Teoria ed Elaborazione dei Segnali - Appello 15 febbraio 2024

(1) **1a** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si considerino i seguenti due segnali a tempo continuo:

- $x(t)$ porta con ampiezza unitaria in $[T_0, 3T_0]$ e nullo altrove;
- $y(t)$ segnale pari a 1 in $[0, T_0]$, pari a -1 in $[T_0, 2T_0]$ e nullo altrove;

con $T_0 > 0$. Sia $z(t) = x(t) * y(t)$ la convoluzione tra i due segnali. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo con durata $2T_0$ e con $z(T_0) = 0$
b. $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo, con durata $4T_0$ e che non assume neanche un valore nullo all'interno del suo supporto temporale
c. $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nell'intervallo $[0, 4T_0]$
d. $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo, con una durata $4T_0$ e con $z(3T_0) = 0$

SOLUZIONE
E' opportuno risolvere questo esercizio tramite la costruzione grafica vista a lezione, disegnando sull'asse τ i due segnali $x(t-\tau)$ e $y(\tau)$, notando dunque che sull'asse τ il segnale $x(t-\tau)$ ha supporto in $[t-3T_0, t-T_0]$, mentre $y(\tau)$ ha supporto in $[0, 2T_0]$. La risposta corretta è dunque "$z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo, con durata $4T_0$ e con $z(3T_0) = 0$".

(2) **1b** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si considerino i seguenti due segnali a tempo continuo:

- $x(t)$ porta con ampiezza unitaria in $[2T_0, 4T_0]$ e nullo altrove;
- $y(t)$ segnale pari a 1 in $[0, T_0]$, pari a -1 in $[T_0, 2T_0]$ e nullo altrove;

con $T_0 > 0$. Sia $z(t) = x(t) * y(t)$ la convoluzione tra i due segnali. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo con durata $2T_0$ e con $z(T_0) = 0$
b. $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo nell'intervallo $[2T_0, 6T_0]$ e con $z(4T_0) = 0$
c. $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nell'intervallo $[0, 4T_0]$
d. $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo, con durata $4T_0$ e che non assume neanche un valore nullo all'interno del suo supporto temporale

SOLUZIONE
E' opportuno risolvere questo esercizio tramite la costruzione grafica vista a lezione, disegnando sull'asse τ i due segnali $x(t-\tau)$ e $y(\tau)$, notando dunque che sull'asse τ il segnale $x(t-\tau)$ ha supporto in $[t-4T_0, t-2T_0]$, mentre $y(\tau)$ ha supporto in $[0, 2T_0]$. La risposta corretta è dunque " $z(t)$ è un segnale con supporto limitato nel tempo nell'intervallo $[2T_0, 6T_0]$ e con $z(4T_0) = 0$".

(3) **2a** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri un processo casuale $x(t)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. $x(t)$ è detto "ergodico" se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo.
b. se il processo è stazionario in senso lato, la funzione di autocorrelazione dipende da una singola variabile temporale.
c. $x(t)$ è detto "quasi determinato" se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo
d. dato un processo casuale $x(t)$, la densità spettrale di potenza è reale se e solo se il processo casuale $x(t)$ assume valori reali.

SOLUZIONE
La risposta corretta è questa: "se il processo è stazionario in senso stretto, la funzione di autocorrelazione dipende da una singola variabile temporale." in quanto i processi stazionari in senso lato (WSS) hanno proprio come caratteristica il fatto che $R_x(t_1, t_2)$ dipenda solo da $\tau = t_2 - t_1$. Le altre risposte sono sbagliate, in quanto:

- $x(t)$ è detto "quasi determinato" se si tratta di un processo casuale con un'espressione analitica che dipende solo dal tempo e da variabili casuali, e questo non implica nessuna condizione rispetto al tempo.
- $x(t)$ è detto "ergodico" se le medie di insieme e quelle temporali sono uguali, e anche in questo caso ciò non implica nessuna condizione in $x(t)$ rispetto al tempo.
- la densità spettrale di potenza di un processo casuale è sempre una funzione reale, indipendentemente dalle caratteristiche del processo casuale $x(t)$

(4) **2b** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri un processo casuale $x(t)$. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

a. $x(t)$ è detto “ergodico” se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo.
b. la densità spettrale di potenza è sempre una funzione pari in f qualunque sia la tipologia di processo casuale $x(t)$.
c. affinchè $x(t)$ possa essere ergodico, le medie temporali devono assumere lo stesso valore per tutte le realizzazioni.
d. $x(t)$ è detto stazionario solo se le sue realizzazioni sono costanti nel tempo

SOLUZIONE

La risposta corretta è questa: “affinchè $x(t)$ possa essere ergodico, le medie temporali devono assumere lo stesso valore per tutte le realizzazioni” in quanto per i processi ergodici le medie di insieme e quelle temporali devono coincidere, e da ciò consegue il fatto che le una determinata media temporale deve avere un valore costante su tutte le realizzazioni. Le altre risposte sono sbagliate, in quanto:

- la condizione $x(t)$ stazionario non implica necessariamente che le sue realizzazioni siano costanti nel tempo, ma solo che le medie di insieme abbiano determinate condizioni di regolarità nel tempo
- $x(t)$ è detto “ergodico” se le medie di insieme e quelle temporali sono uguali, e questo non implica che le sue realizzazioni siano costanti nel tempo
- la densità spettrale di potenza di un processo casuale può non essere pari se il processo casuale $x(t)$ è complesso

(5) **3a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ che abbia una trasformata zeta $X(z)$ razionale. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

a. per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l’interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo
b. per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l’interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo
c. per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l’interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo
d. per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l’interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo

SOLUZIONE

Per quanto visto a teoria relativamente alle regioni di convergenza, la risposta corretta è ”per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l’interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo”

(6) **3b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ che abbia una trasformata zeta $X(z)$ razionale. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

a. per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l’interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo
b. per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l’esterno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo
c. per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l’esterno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo
d. per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza della trasformata zeta è l’interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo

SOLUZIONE

Per quanto visto a teoria relativamente alle regioni di convergenza, la risposta corretta è ”per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l’esterno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo”

(7) **4a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Il segnale

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + |\cos(2\pi f_0 t)|$$

viene filtrato da un sistema LTI con risposta all’impulso

$$h(t) = 2\frac{\sin\left(\frac{\pi f_0 t}{5}\right)}{\pi t}\cos(4\pi f_0 t)$$

Il segnale $y(t)$ all’uscita del filtro vale:

a. $y(t) = \frac{2}{15\pi}\cos(8\pi f_0 t)$

b. $y(t) = \frac{1}{3\pi}\cos(8\pi f_0 t)$

c. $y(t) = 0 \quad \forall t$

d. $y(t) = \frac{2}{3\pi}\cos(4\pi f_0 t)$

e. Nessuna delle altre risposte
f. $y(t) = -\frac{2}{5\pi}\cos(4\pi f_0 t)$

(8) **4b** RISPOSTA MULTIPLA Una sola alternativa
Il segnale

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) + |\cos(2\pi f_0 t)|$$

viene filtrato da un sistema LTI con risposta all'impulso

$$h(t) = 2\frac{\sin\left(\frac{\pi f_0 t}{6}\right)}{\pi t}\cos(8\pi f_0 t)$$

Il segnale $y(t)$ all'uscita del filtro vale:

a. $y(t) = -\frac{1}{3\pi}\cos(8\pi f_0 t)$

b. $y(t) = \frac{1}{5\pi}\cos(4\pi f_0 t)$

c. Nessuna delle altre risposte
d. $y(t) = 0 \quad \forall t$

e. $y(t) = -\frac{2}{15\pi}\cos(8\pi f_0 t)$

f. $y(t) = -\frac{2}{3\pi}\cos(4\pi f_0 t)$

Soluzione 4a-b
La somma del coseno con il suo modulo 'cancella' i lobi negativi e si ottiene un segnale periodico, sempre di periodo $\frac{1}{f_0}$ il cui segnale nel periodo fondamentale si puó scrivere come

$$z(t) = \cos(2\pi f_0 t) p_{1/2f_0}(t)$$

e quindi

$$x(t) = \sum_k z(t - \frac{k}{f_0})$$

La funzione di trasferimento del filtro vale in un caso

$$H_1(f) = p_{\frac{f_0}{5}}(f - 2f_0) + p_{\frac{f_0}{5}}(f + 2f_0)$$

oppure

$$H_2(f) = p_{\frac{f_0}{6}}(f - 4f_0) + p_{\frac{f_0}{5}}(f + 4f_0)$$

quindi l'uscita si ottiene considerando le due componenti spettrali del segnale periodico in $\pm f = 2f_0$ o in $\pm f = 4f_0$.

$$Z(f) = \frac{\sin(\pi f \frac{1}{2f_0})}{\pi f} * \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] = \frac{1}{2}\frac{\sin[\pi(f - f_0)\frac{1}{2f_0}]}{\pi(f - f_0)} + \frac{1}{2}\frac{\sin[\pi(f + f_0)\frac{1}{2f_0}]}{\pi(f + f_0)}$$

Si ottiene quindi che il coefficiente delle righe spettrali

$$f_0 \cdot Z(f)|_{f=2f_0} = f_0\left[\frac{1}{2}\frac{\sin[\pi f_0 \frac{1}{2f_0}]}{\pi f_0} + \frac{1}{2}\frac{\sin[\pi 3 f_0 \frac{1}{2f_0}]}{\pi 3 f_0}\right] = f_0\left[\frac{1}{2}\frac{\sin[\frac{\pi}{2}]}{\pi f_0} + \frac{1}{2}\frac{\sin[\frac{3\pi}{2}]}{3\pi f_0} = \frac{1}{3\pi}\right]$$

e

$$f_0 \cdot Z(f)|_{f=4f_0} = f_0 \left[\frac{1}{2} \frac{\sin[3\pi f_0 \frac{1}{2f_0}]}{3\pi f_0} + \frac{1}{2} \frac{\sin[\pi 5 f_0 \frac{1}{2f_0}]}{\pi 5 f_0} \right] = f_0 \left[\frac{1}{2} \frac{\sin[\frac{3\pi}{2}]}{3\pi f_0} + \frac{1}{2} \frac{\sin[\frac{5\pi}{2}]}{5\pi f_0} = -\frac{1}{15\pi} \right]$$

. Da cui

$$y_1(t) = \frac{2}{3\pi} \cos(4\pi f_0 t)$$

$$y_2(t) = -\frac{2}{15\pi} \cos(8\pi f_0 t)$$

(9) **5a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Il segnale

$$x(t) = e^{-2t} u(t)$$

viene filtrato da un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

Il segnale di uscita $y(t)$ vale:

a. $y(t) = e^{-t} u(t)$
b. $y(t) = te^{-t} u(t)$
c. $y(t) = (1 - e^{-t})$
d. nessuna delle altre risposte
e. $y(t) = e^{-t}(1 - e^{-t})$

(10) **5b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Il segnale

$$x(t) = e^{-3t} u(t)$$

viene filtrato da un sistema LTI con funzione di trasferimento

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f}$$

Il segnale di uscita $y(t)$ vale:

a. $y(t) = 2te^{-2t} u(t)$
b. $y(t) = \frac{1}{2} e^{-t}(1 - e^{-2t})$
c. nessuna delle altre risposte
d. $y(t) = (1 - e^{-2t})$
e. $y(t) = e^{-3t} u(t)$

SOLUZIONE 5a-b

Si consideri il generico

$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

e antirtrasformando

$$h(t) = x(t) = e^{-t} u(t)$$

L'uscite deve essere calcolata nel domniio del tempo come

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

L'integrale é nullo per $t < 0$.

Per $t > 0$ vale

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{(-a+1)\tau} d\tau = \frac{1}{-a+1} e^{-t} \left. e^{(-a+1)\tau} \right|_0^t = \frac{1}{a-1} e^{-t} (1 - e^{(-a+1)t})$$

Per $a = 2$

$$y(t) = e^{-t}(1 - e^{-t}) u(t)$$

Per $a = 3$

$$y(t) = \frac{1}{2} e^{-t}(1 - e^{-2t}) u(t)$$

(11) **6a** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$x(t) = 2T\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{4T}\right)}{\pi t}\right]^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi 5}{2T}t\right) - 2T\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi t}\right]^2$$

che viene elaborato da un campionatore che opera ad una frequenza di campionaamento $f_c = 1500\,\text{Hz}$. Si determini il minimo valore del parametro T che permette la perfetta ricostruzione di $x(t)$ a partire dai suoi campioni

a. Il segnale non puó essere mai ricostruito senza effetti di aliasing qualunque sia il valore di T
b. $T = 0,005\,\text{s}$
c. Nessuna delle altre risposte
d. $T = 0,002\,\text{s}$
e. $T = 0,001\,\text{s}$
f. $T = 0,004\,\text{s}$

(12) **6b** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$x(t) = 3T\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi t}\right]^2 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2T}t\right) - 2T\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi t}{4T}\right)}{\pi t}\right]^2$$

che viene elaborato da un campionatore che opera ad una frequenza di campionaamento $f_c = 2500\,\text{Hz}$. Si determini il minimo valore del parametro T che permette la perfetta ricostruzione di $x(t)$ a partire dai suoi campioni

a. $T = 0,0072\,\text{s}$
b. $T = 0,0036\,\text{s}$
c. Nessuna delle altre risposte
d. $T = 0,0018\,\text{s}$
e. $T = 0,0009\,\text{s}$
f. Il segnale non puó essere mai ricostruito senza effetti di aliasing qualunque sia il valore di T

Solutione 6a-b

La massima frequenza nello spettro di $x(t)$ si ottiene calcolandone la trasformata di Fourier

Per la versione a la massima frequenza nello spettro risulta essere $f_{\max} = \frac{3}{2T}$ La frequenza di campionamento $f_s \geq 2f_{\max} = \frac{3}{T}$ da cui si ottiene che $T \geq \frac{3}{f_s}$. Si ottiene quindi che il minimo valore di $T = \frac{3}{1500} = 2 \cdot 10^{-3}$

Per la versione b la massima frequenza nello spettro risulta essere $f_{\max} = \frac{9}{4T}$ La frequenza di campionamento $f_s \geq 2f_{\max} = \frac{9}{2T}$ da cui si ottiene che $T \geq \frac{9}{2f_s}$. Si ottiene quindi che il minimo valore di $T = \frac{9}{5000} = 1.8 \cdot 10^{-3}$

(13) **7a** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Quando all'ingresso di un filtro numerico causale viene inviato il segnale:

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1]$$

l'uscita vale

$$y[n] = \delta[n] - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

La risposta all'impulso $h[n]$ del filtro vale:

a. $h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1] + u[n] + \frac{1}{6}u[n-1] - \frac{1}{6}u[n-2]$
b. $h[n] = -\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$
c. $h[n] = \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$
d. $h[n] = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$
e. Nessuna delle altre risposte è corretta
f. $h[n] = \delta[n] + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

Soluzione

Le trasfomate zeta dei segnali in ingresso e in uscita dal filtro valgono:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1}$$

$$Y(z) = 1 - z^{-1}\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1+\frac{1}{2}z^{-1} - z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

La funzione di trasferimento del filtro è quindi pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$H(z) = \frac{R_1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = H(z)\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1+1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{6}{5}$$

$$R_2 = H(z)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z=\frac{1}{3}} = \frac{1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5}$$

Quindi:

$$H(z) = \frac{6}{5}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{5}\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = \frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(14) **7b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Quando all'ingresso di un filtro numerico causale viene inviato il segnale:

$$x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

l'uscita vale

$$y[n] = -\delta[n] + 2\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

La risposta all'impulso $h[n]$ del filtro vale:

a. $h[n] = \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
b. $h[n] = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
c. $h[n] = \delta[n] + \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$
d. $h[n] = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$
e. Nessuna delle altre risposte è corretta
f. $h[n] = \delta[n] - \frac{1}{3}\delta[n-1] + u[n] - \frac{1}{6}u[n-1] - \frac{1}{6}u[n-2]$

Soluzione

Le trasfomate zeta dei segnali in ingresso e in uscita dal filtro valgono:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1}$$

$$Y(z) = -1 + 2\frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{-1 - \frac{1}{3}z^{-1} + 2}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

La funzione di trasferimento del filtro è quindi pari a:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Calcolo dell'antitrasformata con il metodo dei residui:

$$H(z) = \frac{R_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{R_2}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}$$

con:

$$R_1 = H(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$R_2 = H(z)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\Big|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{1+1}{1+\frac{3}{2}} = \frac{4}{5}$$

Quindi:

$$H(z) = \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{4}{5}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(15) **8a** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri la seguente sequenza $x[n]$ di $N = 8$ campioni:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{1}{3} & n = 2, 6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli $X[k] = DFT\{x[n]\}$, per $k = 0, ..., 7$.

a. $X[k] = \delta[k] + \frac{1}{3}\delta[k-2] + \frac{1}{3}\delta[k-6]$
b. $X[k] = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)+1$
c. $X[k] = 1 + \frac{2}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}k}$
d. $X[k] = 1 + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$
e. $X[k] = e^{-j\frac{\pi}{4}k} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)$
f. Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione
La DFT della sequenza $x[n]$ su N punti è definita come:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\frac{n\cdot k}{N}} \quad \text{per} \quad k = 0, ..., N-1$$

In questo caso, $N = 8$ e solo 3 campioni sono diversi da zero:

$$X(k) = 1 + \frac{1}{3}e^{-j2\pi\frac{2}{8}k} + \frac{1}{3}e^{-j2\pi\frac{6}{8}k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}k} + \frac{1}{3}e^{-j\frac{3}{2}\pi k}$$

Tenedo conto che $e^{j2\pi k} = 1$, l'espressione precedente si può riscrivere come:

$$X(k) = 1 + \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}k} + \frac{1}{3}e^{-j\frac{3}{2}\pi k} \cdot e^{j2\pi k} =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{2}k} + \frac{1}{3}e^{+j\frac{\pi}{2}k} = 1 + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right).$$

(16) **8b** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri la seguente sequenza $x[n]$ di $N = 8$ campioni:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{1}{3} & n = 3, 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli $X[k] = DFT\{x[n]\}$, per $k = 0, ..., 7$.

a. $X[k] = \delta[k] + \frac{1}{3}\delta[k-3] + \frac{1}{3}\delta[k-5]$
b. $X[k] = 1 + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right)$
c. $X[k] = e^{-j\frac{\pi}{4}k} + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right)$
d. $X[k] = 1 + \frac{2}{3}e^{-j\frac{3}{4}\pi k}$
e. $X[k] = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right) + 1$
f. Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione
La DFT della sequenza $x[n]$ su N punti è definita come:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi \frac{n \cdot k}{N}} \quad \text{per} \quad k = 0, ..., N-1$$

In questo caso, $N = 8$ e solo 3 campioni sono diversi da zero:

$$X(k) = 1 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{3}{8}k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{5}{8}k} =$$
$$= 1 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5}{4}\pi k}$$

Tenedo conto che $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k} = 1$, l'espressione precedente si può riscrivere come:

$$X(k) = 1 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5}{4}\pi k} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k} =$$
$$= 1 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi k} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi k} = 1 + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right).$$

(17) **9a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Un rumore gaussiano bianco $n(t)$ con spettro di potenza uguale a $N_0/2$ viene posto in ingresso a due sistemi lineari e tempo invarianti con funzioni di trasferimento $H_1(f)$ e $H_2(f)$. $H_1(f)$ vale 1 per $|f| < B_1$ e 0 altrove. $H_2(f)$ vale 1 per $|f| < B_2$ e 0 altrove. Siano $y_1(t)$ e $y_2(t)$ le due uscite. $y_2(t)$, l' uscita del sistema con banda B_2, viene moltiplicata per una costante reale K per ottenere il processo $y_3(t)$. Per quale valore di K le probabilità $P\{y_1(t) > A\}$, e $P\{y_3(t) > A\}$, con A costante strettamente positiva, sono uguali?

a. $K = \sqrt{B_1/B_2}$
b. $K = B_2/B_1$
c. per ogni valore di K
d. $K = B_1/B_2$
e. $K = \sqrt{B_2/B_1}$
f. $K = 1$
g. per nessun valore di K

(18) **9b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Un rumore gaussiano bianco $n(t)$ con spettro di potenza uguale a $N_0/2$ viene posto in ingresso a due sistemi lineari e tempo invarianti con funzioni di trasferimento $H_1(f)$ e $H_2(f)$. $H_1(f)$ vale 1 per $|f| < B_1$ e 0 altrove. $H_2(f)$ vale 1 per $|f| < B_2$ e 0 altrove. Siano $y_1(t)$ e $y_2(t)$ le due uscite. $y_1(t)$, l'uscita del sistema con banda B_1, viene moltiplicata per una costante reale K per ottenere il processo $y_3(t)$. Per quale valore di K le probabilità $P\{y_2(t) > A\}$, e $P\{y_3(t) > A\}$, con A costante positiva, sono uguali?

a. per ogni valore di K
b. $K = B_1/B_2$
c. $K = 1$
d. $K = \sqrt{B_2/B_1}$
e. $K = \sqrt{B_1/B_2}$
f. $K = B_2/B_1$
g. per nessun valore di K

Soluzione 9a:
$y_1(t)$ e $y_3(t)$ sono variabili casuali, entrambe Gaussiane e con valor medio nullo perchè lo è $n(t)$. $P\{y_2(t) > A\}$ dipende solo dalla statistica del prim'ordine, quindi $P\{y_2(t) > A\} = P\{y_2(t) > A\}$ se e solo se le due variabili hanno la stessa varianza, uguale al valore quadratico medio.

$$E\{y_1^2(t)\} = R_{y_1}(0) = \int S_{y_2}(f)df = \frac{N_0}{2}2B_1$$
$$E\{y_2^2(t)\} = R_{y_2}(0) = \int S_{y_3}(f)df = \frac{N_0}{2}2B_2$$
$$E\{y_3^2(t)\} = K^2 E\{y_1^2(t)\} = K^2\frac{N_0}{2}2B_1$$

Uguagliando otteniamo:

$$K^2\frac{N_0}{2}2B_1 = \frac{N_0}{2}2B_2 \rightarrow K = \sqrt{B_2/B_1}$$

Si noti che se $A = 0$ l'uguaglianza è invece sempre soddisfatta.

(19) **10a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo casuale

$$y(t) = \cos(2\pi f_c t + \varphi) - x(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi)$$

sapendo che $x(t)$ è un processo casuale stazionario a media nulla con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$, che φ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2π, e che $x(t)$ e φ sono statisticamente indipendenti tra loro.

a. $R_y(\tau) = 0.5[1 - R_x(\tau)]\cos(2\pi f_c \tau)$
b. $R_y(t,\tau) = 0.5\cos(2\pi f_c(2t+\tau))(1 + R_x(\tau))$
c. $R_y(t,\tau) = 0.5\cos(2\pi f_c(2t+\tau))R_x(\tau)$
d. $R_y(\tau) = [1 + R_x(\tau)]\cos(2\pi f_c \tau)$
e. $R_y(\tau) = 0.5[1 + R_x(\tau)]\cos(2\pi f_c \tau)$
f. $R_y(\tau) = 0.5\cos(2\pi f_c \tau) - 0.5R_x(\tau)\sin(2\pi f_c \tau)$

(20) **10b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo casuale

$$y(t) = \cos[2\pi f_c(t - t_0)] - x(t)\sin[2\pi f_c(t - t_0)]$$

sapendo che $x(t)$ è un processo casuale stazionario a media nulla con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$, che t_0 è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e $1/f_c$, e che $x(t)$ e t_0 sono statisticamente indipendenti tra loro.

a. $R_y(\tau) = 0.5[1 + R_x(\tau)]\cos(2\pi f_c \tau)$
b. $R_y(\tau) = 0.5\cos(2\pi f_c \tau) - 0.5R_x(\tau)\sin(2\pi f_c \tau)$
c. $R_y(\tau) = 0.5[1 - R_x(\tau)]\cos(2\pi f_c \tau)$
d. $R_y(\tau) = [1 + R_x(\tau)]\cos(2\pi f_c \tau)$
e. $R_y(t,\tau) = 0.5\cos(2\pi f_c(2t+\tau))(1 + R_x(\tau))$
f. $R_y(t,\tau) = 0.5\cos(2\pi f_c(2t+\tau))R_x(\tau)$

Soluzione 10a:
Questo esercizio è simile a quello sviluppato a lezione.

$$\begin{aligned}
R_y(t,\tau) &= E\{y(t)y(t+\tau)\} = E\{[\cos(2\pi f_c t + \varphi) - x(t)\sin(2\pi f_c t + \varphi)]\,[\cos(2\pi f_c(t+\tau) + \varphi) - x(t+\tau)\sin(2\pi f_c(t+\tau) + \varphi)]\} \\
&= E\{\cos(2\pi f_c t + \varphi)\cos(2\pi f_c(t+\tau) + \varphi)\} + E\{x(t)x(t+\tau)\sin(2\pi f_c t + \varphi)\sin(2\pi f_c(t+\tau) + \varphi)\} + 0 \\
&= \frac{1}{2}E\{\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + 2\varphi)\} + \frac{1}{2}E\{x(t)x(t+\tau)\,[\cos(2\pi f_c \tau) - \cos(2\pi f_c(2t+\tau) + 2\varphi))]\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos(2\pi f_c \tau) + E\{x(t)x(t+\tau)\cos(2\pi f_c \tau)\}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cos(2\pi f_c \tau)\left(1 + R_x(\tau)\right)
\end{aligned}$$

Si noti che essendo $x(t)$ statisticamente indipendente da φ, quando si moltiplicano due espressioni che contengono solo $x(t)$ o φ il valor medio del prodotto è pari al prodotto dei valori medi.

Nella seconda eguaglianza i termini misti dunque si annullano perche moltiplicano $x(t)$ o $x(t+\tau)$, che ha media nulla. Nella quarta eguaglianza, la media delle sinusoidi con φ uniforme in $[0, 2\pi]$ è sempre nulla.