\frac{kN}{N}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad H_N^{Nk} = 1 \quad (k\,\text{intero})$$

$$e^{-j2\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} \qquad \Rightarrow \qquad H_N^2 = H_{N/2}$$

- Le proprietà di simmetria della matrice *H* permettono di semplificare le operazioni necessarie per il calcolo numerico della DFT.

Algoritmo della decimazione nel tempo

- Ipotesi: *N* è una potenza di 2

- Dividiamo i dati di ingresso *x(n)* in campioni di posto pari e campioni di posto dispari:

$$x_0(n) = x(2n) \qquad\qquad n = 0, \ldots, \frac{N}{2} - 1$$

$$x_1(n) = x(2n+1)$$

- La DFT di *x(n)* è:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) H_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) H_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) H_N^{(2n+1)k} \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

Algoritmo della decimazione nel tempo

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Ricordando che $H_N^2 = H_{N/2}$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N} x(n) H_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) H_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) H_N^{(2n+1)k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) H_N^{2nk} + H_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) H_N^{2nk}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) H_{N/2}^{nk} + H_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) H_{N/2}^{nk} = \qquad k = 0, \dots, N-1$$

DFT dei campioni di posto dispari, su una lunghezza N/2

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_0(n) H_{N/2}^{nk} + H_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) H_{N/2}^{nk} = X_0\left(|k|_{N/2}\right) + H_N^k X_1\left(|k|_{N/2}\right)$$

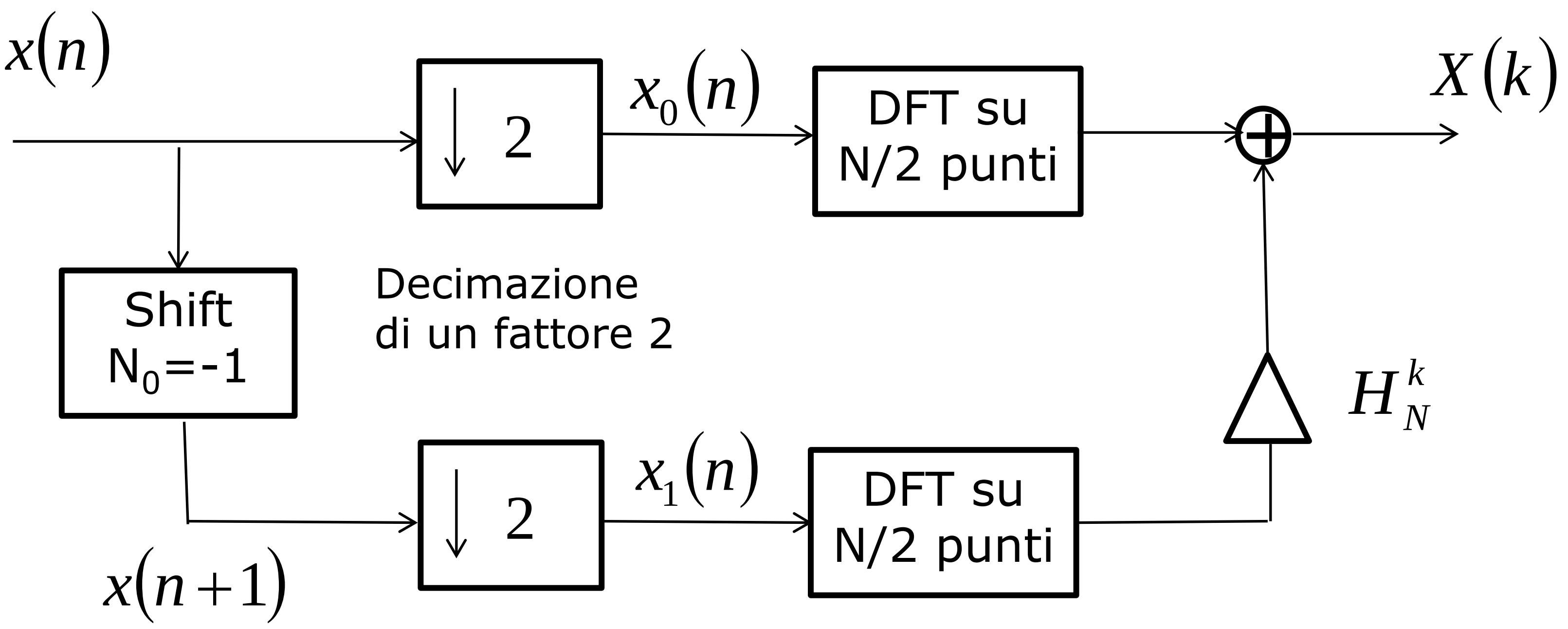
campioni di posto pari

campioni di posto dispari

DFT dei campioni di posto pari, su una lunghezza N/2

Schema circuitale (2 DFT su N/2 punti)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni



- Numero di operazioni richieste:
  - 2 DFT su N/2 punti → 2(N^2/4) somme e prodotti complessi
  - N prodotti complessi
  - N somme complesse

Complessità

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Il numero totale di operazioni (somme e prodotti) complesse è quindi pari a:

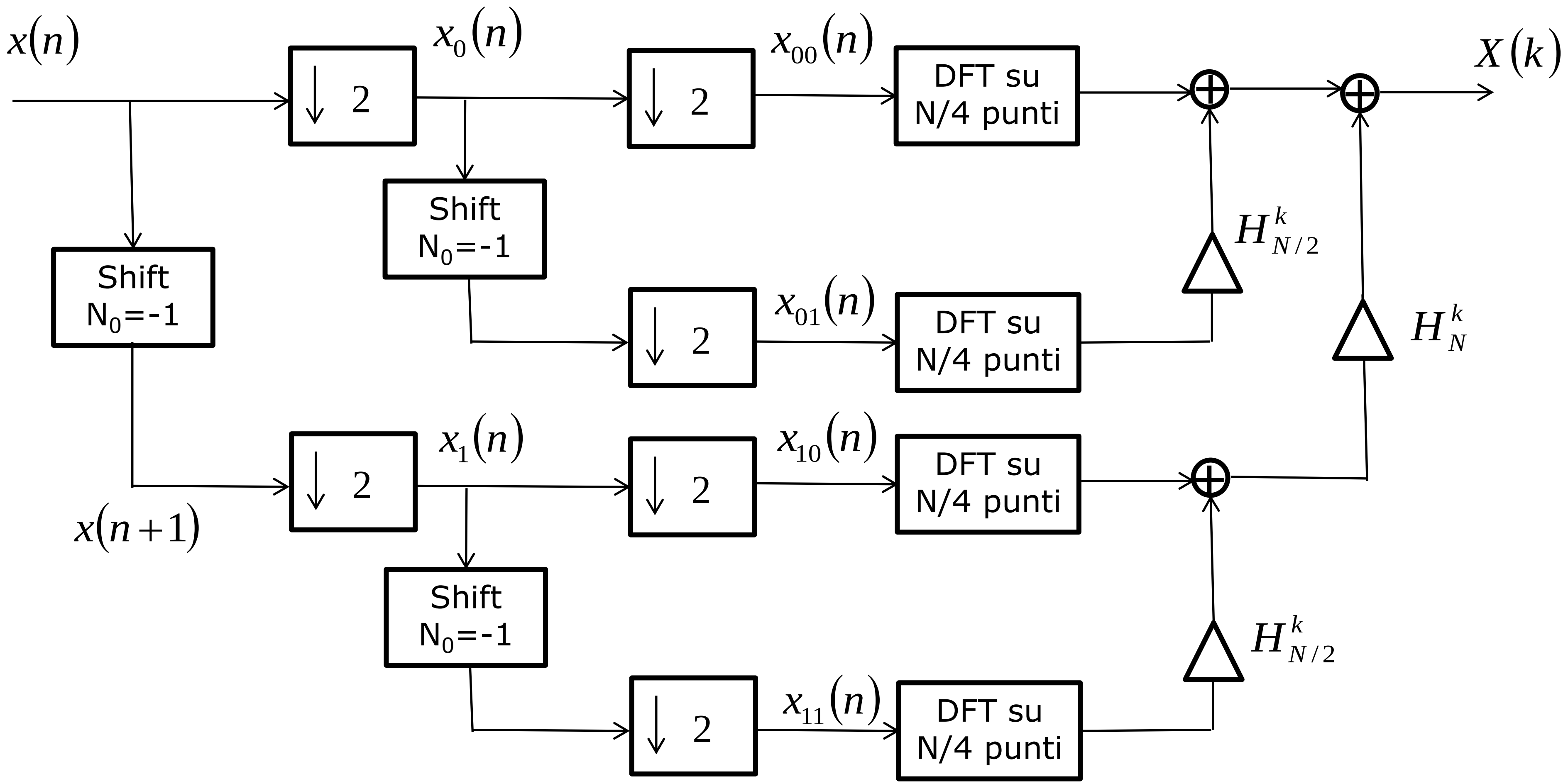
$$N + 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 = N + \frac{N^2}{2}$$

che è strettamente minore del numero N^2 di operazioni richiesto da una singola DFT a N campioni.

- Si può quindi riapplicare il procedimenti “divide et impera” al calcolo delle due trasformate da *N/2* punti, ottenendo una complessità pari a:

$$N + 2\left[\frac{N}{2} + 2\left(\frac{N}{4}\right)^2\right] = 2N + \frac{N^2}{4}$$

Schema circuitale (4 DFT su N/4 punti)



Complessità

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Si può ripetere il procedimento finché non si arriva a dover valutare le DFT su 1 punto.
- Al passo k-esimo, la complessità sarà:

$$k \cdot N + 2^k \left(\frac{N}{2^k} \right)^2$$

- Partendo da una sequenza lunga $N=2^k$ campioni, sono possibili $k=\log_2 N$ stadi successivi, con una complessità totale pari a:

$$\boxed{\log_2(N) \cdot N + N \approx \log_2(N) \cdot N}$$