Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

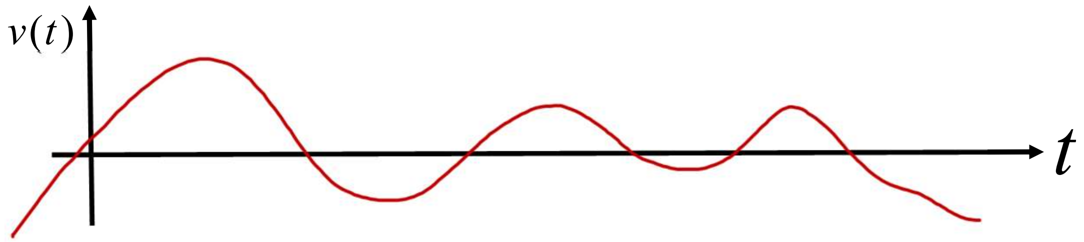
Teoria dei Segnali

- Classificazione segnali analogici
- Rappresentazione vettoriale dei segnali

Anno accademico 2024-2025
Ultimo aggiornamento: Settembre 2024

I segnali analogici

- I segnali analogici sono una descrizione matematica dell'evoluzione nel tempo di grandezze fisiche quali:
  - Tensioni
  - Correnti
  - Temperature



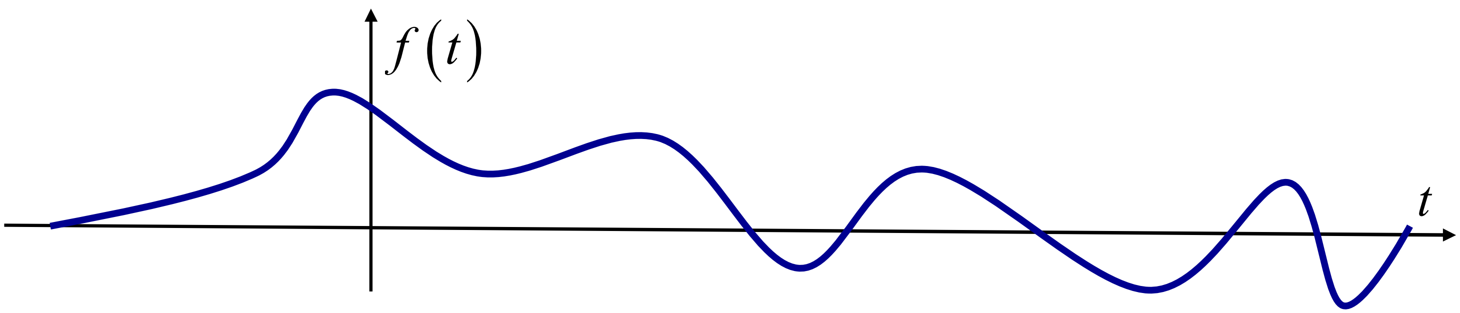
Definizione dei segnali analogici a tempo continuo

- Segnale analogico reale a tempo continuo
  - Funzione reale di variabile reale (tempo) che assume valori significativi per qualunque tempo *t*
    - il tempo NON è discretizzato
      - Per quanto riguarda i valori assunti sull'asse delle ordinate (ampiezze) non si fa invece alcuna ipotesi
        - Ad esempio, il segnale può anche essere discontinuo in ampiezza

- In molte trattazioni matematiche, può anche essere una funzione a valori complessi (ma sempre della variabile reale tempo «continuo») $R \to C$

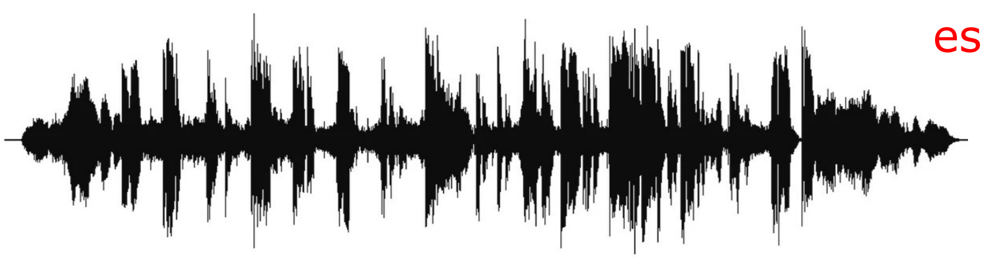
Segnale analogico reale

- La grandezza fisica che si vuole rappresentare è una quantità a valori reali che evolve in maniera <u>continua nel tempo</u>

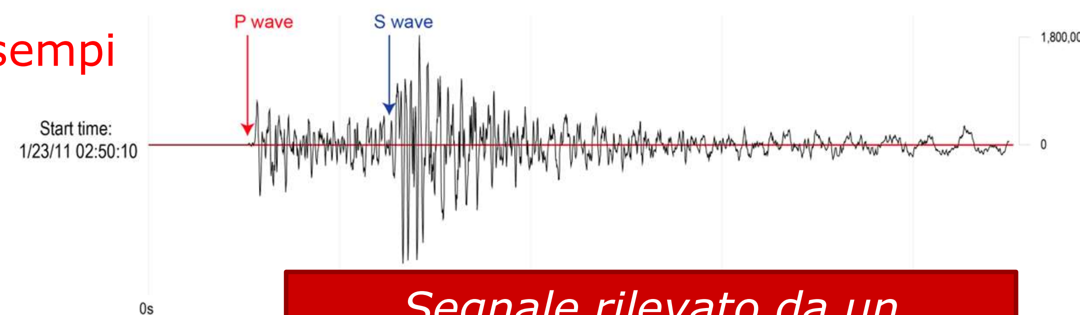


Nota: come caso particolare, un segnale analogico a tempo continuo può comunque avere delle discontinuità nelle ampiezze

esempi



Voce all'uscita di un microfono



Segnale rilevato da un sismografo

Segnali analogici a valori complessi

- I segnali complessi sono tipicamente usati per rappresentazioni matematiche relative a segnali di tipo sinusoidale o "pseudo-sinusoidale (ad esempio segnali modulati attorno una sinusoide)
  - Si vedranno successivamente alcuni esempi
  - Si pensi ad esempio ai segnali introdotti nel corso "Elettromagnetismo e Teoria dei circuiti" (Elettrotecnica)

$$f(t) = a(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \phi(t)\right) \quad \text{con } f_0 = \text{costante}$$

  - Per vari motivi, può essere utile rappresentare questo segnale come un segnale a valori complessi con espressione:

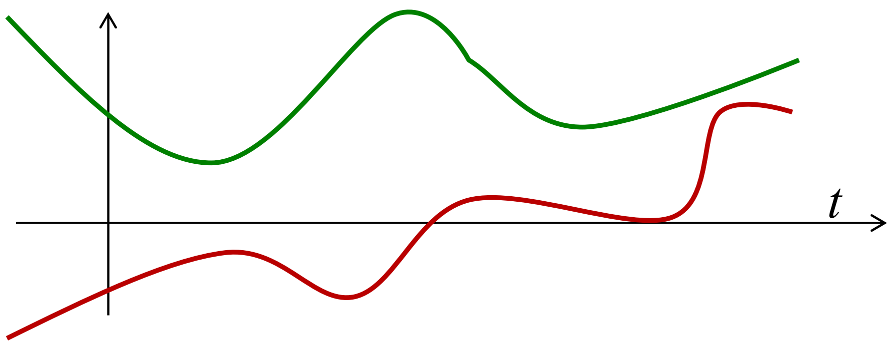
$$\overset{\frown}{f}(t) = a(t) \cdot e^{j\phi(t)}$$

Da cui poi, nel caso di sinusoidi pure, il concetto di “fasore”

$$\overset{\frown}{f} = a \cdot e^{j\phi}$$

Segnali complessi

$$f(t) = f_R(t) + j \cdot f_I(t)$$



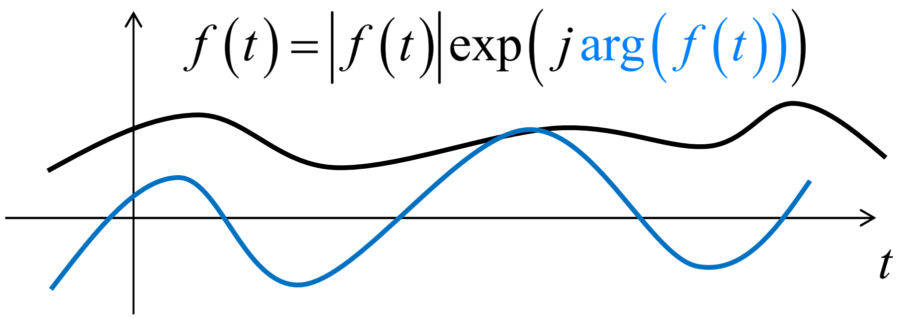
$$\Re[f(t)] \triangleq f_R(t)$$

$$\Im[f(t)] \triangleq f_I(t)$$

Parte reale
e
parte immaginaria

Modulo e fase

$$f(t) = |f(t)| \exp\left(j \arg\left(f(t)\right)\right)$$



Formule di conversione

$$f_R(t) = |f(t)| \cos\left(\arg\left(f(t)\right)\right)$$

$$f_I(t) = |f(t)| \sin\left(\arg\left(f(t)\right)\right)$$

$$|f(t)| = \sqrt{f_R^2(t) + f_I^2(t)}$$

$$\arg\left(f(t)\right) = \arctan\left(\frac{f_I(t)}{f_R(t)}\right)$$

Altri importanti classificazioni

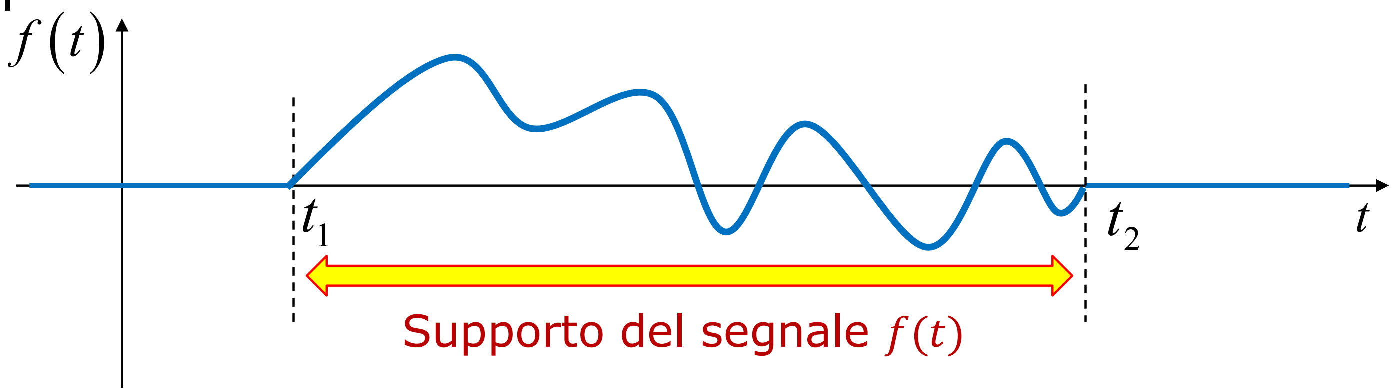
- Esistono vari altri tipi di classificazione:
  - A supporto limitato
  - Ad ampiezza limitata
  - Impulsivo
  - Ad energia media finita
  - A potenza media finita
  - Periodico/aperiodico

    - Le prossime slide introdurranno le definizioni di ciascuna di queste classificazioni

Segnali a supporto temporale limitato

<u>Definizione di supporto</u> (temporale) di un segnale:
intervallo di tempo all'esterno del quale il segnale è nullo

- Un segnale si definisce a supporto limitato quando il suo supporto è finito



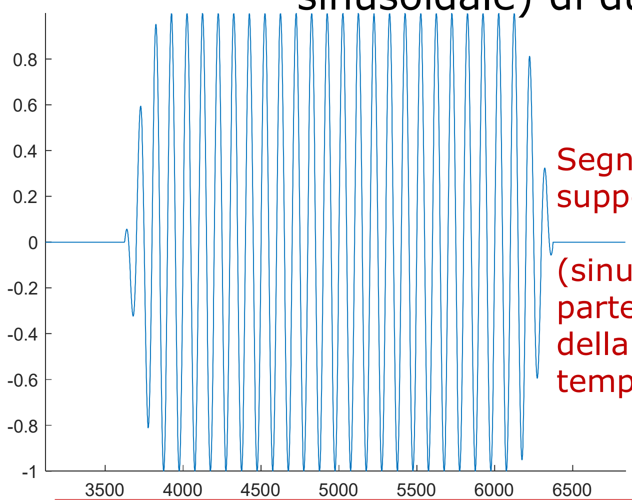
Esempio di segnale a supporto limitato in $[t_1, t_2]$

La <u>durata temporale</u> del segnale è definita come $t_2 - t_1$

Commento

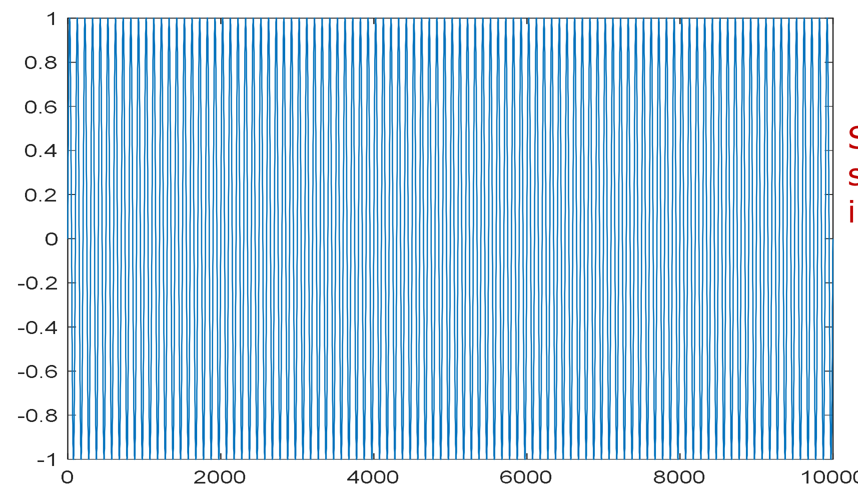
Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications

- I segnali di interesse fisico/ingegneristico hanno tipicamente sempre un inizio ed una fine nel tempo, e dunque sono a supporto limitato
- Tuttavia, solitamente per ragioni di semplicità matematica, spesso è comodo considerarli a supporto temporale illimitato
  - Ad esempio: l'oscillatore che dà il clock ad una CPU è «fisicamente» attivo solo su un supporto temporale limitato (anche se estremamente lungo)
    - lo si rappresenta spesso matematicamente come una onda quadra (o sinusoidale) di durata infinita



Segnale a supporto limitato

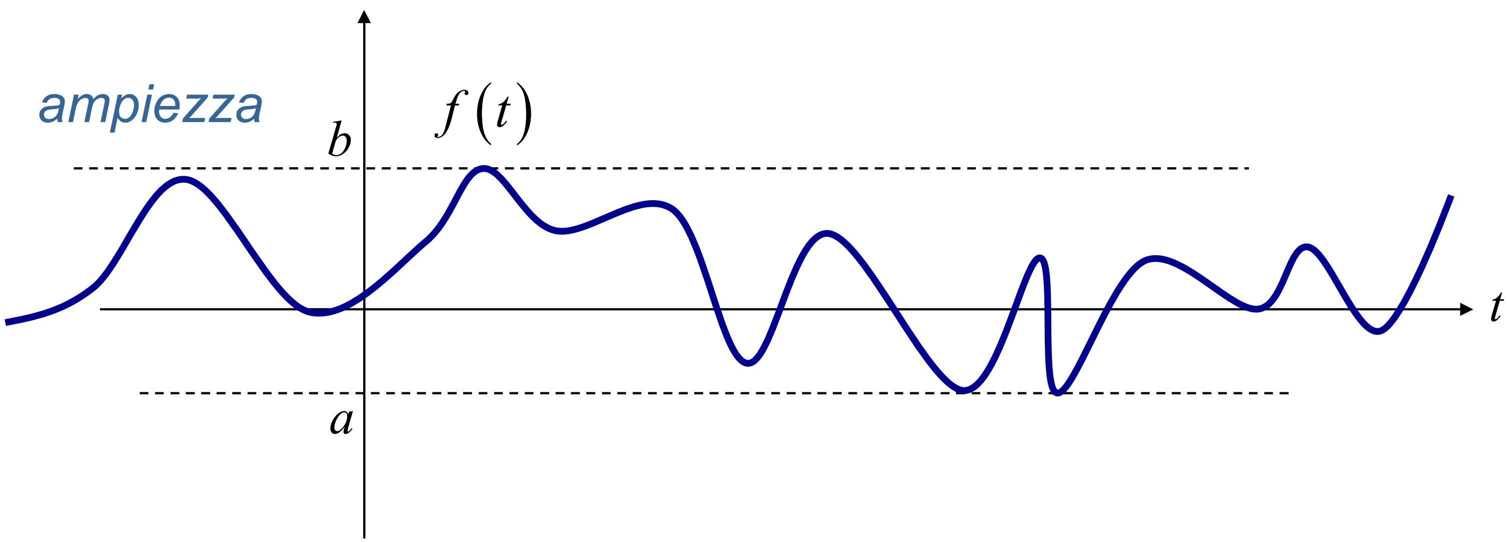
(sinusoidale nella parte centrale della finestra temporale)



Sinusoide a supporto illimitato

Segnali ad ampiezza limitata

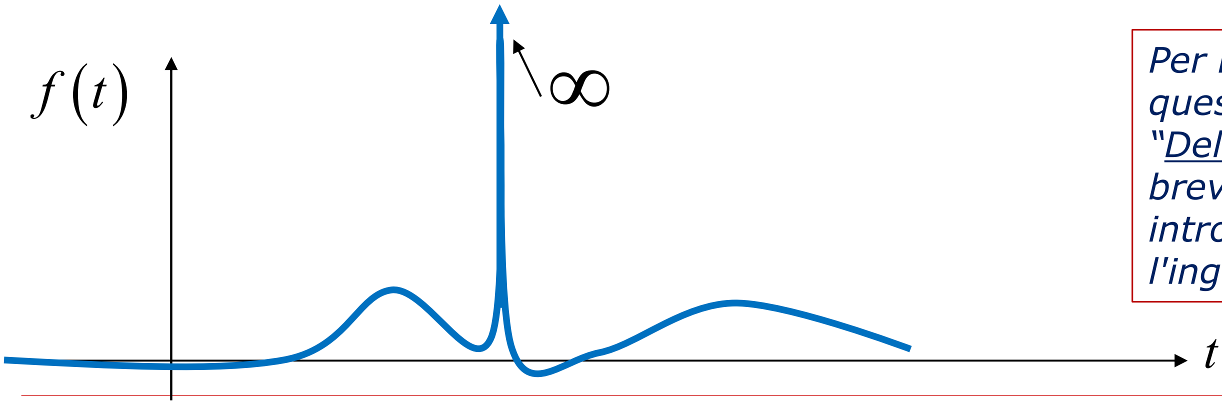
- La funzione assume valori compresi in un intervallo finito di ampiezze



Esempio di segnale ad ampiezza limitata in $[a, b]$

Segnali impulsivi

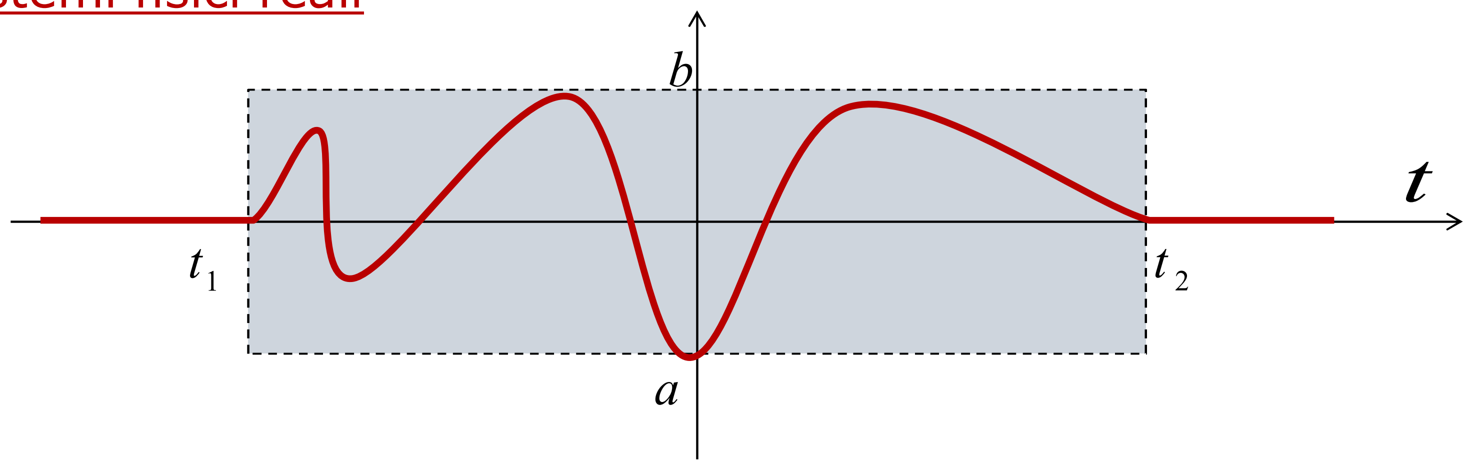
- La funzione assume valori di ampiezza illimitati in un dominio infinitesimale
- I segnali impulsivi sono chiaramente irrealizzabili fisicamente (NON sono segnali «fisici» ma segnali «matematici)
- Spesso però risultano essere una astrazione utile nel campo della teoria dei segnali
- Gli impulsi si indicano con delle frecce sul grafico



Per rappresentare matematicamente questi segnali si usa la funzione speciale "Delta di Dirac", di cui riparleremo brevemente più avanti, come già introdotto in "Metodi matematici per l'ingegneria"

Segnale fisico

- Un “segnale fisico” è uno segnale che può avere una realizzazione in sistemi fisici reali



- Si tratta di segnali reali di variabile reale limitati in ampiezza e supporto temporale, in quanto:
  - Ogni segnale fisico ha un “inizio” e una “fine” nel tempo
  - Ogni segnale fisico ha sicuramente una limitazione sulle ampiezze (“range”)

Definizione di **potenza** di un segnale

- Potenza istantanea
  - È una funzione del tempo che coincide con il modulo al quadrato del segnale

$$P_{ist}(t) = |x(t)|^2$$

- Potenza (media)
  - Si tratta della «media temporale» della potenza istantanea
    - *media temporale del quadrato del segnale*

$$\boxed{P(x) \triangleq \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |x(t)|^2 \, dt}$$

Nota: questa definizione associa una funzione del tempo ad un singolo numero reale

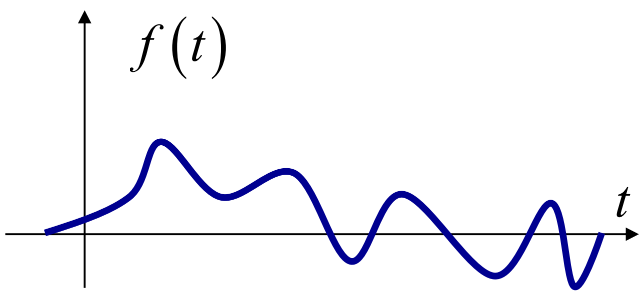
Come vedremo più nel dettaglio più avanti, è spesso utile introdurre la "media temporale" di una generica funzione del tempo $y(t)$ con questa definizione:

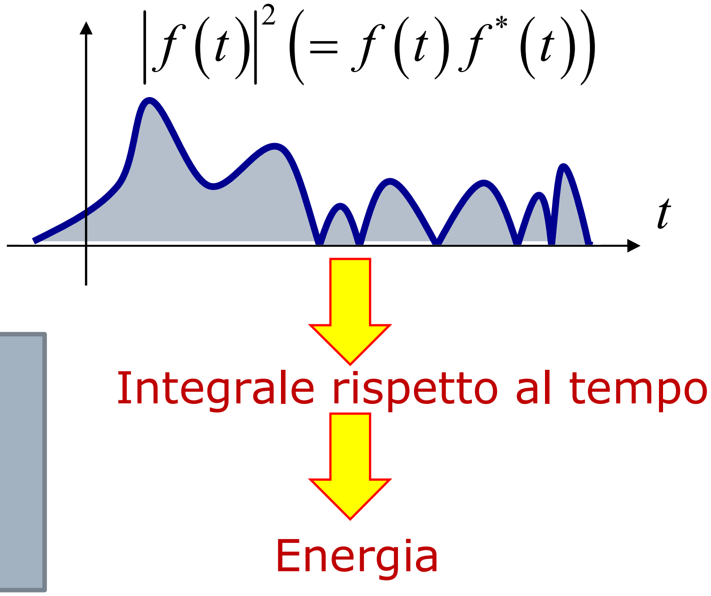
$$\boxed{< y(t) > \triangleq \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} y(t) \, dt}$$

Definizione di **energia** di un segnale

- Energia di un segnale
  - L'energia di un segnale è l'integrale del modulo al quadrato del segnale stesso.

$$\boxed{E(x) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt}$$



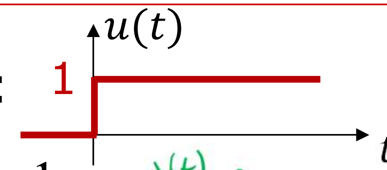


L'energia coincide con l'integrale della potenza istantanea.
Attenzione: l'energia <u>NON è</u> la potenza media, in quanto in quest'ultima è presente una normalizzazione rispetto al tempo!

Esempi numerici

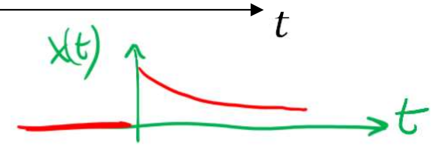
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- $x(t) = u(t)e^{-\alpha t}$, con $u(t)$ funzione gradino:



Calcolare l'energia

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = -\frac{1}{2\alpha} e^{-2\alpha t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha}$$



- $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi)$, con A, f_0, ϕ generiche costanti positive diverse da zero

Calcolare la potenza

$$P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |x(t)|^2 dt = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t + \phi) dt =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{A^2}{2a} \left[\int_{-a}^{a} \frac{1}{2} dt + \int_{-a}^{a} \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t + 2\phi) dt \right] = \lim_{a\to\infty} \frac{A^2}{2a} \left[\frac{2a}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin(4\pi f_0 t + 2\phi)}{4\pi f_0} \Big|_{-a}^{a} \right] =$$

$$= \frac{A^2}{2} + \lim_{a\to\infty} \frac{A^2}{4a} \frac{\sin(4\pi f_0 a + 2\phi) - \sin(-4\pi f_0 a + 2\phi)}{4\pi f_0} = \frac{A^2}{2}$$

Nota: questo calcolo della potenza di una sinusoide è un risultato che useremo spesso, conviene ricordarlo!

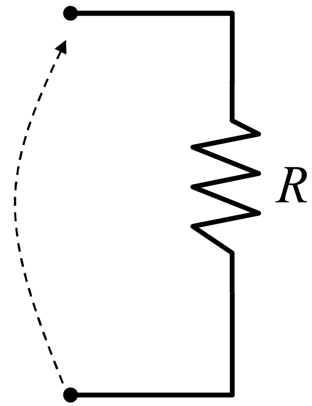
Interpretazione fisica di energia e potenza: un esempio importante da Elettrotecnica

Un esempio dall'elettrotecnica:

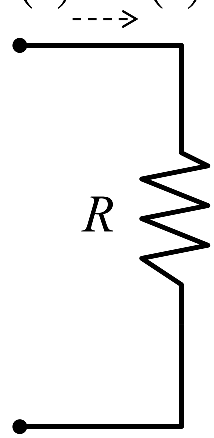
Tensione ai capi della resistenza

$$f(t) = v(t)$$

$$P_{ist}(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$



$$f(t) = i(t)$$



Corrente ai capi della resistenza

$$P_{ist}(t) = R \cdot i^2(t)$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{ist}(t)dt = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{+\infty} v^2(t)dt = \frac{1}{R}E(v)$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{ist}(t)dt = R\int_{-\infty}^{+\infty} i^2(t)dt = R\,E(i)$$

A parte una costante di proporzionalità R, le definizioni delle slide precedenti coincidono con le definizioni fisiche di potenza ed energia

Energia e potenza

- In conclusione, le definizioni di energia e potenza che introduciamo in questo corso sono le stesse che si usano in vari altri campi delle fisica e dell'ingegneria
  - Semplicemente, al fine di poter introdurre una trattazione il più generale possibile, in questo corso NON consideriamo il fattore di proporzionalità presente di volta in volta nei vari casi fisici

- Conseguentemente, le definizioni di energia e potenza in questo corso sono da intendersi come ADIMENSIONATE

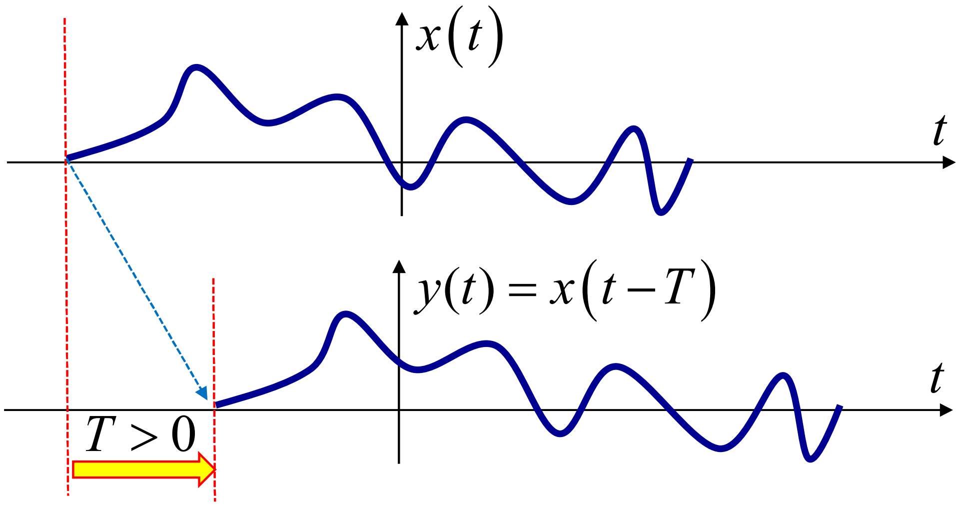
  - *Attenzione: in altri Corsi queste quantità potranno invece avere una dimensione!*
    - Esempio «ovvio»: una tensione è un segnale con dimensione [V]
      - La sua potenza sarà dunque in [V^2]
        - Oppure più comunemente in Watt se si introduce la normalizzazione tramite la resistenza di carico

Classificazione dei segnali in base alla loro energia e/o potenza

- Segnali ad energia finita $\Rightarrow E(x) < \infty$
- Segnali a potenza (media) finita $\Rightarrow P(x) < \infty$
- Commenti
  - Si noti che se un segnale è ad energia finita, la sua potenza media è nulla
  - Le due classificazioni sono di fatto mutuamente esclusive
    - Salvo l'eccezione di alcuni particolarissimi segnali che sono sia a potenza che ad energia infinita
      - Vedremo alcuni esempi durante il corso

… una breve parentesi: segnali ritardati sull'asse dei tempi

- Molto spesso in questo corso, ci servirà trattare di un segnale *y(t)* che è una versione traslata sull'asse dei tempi di una certa quantità *T* del segnale *x(t)*
- Formula della traslazione temporale: $\boxed{y(t) = x(t-T)}$

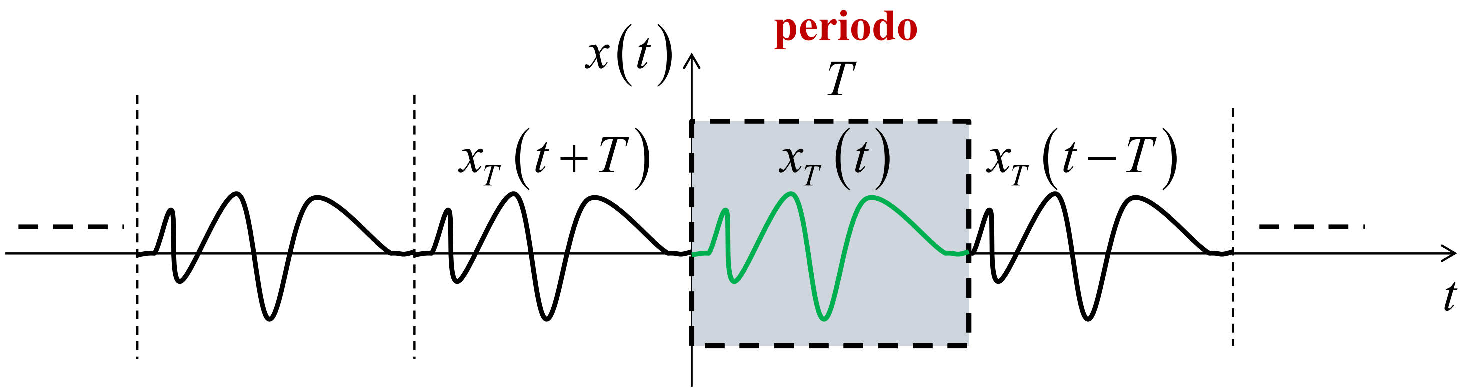


Segnale periodico

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Definizione matematica:
  segnali che si ripetono regolarmente nel tempo

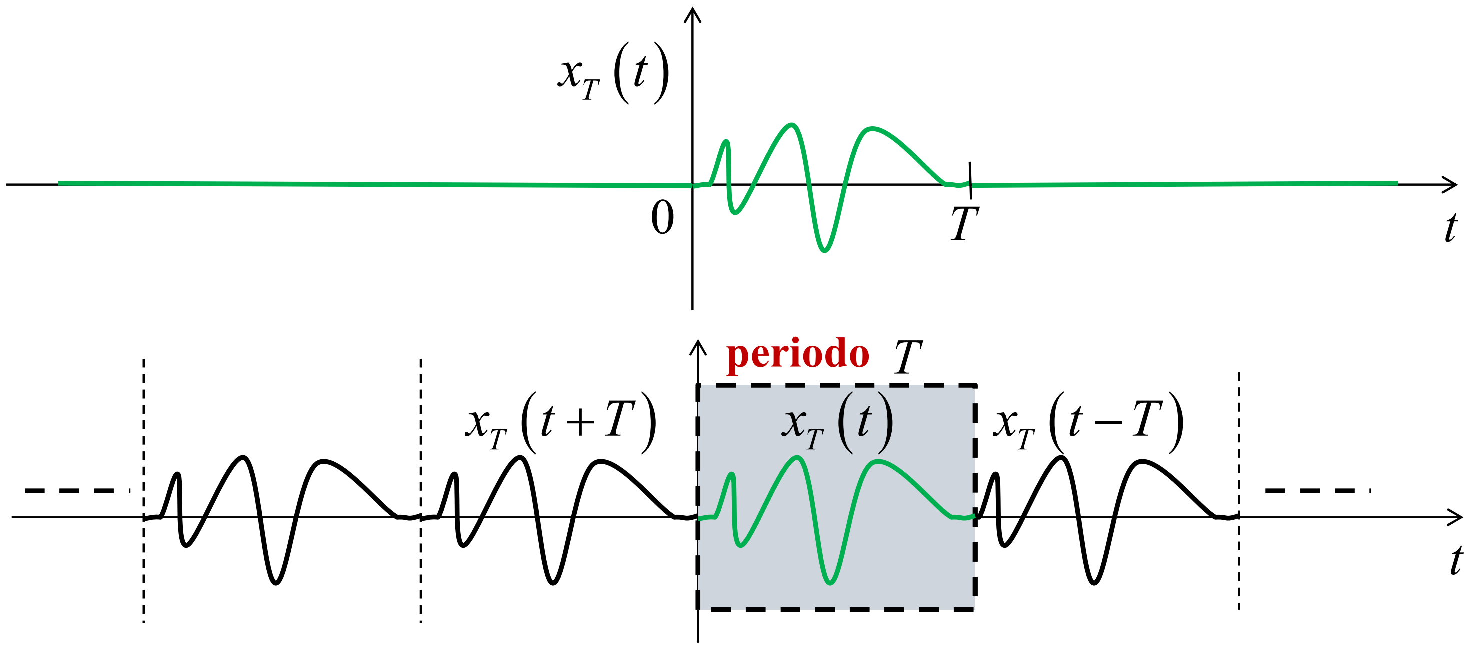
$$\exists T : x(t) = x(t+T) \quad \forall t$$



- I segnali periodici sono una astrazione matematica adatta a rappresentare molti segnali fisici che si ripetono nel tempo, quali:
  - Oscillatori sinusoidali
  - CPU clocks

- A rigore tuttavia, i segnali fisici che si approssimano come periodici
  - NON sono mai "perfettamente" periodici
  - NON sono a supporto illimitato

Rappresentazione segnali periodici



Possibile rappresentazione tramite il segnale "elementare" definito su un periodo *T* e nullo altrove

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_T(t-nT)$$

Segnale periodico: energia e potenza

- Per calcolare l'energia del segnale periodico

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT) \right|^2 dt$$

facciamo uso dei seguenti passaggi, che torneranno utili spesso durante il corso:

$$|z|^2 = z \cdot z^*$$

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n^* = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} z_{n_1} \cdot z_{n_2}^*$$

Segnale periodico: energia

$$E(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_T(t-nT)\right|^2dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_T(t-nT)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x_T^*(t-mT)\,dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x_T(t-nT)\,x_T^*(t-mT)\,dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_T(t-nT)x_T^*(t-mT)dt=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_T(t-nT)x_T^*(t-nT)dt+\underline{\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m\neq n}\int_{-\infty}^{+\infty}x_T(t-nT)x_T^*(t-mT)dt}=$$

Questo termine è=0 perché le due funzioni hanno supporto disgiunto

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|x_T(t-nT)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}E(x_T)\rightarrow+\infty$$

Conclusione: **un segnale periodico è sempre ad energia infinita**

Segnale periodico: potenza

- Calcoliamo la potenza

$$P(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |x(t)|^2 dt$$

$$P(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2mT} \int_{-mT}^{mT} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t-nT) \right|^2 dt = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2mT} \int_{-m}^{mT} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_T(t-nT)|^2 \, dt =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2mT} \sum_{n=-m}^{m-1} \int_{-m}^{mT} |x_T(t-nT)|^2 dt = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2mT} \sum_{n=-m}^{m-1} E(x_T) = \lim_{m\to\infty} \frac{2mE(x_T)}{2mT} = \frac{E(x_T)}{T}$$

Conclusione: **un segnale periodico è (solitamente) a potenza (media) finita**

La potenza media coincide con l'energia del segnale troncato su un periodo divisa per il periodo T

Esempio numerico

- Verificare la relazione precedente per un segnale sinusoidale $x(t) = A cos(2\pi f_0 t + \phi)$

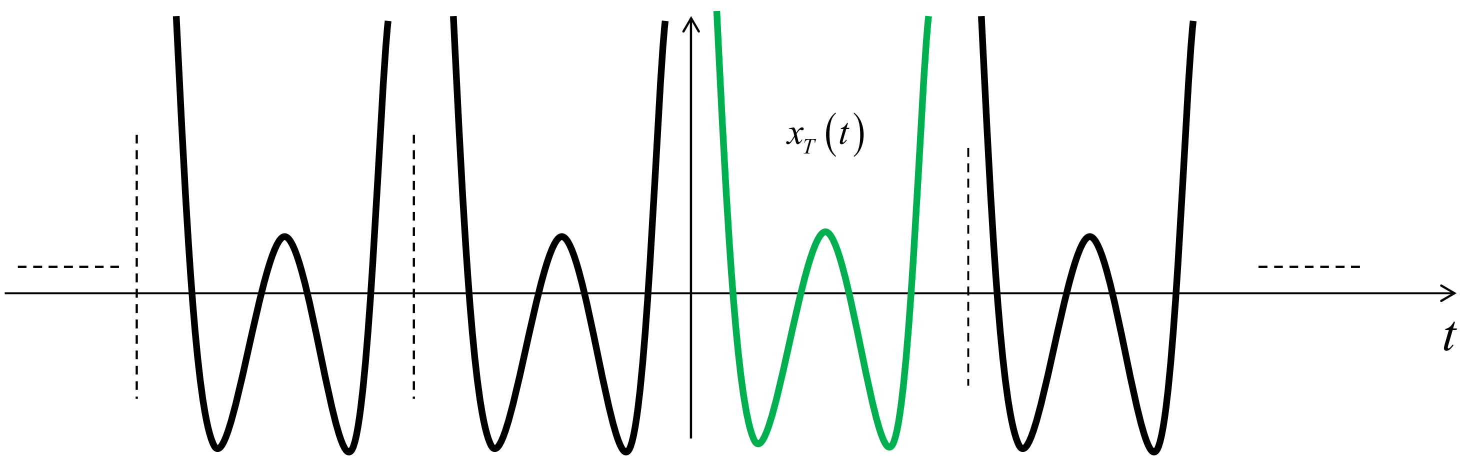
- Avevamo visto che $P(x) = \dfrac{A^2}{2}$

- Provare a verificare a casa che $P(x) = \dfrac{E(x_T(t))}{T}$

Segnale periodico a potenza infinita

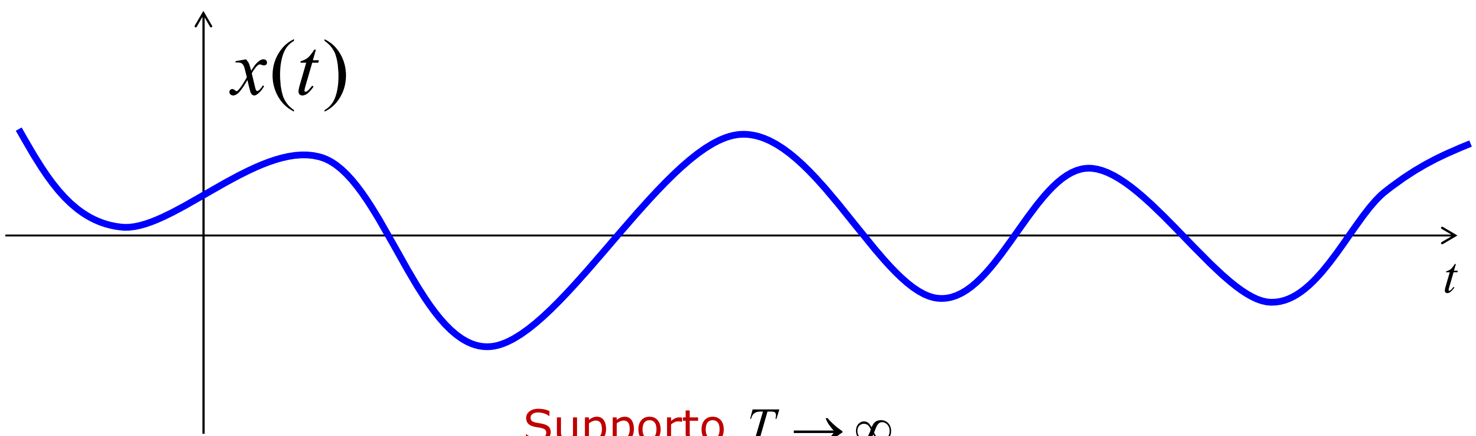
- Solitamente un segnale periodico è a potenza finita
- Caso particolare: un segnale periodico ha potenza infinita se l'energia del segnale nel periodo è infinita

$$\boxed{E(x_T) \to \infty \Rightarrow P(x(t)) \to \infty}$$



Segnale aperiodico a potenza finita

- Anche i segnali non periodici (aperiodici) possono essere ad energia infinita e a potenza finita
- Tipicamente possono essere a potenza finita i segnali con supporto illimitato

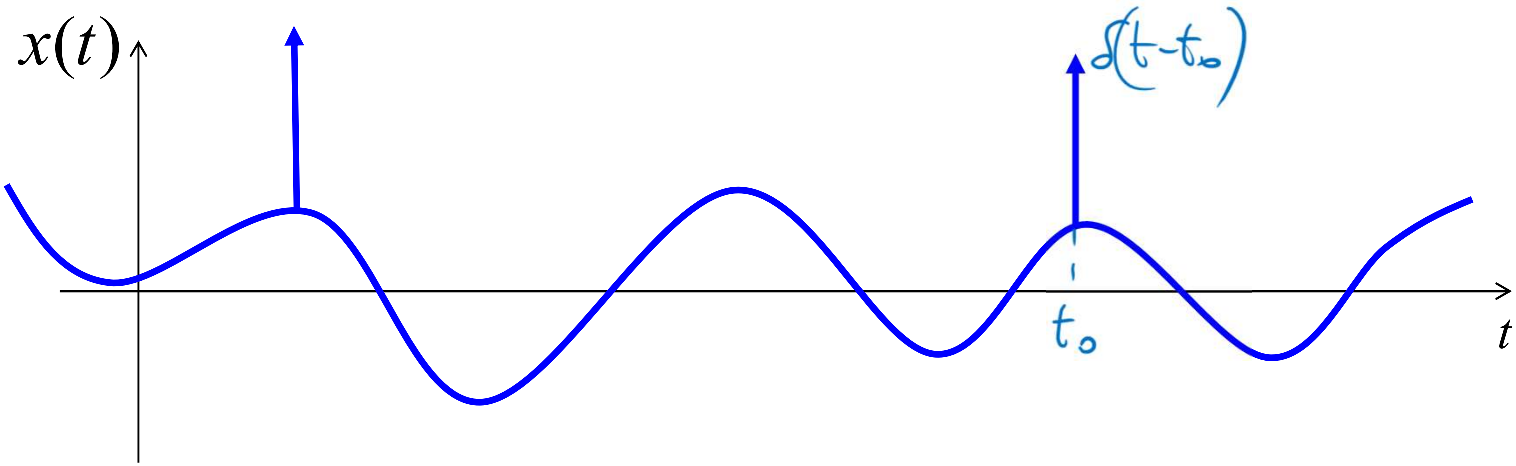


Supporto $T \rightarrow \infty$

Conclusioni su classificazione dei segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Sono possibili varie combinazioni relativamente alla classificazione dei segnali



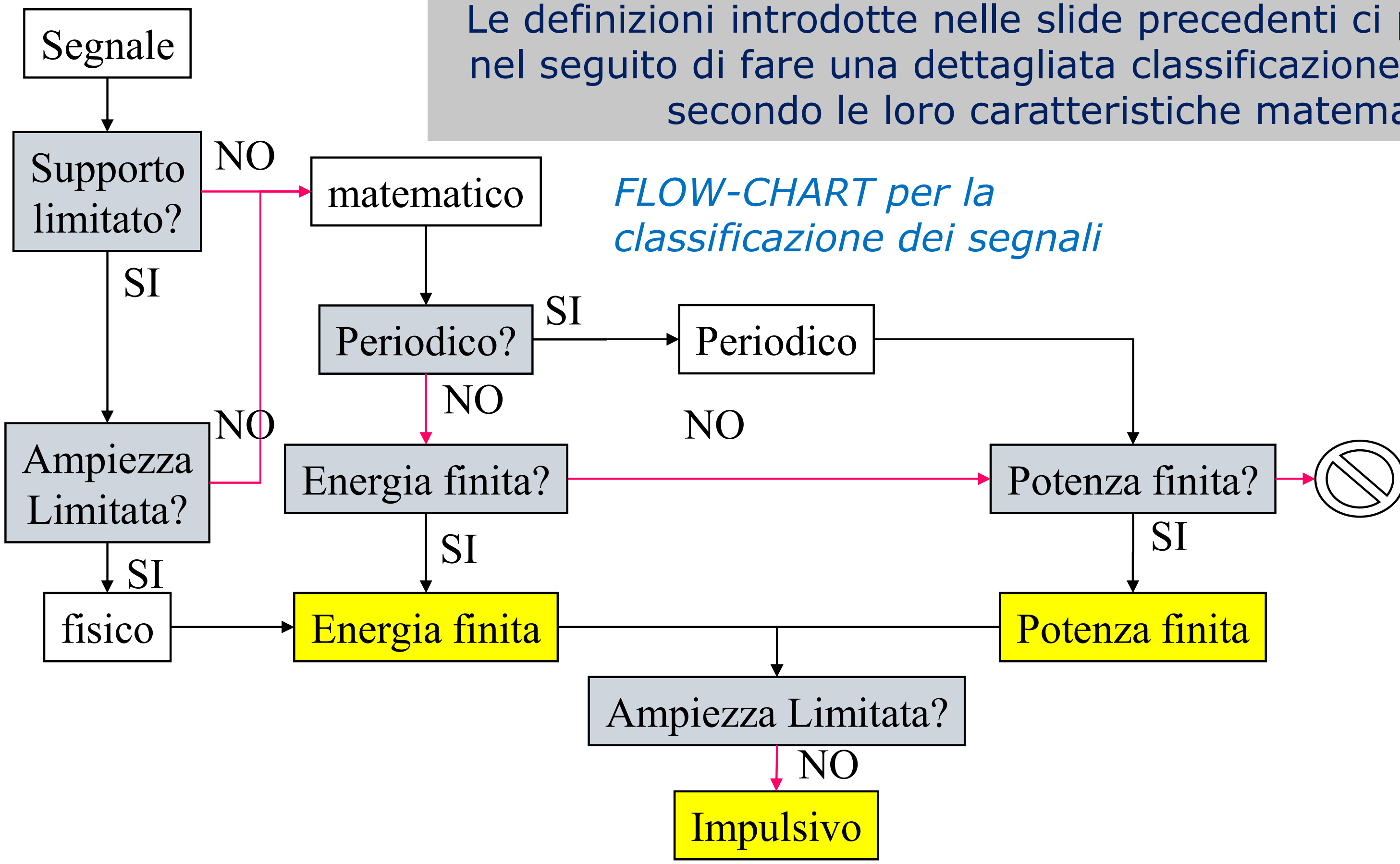
- Esempio: segnale aperiodico, impulsivo, a supporto illimitato e a potenza media finita

Classificazione dei segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Le definizioni introdotte nelle slide precedenti ci permettono nel seguito di fare una dettagliata classificazione dei segnali secondo le loro caratteristiche matematico-fisiche

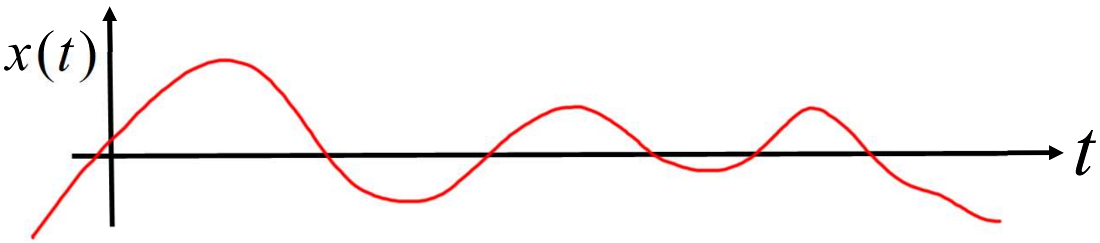
FLOW-CHART per la classificazione dei segnali



Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Rappresentazione vettoriale dei segnali

- su segnali a tempo continuo
- La teoria sviluppata in questa sezione è detta anche "rappresentazione geometrica" dei segnali



$$\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$$

Introduzione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- In questo capitolo, introdurremo alcuni concetti applicati ai segnali che riportano alla geometria dei vettori
- In particolare, applicheremo ai segnali alcune definizioni del tutto simili a quelle usate per i vettori
- **L'obiettivo finale sarà quello di poter "associare" un segnale ad un vettore**

Rappresentazione dei segnali

- Per poter analizzare ed elaborare ed i segnali, è necessario poterli rappresentare adeguatamente
  - Ad esempio, un generico segnale fisico non assume necessariamente la forma di nessuna delle funzioni matematiche note (esponenziale, logaritmo, radice quadrata, sinusoide…)
  - Inoltre, cercheremo delle rappresentazioni che possano essere facilmente memorizzate e processate da un sistema informatico, e dunque preferiremo rappresentazioni discretizzate nel tempo e nell'ampiezza tramite vettori (=array di numeri)
- È necessario quindi fornirsi di strumenti che consentano di rappresentare efficacemente segnali generici
- Soluzione: dimostreremo che sotto certe condizioni **i segnali possono essere visti come vettori**
  - O equivalentemente che i segnali si possono ricostruire come sommatorie di segnali elementari

Un primo esempio:
concetto di distanza tra due segnali

- Vogliamo introdurre una definizione di «distanza» per i segnali che abbia caratteristiche simili a quella usata per i vettori
- Esistono varie definizioni di distanza applicabili ai segnali,
  - In questo corso, useremo questa definizione:

$$d(x,y)=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)-y(t)\right|^{2}dt}$$

Viene chiamata
"**Distanza Euclidea**"

Distanza euclidea sui segnali

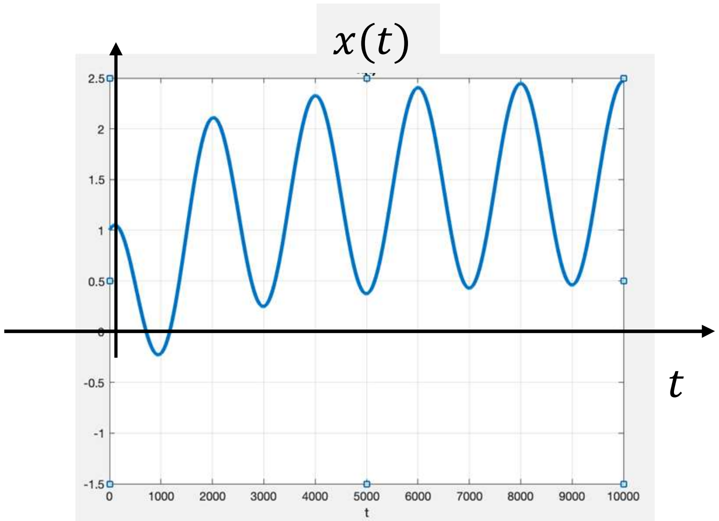
- Spesso lavoreremo sulla distanza Euclidea al quadrato, cioè su:

$$d^2(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) - y(t) \right|^2 dt$$

Si può interpretare questa quantità anche come l'energia del segnale «differenza» tra i due segnali di partenza

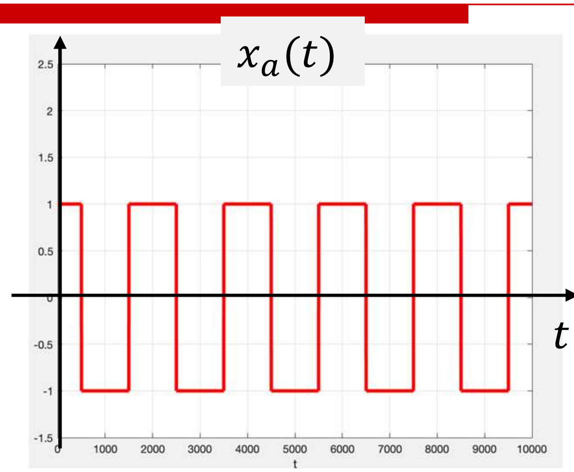
- La definizione di distanza serve spesso poter confrontare due segnali per misurare quanto sono simili, con applicazioni in:
  - Riconoscimento vocale
  - Trasmissione su canali rumorosi
  - Elaborazione dati
  - Loss function in applicazioni di neural networks

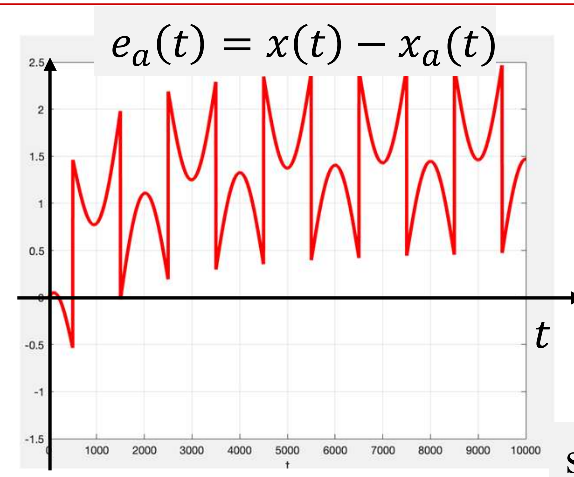
Esempio di distanza tra i segnali

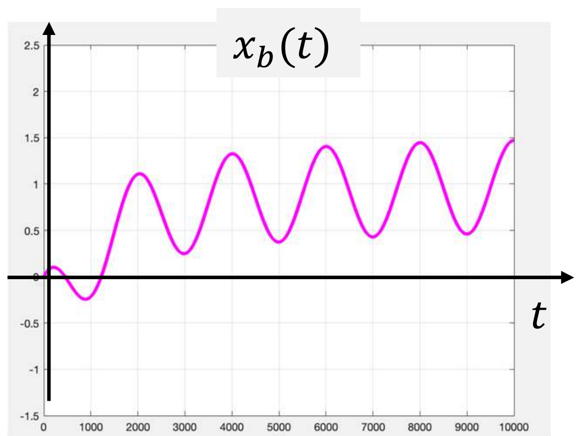


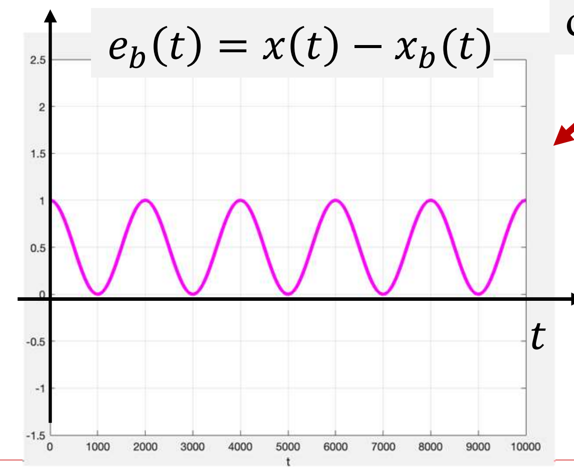
Vogliamo calcolare la distanza euclidea di $x(t)$ dai segnali $x_a(t)$ e $x_b(t)$

Il segnale $x(t)$ è più "vicino" a $x_a(t)$ o a $x_b(t)$?



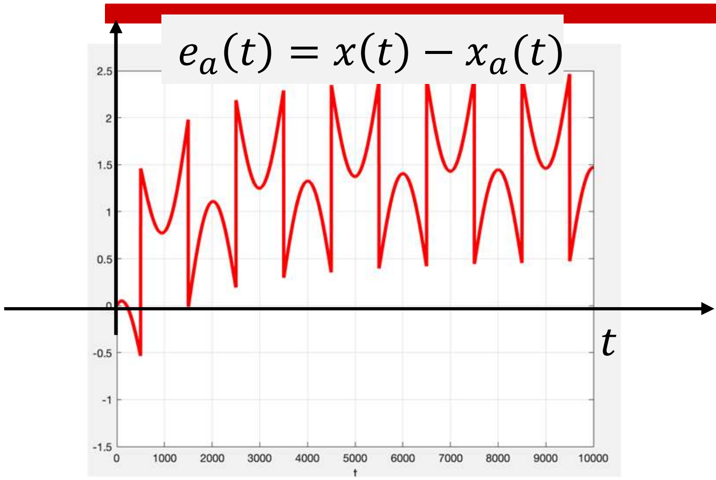




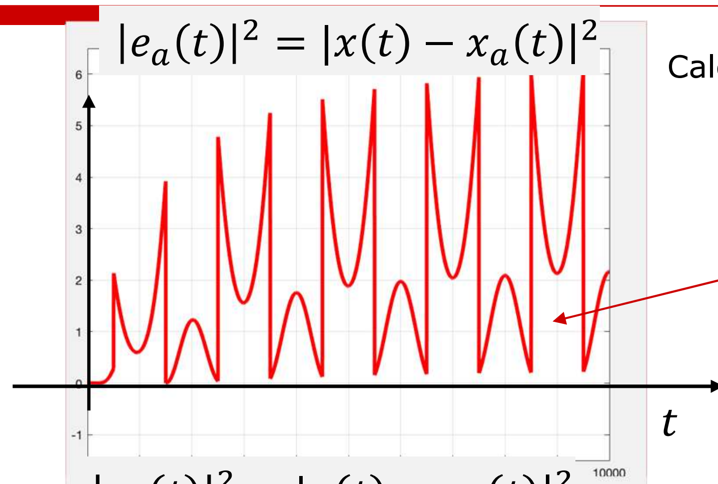


segnali differenza

Esempio di distanza tra i segnali



$$e_a(t) = x(t) - x_a(t)$$



$$|e_a(t)|^2 = |x(t) - x_a(t)|^2$$

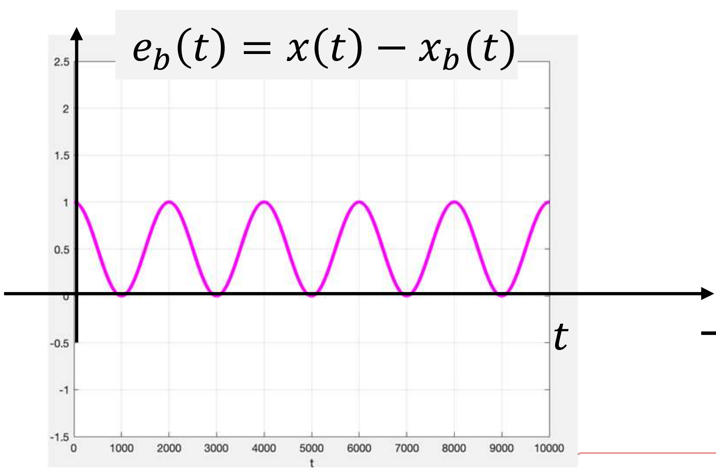
Calcoliamo l'energia del segnale differenza

$d_a^2\big(x(t), x_a(t)\big)$

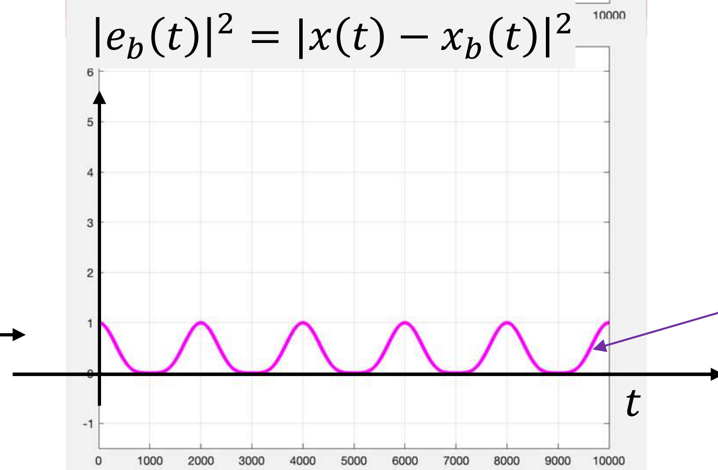
area sottesa dalla curva

si può verificare che

$$d_b^2 < d_a^2$$



$$e_b(t) = x(t) - x_b(t)$$



$$|e_b(t)|^2 = |x(t) - x_b(t)|^2$$

$d_b^2\big(x(t), x_b(t)\big)$

area sottesa dalla curva

Alcuni richiami dal corso di Geometria

- Nelle slide successive, si richiameranno alcuni argomenti fondamentali già introdotti nel corso di Geometria
- A lezione, verranno richiamate molto velocemente, in quanto si tratta di argomenti trattati nel dettaglio al primo anno e che non abbiamo tempo di trattare nuovamente in questo corso

Definizione di «metrica»

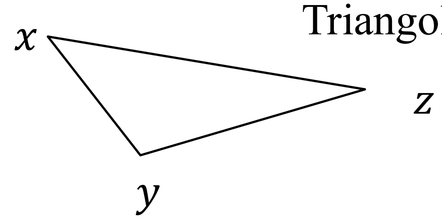
- Una metrica è una funzione che agisce su coppie di elementi di uno stesso insieme dando in uscita un numero reale con le seguenti proprietà:

$$1)\ d(x,y) \geq 0 \ \forall x,y$$ Non negativa

$$2)\ d(x,y) = d(y,x)$$ Simmetrica

$$3)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$4)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$ Triangolare



la «distanza euclidea» tra vettori soddisfa tutte le precedenti condizioni, ed è dunque una possibile metrica

Definizione di spazio vettoriale (s.v.)

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- È un insieme di elementi (chiamati vettori) sui quali sono definite
  - un'operazione somma (tra due vettori)
  - una operazione di prodotto per uno scalare

- Per la somma devono valere le seguenti proprietà:
  - la somma è commutativa $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$
  - la somma è associativa $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z}$
  - esiste il vettore nullo (origine) $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$
  - per ogni $\mathbf{x}$ esiste l'inverso $-\mathbf{x}$: $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) =\mathbf{0}$

*I vettori verranno qui indicati in **grassetto** per distinguerli dai segnali*

Operazioni su spazi vettoriali

Proprietà della moltiplicazione per uno scalare:

- Esiste un insieme di elementi (che forma un campo) detti scalari a tali per cui:
  - a**x** è ancora un vettore dello stesso spazio

- La moltiplicazione per uno scalare ha le seguenti proprietà
  - Associativa $\alpha(\beta \mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
  - 1**x**=**x** **e** 0**x**=0 per qualsiasi **x**
  - Legge distributiva $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
  - Legge distributiva $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

Vettori definiti nel corso di Geometria

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

- I vettori definiti come insiemi ordinati di *n* numeri reali sono elementi di uno spazio vettoriale reale con la seguente definizione di somma:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) \triangleq (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

*I vettori verranno qui indicati in **grassetto** per distinguerli dai segnali*

- e di prodotto per uno scalare

$$\alpha \mathbf{x} = \alpha (x_1, \cdots, x_n) \triangleq (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)$$

- Questo insieme è uno spazio vettoriale Euclideo

Richiami su spazi vettoriali reali

- Combinazione lineare (c.l)
  - Con le definizioni date possiamo costruire un vettore a partire da un insieme di altri vettori e di un insieme di scalari:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i = a_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n$$

Definizioni:

- Vettori linearmente indipendenti:

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i \leftrightarrow \alpha_i = 0 \text{ per qualsiasi } i$$

Cioè una combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti è nulla se e solo se tutti i coefficienti moltiplicativi sono nulli

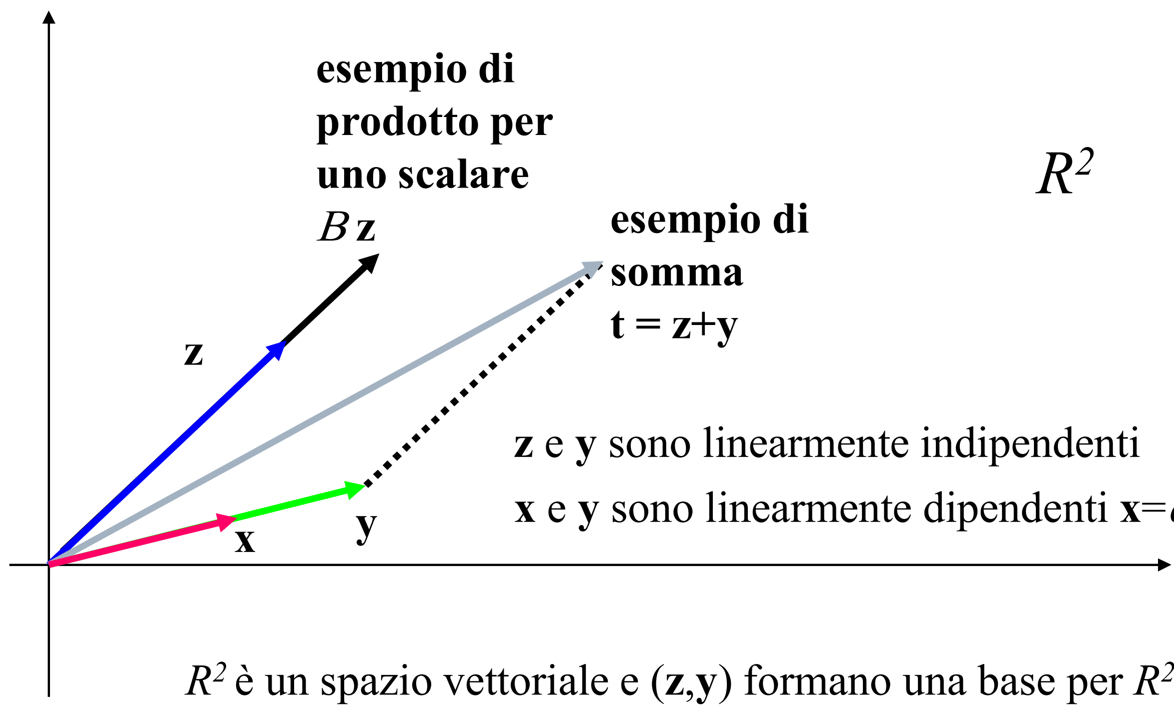
- Vettori linearmente dipendenti

$$\exists \beta_1, \ldots, \beta_n : \mathbf{z} = \sum_{i \neq k}^{n} \beta_i \mathbf{w}_i$$

Un vettore **z** è linearmente dipendente da un insieme di altri vettori $\mathbf{w}_i$ se può essere espresso come una combinazione lineare di questi vettori

Esempi su vettori reali a due dimensioni

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



$\mathbf{z}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente indipendenti

$\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ sono linearmente dipendenti $\mathbf{x}=\alpha\mathbf{y}$

R^2 è un spazio vettoriale e $(\mathbf{z},\mathbf{y})$ formano una base per R^2

Basi in spazi vettoriali reali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Una degli strumenti più importanti nell'analisi degli spazi vettoriali (s.v.) è il concetto di "**base**":
  - Una base per un s.v. X è un insieme di n suoi elementi $\{w_i\}$ minimamente sufficiente a generarlo tutto attraverso una combinazioni lineare

$$\mathbf{x} \in X \Rightarrow \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{w}_i$$

- Viceversa *m* generici elementi $\{z_i\}$ di uno s.v. X generano sempre uno spazio vettoriale (non necessariamente X)

$$Y = \left\{ \mathbf{x} \in X : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{z}_i \right\} \quad \text{è uno spazio vettoriale}$$

Proprietà delle basi di uno s.v.

Dato un certo spazio vettoriale, si può dimostrare che:

- L'insieme di vettori che forma una base non è unico
  - Esistono cioè tante possibili basi per lo stesso s.v.
- La cardinalità dell'insieme (cioè il numero di elementi della base) è però unica
  - Cioè il numero di elementi che costituiscono una base per un certo s.v. è fisso
  - Si ricordi infatti che una base è costituita dal numero minimo di vettori possibile
- La cardinalità di una generica base è detta la «dimensionalità» dello spazio vettoriale

Spazi vettoriali: prodotto scalare

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Oltre al prodotto per uno scalare è possibile definire un **prodotto scalare** che da una coppia di vettori associa un numero scalare complesso

$$\left\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle = \left\langle \left(x_1,\dots x_n\right),\left(y_1,\dots y_n\right)\right\rangle \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*$$

Spazio Euclideo
n-dimensioni

Nota: questa è la definizione generale valida per vettori di numeri complessi.

In questo corso tuttavia useremo quasi sempre vettori di numeri reali. In questo caso, l'operazione di complesso coniugato è irrilevante

- Proprietà:

$$\left\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle = \left\langle \mathbf{y},\mathbf{x}\right\rangle^*$$

$$\left\langle \mathbf{x}+\mathbf{z},\mathbf{y}\right\rangle = \left\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle + \left\langle \mathbf{z},\mathbf{y}\right\rangle$$

$$\left\langle \alpha\mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle = \alpha\left\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle$$

Spazi vettoriali: norma

- Possiamo ora introdurre il concetto di norma definendo una funzione $\|\cdot\|$ che associa ad ogni elemento dello spazio vettoriale un numero reale con le seguenti proprietà:

$$
\begin{aligned}
&1.\ \ \|\mathbf{x}\| \geq 0 \text{ per ogni } \mathbf{x} \\
&2.\ \ \|\mathbf{x}\| = 0 \ \leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&3.\ \ \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \\
&4.\ \ \|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|
\end{aligned}
$$

Norma e distanza

- Una norma per lo spazio Euclideo può essere definita a partire dal prodotto scalare

$$\|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \Longrightarrow \|\mathbf{x}\|^2 \triangleq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$$

- La norma può essere utilizzata per definire una distanza tra due vettori:

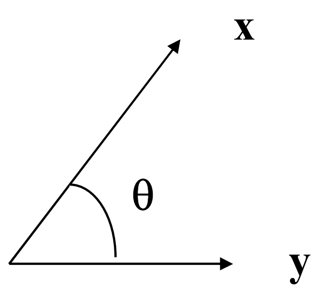
$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

- Queste definizioni soddisfano le proprietà di distanza e norma viste precedentemente

Ortogonalità tra due vettori

- Si può introdurre il concetto di “angolo” tra due vettori come:

$$\cos\theta \triangleq \frac{\left|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\right|}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$$



- Conseguenza:
  - Due vettori con prodotto scalare nullo si dicono **ortogonali**

Nota: concetto molto rilevante per quanto vedremo fra poco relativamente agli spazi di segnali

Basi ortonormali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Applicando il concetto di norma e prodotto scalare ad una base generica si arriva al concetto di base ortonormale:
  - ortogonalità $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$
  - norma unitaria $\|\mathbf{w}_i\| = 1 \quad \forall i$

FONDAMENTALE:
una base ortonormale è costituita da elementi:
1. a norma unitaria
2. tra loro ortogonali

- Ricordando la definizione di norma abbiamo

$$\|\mathbf{w}_i\| = 1 \Rightarrow \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i \rangle = 1$$

- Quindi si può scrivere in sintesi $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij}$

dove $\delta_{ij} \triangleq \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$ è la delta di Kronecker

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Estensione degli stessi concetti richiamati nelle slide precedent allo "spazio dei segnali"

Interpretazione dei segnali a tempo continuo come spazi vettoriali

- Si può dimostrare (e lo faremo nelle slides successive) che anche i segnali tempo continuo formano uno spazio vettoriale con le usuali definizione di somma e prodotto.

- Iniziamo introducendo i concetti di somma e prodotto
  - È sufficiente utilizzare la definizione "usuale", cioè la somma e la moltiplicazione applicate per ciascun istante di tempo

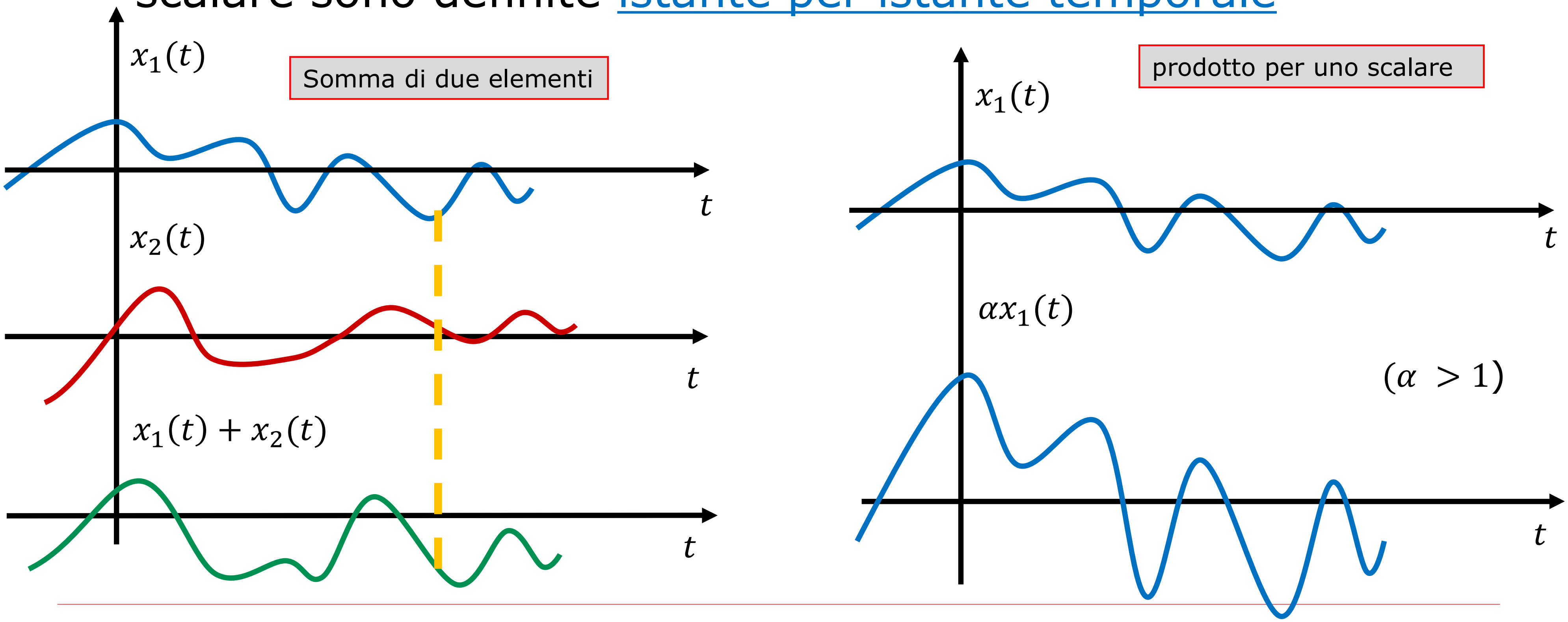
$$\mathbf{x} \Rightarrow x(t), \mathbf{y} \Rightarrow y(t)$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \Rightarrow x(t) + y(t)$$ ⟸ Definizione di somma tra due segnali

$$\alpha \mathbf{x} \Rightarrow \alpha x(t)$$ ⟸ Definizione di prodotto tra un segnale e uno scalare

Interpretazione dei segnali a tempo continuo in spazi vettoriali

- Per i segnali, le operazione somma e prodotto per uno scalare sono definite istante per istante temporale



Definizione di prodotto scalare tra due segnali

- Introduciamo la seguente definizione di **prodotto scalare** tra due segnali

$$\langle x(t), y(t)\rangle \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cdot y^*(t)dt$$

FONDAMENTALE: definizione di prodotto scalare nello spazio dei segnali.

(attenzione al complesso coniugato nel caso di segnali complessi)

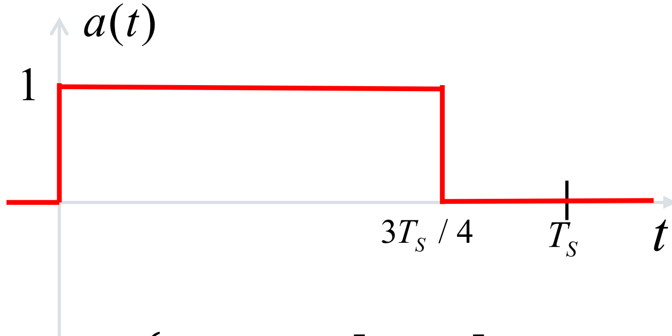
  - Si può facilmente dimostrare che questa definizione soddisfa le proprietà del prodotto scalare introdotte precedentemente per i vettori
    - Provare a casa per esercizio

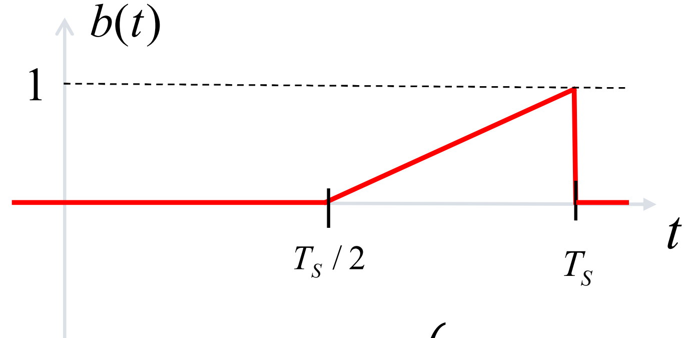
- Questa definizione è la vera «novità» rispetto a quanto visto per i vettori
  - Ed è anche la «chiave» di volta per tutto quanto «costruiremo» nelle slide successive
  - Nelle prossime slides, vedremo infatti che grazie a questa fondamentale definizione si possono "recuperare" anche per i segnali tutta una serie di definizioni introdotte per i vettori

Esempio di prodotto scalare tra segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Quanto vale il prodotto scalare tra i seguenti segnali?





$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \in \left[0, \frac{3T_S}{4}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} \frac{2}{T_S}\left(t - \frac{T_S}{2}\right) & \text{per } t \in \left[\frac{T_S}{2}, T_S\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\langle a(t), b(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) b^*(t)\, dt = \int_{\frac{T_s}{2}}^{\frac{3T_s}{4}} \frac{2}{T_s}\left(t - \frac{T_s}{2}\right) dt = \frac{2}{T_s} \left. \frac{\left(t - \frac{T_s}{2}\right)^2}{2} \right|_{\frac{T_s}{2}}^{\frac{3T_s}{4}} = \frac{T_s}{16}$$

Definizione di norma per i segnali

- Per vettori n-dimensionali abbiamo appena visto che la norma è così definita:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \quad \text{E inoltre:} \quad \|\mathbf{x}\| \triangleq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$$

- Per i segnali si introduce una analoga definizione:

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt} = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle}$$

  - Nota importante: con questa definizione, anche per i segnali la norma è legata alla (radice quadrada del) <u>prodotto scalare del segnale con se stesso</u>
    - Iniziamo dunque a vedere con queste definizioni un forte parallelismo tra segnali e vettori

Norma dei segnali e legame con energia

- Notare che avevamo definito l'energia di un segnale come:

$$E(x) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

- Si ha dunque che l'energia di un segnale corrisponde dunque al quadrato della sua norma
  - O equivalentemente al prodotto scalare con se stesso

$$E(x) = \|x\|^2 = \langle x(t), x(t) \rangle$$

Distanza tra due segnali e definizione di norma

- Avevamo visto che è comodo introdurre una distanza tra segnali come:

$$d(x,y)=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)-y(t)\right|^{2}dt}$$

- Possiamo legare questa definizione al concetto di norma della differenza dei due segnali, ottenendo la relazione:

$$d\left(x(t),y(t)\right)\triangleq\left\|x(t)-y(t)\right\|=\sqrt{\int\left|x(t)-y(t)\right|^{2}dt}$$

Ortogonalità tra segnali

- Avendo definito un prodotto scalare tra segnali, possiamo ora anche recuperare la definizione di ortogonalità tra due segnali

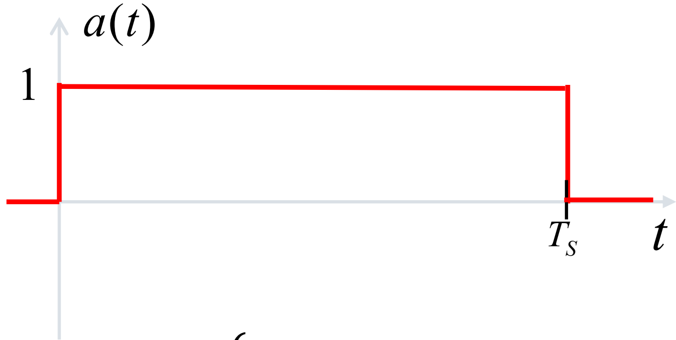
- Due segnali $x(t)$ e $y(t)$ con <u>prodotto scalare nullo si dicono **ortogonali**</u>

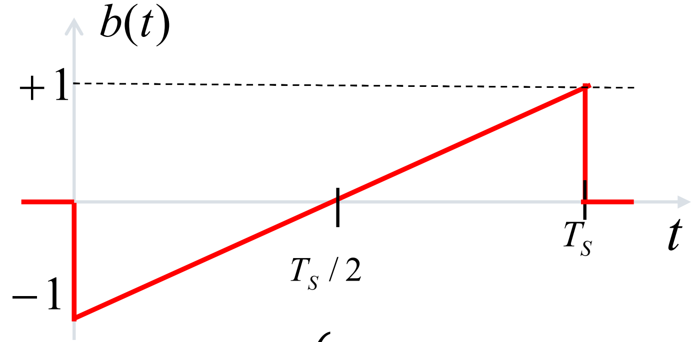
$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t)\, dt = 0$$

FONDAMENTALE:
definizione di ortogonalità nello spazio dei segnali

Esempio: ortogonalità tra due segnali

- Verificare che i due segnali sono ortogonali





$$a(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \in [0, T_S] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$b(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{T_S}\left(t - \dfrac{T_S}{2}\right) & \text{per } t \in [0, T_S] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$\langle a(t), b(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a(t) b^*(t)\,dt = \int_0^{T_s} \frac{2}{T_s}\left(t - \frac{T_s}{2}\right) dt = \frac{2}{T_s} \left. \frac{\left(t - \frac{T_s}{2}\right)^2}{2} \right|_0^{T_s} = 0$$

Analogia tra spazio vettoriale per segnali e i vettori visti nel corso di «Geometria»

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Riassumendo, fino ad ora abbiamo visto che:

- Con le "usuali" definizioni di somma e prodotto per una costante, anche i segnali possono essere interpretati come facenti parte di uno spazio vettoriale
- Introducendo il concetto di prodotto scalare (tramite l'opportuna definizione integrale) è possibile introdurre i concetti di norma e distanza, e legarli ai concetti di energia e di ortogonalità
- Con questi strumenti, è possibile ora introdurre il concetto di base ortonormale per un insieme di segnali
  - E questo ci porterà infine alla definizione di rappresentazione geometrica dei segnali

Riassunto delle definizioni introdotte sino a qui su vettori e segnali

	Definizione	Segnale	Vettore
Prodotto scalare	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*$
Energia	$E(\mathbf{x}) \triangleq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$	$\int \lvert x(t) \rvert^2 dt$	$\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert^2$
Norma	$\lVert \mathbf{x} \rVert \triangleq \sqrt{E(x)} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$	$\sqrt{\int \lvert x(t) \rvert^2 dt}$	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert^2}$
Distanza	$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \lVert \mathbf{x} - \mathbf{y} \rVert$	$\sqrt{\int \lvert x(t) - y(t) \rvert^2 dt}$	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - y_i \rvert^2}$

Basi ortonormali per i segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Definizione di base ortonormale di *M* segnali

$$w_1(t) \quad w_2(t) \quad \cdots \quad w_M(t)$$

- Gli *M* segnali devono soddisfare i seguenti requisiti:
  - I segnali devono essere tutti tra di loro ortogonali, cioè devono avere prodotti scalari nulli per ciascuna coppia

$$\left\langle w_i(t), w_j(t) \right\rangle = \int w_i(t) \cdot w_j^*(t) dt = 0 \quad \text{per} \quad \forall i, j \text{ con } i \neq j$$

  - Inoltre devono avere norma unitaria (cioè energia pari a 1)

$$\left\| w_i(t) \right\|^2 = 1 \;\forall i \Rightarrow \left\langle w_i(t), w_i(t) \right\rangle = \int \left| w_i(t) \right|^2 dt = 1 \quad \text{per} \quad \forall i$$

Introduzione dello spazio dei segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Una volta definita una base ortonormale di segnali

$$w_1(t) \quad w_2(t) \quad \cdots \quad w_M(t)$$

- possiamo poi definire il corrispondente spazio vettoriale come l'insieme di tutti i segnali $x(t)$ esprimibili come una combinazione lineare degli elementi della base ortonormale

$$x(t) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i w_i(t) \quad \text{con :} \quad \alpha_i \ \text{ numero (reale o complesso)}$$

$$\text{Dimostreremo fra poco che :} \quad \alpha_i = \langle x(t), w_i(t) \rangle = \int x(t) \cdot w_i^*(t) dt$$

Rappresentazione dei segnali tramite vettori

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Data una certa base di segnali ortonormali, per qualunque segnale della base, espresso come:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i w_i(t)$$

- Associeremo al segnale $x(t)$ il seguente vettore $\mathbf{x}$ a *M* dimensioni:

$$\boxed{\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M)}$$

Vettore dei coefficienti della combinazione lineare

  - Nota: dato un certo segnale *x(t)*, il vettore $\mathbf{x}$ risultante dipende dalla base ortonormale su cui si rappresenta il segnale

Rappresentazione "geometrica" dei segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Una base ortonormale per un insieme di segnali consente quindi di stabilire una corrispondenza biunivoca tra i segnali ed uno spazio vettoriale Euclideo a n dimensioni, associando ad ogni segnale il vettore n dimensionale costituito dai suoi coefficienti.

segnale

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} x_i^{(w)} w_i(t) \overset{\mathbf{w}}{\Leftrightarrow} \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$$

vettore

I vettori verranno qui indicati in **grassetto** per distinguerli dai corrispondenti segnali

FONDAMENTALE: un segnale si può associare ad un vettore i cui elementi sono i "coefficienti" della combinazione lineare nel dominio nel tempo

Rappresentazione vettoriale

- Il risultato precedente ci permette dunque di usare in modo equivalente:
  - l'espressione del segnale nel dominio del tempo $x(t)$
  - la sua rappresentazione vettoriale $\mathbf{x}$ (cioé il vettore dei coefficienti che rappresenta $x(t)$ rispetto a una base ortonormale)

- Terminologia: "rappresentazione vettoriale" o "rappresentazione geometrica" dei segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Ulteriori legami tra le definizioni sui segnali e quelle sui vettori

- Prodotto scalare
- Energia del segnale
- Energia della somma dei segnali
- Migliore approssimazione di un segnale rispetto a una base

Prodotto scalare e rappresentazione vettoriale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Calcoliamo il prodotto scalare tra due segnali che siano rappresentabili su una certa base ortonormale

$$\langle x(t), y(t)\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i w_i(t), \sum_{i=1}^{n} y_i w_i(t) \right\rangle$$

Definizione tramite integrale del prodotto
$$= \int \sum_{i=1}^{n} x_i w_i(t) \sum_{j=1}^{n} y_j^* w_j^*(t)\, dt$$

linearità
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j^* \int w_i(t) w_j^*(t)\, dt$$

ortonormalità
$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j^* \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i^* = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Nota importante: siamo arrivati alla stessa definizione di prodotto scalare che vale sui due vettori dei coefficienti

Calcolo di energia

- Ricordando il precedente risultato sul prodotto scalare

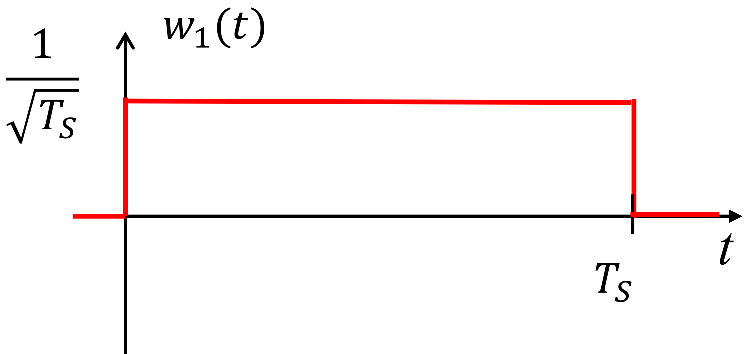
$$E(x) = \langle x(t), x(t) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = E(\mathbf{x})$$

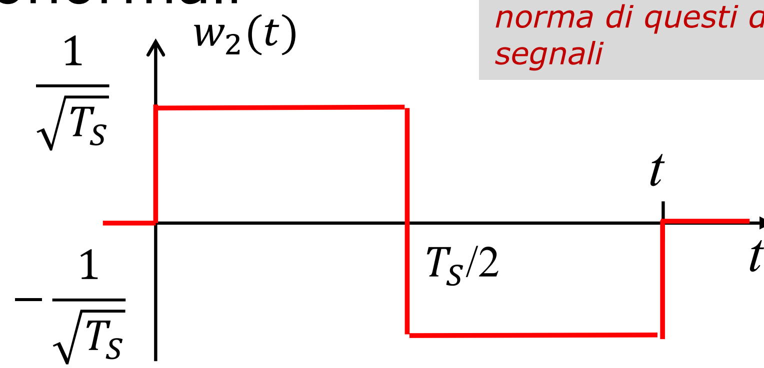
- L'energia di un segnale si può ottenere anche come somma dei moduli quadri dei coefficienti ottenuti dalla decomposizione sulla base ortonormale
  - Dunque l'energia di un segnale è pari alla distanza dall'origine, al quadrato, della sua rappresentazione vettoriale

Esempio: spazio di segnali a due dimensioni

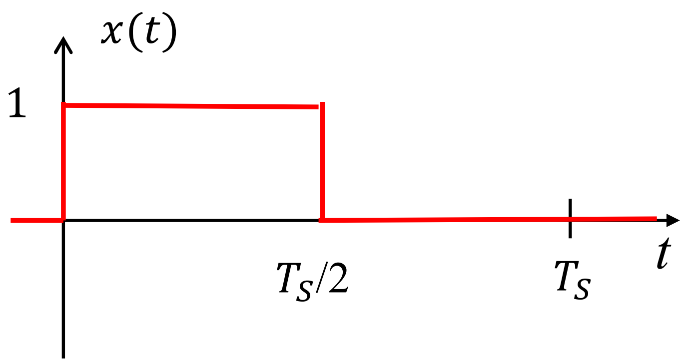
Nota: verificare per esercizio ortogonalità e norma di questi due segnali

- Consideriamo i due segnali ortonormali





- E il segnale *x(t)*



- Calcolare l'energia di *x(t)*
- Scomporre *x(t)* come combinazione lineare di $w_1(t)$ e $w_2(t)$
- Ri-calcolare l'energia tramite i coefficienti del vettore ***x***

Esempio: spazio di segnali a due dimensioni

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Calcoliamo l'energia di $x(t)$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\frac{T_S}{2}} 1dt = \frac{T_S}{2}$$

- Si può però anche vedere che:

$$x(t) = \frac{\sqrt{T_S}}{2} w_1(t) + \frac{\sqrt{T_S}}{2} w_2(t)$$

Nota: provare a casa a ricavare i coefficienti calcolando i prodotti scalari $\alpha_i = \langle x(t), w_i(t) \rangle$

- Il vettore corrispondente è dunque: $\mathbf{x} = \left(\frac{\sqrt{T_S}}{2}, \frac{\sqrt{T_S}}{2} \right)$

- L'energia si calcola anche come: $E(\mathbf{x}) = \left(\frac{\sqrt{T_S}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{T_S}}{2} \right)^2 = \frac{T_S}{2}$

Energia della somma di due segnali

Consideriamo il generico caso di due generici segnali/vettori complessi

- Calcoliamo l'energia della somma: visti i risultati precedenti lo possiamo fare direttamente sui corrispondenti vettori

$$E(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2$$
$$= \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y} \rangle$$
$$= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$$
$$= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + \boxed{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^*}$$

Per un generico valore complesso $z = a + jb$ abbiamo che:

$$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\Re[z]$$

$$\boxed{E(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\Re[\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle]}$$

Ortogonalità e calcoli di energia

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Dati due segnali, l'energia della loro somma è dunque data da:

$$E(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = E(\mathbf{x}) + E(\mathbf{y}) + 2\Re\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$$

Dunque in generale <u>NON è vero</u> che l'energia della somma di due segnali è pari alla somma delle energie

- SOLO SE due segnali sono <u>ortogonali, allora la relazione si semplifica in:</u>

$$E(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = E(\mathbf{x}) + E(\mathbf{y})$$

Approssimazione di un segnale su una base data

- Supponiamo di volere approssimare un generico segnale $x(t)$ come c.l. di un insieme di segnali ortonormali $w_{\boldsymbol{i}}(t)$

- Ci poniamo il seguente problema: qual è la combinazione lineare

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{w}_i$$

Anche qui, visti i risultati precedenti, possiamo svolgere i conti direttamente sui corrispondenti vettori

- che lo approssima meglio?

Approssimazione di un segnale su una base data

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Affronteremo questo problema cercando di minimizzare la norma della differenza tra $x(t)$ e la sua approssimazione $\hat{x}(t)$ (cioè minimizzando la distanza tra due segnali)
- Questo richiederà di risolvere il seguente problema di minimizzazione applicato ai coefficienti

$$(\alpha_i) = \arg\min \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2$$

- Si dimostra nella slide successiva che

$$\boxed{\alpha_i = \langle x, w_i \rangle}$$

E dunque

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle \mathbf{w}_i$$

cioè sui segnali $\alpha_i = \langle x(t), w_i(t) \rangle = \int x(t) \cdot w_i^*(t)\, dt$

Dimostrazione

- Calcoliamo la derivata parziale rispetto ai coefficienti della norma (al quadrato) della differenza tra $\mathbf{x}$ e la sua approssimazione e la poniamo =0

$$\left\|\widehat{x}\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_i\right|^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left\|\widehat{x}\right\|^2 = 2\cdot\alpha_j$$

$$\frac{\partial\left\|\mathbf{x}-\hat{\mathbf{x}}\right\|^2}{\partial\alpha_j} = \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left(\left\|\mathbf{x}\right\|^2 + \left\|\hat{\mathbf{x}}\right\|^2 - 2\left\langle\mathbf{x},\hat{\mathbf{x}}\right\rangle\right)$$

$$= 2\alpha_j - 2\left\langle\mathbf{x},\mathbf{w}_j\right\rangle = 0 \rightarrow \alpha_j = \left\langle\mathbf{x},\mathbf{w}_j\right\rangle$$

Dettaglio: questa dimostrazione è specifica per il caso di segnali reali, mentre è leggermente più complicata per segnali complessi (ma il risultato finale è lo stesso!)

Non dipende dai coefficienti e dunque la derivata è nulla

$$\left\langle x,\widehat{x}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\langle x, w_i\right\rangle \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\alpha_j}\left\langle x,\widehat{x}\right\rangle = \left\langle x, w_j\right\rangle$$

Situazione "ideale"

- Se l'approssimazione coincide con il segnale di partenza, cioè se l'approssimazione è "esatta":

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} = 0$$

e(t) è chiamato "segnale errore"

- Allora in maniera "esatta" abbiamo che

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle \mathbf{w}_i$$

In questo caso, si dice che la base $w_i(t)$ è "completa" per rappresentare il segnale $x(t)$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \langle x(t), w_i(t) \rangle \cdot w_i(t)$$

Procedura di Gram-Schmidt

Algoritmo per trovare una base ortonormale adatta a rappresentare un insieme di segnali o vettori

- Partiamo un insieme finito di N vettori o segnali

- Problema che vogliamo affrontare: qual è il minimo numero di vettori/segnali di una base ortonormale che consenta di rappresentarli in maniera «completa» (cioè esatta)?

$\Downarrow$

Procedura di Gram-Schmidt

Dettaglio matematico (importante): la procedura descritta nelle slide successive, per quanto riguarda i segnali, è applicabile solo a segnali ad energia finita.

Infatti, a causa della normalizzazione richiesta per rendere i versori ad energia unitaria, l'applicazione anche a segnali ad energia infinita porterebbe a delle complicazioni matematiche che esulano dagli obiettivi di questo corso.

Procedura di Gram-Schmidt

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Consideriamo dunque un insieme di *N* vettori $\mathbf{x}_i$

Step #1: prendo il primo vettore (o segnale) e lo normalizzo

$$1)\ \hat{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{w}_1 = \frac{\hat{\mathbf{w}}_1}{\left\|\hat{\mathbf{w}}_1\right\|}$$

Nota: in questo gruppo di slides, al fine di scrivere formule più compatte, usiamo la notazione dei vettori, ma ormai sappiamo che gli stessi passaggi varranno anche per i segnali

Step #2

$$2)\ \hat{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\hat{\mathbf{w}}_2}{\left\|\hat{\mathbf{w}}_2\right\|}$$

$$\vdots$$

<u>Se</u> il vettore risultante è nullo, si deve scartare e passare al passo successivo

Step #i-esimo

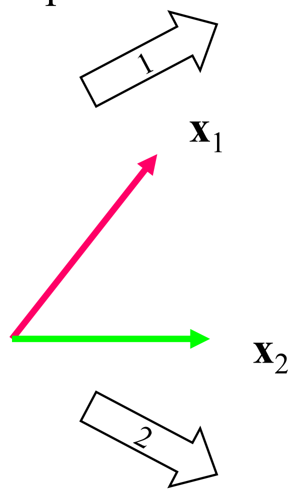
$$i)\ \hat{\mathbf{w}}_i = \mathbf{x}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{w}_k \rangle \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_i = \frac{\hat{\mathbf{w}}_i}{\left\|\hat{\mathbf{w}}_i\right\|}$$

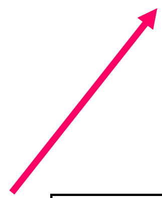
Questa sommatoria è da intendere <u>su tutti i vettori non nulli</u> ottenuti ai passi precedenti

$$\hat{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1$$

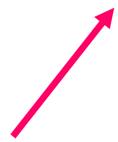
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Esempio: partiamo da due vettori su un piano



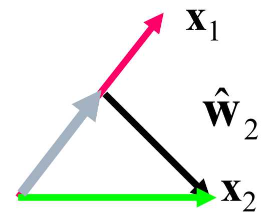


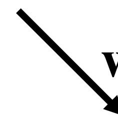
$$\hat{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{x}_1$$



$$\mathbf{w}_1 = \frac{\hat{\mathbf{w}}_1}{\left\| \hat{\mathbf{w}}_1 \right\|}$$

$$\langle \mathbf{x}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1$$

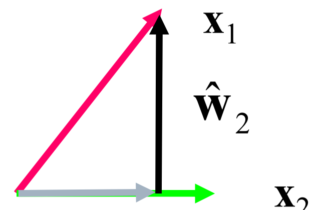




$$\mathbf{w}_2 = \frac{\hat{\mathbf{w}}_2}{\left\| \hat{\mathbf{w}}_2 \right\|}$$

$$\hat{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{x}_2$$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\hat{\mathbf{w}}_1}{\left\| \hat{\mathbf{w}}_1 \right\|}$$



$$\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{\hat{\mathbf{w}}_2}{\left\| \hat{\mathbf{w}}_2 \right\|}$$

In alternativa, scambiando l'ordine di applicazione dell'algoritmo

Proprietà derivanti dalla procedura di Gram-Schmidt

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- L'algoritmo genera basi diverse a seconda dell'ordine con il quale vengono effettuate le operazioni

- Se al passo *i*-esimo il vettore $\hat{\mathrm{w}}_i$ è nullo, significa che il segnale considerato è combinazione lineare di quelli precedenti e non si genera un nuovo versore

- Il numero di versori risultati al termine della procedura è dunque sempre minore o uguale al numero di segnali
  - Conseguenza: la dimensionalità (numero di elementi della base) per un insieme di segnali è sempre minore o uguale alla cardinalità dell'insieme

Cardinalità risultate da algoritmo di Gram-Schmidt

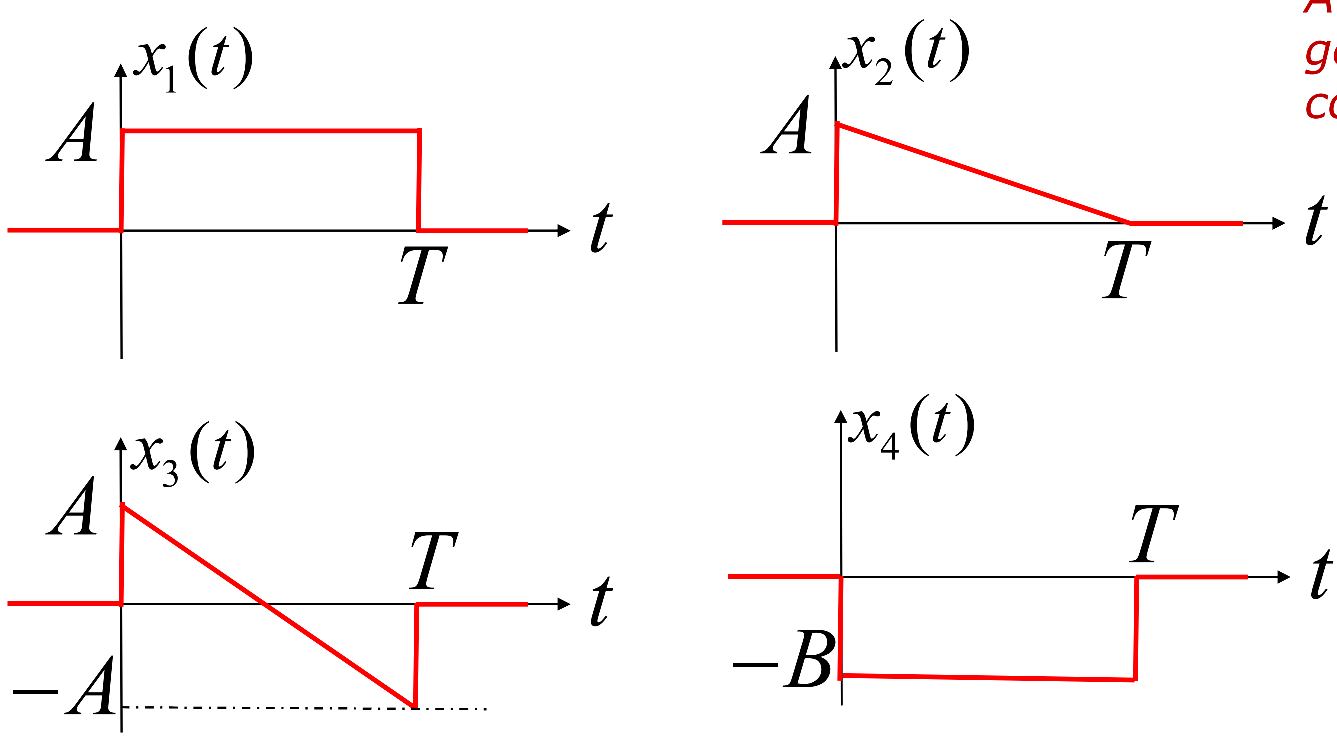
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Dato l'insieme iniziale di *N* vettori $\mathbf{x}_i$
- La procedura porta in uscita ad *M* vettori $\hat{\mathbf{w}}_i$
- In generale si ha che $M \leq N$
  - Cioè il numero di elementi della base ortonormale ottenuta è minore o uguale al numero degli elementi dell'insieme di partenza
    - sono cioè sufficienti solo *M* segnali per generare tutti gli $N \geq M$

Esempio di applicazione

- Trovare una base ortonormale per il seguente insieme di 4 segnali

A e B sono due generiche costanti positive

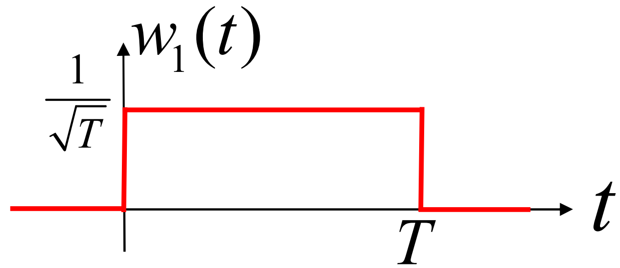


Algoritmo di Gram-Schmidt

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- STEP 1: $$w_1(t) = \frac{x_1(t)}{\left\| x_1(t) \right\|} \qquad \left\| x_1(t) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2(t)\,dt = \int_0^T A^2 dt = A^2 T$$

$$w_1(t) = \frac{x_1(t)}{A\sqrt{T}}$$



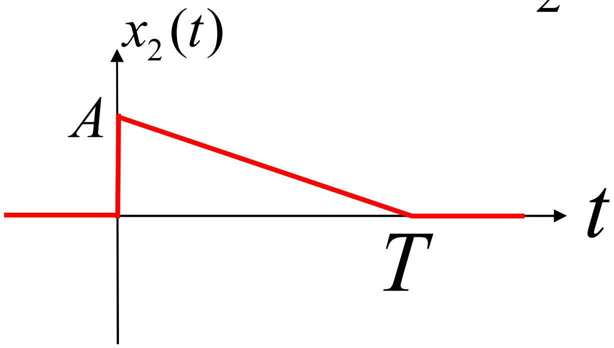
- STEP 2: $$\hat{w}_2(t) = x_2(t) - \left\langle x_2(t), w_1(t) \right\rangle w_1(t), \quad w_2(t) = \frac{\hat{w}_2(t)}{\left\| \hat{w}_2(t) \right\|}$$

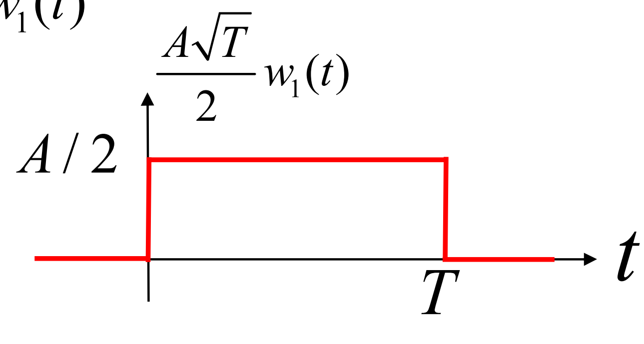
$$\left\langle x_2(t), w_1(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) w_1^*(t)\,dt = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} \left(A - \frac{A}{T} t \right) dt = \frac{A\sqrt{T}}{2}$$

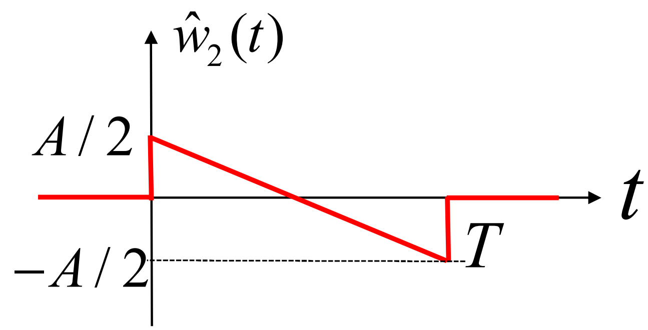
Algoritmo di Gram-Schmidt

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

STEP 2: $\hat{w}_2(t) = x_2(t) - \dfrac{A\sqrt{T}}{2} w_1(t)$



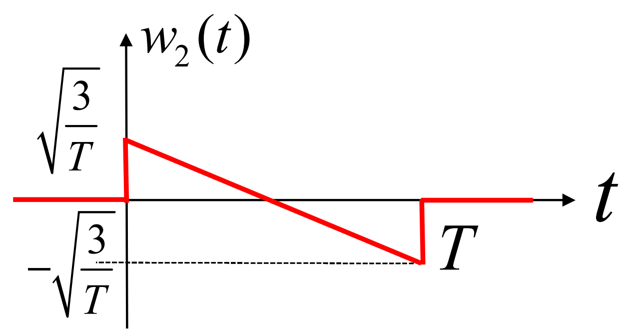




Normalizzazione

$$\left\|\hat{w}_2(t)\right\|^2 = \int_0^T \left(\frac{A}{2} - \frac{A}{T}t\right)^2 dt = \frac{A^2 T}{12}$$

$$w_2(t) = \frac{\hat{w}_2(t)}{A\sqrt{\dfrac{T}{12}}} = \frac{2\sqrt{3}}{A\sqrt{T}} \hat{w}_2(t)$$



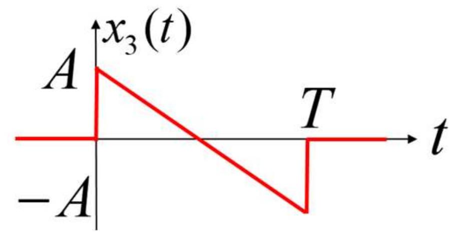
Algoritmo di Gram-Schmidt

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- STEP 3:

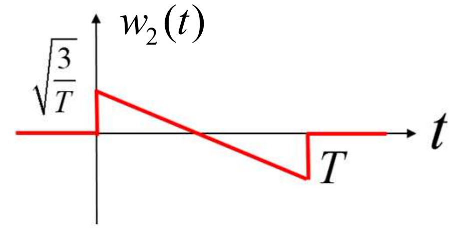
$$\hat{w}_3(t) = x_3(t) - \langle x_3(t), w_1(t)\rangle w_1(t) - \langle x_3(t), w_2(t)\rangle w_2(t) \quad \rightarrow \quad w_3(t) = \frac{\hat{w}_3(t)}{\|\hat{w}_3(t)\|}$$

$$\langle x_3(t), w_1(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_3(t) w_1^*(t)dt = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}}\left(A - \frac{2A}{T}t\right)dt = 0$$



$$\langle x_3(t), w_2(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_3(t) w_2^*(t)dt = \int_0^T \frac{A\sqrt{3}}{\sqrt{T}}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 dt = A\sqrt{\frac{T}{3}}$$

$$\hat{w}_3(t) = x_3(t) - A\sqrt{\frac{T}{3}} w_2(t) = 0$$



Il terzo segnale NON richiede un terzo elemento della base per essere rappresentato.
Si può infatti dimostrare che questo segnale è una combinazione lineare dei due elementi della base calcolata ai punti precedenti

Algoritmo di Gram-Schmidt

- STEP 4… provare a casa!
- Ma… è proprio sempre necessario fare tutti questi calcoli?!?

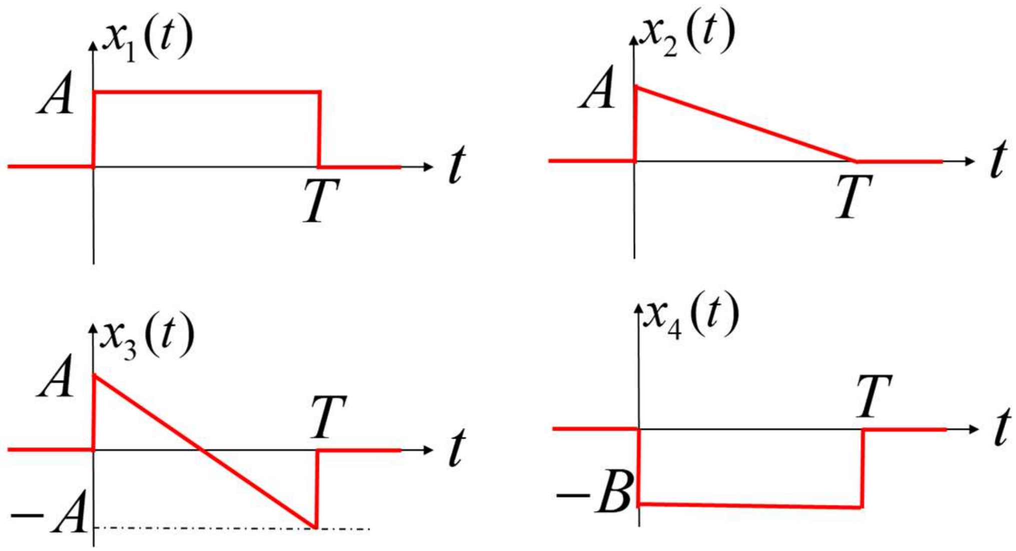
Commento

- Esiste un modo per risolvere l'esercizio più velocemente SENZA applicare l'algoritmo GS in tutti i suoi passaggi?
  - Sì, ricordando il concetto di vettori/segnali linearmente dipendenti e cercando di "intuire" se ci sono delle combinazioni lineari "ovvie"
  - Nel nostro esempio:

$$x_4(t) = -\frac{B}{A} x_1(t)$$

Osservazione che ci permette di evitare lo STEP 4

$$x_2(t) = \frac{x_1(t) + x_3(t)}{2}$$



Cambiamento di base

- Si ricorda che dato un insieme di segnali, esistono infinite basi possibili
  - Tuttavia la cardinalità è la stessa per tutte le possibili basi

Rappresentazione geometrica dei segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- I risultati di questo capitolo ci permettono in conclusione di usare in modo equivalente:
  - l'espressione del segnale nel dominio del tempo $x(t)$
  - la sua rappresentazione vettoriale $\mathbf{x}$ (cioé il vettore dei coefficienti che rappresenta $x(t)$ rispetto a una base ortonormale)
    - A patto di definire quale è la base ortonormale utilizzata

- Questa interpretazione dei segnali è fondamentale per la rappresentazione dei segnali nel mondo digitale
  - Una volta definita una base opportuna, è sufficiente memorizzare o trasmettere i coefficienti (in un file) per poter completamente rappresentare il segnale (*codifica dei coefficienti*)
    - Segnali audio
    - Segnali video
  - Tipicamente i segnali di base sono definiti da uno *standard*

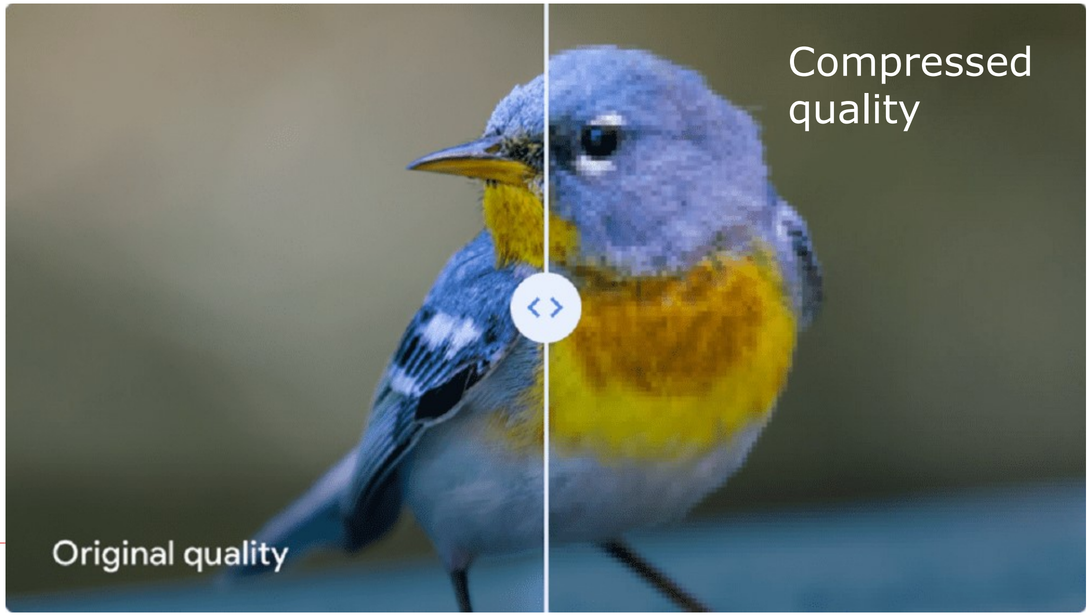
Applicazioni

- La teoria della rappresentazione geometrica dei segnali è alla base dei moderni algoritmi di compressione
  - Audio (ad esempio mp3)
  - Immagini (ad esempio jpeg)
  - Video (ad esempio mpeg)

- Il concetto di fondo è:
  - Parto dal segnale *x(t)*
  - Introduco una opportuna base (definita dal relativo standard) di cardinalità *N*
  - Calcolo i coefficienti dell'approssimazione $\hat{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{w}_i(t)$
  - "Trasmetto" solo il vettore di "coefficienti" $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N)$

Commento sulle applicazioni di compressione

- Nelle applicazioni di compressione, il segnale $\hat{\mathbf{x}}(t)$ che viene ricostruito dai coefficienti NON è mai uguale a quello di partenza *x(t)*
  - Si ha sempre una parziale perdita di qualità
    - Ingegneristicamente controllabile tramite i parametri liberi presenti nei vari standard



Commento sulle applicazioni di compressione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- In questa applicazioni, la cardinalità N delle basi utilizzabili è finita ma MOLTO elevata
  - Questo è il motivo per cui (purtroppo) non vi possiamo proporre esercizi "carta e penna" sulle applicazioni pratiche
- Gli esercizi che vi proporremo dovranno ovviamente lavorare su N piccoli e dunque purtroppo NON potranno essere legati ad esempi pratici di compressione audio, immagino o video

Esempio di decomposizione di un’immagine

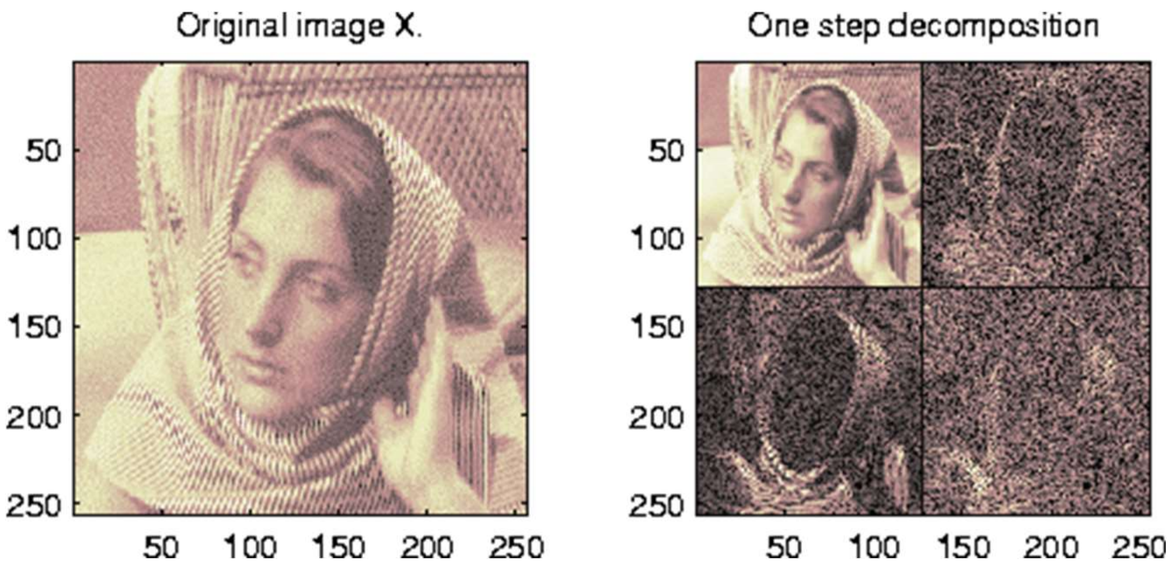
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Le funzioni di base usate per decomporre un'immagine vengono chiamate “wavelet”
  - vengono utilizzate in molti campi per decomposizione “multirisoluzione”, cioè ciascuna funzione cattura un diverso livello di risoluzione
  - Per questa ragione sono molto usate nel campo dell’elaborazione immagini e video

Nota importante:
La decomposizione multi-risoluzione basata su wavelet è un argomento abbastanza complesso, che esula dagli argomenti di questo corso.

Qui si vuole solo introdurre il fatto che è fortemente basata sul concetto di rappresentazione geometrica dei segnali

Per chi fosse interessato ad approfondimenti:
- http://www.ece.northwestern.edu/local-apps/matlabhelp/toolbox/wavelet/dwt2.html
- https://en.wikipedia.org/wiki/Wavelet



Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Alcuni ulteriori risultati

- Non trattati a lezione, possono servire come ulteriore approfondimento degli argomenti precedenti

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Diseguaglianza di Schwarz

- Il modulo al quadrato del prodotto scalare tra due vettori è sempre minore o uguale del prodotto delle loro energia

$$\boxed{\left|\left\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle\right|^2 \le \|\mathbf{x}\|^2\,\|\mathbf{y}\|^2}$$

- L'uguaglianza vale solo quando i due vettori (o segnali) sono proporzionali:

$$\left|\left\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\right\rangle\right|^2 = \|\mathbf{x}\|^2\,\|\mathbf{y}\|^2 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \alpha\mathbf{y}$$

Dimostrazione diseguaglianza di Schwarz

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Definiamo il vettore $\mathbf{z} = \mathbf{x} + a\mathbf{y}$
- Calcoliamone la norma al quadrato

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + |a|^2 \|\mathbf{y}\|^2 + 2\Re\left\{\langle \mathbf{x}, a\mathbf{y}\rangle\right\} = \|\mathbf{x}\|^2 + |a|^2 \|\mathbf{y}\|^2 + 2\Re\left\{a^* \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\right\} \geq 0$$

$$a = -\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\|\mathbf{y}\|^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\|\mathbf{z}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \frac{\left|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\right|^2}{\|\mathbf{y}\|^4}\|\mathbf{y}\|^2 - 2\Re\frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^*}{\|\mathbf{y}\|^2}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \frac{\left|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\right|^2}{\|\mathbf{y}\|^{\cancel{4}}}\cancel{\|\mathbf{y}\|^2} - 2\cancel{\Re}\frac{\left|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\right|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{\left|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\right|^2}{\|\mathbf{y}\|^2} \geq 0 \Rightarrow \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \geq \left|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\right|^2\end{aligned}}$$

Approssimazione di un segnale $\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle \mathbf{w}_i$

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Si ha anche la seguente proprietà

$$d^2(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \underbrace{E(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = E(\mathbf{e})}_{\text{Energia del segnale “differenza” } \mathbf{e}} = E(\mathbf{x}) - E(\hat{\mathbf{x}}) = E(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} \left| \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle \right|^2$$

  - Dimostrazione:

$$d^2(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = E(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = E(\mathbf{x}) + E(\hat{\mathbf{x}}) - 2\Re \langle \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \rangle$$

$$\langle \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \rangle = \left\langle \mathbf{x}, \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle \cdot \mathbf{w}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle = E(\hat{\mathbf{x}})$$

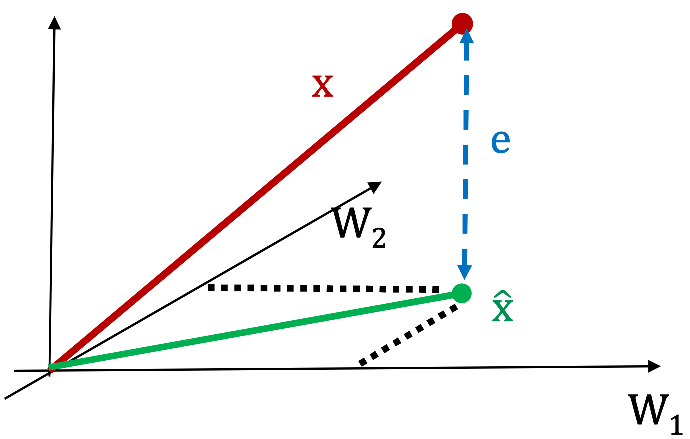
$$d^2(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) + E(\hat{\mathbf{x}}) - 2E(\hat{\mathbf{x}}) = E(\mathbf{x}) - E(\hat{\mathbf{x}})$$

Approssimazione di un segnale $\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle \mathbf{w}_i$

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Altra proprietà: il segnale differenza $e(t)$ è ortogonale al segnale approssimante
  - Dimostrazione:

$$\langle e, \hat{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \rangle - \langle \hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{x}} \rangle = E(\hat{\mathbf{x}}) - E(\hat{\mathbf{x}}) = 0$$



Si veda infatti la seguente costruzione grafica di esempio nel caso di un vettore in 3 dimensioni che venga approssimato su uno spazio a due dimensioni

Disuguaglianza di Bessel e uguaglianza di Parseval

- Dalle proprietà precedenti, possiamo derivare altre proprietà nel caso di segnale combinazione lineare di altri segnali

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{w}_i \Rightarrow E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_i\right|^2$$

Detta anche Uguaglianza di Parseval

- In generale (per base NON completeta) si può dimostrare che:

$$E(\mathbf{x}) \geq \sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \right\rangle\right|^2$$

Diseguaglianza di Bessel

Cambiamento di base

- Esempio: nello spazio euclideo a 2 dimensioni:

base di partenza — nuova base

$$\boxed{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}}\times\boxed{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}}=\boxed{\left\{\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}\right\}}$$

trasformazione unitaria
(rotazione di angolo θ)

Ad esempio per
$\theta = 45°$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\}$$