# Appello 21 gennaio 2025

(1) **21 gennaio 2025 QTCa**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri un sistema a tempo continuo, lineare e tempo invariante con funzione di trasferimento $H(f) = e^{-|k_1 f|} \cdot e^{-jk_2 f}$, al cui ingresso sia inviato il segnale $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B$. Sia $y(t)$ il corrispondente segnale di uscita dal sistema lineare. I parametri $A, B, k_1, k_2, f_0$ sono tutti numeri reali strettamente positivi. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. $y(t) = A\, e^{-k_1 f_0} \cdot \cos(2\pi f_0 t - k_2 f_0) + B$ ✓
b. $y(t) = A\, e^{-k_1 f} \cdot \cos(2\pi f_0 t - k_2 f_0) + B$ $(-10\%)$
c. $y(t) = A\, e^{+k_1 f_0} \cdot \cos(2\pi f_0 t + k_2 f_0) + B$ $(-10\%)$
d. $y(t) = A\, e^{-k_1 f_0} \cdot \cos(2\pi f_0 t - k_2 f_0)$ $(-10\%)$

**SOLUZIONE** Si osservi che il segnale $x(t)$ in ingresso è la somma di un coseno a frequenza $f_0$ ed una costante. Il risultante segnale $y(t)$ in uscita per linearità è calcolabile come la somma dei due seguenti termini:

(a) il termine costante $B$ (che spettralmente genera una riga in $f = 0$) genera in uscita ancora una costante pari a $B \cdot H(0)$ e nel nostro caso $H(0) = 1$;

(b) a lezione, si è dimostrato che un coseno in ingresso è ancora un coseno anche in uscita ad un filtro LTI, e in particolare l'ampiezza risulta moltiplicata per $|H(f_0)|$ (che nell'esercizio vale $e^{-k_1 f_0}$, mentre alla fase si deve sommare la fase di $H(f_0)$ (che nell'esercizio vale $-k_2 f_0$

Avremo dunque in uscita $y(t) = A\, e^{-k_1 f_0} \cdot \cos(2\pi f_0 t - k_2 f_0) + B$

(2) **21 gennaio 2025 QTCb**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri un sistema a tempo continuo, lineare e tempo invariante con funzione di trasferimento $H(f) = e^{+|k_1 f|} \cdot e^{+jk_2 f}$, al cui ingresso sia inviato il segnale $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) - B$. Sia $y(t)$ il corrispondente segnale di uscita dal sistema lineare. I parametri $A, B, k_1, k_2, f_0$ sono tutti numeri reali strettamente positivi. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. $y(t) = A\, e^{k_1 f_0} \cdot \cos(2\pi f_0 t + k_2 f_0) - B$ ✓
b. $y(t) = A\, e^{k_1 f} \cdot \cos(2\pi f_0 t + k_2 f_0) - B$ $(-10\%)$
c. $y(t) = A\, e^{-k_1 f_0} \cdot \cos(2\pi f_0 t - k_2 f_0) - B$ $(-10\%)$
d. $y(t) = A\, e^{k_1 f_0} \cdot \cos(2\pi f_0 t + k_2 f_0)$ $(-10\%)$

**SOLUZIONE** Si osservi che il segnale $x(t)$ in ingresso è la somma di un coseno a frequenza $f_0$ ed una costante. Il risultante segnale $y(t)$ in uscita per linearità è calcolabile come la somma dei due seguenti termini:

(a) il termine costante $-B$ (che spettralmente genera una riga in $f = 0$) genera in uscita ancora una costante pari a $-B \cdot H(0)$ e nel nostro caso $H(0) = 1$;

(b) a lezione, si è dimostrato che un coseno in ingresso è ancora un coseno anche in uscita ad un filtro LTI, e in particolare l'ampiezza risulta moltiplicata per $|H(f_0)|$ (che nell'esercizio vale $e^{-k_1 f_0}$, mentre alla fase si deve sommare la fase di $H(f_0)$ (che nell'esercizio vale $+k_2 f_0$

Avremo dunque in uscita $y(t) = A\, e^{k_1 f_0} \cdot \cos(2\pi f_0 t + k_2 f_0) - B$

(3) **21 gennaio 2025 QPCa**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri il processo casuale che durante questo Corso abbiamo denominato "segnale per trasmissione numerica", dato da:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - iT)$$

Si assuma che $\alpha_i$ sia un insieme di variabili casuali discrete e tra di loro statisticamente indipendenti, ciascuna con una uguale probabilità di assumere i due valori +2 e -2, e che $r(t)$ sia un generico segnale determinato.

Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

a. il processo casuale $x(t)$ è a media di insieme nulla e non è stazionario ✓
b. il processo casuale $x(t)$ è stazionario in senso stretto $(-10\%)$
c. il processo casuale $x(t)$ è stazionario in senso lato $(-10\%)$
d. il processo casuale $x(t)$ ha media di insieme pari a 2 e non è stazionario $(-10\%)$

**SOLUZIONE** Come analizzato a lezione, il processo in questione non è stazionario (nè in senso lato nè in senso stretto) e questa considerazione esclude dunque due delle risposte. Per quanto riguarda la media, abbiamo che

$$E[x(t)] = E[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - iT)]$$

e per linearità

$$E[x(t)] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E[\alpha_i] r(t - iT)]$$

Dato che $E[\alpha_i] = 0$ abbiamo dunque

$$E[x(t)] = 0$$

In conclusione, la risposta corretta è "il processo casuale $x(t)$ è a media nulla e non è stazionario"

(4) **21 gennaio 2025 QPCb**

RISPOSTA MULTIPLA | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri il processo casuale che durante questo Corso abbiamo denominato "segnale per trasmissione numerica", dato da:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - iT)$$

Si assuma che $\alpha_i$ sia un insieme di variabili casuali discrete e tra di loro statisticamente indipendenti, ciascuna con una uguale probabilità di assumere i due valori $+2$ e $0$, e che $r(t)$ sia un generico segnale determinato, che assume valori maggiori o uguali a zero $\forall t$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

a. il processo casuale $x(t)$ ha media di insieme che dipende dalla forma di $r(t)$ e non è stazionario ✓
b. il processo casuale $x(t)$ è stazionario in senso stretto ($-10\%$)
c. il processo casuale $x(t)$ è stazionario in senso lato ($-10\%$)
d. il processo casuale $x(t)$ ha media di insieme pari a 0 e non è stazionario ($-10\%$)

**SOLUZIONE** Come analizzato a lezione, il processo in questione non è stazionario (nè in senso lato nè in senso stretto) e questa considerazione esclude dunque due delle risposte. Per quanto riguarda la media, abbiamo che

$$E[x(t)] = E[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - iT)]$$

e per linearità

$$E[x(t)] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} E[\alpha_i] r(t - iT)]$$

Dato che in questo caso $E[\alpha_i] = 1$ abbiamo dunque

$$E[x(t)] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} r(t - iT)$$

Questa media dipende dal tempo e, date le caratteristiche specificate per $r(t)$, non è certamente nulla. In conclusione, la risposta corretta è "il processo casuale $x(t)$ ha media che dipende dalla forma di $r(t)$ e non è stazionario"

(5) **21 gennaio 2025, ripreso da 16 Settembre 2022 QTDa**

RISPOSTA MULTIPLA | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ nullo per $n < 0$ e $n > 8$ e che abbia valori strettamente positivi all'interno di questo intervallo, e un filtro numerico con risposta all'impulso pari a $h[n] = 3 \cdot \delta[n-1] - 3 \cdot \delta[n-5]$. Il segnale discreto $y[n] = x[n] * h[n]$ all'uscita del filtro è sicuramente nullo:

a. per $n < 1$ e per $n > 13$ ✓
b. per $n \leq 1$ e per $n \geq 13$ ($-10\%$)
c. per $n > 8$ ($-10\%$)
d. nessuna delle altre risposte ($-10\%$)

**SOLUZIONE** $x[n]$ ha valori non nulli tra gli indici 0 e 8 (estremi compresi), mentre $h[n]$ è costituito da due delta discrete posizionate sugli indici $+1$ e $+5$. Facendo la convoluzione discreta tra $x[n]$ e $h[n]$ si ottiene in uscita $y[n] = 3x[n-1] - 3x[n-5]$ che dunque si estende al massimo da $n = 1$ a $n = 13$ (estremi compresi). La risposta corretta è dunque "è sicuramente nullo per $n < 1$ e per $n > 13$"

(6) **21 gennaio 2025, ripreso da 16 Settembre 2022, QTDb**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ nullo per $n < 0$ e $n > 10$ e che abbia valori strettamente positivi all'interno di questo intervallo, e un filtro numerico con risposta all'impulso pari a $h[n] = 3 \cdot \delta[n-1] - 5 \cdot \delta[n-6]$. Il segnale discreto $y[n] = x[n] * h[n]$ all'uscita del filtro è sicuramente nullo:

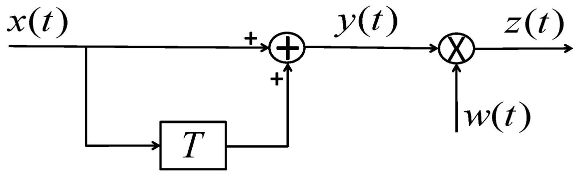
a. per $n < 1$ e per $n > 16$ ✓
b. per $n \leq 1$ e per $n \geq 16$ $(-10\%)$
c. per $n > 10$ $(-10\%)$
d. nessuna delle altre risposte $(-10\%)$

**SOLUZIONE** $x[n]$ ha valori non nulli tra gli indici 0 e 10 (estremi compresi), mentre $h[n]$ è costituito da due delta discrete posizionate sugli indici $+1$ e $+6$. Facendo la convoluzione discreta tra $x[n]$ e $h[n]$ si ottiene in uscita $y[n] = 3x[n-1] - 5x[n-6]$ che dunque si estende al massimo da $n = 1$ a $n = 16$ (estremi compresi). La risposta corretta è dunque "è sicuramente nullo per $n < 1$ e per $n > 16$"

(7) **21 Gennaio 2025 TC1a**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri il sistema riportato nella seguente figura:




dove $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, con $f_0 = \frac{1}{6T}$, $\phi = -\frac{\pi}{6}$, e $w(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{4T}\right)$. Determinare se il segnale di uscita $z(t)$ è a potenza media finita o energia finita e calcolarne lo spettro di potenza o lo spettro di energia (a seconda della tipologia del segnale). Quale delle seguenti risposte è corretta?

a. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $S_z(f) = 12T^2 \left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{6T}\right) + p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{6T}\right)\right]$ ✓
b. Lo spettro di potenza di $z(f)$ è $G_z(f) = 6T^2 \left[\delta\left(f - \frac{1}{6T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{6T}\right)\right]$ $(-10\%)$
c. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $S_z(f) = 2\sqrt{3}T \left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{6T}\right) + p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{6T}\right)\right]$ $(-10\%)$
d. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $S_z(f) = 2\sqrt{3}T\text{e}^{-j\frac{\pi}{3}} \left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{6T}\right) + p_{\frac{1}{6T}}\left(f + \frac{1}{4T}\right)\right]$ $(-10\%)$
e. Lo spettro di potenza di $z(f)$ è $G_z(f) = 9T^2 \left[\delta\left(f - \frac{1}{6T}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{6T}\right)\right]$ $(-10\%)$
f. Nessuna delle altre risposte è corretta $(-10\%)$

**SOLUZIONE**

Il segnale $y(t)$ vale:

$$y(t) = x(t) + x(t-T)$$

con

$$x(t) = \cos\left(2\pi \frac{1}{6T} t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Il sistema tra $x(t)$ e $y(t)$ è LTI, con risposta all'impulso reale:

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t-T)$$

La funzione di trasferimento del sistema (trasformata di Fourier della risposta all'impulso) vale:

$$H(f) = 1 + \text{e}^{-j2\pi fT} = \text{e}^{-j\pi fT}\left(\text{e}^{j\pi fT} + \text{e}^{-j\pi fT}\right) = 2\text{e}^{-j\pi fT}\cos(\pi fT)$$

Si ricorda che la risposta del sistema ad un ingresso sinusoidale è a sua volta una sinusoide:

$$y(t) = |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 t + \phi + \arg\{H(f_0)\})$$

Calcolando $H(f)$ in $f_0 = \frac{1}{6T}$ si ottiene:

$$H(f_0) = 2\text{e}^{-j\pi\frac{1}{6T}T}\cos\left(\pi\frac{1}{6T}T\right) = 2\text{e}^{-j\frac{\pi}{6}}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\text{e}^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$H(f_0)$ ha quindi modulo pari a $\sqrt{3}$ e fase pari a -$\pi/6$:

$$y(t) = \sqrt{3}\cos\left(2\pi\frac{1}{6T}t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cos\left(2\pi\frac{1}{6T}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

In alternativa, si poteva calcolare $y(t)$ sostituendo $x(t)$ in $y(t) = x(t) + x(t-T)$:

$$y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) + \cos(2\pi f_0(t-T) + \phi)$$

e applicando la formula (disponibile nel formulario) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$:

$$y(t) = 2\cos(2\pi f_0 t - \pi f_0 T + \phi)\cos(\pi f_0 T) = 2\cos\left(2\pi\frac{1}{6T}t - \pi\frac{1}{6T}T - \frac{\pi}{6}\pi\right)\cos\left(\pi\frac{1}{6T}T\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{2\pi}{6T}t - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(2\frac{\pi}{6T}t - \frac{\pi}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\cos\left(2\pi\frac{1}{6T}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Il segnale

$$z(t) = y(t)\cdot w(t) = \sqrt{3}\cos\left(2\pi\frac{1}{6T}t - \frac{\pi}{3}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{4T}\right)$$

è un segnale ad energia finita, con trasformata di Fourier pari a:

$$Z(f) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{6T}\right)e^{-j\frac{\pi}{3}} - \delta\left(f + \frac{1}{6T}\right)e^{+j\frac{\pi}{3}}\right] * 4Tp_{\frac{1}{4T}}(f) = 2\sqrt{3}T\left[p_{\frac{1}{6T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right)e^{-j\frac{\pi}{3}} - p_{\frac{1}{4T}}\left(f + \frac{1}{6T}\right)e^{+j\frac{\pi}{3}}\right]$$

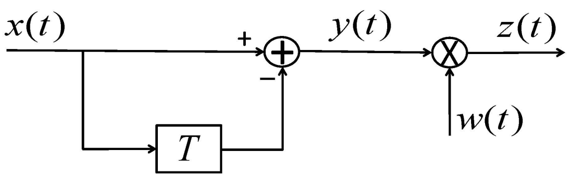
Le due porte sono separate spettralmente. Lo spettro di energia vale quindi:

$$S_z(f) = |Z(f)|^2 = 12T^2\left[p_{\frac{1}{4T}}\left(f - \frac{1}{4T}\right) + p_{\frac{1}{6T}}\left(f + \frac{1}{6T}\right)\right]$$

(8) **gennaio 2025 TC1b**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri il sistema riportato nella seguente figura:




dove $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$, con $f_0 = \frac{1}{6T}$ e $\phi = \frac{\pi}{3}$, e $w(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{8T}\right)$. Determinare se il segnale di uscita $z(t)$ è a potenza media finita o energia finita e calcolarne lo spettro di potenza o lo spettro di energia (a seconda della tipologia del segnale). Quale delle seguenti risposte è corretta?

a. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $S_z(f) = 16T^2\left[p_{\frac{1}{8T}}\left(f - \frac{1}{6T}\right) + p_{\frac{1}{8T}}\left(f + \frac{1}{6T}\right)\right]$ ✓
b. Lo spettro di potenza di $z(f)$ è $G_z(f) = 4T^2\left[\delta\left(f - \frac{1}{6T}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{6T}\right)\right]$ (−10%)
c. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $S_z(f) = 8T^2\left[p_{\frac{1}{8T}}\left(f - \frac{1}{6T}\right) + p_{\frac{1}{8T}}\left(f + \frac{1}{6T}\right)\right]$ (−10%)
d. Lo spettro di energia di $z(f)$ è $4e^{j\frac{2\pi}{3}}T\left[p_{\frac{1}{8T}}\left(f - \frac{1}{6T}\right) + p_{\frac{1}{8T}}\left(f + \frac{1}{6T}\right)\right]$ (−10%)
e. Lo spettro di potenza di $z(f)$ è $G_z(f) = 4T^2\left[\delta\left(f - \frac{1}{6T}\right) - \delta\left(f + \frac{1}{6T}\right)\right]$ (−10%)
f. Nessuna delle altre risposte è corretta (−10%)

**SOLUZIONE**

Il segnale $y(t)$ vale:

$$y(t) = x(t) - x(t-T)$$

con

$$x(t) = \cos\left(2\pi\frac{1}{6T}t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Il sistema tra $x(t)$ e $y(t)$ è LTI, con risposta all'impulso reale:

$$h(t) = \delta(t) - \delta(t-T)$$

La funzione di trasferimento del sistema (trasformata di Fourier della risposta all'impulso) vale:

$$H(f) = 1 - \mathrm{e}^{-j2\pi fT} = \mathrm{e}^{-j\pi fT}\left(\mathrm{e}^{j\pi fT} - \mathrm{e}^{-j\pi fT}\right) = 2j\mathrm{e}^{-j\pi fT}\sin(\pi fT)$$

Si ricorda che la risposta del sistema ad un ingresso sinusoidale è a sua volta una sinusoide:

$$y(t) = |H(f_0)|\cos(2\pi f_0 t + \phi + \arg\{H(f_0)\})$$

Calcolando $H(f)$ in $f_0 = \frac{1}{6T}$ si ottiene:

$$H(f_0) = 2j\mathrm{e}^{-j\pi\frac{1}{6T}T}\sin\left(\pi\frac{1}{6T}T\right) = 2j\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{6}}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = j\mathrm{e}^{-j\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{3}}$$

$H(f_0)$ ha quindi modulo pari a 1 e fase pari a $\pi/3$:

$$y(t) = \cos\left(2\pi\frac{1}{6T}t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi\frac{1}{6T}t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

In alternativa, si poteva calcolare $y(t)$ sostituendo $x(t)$ in $y(t) = x(t) - x(t-T)$:

$$y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi) - \cos(2\pi f_0(t-T) + \phi)$$

e applicando la formula (disponibile nel formulario)

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$y(t) = -2\sin(2\pi f_0 t - \pi f_0 T + \phi)\sin(\pi f_0 T) = -2\sin\left(2\pi\frac{1}{6T}t - \pi\frac{1}{6T}T + \frac{\pi}{3}\pi\right)\sin\left(\pi\frac{1}{6T}T\right)$$
$$= -2\sin\left(\frac{2\pi}{6T}t - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\frac{1}{2}\left(2\frac{\pi}{6T}t + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(2\pi\frac{1}{6T}t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Il risultato risulta identico al precedente ricordando che $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$

Il segnale

$$z(t) = y(t)\cdot w(t) = \cos\left(2\pi\frac{1}{6T}t + \frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{8T}\right)$$

è un segnale ad energia finita, con trasformata di Fourier pari a:

$$Z(f) = \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{6T}\right)\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{3}} - \delta\left(f + \frac{1}{6T}\right)\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{3}}\right] * 8Tp_{\frac{1}{8T}}(f) = 4T\left[p_{\frac{1}{8T}}\left(f - \frac{1}{6T}\right)\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{3}} - p_{\frac{1}{8T}}\left(f + \frac{1}{6T}\right)\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{3}}\right]$$

Le due porte sono separate spettralmente. Lo spettro di energia vale quindi:

$$S_z(f) = |Z(f)|^2 = 16T^2\left[p_{\frac{1}{8T}}\left(f - \frac{1}{6T}\right) + p_{\frac{1}{8T}}\left(f + \frac{1}{6T}\right)\right]$$

(9) **gennaio 2025 TC2a**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(t - 2nT)$$

dove $T$ è un valore reale positivo e $z(t) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}u(t)$ con $u(t)$ è la funzione gradino pari a 1 per $t \geq 0$ e nulla altrove.

Il segnale viene filtrato da un sistema LTI con risposta all'impulso

$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)}{\pi^2 t^2}$$

La potenza del segnale di uscita $y(t)$vale:

a. $P_y = \frac{3+2\pi^2}{32T^2(1+\pi^2)}$ ✓
b. $P_y = \frac{1}{16T^2}$ (−10%)
c. $P_y = \frac{3+\pi^2}{4T^2(1+\pi^2)}$ (−10%)
d. $P_y = \frac{3+\pi^2}{16T^2(1+\pi^2)}$ (−10%)
e. nessuna delle altre risposte (−10%)

**SOLUZIONE**

Il segnale è periodico e il suo spettro a righe e vale

$$X(f) = \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z\left(\frac{n}{2T}\right)\delta\left(f-\frac{n}{2T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mu_n\delta\left(f-\frac{n}{2T}\right)$$

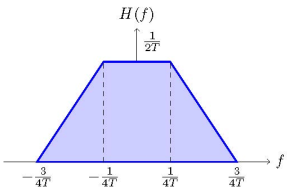
la trasformata di $z(t)$ vale (dal formulario)

$$Z(f) = \frac{1}{\frac{1}{T}+j2\pi f} = \frac{T}{1+j2\pi fT}$$

La funzione di trasferimento del filtro si ottiene considerando che

$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)}{\pi^2 t} = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi t}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)}{\pi t} = h_1(t)\cdot h_2(t)$$

e si ottiene quindi come convoluzione di due porte di ampiezza unitaria e rispettivamente di supporto $1/T$ e $1/2T$. La loro convoluzione fornisce una $H(f)$ che è un trapezio come in figura con banda $B_H = \frac{3}{4T}$ e ampiezza della base minore $1/2T$




e che quindi lascia passare solo le componenti spettrali corrispondenti a $n = 0, \pm 1$. Considerando che $\mu_n = \frac{1}{2T}Z\left(\frac{n}{2T}\right)$ si ottiene

$$\mu_0 = Z(0) = \frac{1}{2T}T = \frac{1}{2}$$

,

$$\mu_1 = Z\left(\frac{1}{2T}\right) = \frac{1}{4T}\frac{T}{1+j\pi} = \frac{1}{2(1+j\pi)}$$

,

$$\mu_{-1} = Z\left(-\frac{1}{2T}\right) = \frac{1}{4T}\frac{T}{1-j\pi} = \frac{1}{2(1-j\pi)}$$

il segnale di uscita vale

$$Y(f) = H(0)\mu_0\delta(f) + H\left(\frac{1}{2T}\right)\mu_1\delta(f+\frac{1}{2T}) + H\left(-\frac{1}{2T}\right)\mu_{-1}\delta(f-\frac{1}{2T})$$

$$Y(f) = \frac{1}{2T}\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{4T}\frac{1}{2(1+j\pi)}\delta(f+\frac{1}{2T}) + \frac{1}{4T}\frac{1}{2(1-j\pi)}\delta(f-\frac{1}{2T})$$

La potenza del segnale di uscita vale

$$P_y = \frac{1}{16T^2} + \frac{1}{64T^2(1+\pi^2)} + \frac{1}{64T^2(1+\pi^2)} = \frac{3+2\pi^2}{32T^2(1+\pi^2)}$$

(10) **gennaio 2025 TC2b**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(t-2nT)$$

dove $T$ è un valore reale positivo e $z(t) = \mathrm{e}^{-\frac{|t|}{T}}$.

Il segnale viene filtrato da un sistema LTI con risposta all'impulso

$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)}{\pi^2 t^2}$$

La potenza del segnale di uscita $y(t)$vale:

a. $P_y = \frac{3+2\pi^2}{8T^2(1+\pi^2)}$ $(-10\%)$
b. $P_y = \frac{1}{4T^2}$ $(-10\%)$
c. $P_y = \frac{3+2\pi^2}{32T^2(1+\pi^2)}$ $(-10\%)$
d. $P_y = \frac{3+\pi^2}{16T^2(1+\pi^2)}$ $(-10\%)$
e. nessuna delle altre risposte ✓

**SOLUZIONE**

Il segnale è periodico e il suo spettro a righe e vale

$$X(f) = \frac{1}{2T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z\left(\frac{n}{2T}\right)\delta\left(f-\frac{n}{2T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mu_n\delta\left(f-\frac{n}{2T}\right)$$

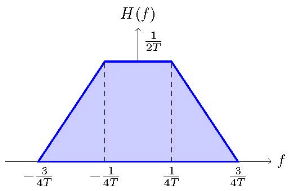
la trasformata di $z(t)$ vale (dal formulario)

$$Z(f) = \frac{\frac{2}{T}}{\frac{1}{T^2}+4\pi^2 f^2} = \frac{2T}{1+4\pi^2 f^2 T^2}$$

La funzione di trasferimento del filtro si ottiene considerando che

$$h(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)}{\pi^2 t} = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi t}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)}{\pi t} = h_1(t)\cdot h_2(t)$$

e si ottiene quindi come convoluzione di due porte di ampiezza unitaria e rispettivamente di supporto $1/T$ e $1/2T$. La loro convoluzione fornisce una $H(f)$ che è un trapezio come in figura con banda $B_H = \frac{3}{4T}$ e ampiezza della base minore $1/2T$




e che quindi lascia passare solo le componenti spettrali corrispondenti a $n = 0, \pm 1$. Considerando che $\mu_n = \frac{1}{2T}Z\left(\frac{n}{2T}\right)$ si ottiene

$$\mu_0 = Z(0) = \frac{1}{2T}2T = 1$$

,

$$\mu_1 = Z\left(\frac{1}{2T}\right) = \frac{1}{1+\pi^2}$$

$$\mu_{-1} = Z\left(-\frac{1}{2T}\right) = \frac{1}{1+\pi^2}$$

il segnale di uscita vale

$$Y(f) = H(0)\mu_0\delta(f) + H\left(\frac{1}{2T}\right)\mu_1\delta(f+\frac{1}{2T}) + H\left(-\frac{1}{2T}\right)\mu_{-1}\delta(f-\frac{1}{2T})$$

$$Y(f) = \frac{1}{2T}\delta(f) + \frac{1}{4T}\frac{1}{1+\pi^2}\delta(f+\frac{1}{2T}) + \frac{1}{4T}\frac{1}{1+\pi^2}\delta(f-\frac{1}{2T})$$

La potenza del segnale di uscita vale

$$P_y = \frac{1}{4T^2} + \frac{1}{16T^2(1+\pi^2)^2} + \frac{1}{16T^2(1+\pi^2)^2} = \frac{1}{4T^2} + \frac{1}{8T^2(1+\pi^2)^2}$$

(11) **Giugno 2023 TC3a**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri il segnale a tempo continuo $y(t) = 2x^2(t-1)\cos(\pi B_x t)$, in cui $x(t)$ ha uno spettro $X(f)$ a banda limitata,

$$X(f) \begin{cases} \neq 0, & \text{if } |f| < B_x \\ = 0, & \text{if } |f| > B_x \end{cases}$$

La minima frequenza di campionamento $f_s$ (frequenza di Nyquist) che permette la perfetta ricostruzione di $y(t)$ a partire dai suoi campioni vale

a. $f_s = 5B_x$ ✓
b. $f_s = 2B_x$ (−10%)
c. $f_s = 7B_x$ (−10%)
d. $f_s = 4B_x$ (−10%)
e. nessuna delle altre risposte (−20%)

**SOLUZIONE**

La trasformata di fourier di $w(t) = x^2(t) = x(t) \cdot x(t)$ è pari a $W(f) = X(f) * X(f)$. Siccome il supporto della convoluzione tra due segnali è pari alla somma dei supporti, la banda di $W(f)$ è uguale a $2B_x$. Un ritardo temporale non influisce sulla banda del segnale, quindi anche la banda di $z(t) = w(t-1) = x^2(t-1)$ è uguale a $2B_x$.

La trasformata di Fourier di $y(t)$ vale:

$$Y(f) = 2Z(f) * \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{1}{2}B_x\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2}B_x\right)\right] = Z\left(f - \frac{1}{2}B_x\right) + Z\left(f + \frac{1}{2}B_x\right)$$

La massima frequenza di $Y(f)$ è $f_{max} = 2B_x + \frac{1}{2}B_x = \frac{5}{2}B_x$, da cui $f_s = 2f_{max} = 5B_x$.

(12) **Giugno 2023 TC3b**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si consideri il segnale a tempo continuo $y(t) = \frac{1}{2}x^2(t+1)\cos(3\pi B_x t)$, in cui $x(t)$ ha uno spettro $X(f)$ a banda limitata,

$$X(f) \begin{cases} \neq 0, & \text{if } |f| < B_x \\ = 0, & \text{if } |f| > B_x \end{cases}$$

La minima frequenza di campionamento $f_s$ (frequenza di Nyquist) che permette la perfetta ricostruzione di $y(t)$ a partire dai suoi campioni vale

a. $f_s = 3B_x$ (−10%)
b. $f_s = 10B_x$ (−10%)
c. $f_s = 7B_x$ ✓
d. $f_s = 5B_x$ (−20%)
e. Nessuna delle altre risposte (−10%)

**SOLUZIONE**

La trasformata di fourier di $w(t) = x^2(t) = x(t) \cdot x(t)$ è pari a $W(f) = X(f) * X(f)$. Siccome il supporto della convoluzione tra due segnali è pari alla somma dei supporti, la banda di $W(f)$ è uguale a $2B_x$. Un ritardo temporale non influisce sulla banda del segnale, quindi anche la banda di $z(t) = w(t+1) = x^2(t+1)$ è uguale a $2B_x$.

La trasformata di Fourier di $y(t)$ vale:

$$Y(f) = \frac{1}{2}Z(f) * \frac{1}{2}\left[\delta\left(f - \frac{3}{2}B_x\right) + \delta\left(f + \frac{3}{2}B_x\right)\right] = \frac{1}{4}Z\left(f - \frac{3}{2}B_x\right) + Z\left(f + \frac{3}{2}B_x\right)$$

La massima frequenza di $Y(f)$ è $f_{max} = 2B_x + \frac{3}{2}B_x = \frac{7}{2}B_x$, da cui $f_s = 2f_{max} = 7B_x$.

(13) **Gennaio 2025 TD1a**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Sia dato un sistema LTI a tempo discreto caratterizzato da questa relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = x[n] - \frac{1}{2}x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2] + 2y[n-1] - y[n-2]$$

La sua risposta all'impulso $h[n]$ vale:

a. $h[n] = u[n] + \frac{1}{2}u[n-1]$. ✓
b. $h[n] = u[n] + \frac{1}{2}u[n-2]$. (−10%)
c. $h[n] = \frac{1}{2}u[n] + u[n-1]$. (−10%)
d. $h[n] = u[n+1] + \frac{1}{2}u[n-1]$. (−10%)
e. $h[n] = u[n+1] - \frac{1}{2}u[n-2]$. (−10%)
f. Nessuna delle altre risposte è corretta.

**Soluzione**

La trasformata zeta della relazione ingresso-uscita vale:

$$Y(z) = X(z) - \frac{1}{2}X(z)z^{-1} - \frac{1}{2}X(z)z^{-2} + 2Y(z)z^{-1} - Y(z)z^{-2}\ .$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$$

Semplificando:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{2}z^{-1}\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Tenendo conto che il sistema è causale (vedi relazione ingresso/uscita), dalle tavole delle trasformate si ricava:

$$h(n) = u[n] + \frac{1}{2}u[n-1]$$

(14) **Gennaio 2025 TD1b**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Sia dato un sistema LTI a tempo discreto caratterizzato da questa relazione ingresso-uscita:

$$y[n] = x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] - \frac{1}{3}x[n-2] + 2y[n-1] - y[n-2]$$

La sua risposta all'impulso $h[n]$ vale:

a. $h[n] = u[n] + \frac{1}{3}u[n-1]$. ✓
b. $h[n] = u[n] + \frac{1}{3}u[n-2]$. (−10%)
c. $h[n] = \frac{1}{3}u[n] + u[n-1]$. (−10%)
d. $h[n] = u[n+1] + \frac{1}{3}u[n-3]$. (−10%)
e. $h[n] = u[n+1] - \frac{1}{3}u[n-3]$. (−10%)
f. Nessuna delle altre risposte è corretta.

**Soluzione**

La trasformata zeta della relazione ingresso-uscita vale:

$$Y(z) = X(z) - \frac{2}{3}X(z)z^{-1} - \frac{1}{3}X(z)z^{-2} + 2Y(z)z^{-1} - Y(z)z^{-2}\ .$$

Quindi la funzione di trasferimento è pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$$

Semplificando:

$$H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{3}z^{-1}\frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Tenendo conto che il sistema è causale (vedi relazione ingresso/uscita), dalle tavole delle trasformate si ricava:

$$h(n) = u[n] + \frac{1}{3}u[n-1]$$

(15) **Gennaio 2025 TD2a**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Un sistema LTI a tempo discreto è descritto dalla seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1) + \frac{1}{2}y(n-1)$$

Quanto vale il modulo della funzione di trasferimento $H(e^{j2\pi f})$ del sistema?

a. $|H(e^{j2\pi f})| = 1$ (−10%)
b. $|H(e^{j2\pi f})| = \frac{2}{\sqrt{5+4\cos(2\pi f)}}$ (−10%)
c. $|H(e^{j2\pi f})| = \sqrt{\frac{5-4\cos(2\pi f)}{5+4\cos(2\pi f)}}$ (−10%)
d. $|H(e^{j2\pi f})| = \sqrt{\frac{5+4\cos(2\pi f)}{5-4\cos(2\pi f)}}$ ✓
e. $H(e^{j2\pi f})$ non esiste (−10%)
f. Nessuna delle altre risposte è corretta (−10%)

**SOLUZIONE** La trasformata zeta della relazione ingresso uscita vale:

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1} + \frac{1}{2}Y(z)z^{-1}$$

Quindi:

$$Y(z) - \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} = X(z) + \frac{1}{2}X(z)z^{-1}$$

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right] = X(z)\left[1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

Siccome $H(e^{j2\pi f}) = H(z)|_{z=e^{j2\pi f}}$:

$$H(e^{j2\pi f}) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}}$$

Il suo modulo quadro vale:

$$|H(e^{j2\pi f})|^2 = H(e^{j2\pi f}) \cdot H^*(e^{j2\pi f}) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f}}{1 - \frac{1}{2}e^{j2\pi f}} =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi f} + \frac{1}{2}e^{j2\pi f} + \frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j2\pi f} - \frac{1}{2}e^{j2\pi f} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4} + \cos(2\pi f)}{\frac{5}{4} - \cos(2\pi f)} = \frac{5 + 4\cos(2\pi f)}{5 - 4\cos(2\pi f)}$$

La risposta corretta è quindi:

$$|H(e^{j2\pi f})| = \sqrt{\frac{5 + 4\cos(2\pi f)}{5 - 4\cos(2\pi f)}}$$

(16) **Gennaio 2025 TD2b**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Un sistema LTI a tempo discreto è descritto dalla seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) + \frac{1}{3}y(n-1)$$

Quanto vale il modulo della funzione di trasferimento $H(e^{j2\pi f})$ del sistema?

a. $|H(e^{j2\pi f})| = 1$ (−10%)
b. $|H(e^{j2\pi f})| = \frac{2}{\sqrt{5+3\cos(2\pi f)}}$ (−10%)
c. $|H(e^{j2\pi f})| = \sqrt{\frac{5-3\cos(2\pi f)}{5+3\cos(2\pi f)}}$ (−10%)
d. $|H(e^{j2\pi f})| = \sqrt{\frac{5+3\cos(2\pi f)}{5-3\cos(2\pi f)}}$ ✓
e. $H(e^{j2\pi f})$ non esiste (−10%)
f. Nessuna delle altre risposte è corretta (−10%)

**SOLUZIONE** La trasformata zeta della relazione ingresso uscita vale:

$$Y(z) = X(z) + \frac{1}{3}X(z)z^{-1} + \frac{1}{3}Y(z)z^{-1}$$

Quindi:

$$Y(z) - \frac{1}{3}Y(z)z^{-1} = X(z) + \frac{1}{3}X(z)z^{-1}$$

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right] = X(z)\left[1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Siccome $H(\mathrm{e}^{\jmath 2\pi f}) = H(z)|_{z=\mathrm{e}^{\jmath 2\pi f}}$:

$$H(\mathrm{e}^{\jmath 2\pi f}) = \frac{1 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi f}}{1 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi f}}$$

Il suo modulo quadro vale:

$$|H(\mathrm{e}^{\jmath 2\pi f})|^2 = H(\mathrm{e}^{\jmath 2\pi f}) \cdot H^*(\mathrm{e}^{\jmath 2\pi f}) = \frac{1 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi f}}{1 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi f}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\jmath 2\pi f}}{1 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\jmath 2\pi f}} =$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi f} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\jmath 2\pi f} + \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\jmath 2\pi f} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\jmath 2\pi f} + \frac{1}{9}} = \frac{\frac{10}{9} + \frac{2}{3}\cos(2\pi f)}{\frac{10}{9} - \frac{2}{3}\cos(2\pi f)} = \frac{5 + 3\cos(2\pi f)}{5 - 3\cos(2\pi f)}$$

La risposta corretta è quindi:

$$|H(\mathrm{e}^{\jmath 2\pi f})| = \sqrt{\frac{5 + 3\cos(2\pi f)}{5 - 3\cos(2\pi f)}}$$

(17) **1210**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si calcoli la varianza del processo casuale

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sin[2\pi f_0(t - nT)]p_T(t - nT)$$

dove $A_n$, $-\infty < n < \infty$, sono variabili casuali statisticamente indipendenti, tutte con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $[0, 1]$, $p_T(t)$ è una porta rettangolare causale di ampiezza unitaria e durata $T$, e le costanti reali e positive $f_0$ e $T$ sono legate dalla relazione $f_0 \cdot T = 8$.

a. $\sigma_X^2(t) = \frac{1}{12}\sin^2(2\pi f_0 t)$ ✓
b. $\sigma_X^2(t) = \frac{1}{3}\sin^2(2\pi f_0 t)$ (−10%)
c. $\sigma_X^2(t) = \frac{1}{12}$ (−10%)
d. nessuna delle altre risposte (−10%)
e. $\sigma_X^2(t) = \frac{1}{3}\cos^2(2\pi f_0 t)$ (−10%)

(18) **1211**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Si calcoli la varianza del processo casuale

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sin[2\pi f_0(t - nT)]p_T(t - nT)$$

dove $A_n$, $-\infty < n < \infty$, sono variabili casuali statisticamente indipendenti, tutte con densità di probabilità uniforme nell'intervallo $[0, 2]$, $p_T(t)$ è una porta rettangolare causale di ampiezza unitaria e durata $T$, e le costanti reali e positive $f_0$ e $T$ sono legate dalla relazione $f_0 \cdot T = 16$.

a. $\sigma_X^2(t) = \frac{1}{3}\sin^2(2\pi f_0 t)$ ✓
b. $\sigma_X^2(t) = \frac{4}{3}\sin^2(2\pi f_0 t)$ (−10%)
c. $\sigma_X^2(t) = \frac{1}{3}\cos^2(2\pi f_0 t)$ (−10%)
d. nessuna delle altre risposte (−10%)
e. $\sigma_X^2(t) = \frac{4}{3}$ (−10%)

**Soluzione 1210:**
Semplifico espressione di $X(t)$:

$$\begin{aligned}
X(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sin[2\pi f_0(t-nT)] p_T(t-nT) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \sin[2\pi f_0(t-n(8/f_0))] p_T(t-nT) \\
&= \sin[2\pi f_0 t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p_T(t-nT).
\end{aligned}$$

Calcolo la media $X(t)$:

$$\begin{aligned}
E\{X(t)\} &= E\left\{\sin[2\pi f_0 t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p_T(t-nT)\right\} \\
&= \sin[2\pi f_0 t] E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n p_T(t-nT)\right\} \\
&= \sin[2\pi f_0 t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\left\{A_n\right\} p_T(t-nT) \\
&= \sin[2\pi f_0 t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0.5 p_T(t-nT).
\end{aligned}$$

Sottraggo a $X(t)$ il suo valore medio:

$$\begin{aligned}
X'(t) = X(t) - E\{X(t)\} &= \sin[2\pi f_0 t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n - 0.5) p_T(t-nT) \\
&= \sin[2\pi f_0 t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n p_T(t-nT).
\end{aligned}$$

Dove $B_n$ sono variabili casuali uniformi indipendenti distribuite uniformemente in $[-0.5, 0.5]$. Hanno valor medio nullo e varianza

$$E\{B_n^2\} = \int_{-0.5}^{0.5} x^2 dx = \frac{1}{12}.$$

Calcolo il valore quadratico medio di $X'(t)$ che coincide con la varianza di $X(t)$:

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2(t) = E\{X'^2(t)\} &= E\left\{\sin^2[2\pi f_0 t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_n B_m p_T(t-nT) p_T(t-mT)\right\} \\
&= \sin^2[2\pi f_0 t] E\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_n B_m p_T(t-nT) p_T(t-mT)\right\} \\
&= \sin^2[2\pi f_0 t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\left\{B_n B_m\right\} p_T(t-nT) p_T(t-mT) \\
&= \sin^2[2\pi f_0 t] \sum_{n=-\infty} E\left\{B_n^2\right\} p_T(t-nT) \\
&= \sin^2[2\pi f_0 t] \frac{1}{12} \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_T(t-nT) \\
&= \sin^2[2\pi f_0 t] \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

**Fine Soluzione.**

(19) **1701**

RISPOSTA MULTIPLA | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Un processo casuale WSS $X(t)$ con spettro di potenza $S_X(f) = N_0/2$ per $|f| < B_X$ e nullo altrove passa attraverso un filtro passa basso ideale con f.d.t. $H(f) = 2$ per $|f| < \alpha B_X$, dove $\alpha > 0$. Si indichi con $Y(t)$ il processo in uscita e con $R_{YX}(\tau) = E\{X(t)Y(t+\tau)\}$ la mutua correlazione tra ingresso e uscita. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. $R_{YX}(0) = 2\alpha N_0 B_X$ per $0 < \alpha < 1$. ✓
b. $R_{YX}(0) = 4\alpha N_0 B_X$ per $0 < \alpha < 1$. $(-10\%)$
c. $R_{YX}(0) = 2N_0 B_X$ per $\alpha > 0$. $(-10\%)$
d. $R_{YX}(0) = \frac{\alpha}{2} N_0 B_X$ per $0 < \alpha < 1$. $(-10\%)$
e. $R_{YX}(0) = (\alpha + 1) N_0 B_X$ per $\alpha > 0$. $(-10\%)$

(20) **1702**

Risposta multipla | punteggio max. 1 | penalità 0.10 | Una sola alternativa | Ordine casuale

Un processo casuale WSS $X(t)$ con spettro di potenza $S_X(f) = N_0/2$ per $|f| < B_X$ e nullo altrove passa attraverso un filtro passa basso ideale con f.d.t. $H(f) = 2$ per $|f| < \alpha B_X$, dove $\alpha > 0$. Si indichi con $Y(t)$ il processo in uscita e con $R_{YX}(\tau) = E\{X(t)Y(t+\tau)\}$ la mutua correlazione tra ingresso e uscita. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. $R_{YX}(0) = 2N_0 B_X$ per $\alpha > 1$. ✓
b. $R_{YX}(0) = 4N_0 B_X$ per $\alpha > 1$. $(-10\%)$
c. $R_{YX}(0) = \alpha N_0 B_X$ per $\alpha > 0$. $(-10\%)$
d. $R_{YX}(0) = \frac{\alpha}{2} N_0 B_X$ per $0 < \alpha < 1$. $(-10\%)$
e. $R_{YX}(0) = (\alpha + 1) N_0 B_X$ per $\alpha > 0$. $(-10\%)$

---

**Soluzione 1701:**
Lo spetto di potenza mutua vale:

$$S_{YX}(f) = H(f) S_x(f)$$

La mutua correlazione nell'origine corrisponde all' integrale dello spettro di potenza mutua:

$$R_{YX}(0) = \int S_{YX}(f) df$$

Il prodotto delle due porte corrisponde alla porta di supporto minimo, con ampiezza pari al prodotto delle due ampiezze, quindi $R_{YX}(0) = 2N_0 B_X$ per $\alpha > 1$ e $R_{YX}(0) = 2\alpha N_0 B_X$ per $0 < \alpha < 1$.
**Fine Soluzione.**

*Punteggio complessivo: 20*