Elaborazione dei Segnali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Lezione 2

Sequenze fondamentali

Energia e potenza media

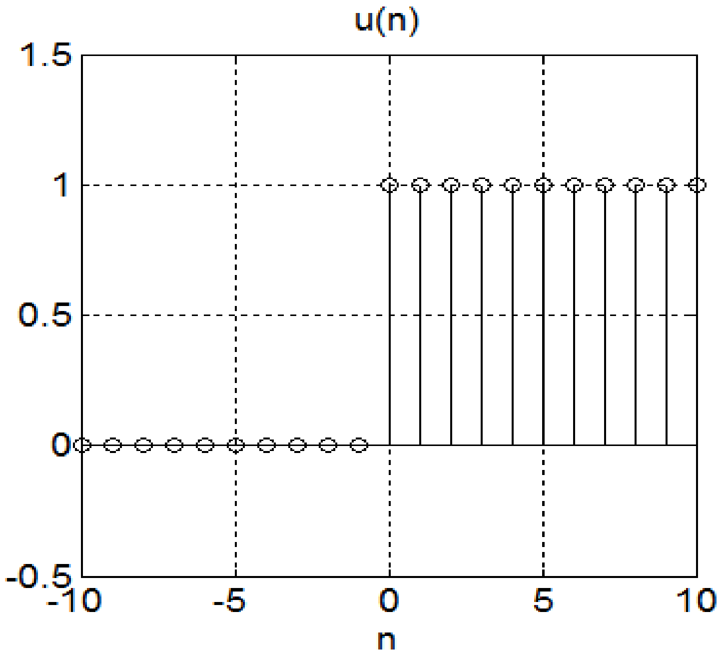
A.A. 2023-2024

Sequenze fondamentali

Sequenza gradino unitario

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



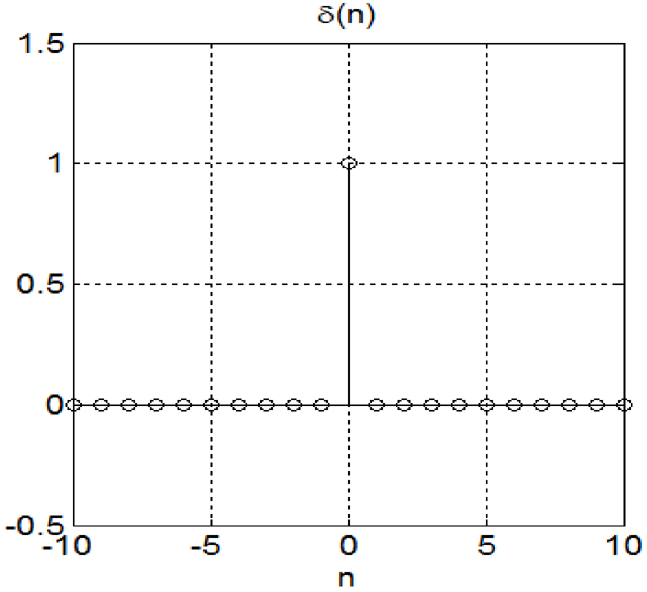

```
n=[-10:10];
y=zeros(1,21);
y(11:21)=1;
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('u(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

- Il corrispondente analogico è: $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$

Delta di Kroenecher (impulso unitario)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$




```
n=[-10:10];
y=zeros(1,21);
y(11)=1;
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('\delta(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$$

- Il corrispondente analogico è la delta di Dirac: $\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$

Delta di Kroenecher (impulso unitario)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Nota: i segnali elementari a tempo discreto impulso e gradino unitario sono definiti senza le criticità caratteristiche dei corrispondenti segnali a tempo continuo.

- Una proprietà fondamentale della delta numerica è la possibilità di esprimere ogni segnale x(n) come somma di impulsi secondo la relazione:

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\delta(n-i)$$

dove d(n-i) è la delta di Kroenecher centrata nell'istante di tempo i.

Delta di Kroenecher (impulso unitario)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- E' infatti semplice verificare che:

$$x(n)\delta(n) = x(0)\delta(n)$$
$$x(n)\delta(n-i) = x(i)\delta(n-i)$$

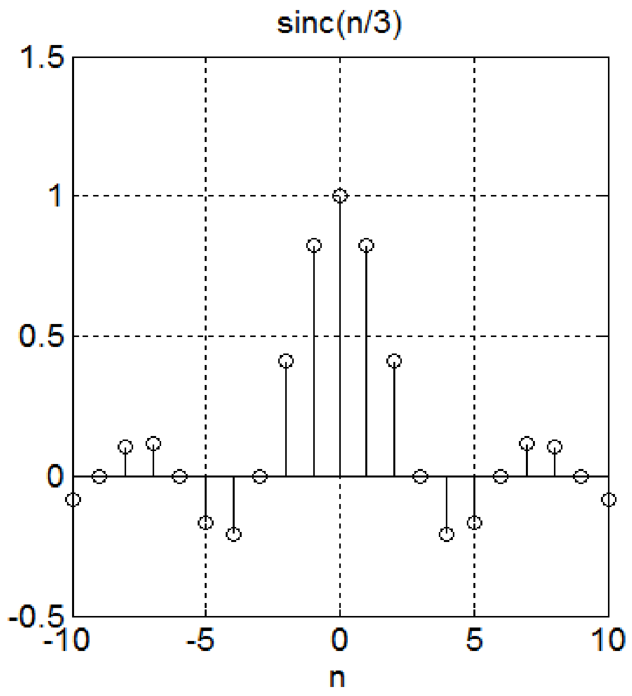
- Relazioni tra delta numerica e gradino unitario:

$$u(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta(n-i) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \ldots$$
$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

Sequenza Sinc

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{\sin\left(\pi \frac{n}{N}\right)}{\pi \frac{n}{N}} \qquad N \text{ intero positivo}$$

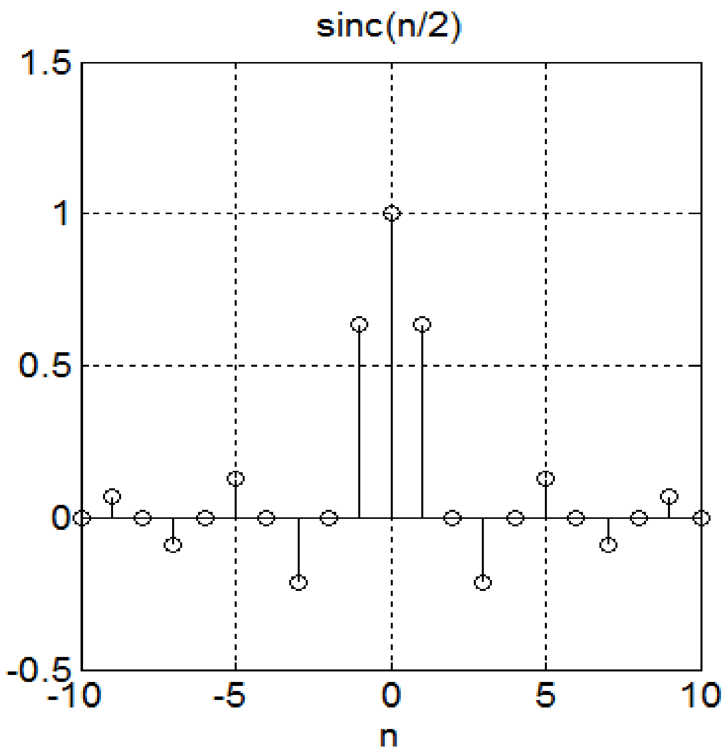


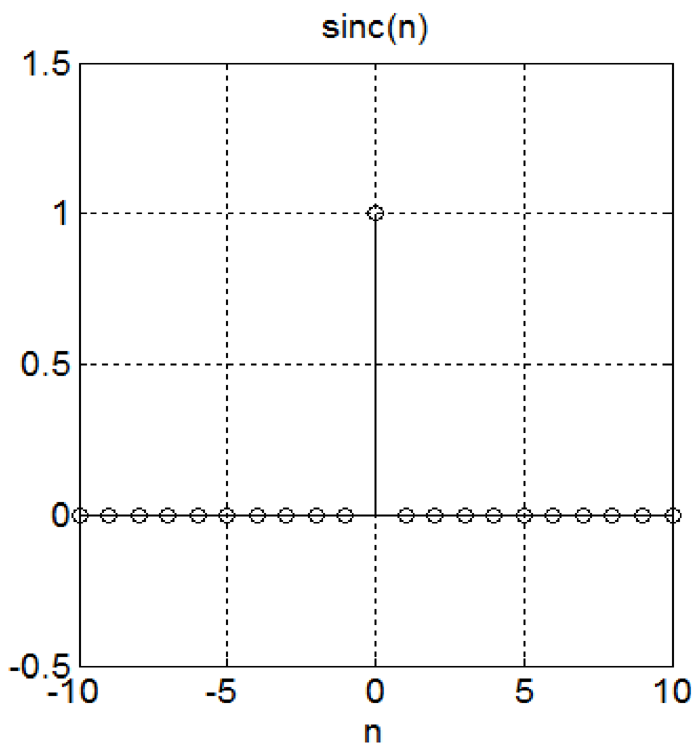

```
n=[-10:10];
y=sinc(n/3);
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('sinc(n/3)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

Sequenza Sinc

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\mathrm{sinc}\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{\sin\left(\pi \frac{n}{N}\right)}{\pi \frac{n}{N}} \qquad N \text{ intero positivo}$$

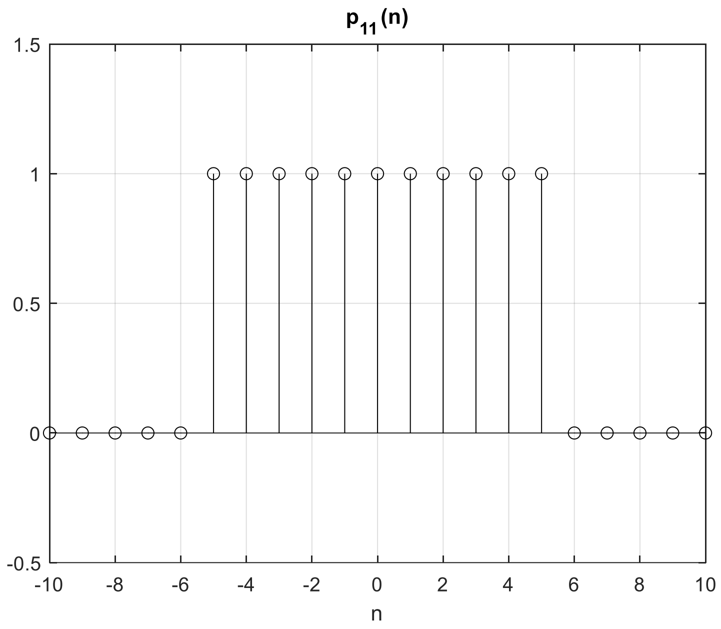




Sequenza porta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$p_{2K+1}[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le K \\ 0 & |n| > K \end{cases}$$

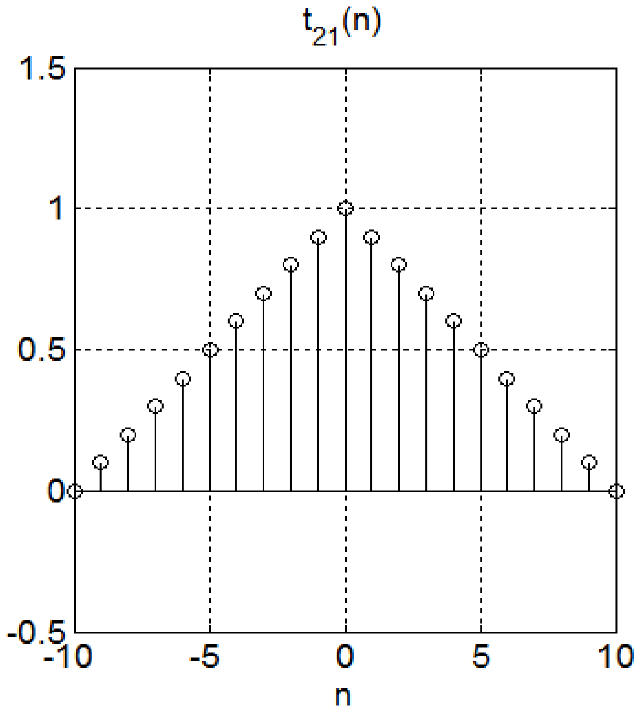



```
n=[-10:10];
y=zeros(1,21);
y(6:16)=1;
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('p_{11}(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

Sequenza triangolo

$$t_{2N+1}(n)=\begin{cases}1-\dfrac{|n|}{N}, & |n|\le N\\ 0, & |n|>N\end{cases}$$

N intero positivo



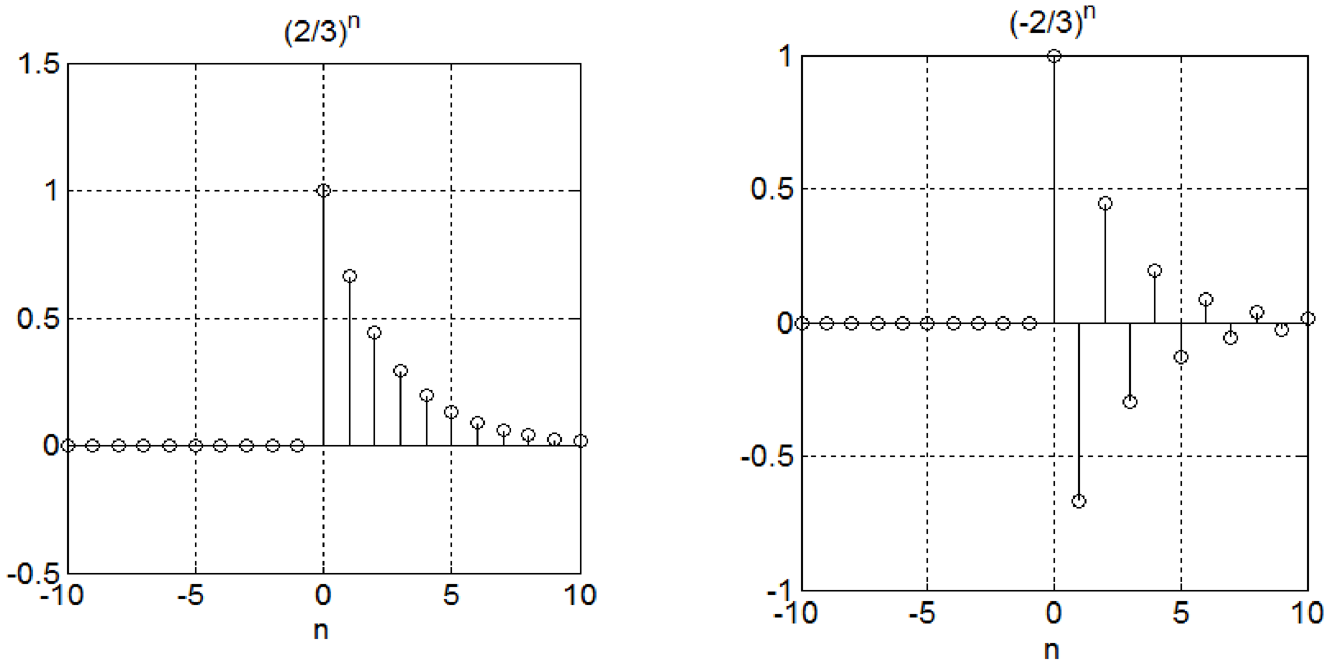

```
N=10;
n=[-N:N];
y=1-abs(n)/N;
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('t_{21}(n)')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

Sequenza esponenziale

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x(n) = a^n u(n)$$

- dove a è in generale complesso.
- Se a è reale, la sequenza esponenziale è a segno costante se a>0, ed è a segni alterni se a<0.



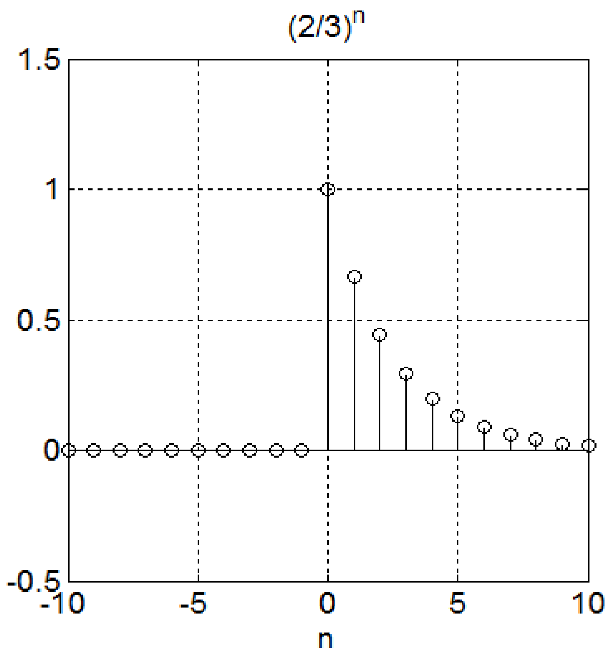
Sequenza esponenziale

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x(n) = a^n u(n)$$

- Se a è complesso, $a = Ae^{j\theta}$

$$x(n) = \left(Ae^{j\theta}\right)^n u(n) = A^n e^{jn\theta} u(n)$$




```
n=[-10:10];
a=(2/3);
y=a.^n.*(n>=0);
figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(n,y,'k')
xlabel('n')
title('(2/3)^n')
axis([-10 10 -0.5 1.5])
grid on
```

Sinusoidi ed esponenziali a tempo discreto

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- L'espressione di sinusoidi ed esponenziali a tempo discreto sono analoghe a quelle a tempo continuo:

$$x_c(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta) = A\cos(\omega_0 n + \theta), \ \forall n$$

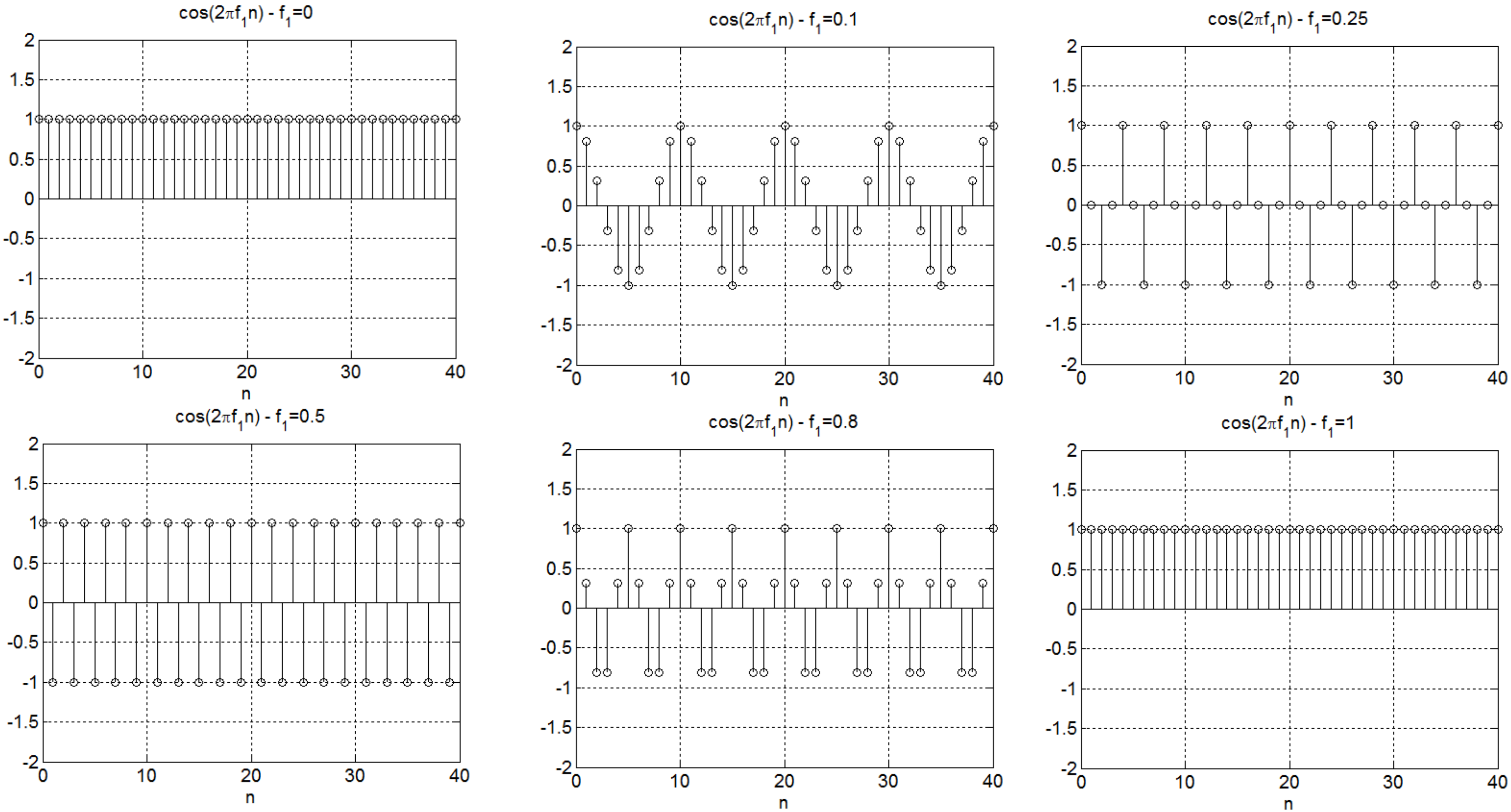
$$x(n) = Ae^{j(2\pi f_0 n + \theta)}, \ \forall n$$

  - A, θ costanti reali, f_0 è la frequenza numerica, ω_0 è la pulsazione numerica .

- Relazione di Eulero:

$$x_c(n) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta) = \Re\left\{Ae^{j(2\pi f_0 n + \theta)}\right\} = A\frac{e^{j(2\pi f_0 n + \theta)} + e^{-j(2\pi f_0 n + \theta)}}{2}$$

Esempio: $\cos(2\pi f_1 n)$



Proprietà 1

- Sostituendo f_0 con f_0+k (con k intero), si ottiene la stessa sinusoide:

$$x_c(n) = A\cos(2\pi(f_0 + k)n + \theta) = A\cos(2\pi f_0 n + 2\pi kn + \theta) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta)$$

  - Infatti 2πkn è sempre pari a un numero intero di 2π.
- La stessa cosa vale per gli esponenziali complessi.
- Questo implica che:
  - sinusoidi che differiscono per un numero intero di angoli giro sono indistinguibili nel dominio del tempo discreto.
  - quando si analizzano i segnali a tempo discreto nel dominio della frequenza è sufficiente considerare un intervallo di frequenze di supporto unitario, tipicamente (-1/2,1/2] oppure [0,1), che corrispondono ad intervalli di pulsazioni (-π, π] oppure [0,2π).

Proprietà 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Le sinusoidi analogiche $\cos(2\pi f_0 t)$ possiedono oscillazioni tanto più frequenti quanto più aumenta la frequenza f_0.

- La frequenza delle oscillazioni di una sinusoide a tempo discreto aumenta all'aumentare di f_0 fino al valore $f_0=1/2$, dopo di ché diminuisce fino ad annullarsi per $f_0=1$ (che, per la proprietà vista prima, corrisponde a $f_0=0$).

Proprietà 3

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Estendendo al tempo discreto la definizione di segnale periodico vista nel caso analogico, diciamo che x(n) è periodico se esiste un intervallo di tempo N (intero) tale per cui si abbia:

$$x(n) = x(n+N) \quad \forall n$$

- Nel caso di una sinusoide, questo equivale a:

$$x(n+N) = \cos\left(2\pi f_0 (n+N) + \theta\right) = \cos\left(2\pi f_0 n + 2\pi f_0 N + \theta\right) = \cos\left(2\pi f_0 n + \theta\right) = x(n)$$

- L'uguaglianza precedente vale nel caso in cui Nf_0 è pari a un numero intero, che può essere verificato solamente nel caso in cui f_0 è un numero razionale.
  - Le sinusoidi discrete non sono necessariamente periodiche di periodo $1/f_0$, e se f_0 non è un numero razionale sono addirittura aperiodiche in n.

Energia e potenza media

Energia

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Definizione di energia di un segnale a tempo discreto:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

  - Quando $E_x<\infty$, la sequenza viene detta a energia finita.

- Proprietà delle sequenze a energia finita:
  - l'energia è un numero reale, finito e strettamente positivo
  - l'energia non dipende da traslazioni temporali di x(n):

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n-N)|^2 \quad \forall N \text{ intero}$$

Esempio

- Calcolare l'energia della sequenza

$$x(n) = \alpha^n u(n)$$

  - con α reale in (0,1)

- Applicando la definizione:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha^n|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha^2)^n = \frac{1}{1-\alpha^2}$$

Potenza media

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Per sequenze a energia infinita, è possibile definire la potenza media come:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$$

- Le sequenze a energia finita hanno potenza media nulla, mentre le sequenze a potenza media finita non nulla hanno energia infinita.

- Esempio: $x(n) = u(n)$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{+N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

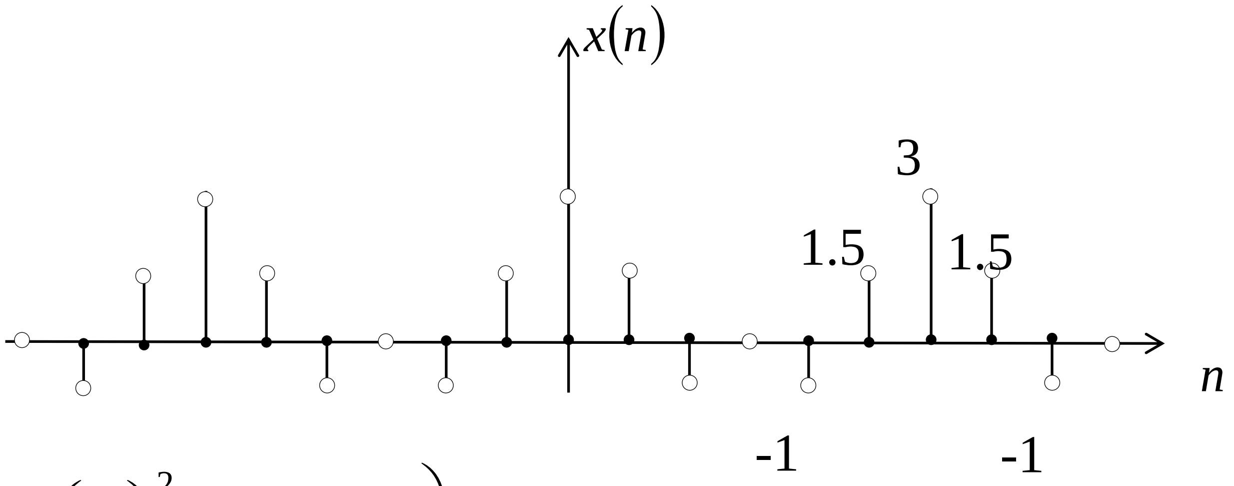
Potenza media di sequenze periodiche

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Per un segnale periodico di periodo N, la potenza media è data da:

$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2$$

- Esempio (N=6)



$$P_x = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}|x(n)|^2 = \frac{1}{6}\left(3^2 + 2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\cdot(-1)^2\right) = \frac{31}{12}$$

Segnali analogici campionati

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Se le sequenze numeriche sono state ottenute campionando segnali analogici, nel calcolo di potenza ed energia occorre tenere conto dell'intervallo di campionamento T_c.

- Se x(t) è un segnale analogico a energia finita, allora la sua energia è pari a:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

- L'integrale può essere approssimato da una sommatoria, partizionando l'asse reale dei tempi in piccoli intervalli di ampiezza T_c:

Segnali analogici campionati

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt \approx T_c \sum_{-\infty}^{+\infty} |x(nT_c)|^2$$

- dove T_c rappresenta il differenziale dt nell'integrale.

- L'espressione precedente rappresenta l'energia del segnale a tempo discreto ottenuto campionando il segnale analogico x(t) con cadenza T_c.

Segnali analogici campionati

- Discorsi analoghi valgono per il calcolo della potenza media dei segnali a energia infinita (periodici e non):

  - Segnale periodico di periodo NT_c:

$$P_x = \frac{1}{T}\int_0^T |x(t)|^2 dt \cong \frac{1}{NT_c}\sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_c)|^2 T_c = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_c)|^2$$

  - Segnale non periodico:

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \cong \lim_{N\to\infty}\frac{1}{(2N+1)T_c}\sum_{n=-N}^{+N} |x(nT_c)|^2 T_c = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} |x(nT_c)|^2$$