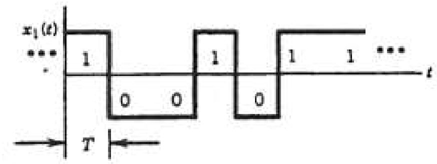
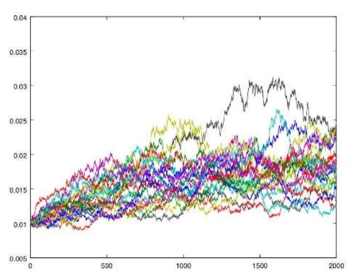
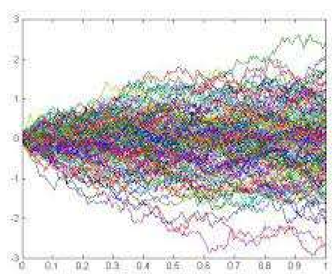
Teoria dei Segnali

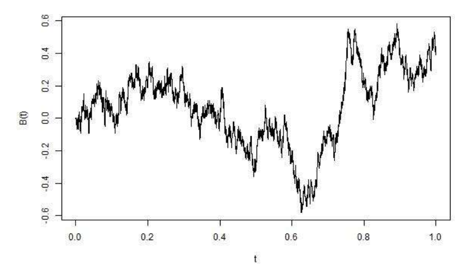


- **Introduzione ai Processi Casuali**
  - Descrizione probabilistica

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications







Ultimo aggiornamento: Dicembre 2024

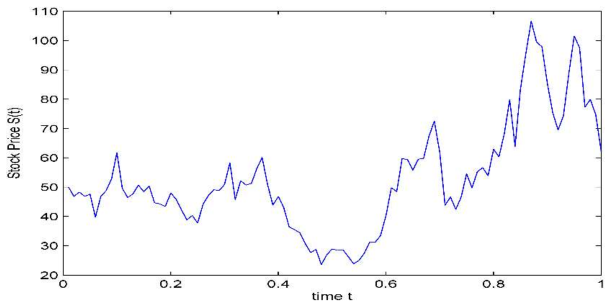
Introduzione

- I segnali, sia a tempo continuo che discreto, analizzati fino ad ora sono stati sempre descritti tramite formule "esatte" ed espresse tramite funzioni matematiche note
  - Si tratta dunque di segnali completamente noti nel dominio del tempo, e che sono spesso indicati come «**segnali determinati**»
- In questo nuovo Capitolo vogliamo estendere la trattazione anche a segnali con caratteristiche non completamente note, cioè con **evoluzione aleatoria nel tempo**
    - **(cioè una evoluzioe "non deterministica)**

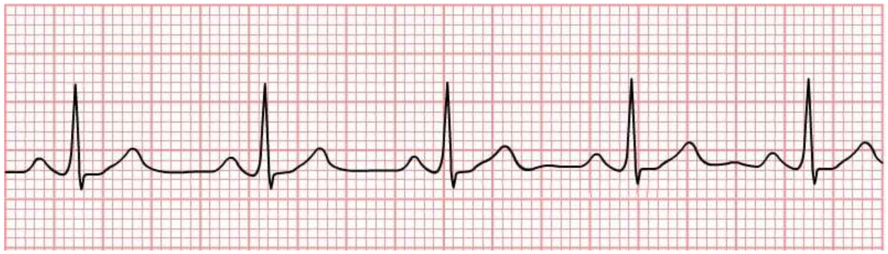
  - Questo richiederà di usare contemporaneamente la teoria delle variabili casuali insieme alla teoria sui segnali determinati vista nella prima parte del corso
  - Tratteremo processi casuali a tempo continuo ma i concetti introdotti si estendono anche ai segnali a tempo discreto

Esempi di applicazione

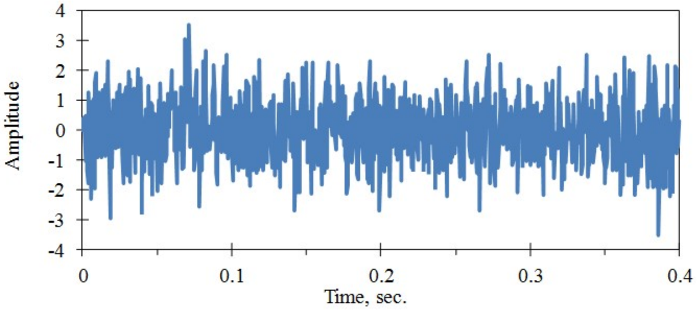
- Evoluzione delle quotazioni di borsa nel tempo



- Segnali biomedici



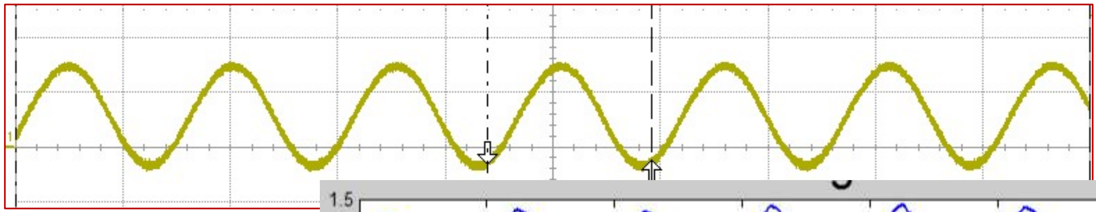
- Rumore nei circuiti elettrici

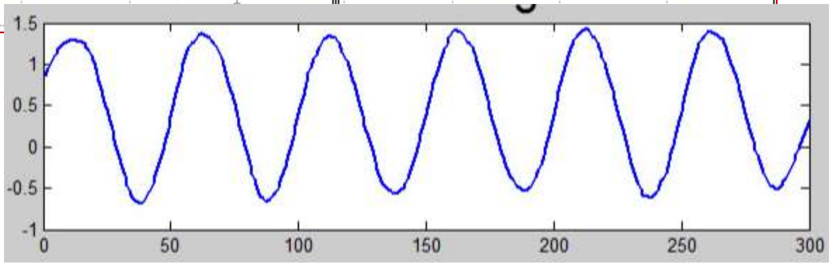


Esempi di applicazione

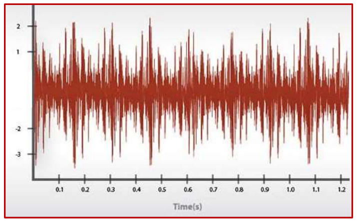
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Oscillatori/quarzi con precisione "realistica"

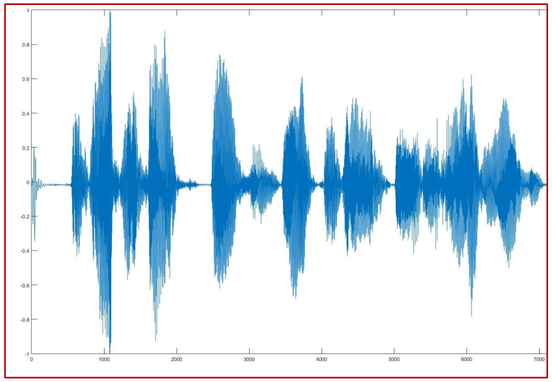


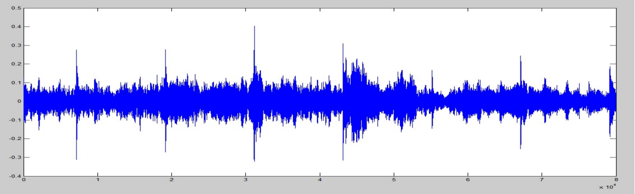


- Vibrazioni meccaniche



- Segnali musicali

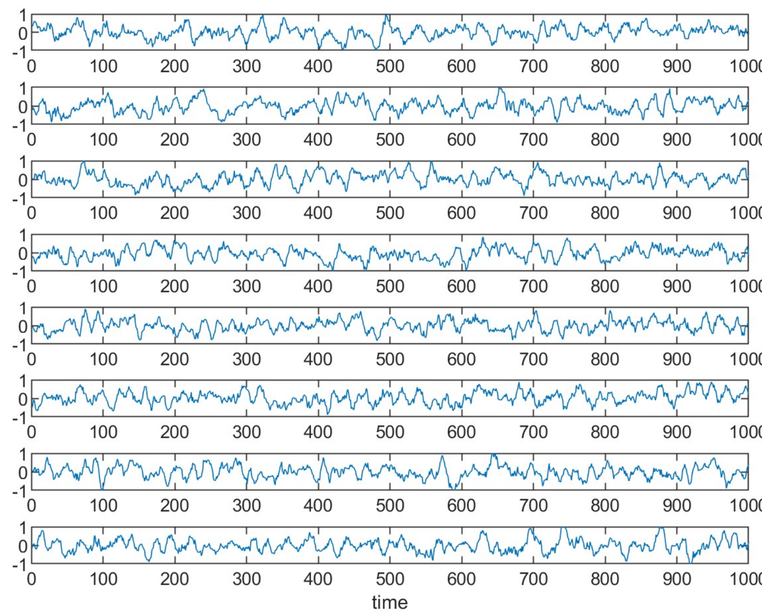




Processi casuali

- I "processi causali" sono un metodo matematico per descrivere queste situazioni
- L'idea base è di considerare insiemi di segnali descrivendoli con un approccio che usi sia la teoria della probabilità sia alcune delle espressioni matematiche introdotte nella prima parte del corso (in particolare per l'analisi spettrale)
- Si cercherà di descrivere l'insieme di segnali con dei "macro-parametri" che permettano di caratterizzare matematicamente l'insieme di segnali

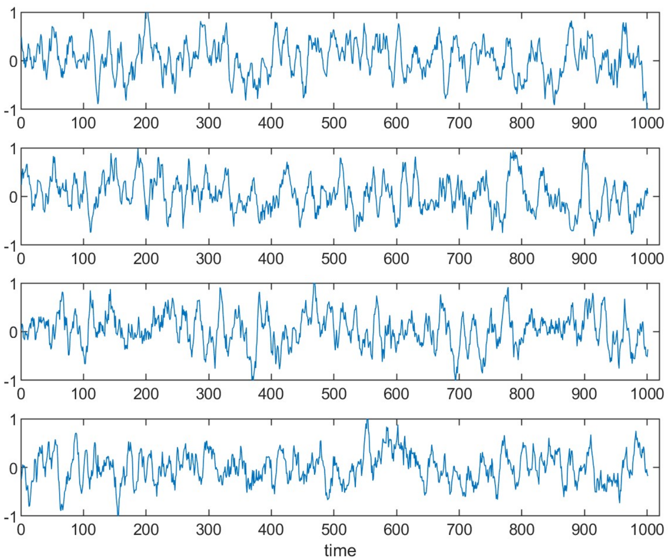
Nota: per capire I processi casuali, è importante "capire" questo passaggio concettuale fondamentale



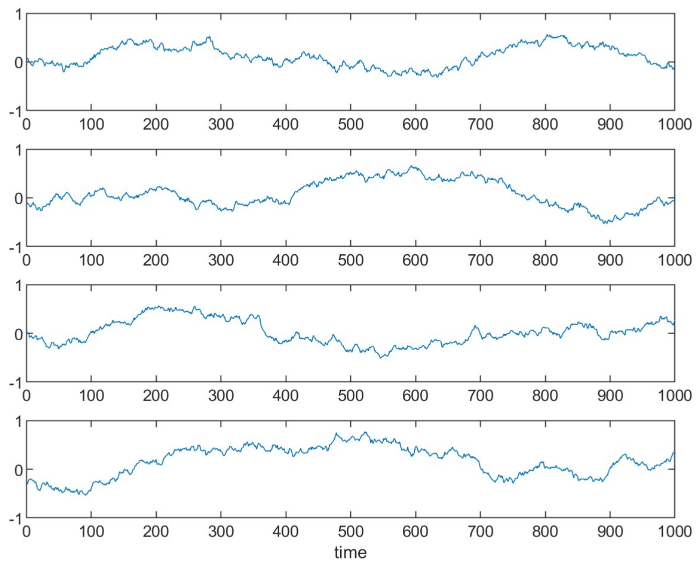
Esempio: due diversi processi casualie

- Si considerino i due seguenti processi casuali:

Processo casuale "A"



Processo casuale "B"



E' abbastanza evidente che (qualitativamente) i due processi "A" e "B" hanno caratteristiche diverse, ma NON è ovvio descriverle.

In questo capitolo, si introdurranno dei "macro parametri" matematici per quantificare queste caratteristiche.

Ad esempio: si introdurrà un concetto di spettro di frequenza anche per i processi casuali. In questo esempio, si vedrà che la banda del processo "A" è più grande della banda del processo "B"

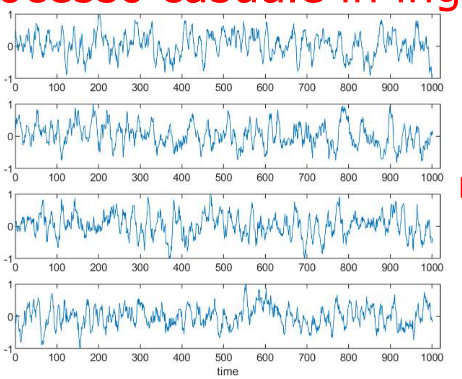
Terminologia: ogni singolo segnale dell'insieme è detto "realizzazione" o «membro» del processo casuale

Processi casuali e sistemi

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

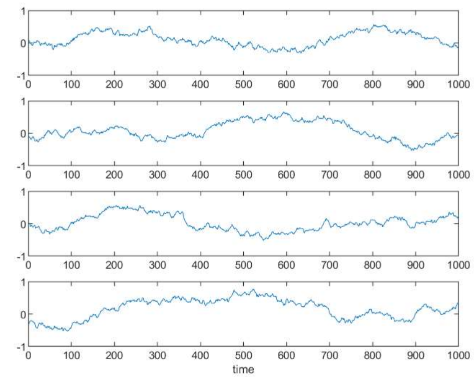
- Nella pratica, i processi casuali tipicamente vengono elaborati tramite il passaggio in sistemi (lineari o no)
  - Spesso un sistema deve essere analizzato e progettato per elaborare/ memorizzare/ trasmettere un insieme di possibili segnali (e non un singolo specifico segnale)
  - Gli strumenti per l’analisi e il progetto devono quindi essere in grado di trattare statisticamente le trasformazioni di processi casuali

Processo casuale in ingresso



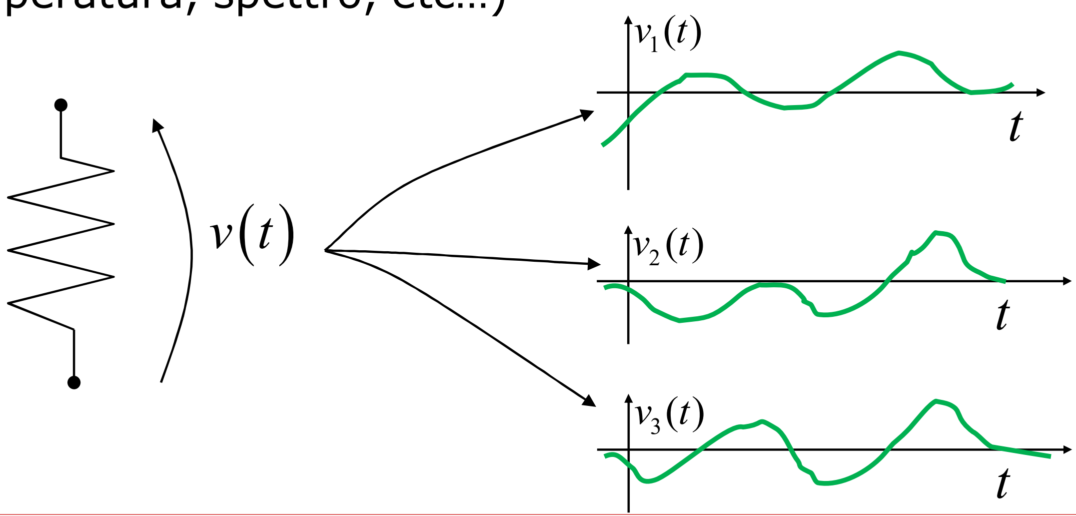
Sistema di elaborazione di segnali

Processo casuale in uscita



Esempio 1: Rumore termico

- La tensione che viene generata ai capi di una resistenza (non alimentata e misurata con strumenti molto sensibili) risulta non nulla e varia nel tempo a causa dell'agitazione termica delle cariche in essa contenute
  - La tensione misurata nel tempo è un segnale che non ha un'espressione determinata
  - E' possibile tuttavia dare una caratterizzazione statistica del fenomeno attraverso misure (valore medio nullo, varianza che dipende dalla temperatura, spettro, etc…)

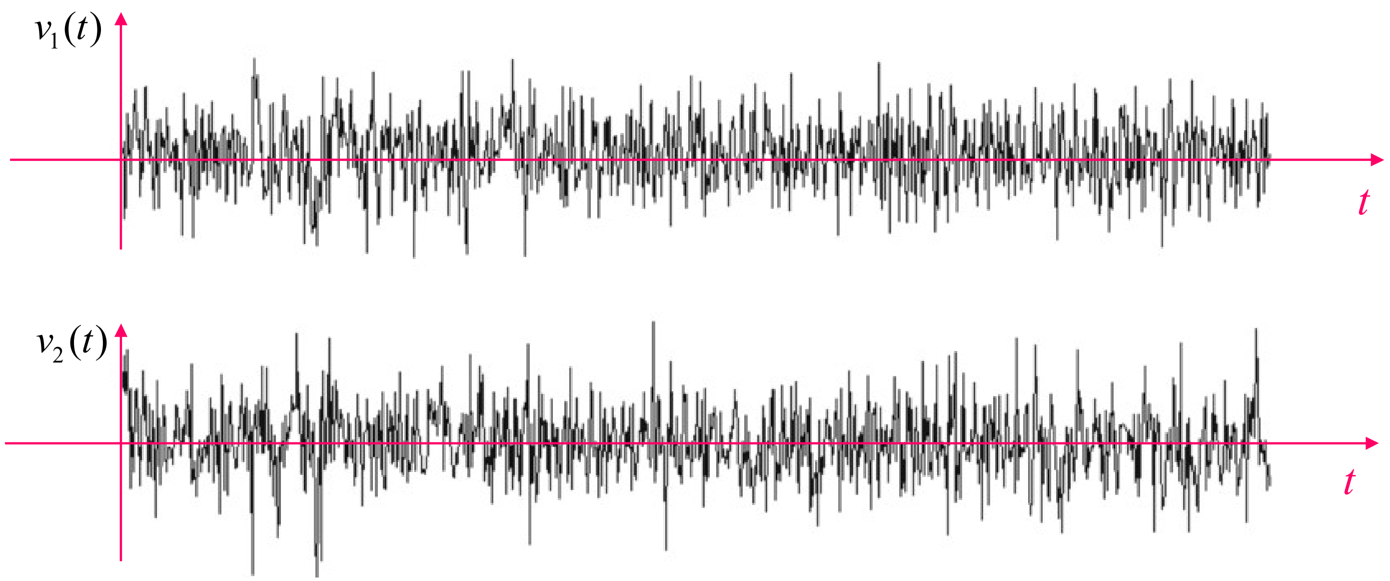


Evoluzione nel tempo della tensione misurata ai capi di tre resistenze nelle stesse condizioni fisiche

Tre diverse realizzazioni dello stesso processo casuale

Esempio 1: Rumore termico

Misure sperimentali di laboratorio



Esempio 2: Trasmissione numerica

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Nell'ambito delle telecomunicazioni sono usatissimi alcune classi di segnale adatti a trasmettere uno o più bit (0/1) per ciascun intervallo temporale *T*

- In questo ambito, chiameremo segnale per trasmissione numerica un segnale che:
  - In ogni intervallo temporale *T* genera un segnale $r(t)$ (opportunamente traslato) e lo moltiplica per una variabile casuale discreta α_i
  - Questa variabile α_i assume valori diversi a seconda dei bit che si devono trasmettere

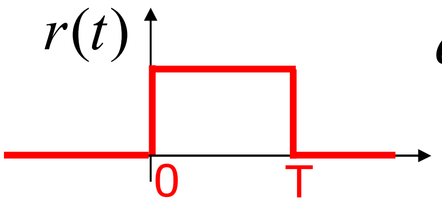
- *Primo esempio di segnale per trasmissione numerica*:
  - Segnale $r(t)$ corrispondente ad una porta di durata *T*, opportunamente traslata
  - Un singolo bit trasmesso per ciascun intervallo temporale *T*

$$\alpha_i = +1 \text{ se si deve trasmettere un bit a 1}$$

$$\alpha_i = -1 \text{ se si deve trasmettere un bit a 0}$$

Esempio 2: Trasmissione numerica

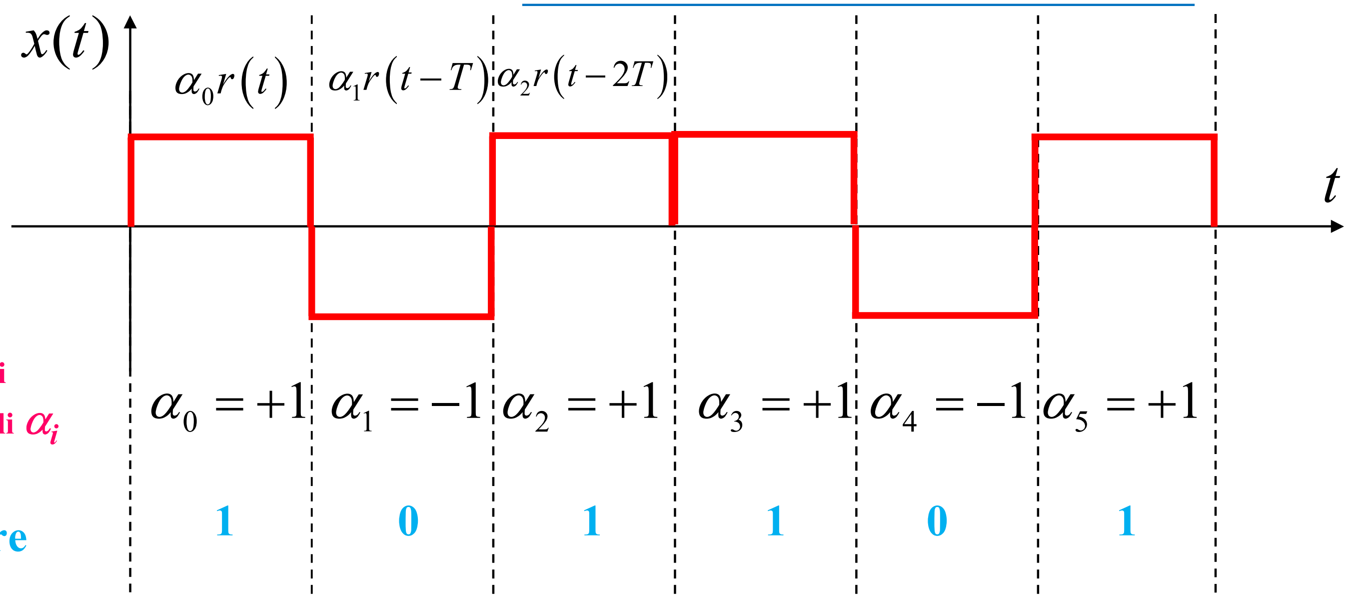
Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications



$$\alpha_i = \pm 1$$

<u>Nota:</u> per questo esempio, è improprio parlare di segnali nel senso visto sinora in questo corso.

Si tratta infatti di <u>un «processo casuale» poiché i bit trasmessi hanno distribuzione casuale</u>



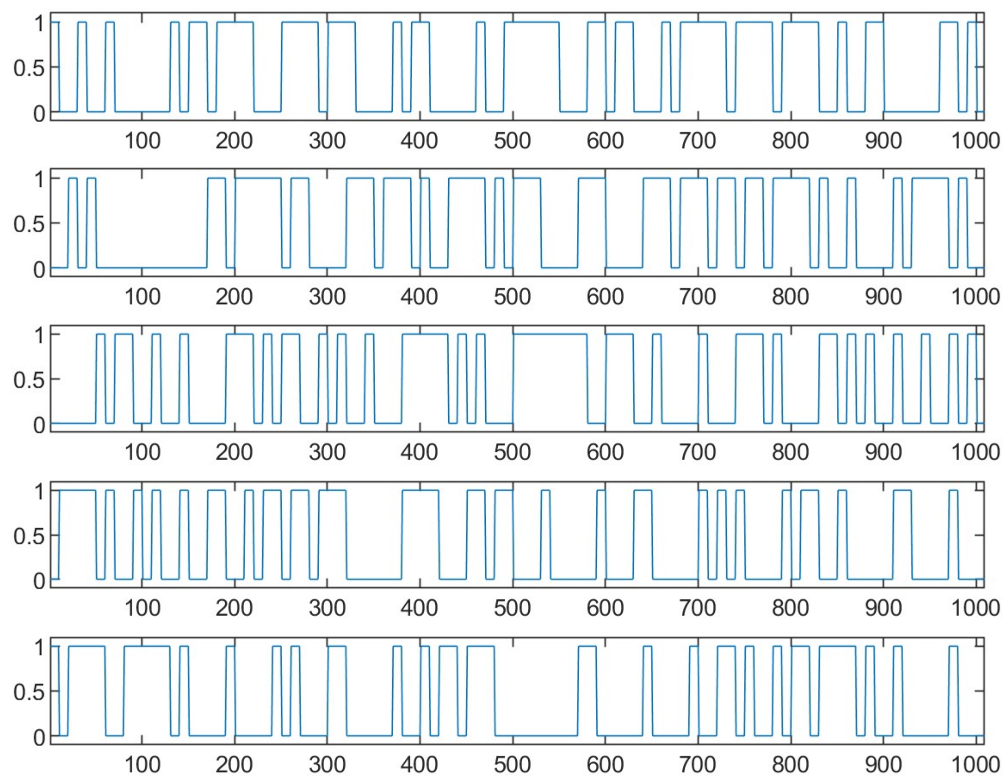
Corrispondenti variabili casuali α_i

Bit da trasmettere

Esempio 2: Trasmissione numerica

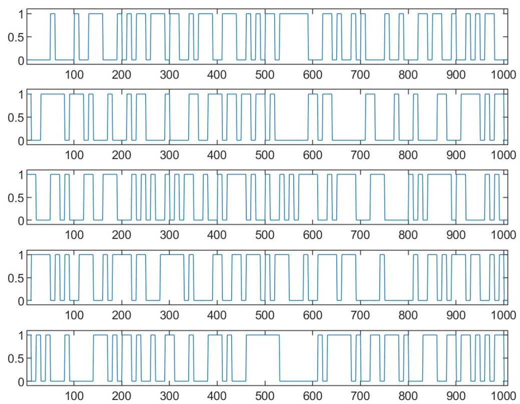
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Il "segnale per trasmissione numerica" è trattabile come un processo casuale se si assume che i bit emessi dalla sorgente siano delle sequenze casuali
- *Nella figura, sono riportate <u>5 realizzazioni del segnale per trasmissione numerica</u> con caratteristiche statistiche simili*



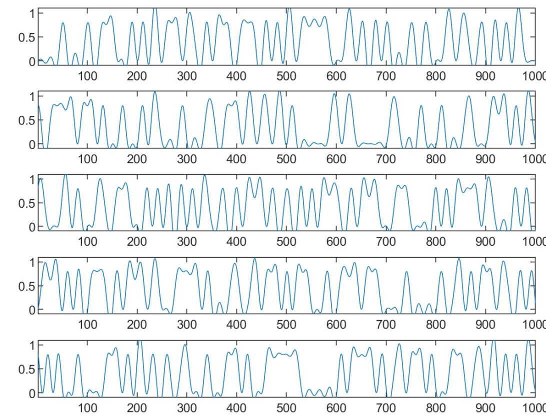
Esempio 2: Trasmissione numerica e sistemi

Processo casuale in ingresso

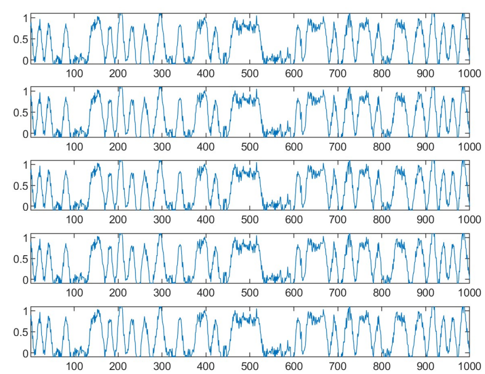


Sistema di elaborazione di segnali

Processo casuale in uscita



Somma di rumore termico



Esempio 2: Trasmissione numerica

- Un generico segnale di trasmissione numerica ha dunque un'espressione del tipo:

$$\boxed{x(t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\alpha_i r(t-iT)}$$

dove: $\begin{cases} r(t) \text{ è una funzione deterministica} \\ \alpha_\mathrm{i} \text{ sono variabili casuali discrete} \end{cases}$

- Nel caso più generale si possono trasmettere n_{bit} bit in ciascun intervallo temporale T e dunque la variabile casuale discreta ai deve assumere un numero di valori discreti pari a:

$$\boxed{M=2^{n_{bit}}}$$

- Esempio per n_{bit}=2 bit :

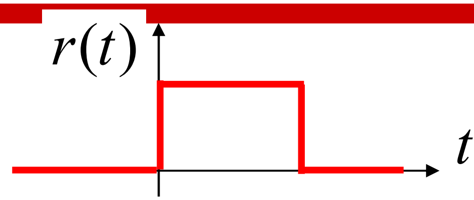
$M=4$

una possibile scelta per α_i

$\alpha_i=-3;-1;+1;+3$

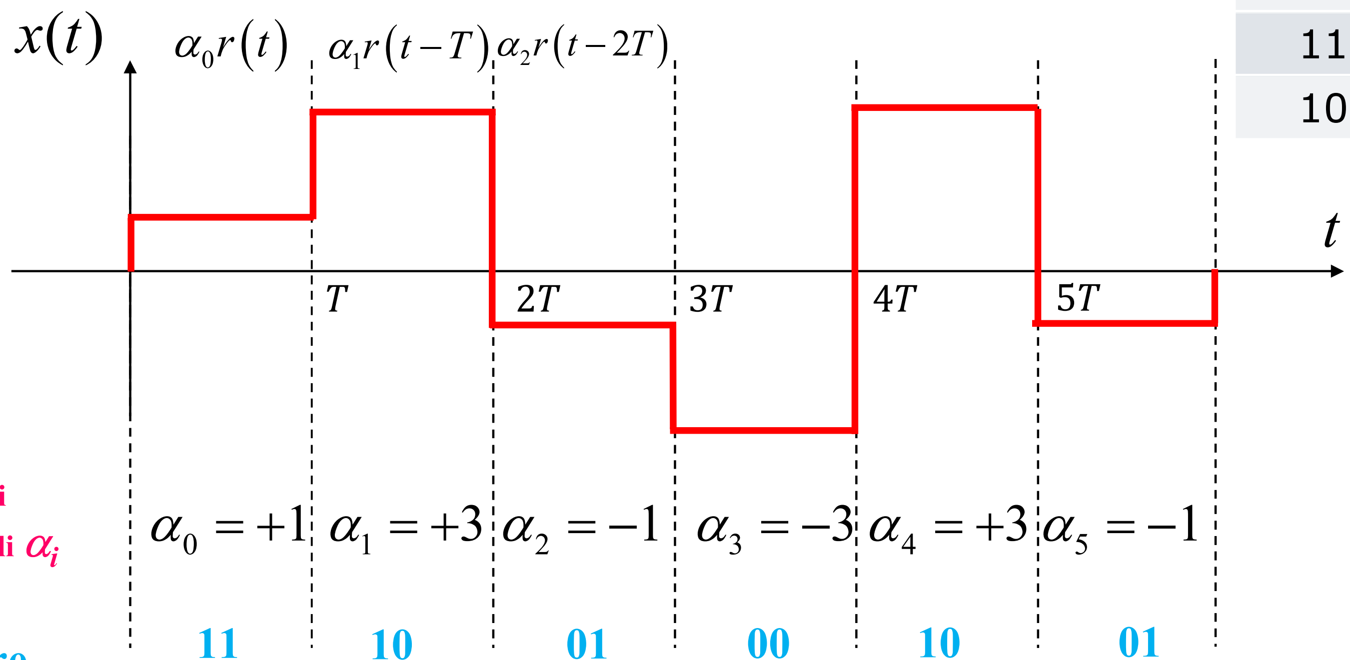
Trasmissione numerica (PAM-4 da "pulse amplitude modulation)

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



$$M = 4 \text{ e } \alpha_i = -3; -1; +1; +3$$

Bits	α_i
00	-3
01	-1
11	+1
10	+3

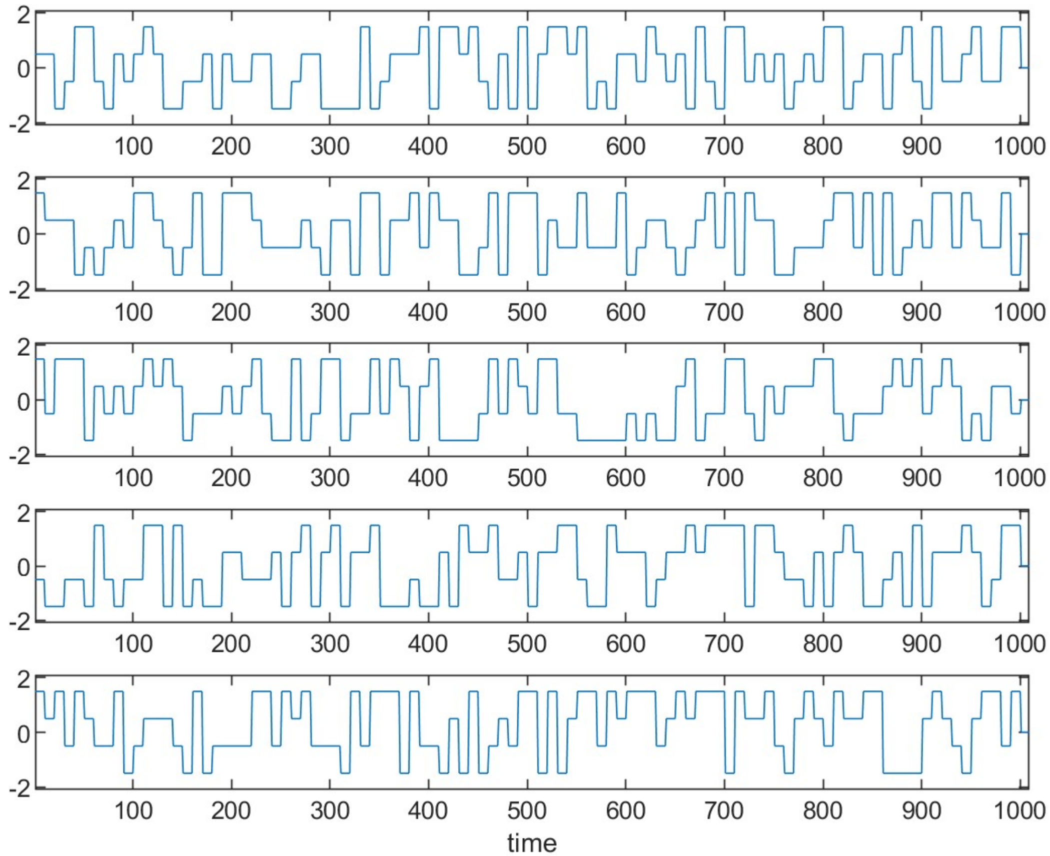


Corrispondenti variabili casuali α_i

Bit da trasmettere

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

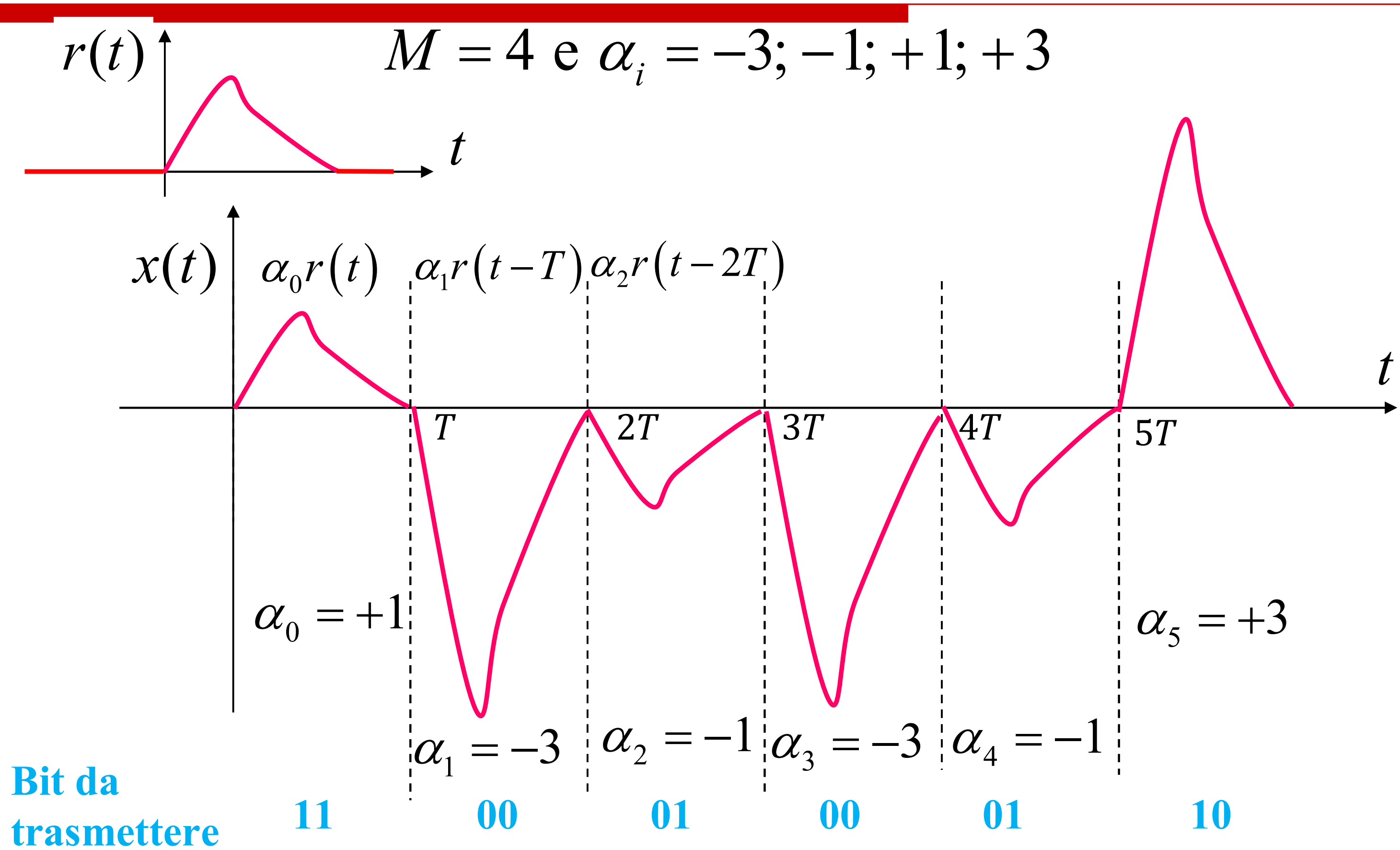
Esempio di processo casuale PAM-4: Cinque diverse realizzazioni



Esempio 2: Trasmissione numerica

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

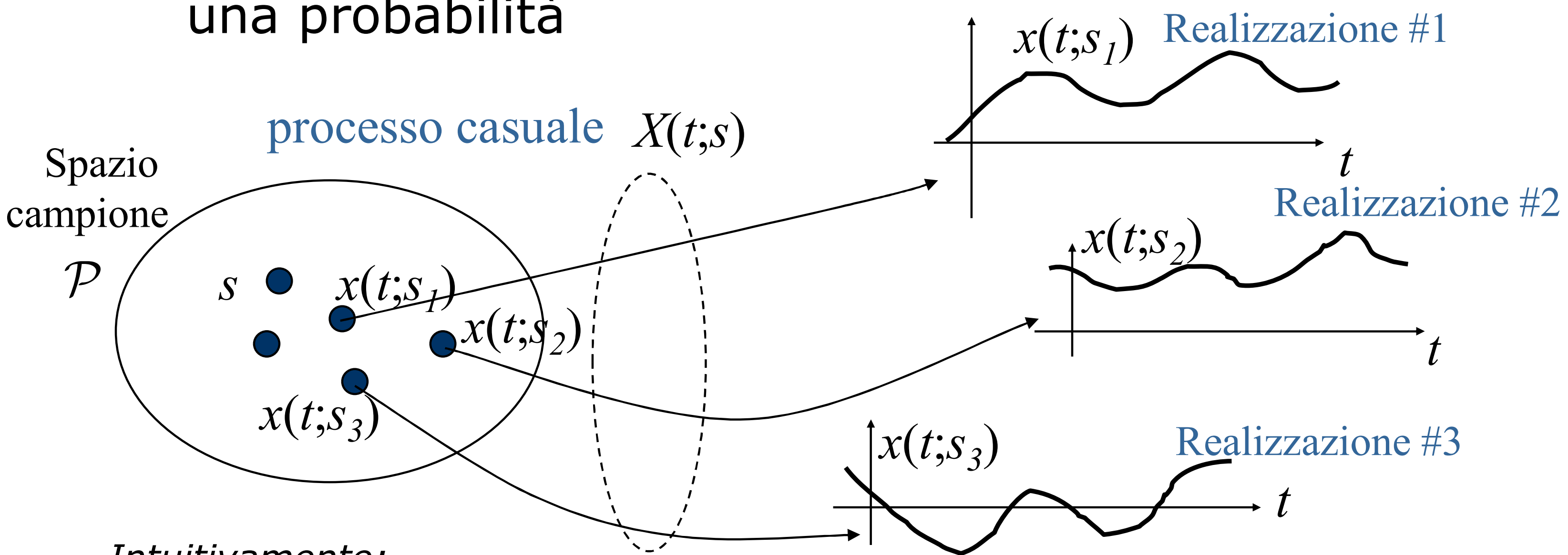
$$M = 4 \text{ e } \alpha_i = -3; -1; +1; +3$$



Bits	α_i
00	-3
01	-1
11	+1
10	+3

Definizione di processo casuale

- Un processo casuale è un modello probabilistico per un insieme di segnali
- Il processo associa ad ogni possibile realizzazione del processo una probabilità



Notazione:

$x(t, s_i)$

Tempo continuo

"indice" della i-esima realizzazione

Intuitivamente:

- *Una variabile casuale è un insieme di numeri reali caratterizzati statisticamente*
- ***Un processo casuale è un insieme di funzioni del tempo caratterizzate statisticamente***

Processo casuale

Questa slide è fondamentale per la comprensione di tutto il resto del Capitolo sui processi casuali

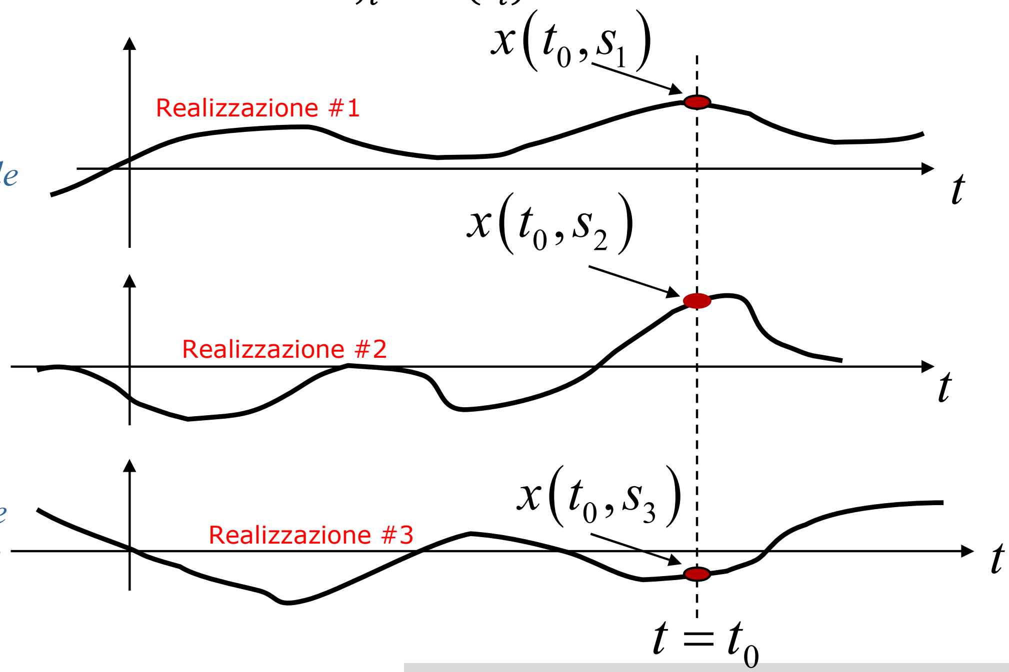
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Osservando un processo casuale ad un certo istante di tempo t_0 si ottiene una variabile casuale
  - Un processo casuale è quindi anche una sequenza (infinita e continua) di variabili casuali $\xi_i = X(t_i)$ indicizzate dalla variabile tempo

Varie realizzazioni del processo casuale

Ogni singola realizzazione è un segnale

Il processo casuale serve a descrivere probabilisticamente l'insieme di infinite realizzazioni



L'insieme di numeri casuali:

$$x(t_0, s_1)$$
$$x(t_0, s_2)$$
$$x(t_0, s_3)$$
$$\vdots$$

Costituisce dunque una variabile casuale

Osservazione di tutte le realizzazioni ad uno specifico istante di tempo → variabile casuale

Processo casuale

- L'obiettivo di questa parte del corso è di fornire i metodi matematici utilizzati per descrivere un processo casuale
- Per quanto visto in questa introduzione, è evidente che sarà necessario unire quanto visto per i segnali determinati con la teoria delle variabili casuali

Descrizione segnali determinati:
Energia,
spettri,
autocorrelazione

Descrizione variabili casuali
Densità di probabilità,
momenti

Processi casuali

__NOTAZIONE IMPORTANTE__:
Dalle prossime slides, in questo capitolo indicheremo i processi casuali semplicemente come ***x(t)***

Non useremo dunque più la notazione della slide precedente

$$x(t, s_i)$$

che utilizza la "etichetta" s_i *per indicare ciascuna realizzazione del processo*

Tipi di processi casuali

- La classificazione dei processi è simile a quella che si ha per i segnali (tempo continuo, tempo discreto, numerico analogico...)

- A seconda della loro caratterizzazione statistica possono inoltre essere divisi nelle due categorie:

  - **Processo quasi determinato**: il processo è esprimibile tramite l'espressione usata per un segnale determinato in cui compaiono un insieme numerabile di variabili casuali (Esempio: segnale per trasmissione numerica, sinusoide con fase ignota, segnale campionato e mantenuto)

  - **Processo non quasi determinato**: non è esprimibile come un segnale determinato funzione di un insieme numerabile di variabili casuali (Esempio: rumore termico, segnale vocale, segnale audio)

Esempio: sinusoide con incertezze sui parametri

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Qualsiasi espressione che definisca un segnale e che contenga una o più variabili casuali è un processo casuale quasi-determinato. Ad esempio

$$\boxed{X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)}$$

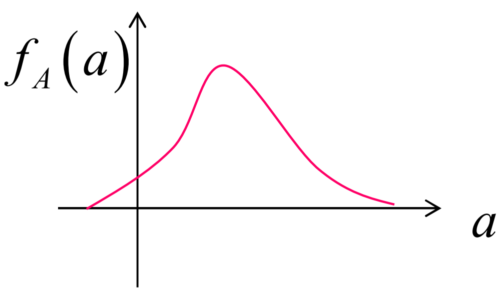
  - Ampiezza A variabile casuale
  - e/o frequenza f_0 variabile casuale
  - e/o fase φ variabile casuale

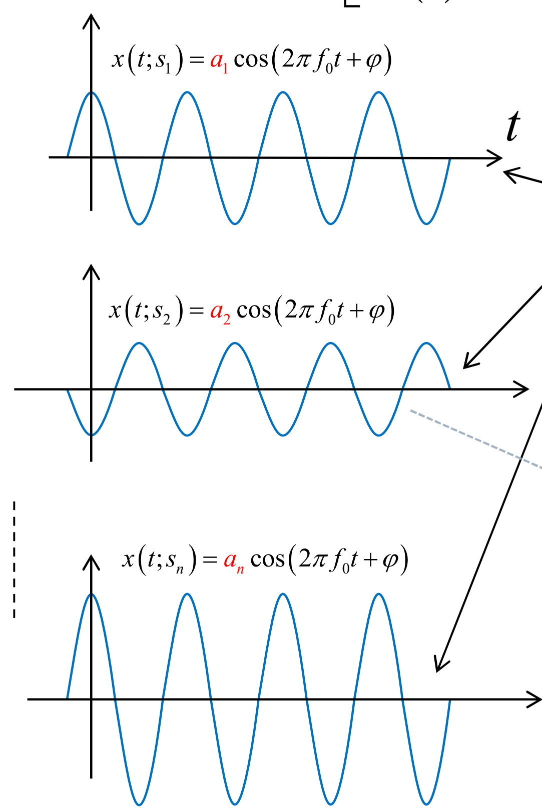
Esempio: sinusoide con ampiezza v.c.

$$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$P\left[X(t) = x(t;s_1)\right] = P(A = a_1)$$

Il processo quasi-determinato si può caratterizzare tramite la distribuzione della v.c. A





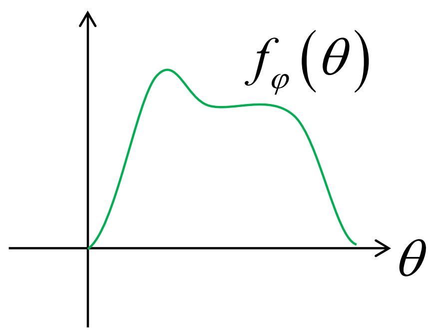
Alcuni esempi di realizzazioni nel caso di fase φ=0

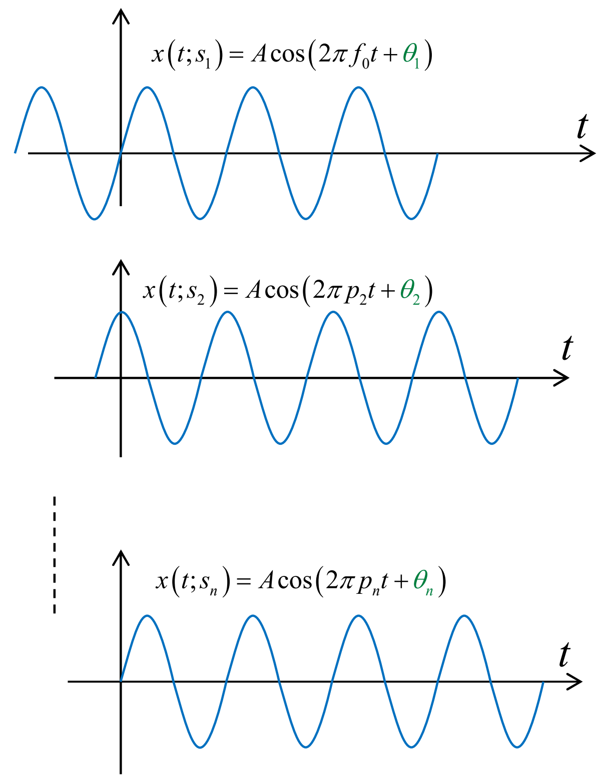
Nota: La variabile casuale A può ovviamente anche essere negativa se la densità di probabilità di A comprende anche valori negativi

Esempio: sinusoide con fase v.c.

$$X(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$

Il processo si può caratterizzare dando la distribuzione della v.c. φ





Nota: la fase di una sinusoide in generale può assumere qualunque valore reale.
Nella maggior parte dei casi, si assume tuttavia convenzionalmente che sia definita su un angolo giro, e dunque tipicamente le densità di probabilità sono definite negli intervalli [0,2π] oppure [-π, π]

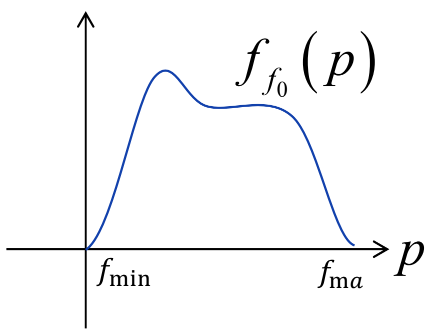
Esempio: sinusoide con frequenza v.c.

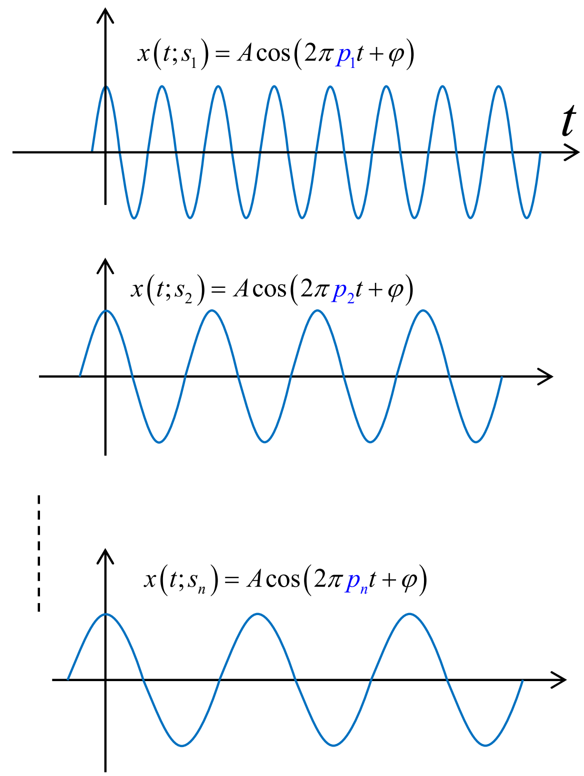
Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

Nota: solitamente si assume che la frequenza f_0 sia un numero reale positivo

$$X(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi\right)$$

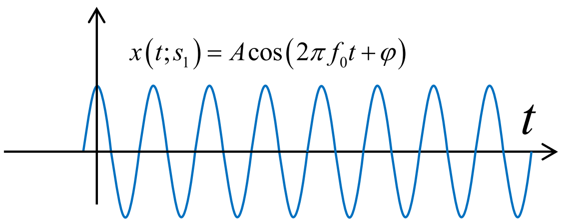
Il processo si può caratterizzare dando la distribuzione della v.c. f_0





Esempio: segnale determinato

- Un segnale determinato può essere considerato un caso degenere di un processo in cui esiste un'unica realizzazione che si manifesta con probabilità 1
  - Esempio: $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$



$$P\left(X(t) = x(t;s_1)\right) = 1$$

Descrizione probabilistica

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Un insieme di n campioni nel tempo del processo costituiscono un insieme di n variabili casuali per le quali è possibile definire le distribuzioni cumulative e la densità di probabilità congiunte

$$F_{X_1,\cdots,X_n}\left(x_1,\ldots x_n;t_1\ldots t_n\right)=F_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{x};\mathbf{t}\right)=P\Big(x\left(t_1\right)<x_1,\ldots,x\left(t_n\right)<x_n\Big)$$

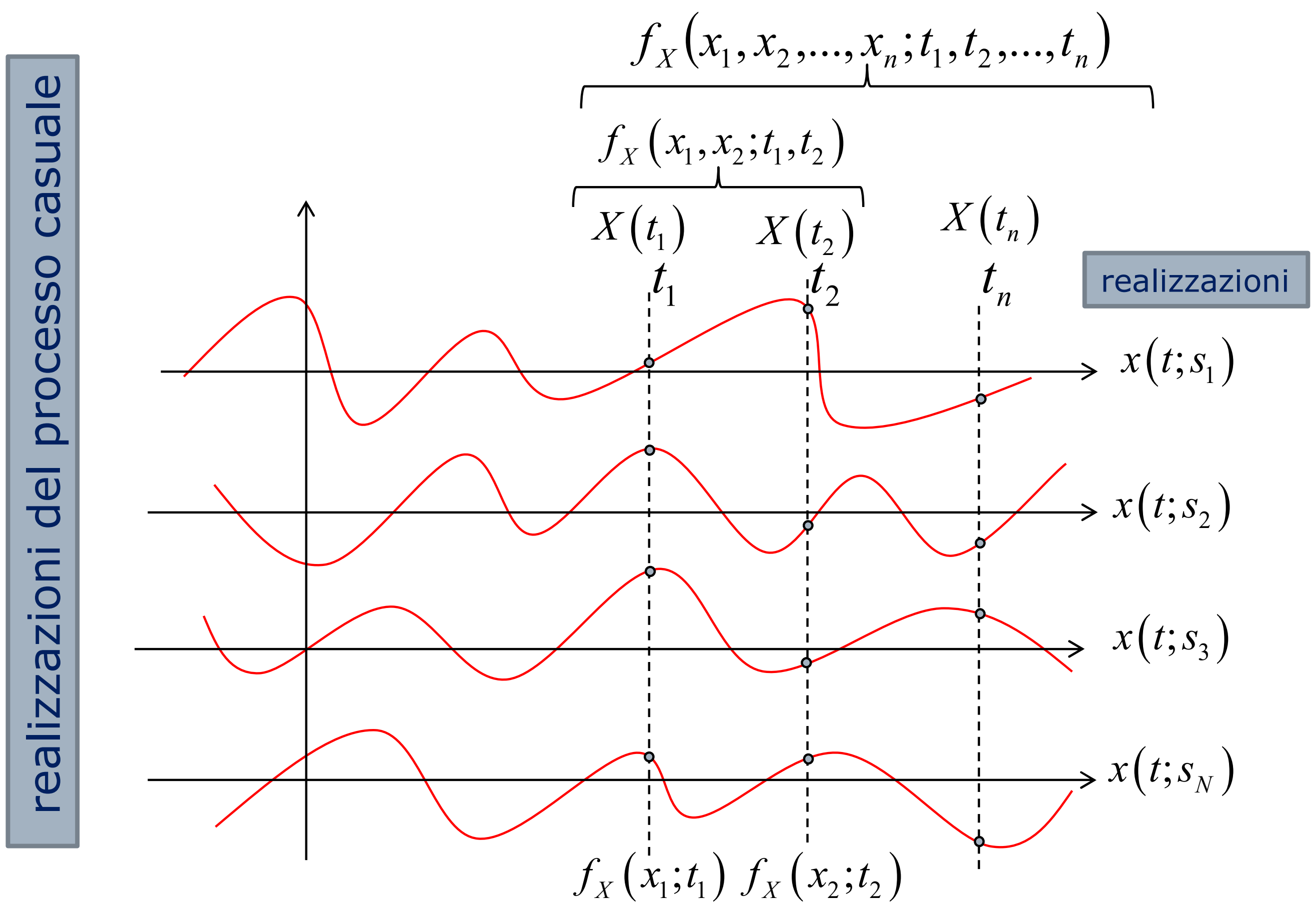
$$f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{x};\mathbf{t}\right)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}F_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{x};\mathbf{t}\right)$$

Statistiche di ordine *n*

- Un processo casuale è completamente caratterizzato se è possibile valutare qualsiasi parametro statistico (densità di probabilità congiunta) per ogni possibile insieme di suoi campioni

Descrizione probabilistica

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



Densità di probabilità del primo ordine

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- La descrizione tramite densità di probabilità di ordine n è solitamente molto complessa
- Più comunemente ci si ferma ad una caratterizzazione statistica al primo ordine, cioè:

$$\boxed{f_X(x;t)}$$

- Che cosa significa in pratica?
  - Densità di probabilità del processo «osservato» all'istante t su tutte le sue realizzazioni
  - Si tratta di una densità di probabilità che in generale può "evolvere nel tempo"

Esempio: Gaussian random walk

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Processo casuale con densità di probabilità del primo ordine con le seguenti proprietà:
  1. Gaussiana
  2. Valore medio nullo
  3. Varianza che cresce linearmente nel tempo

Nota: il processo "random walk" è solitamente definito solo per t≥0

- Si può esprimere la d.d.p. del primo ordine come:

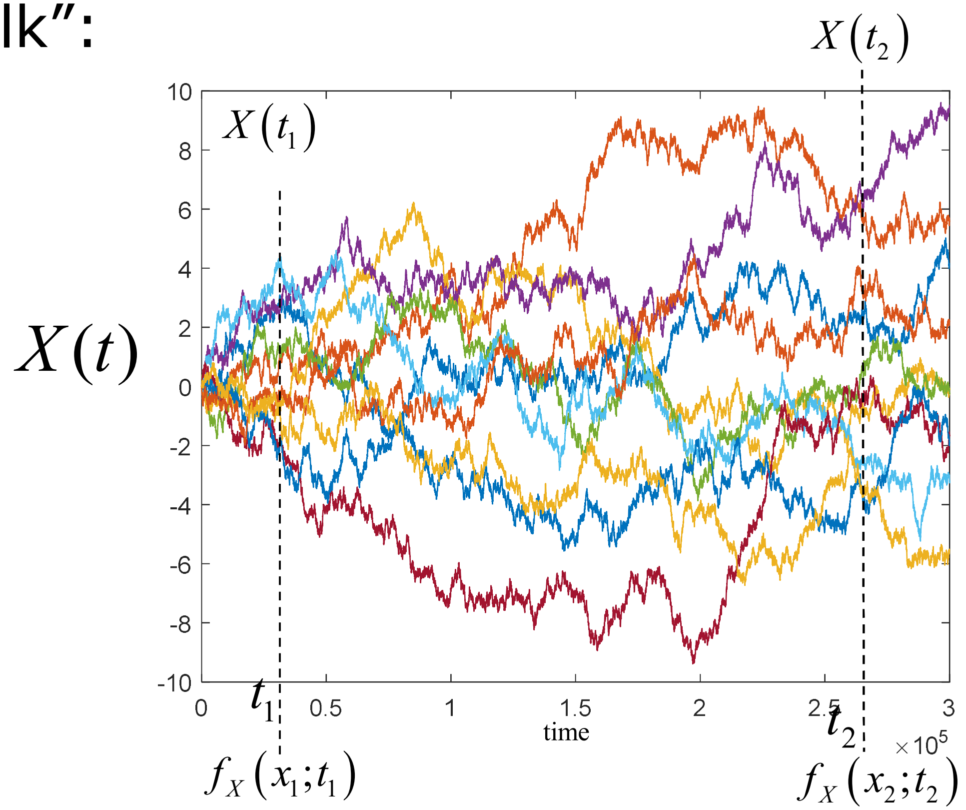
$$f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(t)}} e^{-\frac{x^2}{2\cdot\sigma_x^2(t)}} \quad \text{per} \quad t > 0$$

$$\text{dove}: \ \sigma_x^2(t) = k \cdot t$$

Esempio: Gaussian random walk

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Esempi di realizzazioni del processo casuale “Gaussian random walk”:



Nota: si tratta di un processo molto utilizzato nella fisica.

A titolo di esempio: diffusione in un liquido di una "goccia" di colorante all'interno, inizialmente per t=0 tutto concentrato nella posizione x=0

(il caso presentato qui è unidimensionale, in fisica si estende spesso a 2D o 3D)

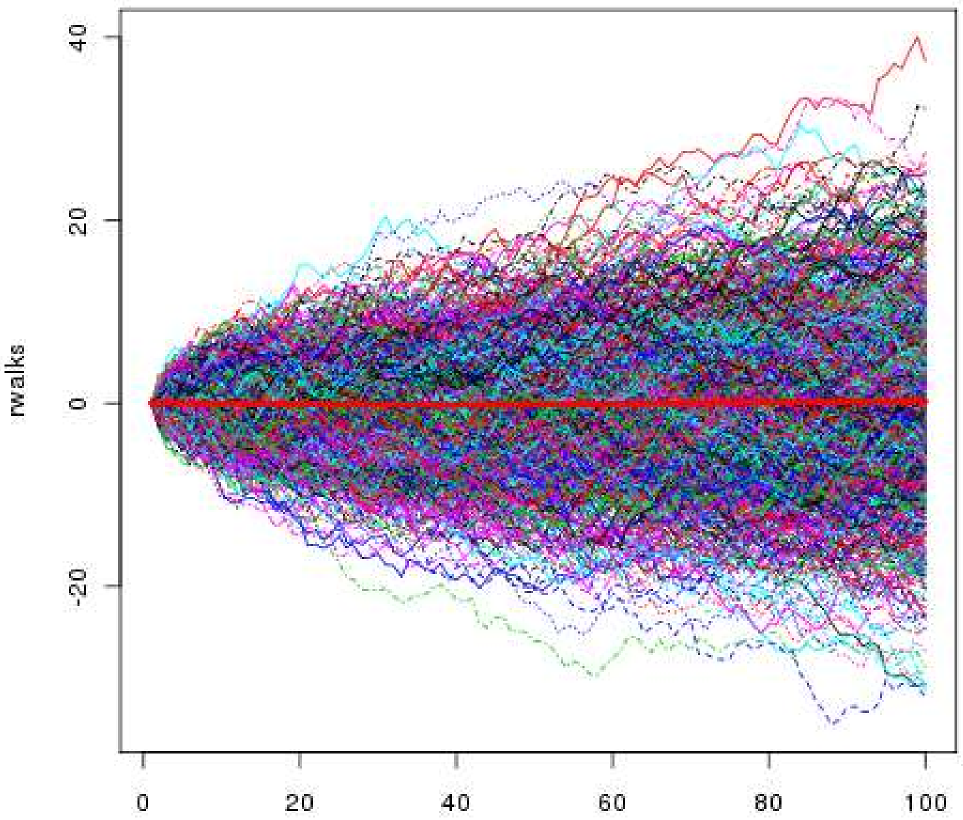
Altri esempi interessanti disponibili in rete:

- https://www.youtube.com/watch?v=1jYabtziQZo
- https://www.youtube.com/watch?v=XTy-k10Qu50

Esempio: Gaussian random walk

Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications

- Esempio su un numero molto elevato di realizzazioni



Graph taken from: http://stats.stackexchange.com/questions/159650/why-does-the-variance-of-the-random-walk-increase

Descrizione di un processo casuale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Nelle prossime slides, introdurremo alcune metriche per descrivere un processo casuale più semplici delle densità di probabilità di ordine *N:*
  - Media
  - Autocorrelazione

Media e autocorrelazione di un processo casuale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- La media di un processo casuale è definita come

$$m_X(t) \triangleq E\{X(t)\} = \int x \, f_X(x;t)\, dx$$

La media di insieme è dunque, per un certo istante di tempo t, la media (nel senso delle variabili casuali) della variabile casuale che caratterizza il processo a quell'istante t

  - ed è quindi un segnale determinato rispetto al tempo *t*

- Autocorrelazione

$$R_X(t_1,t_2) \triangleq E\{X(t_1)\cdot X^*(t_2)\} = \int\int x_1 x_2^* f_{X_1,X_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_1 dx_2$$

In generale, la funzione di autocorrelazione è funzione di due istanti di tempo t_1 e t_2

Metriche derivate da autocorrelazione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Autocovarianza

$$K_X(t_1,t_2) \hat{=} E\left\{\left(X(t_1)-m_X(t_1)\right)\left(X(t_2)-m_X(t_2)\right)^*\right\} = R_X(t_1,t_2) - m_X(t_1)\,m_X^*(t_2)$$

- Coefficiente di (auto)correlazione

$$\rho_X(t_1,t_2) \hat{=} \frac{K_X(t_1,t_2)}{\sqrt{K_X(t_1,t_1)\,K_X(t_2,t_2)}}$$

Media e autocorrelazione di un processo casuale

Politecnico di Torino
1859
Department of Electronics and Telecommunications

- La caratterizzazione di un processo casuale tramite media e autocorrelazione definite come:

$$m_X(t) \triangleq E\{X(t)\} = \int x f_X(x;t)\, dx$$

$$R_X(t_1,t_2) \triangleq E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = \int\int x_1 x_2^* f_{X_1,X_2}(x_1,x_2;t_1,t_2)\, dx_1 dx_2$$

- È detta caratterizzazione **«di insieme» del processo casuale**

- **Si parla di medie «di insieme» cioè fatte su tutte le realizzazioni del processo**
  - Più avanti, si introdurrà una altro tipo di caratterizzazione tramite le medie temporali

In inglese: Ensamble Averages

Caratterizzazione tramite media e autocorrelazione

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Tipicamente, la caratterizzazione di un processo casuale è fatta tramite:

- Media (di insieme):
  - Funzione deterministica nella variabile tempo t

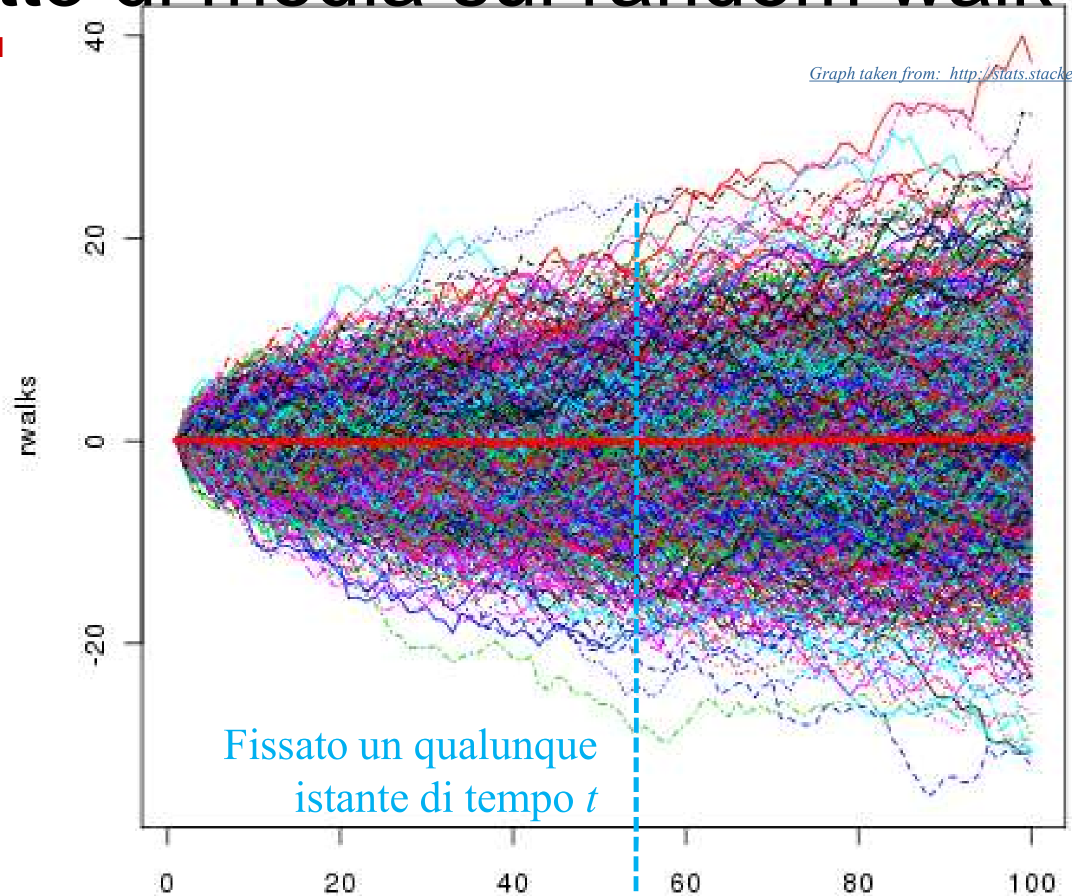
- Funzione di autocorrelazione(di insieme):
  - Funzione deterministica in due variabili tempo t_1 e t_2

- Densità di probabilità del primo ordine

- Nelle prossime slides si daranno degli esempi di questo tipo di caratterizzazione per alcuni processi casuali

Concetto di media sul random walk

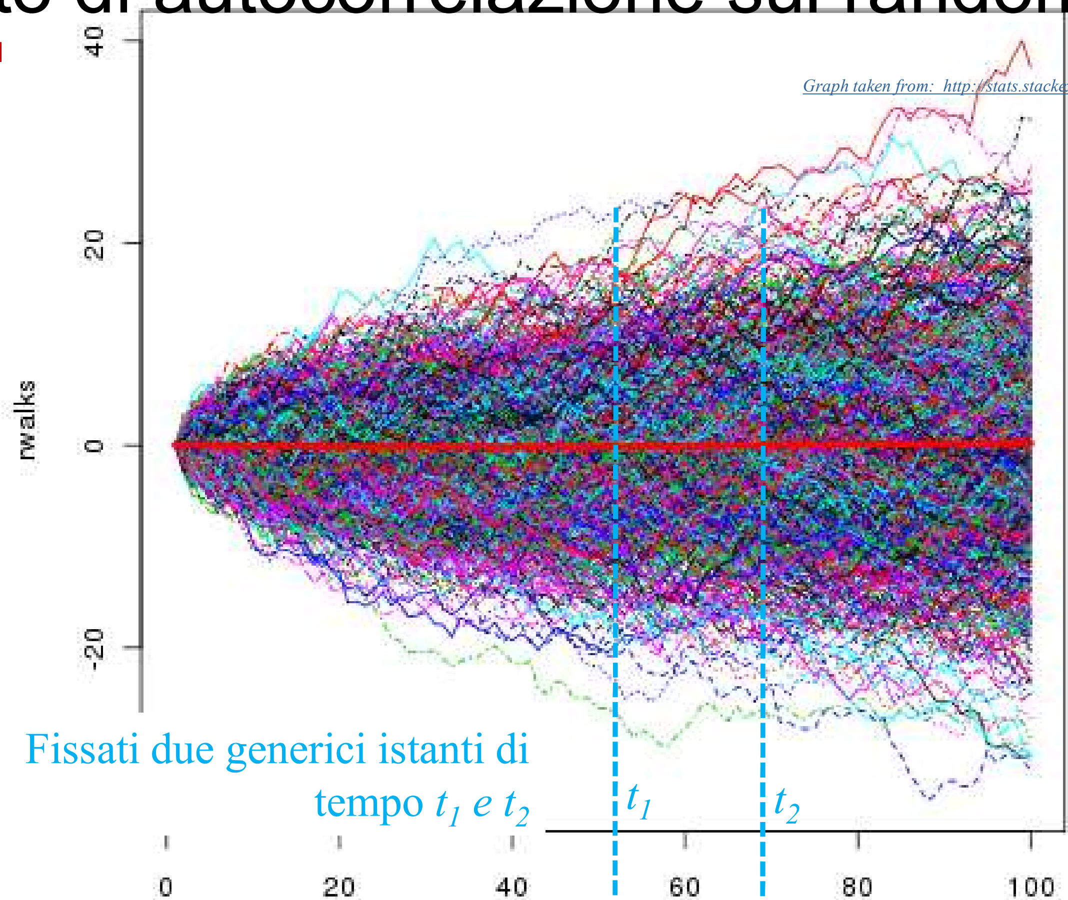
Graph taken from: http://stats.stackexchange.com/questions/159650/why-does-the-variance-of-the-random-walk-increase



$$m_X(t) \triangleq E\{X(t)\} = 0 \quad \forall t$$

Concetto di autocorrelazione sul random walk

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications



Graph taken from: http://stats.stackexchange.com/questions/159650/why-does-the-variance-of-the-random-walk-increase

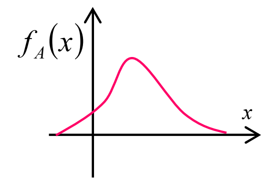
Fissati due generici istanti di tempo t_1 e t_2

$$R_X(t_1,t_2) \triangleq E\{X(t_1)X^*(t_2)\}$$

Esempio: sinusoide con ampiezza casuale

$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

Dove A è una variabile casuale con una generica densità di probabilità (può ovviamente essere anche negativa)



Media

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = E\{A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = E\{A\}\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

<u>Passaggio importante</u>: l'operatore «valore atteso» si applica alla parte stocastica dell'espressione al suo interno. La parte «deterministica» può essere intesa come una costante rispetto all'operatore di valore atteso, e dunque può essere trattata di conseguenza, nel caso specifico portandola fuori dall'operatore di valore atteso. Questo si dimostra osservando che

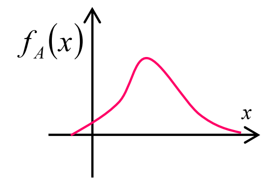
$$m_X(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\, f_A(a)da = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)\int_{-\infty}^{+\infty} a f_A(a)da = E\{A\}\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

Variabile di integrazione

Esempio: sinusoide con ampiezza casuale

$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

Dove A è una variabile casuale con una generica densità di probabilità



Autocorrelazione

$$R_X(t_1, t_2) = E\left\{A\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\, A\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)\right\}$$

$$= E\left\{A^2\right\}\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)$$

Statistica 1 ordine

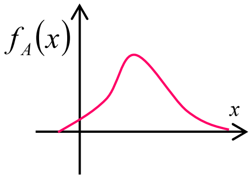
$$F_X(x_1; t_1) = P(X(t_1) < x_1) = P\big(A\cos(2\pi f_o t + \varphi) < x_1\big)$$

$$\text{poi: } f_X(x_1; t_1) = \frac{d}{dx_1} F_X(x_1; t_1)$$

Esempio : sinusoide con ampiezza casuale - Osservazioni sulla media

$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

Dove A è una variabile casuale con una generica densità di probabilità



Media

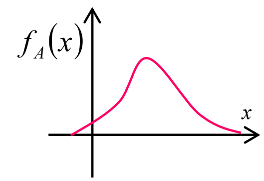
$$m_X(t) = E\{X(t)\} = E\{A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = E\{A\}\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Osserviamo che SE la variabile casuale A è a media nulla:
- Allora: $E\{A\} = 0 \Rightarrow m_X(t) = 0$
- In questa situazione, la media del processo casuale NON dipende dal tempo
  - Questa è una situazione abbastanza comune in molti esempi di interesse pratico, e porterà ad importanti osservazioni

Esempio : sinusoide con ampiezza casuale
Osservazioni sulla densità di probabilità

$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

Dove A è una variabile casuale con una generica densità di probabilità



$$F_X(x;t) = P(X(t) < x) = P\left(A\cos(2\pi f_o t + \varphi) < x\right)$$

- Facciamo notare che anche in questo esempio relativamente semplice, il calcolo della d.d.p. può essere complicato. Infatti:

$$P\left(A\cos(2\pi f_o t + \varphi) < x\right) = \begin{cases} P\left(A < \dfrac{x}{\cos(2\pi f_o t + \varphi)}\right) & \text{per } \cos(2\pi f_o t + \varphi) > 0 \\ P\left(A > \dfrac{x}{\cos(2\pi f_o t + \varphi)}\right) & \text{per } \cos(2\pi f_o t + \varphi) < 0 \end{cases}$$

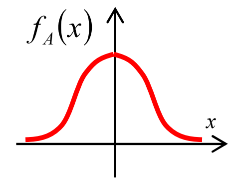
$$P\left(A\cos(2\pi f_o t + \varphi) < x\right) = \begin{cases} F_A\left(\dfrac{x}{\cos(2\pi f_o t + \varphi)}\right) & \text{per } \cos(2\pi f_o t + \varphi) > 0 \\ 1 - F_A\left(\dfrac{x}{\cos(2\pi f_o t + \varphi)}\right) & \text{per } \cos(2\pi f_o t + \varphi) < 0 \end{cases}$$

Esempio : sinusoide con ampiezza casuale
Osservazioni sulla densità di probabilità

- Supponiamo ad esempio che A sia una variabile casuale Gaussiana a valor medio nullo

$$f_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2}} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_A^2(t)}\right)}$$

$$F_A(x) = 1 - \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}\cdot\sigma_A}\right)$$



- Allora:

$$F_X(x;t) = P\left(A\cos(2\pi f_o t+\varphi) < x\right) = \begin{cases} 1-\frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma_A^2}\cdot\cos(2\pi f_o t+\varphi)}\right) & \text{per } \cos(2\pi f_o t+\varphi)>0 \\ \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma_A^2}\cdot\cos(2\pi f_o t+\varphi)}\right) & \text{per } \cos(2\pi f_o t+\varphi)<0 \end{cases}$$

- Sfruttando la relazione: $\frac{d}{dz} erfc(z) = -\frac{2\cdot e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}$

http://mathworld.wolfram.com/Erfc.html

$$f_X(x;t) = \frac{d}{dx} F_X(x;t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\sigma_A^2}\cdot\cos(2\pi f_o t+\phi)} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma_A^2}\cdot\cos(2\pi f_o t+\phi)}\right)^2} & \text{per } \cos(2\pi f_o t+\phi)>0 \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\sigma_A^2}\cdot\cos(2\pi f_o t+\phi)} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma_A^2}\cdot\cos(2\pi f_o t+\phi)}\right)^2} & \text{per } \cos(2\pi f_o t+\phi)<0 \end{cases}$$

Esempio : sinusoide con ampiezza casuale
Osservazioni sulla densità di probabilità

- In conclusione, possiamo scrivere il risultato in forma compatta come:

$$f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2} \cdot \left|\cos(2\pi f_o t + \phi)\right|} e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2\sigma_A^2} \cdot \cos(2\pi f_o t + \phi)}\right)^2}$$

- E dunque:

$$f_X(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2 \cos^2(2\pi f_o t + \phi)} \cdot} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_A^2 \cdot \cos^2(2\pi f_o t + \phi)}}$$

- Notare che questa è la densità di probabilità di una gaussiana:
  - A valor medio nullo
  - Con varianza dipendente dal tempo data da:

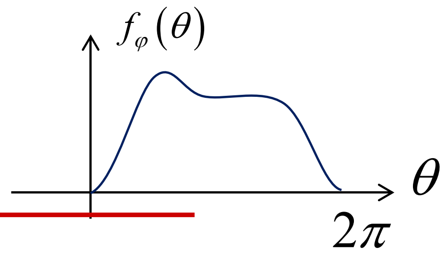
$$\sigma_X^2(t) = \sigma_A^2 \cdot \cos^2(2\pi f_o t + \varphi)$$

Sinusoide con fase casuale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

Dove φ è una variabile casuale con una generica densità di probabilità



Media

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = AE\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = A\int f_\varphi(\theta)\cos(2\pi f_0 t + \theta)\,d\theta$$

Il risultato dipende dalla d.d.p. di θ

Autocorrelazione

$$R_{X(t_1,t_2)} = A^2 E\{\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)\} = \frac{A^2}{2}[E\{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)\} + \cos(2\pi f_0(t_1 - t_2)] =$$

$$= \frac{A^2}{2}[E\{\cos(2\pi f_0(t_1 + t_2) + 2\varphi)\}] + \frac{A^2}{2}\cos\big(2\pi f_0(t_1 - t_2)\big)$$

Relazioni trigonometriche utili in questo tipo di esercizi:

- $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$
- $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$
- $\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$
- $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$

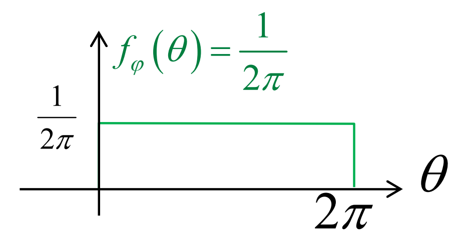
- $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

https://it.wikipedia.org/wiki/Trigonometria

Sinusoide con fase casuale

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

- Supponiamo che θ abbia una d.d.p. uniforme in $[0,2\pi]$
  - Cioè che θ sia un qualunque angolo con uguale probabilità tra 0 e 360 gradi
- Allora:



Media

$$m_X(t) = E\{X(t)\} = A \cdot E\{\cos(2\pi f_0 t + \varphi)\} = A\int f_\varphi(\theta)\cos(2\pi f_0 t + \theta)\,d\theta$$

$$= A\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\cos(2\pi f_0 t + \theta)\,d\theta = 0$$

Notare che anche in questo caso la media NON dipende dal tempo

Autocorrelazione

$$R_X(t_1,t_2) = A^2 E\{\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)\}$$

$$= \frac{A^2}{2}\left[E\{\cos(2\pi f_0(t_1+t_2)+2\varphi)\} + \cos(2\pi f_0(t_1-t_2))\right]$$

$$= \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0(t_1-t_2))$$

Notare che in questo caso l'autocorrelazione dipende solo dalla differenza tra i due tempi t_1-t_2

Segnale determinato interpretato come processo casuale

$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$

Supponiamo qui che tutti i parametri della sinusoide siano fissati (ampiezza, fase e frequenza)

$$m_x(t) = E\{X(t)\} = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

media

$$R_x(t_1,t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = A^2\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi)\cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi)$$

autocorrelazione

$$f_X(x_1;t_1) = \delta(x_1 - A\cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi))$$

Statistica 1 ordine

$$f_{X_1X_2}(x_1,x_2;t_1,t_2) = \delta(x_1 - X(t_1))\,\delta(x_2 - X(t_2))$$

Statistica 2 ordine

Segnale per trasmissione numerica

Politecnico di Torino
Department of Electronics and Telecommunications

$$\boxed{X(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i r(t - iT)}$$

Supponiamo qui che $r(t)$ sia un segnale deterministico, mentre α_i siano variabili casuali discrete e statisticamente indipendenti tra di loro (e dunque scorrelate per le medie congiunte)

$$m_x(t) = E\{X(t)\} = E\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i r(t - iT)\right\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} E\{\alpha_i\} r(t - iT)$$

media

$$R_x(t_1, t_2) = E\{X(t_1) X^*(t_2)\} = E\left\{\sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i r(t_1 - iT) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j^* r^*(t_2 - jT)\right\}$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} E\{\alpha_i \alpha_j^*\} r(t_1 - iT) r(t_2 - jT)$$

autocorrelazione

$$F_X(x_1; t_1) = P[X(t_1) < x_1]$$

Statistica 1 ordine

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = P[X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2]$$

Statistica 2 ordine

Le ultime due statistiche sono entrambe estremamente difficili da calcolare nel caso generale