Teoria ed elaborazione dei segnali

Esercitazione 2

DTFT (Discrete Time Fourier Transform)

e DFT (Discrete Fourier Transform)

Richiami teorici su DTFT

- Definizione di DTFT (Discrete Time Fourier Transform)

$$\boxed{X\left(e^{j2\pi f}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x\left(k\right)\cdot e^{-j2\pi f k}}$$

  - Si ricorda che, nel caso si parta da un segnale analogico campionato, la trasformata di Fourier (FT) del segnale campionato si può esprimere come:

$$X_c\left(f\right)=F\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x\left(kT_c\right)\cdot\delta\left(t-kT_c\right)\right\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x\left(kT_c\right)F\left\{\delta\left(t-kT_c\right)\right\}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x\left(kT_c\right)e^{-j2\pi kT_c f}$$

Le due formule dunque coincidono per $T_c=1$

Proprietà DTFT

Proprietà	**x(n),y(n)**	**DTFT X($e^{j2\pi f}$)**
Linearità	$a_1 x(n) + a_2 y(n)$	$a_1 \cdot X\left(e^{j2\pi f}\right) + a_2 \cdot Y\left(e^{j2\pi f}\right)$
Ribaltamento	$x(-n)$	$X\left(e^{-j2\pi f}\right)$
Ritardo	$x(n-N)$	$X\left(e^{j2\pi f}\right) e^{-j2\pi f N}$
Modulazione	$e^{j2\pi f_0 n} \cdot x(n)$	$X\left(e^{j2\pi (f-f_0)}\right)$
Derivata in frequenza	$n \cdot x(n)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{dX\left(e^{j2\pi f}\right)}{df}$
Convoluzione	$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n-k)$	$X\left(e^{j2\pi f}\right) \cdot Y\left(e^{j2\pi f}\right)$
Prodotto	$x(n) \cdot y(n)$	$X\left(e^{j2\pi f}\right) * Y\left(e^{j2\pi f}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X\left(e^{j2\pi \eta}\right) Y\left(e^{j2\pi (f-\eta)}\right) d\eta$

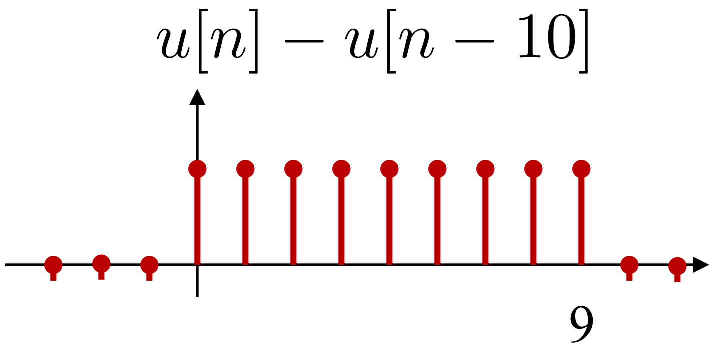
Esercizio 1

Si calcoli la DTFT del segnale:

$$x[n] = u[n] - u[n-10] + n \cdot e^{-n} u[n].$$

Soluzione Esercizio 1

- Osserviamo che



- A lezione, abbiamo ricavato in un esempio che per la funzione porta nel tempo discreto si ha:

$$\sum_{k=0}^{9} e^{-j2\pi f k} = \frac{1 - e^{-j2\pi f(10)}}{1 - e^{-j2\pi f}}$$

Soluzione Esercizio 1

- Per il secondo termine del segnale ricordiamo la proprietà della derivazione

$$n \cdot x(n) \quad \Rightarrow \quad \frac{j}{2\pi}\frac{dX\left(e^{j2\pi f}\right)}{df}$$

- Calcoliamo quindi la trasformata del termine $e^{-n}u[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n}u[n]e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(j2\pi f+1)n} = \frac{1}{1-e^{-(j2\pi f+1)}}$$

- da cui per la proprietà di derivazione otteniamo

$$\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\frac{1}{1-e^{-1}e^{-j2\pi f}}$$

Soluzione esercizio 1

- Calcoliamo la derivata

- $\frac{j}{2\pi}\frac{d}{df}\frac{1}{1-e^{-1}e^{-j2\pi f}} = \frac{j}{2\pi}\frac{e^{-1}e^{-j2\pi f}\,(-j2\pi)}{(1-e^{-1}e^{-j2\pi f})^{\wedge}2} = \frac{e^{-1}e^{-j2\pi f}}{(1-e^{-1}e^{-j2\pi f})^{\wedge}2}$

Esercizio 2

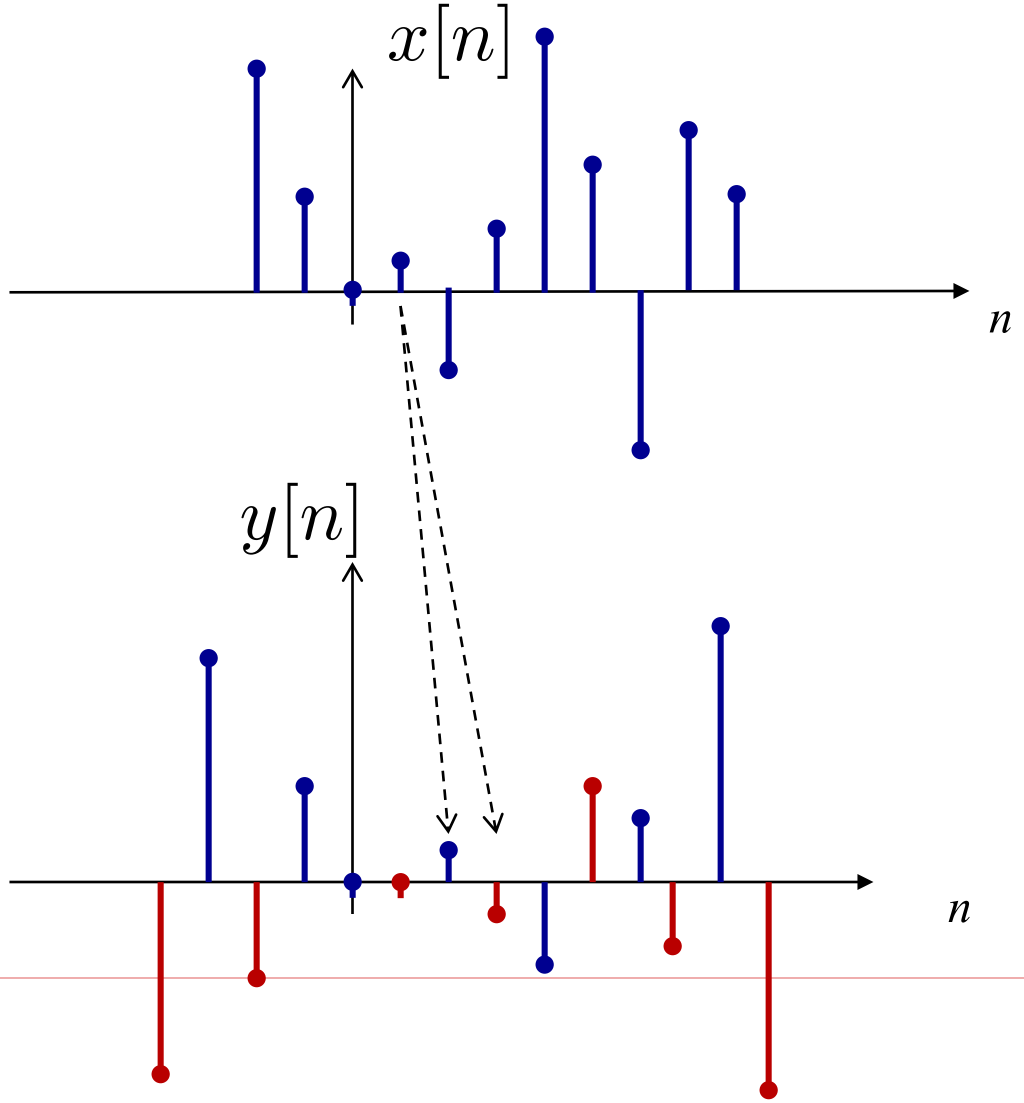
Si consideri una sequenza $x[n]$ con DTFT $X(e^{j2\pi f})$. Si costruisca una sequenza $y[n]$ a partire da $x[n]$ con la regola:

$$y[2n] = x[n]$$

$$y[2n+1] = -x[n]$$

Si calcoli la DTFT di $y[n]$.

Soluzione Esercizio 2



$$
\begin{aligned}
y[2n] &= x[n] \\
y[2n+1] &= -x[n]
\end{aligned}
$$

Soluzione Esercizio 2

$$Y\left(e^{j2\pi f}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j2\pi fn}=\sum_{n=pari}^{\infty} y[n]e^{-j2\pi f n}+\sum_{n=dispari}^{\infty} y[n]e^{-j2\pi fn}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[2n]e^{-j2\pi f(2n)}+\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[2n+1]e^{-j2\pi f(2n+1)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi f(2n)}-\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi f(2n+1)}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\left(e^{-j2\pi f(2n)}-e^{-j2\pi f(2n)}e^{-j2\pi f}\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi f(2n)}\left(1-e^{-j2\pi f}\right)$$

$$=\left(1-e^{-j2\pi f}\right)X\left(e^{-j2\pi 2f}\right)$$

questo termine non dipende da n

Richiami teorici su DFT

- Definizione di DFT (Discrete Fourier Transform)

$$\boxed{X(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi n\frac{k}{N}}\ , \quad \forall k=0,1,2,\dots,N-1}$$

  - Si ricorda che la DFT *X(k)* può essere interpretata come la DTFT $X(e^{j2\pi f})$ valutata nelle *N* frequenze equi-spaziate:

$$f_k=\frac{k}{N},\quad \forall k=0,1,2,\dots,N-1$$

$$DTFT:\quad X\left(e^{j2\pi f}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\cdot e^{-j2\pi n\cdot f}$$

Proprietà DFT

Proprietà	x(n),y(n): N campioni	DFT X(k)
Linearità	$a_1 x(n) + a_2 y(n)$	$a_1 X(k) + a_2 Y(k)$
Ritardo	$x(\lvert n - N_0 \rvert_N)$	$X(k) e^{-j2\pi \frac{k}{N} N_0}$
Modulazione	$e^{j2\pi \frac{k_0}{N} n} x(n)$	$X(\lvert k - k_0 \rvert_N)$
Convoluzione circolare	$\sum_{p=0}^{N-1} x(p) y(\lvert n - p \rvert_N)$	$X(k) \cdot Y(k)$
Prodotto	$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} X(p) Y(\lvert k - p \rvert_N)$
Teorema di Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x(n) \rvert^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \lvert X(k) \rvert^2$	

Esercizio 3

Un segnale praticamente limitato nel tempo per $0 \leq t \leq T_1$ con $T_1 = 1$s e limitato in banda per $|f| \leq B_x$ con $B_x = 32$ Hz viene campionato alla frequenza di Nyquist $\frac{1}{T_0} = 2B_x$.I campioni $x_n = x(nT_0)$, dove T_0 è il periodo di campionamento, vengono usati per valutare numericamente lo spettro del segnale mediante una FFT a radice due. Si richiede una risoluzione in frequenza $\Delta f = 0.5$ Hz. Dire quale delle seguente affermazioni è corretta:

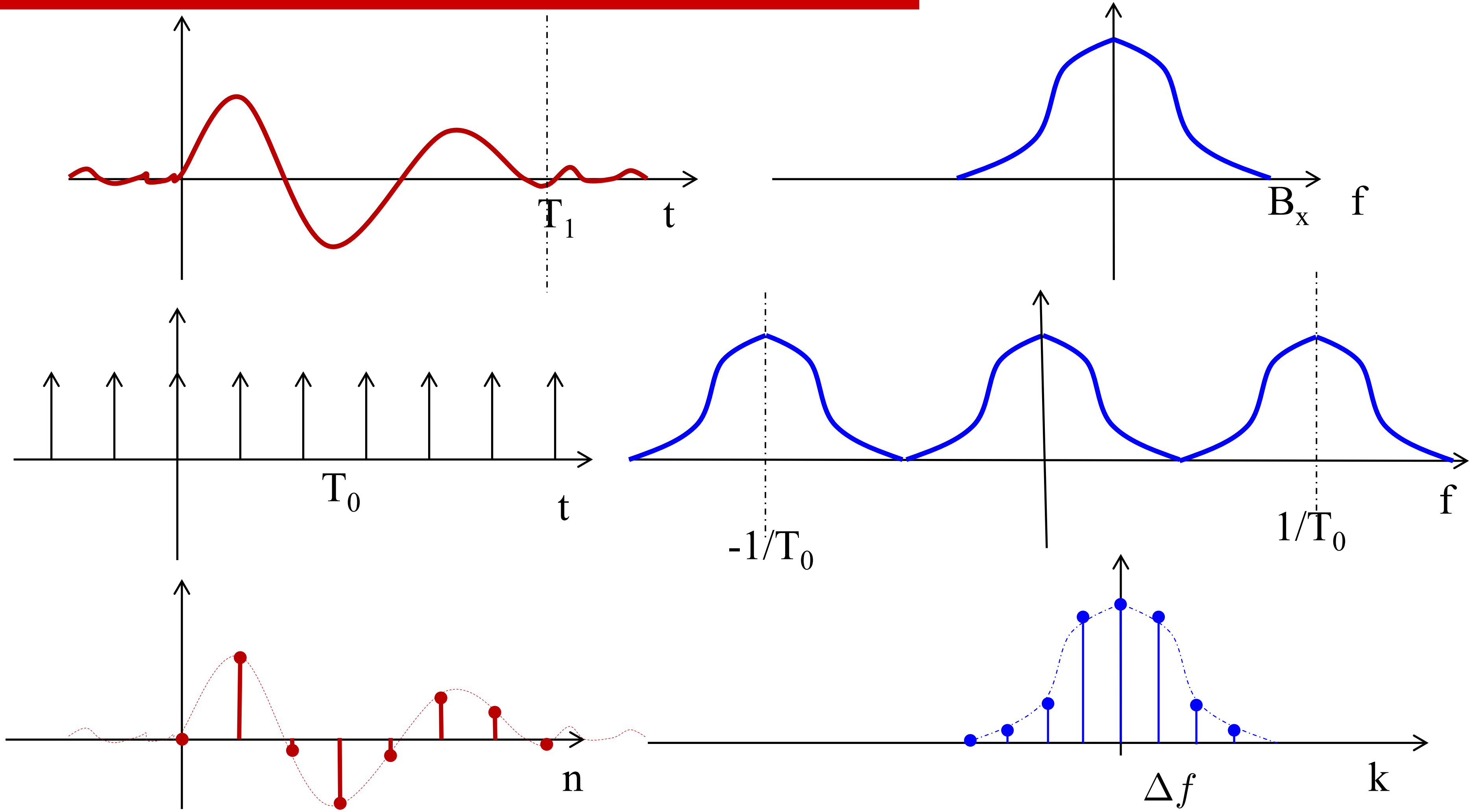
(1) per conseguire la risoluzione in frequenza richiesta è necessario elaborare almeno $N = 128$ campioni e può essere necessario estendere il segnale nel tempo con campioni nulli

(2) Non è possibile in alcun modo conseguire la risoluzione in frequenza richiesta

(3) Non è possibile conseguire la risoluzione in frequenza richiesta se non campionando il segnale ad una frequenza superiore alla frequenza di Nyqvist

(4) Nessuna delle altre risposte è corretta

Soluzione 3



Soluzione 3

- Il problema ci pone i vincoli

$$T_0 = 1/2B_x$$
$$\Delta f \leq 0.5$$

Dati

- Il risultato della DFT saranno N punti

$$N = \frac{T}{T_0}$$

- Consideriamo la relazione tra i parametri

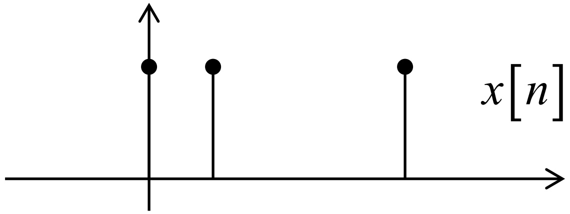
$$\Delta f = \frac{2B_x}{N} \leq 0.5 \qquad N \geq \frac{2 \cdot 32}{0.5} = 128$$

(risposta 1)

Esercizio 4

Si consideri la sequenza $x[n]$ di $N = 10$ campioni che vale 1 per $n = 0, 2, 8$ e zero altrove. Si calcoli $X[k] = \mathrm{DFT}\{x[n]\}$.

Soluzione Esercizio 4



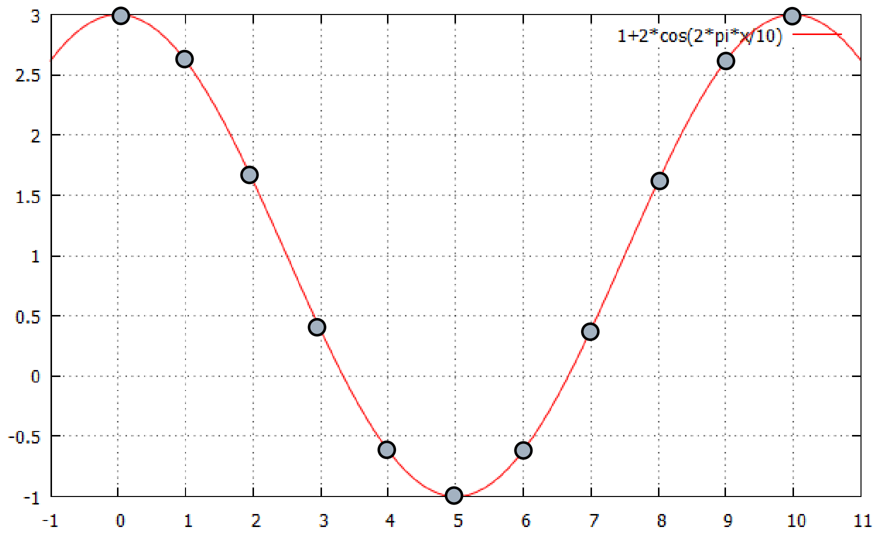
$$X[k] = \sum_{n=0}^{9} x[n] e^{-j2\pi\frac{kn}{10}}$$

$$= 1 + e^{-j2\pi\frac{2k}{10}} + e^{-j2\pi\frac{8k}{10}}$$

$$= 1 + e^{-j2\pi\frac{2k}{10}} + e^{-j2\pi\left(\frac{8k}{10}-\frac{10k}{10}\right)}$$

$$= 1 + e^{-j2\pi\frac{2k}{10}} + e^{j2\pi\left(\frac{2k}{10}\right)}$$

$$= 1 + 2\cos\left(\frac{4\pi k}{10}\right)$$



Esercizio 5

Si consideri un segnale $x(t)$ il cui spettro $X(f)$ è nullo per $|f| > f_x$, con $f_x = 10$ Hz. Si costruisca il segnale $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_y t)$ con $f_y = 50$ Hz. Si vuole valutare lo spettro $Y(f)$ a partire da opportuni campioni di $y(t)$, usando una FFT a radice 2. Volendo ottenere una risoluzione in frequenza di 3 Hz, si valuti il passo di campionamento da scegliere per $y(t)$, il numero di campioni N e la risoluzione finale ottenuta.

Soluzione 5

- Il primo punto richiede che la risoluzione in frequenza sia pari a 3 Hz. Pertanto è necessario imporre la condizione

$$\Delta f = \frac{1}{T} \leq 3$$

- che ci dà un intervallo di osservazione del segnale pari a

$$T \geq \frac{1}{3} \cong 0.33 \text{ s}$$

Soluzione 5

- Il numero N di campioni necessari si può scegliere imponendo che non vi sia aliasing nel dominio della frequenza, e che quindi le repliche di Y(f) create dal passaggio al tempo discreto siano separate.

$$B = f_y + f_x = 60 \qquad f_c \geq 2B = 120$$

$$\Delta f = \frac{f_c}{N} \leq 3 \text{ Hz} \rightarrow \text{N} \geq \frac{120}{3} = 40$$

- Questo valore è adatto ad una DFT, mentre per una FFT a radice 2, N deve essere una potenza di 2. Scegliamo quindi la potenza di immediatamente superiore, ovvero N=64
- La corrispondente risoluzione in frequenza è quindi:

$$\Delta f = \frac{f_c}{N} = \frac{120}{64} = 1.875 \text{ Hz}$$

Esercizio 6

A partire dal segnale analogico $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_0 t) + A_2 \sin(2\pi f_0 t)$ (con A_1 e A_2 costanti positive) si costruisce la sequenza $x[n] = x(nT_c)$ con $T_c = 1/(2f_0)$. Si considerino $N = 10$ campioni di $x[n]$ nell'intervallo $0 \leq n \leq 9$ e la sequenza $X[k] = \mathrm{DFT}\{x[n]\}$. Dire quale delle seguenti affermazioni è falsa:

(1) la sequenza campionata vale $x[n] = A_1 e^{j\pi n}$

(2) $X[k] = 0$ per $0 \leq k \leq 5$

(3) $X[k] = 0$ per $0 \leq k < 5$

(4) $X[k] = 10A_1$ per $k = 5$

Soluzione 6

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_0 t) + A_2 \sin(2\pi f_0 t) \qquad x[n] = x(nT_c) \quad T_c = \frac{1}{2f_0} \quad N = 10$$

$$x[n] = A_1 \cos\left(2\pi f_0 \frac{n}{2f_0}\right) + A_2 \sin\left(2\pi f_0 \frac{n}{2f_0}\right) = A_1 \cos(n\pi) + \cancelto{0}{A_2 \sin(n\pi)} = A_1(-1)^n = A_1 \exp(j\pi n)$$

$$X[k] = A_1 \sum_{n=0}^{9} e^{j\pi n} e^{-j2\pi\frac{kn}{10}} = A_1 \sum_{n=0}^{9} \left(e^{j\pi} e^{-j\pi\frac{k}{5}}\right)^n = \begin{cases} A_1 \dfrac{1 - e^{j10\pi} e^{-j2\pi k}}{1 - e^{j\pi} e^{-j\pi\frac{k}{5}}} & \text{se} \quad e^{j\pi} e^{-j\pi\frac{k}{5}} \neq 1 \\ A_1 \sum_{n=0}^{9} (1)^n = 10A_1 & \text{se} \quad e^{j\pi} e^{-j\pi\frac{k}{5}} = 1 \end{cases}$$

$$e^{j\pi} e^{-j\pi\frac{k}{5}} = 1 \rightarrow e^{-j\pi\frac{k}{5}} = -1 \rightarrow \pi\frac{k}{5} = \pi + 2l\pi \rightarrow k = 10l + 5 \rightarrow k = 5 \text{ in } [0,9]$$

$$A_1 \frac{1 - e^{j10\pi} e^{-j2\pi k}}{1 - e^{j\pi} e^{-j\pi\frac{k}{5}}} = A_1 \frac{1 - 1}{1 + e^{-j\pi\frac{k}{5}}} = 0 \ \text{ se } e^{-j\pi\frac{k}{5}} \neq -1 \quad \Rightarrow \quad X[k] = \begin{cases} 10A_1 & k = 5 \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

La risposta errata è la 2 perché $X[5]=10A_1$ (quindi non è nullo)