Teoria dei Segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Medie temporali
- Ergodicità

Ultimo aggiornamento: Dicembre 2024

Medie temporali

- Dato un segnale determinato ed una qualsiasi funzione $g(\cdot)$, possiamo definire un operatore di media temporale

$$\left\langle g\left[x(t)\right]\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g\left[x(t)\right]dt$$

Questo tipo di espressioni sono già state usate nella prima parte del corso per definire alcune quantità su segnali determinati a potenza media finita

- Il risultato è in generale un numero (eventualmente complesso)
- Inoltre il risultato è in generale diverso per ciascuna realizzazione del processo casuale

Potenza media di un segnale

- Con l'operatore "media temporale" appena definito, possiamo reinterpretare alcune grandezze già viste nella prima parte del corso relativa ai segnali determinati, e applicarla ai processi casuali. Ad esempio:

  - **Potenza media** di un segnale determinato

$$P(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt = \left\langle |x(t)|^2 \right\rangle$$

  - **Valor medio** di un segnale determinato

$$\overline{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \, dt = \left\langle x(t) \right\rangle$$

Medie temporali nei processi

- Una realizzazione di un processo casuale è un segnale determinato, ad esso possiamo quindi applicare un qualunque operatore di media temporale

$$\left\langle g\left[x\left(t;s_0\right)\right]\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g\left[x\left(t;s_0\right)\right]dt$$

- Notare che applicando una media temporale, OGNI realizzazione del processo genera un numero (reale o complesso)
  - In generale, all'interno dello stesso processo, questi numeri possono essere DIVERSI per ciascuna delle realizzazioni

- Che relazione c'è tra l'operatore di media temporale e l'operatore di media di insieme?
  - Si tratta dell'argomento centrale di questo capitolo

Media temporale e media di insieme

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Media temporale

$$\left\langle g\left[x\left(t;s_0\right)\right]\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g\left[x\left(t;s_0\right)\right]dt$$

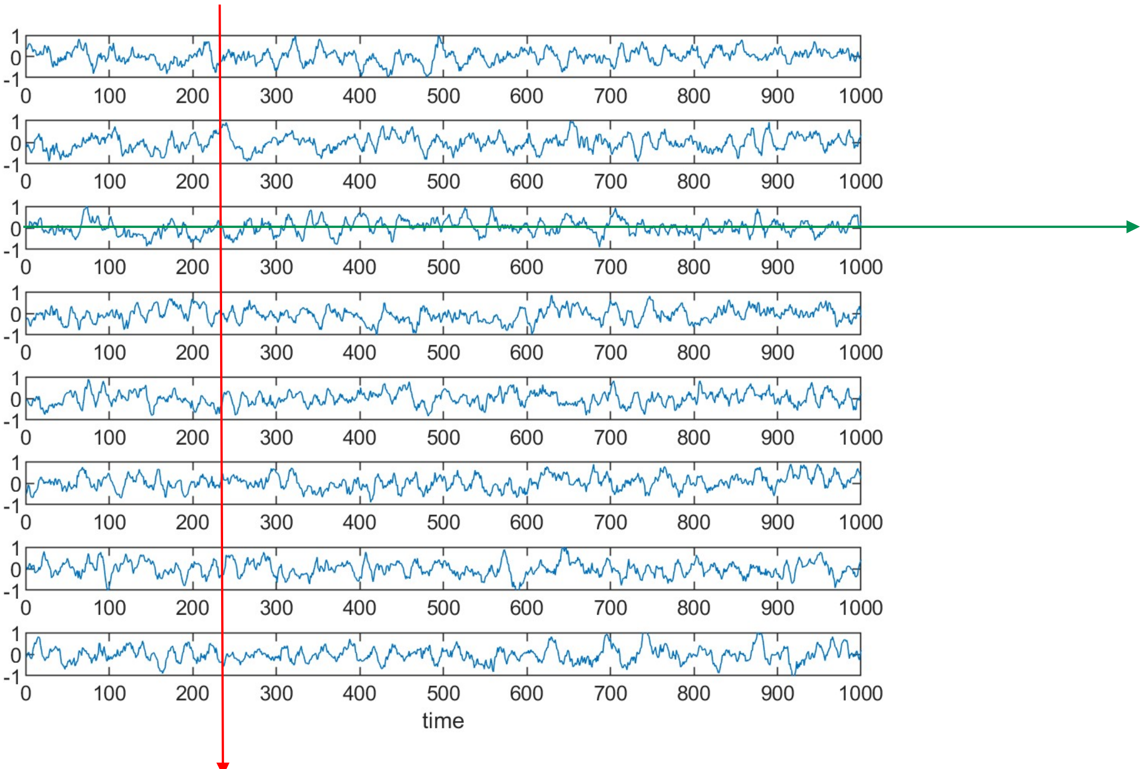
- Si applica a una certa realizzazione del processo
- Restituisce sempre un valore indipendente dal tempo
- Ma in generale il risultato dipende dalla singola realizzazione

Media di insieme

$$E\left\{g\left[X\left(t\right)\right]\right\} = \sum_i g\left[x\left(t;s_i\right)\right]\mathrm{P}\left[x\left(t;s_i\right)\right]$$

- Si applica all'insieme delle realizzazioni di un processo, nel senso delle variabili casuali
- Restituisce in generale una funzione del tempo

Media temporale e media di insieme: interpretazione grafica

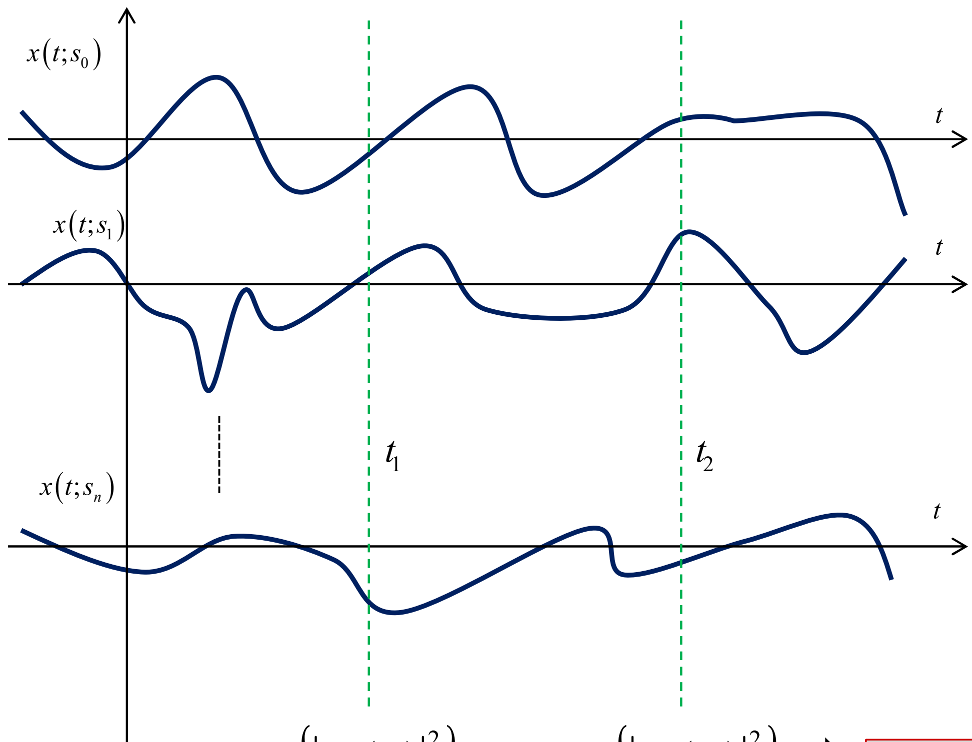


Medie temporali: *media nel senso delle dei segnali determinati, su una singola realizzazione, e graficamente ottenute integrando "in orizzontale" su questo tipo di grafici*

Medie di insieme: *media nel senso delle variabili casuali, e graficamente "in verticale" sulle varie realizzazioni per ciascun possibile istante di tempo*

Potenza: Media d'insieme e media temporale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



$$\left\langle \left| x(t;s_0) \right|^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| x(t;s_0) \right|^2 dt$$

$$\left\langle \left| x(t;s_1) \right|^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| x(t;s_1) \right|^2 dt$$

$$\left\langle \left| x(t;s_n) \right|^2 \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| x(t;s_n) \right|^2 dt$$

funzione della realizzazione

$$E\left\{ \left| X(t_1) \right|^2 \right\} \;\text{------}\; E\left\{ \left| X(t_2) \right|^2 \right\}$$

funzione del tempo

Medie temporali di più segnali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Possiamo anche estendere l'operatore media temporale a più segnali
- 2 segnali

$$\left\langle g\left[x(t),y(t+\tau)\right]\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g\left[x(t),y(t+\tau)\right]dt$$

  - restituisce una funzione di τ
- ... e in generale

$$\left\langle g\left[x_1(t),\ldots,x_n(t+\tau_{n-1})\right]\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g\left[x_1(t),\ldots,x_n(t+\tau_{n-1})\right]dt$$

- restituisce una funzione di *n*-1 variabili $\tau_1,\ldots\ \tau_{n-1}$

Autocorrelazione e mutua correlazione temporali

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Dato l'operatore appena definito, possiamo reinterpretare alcune grandezze già viste, definendole ora nel senso delle medie temporali:

  - Autocorrelazione (segnali a potenza finita)

$$\boxed{R_X(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\,x^*(t)\,dt = \langle x(t+\tau)\,x^*(t)\rangle}$$

  - Mutua Correlazione

$$R_{XY}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau)\,y^*(t)\,dt = \langle x(t+\tau)\,y^*(t)\rangle$$

Media temporale e media di insieme: caso generale

Media temporale
(generica)

$$\left\langle g\left[x(t;s_i),\ldots,x(t+\tau_{n-1};s_i)\right]\right\rangle$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g\left[x(t;s_i),\ldots,x(t+\tau_{n-1};s_i)\right]dt$$

- Si applica a una certa realizzazione del processo
- restituisce una funzione di $n-1$ variabili $t_1,\ldots,t_{n-1}$

Media di insieme
(generica)

$$E\left\{g\left[X(t_1),\ldots,X(t_n)\right]\right\}$$
$$\sum_i g\left[x(t_1;s_i),\ldots,x(t_n;s_i)\right]\mathrm{P}\left[x(t;s_i)\right]$$

- Si applica all'insieme delle realizzazioni di un processo
- Restituisce in generale una funzione una funzione di n variabili $t_1,\ldots,t_n$ del tempo

Si parla di ERGODICITA' quando i due tipi di medie coincidono.

Nota importante: le due espressioni possono coincidere solo se il processo è stazionario per questa media

Ergodicità

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- <u>Un processo si dice ergodico (**per una certa media**) quando la media di insieme e la media temporale coincidono</u>
- Esempio:

$$\underset{\text{processo}}{E_s\left\{g[X(t)]\right\}} = \left\langle g\left[x(t;s_i)\right]\right\rangle \quad \forall i$$

realizzazione

Ergodicità per la media $g(\cdot)$

- Questa proprietà, quando è verificata, può semplificare molti tipi di calcoli sui processi casuali
- Normalmente è assunta o verificata sperimentalmente nei casi pratici
- <u>La definizione di ergodicità richiede che il segnale sia **stazionario per quella media**</u>

Ergodicità: intepretazione

- La statistica che posso estrarre dall'analisi temporale di una singola realizzazione è rappresentativa dell'intero insieme dei segnali appartenenti al processo

- Sperimentalmente, questo significa che la misura di una singola realizzazione è sufficiente per «conoscere» tutte le informazioni sul processo casuale

- Ad esempio per la potenza $P_X = \langle |x(t)|^2 \rangle \leftrightarrow E\{|x(t)|^2\}$

Materiale "extra",
... for further reading!

Ergodicità nella matematica e nella fisica

In matematica e fisica, l'ergodicità è usata in vari ambiti, con il seguente concetto generale:

- *In mathematics, ergodicity expresses the idea that a point of a moving system, either a dynamical system or a stochastic process, <u>will eventually visit all parts of the space that the system moves in</u>, in a uniform and random sense. This implies that the average behavior of the system can be deduced from the trajectory of a "typical" point.*
  - Per ulteriori informazioni, si veda ad esempio https://en.wikipedia.org/wiki/Ergodicity

Ergodicità nella matematica e nella fisica

Materiale "extra",
... for further reading!

Esempio: movimento di una particella in un liquido

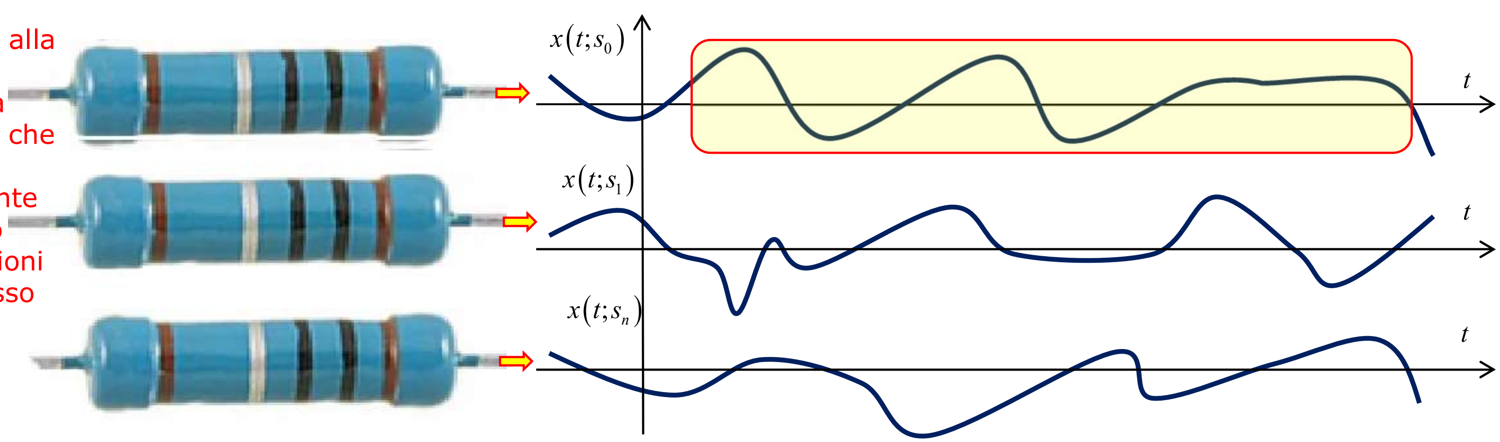
- osservando il movimento di una singola particella sufficientemente a lungo, si ha che
  1. La particella passa per tutte le posizioni possibili (nel contenitore del liquido)
  2. Le statistiche che posso ottenere dalla osservazione "temporale" di una singola particella sono uguali a quelle di insieme su tutte le particelle

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Esempi pratici

- **Rumore termico**
  - definizione: insieme dei segnali (tensione o corrente) misurati ai capi di una qualsiasi resistenza posta a temperatura T
- Con buona approssimazione, è <u>ergodico</u>: una qualsiasi resistenza posta a temperatura T è rappresentativa dell'insieme di tutte le resistenze a temperatura

3 resistenze alla stessa temperatura
→ 3 tensioni che evolvono casualmente nel tempo
→ (realizzazioni del processo casuale)



Una singola realizzazione contiene tutte le informazioni statistiche dell'insieme del processo casuale

Ergodicità

Materiale "extra",
... for further reading!

- Le condizioni per dimostrare l'ergodicità sono piuttosto complicate in generale
- Per la media, una condizione sufficiente è che l'autocovarianza sia modulo integrabile

$$\boxed{\int \left|K_x(\tau)\right| d\tau < \infty}$$

$$\Downarrow$$

$$E\{x(t)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t;s_0)\,dt$$

Definizione di autocovarianza
https://it.wikipedia.org/wiki/Autocovarianza

$$K_x(\tau) \triangleq E\Big[\big(x(t+\tau) - E[x(t+\tau)]\big)\cdot\big(x(t) - E[x(t)]\big)\Big] =$$
$$\triangleq E[x(t+\tau)\cdot x(t)] - E[x(t+\tau)]\cdot E[x(t)]$$

Per processi a media nulla coincide con la autocorrelazione

Ergodicità e spettro di potenza

- Se un processo casuale è ergodico per l'autocorrelazione, allora il suo spettro di potenza può essere valutato a partire da una sola realizzazione, seguendo le stesse definizioni già date per i segnali determinati:

$$\Phi_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t+\tau; s_i)\, x^*(t; s_i)\, dt$$

Definizioni di autocorrelazione nel senso delle medie temporali

$$\Rightarrow S_x(f) = F\left[\Phi_x(\tau)\right] = \int \Phi_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Definizioni di spettro di potenza come trasformata della autocorrelazione temporale

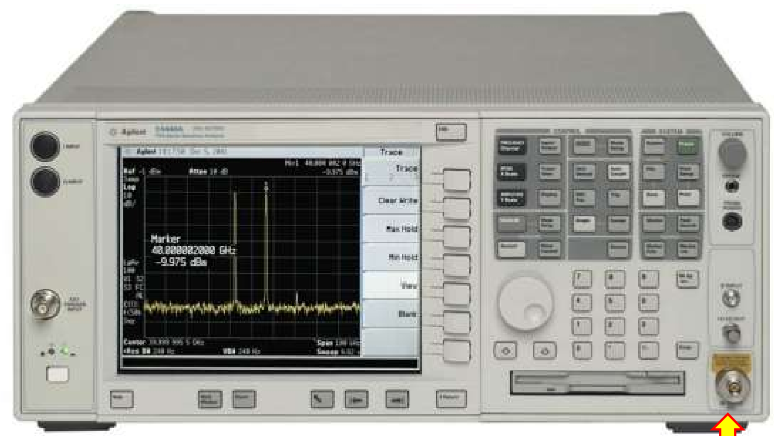
  - Il risultato coinciderà in questo caso con quello che si è visto nel Capitolo precedente, cioè con la trasformata della autocorrelazione calcolata come media di insieme

Applicazione pratica: analizzatori di spettro

- Gli strumenti per misurare lo spettro (Spectrum Analyzers) assumono nella maggior parte dei casi applicativi ergodicità e stazionarietà per il processo casuale di ingresso

Segnale elettrico di ingresso da misurare

$x(t)$

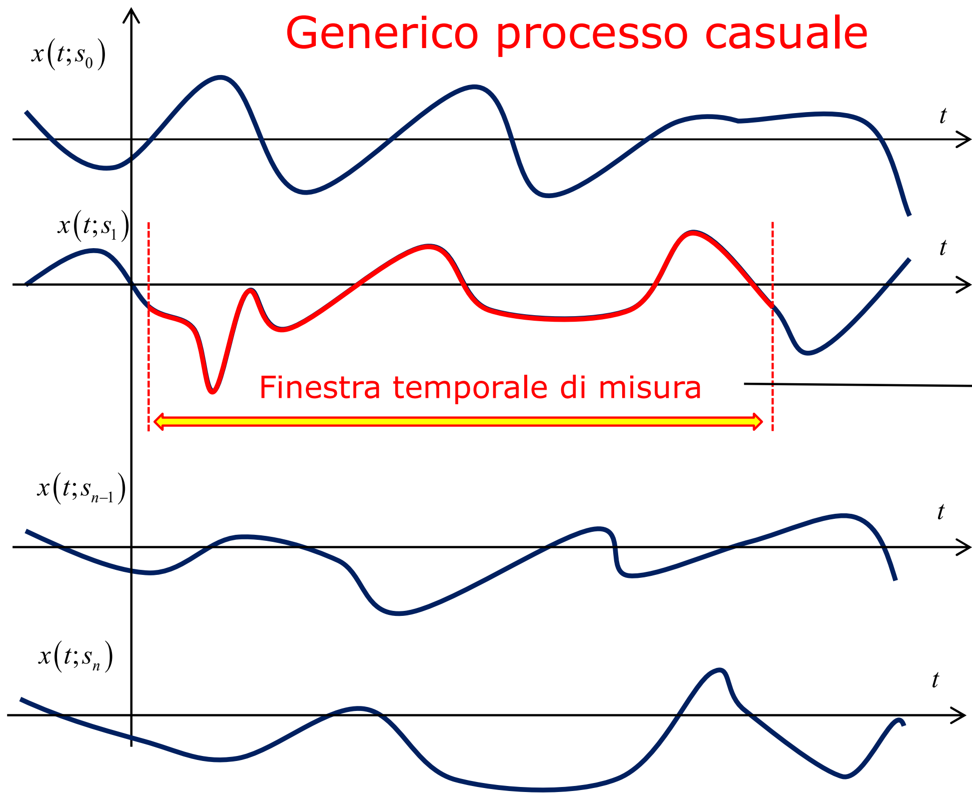


$x(t)$

Segnale elettrico di ingresso da misurare

Applicazione pratica: analizzatori di spettro

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



Lo strumento tipicamente misura su una singola realizzazione e su un certo intervallo di misura, e ne calcola la trasformata di Fourier

Applicazione pratica: analizzatori di spettro

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

In sostanza, questi strumenti acquisiscono:

- Una singola realizzazione del processo
- La «osservano» per una certa finestra temporale *T*
- Ne calcolano (e poi visualizzano) il risultante spettro

Sotto le ipotesi di stazionarietà ed ergodicità questo risultato è una buona approssimazione della densità spettrale di potenza di tutto il processo casuale

- Nella maggior parte dei casi, lo strumento poi ripete continuativamente l'acquisizione su successive finestre temporali *T* e mostra dinamicamente sullo schermo gli spettri risultati.
- Se il processo è stazionario ed ergodico, il grafico che si vede sullo schermo è (approssimativamente) lo stesso su tutte le finestre temporali *T*