Elaborazione dei Segnali

POLITECNICO
DI TORINO

Dipartimento
di Elettronica
e Telecomunicazioni

Lezione 8

Classificazione dei sistemi a tempo discreto

Risposta all’impulso

Risposta in frequenza

A.A. 2023-2024

Classificazione dei sistemi a tempo discreto

Relazione ingresso-uscita

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Esistono diversi modi per classificare i sistemi a tempo discreto, ma tutti dipendono dalla relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = L[x(n)]$$

  - relazione matematica che definisce le modalità con cui il sistema elabora un segnale d'ingresso, x(n), al fine di fornirne una versione y(n) opportunamente modificata.

- I sistemi a tempo discreto possono essere classificati in base all'espressione matematica dell'operatore L [·].

Sistemi lineari

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Sono sistemi che soddisfano il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$L[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1 L[x_1(n)] + \alpha_2 L[x_2(n)]$$

  - dove α_1 e α_2 sono due numeri reali arbitrari.

Sistemi tempo invarianti o stazionari

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

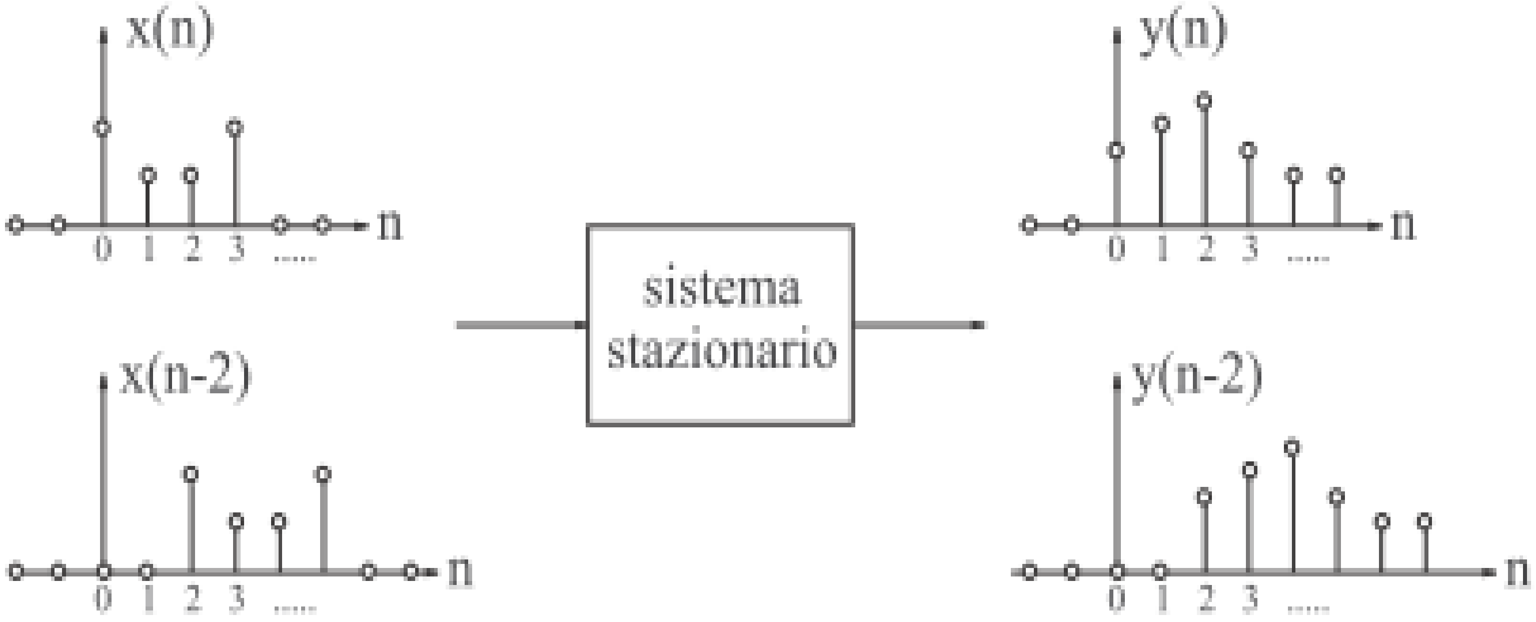
- La stazionarietà implica che il segnale in uscita dal sistema dipende solamente dalla forma del segnale in ingresso ed è indipendente dagli istanti di tempo in cui il segnale viene applicato al sistema:

$$L[x(n)] = y(n) \ \Rightarrow \qquad L[x(n-n_0)] = y(n-n_0) \qquad \forall n_0$$

- Se l'ingresso viene ritardato (o anticipato) di una quantità n_0, allora anche l'uscita viene ritardata (o anticipata) della stessa quantità.

- In pratica, il sistema ha un comportamento che non cambia con il tempo.

Sistemi tempo invarianti o stazionari



Esempio 1

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Relazione I/O: $y(n) = x(n) + x(n-1)$

- Verifichiamo la linearità. Siano $x_1(n)$ e $x_2(n)$ due generici segnali a tempo discreto all'ingresso del sistema:

$$L[x_1(n)] = x_1(n) + x_1(n-1) \qquad L[x_2(n)] = x_2(n) + x_2(n-1)$$

- Calcoliamo:

$$\begin{aligned} L[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] &= \alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) + \alpha_1 x_1(n-1) + \alpha_2 x_2(n-1) = \\ &= \alpha_1 [x_1(n) + x_1(n-1)] + \alpha_2 [x_2(n) + x_2(n-1)] \end{aligned}$$

$$\alpha_1 L[x_1(n)] + \alpha_2 L[x_2(n)] = \alpha_1 [x_1(n) + x_1(n-1)] + \alpha_2 [x_2(n) + x_2(n-1)]$$

- I due termini sono uguali, quindi il sistema è lineare.

Esempio 1

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Relazione I/O:

$$y(n) = x(n) + x(n-1)$$

- Verifichiamo la stazionarietà:

$$L[x(n-n_0)] = x(n-n_0) + x(n-n_0-1)$$

$$y(n-n_0) = x(n-n_0) + x(n-n_0-1)$$

- I due termini sono uguali, quindi il sistema è stazionario.

Esempio 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Relazione I/O: $y(n) = \sqrt{x(n)}$

- Verifichiamo la linearità. Siano $x_1(n)$ e $x_2(n)$ due generici segnali a tempo discreto all'ingresso del sistema:

$$L[x_1(n)] = \sqrt{x_1(n)} \qquad L[x_2(n)] = \sqrt{x_2(n)}$$

- Calcoliamo:

$$L[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \sqrt{\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)}$$

$$\alpha_1 L[x_1(n)] + \alpha_2 L[x_2(n)] = \alpha_1 \sqrt{x_1(n)} + \alpha_2 \sqrt{x_2(n)}$$

- I due termini sono diversi, quindi il sistema non è lineare.

Esempio 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Relazione I/O:

$$y(n) = \sqrt{x(n)}$$

- Verifichiamo la stazionarietà:

$$L[x(n-n_0)] = \sqrt{x(n-n_0)}$$

$$y(n-n_0) = \sqrt{x(n-n_0)}$$

- I due termini sono uguali, quindi il sistema è stazionario.

Esempio 3

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Relazione I/O: $y(n) = x(n) \cdot n$

- Verifichiamo la linearità. Siano $x_1(n)$ e $x_2(n)$ due generici segnali a tempo discreto all'ingresso del sistema:

$$L[x_1(n)] = x_1(n) \cdot n \qquad L[x_2(n)] = x_2(n) \cdot n$$

- Calcoliamo:

$$L[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = [\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)]n = \alpha_1 x_1(n) n + \alpha_2 x_2(n) n$$

$$\alpha_1 L[x_1(n)] + \alpha_2 L[x_2(n)] = \alpha_1 x_1(n) n + \alpha_2 x_2(n) n$$

- I due termini sono uguali, quindi il sistema è lineare.

Esempio 3

- Relazione I/O:

$$y(n) = x(n) \cdot n$$

- Verifichiamo la stazionarietà:

$$L[x(n-n_0)] = x(n-n_0) \cdot n$$

$$y(n-n_0) = x(n-n_0) \cdot (n-n_0)$$

- I due termini sono differenti, quindi il sistema non è stazionario.

Sistemi causali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Sono i sistemi in cui la risposta corrente, $y(n)$, non dipende dai valori futuri dell’ingresso, cioè da termini del tipo $x(n+n_0)$, dove n_0 é una costante intera qualsiasi e strettamente positiva ($n_0 > 0$).

Esempi

- Relazione I/O: $y(n) = x(2n)$
- Il sistema non è causale, perché la sequenza di uscita y(n) dipende dai valori futuri di x(n).
  - Ad esempio, $y(2) = x(4)$ → per calcolare l'uscita y nell'istante 2 devo conoscere il valore dell'ingresso x all'istante 4 (successivo).

- Relazione I/O: $y(n) = x(n) + x(n-1)$
- Il sistema è causale, perché la sequenza di uscita *y*(*n*) dipende dal valore corrente dell'ingresso *x*(*n*) e dal suo valore assunto nell'istante di tempo precedente *x*(*n*-1).

Sistemi con e senza memoria

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- I sistemi senza memoria sono i sistemi per cui la risposta corrente, $y(n)$, dipende solo dal valore dell'ingresso nel medesimo istante di tempo n, e non da termini dell'ingresso negli istanti di tempo precedenti.

Esempi

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Il sistema $y(n)=3x(n)$ é senza memoria

- I sistemi $y(n)= 2x(n)-3x(n-1)$ e $y(n)=3x(n-3)$ sono con memoria perché per fornire il campione di uscita in un generico istante n, devono necessariamente immagazzinare i valori che il segnale di ingresso ha assunto in alcuni istanti di tempo precedenti.
  - La memoria del sistema nei due casi precedenti è 1 e 3, rispettivamente.

- Il sistema $y(n)=\sum_{k=0}^{N}\alpha_k x(n-k)$ ha memoria pari a N.
  - Se $N<\infty$, il sistema è a memoria finita, altrimenti è a memoria infinita.

Risposta all’impulso di sistemi LTI

Definizione della risposta all'impulso

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Un generico segnale $x(n)$ a tempo discreto può essere rappresentato come una combinazione lineare di delta numeriche:

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)$$

- Si consideri un generico sistema LTI caratterizzato dalla relazione I/O: $y(n)=L\,[x(n)]$.

- Applicando la trasformazione L [·] al segnale x(n) espresso come combinazione lineare di delta numeriche, si ottiene:

$$y(n) = L[x(n)] = L\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)\right]$$

Definizione della risposta all'impulso

$$y(n) = L[x(n)] = L\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)\right]$$

- L'operatore L e la sommatoria sono entrambi lineari, quindi l'ordine può essere scambiato:

$$y(n) = L[x(n)] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)L[\delta(n-i)]$$

  - x(i) è costante in n → esce dall'operatore L.

- Definendo h(n) = L [δ(n)] come risposta all'impulso del sistema, e sfruttando la proprietà di stazionarietà secondo cui $h(n-n_0) = L[\delta(n-n_0)]$, si ottiene:

Definizione della risposta all'impulso

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\boxed{y(n)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}x(i)h(n-i)=x(n)*h(n)}$$

- Tutti i sistemi LTI possono essere espressi in forma non ricorsiva

- Separando nella sommatoria i termini con indice positivo e negativo (e usando la proprietà commutativa della convoluzione), otteniamo:

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{i=-\infty}^{-1}h(i)x(n-i)+\sum_{i=0}^{+\infty}h(i)x(n-i)$$

Sistema causale

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- L'uscita del sistema è composta da due contributi:
  - effetto dei campioni del segnale già entrati nel sistema all'istante *n* → parte causale dell'uscita
  - effetto di tutti i campioni del segnale *x*(*n*) che entreranno nel sistema in istanti successivi rispetto a *n* → parte anticausale dell'uscita

- Se il sistema è causale, il primo termine deve essere identicamente nullo → la risposta all'impulso è nulla per istanti di tempo *n*<0:

$$y(n)=\sum_{i=0}^{+\infty}h(i)\,x(n-i)$$

  - L'uscita dipende solo dal valore corrente del segnale di ingresso e dai campioni già entrati nel sistema negli istanti precedenti.

Risposta in frequenza di sistemi LTI

Definizione di risposta in frequenza

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Consideriamo un generico sistema LTI, caratterizzato da una risposta all'impulso h(n), e con in ingresso un generico segnale x(n):

$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)h(n-i)=x(n)*h(n)$$

- Ipotesi: x(n) e h(n) trasformabili mediante DTFT
- Applicando la DTFT a y(n), otteniamo:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-j\omega n}$$

Definizione di risposta in frequenza

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Sostituendo l'espressione di y(n) come convoluzione tra x(n) e h(n):

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h(i)x(n-i)\right)e^{-j\omega n}=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left(h(i)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n-i)e^{-j\omega n}\right)$$

- Effettuando il cambio di variabile *m=n-i* nella sommatoria interna:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left(h(i)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)e^{-j\omega(m+i)}\right)=\left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h(i)e^{-j\omega i}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)e^{-j\omega m}\right)=$$
$$=H\left(e^{j\omega}\right)\cdot X\left(e^{j\omega}\right)$$

- La DTFT del segnale in uscita è pari al prodotto delle DTFT del segnale in ingresso e della risposta all'impulso del sistema LTI.

Definizione di risposta in frequenza

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La funzione:

$$\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}h(i)e^{-j\omega i}=\mathrm{DTFT}\left[h(n)\right]}$$

  è detta risposta in frequenza del sistema LTI.

- Può essere definita come: $\boxed{H\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}}$

- La risposta in frequenza:
  - è una funzione complessa della variabile ω
  - soddisfa le proprietà dalla DTFT

Risposta a esponenziali complessi

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Consideriamo un sistema descritto dalla convoluzione lineare discreta:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) x(n-i)$$

- Si suppone di avere all'ingresso il segnale: $x(n) = e^{j\omega_0 n}$
  con ω_0 costante:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) e^{j\omega_0 (n-i)} = e^{j\omega_0 n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) e^{-j\omega_0 i}$$

DTFT di h(n) valutata in ω_0

Risposta a esponenziali complessi

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$y(n) = e^{j\omega_0 n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) e^{-j\omega_0 i} = e^{j\omega_0 n} \cdot H\left(e^{j\omega_0}\right) =$$

$$= \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cdot e^{j\omega_0 n + j\phi\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]}$$

- Le sinusoidi complesse possono essere interpretate come autofunzioni dei sistemi LTI.

- Quello che conta nella valutazione nella risposta del sistema LTI è la risposta in frequenza valutata solo nella pulsazione ω_0 della sinusoide complessa in ingresso al sistema.

Risposta a sequenze sinusoidali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Consideriamo un sistema descritto dalla convoluzione lineare discreta:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i)x(n-i)$$

con h(n) reale.

- Si suppone di avere all'ingresso il segnale:

$x(n) = \cos(\omega_0 n + \theta)$, con ω_0 e θ costanti.

- Usando la relazione di Eulero:

$$x(n) = \cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{e^{j\omega_0 n + j\theta} + e^{-j\omega_0 n - j\theta}}{2}$$

Risposta a sequenze sinusoidali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Sfruttando il risultato ricavato in precedenza:

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} \quad \Rightarrow \quad y(n) = \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cdot e^{j\omega_0 n + j\phi\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]}$$

si ottiene:

$$x_1(n) = \frac{1}{2} e^{j\theta} e^{j\omega_0 n} \quad \Rightarrow \quad y_1(n) = \frac{1}{2} e^{j\theta} \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cdot e^{j\omega_0 n + j\phi\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]}$$

$$x_2(n) = \frac{1}{2} e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 n} \quad \Rightarrow \quad y_2(n) = \frac{1}{2} e^{-j\theta} \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right| \cdot e^{-j\omega_0 n + j\phi\left[H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right]}$$

- La risposta del sistema all'ingresso sinusoidale è quindi:

$$y(n) = \frac{1}{2} e^{j\theta} \left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right| \cdot e^{j\omega_0 n + j\phi\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]} + \frac{1}{2} e^{-j\theta} \left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right| \cdot e^{-j\omega_0 n + j\phi\left[H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right]}$$

Risposta a sequenze sinusoidali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Ricordando le proprietà di simmetria della trasformata di segnali reali (modulo pari e fase dispari):

$$y(n)=\frac{1}{2}e^{j\theta}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cdot e^{j\omega_0 n+j\phi\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]}+\frac{1}{2}e^{-j\theta}\left|H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right|\cdot e^{-j\omega_0 n+j\phi\left[H\left(e^{-j\omega_0}\right)\right]}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{j\theta}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cdot e^{j\omega_0 n+j\phi\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]}+\frac{1}{2}e^{-j\theta}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cdot e^{-j\omega_0 n-j\phi\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]}=$$

$$=\frac{1}{2}\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\left[e^{j\theta}\cdot e^{j\omega_0 n+j\phi\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]}+e^{-j\theta}e^{-j\omega_0 n-j\phi\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]}\right]=$$

$$=\left|H\left(e^{j\omega_0}\right)\right|\cos\left(\omega_0 n+\theta+\phi\left[H\left(e^{j\omega_0}\right)\right]\right)$$