Esempio Quiz Teoria ed Elaborazione dei Segnali

(1) Risposta multipla | Una sola alternativa

Nell'ambito della elaborazione numerica dei segnali, abbiamo visto tre tipi di trasformate, denominate DTFT, DFT e FFT. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

a. nelle applicazioni pratiche, la DFT è molto più comunemente utilizzata della FFT
b. non vi è nessuna differenza tra DTFT e DFT
c. la DFT è una funzione continua della variabile f
d. data una certa sequenze discreta, la FFT e la DFT forniscono lo stesso risultato numerico

Soluzione
La FFT è un'implementazione della DFT con complessità ridotta, che fornisce lo stesso risultato.

(2) Risposta multipla | Una sola alternativa

È dato il segnale $x(t) = \mathrm{e}^{-3t^6} \cdot \sin(5\pi f_0 t)$. La sua trasformata di Fourier $X(f)$ è una funzione:

a. con parte reale pari e parte immaginaria pari
b. con modulo dispari e fase pari
c. nessuna delle altre risposte
d. immaginaria pura
e. reale e pari

Soluzione
$x(t)$ è una funzione reale e dispari, quindi, per le proprietà di simmetria della trasformata, la sua trasformata di Fourier è una funzione immaginaria pura. Infatti:

$$X(f) = \int x(t)\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi f t} dt = \int x(t)\cos(2\pi f t)\, dt - \jmath \int x(t)\sin(2\pi f t)\, dt$$

Se $x(t)$ è dispari, allora anche $x(t)\cos(2\pi f t)$ è dispari e quindi l'integrale che contiene il coseno è nullo:

$$X(f) = -\jmath \int x(t)\sin(2\pi f t)\, dt$$

(3) Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il processo casuale $x(t) = \xi$, dove ξ è una variabile casuale gaussiana con valor medio pari a 2 e varianza pari a 19. Si consideri poi il processo $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$:

a. $y(t)$ è gaussiano con la stessa varianza
b. $y(t)$ è un processo casuale non ergodico
c. $y(t)$ è gaussiano con la stessa media
d. $y(t)$ ha media nulla

Soluzione
Ogni realizzazione di $x(t)$ è una funzione costante nel tempo, che assume un valore pari al valore assunto dalla variabile causale ξ. La sua derivata $y(t)$ è quindi pari a 0, qualunque sia il valore assunto da ξ. Di conseguenza, $y(t)$ non è un processo casuale, ma un segnale deterministico identicamente pari a 0 (e quindi con media nulla).

(4) Risposta multipla | Una sola alternativa

Quando all'ingresso di un filtro numerico viene inviato il segnale

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$$

l'uscita vale

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

La risposta all'impulso del filtro vale:

a. $h[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$
b. $h[n] = x[n]$
c. $h[n] = \left(\frac{1}{6}\right)^n u[n]$
d. $h(n) = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$

Soluzione
La trasformata zeta dei segnali all'ingresso e all'uscita del filtro vale:

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} - \frac{1}{6}z^{-1}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{6}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Siccome:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

allora:

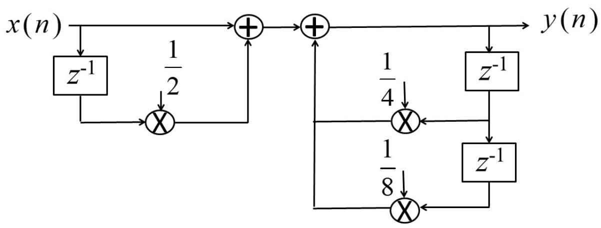
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \cdot \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h[n] = \left(\frac{1}{6}\right)^n u[n]$$

(5) Risposta multipla | Una sola alternativa

Un sistema LTI a tempo discreto è descritto dal seguente schema a blocchi:



La risposta all'impulso del sistema vale:

a. $h(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(-n-1)$
b. $h(n) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(-n-1) - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$
c. $h(n) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$
d. $h(n) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

Soluzione
Dallo schema a blocchi si ricava che il sistema è causale e che la relazione ingresso/uscita del sistema è:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2]$$

La trasformata zeta dell'espressione precedente vale:

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} + \frac{1}{4}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{8}Y(z)z^{-2}$$

Raccogliendo:

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right] = X(z)\left[1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right]$$

Quindi

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$H(z) = \frac{R_1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{R_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = H(z)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z=-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{3}$$

$$R_2 = H(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{1}} = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}$$

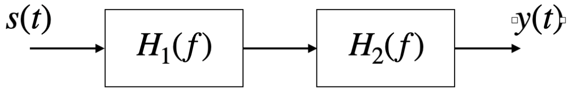
Quindi:

$$H(z) = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{4}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u(n) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

(6) RISPOSTA MULTIPLA Una sola alternativa



Sia dato il segnale $x(t) = 2tri\left(\frac{t}{T}\right)$ in cui $tri(\alpha)$ è la funzione uguale a $1 - |\alpha|$ per $|\alpha| < 1$ e nulla altrove. Si consideri il segnale

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t - 3kT)$$

che viene elaborato dal sistema in Figura, con funzioni di trasferimento

$$H_1(f) = 1 - p_B(f)$$

$$H_2(f) = p_{2B}(f)$$

in cui $B = \frac{1}{T}$, e $p_\beta(\alpha)$ è la funzione pari a 1 per $|\alpha| < \beta/2$ e nulla altrove. Il segnale $y(t)$ all'uscita del sistema vale

a. $y(t) = \frac{1}{3} + \frac{6\sin^2(\frac{\pi}{3})}{\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi}{3T}t\right)$
b. $y(t) = \frac{3\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{\pi^2}\cos\left(\frac{4\pi}{3T}t\right)$
c. $y(t) = \frac{6\sin^2(\frac{\pi}{3})}{\pi^2}\cos\left(\frac{2\pi}{3T}t\right)$
d. $y(t) = \frac{1}{3} + \frac{3\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{\pi^2}\cos\left(\frac{4\pi}{3T}t\right)$

Soluzione

$$X(f) = 2T\frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2}$$

Il segnale periodico ha periodo $3T$ e quindi ha spettro

$$S(f) = \frac{1}{3T}\sum_k X\left(\frac{k}{3T}\right)\delta\left(f - \frac{k}{3T}\right)$$

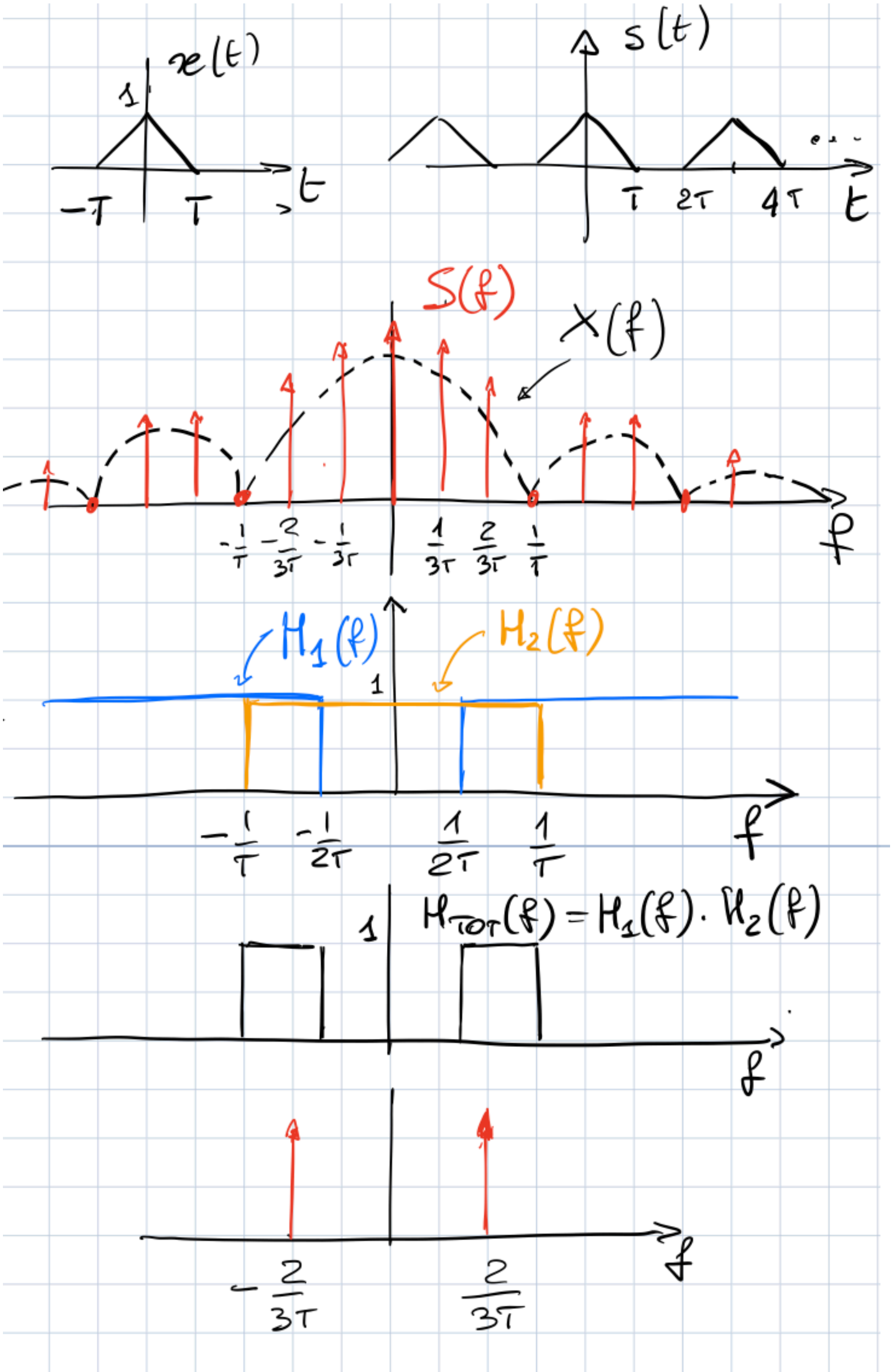
$$X\left(\frac{k}{3T}\right) = 2T\frac{\sin^2(\pi\frac{k}{3T}T)}{\left(\pi\frac{k}{3T}T\right)^2} = 2T\frac{\sin^2(\frac{k\pi}{3})}{\left(\frac{k\pi}{3}\right)^2}$$

La funzione di trasferimento complessiva del sistema è data dal prodotto delle singole funzioni di trasferimento dei filtri connessi in serie, e quindi come si vede dalla figura, il sistema lascia passare due sole righe, per $k = \pm 2$ in corrispondenza di $f_k = \pm\frac{2}{3T}$, dando origine a un segnale di tipo coseno. Si noti che $X(f)$ è una funzione pari per cui $X\left(\frac{2}{3T}\right) = X\left(-\frac{2}{3T}\right)$

$$Y(f) = \frac{2}{3T}T\frac{\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2}\left[\delta\left(f - \frac{2}{3T}\right) + \delta\left(f + \frac{2}{3T}\right)\right] = \frac{2\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{\left(\frac{4\pi^2}{3}\right)}\left[\delta\left(f - \frac{2}{3T}\right) + \delta\left(f + \frac{2}{3T}\right)\right]$$

da cui

$$y(t) = \frac{2\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)}\cos\left(2\pi\frac{2}{3T}t\right) = \frac{3\sin^2(\frac{2\pi}{3})}{\pi^2}\cos\left(\frac{4\pi}{3T}t\right)$$



(7) Risposta multipla | Una sola alternativa

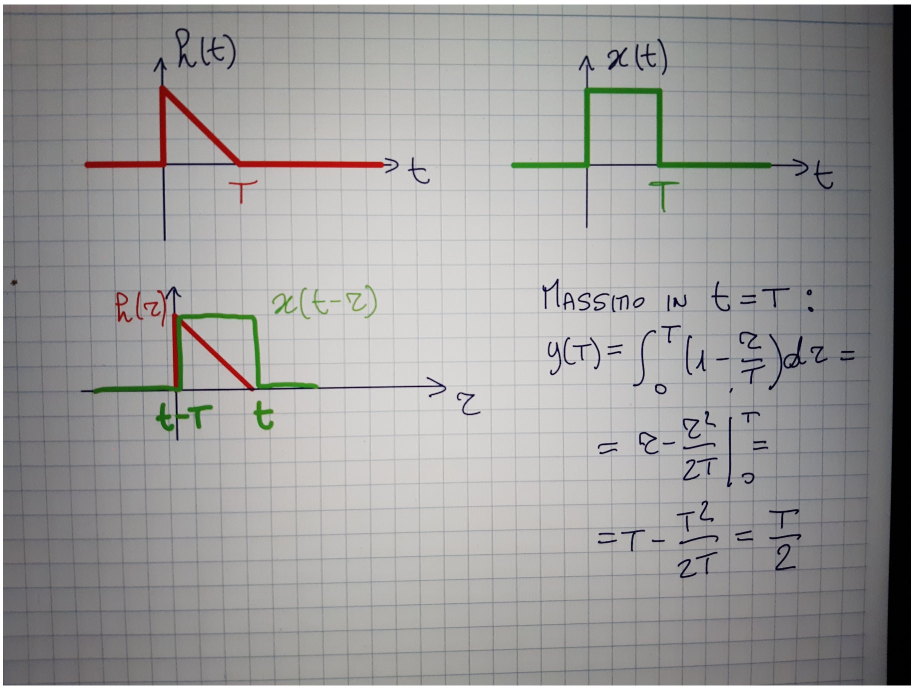
Sia dato un sistema LTI la cui risposta all'impulso vale: $h(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \mathrm{p}_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$. All'ingresso di questo sistema viene posto il segnale $x(t) = \mathrm{p}_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$. La funzione $\mathrm{p}_T(t)$ vale 1 per $|t| < T/2$ e zero altrove. La risposta del sistema all'ingresso $x(t)$ è denominata $y(t)$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

a. $y(t)$ ha un massimo pari a $T/2$ ed è nulla per $t > 2T$
b. $y(t)$ ha un massimo in $t = T/2$ ed è nulla per $t > 2T$
c. $y(t)$ non è causale e non è nulla per $t > 2T$
d. $y(t)$ è causale ed è nulla per $t > T$

Soluzione
L'uscita del sistems $y(t)$ è pari alla convoluzione tra $x(t)$ e $h(t)$:

$$y(t) = \int h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

Entrambe le funzioni hanno supporto pari $[0, T]$. La convoluzione avrà quindi supporto $[0, 2T]$ e valore massimo quando i due supporti sono perfettamente sovrapposti:



(8) RISPOSTA MULTIPLA Una sola alternativa

Si consideri un segnale determinato del tipo

$$x(t) = \cos\left[\frac{2\pi}{T}t + \phi(t)\right]$$

dove $\phi(t)$ è un'onda quadra definita, nel suo periodo, come segue:

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 < t \leq T \\ \pi & \text{per } T < t \leq 2T \end{cases}$$

a. Lo spettro di $x(t)$ è a righe equispaziate di $1/T$.
b. Lo spettro di $x(t)$ è a righe, con riga in $f = 0$ non nulla.
c. Lo spettro di $x(t)$ ha righe non nulle in k/T, con k intero.
d. Lo spettro di $x(t)$ è a righe, con le righe in $f = \pm 1/T$ non nulle.

SOLUZIONE

Per risolvere l'esercizio è necessario capire quale sia il periodo del segnale $x(t)$. Per fare questo e comprendere come sia fatto tale segnale conviene disegnarlo. Si tratta di un segnale coseno la cui fase cambia in corrispondenza dei multipli di T (si vedano i segnali e il segnale risultante $x(t)$ in Figura 1).

Il segnale di Figura 1 ha dunque un periodo $T' = 2T$ e si può anche scrivere come

$$x(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cdot w(t)$$

in cui $w(t)$ è un'onda quadra di periodo $2T$

$$w(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - 2nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[p_T(t - T/2 - 2nT) - p_T(t - 3T/2 - 2nT)\right]$$

Bisogna dunque calcolare la trasformata del segnale $w(t)$ che sarà uno spettro a righe trattandosi di un segnale periodico. Lo spettro è del tipo

$$W(f) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R\left(\frac{n}{2T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{2T}\right)$$

$$R(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{j2\pi f T/2} - \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{j6\pi f T/2} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}\left[e^{j\pi f T} - e^{j3\pi f T}\right]$$

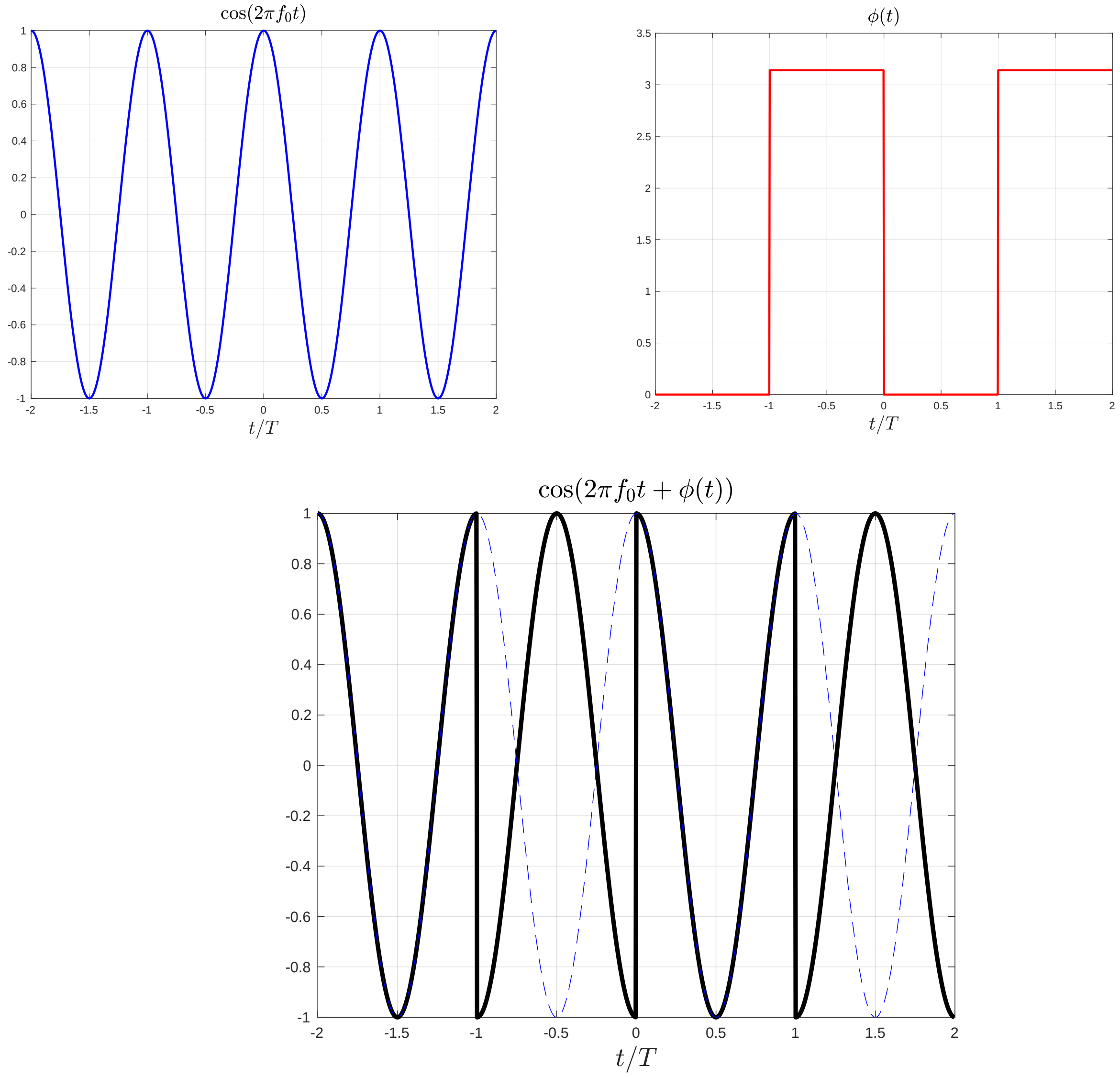


Figura 1: Esercizio 2 - Segnali 'elementari' e segnale risultante $x(t)$

Ricordando che

$$\frac{e^{+j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{2j} = \sin(\pi fT)$$

raccolgo un termine opportuno per ricondurmi alla formula della funzione seno

$$R(f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} e^{j2\pi fT}[e^{-j\pi fT} - e^{+j\pi fT}]$$

$$R(f) = j\frac{\sin(\pi fT)}{2\pi f}\sin(\pi fT)e^{j2\pi fT}$$

da cui si ottiene che

$$R\left(\frac{n}{2T}\right) = j\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi}\sin(n\pi/2)e^{jn\pi}$$

Questi coefficienti sono nulli per tutti gli n pari in quanto per $n = 0$ si annulla il secondo fattore e per $n \neq 0$ e pari, nel primo fattore, i numeratori si annullano (e il denominatore è diverso da zero).

Le righe dello spettro quindi diverse da zero in $\pm\frac{1}{2T}, \pm\frac{3}{2T}, \ldots$

La moltiplicazione di $w(t)$ per $\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ corrisponde alla traslazione in frequenza dello spettro che viene centrato in $\pm\frac{1}{T}$. Le righe di $X(f)$ continuano ad essere non nulle per i valori $\pm\frac{1}{2T}, \pm\frac{3}{2T}, \ldots$ e sono dunque spaziate di $\frac{1}{T}$ (risposta a). Si noti che la risposta c è errata in quanto pur essendo spaziate di $\frac{1}{T}$ le righe non sono centrate in k/T, con k intero.

(9) Risposta multipla | Una sola alternativa

Un processo casuale $x(t)$ WSS a media nulla, con autocorrelazione $R_x(\tau)$ uguale a $1 - |\tau|/T$ per $|\tau| < T$ e 0 altrove, viene posto in ingresso ad un sistema lineare e tempo invariante con risposta all' impulso $h(t) = \mathrm{e}^{-t/a}u(t)$, dove a è una costante reale positiva. Sia $y(t)$ il segnale in uscita.

La varianza di $y(t)$

a. non ha un andamento monotono al variare di a
b. cresce al crescere di a
c. decresce al crescere di a
d. non dipende da a

Soluzione
Il processo $y(t)$ ha media nulla perché $x(t)$ ha media nulla. La varianza di $y(t)$ dunque corrisponde al valore quadratico medio e quindi alla funzione di autocorrelazione valutata nell'origine:

$$\sigma_y^2 = \int R_x(\tau)R_h(-\tau)d\tau.$$

La funzione di autocorrelazione $R_h(\tau)$ é data da

$$R_h(\tau) = h(\tau) * h^*(-\tau) = \frac{a}{2}e^{\frac{-|\tau|}{a}}.$$

Se $b > a$ allora $\frac{b}{2}e^{\frac{-|\tau|}{b}} > \frac{a}{2}e^{-\frac{|\tau|}{a}}$ per ogni $|\tau| > 0$, mentre sono uguali per $\tau = 0$. Siccome $R_x(\tau)$ (funzione triangolo) è sempre positiva, ed è diversa da zero anche per $\tau \neq 0$ ne deduciamo:

$$\frac{b}{2}\int R_x(\tau)e^{\frac{-|\tau|}{b}}d\tau > \frac{a}{2}\int R_x(\tau)e^{\frac{-|\tau|}{a}}d\tau.$$

e quindi la varianza crece al crescere di a.

(10) Risposta multipla | Una sola alternativa

Un processo casuale WSS $X(t)$ con spettro di potenza $S_X(f) = N_0/2$ per $|f| < B_X$ e nullo altrove passa attraverso un filtro passa basso ideale con f.d.t. $H(f) = 1$ per $|f| < \alpha B_X$, dove $\alpha > 0$. Si indichi con $Y(t)$ il processo in uscita e con $R_{YX}(\tau) = E\{X(t)Y(t+\tau)\}$ la mutua correlazione tra ingresso e uscita. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. $R_{YX}(0) = N_0B_X$ per $\alpha > 0$
b. $R_{YX}(0) = \frac{\alpha}{2}N_0B_X$ per $0 < \alpha < 1$
c. $R_{YX}(0) = (\alpha+1)N_0B_X$ per $\alpha > 0$
d. $R_{YX}(0) = \alpha N_0B_X$ per $0 < \alpha < 1$

Soluzione
La funzione di mutua correlazione è il prodotto di convoluzione della funzione di autocorrelazione del segnale di ingresso per la risposta all'impulso del sistema LTI. La funzione di mutua correlazione valutata nell'origine puo' essere calcolata anche come anti-trasformata di $S_x(f)H(f)$:

$$R_{XY}(\tau = 0) = \int S_X(f)H(f)e^{-j2\pi\cdot 0\cdot f}df = \int S_X(f)H(f)df.$$

$S_X(f)$ è una porta simmetrica di supporto $2B_X$ ed ampiezza $N_0/2$ e $H(f)$ è una porta simmetrica di supporto $2\alpha B_X$ ed ampiezza 1. Il loro prodotto è una porta con supporto pari all'intersezione dei due supporti e ampiezza pari al prodotto delle ampiezze. Quando $\alpha \leq 1$ allora abbiamo

$$R_{XY}(\tau = 0) = \int_{-\alpha B_X}^{\alpha B_X} N_0/2df = \alpha N_0B_x.$$

Se invece $\alpha > 1$:

$$R_{XY}(\tau = 0) = \int_{-B_X}^{B_X} N_0/2df = N_0B_x.$$