Teoria dei Segnali

- Processi casuali, seconda parte:
  - Stazionarietà

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Introduzione ai processi stazionari

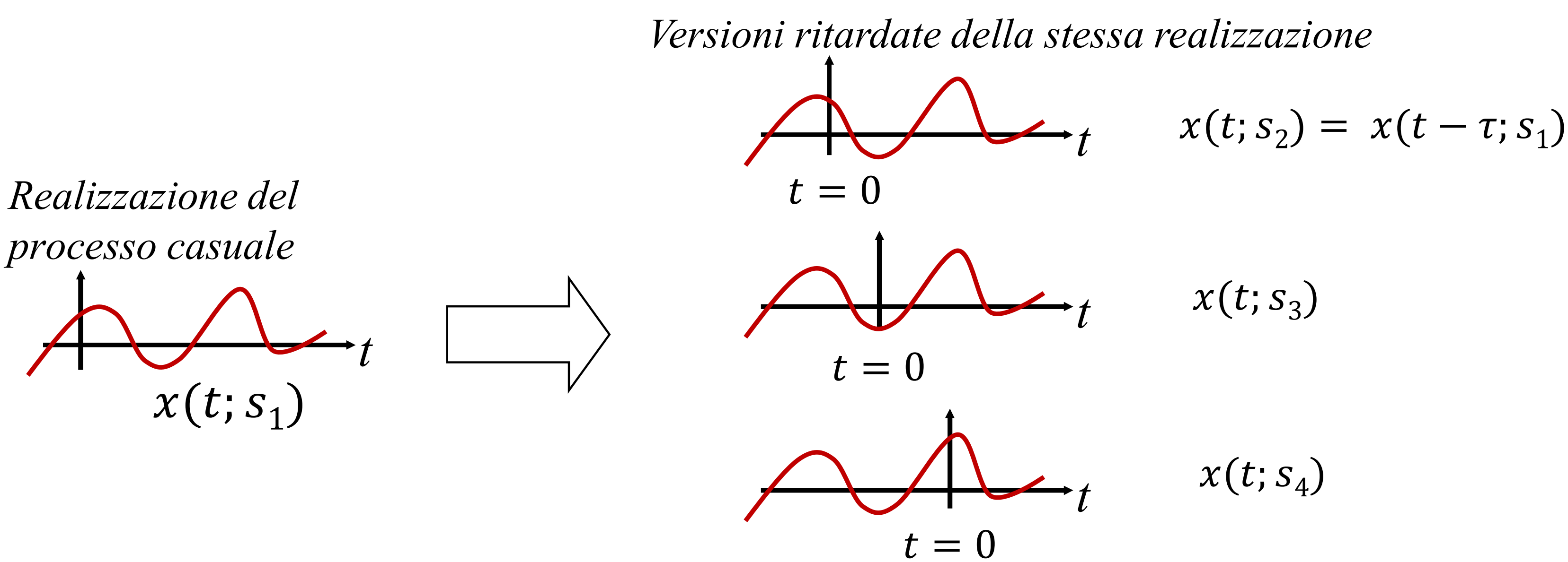
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- In molti processi casuali che descrivono fenomeni fisici, l'origine dell'asse dei tempi (cioè l'istante $t = 0$) per un segnale non è rilevante
  - Ad esempio, il rumore termico ai capi di una resistenza, dovuto al movimento casuale di un elevatissimo numero di elettroni, NON ha un «orologio interno» che stabilisca quale sia l'istante $t = 0$ per gli elettroni
  - Questo è solo un esempio di un processo fisico che ha una «regolarità» rispetto all'asse dei tempi
    - Molti altri tipi di processi casuali di interesse pratico hanno caratteristiche simili

- Queste premesse introducono al concetto di stazionarietà

Definizione di stazionarietà

- **Definizione generale di processo stazionario**
  - Se un certo segnale appartiene al processo casuale (=insieme dei segnali possibili) anche tutte le sue repliche traslate di un qualsiasi valore appartengono al processo ed hanno la stessa probabilità



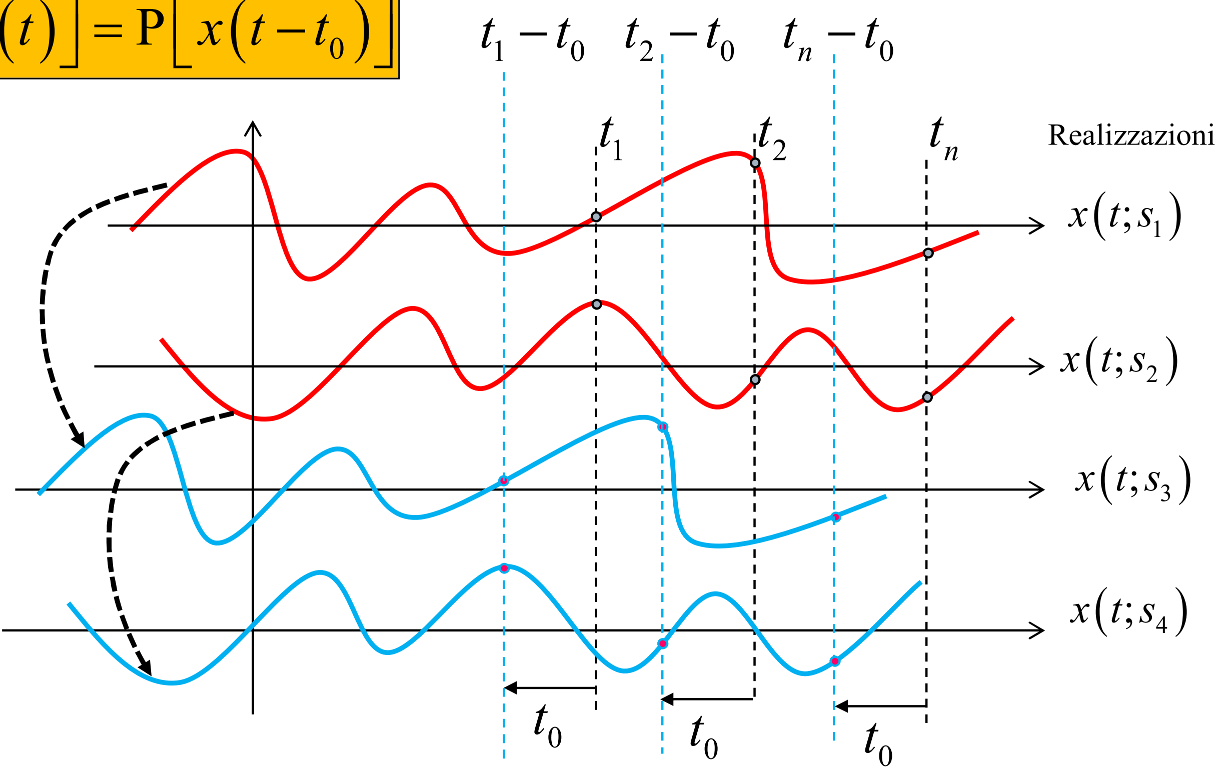
Intepretazione stazionarietà

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

In formule:

$$\text{se } x(t) \in \mathcal{P} \rightarrow \forall t_0 \begin{cases} x(t - t_0) \in \mathcal{P} \\ \mathrm{P}[x(t)] = \mathrm{P}[x(t - t_0)] \end{cases}$$

Tutte le repliche traslate nel tempo devono esistere ed avere la stessa probabilità per ogni t_0



Processi stazionari

- La precedente proprietà implica che le statistiche congiunte tra n campioni non dipendano dall'origine dell'asse dei tempi ma solo dalla differenza di tempo tra i vari campioni

$$f_X\left(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n\right)=f_X\left(x_1,\ldots,x_n;t_1+t_0,\ldots,t_n+t_0\right)\forall t_0$$

- Ponendo $t_0=-t_1$ si ottiene la seguente proprietà per la statistica del primo ordine per un processo stazionario

$$f_X\left(x_1;t_1\right)=f_X\left(x_1;t_1-t_1\right)=f_X\left(x_1;0\right)$$

In sostanza, per un processo casuale stazionario la statistica del primo ordine coincide con una "usuale" densità di probabilità, senza la dipendenza dal tempo (cioè COSTANTE nel tempo)

Processi stazionari

- Per quanto riguarda le statistiche del secondo ordine, ponendo $t_0 = -t_1$ in $f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + t_0, t_2 + t_0)$ otteniamo

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = f_X(x_1, x_2; 0, \tau)$$

Dipende solo da una singola variabile temporale, pari alla differenza tra i due tempi di "osservazione"

$$\tau = t_2 - t_1$$

- Più in generale le statistiche di ordine n sono quindi funzioni di $n-1$ variabili che rappresentano la differenza di tempo tra i vari campioni temporali

$$f_X(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_X(x_1, \dots, x_n; \tau_1, \dots, \tau_{n-1})$$

Processi stazionari (in senso stretto)

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- I processi per cui vale:

Questa notazione indica che la relazione deve valere per tutti gli ordini m fino ad un certo n

$$f_X\left(x_1,\ldots,x_m;t_1,\ldots,t_m\right) \Rightarrow f_X\left(x_1,\ldots x_m;\tau_1,\ldots,\tau_{m-1}\right) \quad \forall m \le n$$

- Sono detti processi stazionari in senso stretto di ordine *n*
  - Le statistiche di ordine *n* dipendono da $n-1$ variabili, che rappresentano la differenza di tempo rispetto al primo campione, che si può sempre assumere nell'origine

- Useremo soprattutto la statistica del primo ordine, indicandola semplicemente come $f_X(x)$

Proprietà delle medie di insieme per processi stazionari

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Se il processo è stazionario in senso stretto di ordine 1, possiamo calcolare la media come:

$$m_X(t) = \int x f_X(x;t)\,dx = \int x f_X(x;0)\,dx = m_X \Rightarrow$$

La media NON dipende dal tempo

- Inoltre, se il processo è stazionario in senso stretto di ordine 2, l'autocorrelazione vale:

$$R_X(t_1,t_2) = \int x_1 x_2^* f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1 dx_2 = \int x_1 x_2^* f_X(x_1,x_2;0,\tau)\,dx_1 dx_2 = R_X(\tau)$$

$\Rightarrow$ L'autocorrelazione è funzione solo della differenza tra i due tempi di osservazione

$$\tau = t_2 - t_1$$

Processi stazionari in senso lato

- Un processo si dice **stazionario in senso lato** (Wide Sense Stationary WSS) quando le precedenti proprietà valgono per la media e l'autocorrelazione
  - In formule:

$$m_X(t) = m_X$$

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2)$$

Stazionarietà in senso lato (WSS):
- Media costante nel tempo
- Autocorrelazione dipendente solo dalla differenza dei due tempi

- Sistemi stazionari del secondo ordine in senso stretto sono anche WSS ma non viceversa
  - Cioè: il fatto che siano verificate le due condizioni per media e autocorrelazione **non implica** che siano verificate le condizioni di stazionarietà per le densità di probabilità

Commenti su autocorrelazione per processi WSS

- Per processi WSS la funzione di autocorrelazione assume un ruolo molto rilevante
  - come vedremo nel capitolo successivo è fondamentale per quanto riguarda l'analisi spettrale dei processi casuali
- Per un processo WSS possiamo scrivere:

$$\boxed{R_X(\tau) = E\left\{X(t)\,X^*(t+\tau)\right\}}$$

introducendo: $\tau = t_1 - t_2$

Proprietà di simmetria dell'autocorrelazione per processi stazionari in senso lato

$$\boxed{R_X(\tau) = R_X^*(-\tau)}$$

SE $X(t)$ è reale, allora **l'autocorrelazione è sempre una funzione pari**

Dimostrazione:

$$R_X(\tau) = E\left[x(t)x^*(t+\tau)\right]$$

$$R_X^*(\tau) = \left(E\left[x(t)x^*(t+\tau)\right]\right)^* = E\left[x^*(t)x(t+\tau)\right]$$

$$\text{sia: } t+\tau = t_1 \Rightarrow R_X^*(\tau) = E\left[x^*(t_1-\tau)x(t_1)\right]$$

$$R_X^*(\tau) = E\left[x^*(t_1-\tau)x(t_1)\right] = E\left[x(t_1)x^*(t_1-\tau)\right] = R_X(-\tau)$$

$$\text{e dunque: } R_X^*(\tau) = R_X(-\tau)$$

$$\text{analogamente: } R_X(\tau) = R_X^*(-\tau)$$

Commenti su autocorrelazione per processi WSS

- Se consideriamo il valore in $\tau = 0$ otteniamo il valor quadratico medio. Infatti:

$$R_X(\tau)|_{\tau=0} = E\{X(t)X^*(t+\tau)\}\,|_{\tau=0} = E\{|X(t)|^2\}$$

E nel caso $X(t)$ reale dunque:

$$R_X(0) = E\{X(t)^2\}$$

- Se consideriamo $\tau \to \infty$ tendente a infinito, le due variabili casuali sono estratte dal processo a istanti infinitamente distanti nel tempo e tendono quindi ad essere statisticamente indipendenti, per cui si ha:

$$E\left\{X^*(t+\tau)\right\} = \left(E\left\{X(t+\tau)\right\}\right)^* = m_x^*$$

$$R_X(\tau)|_{\tau\to\infty} = E\{X(t)X^*(t+\tau)\}\,|_{\tau\to\infty} = E\{X(t)\}\,E\{X^*(t+\tau)\} = |m_X|^2$$

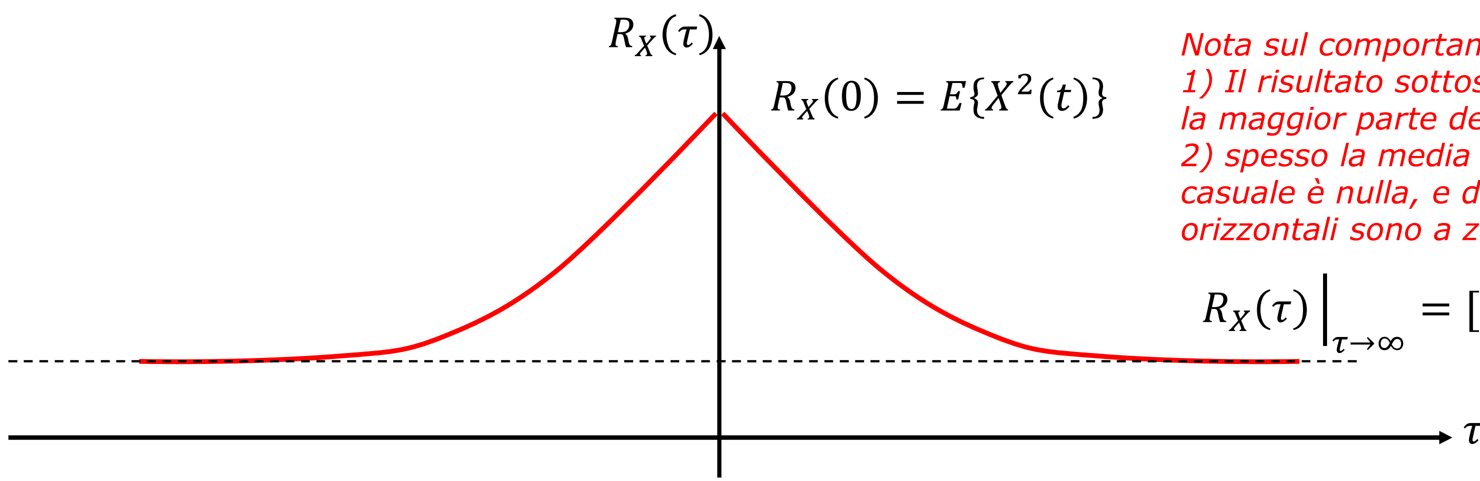
E nel caso $X(t)$ reale dunque:

$$R_X(\tau)\Big|_{\tau\to\infty} = m_X^2$$

Riassunto proprietà autocorrelazione per processi WSS

Nel caso di processo $X(t)$ reale si ha dunque che l'autocorrelazione è:

- Pari
- Nell'origine coincide con il valore quadratico medio
  - Si dimostra inoltre che questo è il valore massimo, cioè $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)\ \forall\tau$
- Nela maggior parte dei casi "fisici" ha asintoti orizzontali pari al quadrato della media (si veda slide successiva per ulteriori dettagli)



Nota sul comportamento agli asintoti:
1) Il risultato sottostante è vero per la maggior parte dei processi "fisici"
2) spesso la media di un processo casuale è nulla, e dunque gli asintoti orizzontali sono a zero

$$R_X(\tau)\Big|_{\tau\to\infty} = [E\{X(t)\}]^2 = m_X^2$$

Comportamento dell'autocorrelazione per $\tau \to \infty$

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- solitamente:

$$\lim_{\tau\to\infty} R_X(\tau) = \lim_{\tau\to\infty}\left(E\left\{X(t)X^*(t+\tau)\right\}\right) = E\left\{X(t)\right\}\cdot E\left\{X^*(t+\tau)\right\} = |m_x|^2$$

- Per molti processi casuali fisici è inoltre tipico che la media sia nulla, e dunque in tal caso gli asintoti vanno a zero

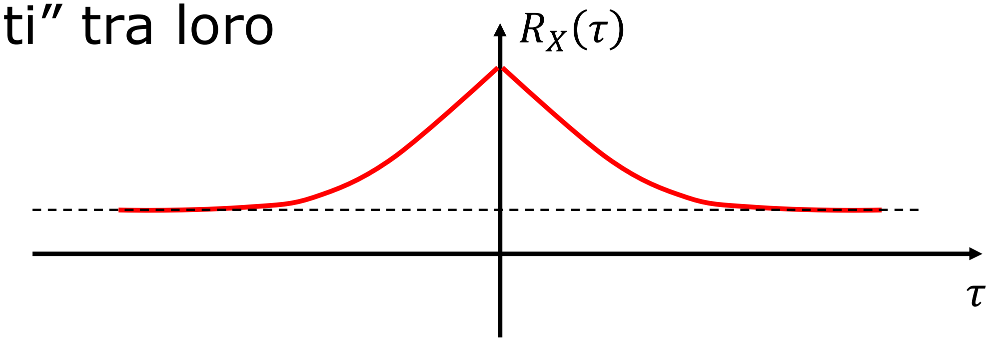
Comportamento dell'autocorrelazione per $\tau \rightarrow \infty$
Eccezioni

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Esistono tuttavia processi casuali "matematici" che non soddisfano le condizioni del caso precedente, cioè che mantengono una correlazione temporale anche per tempi infiniti
- Ad esempio: processo casuale $X(t) = A$ con A variabile casuale a media nulla
  - Insieme di realizzazioni costituite da segnali costanti nel tempo
- In questo caso: $R_X(\tau) = E\left\{X(t)X^*(t+\tau)\right\} = E\left\{A^2\right\} \neq |m_x|^2$

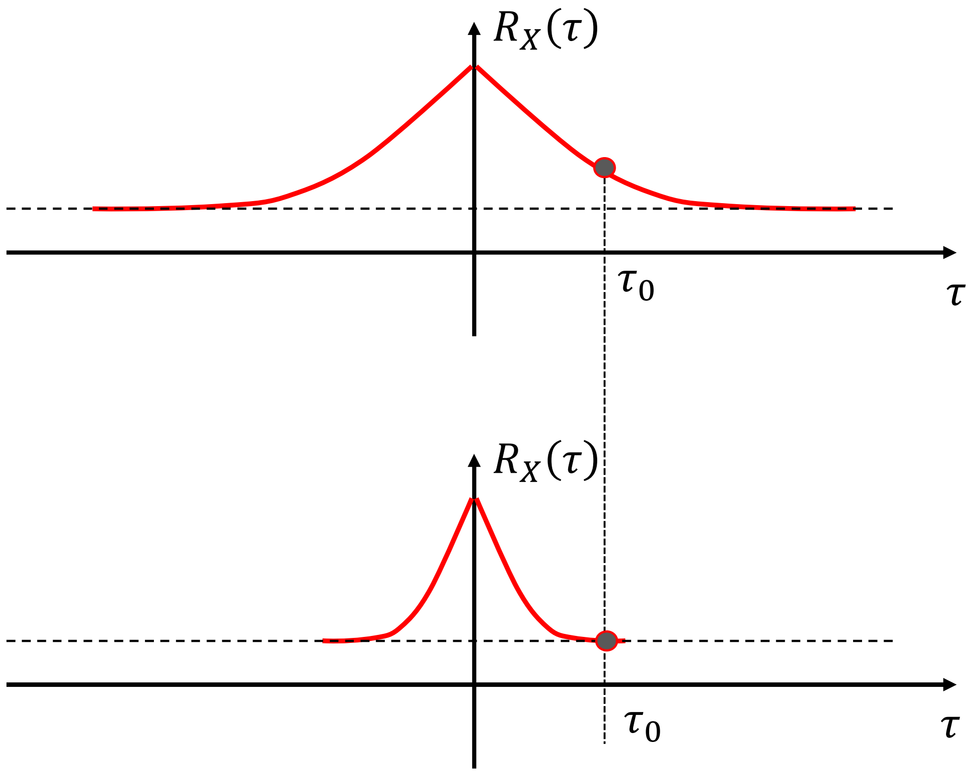
Commenti su autocorrelazione per processi WSS

- In generale, osservando l'andamento della funzione di autocorrelazione è possibile estrarre informazioni qualitative sul comportamento del processo
- Dato un certo valore di τ, ci dice quanto due valori del processo sono correlati, cioè "legati" tra loro



- Qualitativamente possiamo dedurre che processi in cui le realizzazioni variano velocemente tenderanno ad avere valori meno correlati anche per τ piccoli
  - E viceversa per processi le cui realizzazioni variano lentamente

Commenti su autocorrelazione per processi WSS



Processo "lento"

$X(t)$ e $X(t+\tau_0)$ sono più correlati

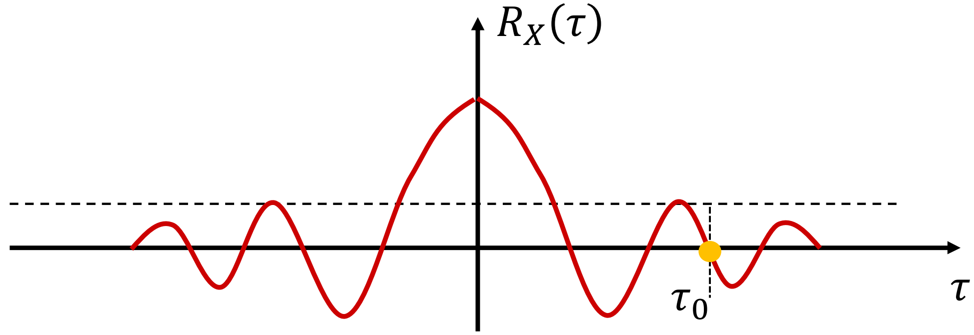
Processo "veloce"

$X(t)$ e $X(t+\tau_0)$ sono meno correlati

Commenti su autocorrelazione per processi WSS

- Un aspetto di particolare interesse possono essere gli zeri della funzione di correlazione

- La ricerca degli zeri di correlazione è utile per applicazioni sia di elaborazione dei segnali che di telecomunicazioni digitali



$X(t)$ e $X(t+\tau_0)$ non sono correlati

Esempio sul segnale di «Trasmissione numerica»

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

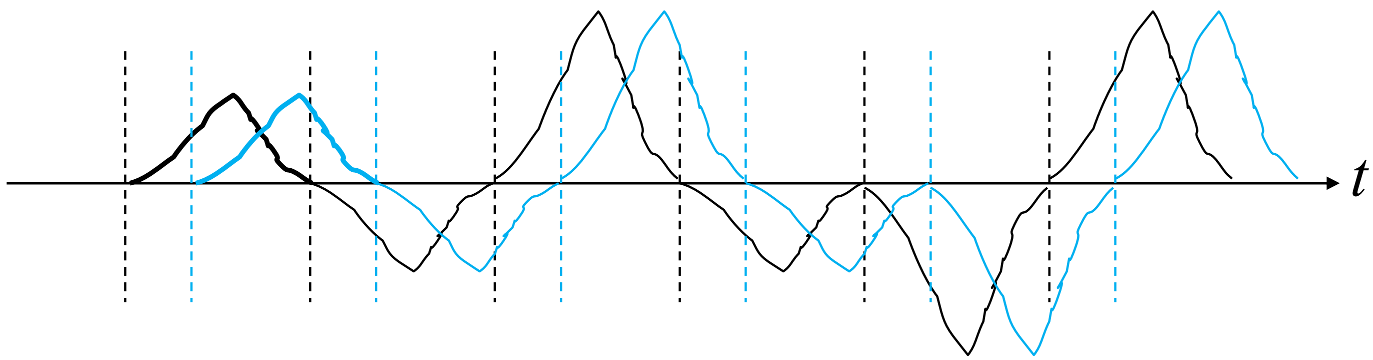
- Il processo casuale già esaminato in precedenza

$$X(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - iT)$$

- NON è stazionario
  - Infatti se un segnale appartiene al processo la sua versione traslata solitamente NON appartiene al processo

Appartiene ancora al processo SOLO per particolari valori di t_0, multipli di T

$$x(t-t_0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i r(t - t_0 - iT) \notin \mathcal{P}$$



Esempio sul segnale di «Trasmissione numerica»

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$X(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i r(t-iT)$$

- Per questo processo avevamo infatti già calcolato in precedenza che:

media dipendente dal tempo

$$m_X(t)=E\{X(t)\}=E\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i r(t-iT)\right\}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}E\{\alpha_i\}r(t-iT)$$

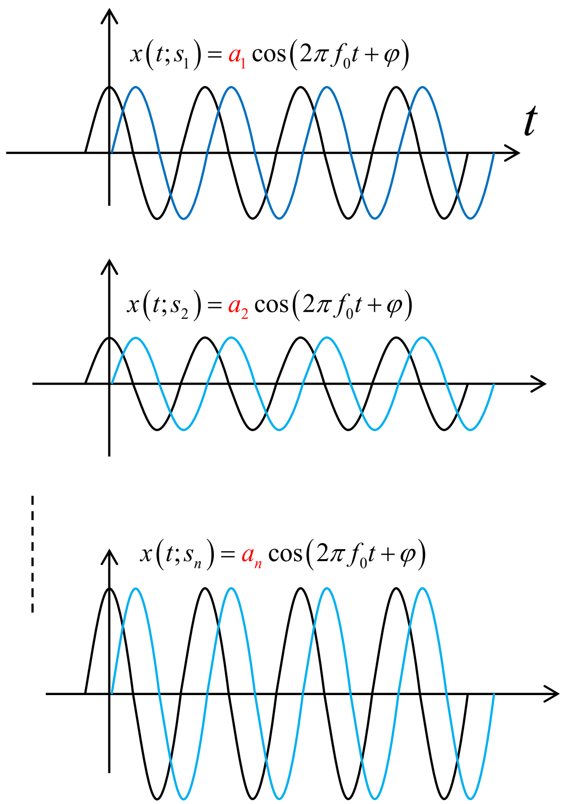
Autocorrelazione dipendente da t_1 e t_2

$$R_X(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X^*(t_2)\}=E\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i r(t_1-iT)\sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_j^* r^*(t_2-jT)\right\}$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}E\{\alpha_i\alpha_j^*\}r(t_1-iT)r(t_2-jT)$$

Esempio: sinusoide con ampiezza v.c.

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



$$x(t) = a_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$x(t - t_0) = a_1 \cos(2\pi f_0 (t - t_0) + \varphi) \notin \mathcal{P}$$

$$= a_1 \cos(2\pi f_0 t + (\varphi - 2\pi f_0 t_0))$$

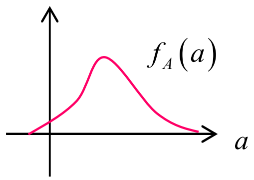
Il nuovo processo ha una fase diversa da quella di partenza, e dunque NON appartiene alla stessa famiglia di funzioni

Già da questa osservazione si deduce che il processo in questione <u>NON è stazionario in senso stretto</u>.

Calcoliamo tuttavia per esercizio nella prossima slide media e autocorrelazione

Esempio: sinusoide con ampiezza v.c.

$$\boxed{X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)}$$



- Per questo processo avevamo infatti già calcolato in precedenza che:

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = E\{A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = E\{A\}\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

media dipende dal tempo

$$R_X(t_1, t_2) = E\{A\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi) A\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)\}$$
$$= E\{A^2\}\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)$$

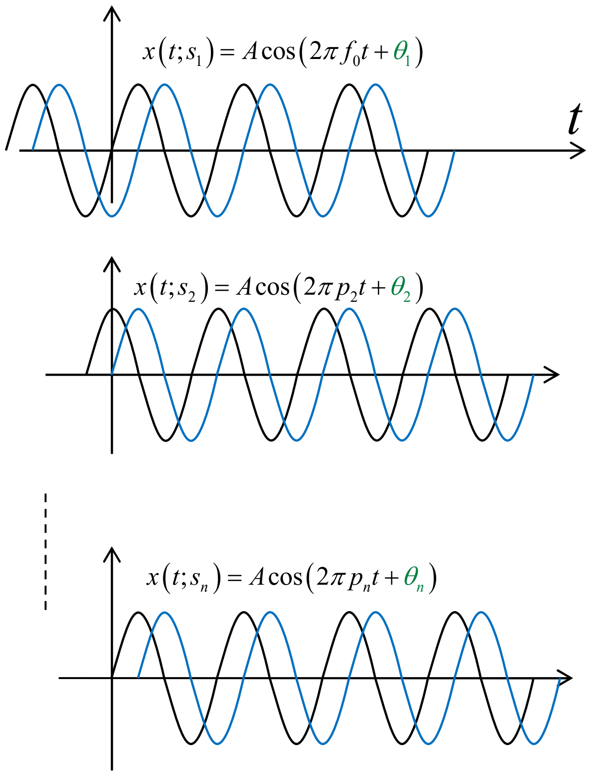
autocorrelazione dipende da t_1 e t_2

$$F_X(x_1; t_1) = P[X(t_1) < x_1] = F_A\left(\frac{x_1}{\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)}\right)$$

Statistica 1 ordine dipende da t_1

Esempio: sinusoide con fase v.c.

$$x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta_1)$$



Iniziamo a verificare che una versione traslata appartenga ancora al processo casuale

$$x(t-t_0) = A\cos(2\pi f_0 (t-t_0) + \theta_1)$$

$$= A\cos(2\pi f_0 t + \theta_2) \in \mathcal{P} \quad (\theta_2 = \theta_1 - 2\pi f_0 t_0)$$

In generale però non è vero che la "nuova" fase θ_2 abbia la stessa probabilità della precedente fase θ_1 e dunque il processo non è (in generale) stazionario

Tuttavia se assumiamo che la fase θ abbia una densità di probabilità uniforme per tutte le fasi, cioè per [0,2π]

$$\text{se } f_\varphi(\theta) = 1/2\pi \rightarrow f_\varphi(\theta_1) = f_\varphi(\theta_2)$$

Allora: $\mathrm{P}[x(t)] = \mathrm{P}[x(t-t_0)]$

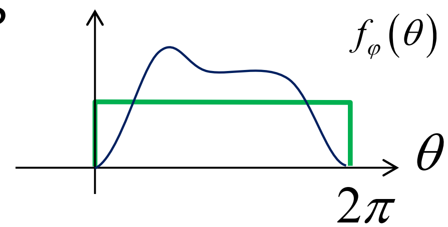
Possiamo dunque dedurre che questo specifico processo è:

Stazionario in senso stretto (al primo ordine)

Esempio : sinusoide con fase v.c. $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Proviamo inoltre a determinare se il processo è WSS
- Per questo processo, avevamo già calcolato in precedenza che:



$$m_X(t) = E\{X(t)\} = AE\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = A\int f_\varphi(\theta)\cos(2\pi f_0 t + \theta)d\theta$$

$$= A\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi f_0 t + \theta)d\theta = 0 \qquad \text{se } f_\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

media costante nel tempo

$$R_X(t_1,t_2) = A^2 E\{\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)\}$$

$$= \frac{A^2}{2}\left[E\{\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\varphi)\} + \cos(2\pi f_0(t_1-t_2))\right]$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0(t_1-t_2)) \qquad \text{se } f_\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi}$$

autocorrelazione dipende solo da $t_1 - t_2$

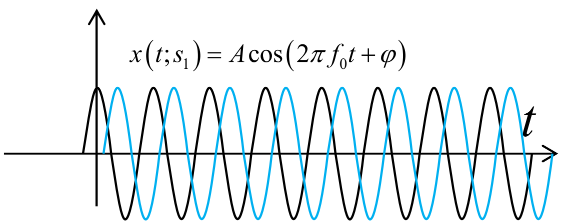
Possiamo dunque concludere che questo processo è **stazionario in senso lato**

Esempio: segnale determinato

- Un segnale determinato può essere considerato un caso degenere di un processo in cui esiste un' unica realizzazione che si manifesta con probabilità 1
  - Esempio:

$$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Non è un processo stazionario



$$P\left(X(t) = x(t;s_1)\right) = 1$$

$$P\left(X(t - t_0)\right) = 0$$

Esempio: segnale determinato

$$\boxed{X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)}$$

- Per questo processo avevamo infatti già calcolato in precedenza che:

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

media funzione del tempo

$$R_X(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = A^2\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)$$

autocorrelazione funzione di t_1 e t_2

$$f_X(x_1;t_1) = \delta(x_1 - A\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi))$$

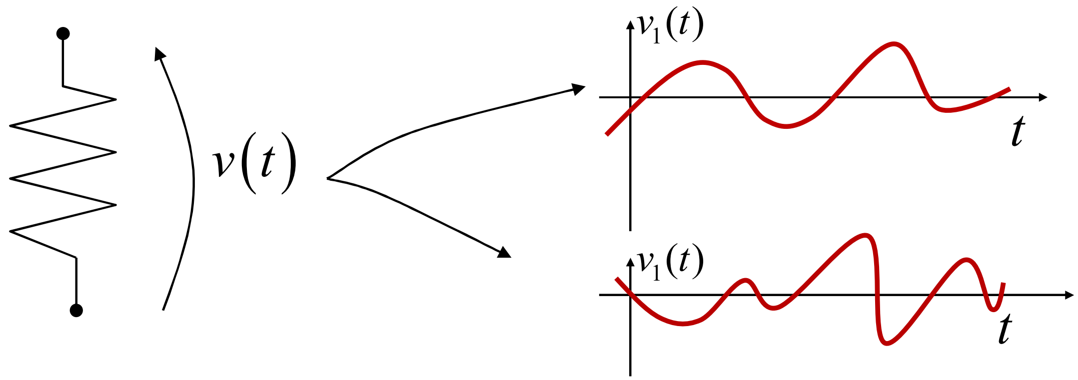
Statistica 1 ordine dipende da t_1

$$f_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = \delta(x_1 - X(t_1))\delta(x_2 - X(t_2))$$

Statistica 2 ordine dipende da t_1 e t_2

Rumore termico

- Il rumore termico è un processo casuale che rappresenta la tensione (o corrente) ai capi di una resistenza non alimentata



Evoluzione nel tempo della tensione misurata ai capi di due resistenze nelle stesse condizioni fisiche

- Il processo fisico è considerato stazionario in senso stretto per ogni n
  - A differenza degli esempi precedenti, non è possibile dimostrarlo con delle formule, in quanto NON è un processo quasi-determinato.
  - Sperimentalmente è tuttavia possibile verificare la stazionarietà
  - Verifica concettuale: se un segnale è fa parte del processo casuale, lo stesso segnale ritardato di qualsiasi valore ha la stessa probabilità, in quanto i fenomeni quantistici legati al movimento degli elettroni nella resistenza non «conoscono» la posizione $t = 0$ dell'asse dei tempi