Teoria dei Segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Trasformazione di processi casuali
- Spettro di potenza di un processo

Ultimo aggiornamento: Dicembre 2024

Trasformazioni di processi casuali

Processo casuale in ingresso con caratteristiche note

$X(t) \longrightarrow$ **Sistema Deterministico (anche non lineare)** $\longrightarrow Y(t)$

Che tipo di processo è?

- Un sistema ingresso-uscita deterministico che elabora un processo casuale fornisce alla sua uscita un altro processo casuale

- Cercheremo di trovare dei metodi matematici per dare una caratterizzazione del processo in uscita, che ovviamente dipenderà
  - Dalle caratteristiche del processo in ingresso
  - Dal tipo di trasformazione

  - ~~*Nota: La definizione del processo casuale di uscita richiede qualche attenzione perché può succedere (tuttavia in casi molto particolari) che per non tutte le realizzazioni del processo di ingresso l'uscita sia definita*~~

    Nel nostro corso NON considereremo questi casi matematicamente "patologici", e considereremo che l'uscita sia sempre definita

Trasformazioni di processi

- La caratterizzazione completa di un processo all' uscita di un sistema richiederebbe il calcolo delle statistiche di qualsiasi ordine n
  - Questa operazione è possibile solo per sistemi molto semplici
- In generale ci si accontenta di calcolare i momenti del primo e del secondo ordine (media e autocorrelazione in uscita)

$$F_Y(y_1,\ldots y_n;t_1,\ldots t_n)$$

quasi sempre impossibile

$$\Downarrow$$

$$m_Y(t)=E\{Y(t)\}=\int y\, f_Y(y;t)\,dy$$

quasi sempre fattibile

$$R_Y(t_1,t_2)=E\{Y(t_1)Y^*(t_2)\}=\int\int y_1 y_2 f_Y(y_1,y_2;t_1,t_2)\,dy_1 dy_2$$

Trasformazioni **lineari**

Processo casuale in ingresso con caratteristiche note

$X(t) \longrightarrow$ Sistema Deterministico LTI $h(t)$ $H(f)$ $\longrightarrow Y(t)$

Che tipo di processo è?

- Sotto certe condizioni sul processo di ingresso e sulle sue statistiche del secondo ordine l'operatore di media può commutare con l'operatore lineare
  - Noi supporremmo che questa ipotesi sia sempre vera

- Sotto queste ipotesi, è solitamente possibile calcolare i momenti del primo e del secondo ordine
  - Cioè essenzialmente la media e l'autocorrelazione

Esempio: integratore nel tempo

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Processo casuale in ingresso con caratteristiche note

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\int_{T_1}^{t}} \longrightarrow Y(t) = \int_{T_1}^{t} X(\tau)d\tau$$

- Calcolo della media del processo $Y(t)$ di uscita:

$$m_Y(t) = E[Y(t)] = E\left[\int_{T_1}^{t} X(\tau)\,d\tau\right] = \int_{T_1}^{t} E[X(\tau)]d\tau$$

$$\boxed{m_Y(t) = \int_{T_1}^{t} m_X(\tau)\,d\tau}$$

- Calcolo della autocorrelazione del processo $Y(t)$ di uscita:

$$R_Y(t_1,t_2) = E[Y(t_1)\cdot Y^*(t_2)] = E\left[\int_{T_1}^{t_1} X(\tau_1)\,d\tau_1 \cdot \int_{T_1}^{t_2} X^*(\tau_2)\,d\tau_2\right]$$

$$= E\left[\int_{T_1}^{t_1}\int_{T_1}^{t_2} X(\tau_1)X^*(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2\right] = \int_{T_1}^{t_1}\int_{T_1}^{t_2} E[X(\tau_1)X^*(\tau_2)]d\tau_1 d\tau_2$$

$$\boxed{R_Y(t_1,t_2) = \int_{T_1}^{t_1}\int_{T_1}^{t_2} R_X(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}$$

Esempio: derivata rispetto al tempo

Processo casuale in ingresso con caratteristiche note

$$X(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow Y(t) = \frac{d}{dt}X(t)$$

- Calcolo della media del processo $Y(t)$ di uscita:

$$E\{Y(t)\} = E\left\{\frac{d}{dt}X(t)\right\} = \frac{d}{dt}E\{X(t)\}$$

$$\boxed{m_Y(t) = \frac{d}{dt}m_X(t)}$$

- Calcolo della autocorrelazione:

$$R_Y(t_1,t_2) = E\left[Y(t_1)\cdot Y^*(t_2)\right] = E\left[\frac{\partial}{\partial t_1}X(t_1)\cdot\frac{\partial}{\partial t_1}X^*(t_2)\right] = \frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_1}E\left[X(t_1)\cdot X^*(t_2)\right]$$

$$\boxed{R_Y(t_1,t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2}R_X(t_1,t_2)}$$

Esempio: derivata

- Supponiamo che l'ingresso $X(t)$ sia wide-sense stationary (WSS)
- Dato che in questo caso la media NON dipende dal tempo, la derivata in t è nulla, e dunque possiamo concludere che:

$$\boxed{m_Y(t) = 0}$$

- L'autocorrelazione dell'ingresso dipende solo dalla differenza dei due tempi. Abbiamo dunque:

$$R_Y(t_1,t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_x(t_1,t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_x(t_1 - t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_x(\tau) \quad \text{dove:} \quad \tau = t_1 - t_2$$

$$\boxed{R_Y(t_1,t_2) = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R_X(\tau)}$$

Dunque l'uscita $Y(t)$ è ancora WSS

Trasformazione LTI su processo WSS

- Consideriamo ora un generico sistema lineare tempo invariante con processo di ingresso WSS

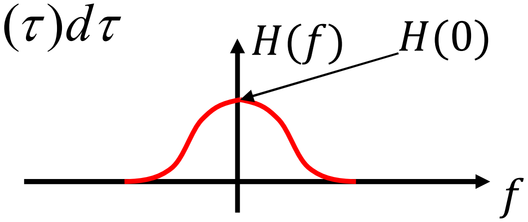
$$\underset{\text{WSS}}{X(t)} \longrightarrow \boxed{h(t)}_{\text{LTI}} \longrightarrow Y(t)$$

- Calcoliamo la media del processo di uscita:

$$m_Y(t) = E[Y(t)] = E[h(t) * X(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) X(t-\tau)\, d\tau\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot E[X(t-\tau)]\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot m_x \, d\tau = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, d\tau$$

$$\boxed{m_Y = m_X H(0) = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, d\tau}$$



Trasformazione LTI su processo WSS

- Calcoliamo l'autocorrelazione:

$$R_Y(\tau) = E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right] = E\left[\left(h(t) * X(t)\right)\cdot\left(h(t) * X(t+\tau)\right)\right] =$$

$$E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(r_1)X(t-r_1)dr_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(r_2)X(t+\tau-r_2)dr_2\right]$$

$$= \iint h(r_1)h(r_2)E[X(t-r_1)X(t+\tau-r_2)]dr_1dr_2$$

$$= \iint h(r_1)h(r_2)R_X(\tau+r_1-r_2)dr_1dr_2 \quad \text{introduciamo } r = r_2 - r_1 \rightarrow r_1 = r_2 + r$$

$$= \iint h(r_2)h(r_2+r)R_X(\tau-r)dr_2dr$$

$$= \int\left(\int h(r_2)h(r_2+r)dr_2\right)R_X(\tau-r)dr =$$

$$= \int R_h(r)R_X(\tau-r)dr =$$

L'autocorrelazione dell'uscita è uguale al prodotto di convoluzione della autocorrelazione del processo di ingresso con la autocorrelazione della h(t) (si veda anche la slide successiva)

$$\boxed{R_Y(\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau)}$$

Trasformazione LTI su processo WSS

- Nella slide precedente $R_h(t)$ è la funzione di autocorrelazione <u>temporale</u> del segnale determinato $h(t)$ (risposta all'impulso del sistema)

$$R_h(\tau) \triangleq \int h^*(t)\, h(t+\tau)\, dt$$

Ritorna qui una definizione introdotta nella prima parte del corso per i segnali determinati.

La trattazione che viene svolta in queste slide è una delle principali motivazioni che hanno portato a definire l'autocorrelazione già per i segnali determinati

- Avendo dunque ottenuto che:

$$\boxed{m_Y = m_X H(0) = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, d\tau} \qquad \boxed{R_Y(\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau)}$$

- Deduciamo che anche il processo di uscita è WSS, avendo:
  - Media costante nel tempo
  - Autocorrelazione dipendente solo da $\tau = t_1 - t_2$

Trasformazione LTI su processo WSS

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Analogamente, è anche possibile calcolare la mutua correlazione tra ingresso e uscita:

$$R_{XY}(\tau) \triangleq E\{X(t)Y(t+\tau)\} = R_X(\tau) * h(\tau)$$

Si consiglia di provare a fare a casa questa dimostrazione, seguendo passaggi del tutto simili a quelli della dimostrazione riportata in una slide precedente

Trasformazione LTI su processo WSS

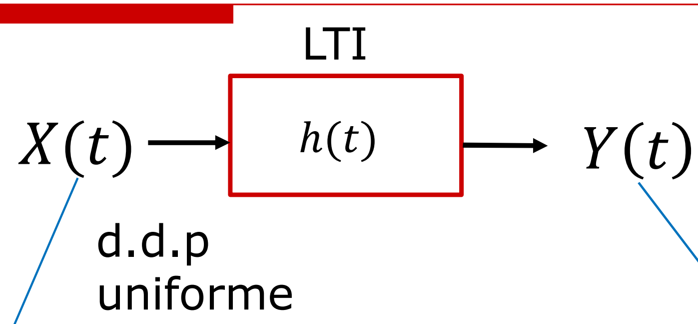
$$\underset{\text{WSS}}{X(t)} \longrightarrow \underset{\text{LTI}}{\boxed{h(t)}} \longrightarrow Y(t)$$

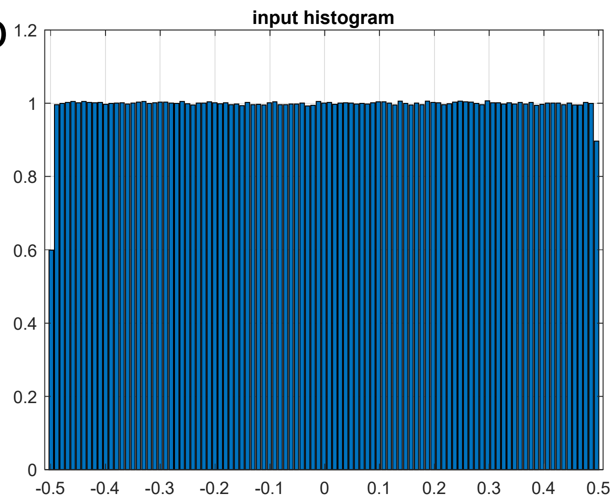
- La densità di probabilità del processo $Y(t)$ di uscita è invece solitamente estremamente difficile da calcolare
  - Non esistono formule per il caso generale

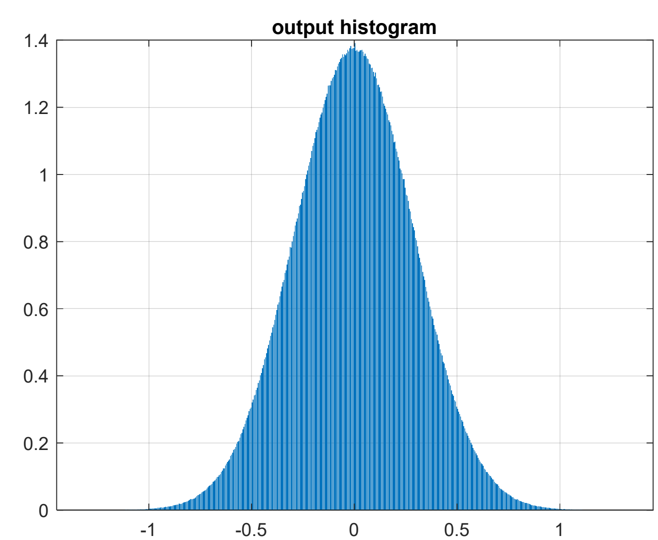
Esempio in Matlab

Sistema simulato:

- Processo casuale con <u>d.d.p uniforme</u> in ingresso in [-0.5,+0.5]
- Filtraggio LTI con risposta all'impulso data da una porta nel tempo







Trasformazione lineare su un processo gaussiano

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow Y(t)$$

Gaussiano LTI

- Un'importante eccezione per la quale si può calcolare la densità di probabilità all'uscita del sistema lineare è il processo Gaussiano

- Se il processo $X(t)$ è Gaussiano, il processo di uscita è ancora Gaussiano
  - Conseguentemente:

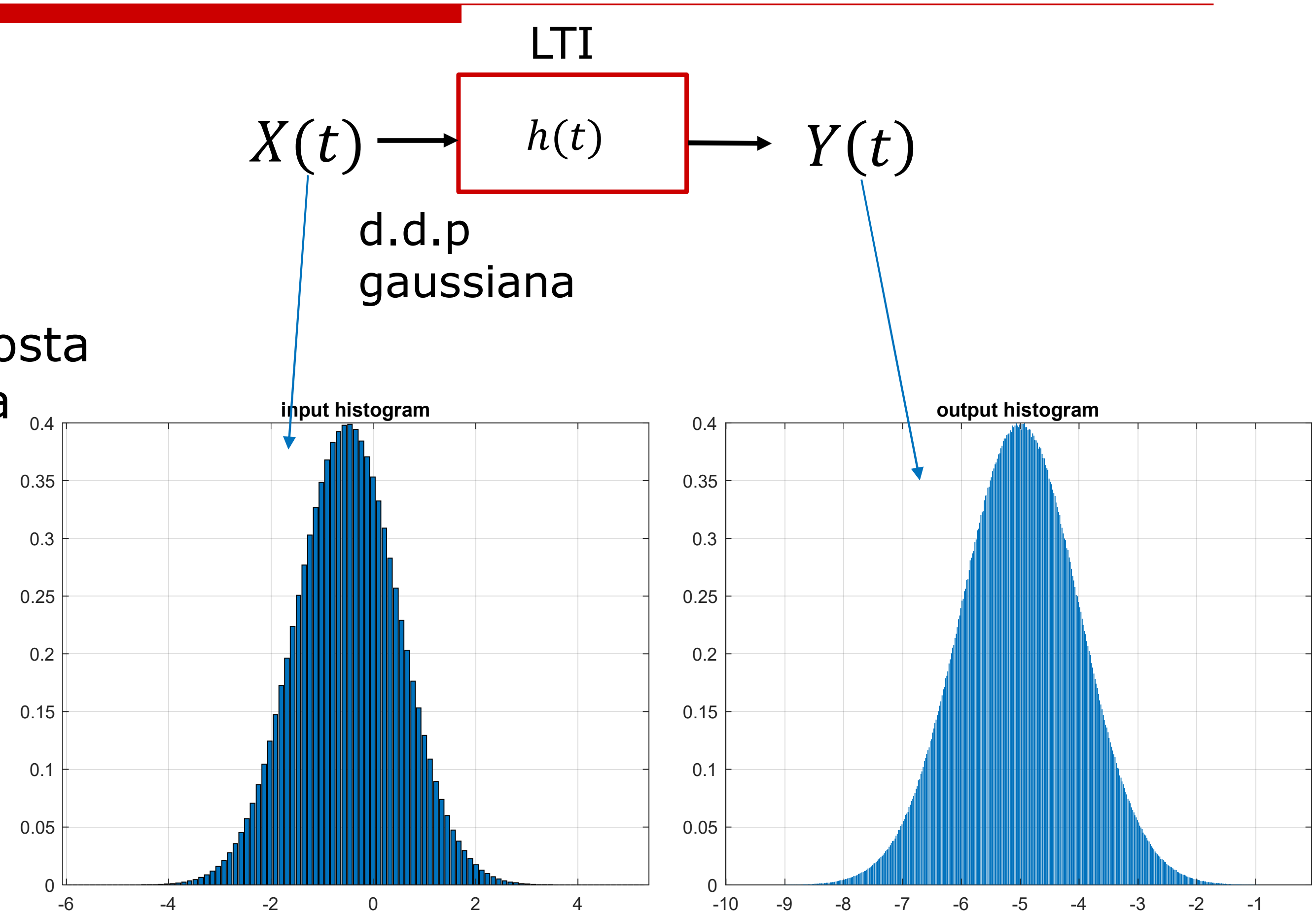
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}X(t) \\ aX(t)+b \\ \int_0^t h(t,\tau)X(\tau)\,d\tau \end{array}\right\} \text{Sono tutti processi Gaussiani se l'ingresso è Gaussiano}$$

Esempio in Matlab

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Sistema simulato:

- Processo casuale con <u>d.d.p gaussiana</u> in ingresso
- Filtraggio LTI con risposta all'impulso pari ad una porta nel tempo



Trasformazione lineare su un processo gaussiano

- La dimostrazione rigorosa di questo importante risultato è complessa, e dunque la ometteremo
- Tuttavia, si può dare una dimostrazione semplificata approssimando l'integrale di convoluzione con una sommatoria discreta

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Rightarrow y(t) \cong \sum_i h(t-t_i)\cdot x(t_i)$$

- L'uscita è dunque una sommatoria (pesata) di variabili casuali gaussiane $x(t_i)$ statisticamente indipendenti, e dunque è ancora gaussiana per il teorema limite centrale

Esempio di trasformazione generica: Modulazione di ampiezza

Materiale "extra":
Provare a casa come esercizio

- Nella modulazione analogica di ampiezza, il segnale analogico rappresentante l'informazione $M(t)$ modula un segnale determinato (detto "sinusoide portante")

$$Y(t) = \left[a_0 + a_1 M(t)\right]\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)$$

- Interpretiamo questa formula come una trasformazione (generica, NON si tratta di sistema LTI) di un processo casuale $M(t)$
- Quali sono le caratteristiche del processo $Y(t)$?
  - Faremo l'ipotesi che $M(t)$ sia Wide Sense Stationary (WSS)

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Modulazione di ampiezza

Materiale "extra"
Provare a casa come esercizio

$$Y(t)=\left[a_0+a_1 M(t)\right]\cos\left(2\pi f_0 t+\varphi\right)$$

media

$$m_Y(t)=E\left\{\left[a_0+a_1 M(t)\right]\cos\left(2\pi f_0 t+\varphi\right)\right\}=a_1 E\left\{M(t)\right\}\cos\left(2\pi f_0 t+\varphi\right)+a_0\cos\left(2\pi f_0 t+\varphi\right)$$

Se assumiamo: $\boxed{m_M=0}$ In questo caso: $m_Y(t)=a_0\cos(2\pi f_0 t+\varphi)$

autocorrelazione

$$\begin{aligned}R_Y(t_1,t_2)&=E\left\{\left[a_0+a_1 M(t_1)\right]\cos\left(2\pi f_0 t_1+\varphi\right)\left[a_0+a_1 M(t_2)\right]\cos\left(2\pi f_0 t_2+\varphi\right)\right\}\\&=\left[a_0^2+a_1^2 E\left\{M(t_1)M(t_2)\right\}+a_0a_1E\left\{M(t_1)\right\}+a_0a_1E\left\{M(t_2)\right\}\right]\cos\left(2\pi f_0 t_1+\varphi\right)\cos\left(2\pi f_0 t_2+\varphi\right)\\&=\left[a_0^2+a_1^2 E\left\{M(t_1)M(t_2)\right\}\right]\cos\left(2\pi f_0 t_1+\varphi\right)\cos\left(2\pi f_0 t_2+\varphi\right)\\&=\left[a_0^2+a_1^2 R_M(t_2-t_1)\right]\cos\left(2\pi f_0 t_1+\varphi\right)\cos\left(2\pi f_0 t_2+\varphi\right)\end{aligned}$$

Il processo NON è stazionario

Modulazione di ampiezza: procedura di «stazionarizzazione»

Materiale "extra",
Provare a casa come esercizio

- Consideriamo il nuovo processo:

$$Y'(t) = \left[a_0 + a_1 M(t)\right]\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$

Dove φ è una v.c. uniforme in $[-\pi, \pi]$ e $M(t)$ è a media nulla e statisticamente indipendente da φ

media

$$m_{Y'}(t) = E\left\{\left[a_0 + a_1 M(t)\right]\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)\right\} = E\left\{\left[a_0 + a_1 M(t)\right]\right\} E_\varphi\left\{\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)\right\} = 0$$

autocorrelazione

$$\begin{aligned}
R_{Y'}(t_1,t_2) &= E\left\{\left[a_0 + a_1 M(t_1)\right]\cos\left(2\pi f_0 t_1 + \varphi\right)\left[a_0 + a_1 M(t_2)\right]\cos\left(2\pi f_0 t_2 + \varphi\right)\right\} \\
&= \left[a_0^2 + a_1^2 E\left\{M(t_1)M(t_2)\right\} + a_0 a_1 E\left\{M(t_1)\right\} + a_0 a_1 E\left\{M(t_2)\right\}\right] E_\varphi\left\{\cos\left(2\pi f_0 t_1 + \varphi\right)\cos\left(2\pi f_0 t_2 + \varphi\right)\right\} \\
&= \left[a_0^2 + a_1^2 E\left\{M(t_1)M(t_2)\right\}\right]\frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0 \tau\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[a_0^2 + a_1^2 R_M(\tau)\right]\cos\left(2\pi f_0 \tau\right)
\end{aligned}$$

Il nuovo processo è stazionario in senso lato

Modulazione analogica di fase

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Il messaggio *M(t)* in questo caso modula la fase di una portante sinusoidale, qui rappresentata in forma di esponenziale complessa

$$Y(t) = a_0 e^{j\left[a_1 t + a_2 M(t) + \theta\right]}$$

Materiale "extra",
Presentato a titolo di esempio, di complessità superiore a quanto visto in precedenza

- Quali sono le caratteristiche del processo $Y(t)$?
  - Ipotesi: $M(t)$ WSS

Modulazione di fase

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$Y(t) = a_0 e^{j\left[a_1 t + a_2 M(t) + \theta\right]}$$

media

$$m_Y(t) = E\left\{a_0 e^{j\left[a_1 t + a_2 M(t) + \theta\right]}\right\} = a_0 E\left\{e^{j a_2 M(t)}\right\} e^{j\left[a_1 t + \theta\right]}$$

autocorrelazione

$$R_Y(t_1, t_2) = E\left\{a_0 e^{j\left[a_1 t_1 + a_2 M(t_1) + \theta\right]} a_0 e^{-j\left[a_1 t_2 + a_2 M(t_2) + \theta\right]}\right\}$$

$$= a_0^2 e^{j a_1 (t_1 - t_2)} E\left\{e^{j a_2 (M(t_1) - M(t_2))}\right\}$$

$$= a_0^2 e^{j a_1 (t_1 - t_2)} C_\xi(a_2) \qquad \xi \doteq M(t_1) - M(t_2)$$

Materiale "extra", a titolo di esempio, di complessità superiore a quanto visto in precedenza

funzione caratteristica di una variabile casuale definita come:

Modulazione di fase: stazionarizzazione

$$Y'(t) = a_0 e^{j\left[a_1 t + a_2 M(t) + \theta\right]}$$

θ v.c. uniforme in *[-π, π]*

media

$$m_{Y'}(t) = E\left\{a_0 e^{j\left[a_1 t + a_2 M(t) + \theta\right]}\right\} = a_0 E\left\{a_0 e^{j a_2 M(t)}\right\} E_\theta\left\{e^{j\left[a_1 t + \theta\right]}\right\} = 0$$

autocorrelazione

Assumiamo *M(t)* Gaussiano (*M(t₁)* e *M(t₂)* gaussiani, ξ gaussiana)

$$m_\xi = E\left\{M(t_1) - M(t_2)\right\} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_\xi(a_2) = e^{-\sigma_\xi^2 a_2^2/2} = e^{-a_2^2\left(R_M(0) - R_M(\tau)\right)}$$

$$\sigma_\xi^2 = E\left\{\left(M(t_1) - M(t_2)\right)^2\right\} = 2\left[R_M(0) - R_M(\tau)\right]$$

$$R_{Y'}(\tau) = a_0^2 e^{j a_1 \tau} e^{-a_2^2\left(R_M(0) - R_M(\tau)\right)}$$

Materiale "extra", a titolo di esempio, di complessità superiore a quanto visto in precedenza

Modulazione di fase: caso reale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$Y(t) = a_0 \cos\left(a_1 t + a_2 M(t) + \theta\right) = \Re\left[a_0 e^{j\left[a_1 t + a_2 M(t) + \theta\right]} \right]$$

media

$$m_{Y'}(t) = E\left\{ \Re\left[a_0 e^{j\left[a_1 t + a_2 M(t) + \theta\right]} \right] \right\} = 0$$

Materiale "extra", a titolo di esempio, di complessità superiore a quanto visto in precedenza

autocorrelazione

Se *M(t)* Gaussiano (*M(t₁)* e *M(t₂)* gaussiani, ξ gaussiana)

$$R_{Y'}(\tau) = \frac{1}{2} a_0^2 \cos\left(a_1 \tau\right) e^{-a_2^2\left(R_M(0) - R_M(\tau)\right)}$$

Teoria dei Segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Densità spettrale di potenza per i processi casuali stazionari in senso lato

Ultima revisione: Dicembre 2023

Potenza media per processi stazionari

- Per processi casuali WSS è ragionevole definire la potenza del processo come il suo valore quadratico medio (nel senso delle medie di insieme)

$$P_X \triangleq E\left\{X^2(t)\right\}$$

(per processi complessi, si deve introdurre il modulo al quadrato)

- Spiegazione intuitiva: per i segnali determinati, la potenza istantanea è data dal segnale al quadrato
- Per un processo casuale WSS, è dunque ragionevole che la media di insieme del processo al quadrato sia considerata come potenza media
  - È in sostanza **la media (nel senso delle medie di insieme) della potenza istantanea** del processo casuale

Densità spettrale di potenza per processi stazionari

- La densità spettrale di potenza (anche detta spettro di potenza) che introdurremo nelle prossime slide è definita solo per processi WSS
  - Esistono altre definizioni di spettro anche per situazioni più generali, ma non verranno considerate in questo corso
- Assumiamo che le singole realizzazioni dei processi WSS siano segnali ad energia infinita ma a potenza media finita
- DEFINIZIONE: lo spettro di potenza è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione

Teorema di ***Wiener – Khintchine***

Spettro di Potenza

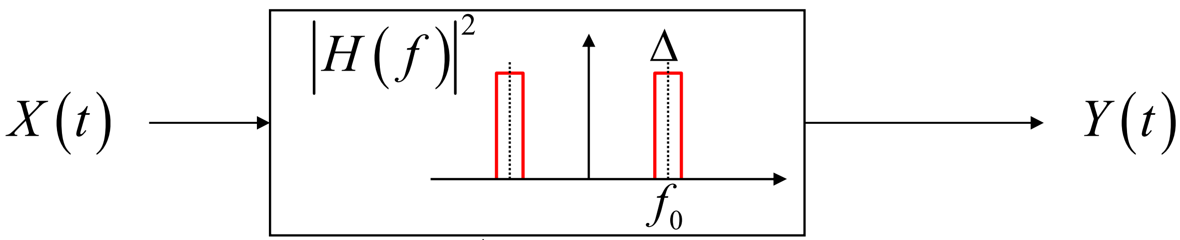
$$S_X(f) \triangleq \mathcal{F}\left(R_X(\tau)\right) = \int R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Interpretazione della definizione di densità spettrale di potenza

- Lo spettro di potenza del segnale all'uscita di un sistema LTI è calcolabile a partire da un precedente risultato sulla autocorrelazione

$$R_y(\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau) \Rightarrow S_Y(f) = \left|H(f)\right|^2 S_X(f)$$

- Se applichiamo un processo WSS ad un filtro passabanda centrato alla frequenza f_0 con banda Δ



$$E\left\{Y^2(t)\right\} = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_Y(f)\,df \approx 2\Delta \cdot S_X(f_0)$$

S(f) rappresenta dunque la densità spettrale del valore quadratico medio del processo (cioè della potenza)

Densità spettrale di potenza

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Poiché la funzione di autocorrelazione è sempre pari (in generale ha simmetria Hermitiana) si hanno le seguenti proprietà

$$R_X(\tau) = R_X^*(-\tau)$$

- La densità spettrale di potenza è sempre reale e pari

$$\boxed{S_X(f) \text{ e' reale e pari}}$$

- La densità spettrale di potenza è sempre positiva

$$\boxed{S_X(f) \geqslant 0}$$

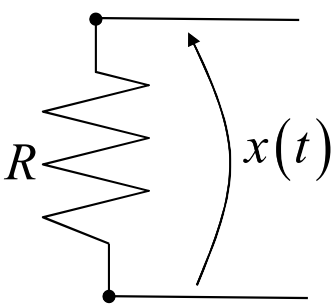
- Il suo integrale coincide con la potenza media del processo casuale

$$\boxed{P_X = E\left\{X^2(t)\right\} = R_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f)\,df}$$

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

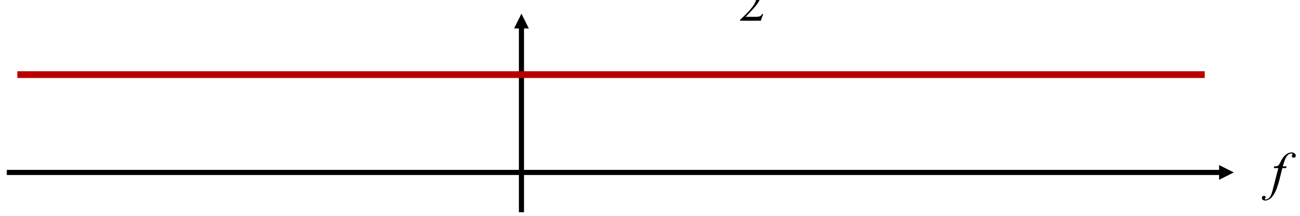
Esempio:
Rumore gaussiano "bianco" (White Gaussian Noise, WGN)

- Un modello del processo termico generato ai capi di una resistenza a temperatura T è il seguente:
  - processo gaussiano stazionario
  - valor medio nullo
  - densità spettrale di potenza costante su tutte le frequenze («bianco»)



$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

Nel caso di una resistenza, N_0 Dipende solo dalla temperatura della resistenza stessa, tramite la formula $N_0 = k \cdot T$



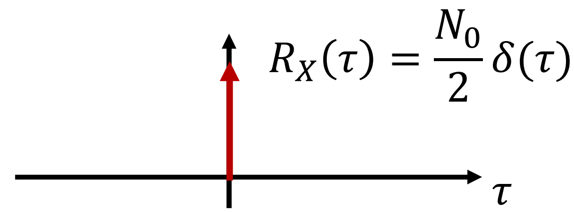
costante di Boltzmann
$k = 1.38064852 \times 10^{-23}$ m^2 kg s^{-2} K^{-1}
T=temperatura in Kelvin

Conseguenze

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Se il rumore è bianco, l'autocorrelazione vale:

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left(S_X(f)\right) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau)$$



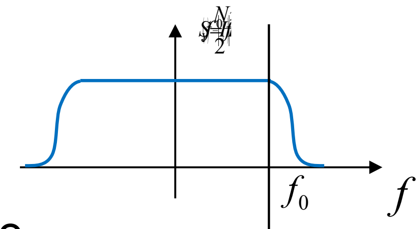
- Conseguenze
  - Qualsiasi coppia di campioni non prelevati allo stesso istante è scorrelata e quindi indipendente
  - Il processo ha media nulla
  - La varianza diverge! $\sigma_X^2 = R_X(0) \to \infty$
  - Il processo ha potenza infinita

Questa "anomalia" è dovuta al modello matematico usato

Modello reale

- Il modello precedente è un'approssimazione di quello che accade in realtà, che tiene conto degli effetti quantistici

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}\left[\frac{|f|/f_0}{\exp\left(|f|/f_0\right)-1}\right] \qquad f_0 = \frac{kT}{h} \sim 10^{12} = 1000 \text{ GHz}$$



  - In pratica quindi le precedenti anomalie non si verificano

- Inoltre, quando un rumore gaussiano bianco entra in un sistema LTI il processo di uscita è gaussiano "colorato" con il seguente spettro:

$$\text{WGN} \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow \text{CGN}$$

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2} \qquad\qquad S_X(f) = \frac{N_0}{2}$$

$$S_Y(f) = S_X(f)\cdot\left|H(f)\right|^2 = \frac{N_0}{2}\left|H(f)\right|^2$$

Nella pratica ci si ritrova sempre a lavorare con rumori filtrati che hanno quindi potenza finita

Rumore filtrato

- Consideriamo il caso di un rumore WGN filtrato da un filtro passabasso ideale con banda unilatera *B*