Teoria dei Segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Spettro di energia
- Funzione di autocorrelazione
- Spettro di potenza

Anno accademico 2024-2025
Ultimo aggiornamento: Ottobre 2024

Contenuti di questo capitolo

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- In questo capitolo introdurremo nel dettaglio un concetto che avevamo già anticipato in maniera qualitativa, e cioè:
- Legame tra trasformata di Fourier e contenuto spettrale del segnale in termini di energia (o di potenza)

- Si ricorda, da lezioni precedenti, che abbiamo introdotto le seguenti definizioni di energia e potenza:

$$\boxed{E(x) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}$$

$$\boxed{P(x) \triangleq \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} |x(t)|^2 dt}$$

Spettro di energia

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Definizione di **Spettro di Energia** di un segnale $x(t)$:

$$S_x(f) = \left|X(f)\right|^2$$

  - Modulo al quadrato della trasformata di Fourier del segnale
- Lo spettro di energia è (molto) usato in quanto è legato all'energia del segnale tramite le seguenti relazioni, già viste in precedenza:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|X(f)\right|^2 df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df$$

L'integrale dello spettro di energia dà l'energia del segnale stesso

Spettro di energia all'uscita di un filtro

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Proprietà relativa al passaggio dello spettro di energia attraverso un sistemi LTI:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t)$$

$$Y(f) = H(f) \cdot X(f) \Rightarrow |Y(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot |X(f)|^2$$

$$\boxed{S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)}$$

Si noti dunque che per un generico filtro (cioè una generica funzione di trasferimento) a livello di trasferimento di energia dall'ingresso all'uscita conta solo il <u>*modulo delle funziona di trasferimento, e non la fase*</u> *!*

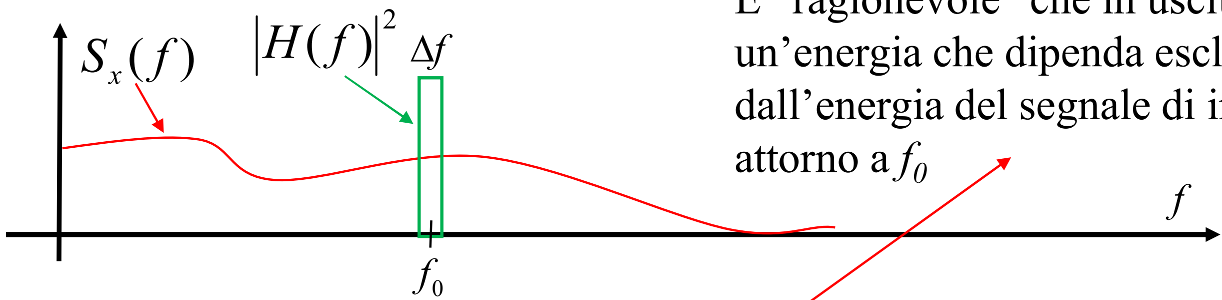
Da questa osservazione è possibile comprendere perché le definizioni di bande sono sempre relative ai moduli delle trasformate

Ne consegue che l'energia del segnale di uscita

si può calcolare come: $E(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 \cdot S_x(f) df$

Significato fisico dello spettro di energia

- Per un segnale ad energia finita, lo spettro di energia fornisce informazione sul contenuto di energia attorno a ciascuna frequenza f
- Supponiamo infatti di avere un sistema lineare con una funzione di trasferimento passabanda molto stretta attorno a f_0
  - (e a modulo unitario)



È "ragionevole" che in uscita si ottenga un'energia che dipenda esclusivamente dall'energia del segnale di ingresso attorno a f_0

$$S_y(f) \cong S_x(f_0) \text{ per } f \in [f_0 - \Delta f/2, f_0 + \Delta f/2] \text{ (e =0 altrove)}$$

$$\Rightarrow E(y) = \int_{f_0-\Delta f/2}^{f_0+\Delta f/2} S_y(f)df \cong \boxed{S_x(f_0)\cdot \Delta f}$$

Significato fisico dello spettro di energia

$$S_x(f) = |X(f)|^2$$

- Commenti:
- Il modulo (al quadrato) della trasformata di Fourier riveste un ruolo particolare
  - Fornisce infatti una informazione relativa alla quantità di energia di un certo segnale attorno a ciascuna possibile frequenza f
- Nel gergo ingegneristico, si indica spesso lo spettro di energia semplicemente come «spettro» o «contenuto spettrale» o «densità spettrale di energia»
- Lo spettro di energia ha, dimensionalmente, il significato di energia per unità di frequenza

$$\underbrace{E(x)}_{\text{energia}} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, \underbrace{df}_{\text{Intervallo (infinitesimo) di frequenze}} \quad \Rightarrow \quad S_x(f) = \left[\frac{energia}{Hz}\right]$$

Una breve parentesi: decibel (dB)

- In moltissime applicazioni ingegneristiche, è molto comune esprimere alcune quantità in decibel (dB)
- Per DEFINIZIONE, i decibel sono definiti su rapporti <u>tra due potenze</u> e con la seguente definizione:

$$\boxed{\left(\frac{P_1}{P_2}\right)_{linear} \Rightarrow \left(\frac{P_1}{P_2}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)}$$

  - Devono dunque essere usati solo per quantità adimensionate (come è ad esempio un rapporto tra quantità omologhe)
  - Dalla definizione base, derivano varie tipologie di utilizzo
  - Ad esempio, nel nostro contesto abbiamo appena visto che:

$$|H(f)|^2 = \frac{S_y(f)}{S_x(f)}$$

Rapporto adimensionato tra energie, e dunque di fatto anche tra potenze → può correttamente essere espresso in dB

$$\Rightarrow \quad |H(f)|^2_{dB} = \frac{S_y(f)}{S_x(f)} = 10\log_{10}\left(|H(f)|^2\right)$$

Una breve parentesi: decibel (dB)

- Conseguentemente $$\left|H(f)\right|^2_{dB} = 20\log_{10}\left(\left|H(f)\right|\right)$$
- Altri ambiti applicativi dei decibel:
  - dato che la potenza dissipata su un resistore è proporzionale ad una tensione (o corrente) al quadrato, si possono usare le definizioni di dB anche per i rapporti di tra tensioni (o correnti)

$$\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = \left(\frac{V_1^2}{V_2^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{P_1}{P_2}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{V_1^2}{V_2^2}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

    - Analogamente in corrente: $\left(\frac{P_1}{P_2}\right)_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{I_1^2}{I_2^2}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$

  - Per estensione, si usano anche altre definizioni
    - Potenze in dBm: potenze riferite ad 1mW

$$\mathrm{P}_{dBm} = 10\log_{10}\left(\frac{P}{1\mathrm{mW}}\right)$$

Funzione di autocorrelazione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Definizione (da usare per segnali ad energia finita):

$$R_x(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)\,dt$$

- Si tratta di una nuova funzione ottenuta a partire da $x(t)$, definita rispetto alla variabile τ (che, come vedremo, ha ancora un significato temporale)
- Ricordando la definizione di convoluzione, l'autocorrelazione può anche essere espressa come:

$$\boxed{R_x(\tau) = x(\tau) * x^*(-\tau)}$$

ricordando che $a(\tau) * b(\tau) = \int a(\tau - r)b(r)dr$

$$x(\tau) * x^*(-\tau) = \int x(\tau - r)x^*(-r)dr \quad r' = -r$$

$$= \int x(\tau + r')x^*(r')dr'$$

Questo è il motive per cui si chiama "auto-correlazione": è una sorta di convoluzione della funzione con se stessa

Funzione di autocorrelazione

- Legame con lo spettro di Energia

$$S_x(f) = \left|X(f)\right|^2 = X(f) \cdot X^*(f)$$

antitrasformando e ricordando che: $F^{-1}\left(X^*(f)\right) = x^*(-t)$

$$F^{-1}\left(S_x(f)\right) = x(t) * x^*(-t) = R_x(\tau)$$

Si dimostra dunque che: $\boxed{S(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}}$

Questo risultato sarà usato in maniera importante in uno dei prossimi capitoli, relativo ai processi casuali, anche se in un contesto leggermente diverso

Lo spettro di energia è uguale alla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione

Funzione di autocorrelazione

- Altra proprietà: calcolando la funzione di autocorrelazione in $\tau = 0$ si ottiene:

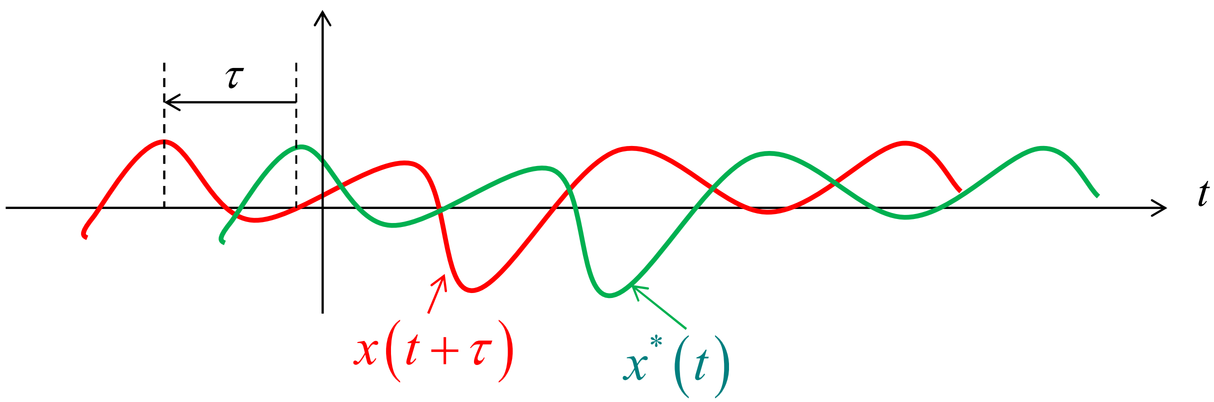
$$\boxed{R_x(0) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t)\, dt = E(x)}$$

- La funzione di autocorrelazione calcolata in $t = 0$ è pari all'energia del segnale

Funzione di autocorrelazione

- L'autocorrelazione è anche interpretabile come il prodotto scalare del segnale con se stesso traslato di τ

$$R_x(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)x^*(t)\,dt = x(\tau) * x^*(-\tau) = \langle x(t+\tau), x(t) \rangle$$



Altre proprietà della autocorrelazione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- La funzione di autocorrelazione (fda) ha simmetria hermitiana (dimostrazione alla pagina successiva)

$$\boxed{R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)}$$

- Conseguentemente, l'autocorrelazione è pari se $x(t)$ è reale

$$\boxed{R_x(\tau) = R_x(-\tau)}$$

Dimostrazione simmetria Hermitiana

$$R_x^*(\tau) \triangleq \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\,x^*(t)\,dt\right]^*$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t+\tau)\,x(t)\,dt \qquad t' = t+\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t')\,x(t'-\tau)\,dt$$

$$= R_x(-\tau)$$

Altre proprietà della autocorrelazione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Per la diseguaglianza di Schwarz, la funzione di autocorrelazione ha un massimo nell'origine:

$$\left|R_x(\tau)\right|^2 = \left|\int x(t+\tau)\,x^*(t)\,dt\right|^2 \leq E^2(x) = R_x^2(0)$$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x^*(\tau)d\tau\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t+\tau)\right|^2 d\tau \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left|x^*(\tau)\right|^2 d\tau$$

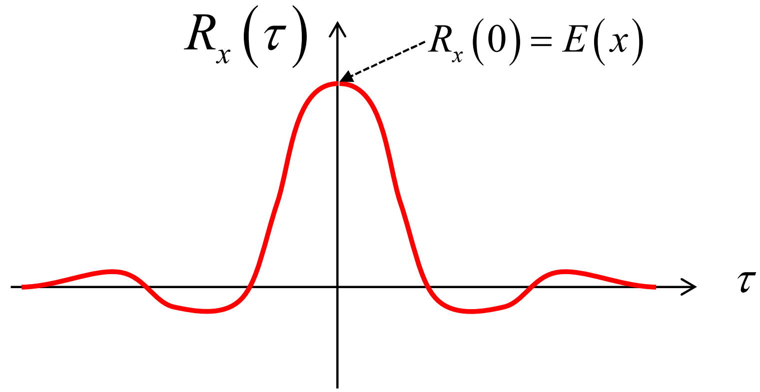
$$\Rightarrow \left|R_x(\tau)\right|^2 \leq E^2(x) \Rightarrow \left|R_x(\tau)\right| \leq E(x) = \left|R_x(0)\right|$$

Riassunto proprietà autocorrelazione

- Per un segnale reale $x(t)$ l'autocorrelazione è:

  1. Reale
  2. Pari
  3. Con un massimo nell'origine
  4. Questo massimo è uguale all'energia del segnale

Esempio di una possibile autocorrelazioni di segnale reale

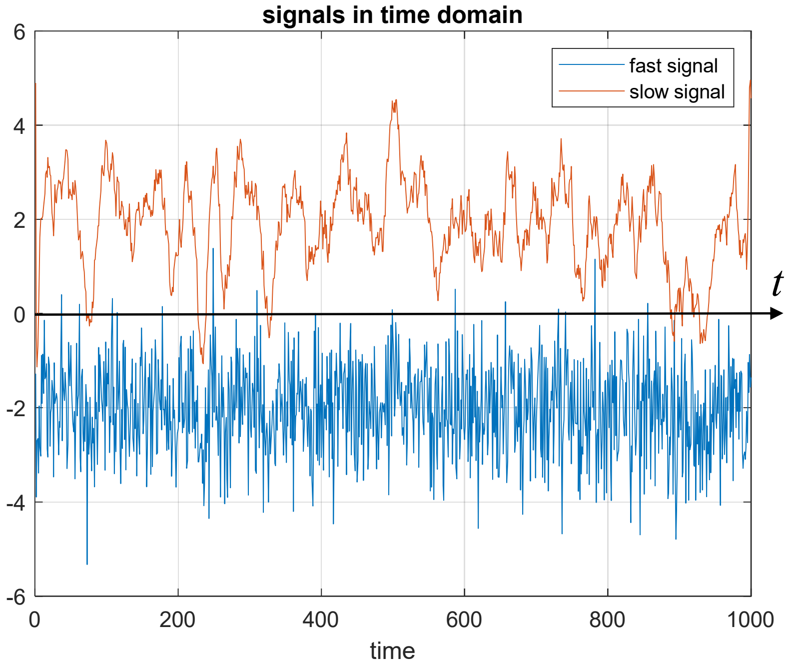


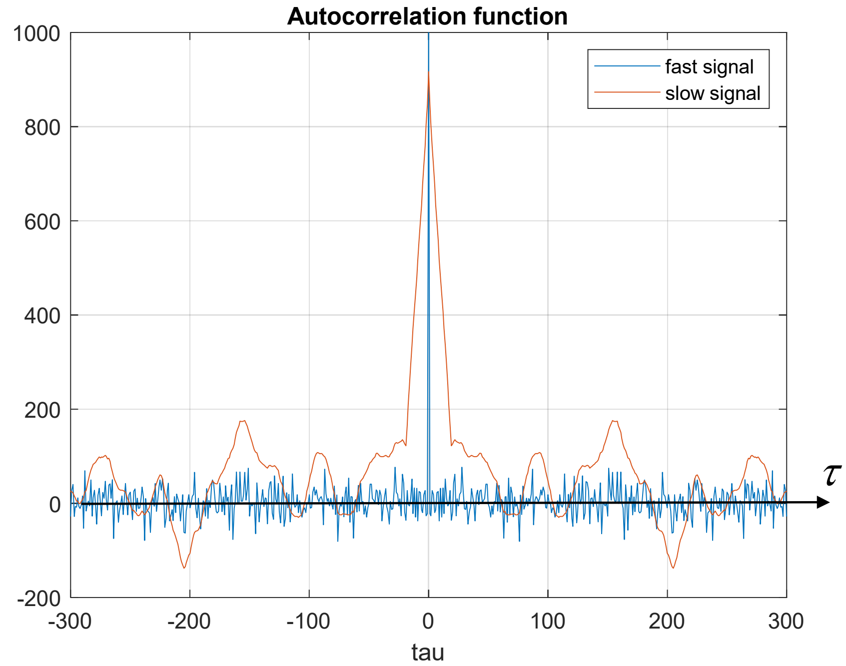
Infine, una importante proprietà qualitativa è la seguente: Più un segnale varia velocemente nel tempo, più la sua funzione di autocorrelazione è concentrata attorno a τ=0

Si veda slide successiva

Autocorrelazione e velocità di variazione nel tempo del segnale: esempio numerico

- Consideriamo due segnali reali con tipologie di variazione nel tempo significativamente diverse
  - Segnale «veloce» nel tempo
  - Segnale «lento» nel tempo
- Calcoliamo (esempi numerici in Matlab) le rispettive autocorrelazioni





Ulteriori commenti su slide precedenti

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Considerazioni qualitative in frequenza:
  - Segnale «veloce» nel tempo → Spettro di energia con banda occupata "ampia"
  - Segnale «lento» nel tempo→ Spettro di energia con banda "stretta"

- La autocorrelazione (che è la anti-trasformata dello Spettro di energia) per le proprietà di dualità tempo-frequenza tende ad essere dunque
  - Segnale «veloce» nel tempo → autocorrelazione "stretta"
  - Segnale «lento» nel tempo→ autocorrelazione "larga"

Mutua Correlazione tra due segnali

- Estendendo le definizioni a due segnali diversi otteniamo la definizione di mutua correlazione:

$$R_{xy}(\tau) \triangleq \int x(t+\tau)\, y^*(t)\, dt = R^*_{yx}(-\tau)$$

Funzione di mutua correlazione (cross-correlation)

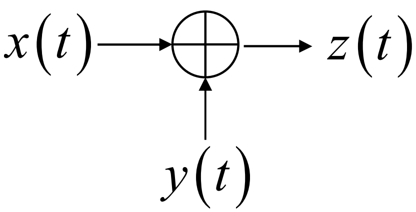
  - Analogamente:

$$S_{xy}(f) \triangleq \mathcal{F}\left(R_{xy}(\tau)\right) = X(f)\, Y^*(f) = S^*_{yx}(f)$$

Spettro di energia mutua (cross energy spectrum)

- Lo spettro di energia mutuo compare in alcune situazioni particolari, come da esempi nelle prossime slide
  - Ha inoltre notevolissima importanza nel processamento dei segnali numerici (Digital Signal Processing, DSP)

Esempio: Spettro della somma di due segnali



$$z(t) = x(t) + y(t)$$

$$Z(f) = X(f) + Y(f)$$

$$S_Z(f) = \left|Z(f)\right|^2 = \left|X(f) + Y(f)\right|^2$$

$$\left|Z(f)\right|^2 = \left|X(f)\right|^2 + \left|Y(f)\right|^2 + 2\Re\left(X(f)Y^*(f)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{S_z(f) = S_x(f) + S_y(f) + 2\Re\left(S_{xy}(f)\right)}$$

Esempio in cui compare lo spettro di energia mutuo

Analoghi passaggi su autocorrelazione

Autocorrelazione della somma di due segnali

$$R_z(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t+\tau) z^*(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \big(x(t+\tau) + y(t+\tau)\big)\big(x^*(t) + y^*(t)\big)\,dt$$

$$= R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)$$

$$= R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2\Re\left[R_{xy}(\tau)\right]$$

Commenti su cross-correlazione

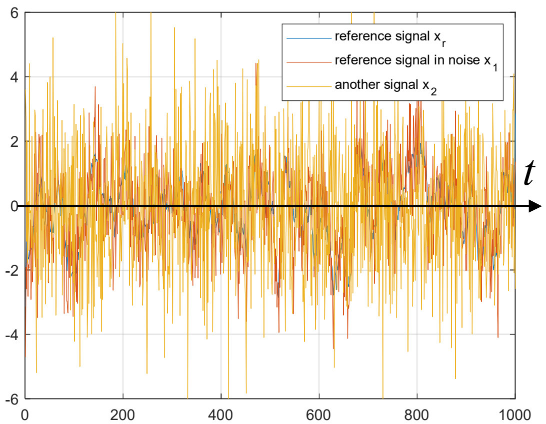
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

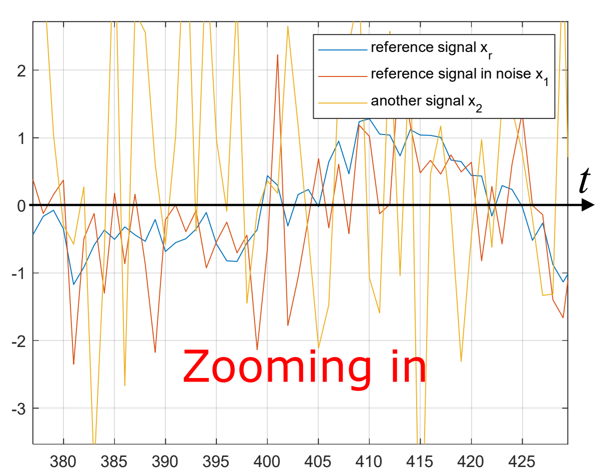
- La cross-correlazione tra due segnali è usata in molti importantissimi problemi pratici, ad esempio per studiare quali segnali sono tra di loro più simili
- Supponiamo ad esempio di avere un insieme di segnali $x_i(t)$ e di voler determinare quale di questi è più vicino ad un certo segnale di riferimento $x(t)$
  - Si tratta di un problema «classico» in moltissimi ambiti, ad esempio il riconoscimento di segnali vocali o immagini
    - Applicazioni molto importanti anche in ambito di machine learning e neural networks
- Sotto opportune condizioni di normalizzazione, il problema si può ricondurre alla determinazione del segnale $x_i(t)$ che massimizza la cross-correlazione con $x(t)$

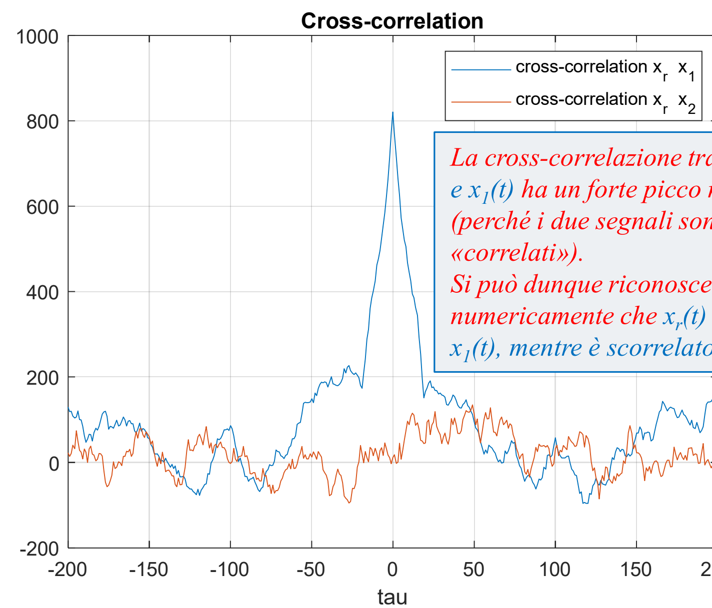
Esempio di applicazione della cross-correlazione (esempio numerico in matlab)

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Consideriamo tre segnali
  1. Un generico segnale $x_r(t)$
  2. Un segnale $x_1(t) = x_r(t) + n(t)$ uguale al precedente, al quale abbiamo aggiunto una notevole quantità di «rumore»
     - Per ora si intenda il rumore semplicemente come un segnale che varia casualmente nel tempo e crea un «disturbo additivo» sul segnale $x_r(t)$
  3. Un ulteriore segnale $x_2(t)$ che non c'entra nulla con i precedenti due (ma ha ampiezza simile)



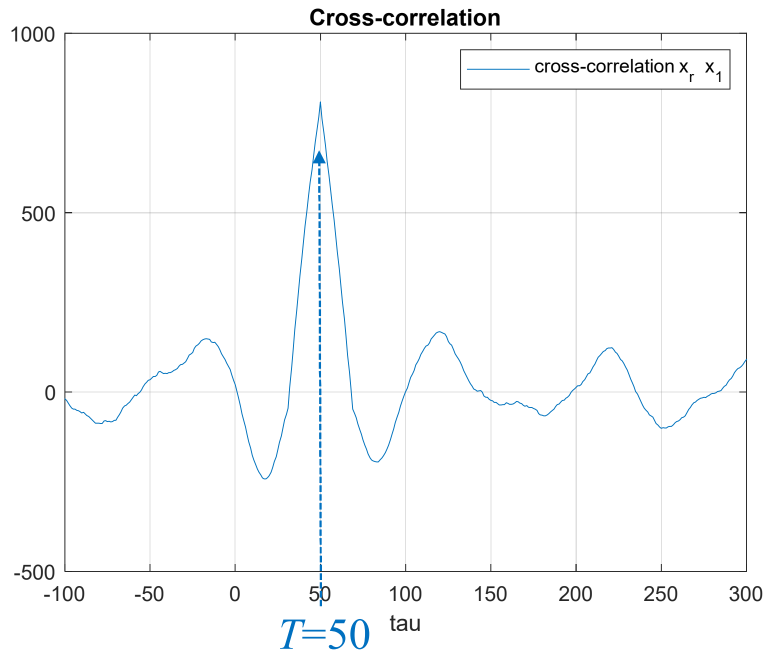




La cross-correlazione tra i primi $x_r(t)$ e $x_1(t)$ ha un forte picco nell'origine (perché i due segnali sono fortemente «correlati»).
Si può dunque riconoscere numericamente che $x_r(t)$ è simile a $x_1(t)$, mentre è scorrelato da $x_2(t)$

Altra applicazione della cross-correlazione: stima del ritardo tra due segnali

- Consideriamo due segnali
  1. Un generico segnale $x_r(t)$ (lo stesso della slide precedente)
  2. Una sua versione ritardata $x_1(t)= x_r(t-T)+n(t)$ (con $T=50$) al quale abbiamo aggiunto una notevole quantità di «rumore»
- La cross-correlazione tra questi due segnali ha un forte picco in una posizione pari al ritardo T
  - *(… perché??? Provare a capirlo in autonomia a casa)*
  - Il metodo della cross-correlazione è usatissimo per stimare i ritardi, obiettivo fondamentale per moltissime applicazioni ingegneristiche
    - A titolo di esempio: il GPS (Global Positioning System) è basato sulla stima di ritardi di propagazione, e i ricevitori usano sofisticati algoritmi basati sulla cross-correlazione



SPETTRO DI POTENZA

Per segnali ad energia infinita, ma a <u>potenza media finita</u>

Nella prossima sezione si introdurranno NUOVE definizioni, con l'obiettivo di ottenere una definizione di <u>densità spettrale di potenza</u> (e NON più di energia) adatta a trattare segnali a ad energia infinita, ma a potenza media finita

Spettro di potenza di segnali periodici

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Per un segnale periodico abbiamo visto che:
  - Esiste la trasformata di Fourier
  - L'energia è infinita
  - La potenza media è finita
- Anche per i segnali periodici sarebbe utile avere una definizione di spettro, ma NON può essere lo spettro di energia in quanto questa NON è finita
- Si introduce allora una definizione di spettro di potenza $G_x(f)$, che dovrà soddisfare la relazione

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)\,df = P(x)}$$

Spettro di potenza per segnali periodici

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Per un segnale periodico abbiamo visto in precedenza che l'energia è infinita, mentre la sua potenza media è calcolabile tramite i coefficienti della serie di Fourier:

$$\boxed{P(x) = \sum_i |\mu_i|^2}$$

- Conseguentemente, è ragionevole definire lo spettro di potenza per un segnale periodico come:

$$\boxed{G_x(f) \triangleq \sum_i |\mu_i|^2 \delta(f - i/T)}$$

Funzione di autocorrelazione per segnali periodici

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- La funzione di autocorrelazione può inoltre essere definita come:

$$\boxed{R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\,x^*(t)\,dt}$$

Spettro di potenza per segnali periodici

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Verifichiamo che $$\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df = P(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_x(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_i \left(|\mu_i|^2 \delta(f - i/T) \right) df =$$

$$\sum_i |\mu_i|^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - i/T)\, df \right) = \sum_i |\mu_i|^2 = P(x)$$

- Verifichiamo inoltre che: $$R_x(0) = P(x)$$

$$R_x(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x^*(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = P(x)$$

Spettro di potenza per segnali periodici

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Infine, è possibile verificare che anche in questo caso si ha:

$$\boxed{G_x(f) = \mathcal{F}\{R(\tau)\}}$$

A casa, provate a dimostrare questo risultato, sfruttando le relazioni introdotte nel capitolo precedente e relative alle Trasformate dei segnali periodici

- Questo risultato, di cui per ora non è banalissimo comprendere l'importanza, sarà fondamentale più avanti nell'ambito della teoria dei processi casuali

Spettro di potenza per segnali a potenza finita

- Per <u>generici</u> segnali a potenza media finita (<u>anche non periodici</u>), la definizione di potenza è più complessa e passa attraverso le seguenti operazioni:

$$S_T(f) = \frac{1}{T}\left|X_T(f)\right|^2$$

Spettro energia segnale troncato su una finestra temporale T e normalizzato a T *(è detto Periodogramma)*

$$\boxed{G_x(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|X_T(f)\right|^2}$$

Definizione dello Spettro di potenza come limite per $T=\infty$

$$\boxed{\Phi_x(\tau) \triangleq \mathcal{F}^{-1}\left\{G_x(f)\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\,x^*(t)\,dt}$$

Definizione della Funzione di autocorrelazione

Spettro di potenza per segnali a potenza finita filtrati

- Si può dimostrare che anche per gli spettri di potenza vale la seguente relazione:

$$\text{Potenza finita} \quad x(t) \longrightarrow \boxed{H(f)} \longrightarrow y(t) \quad \text{Potenza finita}$$

$$G_x(f) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{G_y(f) = G_x(f)\left|H(f)\right|^2}$$

Nota: il concetto di spettro di potenza per segnali a potenza finita non è in realtà molto utilizzato per i segnali "determinati" che stiamo vedendo adesso.

Sarà tuttavia <u>fondamentale per i processi casuali</u>, cioè per i segnali con caratteristiche stocastiche che vedremo nella sezione successiva