Teoria dei Segnali

Esercitazione 3

Sistemi lineari

Esercizio 1

Studiare la linearità e tempo-invarianza dei seguenti sistemi:

1. $y_1(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$
2. $y_2(t) = kx(t)u(t-2)$
3. $y_3(t) = x(t)\delta(t-1) + k$

Linearità e tempo invarianza

- LINEARITA’
  Vale il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$T[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]=a_1T[x_1(t)]+a_2T[x_2(t)]$$

- TEMPO INVARIANZA
  Un ritardo sugli ingressi si traduce in un ritardo sulle uscite:

$$T[x(t)]=y(t) \quad \Leftrightarrow \quad T[x(t-\theta)]=y(t-\theta)$$

Soluzione Esercizio 1

1) $y(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t)$

- Verifica della linearità

$$T[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = [a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)]\cos(2\pi f_0 t) =$$
$$= a_1 x_1(t)\cos(2\pi f_0 t) + a_2 x_2(t)\cos(2\pi f_0 t) =$$
$$= a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

OK

- Verifica della tempo-invarianza

$$y(t-T) = x(t-T)\cos(2\pi f_0 (t-T))$$

$$T[x(t-T)] = x(t-T)\cos(2\pi f_0 t) \neq y(t-T)$$

NO

Soluzione Esercizio 1

2) $y(t) = k\,x(t)u(t-2)$

- Verifica della linearità

$$T[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)] = k[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]u(t-2) =$$
$$= k\,a_1x_1(t)u(t-2)+k\,a_2x_2(t)u(t-2) =$$
$$= a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$$

OK

- Verifica della tempo-invarianza

$$y(t-T) = k\,x(t-T)u(t-T-2)$$
$$T[x(t-T)] = k\,x(t-T)u(t-2) \neq y(t-T)$$

NO

Soluzione Esercizio 1

3) $y(t) = x(t)\delta(t-1) + k$

- Verifica della linearità

$$
\begin{aligned}
T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = [a_1x_1(t) + a_2x_2(t)]\delta(t-1) + k = \\
= a_1x_1(t)\delta(t-1) + a_2x_2(t)\delta(t-1) + k \\
\neq a_1y_1(t) + a_2y_2(t)
\end{aligned}
$$

NO

- Verifica della tempo-invarianza

$$y(t-T) = x(t-T)\delta(t-T-1) + k$$

$$T[x(t-T)] = x(t-T)\delta(t-1) \neq y(t-T)$$

NO

Esercizio 2

Dato il sistema $y(t) = \int_{t-3}^{t+3} x(\tau)d\tau + x(t-5)$

- verificare che il sistema è lineare e tempo invariante.
- calcolarne la risposta impulsiva
- calcolare e rappresentare graficamente le risposte al sistema quando al suo ingresso viene posto $x_1(t) = p_4(t)$ e $x_2(t) = \cos(\pi t)$

Soluzione Esercizio 2

$$y(t)=\int_{t-3}^{t+3} x(\tau)d\tau + x(t-5)$$

- Verifica della linearità

$$T[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]=\int_{t-3}^{t+3}[a_1x_1(\tau)+a_2x_2(\tau)]d\tau + a_1x_1(t-5)+a_2x_2(t-5)=$$

OK

$$=a_1\left[\int_{t-3}^{t+3} x_1(\tau)d\tau + x_1(t-5)\right]+a_2\left[\int_{t-3}^{t+3} x_2(\tau)d\tau + x_2(t-5)\right]=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$$

- Verifica della tempo-invarianza

$$y(t-T)=\int_{t-T-3}^{t-T+3} x(\tau)d\tau + x(t-T-5)$$

OK

$$T[x(t-T)]=\int_{t-3}^{t+3} x(\tau-T)d\tau + x(t-5-T)=\int_{t-T-3}^{t-T+3} x(\tau')d\tau' + x(t-5-T)=y(t-T)$$

Soluzione Esercizio 2

- Calcolo della risposta all'impulso:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

- Se $x(t) = \delta(t)$ $\Rightarrow$ $y(t) = h(t)$

$$h(t) = \int_{t-3}^{t+3} \delta(\tau)\, d\tau + \delta(t-5) = u(t+3) - u(t-3) + \delta(t-5) = p_6(t) + \delta(t-5)$$

Soluzione Esercizio 2

- Calcolo della risposta del sistema a

$$x_1(t) = p_4(t)$$

$$y_1(t) = x(t) * h(t) = p_4(t) * p_6(t) + p_4(t) * \delta(t-5) =$$
$$= p_4(t) * p_6(t) + p_4(t-5)$$

$$p_4(t) * p_6(t) = \begin{cases} 0 & |t| > 5 \\ \int_{-2}^{t+3} d\tau = t+5 & -5 < t < -1 \\ \int_{-2}^{2} d\tau = 4 & -1 < t < 1 \\ \int_{t-3}^{2} d\tau = 5-t & 1 < t < 5 \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 2

- Calcolo della risposta del sistema a

$$x_2(t) = \cos(\pi t)$$

$$y_2(t) = \int_{t-3}^{t+3} \cos(\pi\tau)\, d\tau + \cos(\pi(t-5)) =$$

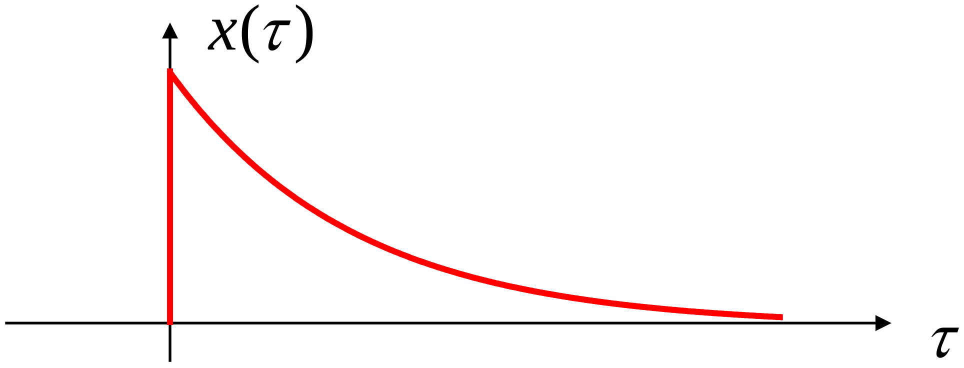
$$= \cos(\pi t - 5\pi) = \cos(\pi t - \pi) = -\cos(\pi t)$$

Esercizio 3

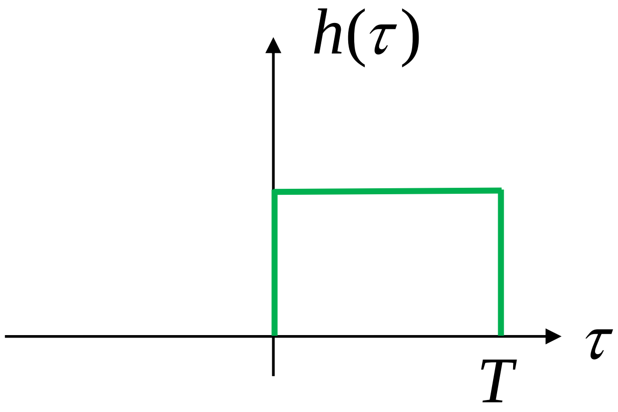
Calcolare il segnale $y(t)$ all'uscita del sistema con risposta all'impulso $h(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$ quando all'ingresso viene posto il segnale $x(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$, con $\alpha > 0$.

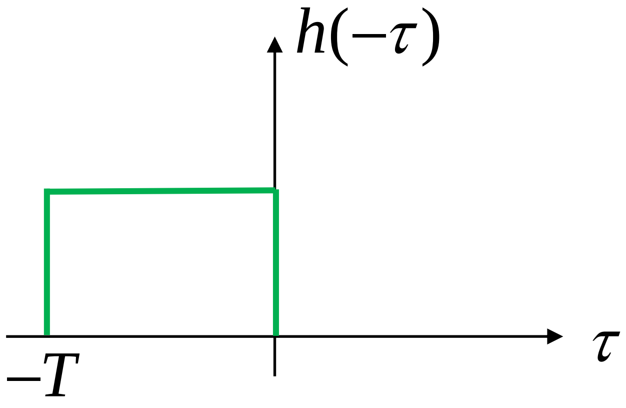
Soluzione Esercizio 3

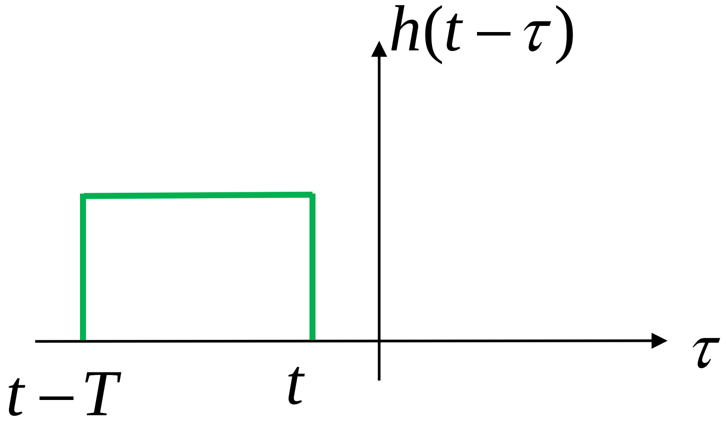
$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \qquad h(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$



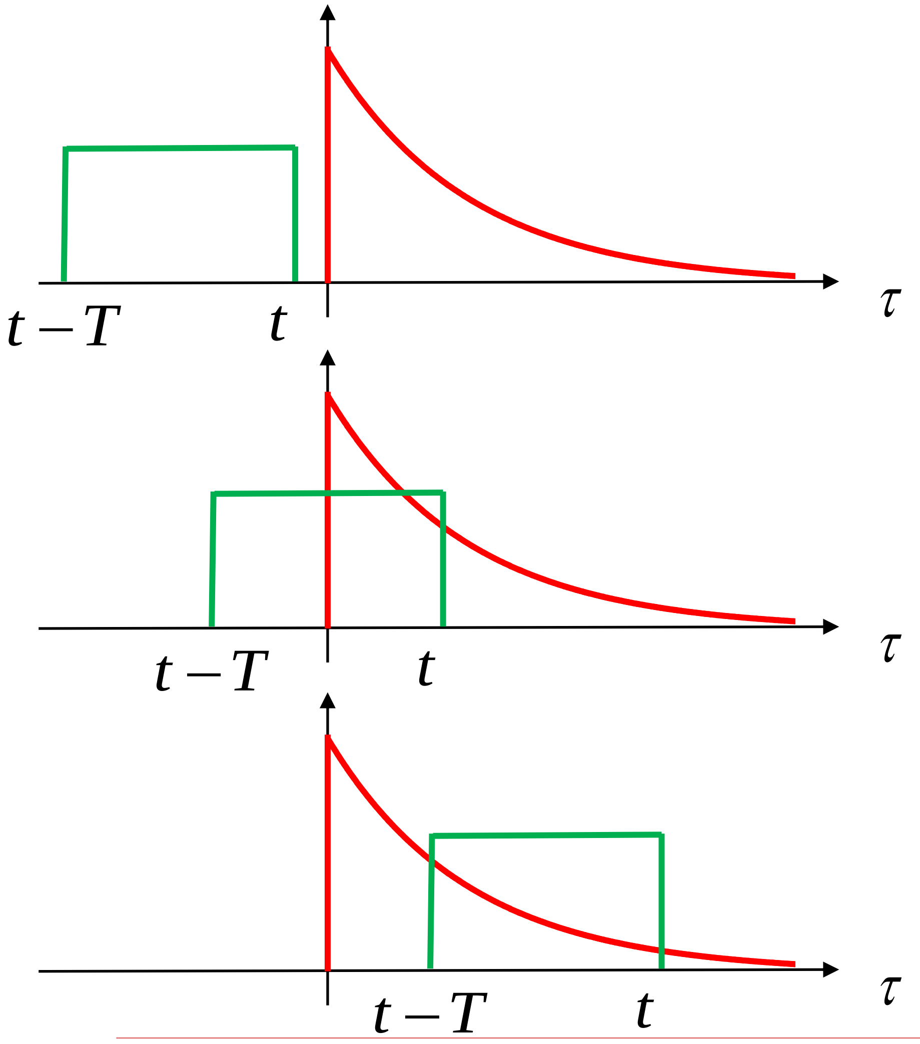
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$







Soluzione Esercizio 3



$$t \le 0$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = 0$$

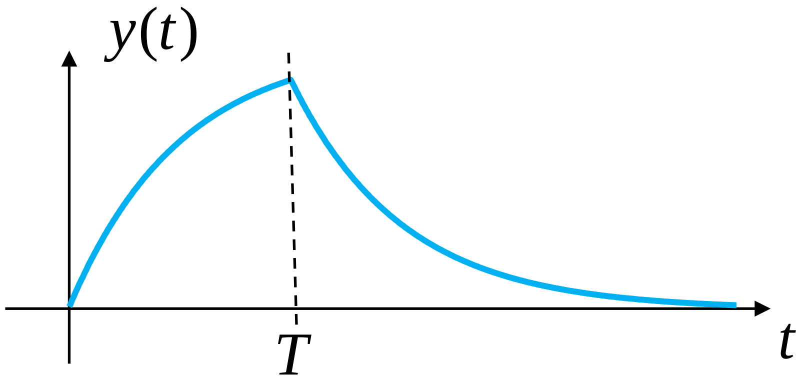
$$t \ge 0 \quad \text{e} \quad t - T \le 0 \Longrightarrow 0 \le t \le T$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau} d\tau = \left. \frac{e^{-\alpha\tau}}{-\alpha} \right|_0^t = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha}$$

$$t - T \ge 0 \Longrightarrow t \ge T$$

$$y(t) = \int_{t-T}^t e^{-\alpha\tau} d\tau = \left. \frac{e^{-\alpha\tau}}{-\alpha} \right|_{t-T}^t = \frac{e^{-\alpha(t-T)} - e^{-\alpha t}}{\alpha} = e^{-\alpha t} \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha}$$

Soluzione Esercizio 3



$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ \dfrac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha} & 0 \le t \le T \\ e^{-\alpha t}\,\dfrac{e^{\alpha T}-1}{\alpha} & t \ge T \end{cases}$$

Esercizio 4

Dai due segnali

$$x(t) = e^{-(t/T)^2}, \quad y(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$$

si ottiene il segnale

$$z(t) = x(t)y(t)$$

che viene posto come ingresso del sistema LTI con risposta all'impulso

$$h(t) = \begin{cases} t/T & t \in [0,T] \\ 2 - t/T & t \in [T,2T] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli l'uscita $w(t)$ del sistema LTI e se ne disegni il grafico.

Soluzione Esercizio 4

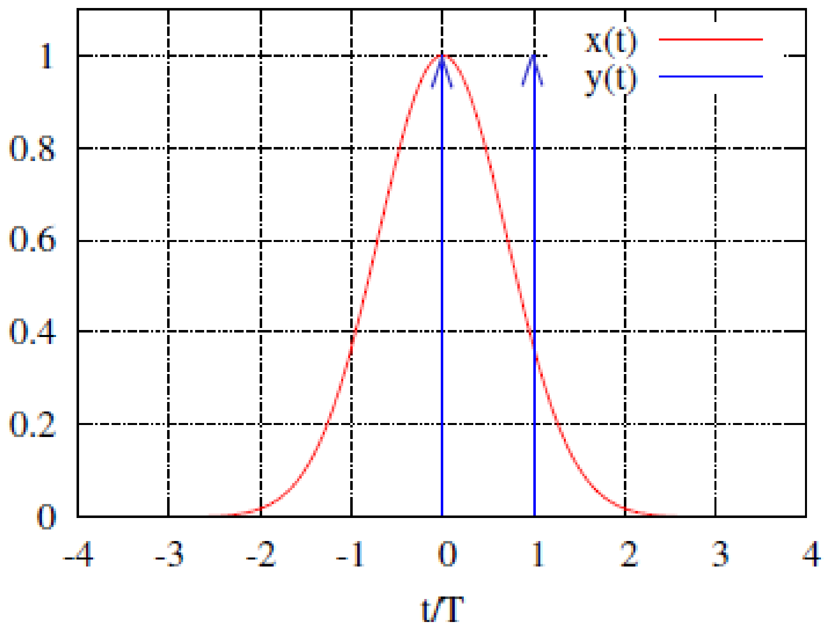
$$x(t) = e^{-(t/T)^2}$$

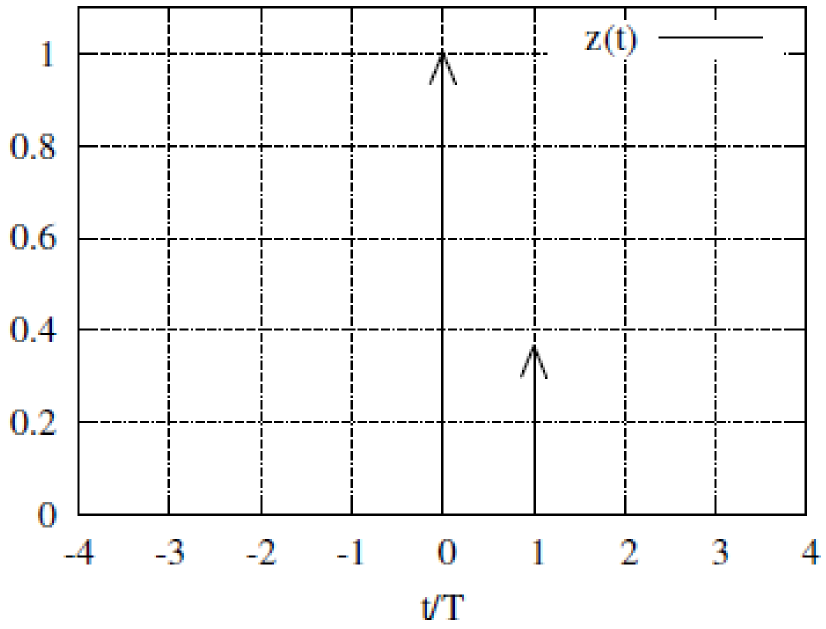
$$y(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$$

$$z(t) = x(t)\,y(t) = e^{-(t/T)^2}\left[\delta(t) + \delta(t-T)\right] =$$

$$= e^{-(t/T)^2}\delta(t) + e^{-(t/T)^2}\delta(t-T) =$$

$$= \delta(t) + e^{-1}\delta(t-T)$$

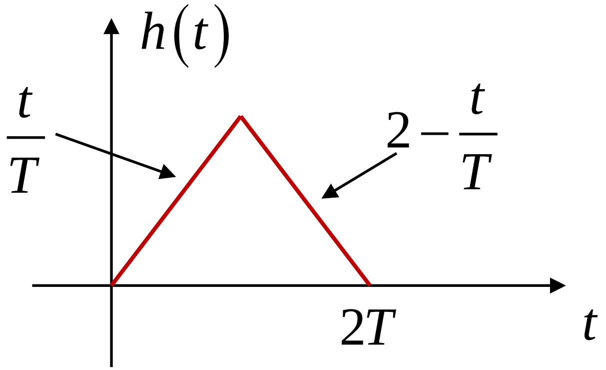




Soluzione Esercizio 4

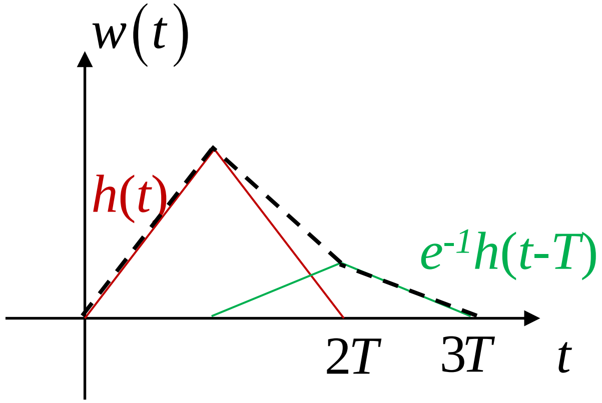
$$z(t)=\delta(t)+e^{-1}\delta(t-T)$$

$$h(t)=\mathrm{tri}\left(\frac{t-T}{T}\right)$$



$$w(t)=z(t)*h(t)=\left[\delta(t)+\frac{1}{e}\delta(t-T)\right]*h(t)=h(t)+e^{-1}h(t-T)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{t}{T} & 0\le t\le T\\ 2-\dfrac{t}{T}+e^{-1}\left(\dfrac{t-T}{T}\right) & T\le t\le 2T\\ e^{-1}\left(2-\dfrac{t-T}{T}\right) & 2T\le t\le 3T\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{t}{T} & 0\le t\le T\\ \left(2-e^{-1}\right)-\left(1-e^{-1}\right)\dfrac{t}{T} & T\le t\le 2T\\ e^{-1}\left(3-\dfrac{t}{T}\right) & 2T\le t\le 3T\end{cases}$$



Esercizio 5

Un'onda quadra $x(t)$ come quella mostrata in Figura 1 viene inviata in un sistema lineare con risposta all'impulso $h(t)$, mostrata in figura. Calcolare la risposta nel tempo $y(t)$ nei due casi $a = T$ e $a = 2T$.

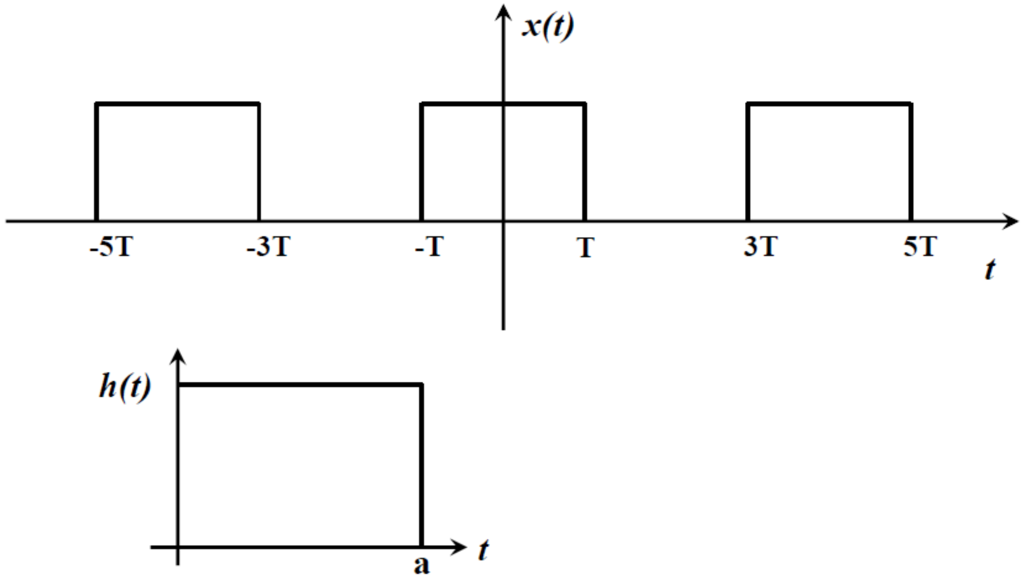


Figura 1: Esercizio 4.

Soluzione Esercizio 5

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{2T}(t-4nT) \qquad\qquad h(t)=p_a\left(t-\frac{a}{2}\right)$$

$$y(t)=h(t)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{2T}(t-4nT)=h(t)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_{2T}(t)*\delta(t-4nT)=$$

$$=\left(h(t)*p_{2T}(t)\right)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4nT)$$

$$y(t)=z(t)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4nT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(t-4nT)$$

con $\quad z(t)=h(t)*p_{2T}(t)=p_{2T}(t)*h(t)$

Soluzione Esercizio 5

- a=T

$$z(t) = p_{2T}(t) * p_T\left(t - \frac{T}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_T\left(\tau - \frac{T}{2}\right) p_{2T}(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^T p_{2T}(t-\tau)\,d\tau$$

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -T \quad \text{oppure} \quad t > 2T \\ t + T & -T \leq t \leq 0 \\ T & 0 \leq t \leq T \\ 2T - t & T \leq t \leq 2T \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 5

- *a*=2*T*

$$z(t) = p_{2T}(t) * p_{2T}(t-T) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{2T}(\tau - T) p_{2T}(t-\tau) d\tau =$$

$$= \int_{0}^{2T} p_{2T}(t-\tau) d\tau$$

$$z(t) = \begin{cases} 0 & t \le -T \quad \text{oppure} \quad t > 3T \\ t + T & -T \le t \le T \\ 3T - t & T \le t \le 3T \end{cases}$$

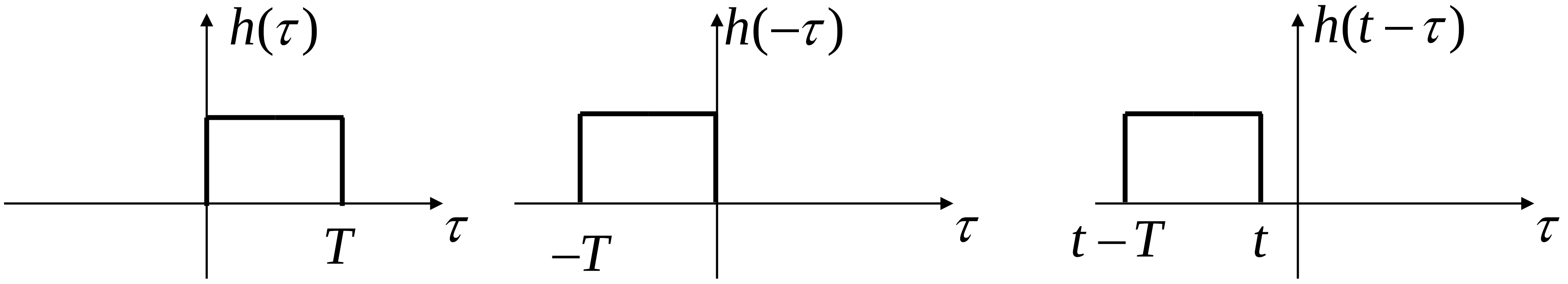
Esercizio 6

Si calcoli l'uscita $y(t)$ del sistema con risposta all'impulso $h(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$ quando l'ingresso è $x(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \theta\right)$. Per quali valori di f_0 il segnale $y(t)$ è nullo?

Soluzione esercizio 6

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta) \qquad h(t) = p_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$



$$y(t) = \int_{t-T}^{t} A\cos(2\pi f_0 \tau + \theta)\, d\tau = \frac{A}{2\pi f_0}\sin(2\pi f_0 \tau + \theta)\Big|_{t-T}^{t} = \frac{A}{2\pi f_0}\left[\sin(2\pi f_0 t + \theta) - \sin(2\pi f_0 (t-T) + \theta)\right]$$

Soluzione esercizio 6

$$y(t) = \frac{A}{2\pi f_0}\left[\sin(2\pi f_0 t + \theta) - \sin(2\pi f_0 (t - T) + \theta)\right]$$

- Applicando: $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
- Si ottiene:

$$y(t) = \frac{A}{2\pi f_0}\left[2\cos\left(\frac{4\pi f_0 t - 2\pi f_0 T + 2\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{2\pi f_0 T}{2}\right)\right] = \frac{A}{\pi f_0}\sin\left(\pi f_0 T\right)\cos\left(2\pi f_0 t - \pi f_0 T + \theta\right) =$$

$$= AT\,\frac{\sin\left(\pi f_0 T\right)}{\pi f_0 T}\cos\left(2\pi f_0 t - \pi f_0 T + \theta\right) = AT\,\mathrm{sinc}(f_0 T)\cos\left(2\pi f_0 t - \pi f_0 T + \theta\right)$$

- y(t) è una funzione identicamente nulla se

$$\mathrm{sinc}(f_0 T) = 0 \Longrightarrow f_0 T = k \quad (k \text{ intero}, k \neq 0) \Longrightarrow f_0 = \frac{k}{T}$$