Elaborazione dei Segnali

POLITECNICO
DI TORINO

Dipartimento
di Elettronica
e Telecomunicazioni

Lezione 4

Analisi in frequenza di segnali a tempo discreto: DTFT

A.A. 2023-2024

Definizione di DTFT

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Una sequenza x(n) può essere rappresentata nel dominio della frequenza in maniera analoga ai segnali a tempo continuo utilizzando la trasformata di Fourier a tempo discreto, definita come:

$$\boxed{X\left(e^{j2\pi f}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi f k}}$$

DTFT

- Anche se il segnale di partenza è a tempo discreto, la DTFT è una funzione (complessa) dalla variabile continua *f* (frequenza numerica).

- Trasformata di Fourier di un segnale a tempo continuo:

$$X(f_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f_a t} dt$$

Osservazioni

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\boxed{X\left(e^{j2\pi f}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)e^{-j2\pi f k}}$$

DTFT

- La DTFT è una funzione periodica di periodo 1 rispetto alla frequenza numerica f:

$$X\left(e^{j2\pi f+j2\pi i}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)e^{-j2\pi f k-j2\pi ik}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)e^{-j2\pi f k}e^{-j2\pi ik}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)e^{-j2\pi f k}=X\left(e^{j2\pi f}\right)\quad \forall i \text{ intero}$$

- Spesso la DTFT è espressa in funzione della pulsazione discreta:

$$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)e^{-j\omega k}}$$

  - La DTFT è una funzione periodica di periodo 2π in ω.

Relazione con la trasformata di Fourier di un segnale analogico campionato

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Sia x(t) un segnale analogico che viene campionato con una frequenza di campionamento $f_c=1/T_c$:

$$x_c(t)=x(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_c)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT_c)\delta(t-kT_c)$$

- La trasformata di Fourier (FT) del segnale campionato si può esprimere come:

$$X_c(f_a)=F\left\{x(t)\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_c)\right\}=F\{x(t)\}*F\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_c)\right\}=$$

$$=X(f)*\frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(f_a-k\frac{1}{T_c}\right)=\frac{1}{T_c}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X\left(f_a-k\frac{1}{T_c}\right)$$

oppure

$$X_c(f_a)=F\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT_c)\cdot\delta(t-kT_c)\right\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT_c)F\{\delta(t-kT_c)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(kT_c)e^{-j2\pi kT_c f_a}$$

Relazione con la trasformata di Fourier di un segnale analogico campionato

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- DTFT: $$X\left(e^{j2\pi f}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\, e^{-j2\pi f k}$$
- La trasformata di Fourier (FT) del segnale campionato: $$X_c\left(f_a\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x\left(kT_c\right)e^{-j2\pi kT_c f_a}$$
- Le due trasformate coincidono se: $$f = T_c f_a = \frac{f_a}{f_c}$$

Inversione della DTFT

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\boxed{X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)e^{-j\omega k}}$$

- L'espressione precedente può essere interpretata come lo sviluppo in serie di Fourier della funzione periodica $X\left(e^{j\omega}\right)$, dove i coefficienti della serie sono le proiezioni del segnale lungo i vettori della base di funzioni esponenziali :

$$\boxed{x(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega k}\,d\omega}$$

Inversione della DTFT

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\boxed{x(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega k}\, d\omega}$$

- Questo è proprio il prodotto scalare della funzione lungo le funzioni della base dei segnali di Fourier, valutato sul periodo (-π,π], e diviso per il supporto 2π considerato.

- Con il cambio di variabile $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ otteniamo l'analoga espressione in f:

$$\boxed{x(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X\left(e^{j2\pi f}\right) e^{j2\pi f k}\, df}$$ **IDTFT**

Verifica dell'inversione

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X\left(e^{j2\pi f}\right)e^{j2\pi fk}df = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left[\sum_n x(n)e^{-j2\pi fn}\right]e^{j2\pi fk}df =$$

$$= \sum_n x(n)\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-j2\pi f(n-k)}df = \sum_n x(n)\frac{1}{-j2\pi(n-k)}e^{-j2\pi f(n-k)}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} =$$

$$= \sum_n x(n)\frac{1}{j2\pi(n-k)}\left(e^{j\pi(n-k)} - e^{-j\pi(n-k)}\right) =$$

$$= \sum_n x(n)\frac{\sin(\pi(n-k))}{\pi(n-k)} = \sum_n x(n)\mathrm{sinc}(n-k) = x(k)$$

Condizioni di esistenza

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La serie

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j\omega k}$$

converge in modo uniforme a una soluzione se l'argomento è sommabile in modulo, cioè se:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| < \infty$$

- Questa condizione di esistenza è sufficiente (ma non necessaria) e garantisce che:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| < \infty \quad \forall \omega$$

Condizioni di esistenza

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Infatti:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j\omega k}\right| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|x(k)e^{-j\omega k}\right| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| < \infty$$

- E' facile dimostrare che una sequenza sommabile in modulo ha energia finita:

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 \le \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|\right)^2 < \infty$$

- Note:
  - Assolutamente sommabile implica esistenza DTFT
  - Assolutamente sommabile implica energia finita ma non viceversa

Esempio 1

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x(n) = a^n u(n) \text{ con } |a| < 1$$

- Verifichiamo l'esistenza: $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|} < \infty$
  - dove abbiamo usato la formula: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$

    valida per ogni numero complesso r tale che |r|<1.

- Calcoliamo la DTFT:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k e^{-j\omega k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^k = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

Esempio 2

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Calcolare la DTFT della sequenza x(n)={1,0,3,-2}

- La sequenza x(n) si può rappresentare tramite combinazione di delta numeriche:

$$x(n)=\delta(n)+3\delta(n-2)-2\delta(n-3)$$

- Applicando la definizione:

$$X\left(e^{j2\pi f}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j2\pi f k}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k)e^{-j2\pi f k}+3\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k-2)e^{-j2\pi f k}-2\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(k-3)e^{-j2\pi f k}=$$

$$=1+3e^{-j4\pi f}-2e^{-j6\pi f}$$

Proprietà della DTFT

Tabella proprietà DTFT

Proprietà	x(n),y(n)	DTFT $X(e^{j2\pi f})$
Linearità	$a_1 x(n) + a_2 y(n)$	$a_1 \cdot X(e^{j2\pi f}) + a_2 \cdot Y(e^{j2\pi f})$
Ribaltamento	$x(-n)$	$X(e^{-j2\pi f})$
Ritardo	$x(n-N)$	$X(e^{j2\pi f}) e^{-j2\pi f N}$
Modulazione	$e^{j2\pi f_0 n} \cdot x(n)$	$X(e^{j2\pi (f-f_0)})$
Derivata in frequenza	$n \cdot x(n)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{dX(e^{j2\pi f})}{df}$
Convoluzione	$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n-k)$	$X(e^{j2\pi f}) \cdot Y(e^{j2\pi f})$
Prodotto	$x(n) \cdot y(n)$	$X(e^{j2\pi f}) * Y(e^{j2\pi f}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi\eta}) Y(e^{j2\pi(f-\eta)}) d\eta$

Ribaltamento

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x(-n) \Rightarrow X\left(e^{-j2\pi f}\right)$$

- Dimostrazione:

$$z(n) = x(-n)$$

$$Z\left(e^{j2\pi f}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(k) e^{-j2\pi f k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(-k)\, e^{-j2\pi f k}$$

  - Con la sostituzione di variabile i=-k, si ottiene:

$$Z\left(e^{j2\pi f}\right) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i)\, e^{j2\pi f i} = X\left(e^{-j2\pi f}\right)$$

Ritardo

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x(n-N) \Rightarrow X\left(e^{j2\pi f}\right)e^{-j2\pi f N}$$

- Dimostrazione:

$$\mathrm{DTFT}[x(n-N)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k-N)e^{-j2\pi f k}$$

- Sostituendo k-N con n:

$$\mathrm{DTFT}[x(n-N)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi f (n+N)} =$$

$$= e^{-j2\pi f N} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j2\pi fn} = X\left(e^{j2\pi f}\right)e^{-j2\pi f N}$$

Traslazione in frequenza (modulazione)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$e^{j2\pi f_0 n}\cdot x(n) \quad \Rightarrow \quad X\left(e^{j2\pi(f-f_0)}\right)$$

- Dimostrazione:

$$\mathrm{DTFT}\left[e^{j2\pi f_0 n}\cdot x(n)\right]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 k}\cdot x(k)e^{-j2\pi f k}=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j2\pi(f-f_0)k}=X\left(e^{j2\pi(f-f_0)}\right)$$

Derivata in frequenza

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$n \cdot x(n) \Rightarrow \frac{j}{2\pi}\frac{dX\left(e^{j2\pi f}\right)}{df}$$

- Dimostrazione:
  - La derivata rispetto a f della DTFT di x(n) è:

$$\frac{dX\left(e^{j2\pi f}\right)}{df} = \frac{d}{df}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-j2\pi fk} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\frac{d}{df}e^{-j2\pi fk} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)(-j2\pi k)e^{-j2\pi fk} = -j2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k\,x(k)e^{-j2\pi fk} =$$

$$= -j2\pi \cdot DTFT\left[n \cdot x(n)\right]$$

Convoluzione lineare

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n-k) \quad \Rightarrow \quad X\left(e^{j2\pi f}\right) \cdot Y\left(e^{j2\pi f}\right)$$

- Dimostrazione:

$$\mathrm{DTFT}\left[x(n) * y(n)\right] = \mathrm{DTFT}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n-k)\right] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n-k)\right] e^{-j2\pi f n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-k) e^{-j2\pi f n}\right] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(i) e^{-j2\pi f (i+k)}\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi f k} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} y(i) e^{-j2\pi f i} =$$

$$= X\left(e^{j2\pi f}\right) \cdot Y\left(e^{j2\pi f}\right)$$

Prodotto

$$x(n)\cdot y(n) \Rightarrow X\left(e^{j2\pi f}\right) * Y\left(e^{j2\pi f}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X\left(e^{j2\pi\eta}\right) Y\left(e^{j2\pi(f-\eta)}\right) d\eta$$

- Dimostrazione:

$$z(n) = x(n)\cdot y(n)$$

$$Z\left(e^{j2\pi f}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(k) e^{-j2\pi f k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(k) e^{-j2\pi f k}$$

  - Sostituisco a x(k) la sua espressione tramite IDTFT:

$$x(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X\left(e^{j2\pi\eta}\right) e^{j2\pi\eta k} d\eta$$

Prodotto

$$Z\left(e^{j2\pi f}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k)\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X\left(e^{j2\pi\eta}\right)e^{j2\pi\eta k}\,d\eta\right)e^{-j2\pi f k}$$

- Sommatorie e integrali sono operatori lineari → posso invertire l'ordine:

$$Z\left(e^{j2\pi f}\right)=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X\left(e^{j2\pi\eta}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k)e^{j2\pi\eta k}\, e^{-j2\pi f k}\right)d\eta =$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X\left(e^{j2\pi\eta}\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(k)e^{-j2\pi(f-\eta)k}\right)d\eta =$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X\left(e^{j2\pi\eta}\right)Y\left(e^{j2\pi(f-\eta)}\right)d\eta$$

Proprietà di simmetria della DTFT

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Segnale x(n)∈R	**DTFT $X(e^{j2\pi f})$**
$x(n)$	$X(e^{j2\pi f}) = X_R(e^{j2\pi f}) + j\,X_I(e^{j2\pi f})$
$x(n)$	$X(e^{j2\pi f}) = X^*(e^{-j2\pi f})$
$x(n)$	$\left\|X(e^{j2\pi f})\right\| = \left\|X(e^{-j2\pi f})\right\|$
$x(n)$	$\varphi(X(e^{j2\pi f})) = -\varphi(X(e^{-j2\pi f}))$
$x(n)$ pari	$X(e^{j2\pi f}) = X_R(e^{j2\pi f})$
$x(n)$ dispari	$X(e^{j2\pi f}) = j\,X_I(e^{j2\pi f})$

- A causa della periodicità della DTFT, se la funzione è simmetrica rispetto all'asse f=0, lo è anche rispetto a f=½ (e in generale f=k/2, con K intero).
- La DFTF di sequenze reali e pari è una funzione reale e pari.

Esempio 3

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- DTFT di $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$
- In precedenza, abbiamo ottenuto:

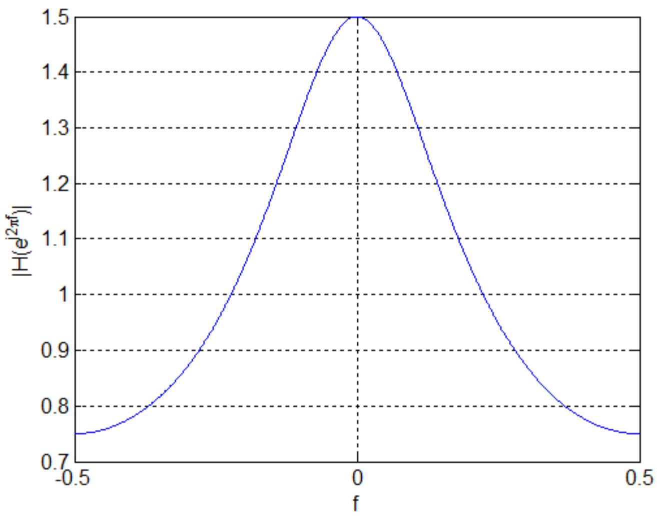
$$a^n u(n) \rightarrow \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad \text{per } |a|<1$$

- Quindi:

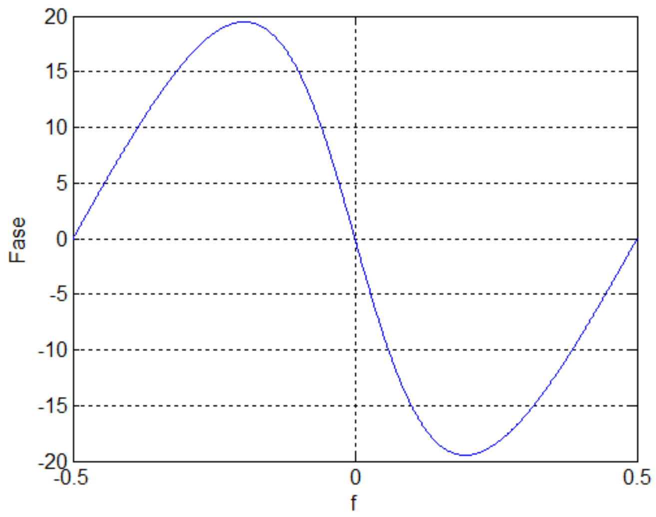
$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \Rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

- x(n) è reale → DTFT con modulo pari e fase dispari

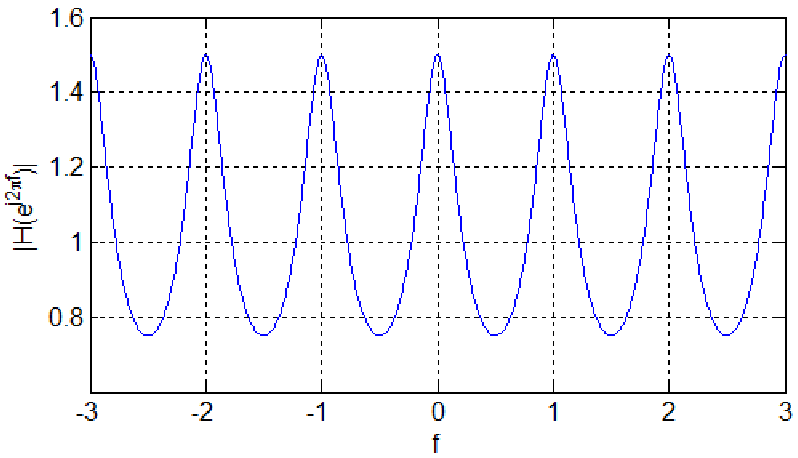
Esempio 3



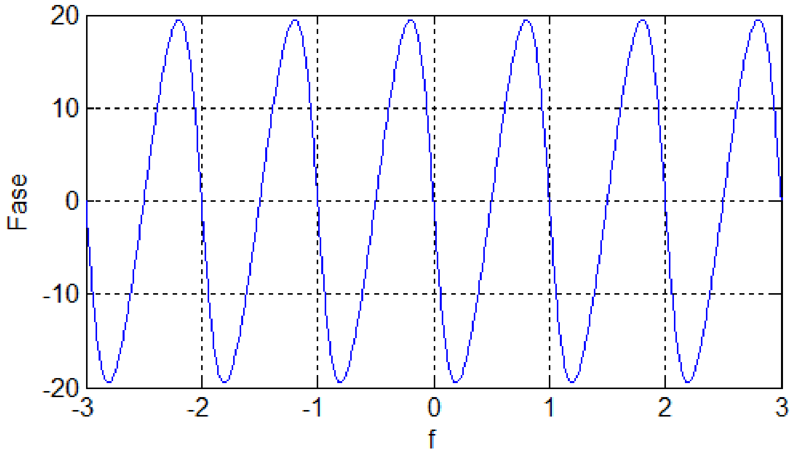
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1
0.9
0.8
0.7
-0.5
0
0.5
f
$|H(e^{j2\pi f})|$



20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-20
-0.5
0
0.5
f
Fase



1.6
1.4
1.2
1
0.8
-3
-2
-1
0
1
2
3
f
$|H(e^{j2\pi f})|$



20
10
0
-10
-20
-3
-2
-1
0
1
2
3
f
Fase

DTFT notevoli

Sequenza delta e sequenza costante

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x(n) = \delta(n)$$

$$X\left(e^{j2\pi f}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi f k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k) e^{-j2\pi f k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(k) = 1$$

$$x(n) = 1$$

$$X\left(e^{j2\pi f}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f-n) \quad \Rightarrow \quad X\left(e^{j2\pi f}\right) = \delta(f) \quad f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Sequenze sinusoidali ed esponenziali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x(n) = e^{j2\pi f_0 n}$$

$$X\left(e^{j2\pi f}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 k} e^{-j2\pi f k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi (f - f_0)k} =$$

$$= \mathrm{DTFT}[1]\Big|_{f-f_0} = \delta(f - f_0)$$

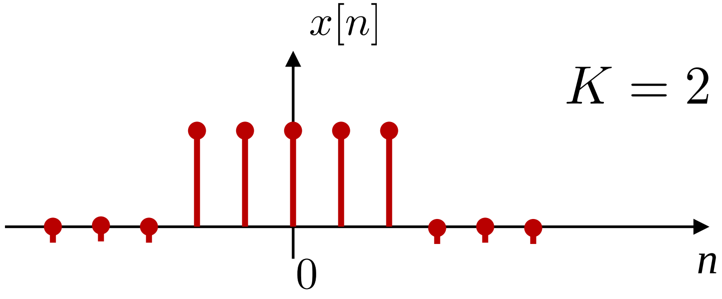
$$\cos(2\pi f_0 n) = \frac{e^{j2\pi f_0 n} + e^{-j2\pi f_0 n}}{2} \Rightarrow \mathrm{DTFT}[\cos(2\pi f_0 n)] = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

$$\sin(2\pi f_0 n) = \frac{e^{j2\pi f_0 n} - e^{-j2\pi f_0 n}}{2j} \Rightarrow \mathrm{DTFT}[\sin(2\pi f_0 n)] = \frac{1}{2j}[\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$$

Funzione porta

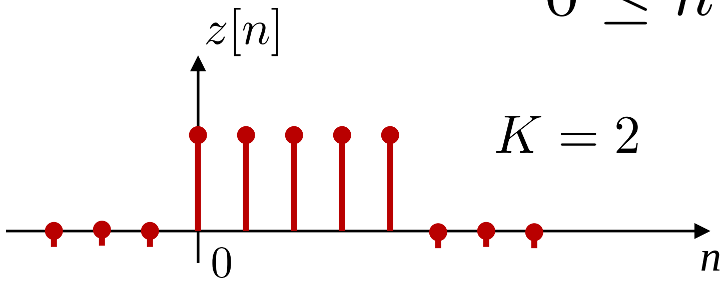
POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$x[n] = p_{2K+1}[n] = \begin{cases} 1 & |n| \le K \\ 0 & |n| > K \end{cases}$$



- Consideriamo il segnale:

$$z[n] = x[n-K] \qquad\qquad 0 \le n \le 2K$$



Funzione porta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$Z(e^{j2\pi f}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z[k]e^{-j2\pi fk} = \sum_{k=0}^{2K} e^{-j2\pi fk}$$

- Ricordando che: $\boxed{a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a\frac{1-r^n}{1-r},}$

- Si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{2K} e^{-j2\pi fk} = \frac{1-e^{-j2\pi f(2K+1)}}{1-e^{-j2\pi f}}$$

$$= \frac{e^{-j\pi f(2K+1)}\left(e^{+j\pi f(2K+1)} - e^{-j\pi f(2K+1)}\right)}{e^{-j\pi f}\left(e^{+j\pi f} - e^{-j\pi f}\right)}$$

$$Z(e^{j2\pi f}) = \frac{\sin(\pi f(2K+1))}{\sin(\pi f)} e^{-j2\pi fK}$$

Funzione porta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

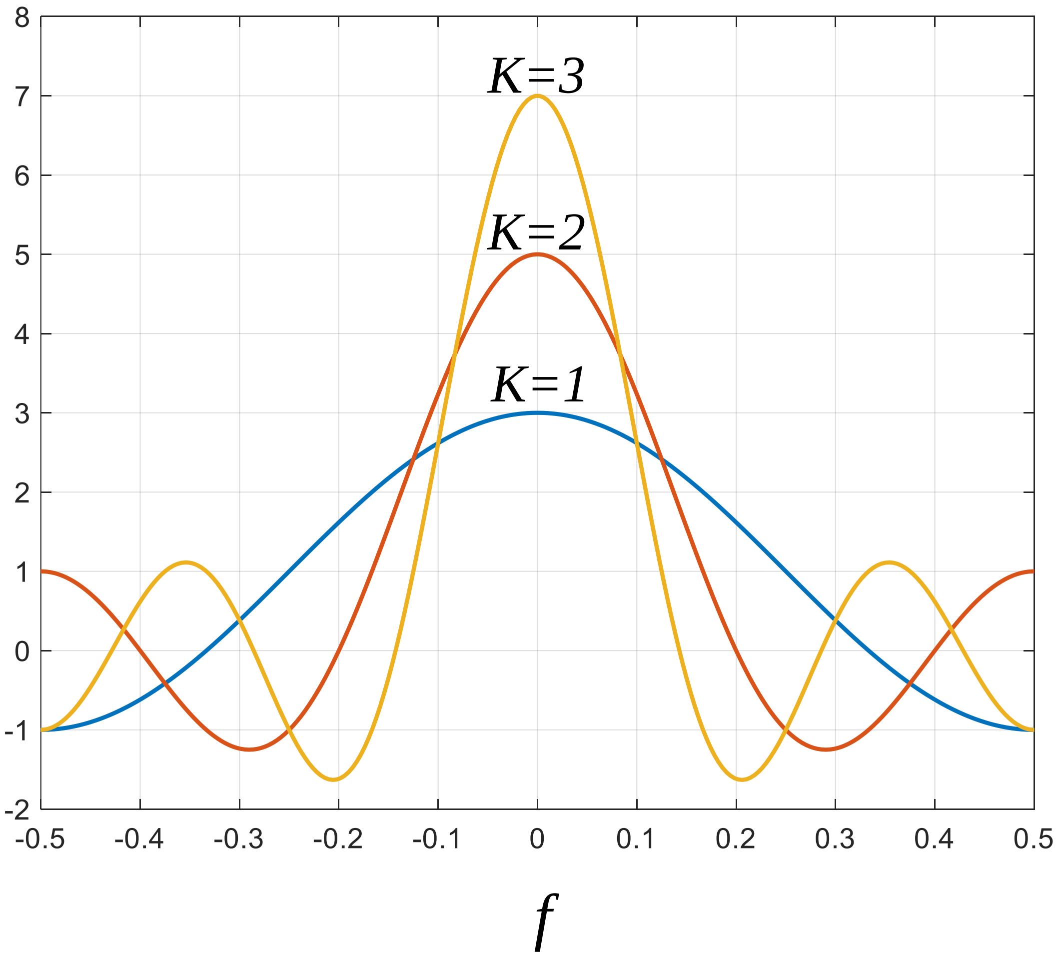
$$x[n] = z[n+K]$$

$$X(e^{j2\pi f}) = Z(e^{j2\pi f})e^{j2\pi f K} = \frac{\sin(\pi f(2K+1))}{\sin(\pi f)}$$

- Si noti che a differenza del dominio a tempo continuo la DTFT della porta a tempo discreto è una funzione periodica di periodo 1

Funzione porta

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni



$$X\left(e^{j2\pi f}\right)=\frac{\sin\left(\pi f\left(2K+1\right)\right)}{\sin\left(\pi f\right)}$$

Funzione "sinc"

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- E' possibile dimostrare che la DTFT della sequenza:

$$x[k] = \frac{\sin\left(\pi \frac{k}{N}\right)}{\pi \frac{k}{N}} = \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{N}\right)$$

è una porta di ampiezza 1/N:

$$X\left(e^{j2\pi f}\right) = N\, p_{\frac{1}{N}}(f)$$

- Per dimostrarlo, calcoliamo la trasformata inversa della funzione .

$$N\, p_{\frac{1}{N}}(f)$$

Funzione “sinc”

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La trasformata inversa si calcola come:

$$x[k] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi f}) e^{j2\pi f k} df$$

da cui

$$x[k] = \int_{-\frac{1}{2N}}^{\frac{1}{2N}} N e^{j2\pi f k} df$$

$$x[k] = \frac{N}{j2\pi k} e^{j2\pi f k} \Big|_{-\frac{1}{2N}}^{\frac{1}{2N}} = N \frac{e^{j\pi \frac{k}{N}} - e^{-j\pi \frac{k}{N}}}{j2\pi k}$$

$$x[k] = \frac{\sin\left(\pi \frac{k}{N}\right)}{\pi \frac{k}{N}} = \mathrm{sinc}\left(\frac{k}{N}\right)$$