Elaborazione dei Segnali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Lezione 1

Introduzione

Classificazione dei segnali a tempo discreto

Operazioni elementari

A.A. 2023-2024

Elaborazione numerica dei segnali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- L'elaborazione numerica dei segnali (ENS) è l'applicazione di una sequenza opportuna di operazioni aritmetiche o logiche (algoritmo) ad una serie numerica (es. cifre binarie) che rappresenta (in modo esatto o sufficientemente approssimato) un segnale (in genere originariamente analogico).

- Scopi dell'elaborazione:
  - Modificare il segnale
  - Migliorarne la qualità
  - Estrarne delle informazioni

Breve storia dell’ENS

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- FINE ANNI ’40
  - Shannon, Bode e altri ricercatori dei “Bell Telephone Laboratories” discutono della possibilità di usare circuiti digitali per implementare funzioni di filtraggio.
  - Non è però disponibile un “hardware” appropriato → le implementazioni di tipo analogico erano fortemente favorite in termini di costo, dimensioni e affidabilità.
- META’ ANNI ’50
  - Il Prof. Linville del “Massachusetts Institute of Technology” (MIT) inizia a parlare di tecniche di filtraggio digitale nei seminari post-laurea.
  - La teoria del campionamento è ben consolidata e la comunità degli ingegneri elettronici inizia a usare una serie di strumenti matematici quali la trasformata zeta.

Breve storia dell’ENS

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- INIZIO ANNI ’60
  - Inizia a emergere una teoria “formale” dell’ENS.
  - L’avvento della tecnologia dei circuiti integrati in silicio rende possibile la creazione di sistemi digitali completi.
  - Kaiser, dei “Bell Laboratories”, fornisce il primo grande contributo nell’area della sintesi di filtri digitali: il progetto di filtri a risposta all’impulso infinita (IIR)
- 1965
  - Cooley e Turkey pubblicano un articolo di che descrive un algoritmo capace di effettuare l’analisi in frequenza di un segnale (periodico) in un numero di passi di calcolo relativamente ridotti (a quei tempi erano necessari ore/giorni di tempo di calcolo).

Breve storia dell'ENS

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- FINE ANNI '60
  - Vengono sviluppati dispositivi "hardware" adatti per l'implementazione di filtri digitali e iniziano ad essere commercialmente disponibili circuiti a prezzo contenuto
  - I filtri a risposta all'impulso finita (FIR) vengono implementati in modo efficiente, diventando seri concorrenti dei filtri IIR.
  - Diventa possibile generare filtri non-lineari, tempo varianti e adattativi.
- Pian piano molti algoritmi verranno sviluppati, ma gli elementi fondamentali sono essenzialmente riconducibili a due:
  - analisi in frequenza
  - filtraggio digitale (filtri FIR e IIR).

Breve storia dell’ENS

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- 1978
  - La “Texas Instrument's” di Dallas introduce sul mercato lo “Speak & Spell”, basato sul primo DSP prodotto a livello industriale della storia (TMS5100).

  - 2 memorie ROM da 128 kbit
  - Velocità dei dati: circa 1kbit/s
  - Circa 128 secondi di registrazione in ogni memoria.

  - Intel 8086, processore a 16 bit, clock 5 MHz, 0.33 MIPS (Million Instructions Per Second).

Dal DSP al PC …

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Nei primi decenni, l’ENS era appannaggio quasi esclusivo di microprocessori appositamente dedicati allo scopo: i DSP (Digital Signal Processor).
  - I dispositivi DSP utilizzano un’architettura particolare (Harvard) appositamente progettata per effettuare molte operazioni matematiche (anche parallele) in tempi estremamente ridotti.
  - La velocità di calcolo è essenziale quando è necessario elaborare un segnale (numerico) in tempo reale.

- Successivamente, l’inarrestabile ascesa prestazionale dei Personal Computer ha fatto sì che molti algoritmi appannaggio esclusivo dei DSP fossero finalmente alla portata di un normale PC.
  - Si pensi ad un programma di analisi ed elaborazione di segnali audio (es. Adobe Audition), o ad un programma di fotoritocco (es. Adobe Photoshop), oppure un programma per la compressione MP3.

Applicazioni dell'ENS

- ELABORAZIONE DEI SEGNALI VOCALI
  - Immagazzinamento dei segnali (CD,DVD,MP3)
  - Trasmissione dei segnali (Telefonia mobile)
  - Miglioramento di certe qualità di un segnale (ad esempio, l'intelligibilità della voce umana)
  - Sintesi di segnali che simulano quelli generati da un parlatore umano.
  - Riconoscimento di frasi dette da un parlatore.
  - Identificazione del parlatore.

Applicazioni dell’ENS

POLITECNICO
DI TORINO
Dipartimento
di Elettronica
e Telecomunicazioni

- ELABORAZIONE DI SEGNALI SISMICI
  - Localizzazione e misura dell’intensità di terremoti.
  - Assistenza alle operazioni di perforazione per la ricerca del petrolio.

- ELABORAZIONE DEI SEGNALI RADAR
  - Localizzazione e calcolo della velocità e della traiettoria di un oggetto

Applicazioni dell'ENS

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- ELABORAZIONE DI IMMAGINI
  - Immagazzinamento dei segnali (DVD, JPEG, MPEG)
  - Trasmissione dei segnali (TV digitale terrestre, TV satellitare)
  - Fotografie, riprese da sonde spaziali, della terra, della luna e di altri pianeti.
  - Mappe meteorologiche.
  - Ricostruzione delle immagini da proiezioni (TAC)

  (prima dell'elaborazione, l'immagine viene trasformata in un segnale numerico, poi manipolata, generalmente per migliorarne la leggibilità, ossia per facilitare l'estrazione di quelle informazioni per cui l'immagine è stata prelevata).

Programma del corso

- I segnali a tempo discreto
  - Sequenze elementari
  - Operazioni basilari
  - Concetto di energia e potenza
- Analisi in frequenza di segnali a tempo discreto
  - Trasformata di Fourier a tempo discreto (DTFT)
  - Trasformata di Fourier discreta (DFT)
  - Trasformata di Fourier veloce (FFT)
- Analisi in frequenza di segnali a tempo continuo tramite la DFT
- Trasformata zeta
- Sistemi LTI a tempo discreto
  - Analisi temporale
  - Analisi tramite la trasformata Z

Definizione e classificazione dei segnali a tempo discreto

Segnali a tempo discreto

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- In generale, i segnali a tempo discreto sono definiti rispetto a una variabile indipendente che assume solo valori interi, genericamente indicata con la lettera n.

- Tali segnali sono quindi rappresentati da una sequenza di numeri indicizzati dalla variabile temporale discreta n → $x(n), x[n], x_n$

- x(n) è detto “numerico” (o “digitale”) se assume solo ampiezze discrete.

Segnali a tempo discreto

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

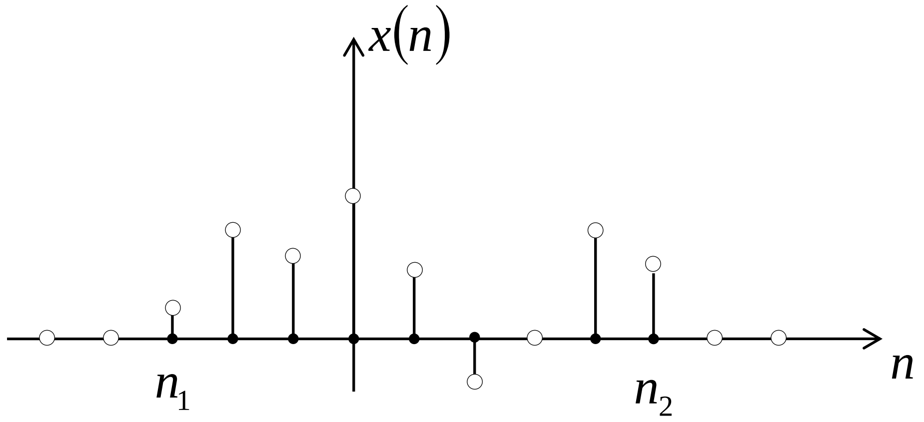
- Segnali “intrinsecamente” discreti:
  - quotazioni di borsa, definite ad intervalli di tempo regolari
  - numeri derivanti dalle estrazioni del lotto
  - misure di temperatura fatte ad intervalli di tempo discreti.

- Segnali discreti ottenuti dal “campionamento” di segnali analogici:
  - campioni di un segnale musicale immagazzinati in un CD o nell’Hard Disk del nostro PC
  - campioni di un immagine trasmessi in rete.

Durata di una sequenza

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

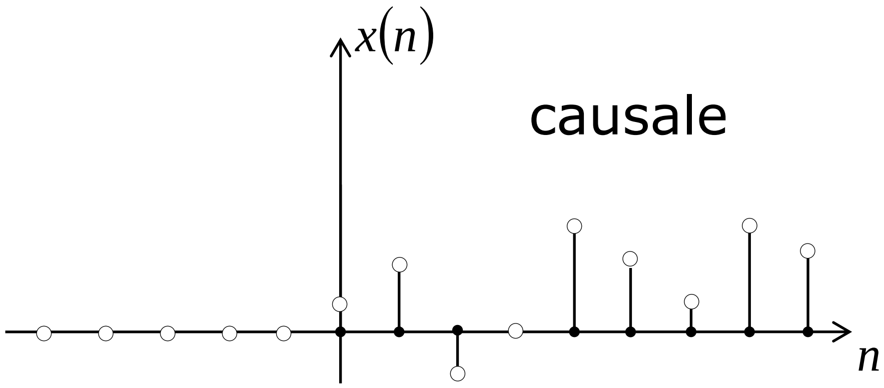
- Una sequenza può avere:
  - **durata finita**, se è identicamente nulla all'esterno di un intervallo finito di tempo $[n_1,n_2]$
  - **durata infinita**, se perdura in un intervallo di tempo infinito, che può essere bilatero $(-\infty,+\infty)$ o monolatero $[n_1,+\infty)$ o $(-\infty,n_2)$.
- Il **supporto temporale** di una sequenza di durata finita è pari a $N=n_2-n_1+1$.

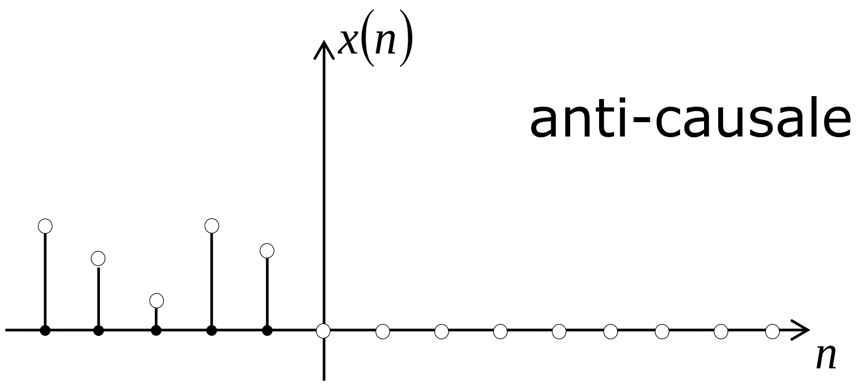


Causalità

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Una sequenza è detta **causale** se è identicamente nulla per valori di n<0, **anticausale** se è identicamente nulla per valori di n≥0.
- Una sequenza cha presenta campioni non nulli in entrambi gli assi positivo e negativo del tempo discreto è detta **bilatera**.

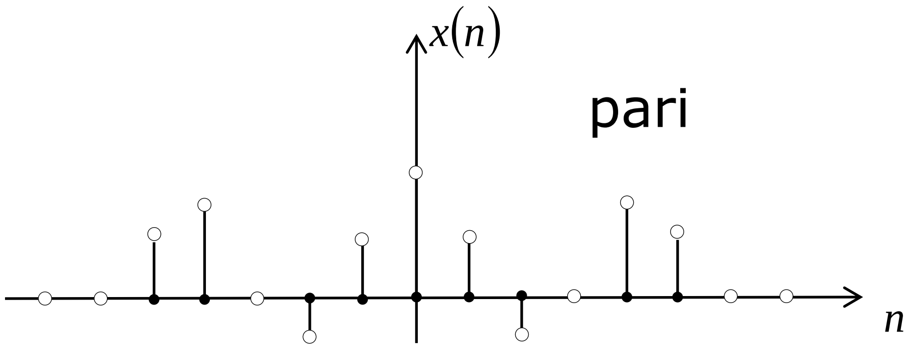


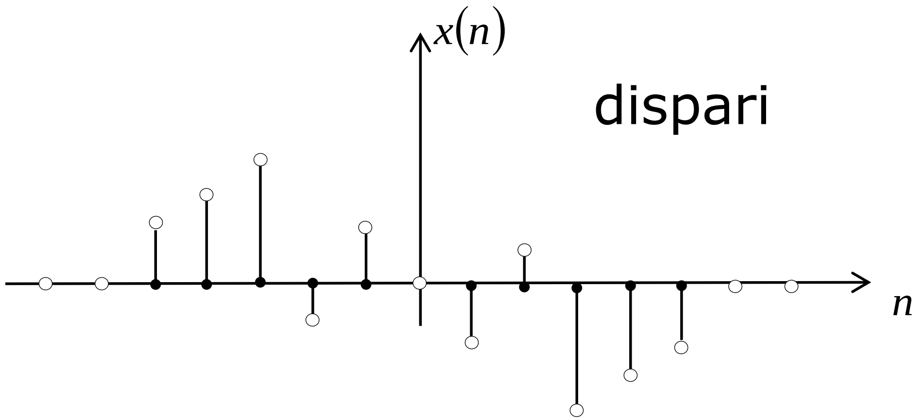


Parità

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Una sequenza x(n) reale (con campioni reali) è detta:
  - **pari**, se x(n)=x(-n)
  - **dispari**, se x(n)=-x(-n)





Parità

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Una sequenza x(n) complessa (con campioni complessi) è detta:
  - **coniugata simmetrica**, se $x(n)=x^*(-n)$
  - **coniugata antisimmetrica**, se $x(n)=-x^*(-n)$

- Una qualunque sequenza complessa x(n) può essere scritta come la somma di una sequenza coniugata simmetrica $x_p(n)$ e una coniugata antisimmetrica $x_d(n)$:

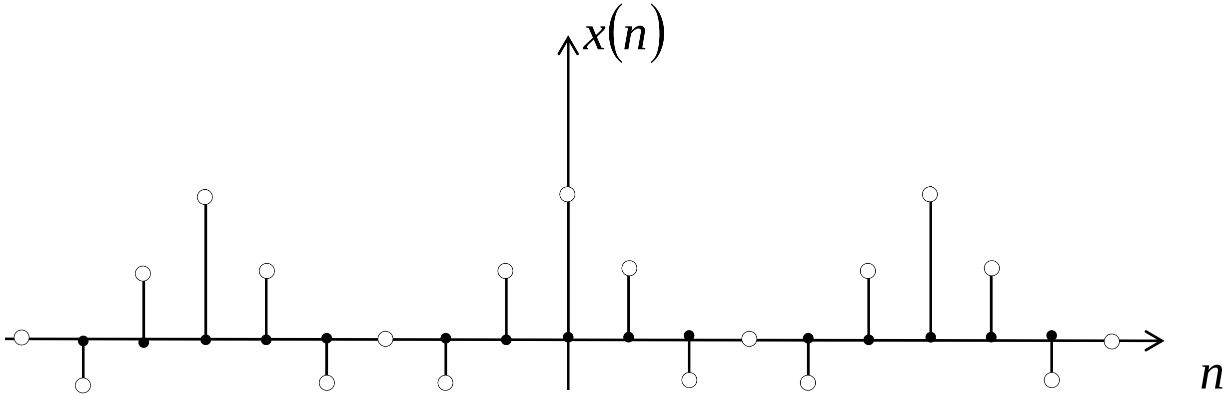
$$x_p(n)=\frac{1}{2}x(n)+\frac{1}{2}x^*(-n)$$

$$x_d(n)=\frac{1}{2}x(n)-\frac{1}{2}x^*(-n)$$

Periodicità

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Una sequenza x(n) è periodica se è possibile trovare un intervallo di tempo N per cui vale la relazione: $x(n) = x(n \pm N)$
- Il periodo è il più piccolo valore intero positivo di N per cui è valida la relazione.
  - Nota: se un segnale è periodico di periodo N, lo è anche di periodo kN (con k intero positivo).



Sequenze limitate in ampiezza

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Una sequenza x(n) è detta **limitata** se per qualunque istante di tempo discreto n assume valori contenuti entro un intervallo finto, ossia:

$$|x(n)| \le X_0 < \infty \ , \quad \forall n$$

  - con X_0 costante reale finita positiva.

Sequenze sommabili

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Sequenze assolutamente sommabili

- Una sequenza x(n) è detta **assolutamente sommabile** se soddisfa la relazione:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| < \infty$$

Sequenze quadraticamente sommabili

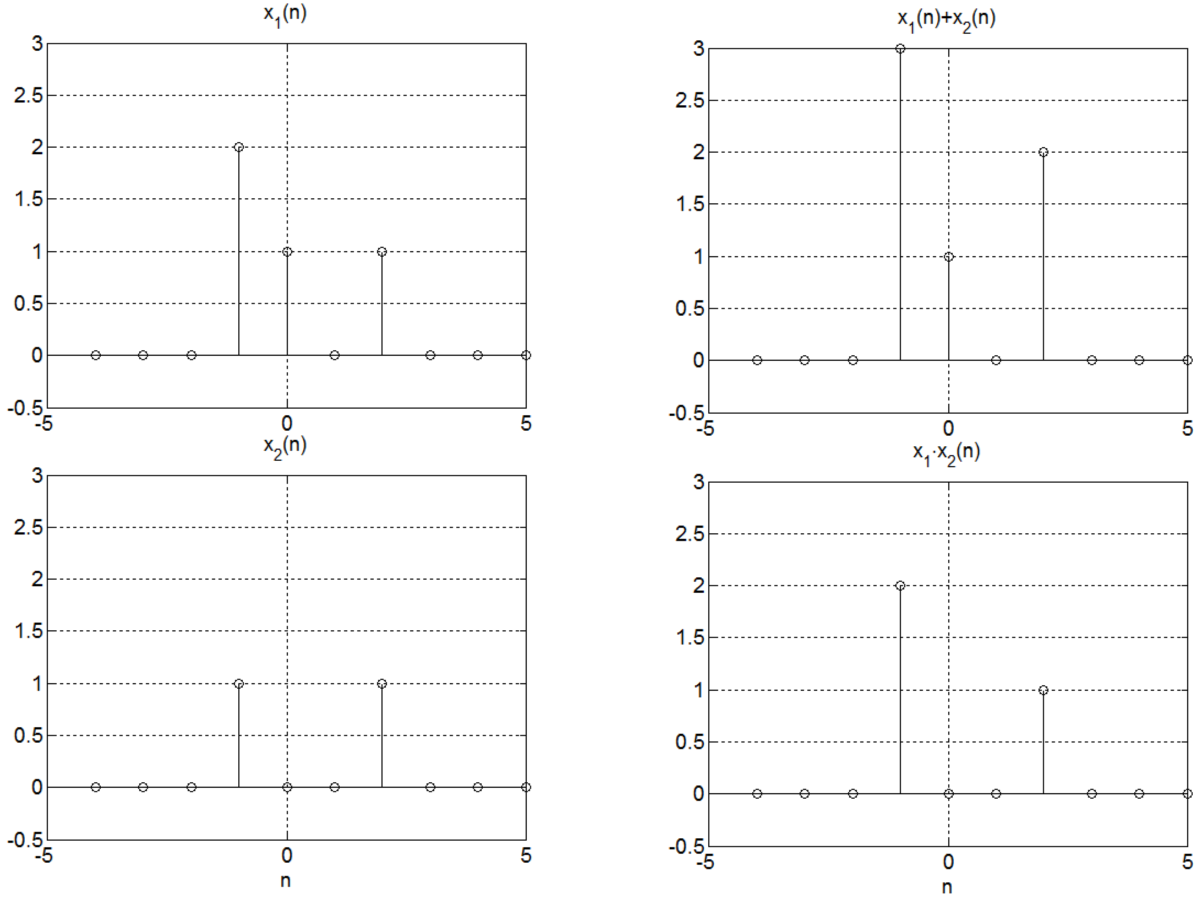
- Una sequenza x(n) è detta **quadraticamente sommabile** se soddisfa la relazione:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

Operazioni elementari

Somma,differenza, prodotto

- Le operazioni si applicano tra coppie di campioni osservati nei medesimi istanti di tempo:



$$x_1(n) + x_2(n)$$
$$x_1(n) - x_2(n)$$
$$x_1(n) \cdot x_2(n)$$

Traslazione e ribaltamento

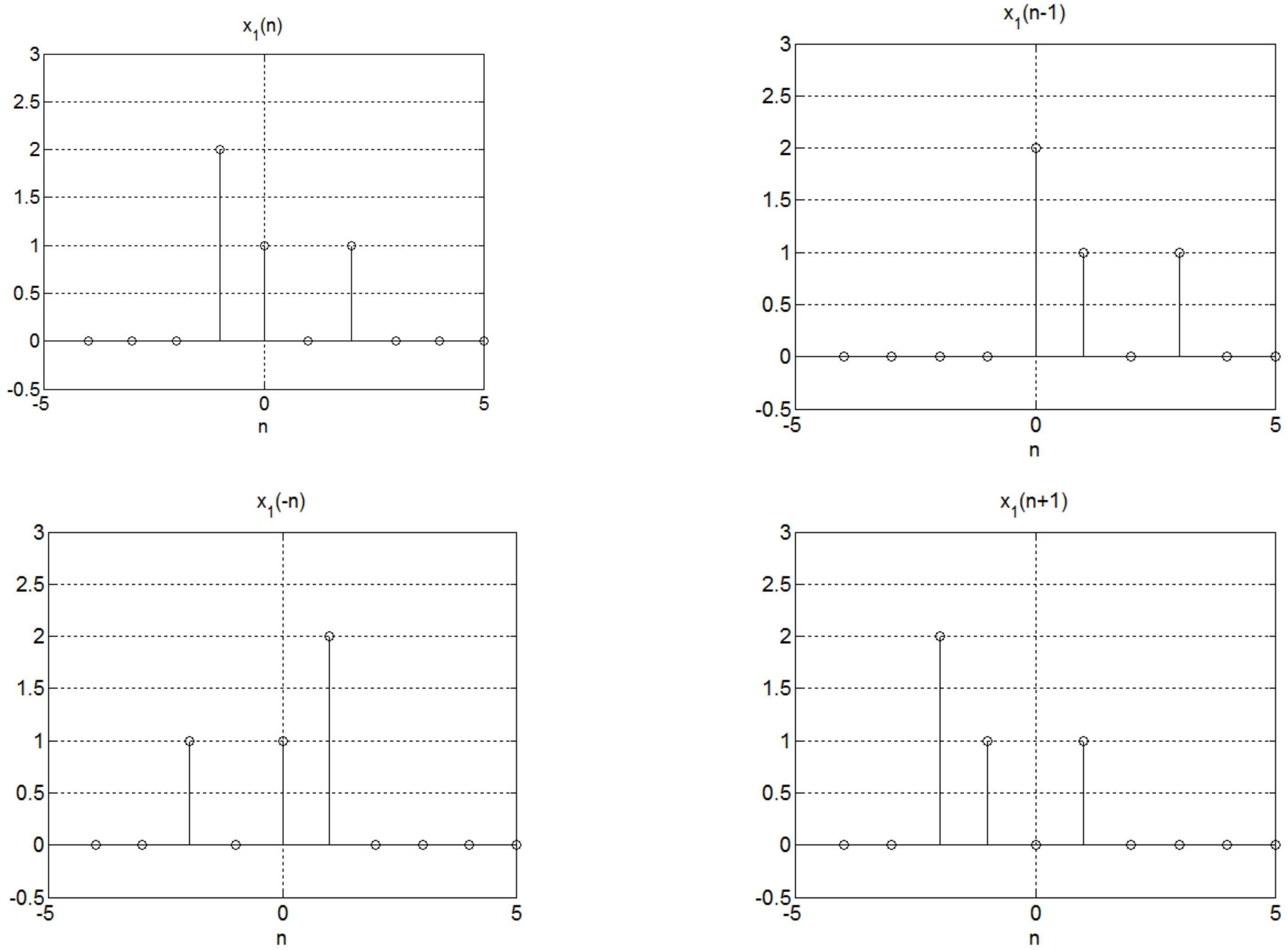
POLITECNICO
DI TORINO
Dipartimento
di Elettronica
e Telecomunicazioni

- La **traslazione** consiste nel cambio di variabile n→n-N
- La sequenza x(n-N) rappresenta il segnale x(n) ritardato di N campioni.
  - Se N è positivo si tratta di ritardo, se è negativo di anticipo.
  - Questo operatore è importante perché qualsiasi elaborazione del segnale introduce un ritardo.

- Il **ribaltamento** consiste nel cambio di variabile n→-n e realizza l'inversione dell'asse dei tempi.

Traslazione e ribaltamento

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni



Traslazione e ribaltamento

- Importante: conta l'ordine in cui vengono eseguite le operazioni.

- Esempio:
  - Operazione 1: Ritardo di N campioni
  - Operazione 2: Ribaltamento temporale
-
  - 12: $x(n) \rightarrow x(n-N) \rightarrow x(-n-N)$
  - 21: $x(n) \rightarrow x(-n) \rightarrow x(-(n-N)) = x(-n+N)$

Scalamento temporale

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

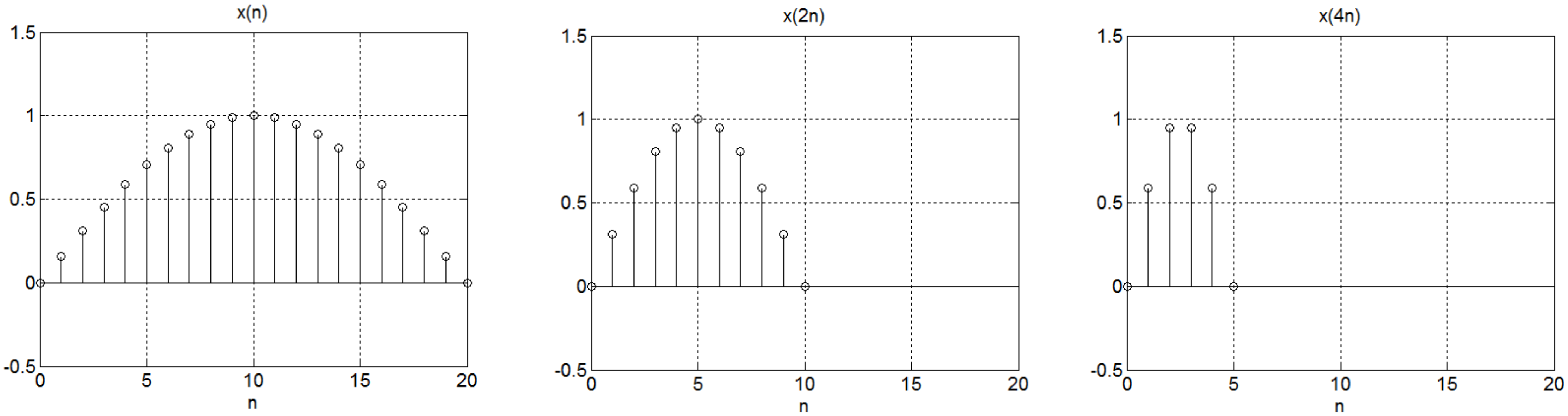
- Le operazioni di scalamento temporale delle sequenze a tempo discreto vengono dette sotto o sovra-campionamento.

- **Sottocampionamento**

$$y(n) = x(D \cdot n) \quad D \text{ intero positivo}$$

- Questa operazione corrisponde a costruire la sequenza y(n) prendendo un campione ogni D della sequenza x(n).

Esempio




```
n=[0:20];
x=sin(2*pi*n/40);
D=2;
x_new = downsample(x,D);
n_new=[0:length(x_new)-1];
```

Scalamento temporale

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- **Sovracampionamento**

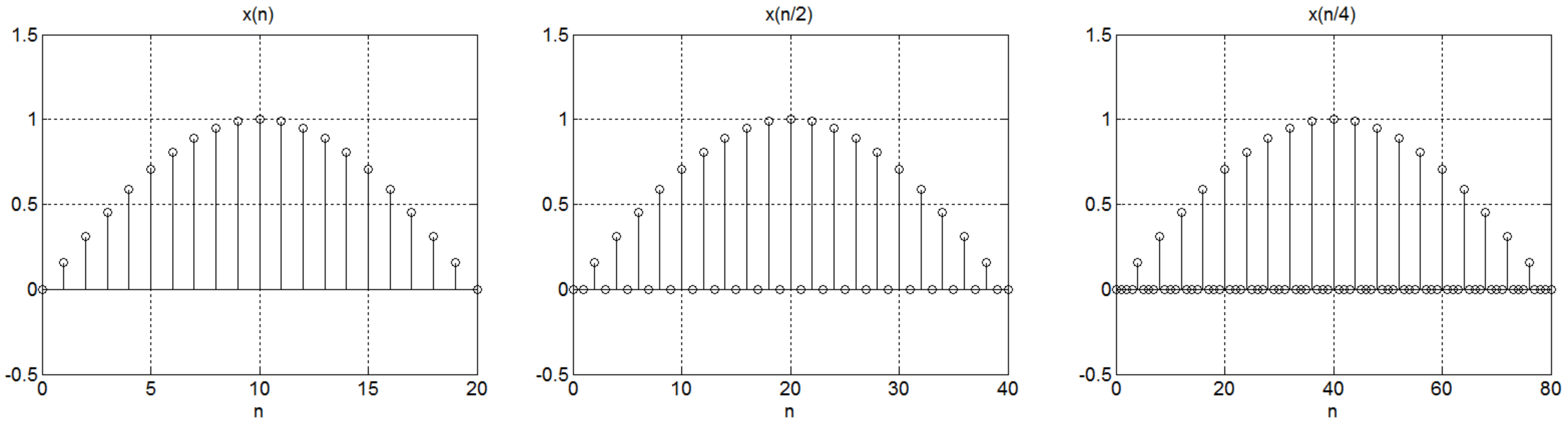
$$y(n)=\begin{cases} x\left(\dfrac{n}{I}\right) & \forall n=0,\pm I,\pm 2I,\ldots \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  - I intero positivo.

- Questa operazione corrisponde a costruire la sequenza y(n) inserendo (I-1) zeri tra ogni campione della sequenza x(n).

Esempio

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni




```
n=[0:20];
x=sin(2*pi*n/40);
I=2;
x_new = upsample(x,I);
n_new=[0:length(x_new)-1];
```