Elaborazione dei Segnali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Lezione 3

Convoluzione e correlazione

A.A. 2023-2024

Convoluzione lineare

Convoluzione lineare

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La **convoluzione lineare** tra due sequenze discrete è definita come:

$$q(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\,y(n-k)$$

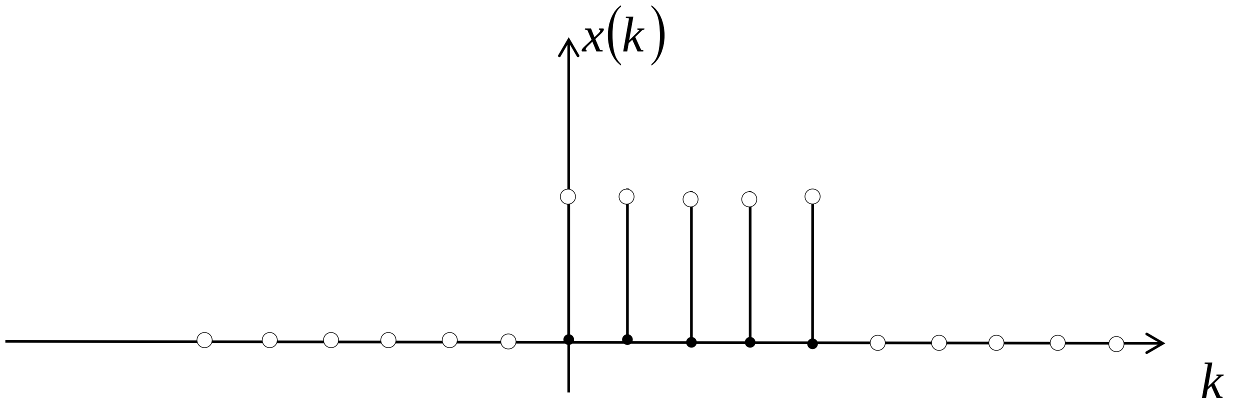
Esempio 1

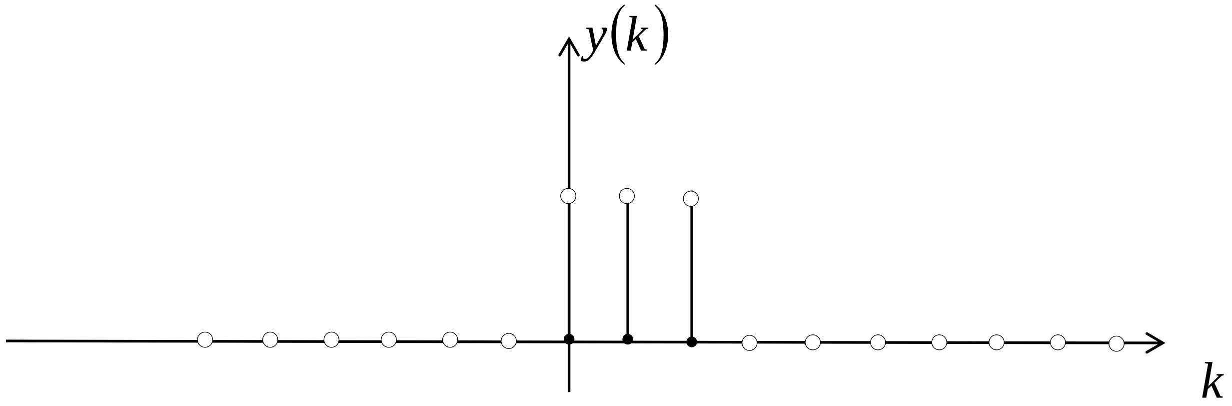
POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Si calcoli

$$x(n) = u(n) - u(n-5)$$
$$y(n) = u(n) - u(n-3)$$

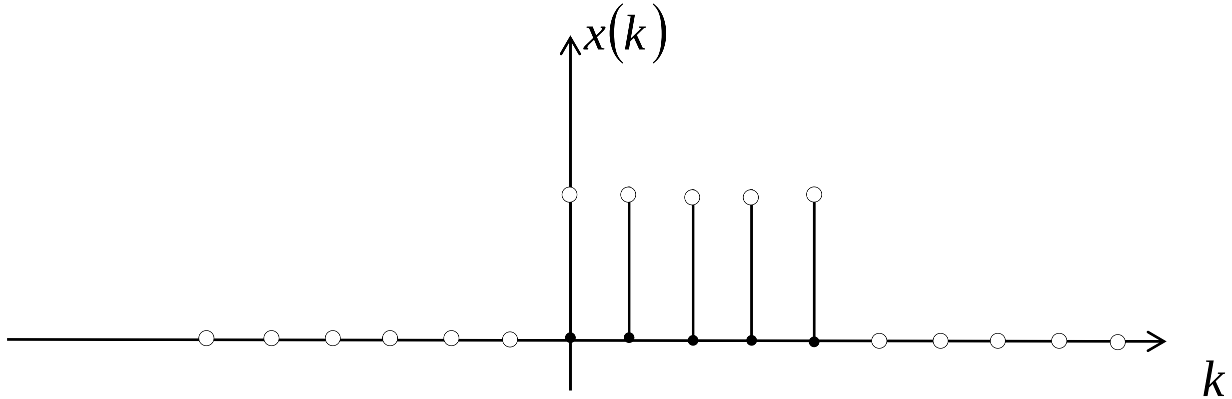
$$q(n) = x(n) * y(n)$$

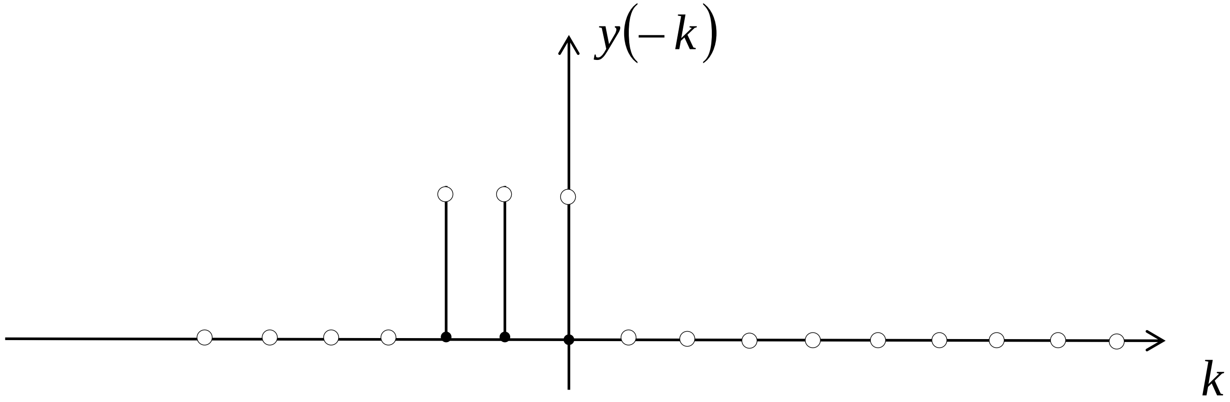




Esempio 1

$$q(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, y(n-k)$$

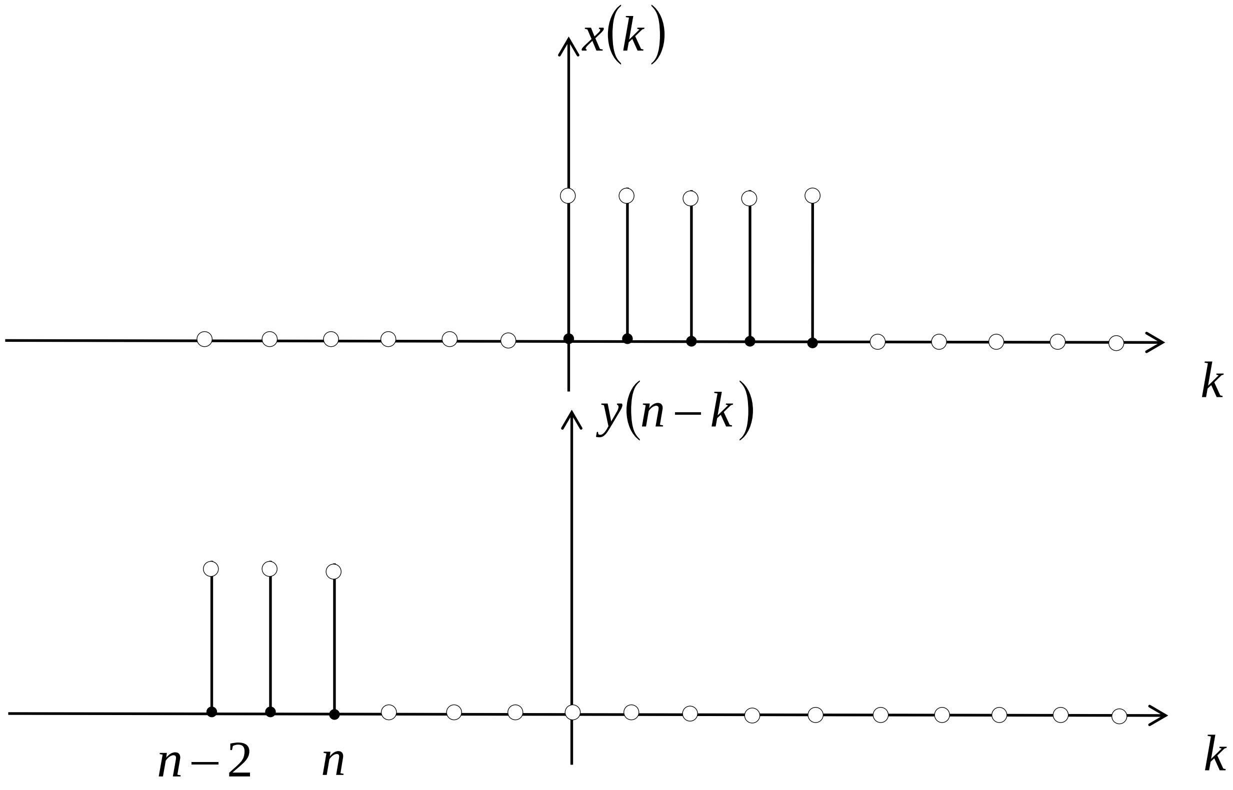




Esempio 1

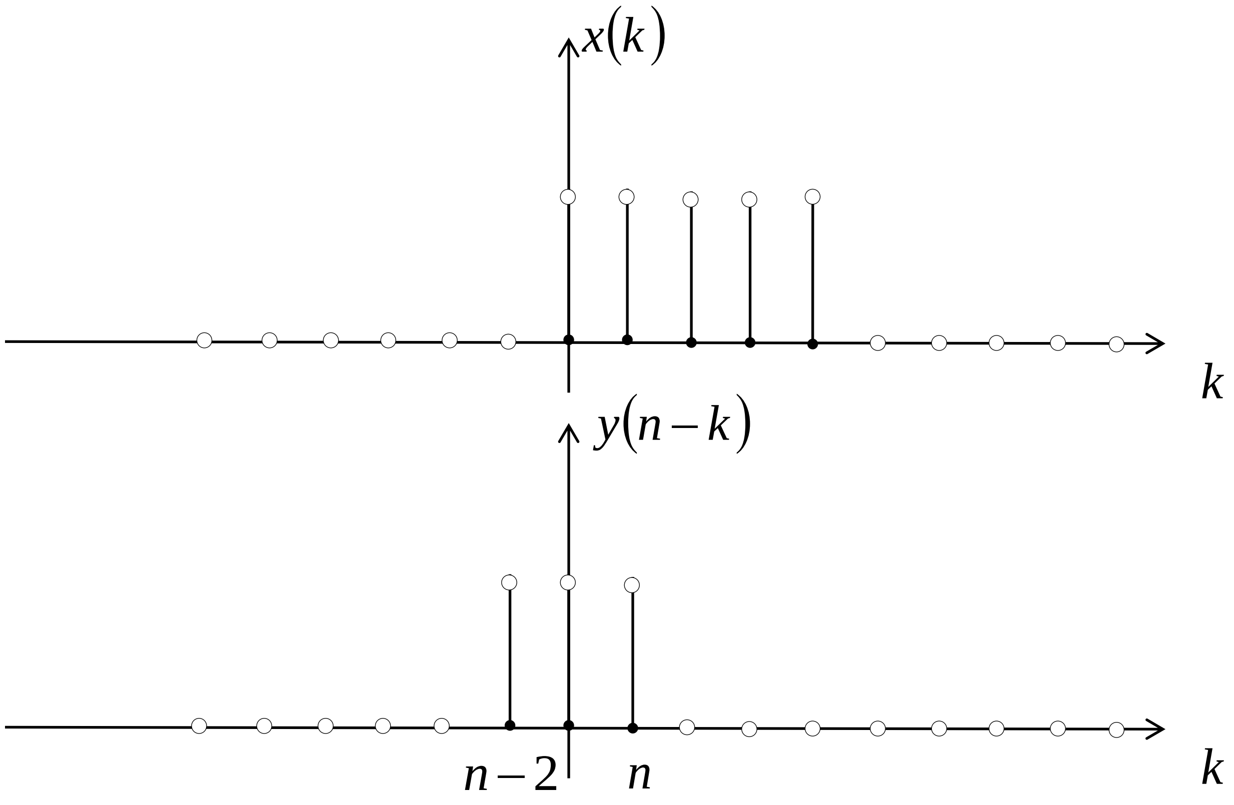
POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- n<0: Le due sequenze sono temporalmente disgiunte →Il prodotto tra le due sequenze è nullo per qualunque valore di k → q(n)=0



Esempio 1

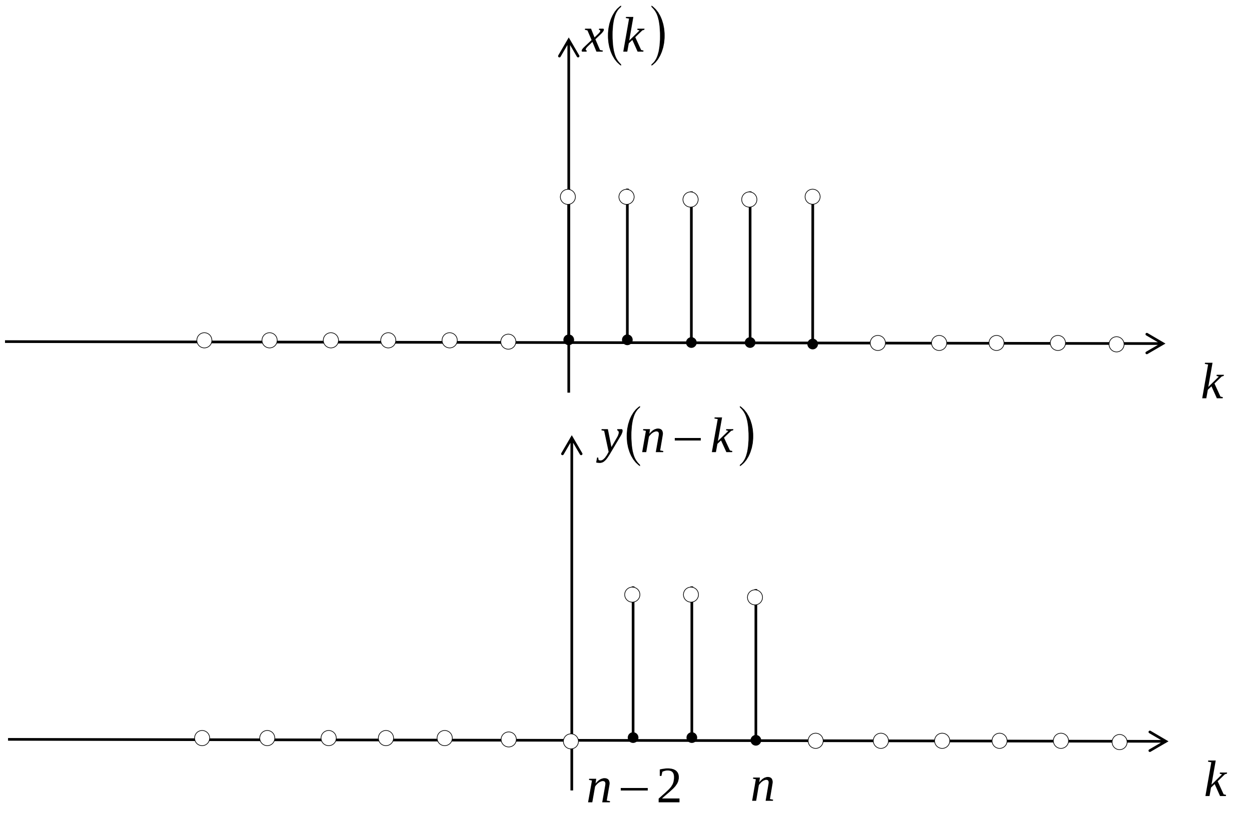
- n∈[0,1]: $q(n)=\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$



Esempio 1

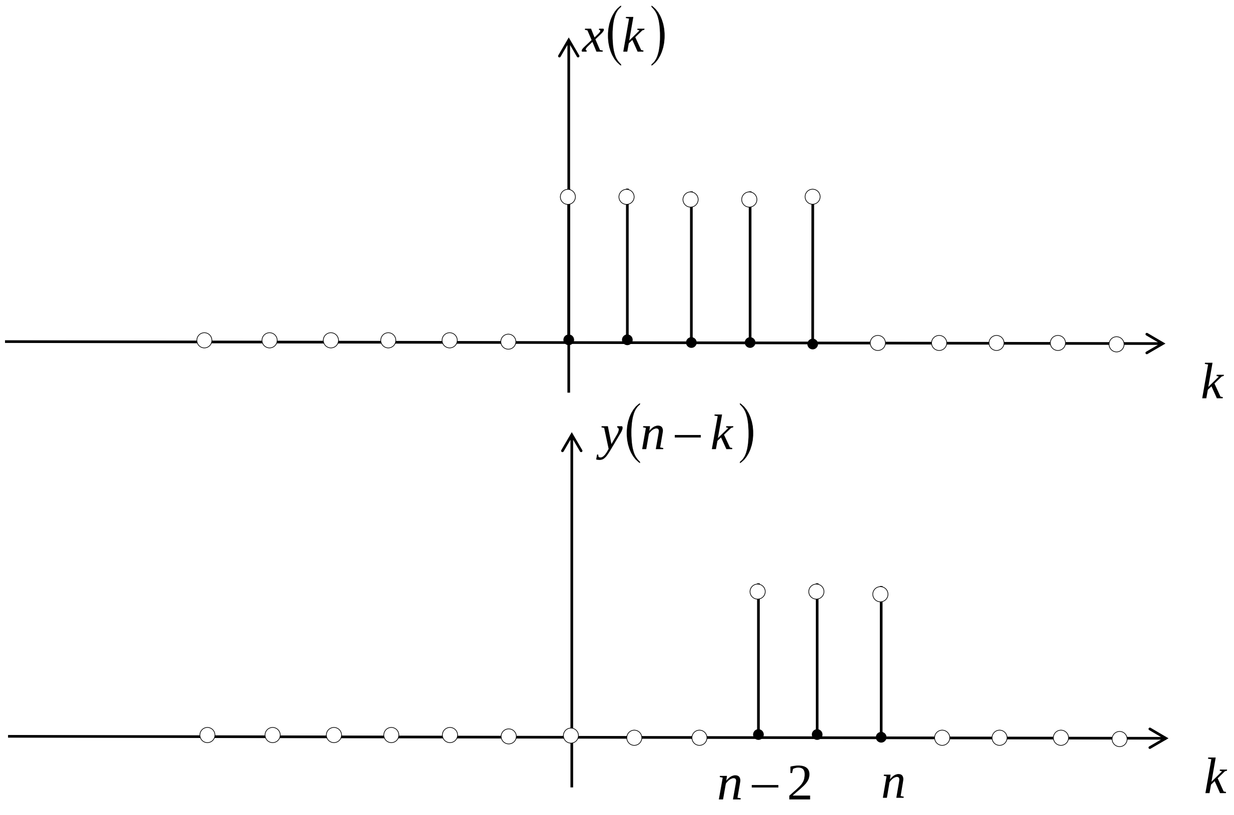
POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- n∈[2,4]: $q(n) = \sum_{k=n-2}^{n} 1 = 3$



Esempio 1

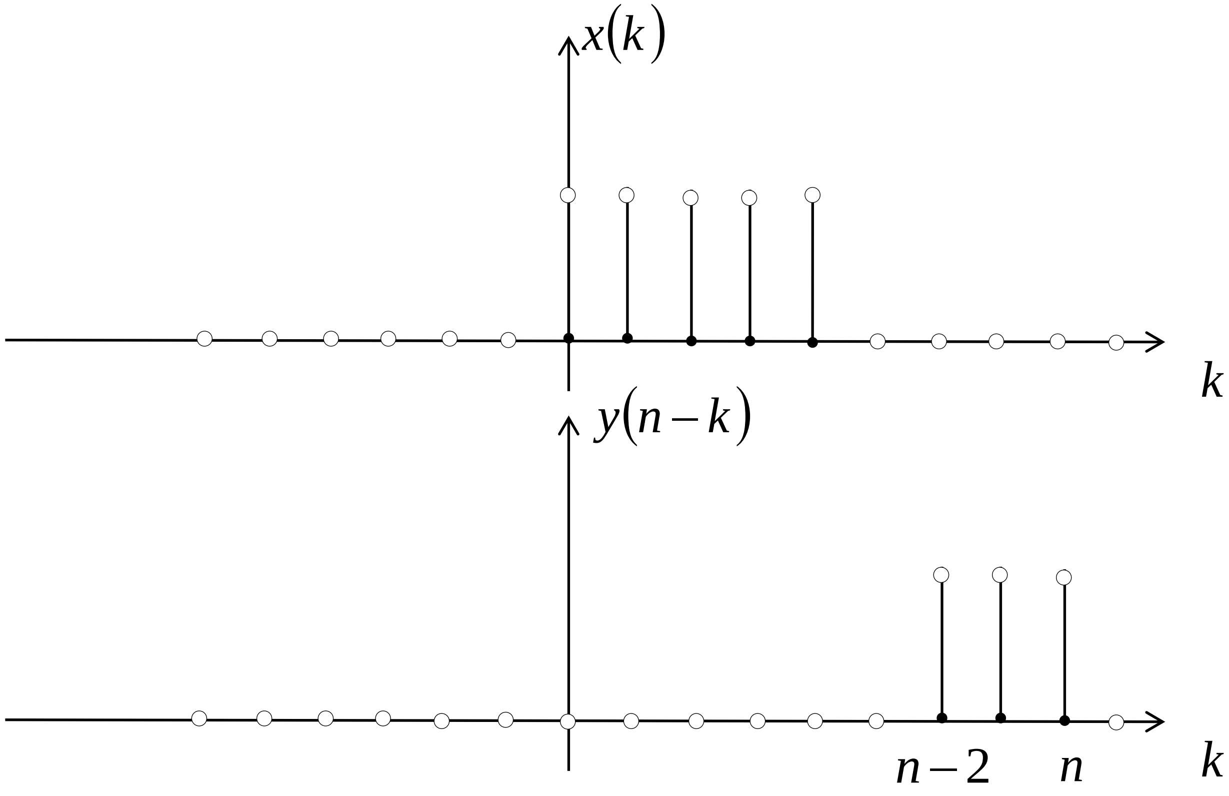
- n∈[5,6]: $$q(n)=\sum_{k=n-2}^{4}1=4-(n-2)+1=7-n$$



Esempio 1

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

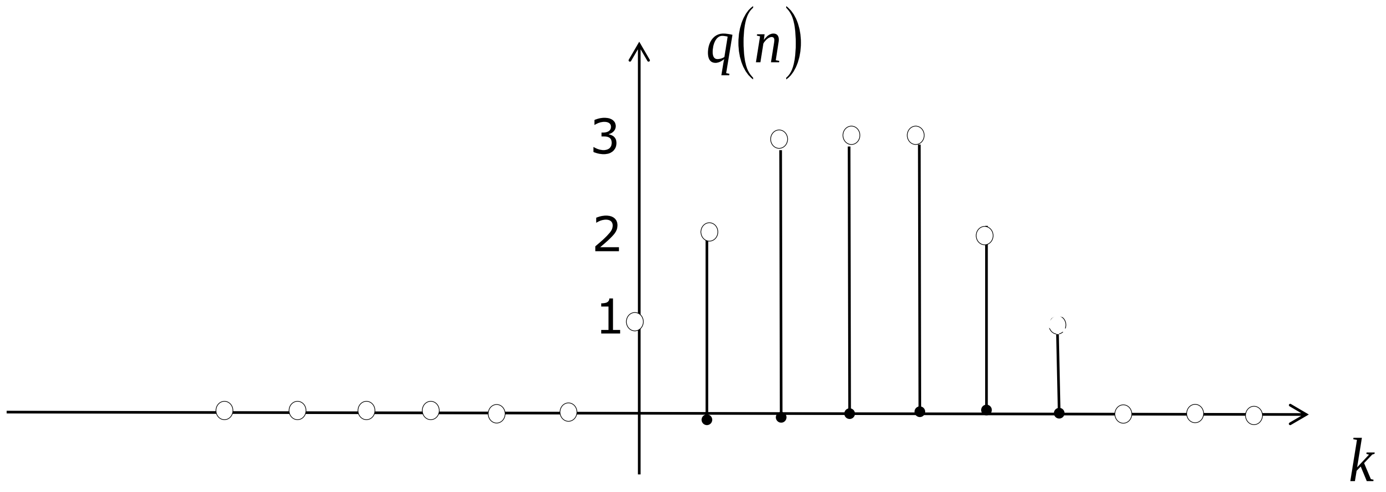
- n>6: Le due sequenze sono temporalmente disgiunte → Il prodotto tra le due sequenze è nullo per qualunque valore di k → q(n)=0



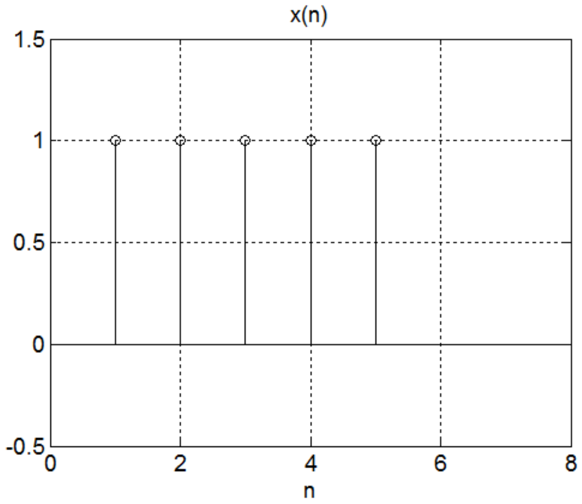
Esempio

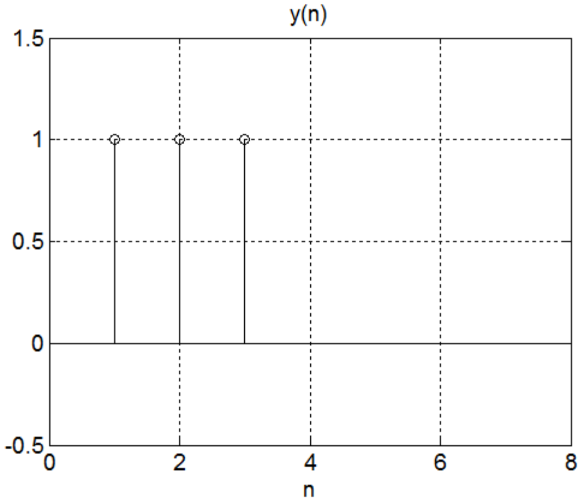
POLITECNICO
DI TORINO
Dipartimento
di Elettronica
e Telecomunicazioni

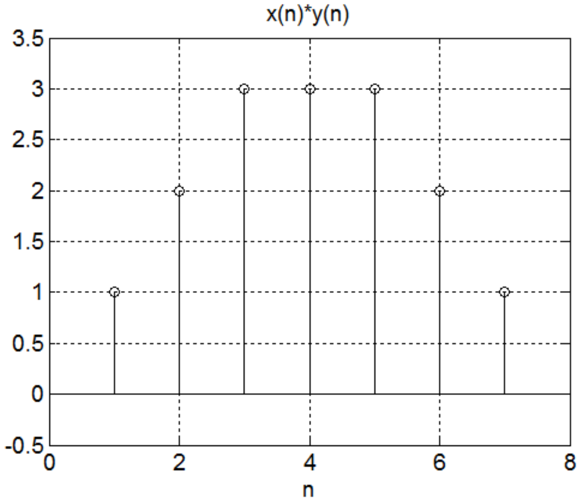
- Mettendo tutto insieme, otteniamo l'andamento di q(n):



Esempio 1








```
x=ones(1,5);
y=ones(1,3);
z=conv(x,y);

figure
set(gca,'FontSize',14)
stem(z,'k')
xlabel('n')
title('x(n)*y(n)')
axis([0 8 -0.5 3.5])
grid on
```

Proprietà

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Il supporto della convoluzione è pari alla somma dei singoli supporti meno 1.

- Proprietà commutativa:

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k)x(n-k)$$

- Proprietà distributiva:

$$x(n) * [y(n) + z(n)] = x(n) * y(n) + x(n) * z(n)$$

- Proprietà associativa:

$$x(n) * [y(n) * z(n)] = [x(n) * y(n)] * z(n)$$

Esempio 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Calcolare la convoluzione tra le sequenze:

$$x(n) = \{\underline{1},0,2,3\} \qquad y(n) = \{\underline{1},2,2\}$$

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$$

$$x(k) = \{0,0,\underline{1},0,2,3,0,0\}$$

$$z(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(-k) = 1 \qquad y(-k) = \{2,2,\underline{1},0,0,0,0,0\}$$

$$z(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(1-k) = 2 \qquad y(1-k) = \{0,2,\underline{2},1,0,0,0,0\}$$

$$z(2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(2-k) = 4 \qquad y(2-k) = \{0,0,\underline{2},2,1,0,0,0\}$$

Esempio 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x(k) = \{0,0,\underline{1},0,2,3,0,0\}$$

$$z(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(-k) = 1 \qquad y(-k) = \{2,2,\underline{1},0,0,0,0,0\}$$

$$z(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(1-k) = 2 \qquad y(1-k) = \{0,2,\underline{2},1,0,0,0,0\}$$

$$z(2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(2-k) = 4 \qquad y(2-k) = \{0,0,\underline{2},2,1,0,0,0\}$$

$$z(3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(3-k) = 7 \qquad y(3-k) = \{0,0,\underline{0},2,2,1,0,0\}$$

$$z(4) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(4-k) = 10 \qquad y(4-k) = \{0,0,\underline{0},0,2,2,1,0\}$$

$$z(5) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(5-k) = 6 \qquad y(5-k) = \{0,0,\underline{0},0,0,2,2,1\}$$

$$z(n) = \{\underline{1},2,4,7,10,6\}$$

Esempio 3

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Calcolare la convoluzione tra x(n) e h(n):

$$x(n) = u(n) - u(n-3) \qquad\qquad h(n) = a^n u(n) \quad 0 < a < 1$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) h(n-i) = \sum_{i=0}^{2} a^{n-i} u(n-i) =$$

$$= a^n \sum_{i=0}^{2} a^{-i} u(n-i)$$

- I campioni di u(n-i) sono pari a 1 per n-i≥0, e nulli per n-i<0.

Esempio 3

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- n=0,1,2

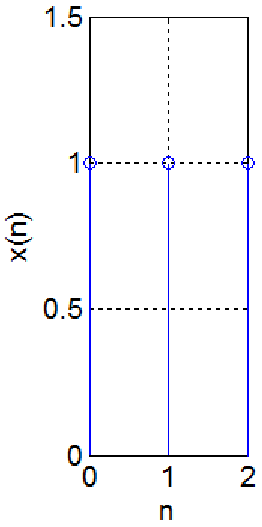
$$y(n)=a^n\sum_{i=0}^{n}a^{-i}=a^n\frac{1-a^{-n-1}}{1-a^{-1}}=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\qquad n=0,1,2$$

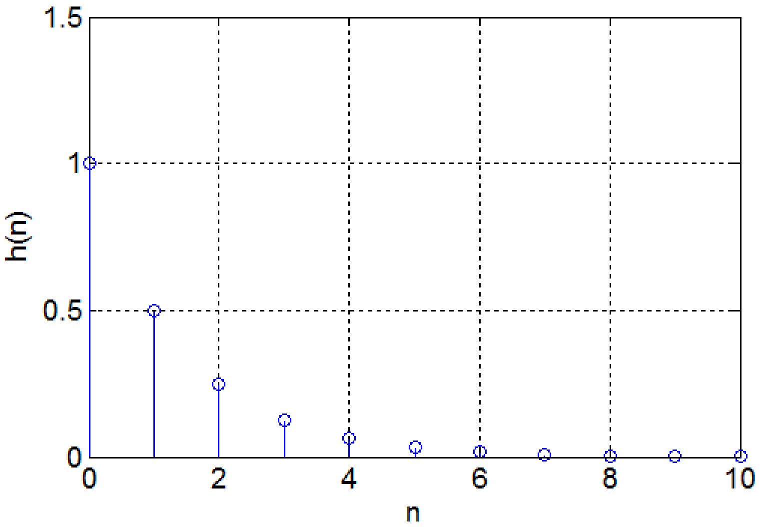
- n>2

$$y(n)=a^n\sum_{i=0}^{2}a^{-i}=a^n\frac{1-a^{-3}}{1-a^{-1}}=\frac{a^{n+1}-a^{n-2}}{a-1}\qquad n\geq 2$$

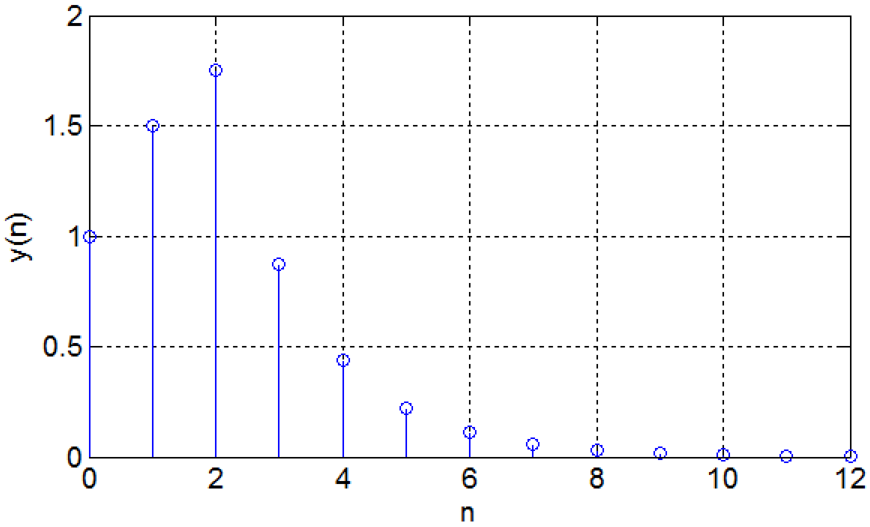
Esempio 3

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni





a=0.5



Esempio 3 – codice Matlab

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

```
a=0.5;
nh=11;
n=[0:nh-1];
h=a.^n;
nx=3;
x=ones(1,nx);
y=conv(x,h);

figure
set (gca,'FontSize',14)
stem([0:nx-1],x)
xlabel('n')
ylabel('x(n)')
axis([0 nx-1 0 1.5])
grid on
```

```
figure
set (gca,'FontSize',14)
stem([0:nh-1],h)
xlabel('n')
ylabel('h(n)')
axis([0 nh-1 0 1.5])
grid on


figure
set (gca,'FontSize',14)
stem([0:nx+nh-2],y)
xlabel('n')
ylabel('y(n)')
axis([0 nx+nh-2 0 2])
grid on
```

Funzioni di correlazione di segnali a tempo discreto

Mutua-correlazione

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La funzione di correlazione tra due sequenze x(n) e y(n) a energia finita viene usata per misurare il grado relativo di similarità.
- E' definita come:

$$R_{x,y}(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x^{*}(k+n)y(k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x^{*}(k)y(k-n)$$

- Invertendo x e y:

$$R_{y,x}(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}y^{*}(k+n)x(k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}y^{*}(k)x(k-n)$$

(*) La notazione usata in queste slides per definire le funzioni di correlazione è la stessa del libro "Elaborazione numerica dei segnali" (per segnali reali, le due definizioni coincidono)

Mutua-correlazione

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Confrontando le due definizioni, è immediato ricavare che, nel caso di sequenze reali:

$$R_{x,y}(n) = R_{y,x}(-n)$$

- Questo vuol dire che entrambe le sequenze di mutua-correlazione differiscono solo per un ribaltamento → forniscono la stessa informazione sulla similarità delle sequenze.

Auto-correlazione

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Quando y(n)=x(n), si definisce la funzione di auto-correlazione:

$$R_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k+n)x(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k)x(k-n)$$

- Nell' origine coincide con l'energia:

$$R_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 = E_x$$

Segnali a potenza media finita

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Nel caso di sequenze a potenza media finita, si possono ancora definire le funzioni di correlazione nel seguente modo:

$$\Phi_{x,y}(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x^*(k+n)y(k)$$

$$\Phi_{x}(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x^*(k+n)x(k)$$

- Nel caso di sequenze periodiche di periodo N:

$$\Phi_{x,y}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k+n)y(k)$$

$$\Phi_{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k+n)x(k)$$

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Esempio

- Calcolare la mutua correlazione tra le sequenze:

$$x(n) = \{\underline{1},0,2,3\} \qquad y(n) = \{\underline{1},2,2\}$$

$$R_{x,y}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-n)$$

$$x(k) = \{0,0,\underline{1},0,2,3,0,0\}$$

$$R_{x,y}(-2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k+2) = 2 \qquad y(k+2) = \{1,2,\underline{2},0,0,0,0,0\}$$

$$R_{x,y}(-1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k+1) = 2 \qquad y(k+1) = \{0,1,\underline{2},2,0,0,0,0\}$$

$$R_{x,y}(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k) = 5 \qquad y(k) = \{0,0,\underline{1},2,2,0,0,0\}$$

Esempio

$$x(k) = \{0,0,\underline{1},0,2,3,0,0\}$$

$$R_{x,y}(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-1) = 10 \qquad y(k-1) = \{0,0,\underline{0},1,2,2,0,0\}$$

$$R_{x,y}(2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-2) = 8 \qquad y(k-2) = \{0,0,\underline{0},0,1,2,2,0\}$$

$$R_{x,y}(3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-3) = 3 \qquad y(k-3) = \{0,0,\underline{0},0,0,1,2,2\}$$

$$R_{x,y}(n) = \{2,2,\underline{5},10,8,3\}$$

Esempio

- Inverto x e y:

$$x(n)=\{\underline{1},0,2,3\} \qquad y(n)=\{\underline{1},2,2\}$$

$$R_{y,x}(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)y(k+n)$$

$$x(k)=\{0,0,\underline{1},0,2,3,0,0\}$$

$$R_{y,x}(2)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)y(k+2)=2 \qquad y(k+2)=\{1,2,\underline{2},0,0,0,0,0\}$$

$$R_{y,x}(1)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)y(k+1)=2 \qquad y(k+1)=\{0,1,\underline{2},2,0,0,0,0\}$$

$$R_{y,x}(0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)y(k)=5 \qquad y(k)=\{0,0,\underline{1},2,2,0,0,0\}$$

Esempio

$$x(k) = \{0,0,\underline{1},0,2,3,0,0\}$$

$$R_{y,x}(-1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-1) = 10 \qquad y(k-1) = \{0,0,\underline{0},1,2,2,0,0\}$$

$$R_{y,x}(-2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-2) = 8 \qquad y(k-2) = \{0,0,\underline{0},0,1,2,2,0\}$$

$$R_{y,x}(-3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-3) = 3 \qquad y(k-3) = \{0,0,\underline{0},0,0,1,2,2\}$$

$$R_{y,x}(n) = \{3,8,10,\underline{5},2,2\}$$

Esempio

- Calcolo l'autocorrelazione di x:

$$x(n)=\{\underline{1},0,2,3\} \qquad R_x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)x(k-n)$$

$$x(k)=\{0,0,0,\underline{1},0,2,3,0,0,0\}$$

$$R_x(-3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)x(k+3)=3 \qquad x(k+3)=\{1,0,2,\underline{3},0,0,0,0,0,0\}$$

$$R_x(-2)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)x(k+2)=2 \qquad x(k+2)=\{0,1,0,\underline{2},3,0,0,0,0,0\}$$

$$R_x(-1)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)x(k+1)=6 \qquad x(k+1)=\{0,0,1,\underline{0},2,3,0,0,0,0\}$$

$$R_x(0)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)x(k)=14 \qquad x(k)=\{0,0,0,\underline{1},0,2,3,0,0,0\}$$

Esempio

$$x(k)=\{0,0,0,\underline{1},0,2,3,0,0,0\}$$

$$R_x(1)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)x(k-1)=6 \qquad x(k-1)=\{0,0,0,\underline{0},1,0,2,3,0,0\}$$

$$R_x(2)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)x(k-2)=2 \qquad x(k-2)=\{0,0,0,\underline{0},0,1,0,2,3,0\}$$

$$R_x(3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)x(k-3)=3 \qquad x(k-3)=\{0,0,0,\underline{0},0,0,1,0,2,3\}$$

$$R_x(n)=\{3,2,6,\underline{14},6,2,3\}$$