Elaborazione numerica dei segnali

Segnali discreti

Operazioni elementari

Energia e potenza

Esercizio 1

Dato il seguente segnale discreto

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ n & 0 \leq n \leq 10 \\ 0 & n > 10 \end{cases}$$

rappresentare graficamente i seguenti segnali:

a) $y[n] = x[n+5]$

b) $y[n] = x[-n+5]$

c) $y[n] = x[2n]$

d) $y[n] = x[n+10] + x[-n+10] - 10\delta[n]$

e) scomporre $x[n]$ nella somma di un segnale pari e uno dispari e rappresentare graficamente i due segnali

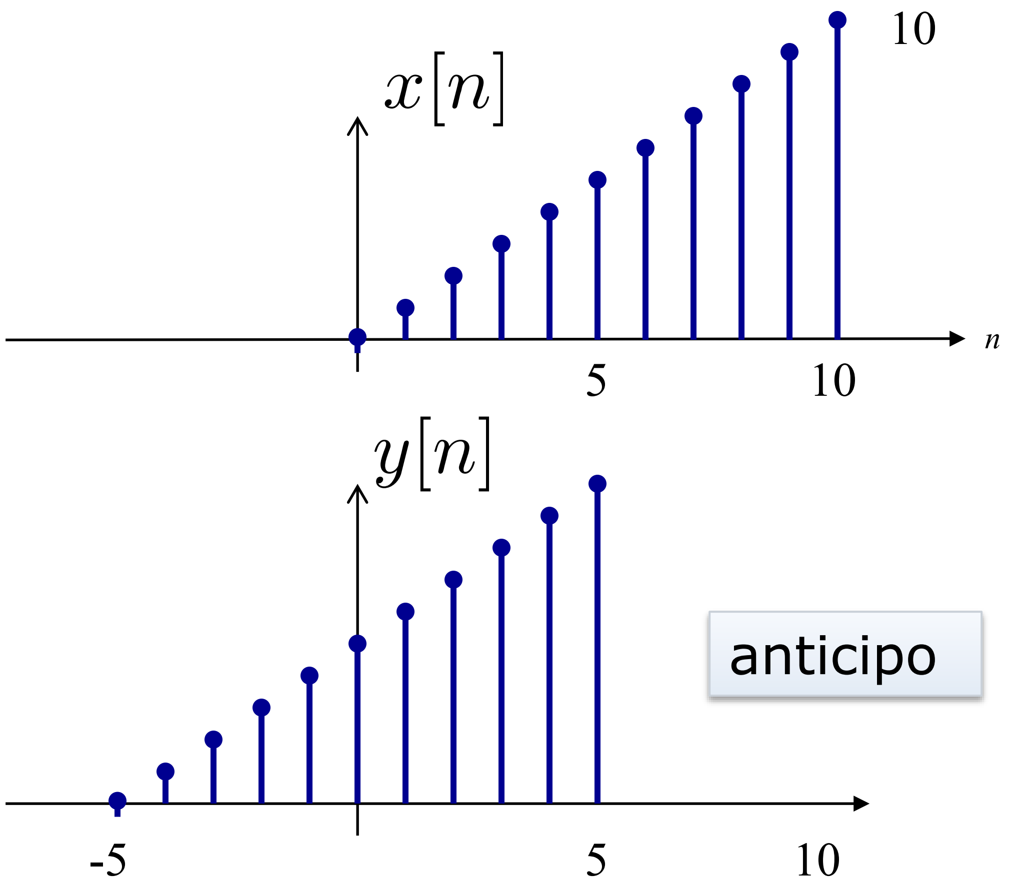
Si scriva un codice Matlab per rappresentare graficamente i segnali dell'esercizio.

Soluzione 1a

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0, \\ n & 0 \le n \le 10 \\ 0 & n > 10. \end{cases}$$

$$y[n] = x[n+5]$$

$$\begin{aligned} y[-5] &= x[0] &= 0 \\ y[0] &= x[5] &= 5 \\ y[1] &= x[6] &= 6 \\ &\vdots & \\ y[5] &= x[10] &= 10 \end{aligned}$$

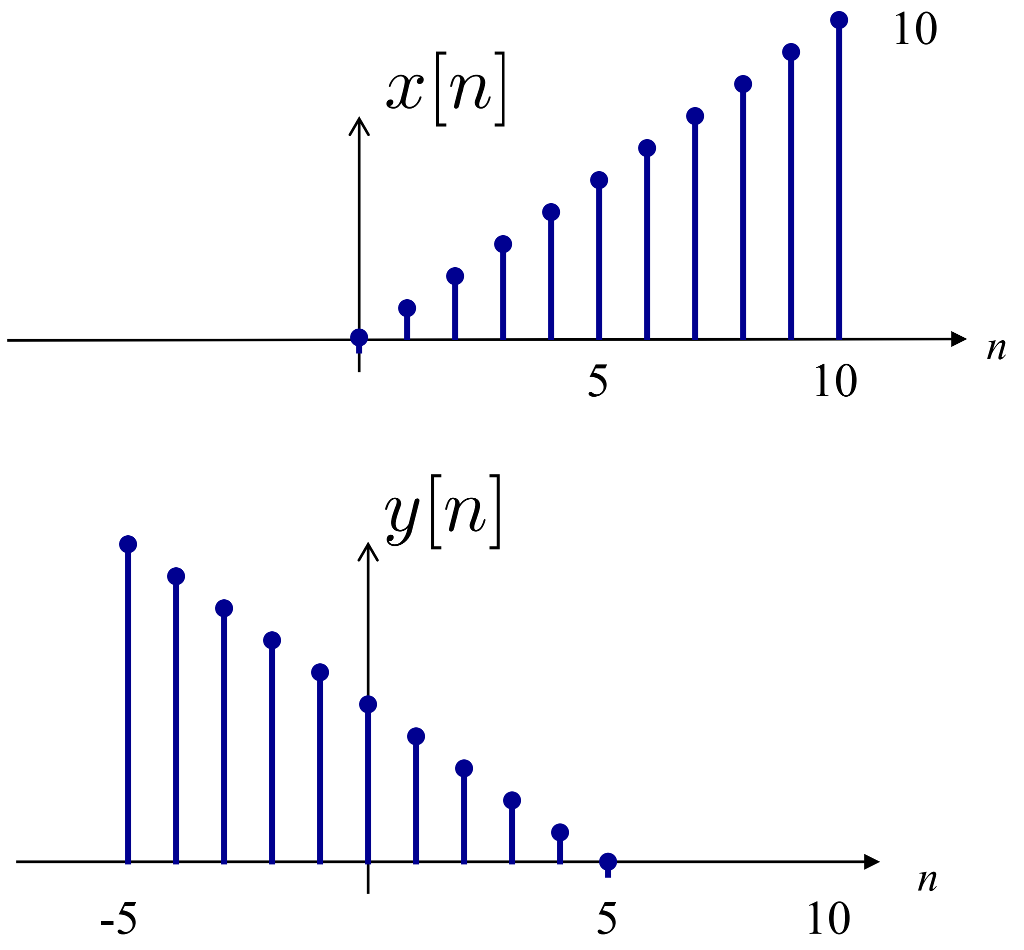


Soluzione 1b

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0, \\ n & 0 \le n \le 10 \\ 0 & n > 10. \end{cases}$$

$$y[n] = x[-n+5]$$

$$\begin{aligned} y[-5] &= x[5+5] = 10 \\ &\vdots \\ y[0] &= x[0+5] = 5 \\ y[1] &= x[-1+5] = 4 \\ &\vdots \\ y[5] &= x[-5+5] = 0 \end{aligned}$$

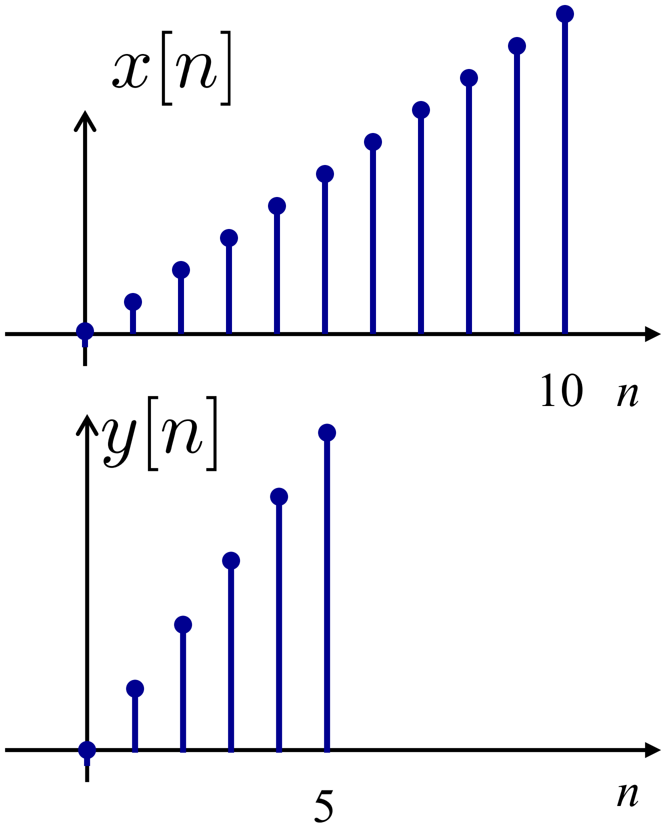


Soluzione 1c

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0, \\ n & 0 \leq n \leq 10 \\ 0 & n > 10. \end{cases}$$

$$y[n] = x[2n]$$

$$\begin{array}{ccccc} y[0] & = & x[0] & = & 0 \\ y[1] & = & x[2] & = & 2 \\ y[2] & = & x[4] & = & 4 \\ & & \vdots & & \\ y[5] & = & x[10] & = & 10 \end{array}$$



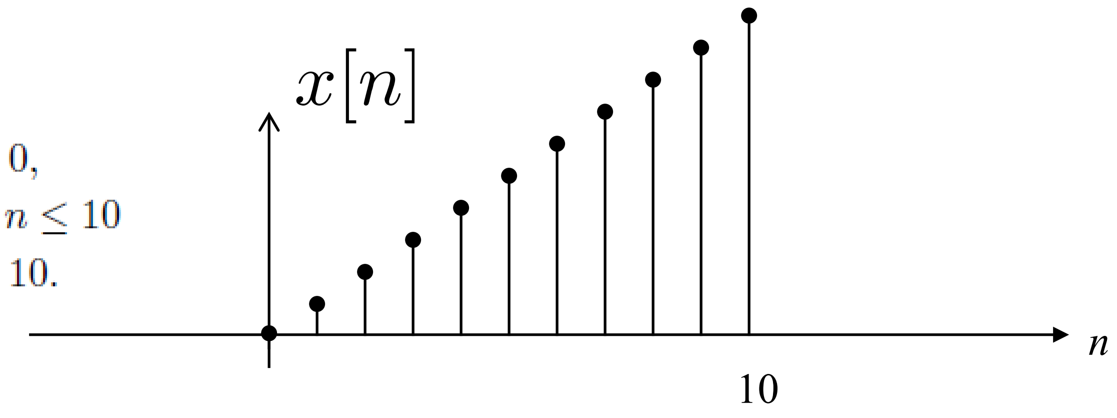
è la sequenza dei soli campioni di indice pari

"sottocampionamento"

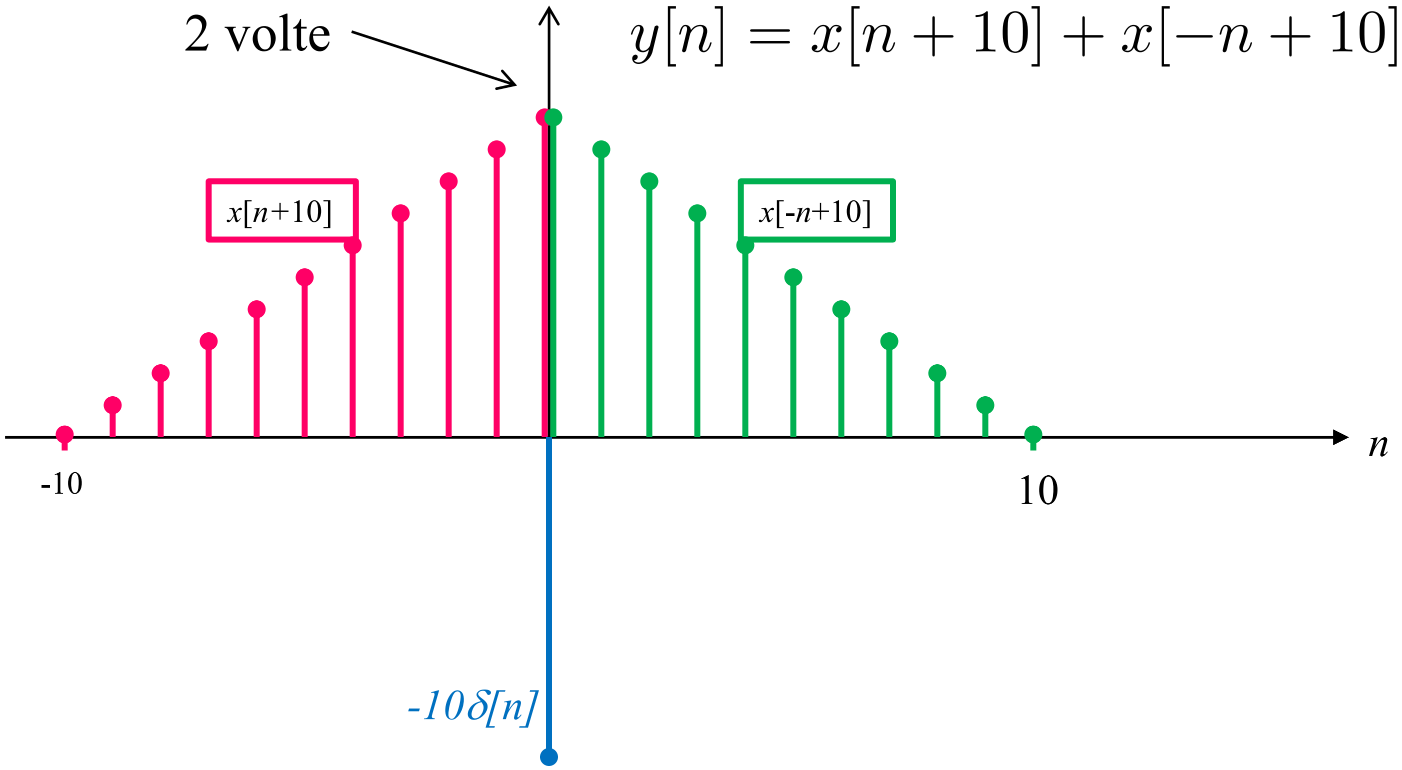
compressione dell'asse del tempo discreto

Soluzione 1d

$$x[n] = \begin{cases} 0 & n < 0, \\ n & 0 \le n \le 10 \\ 0 & n > 10. \end{cases}$$

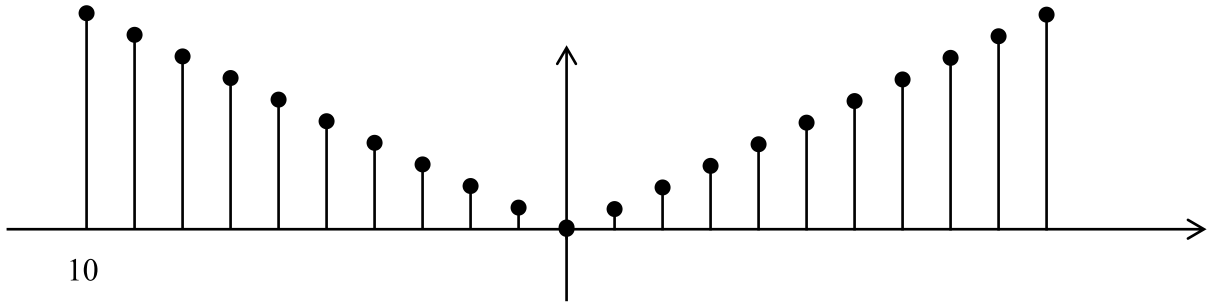


$$y[n] = x[n+10] + x[-n+10] - 10\delta[n]$$

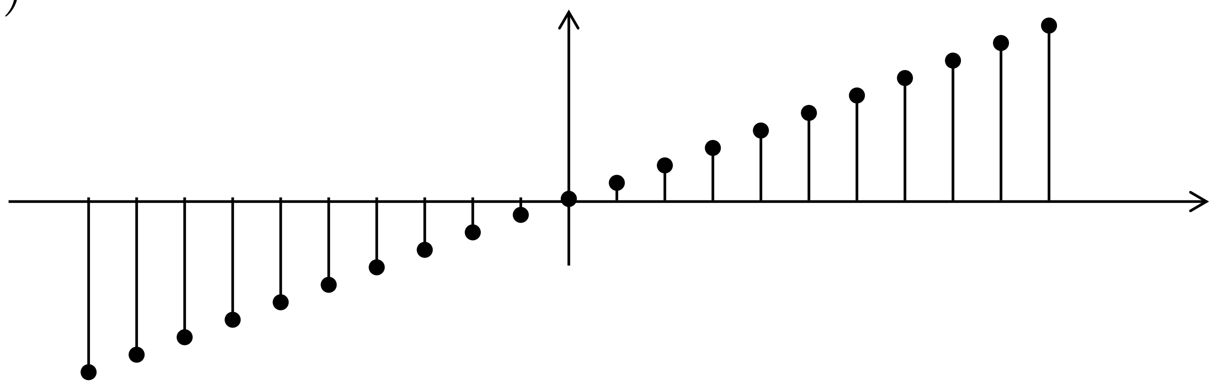


Soluzione 1e

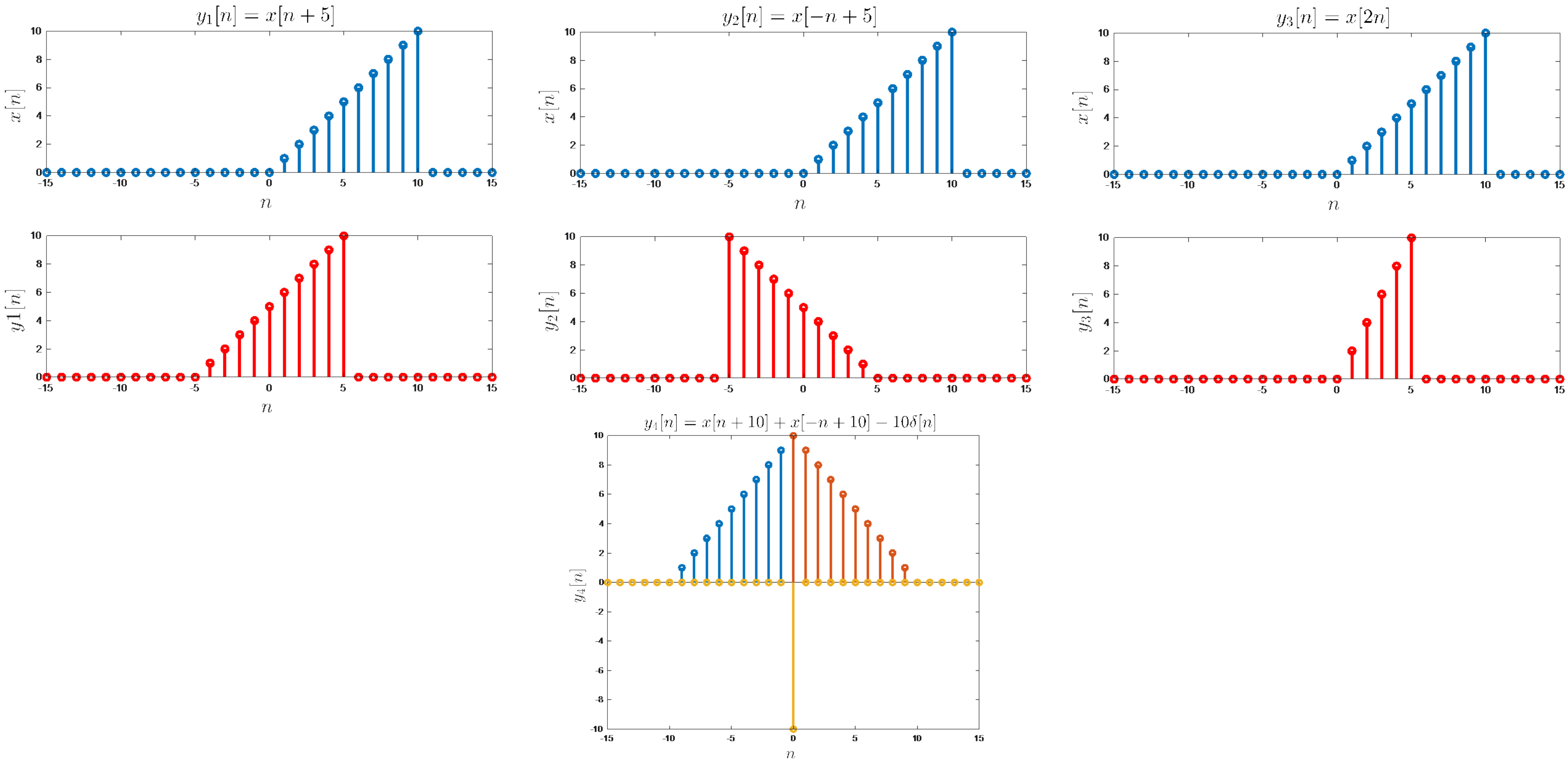
$$x_p[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$$



$$x_d[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$



Soluzione Matlab



Esercizio 2

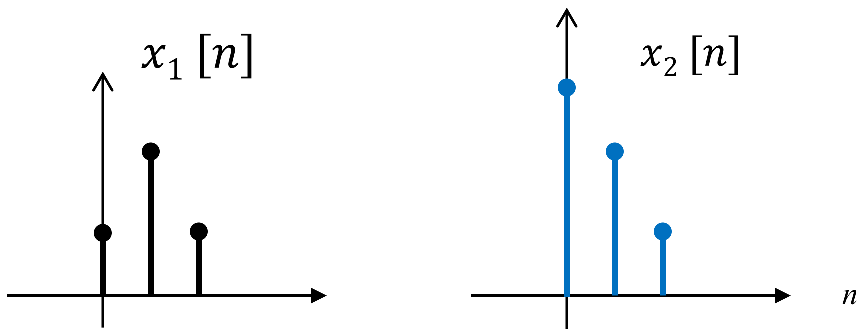
Si considerino le seguenti sequenze e si calcoli la convoluzione lineare discreta:

- $x_1[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$
- $x_2[n] = 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$

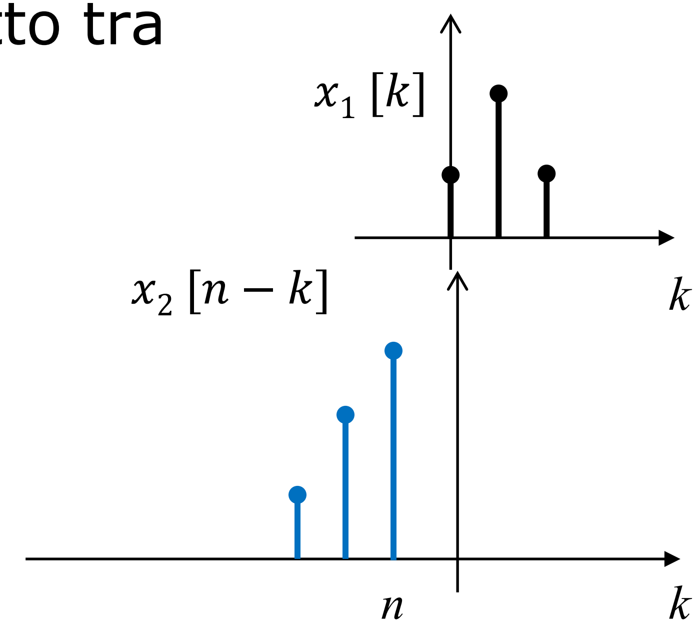
Verificare il risultato ottenuto attraverso un codice Matlab (utilizzare la funzione `conv(a,b)`)

Soluzione 2

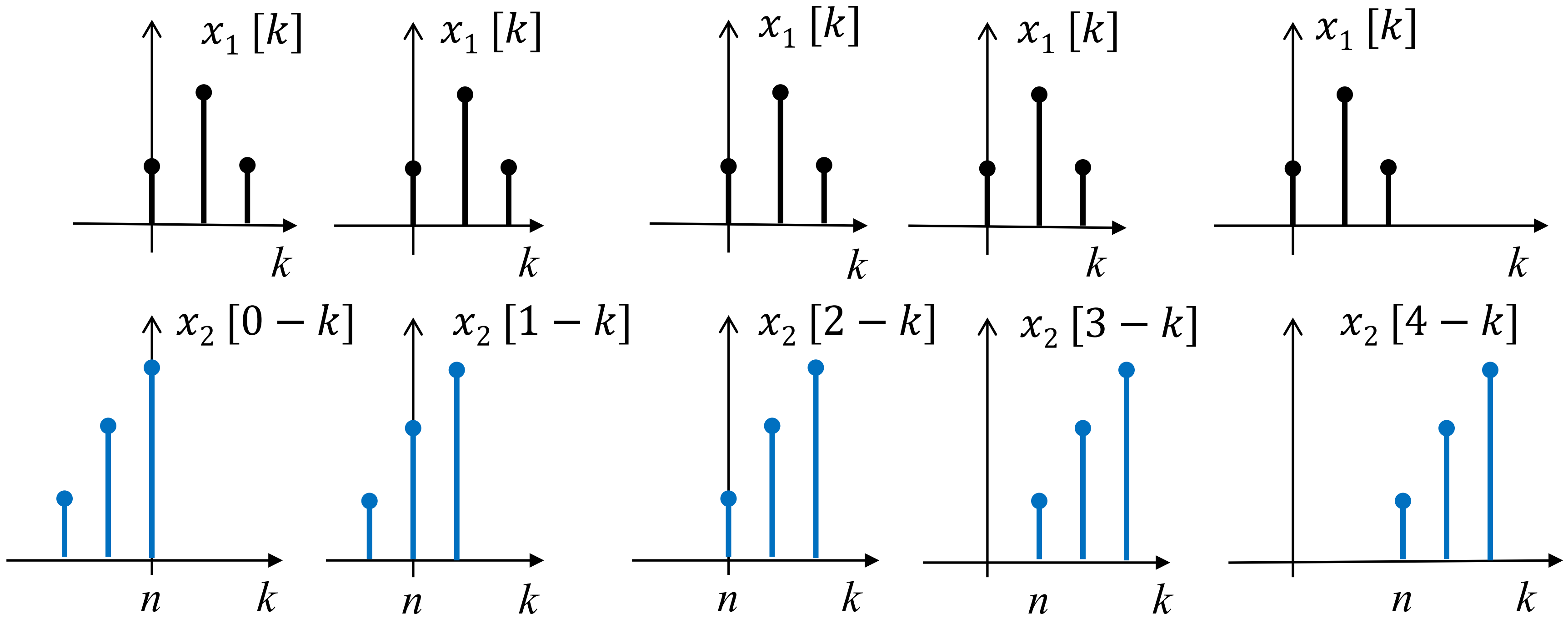
$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$



- Dall'espressione del prodotto di convoluzione vediamo che dobbiamo eseguire il prodotto tra $x_1[k]$ e $x_2[n\text{-}k]$

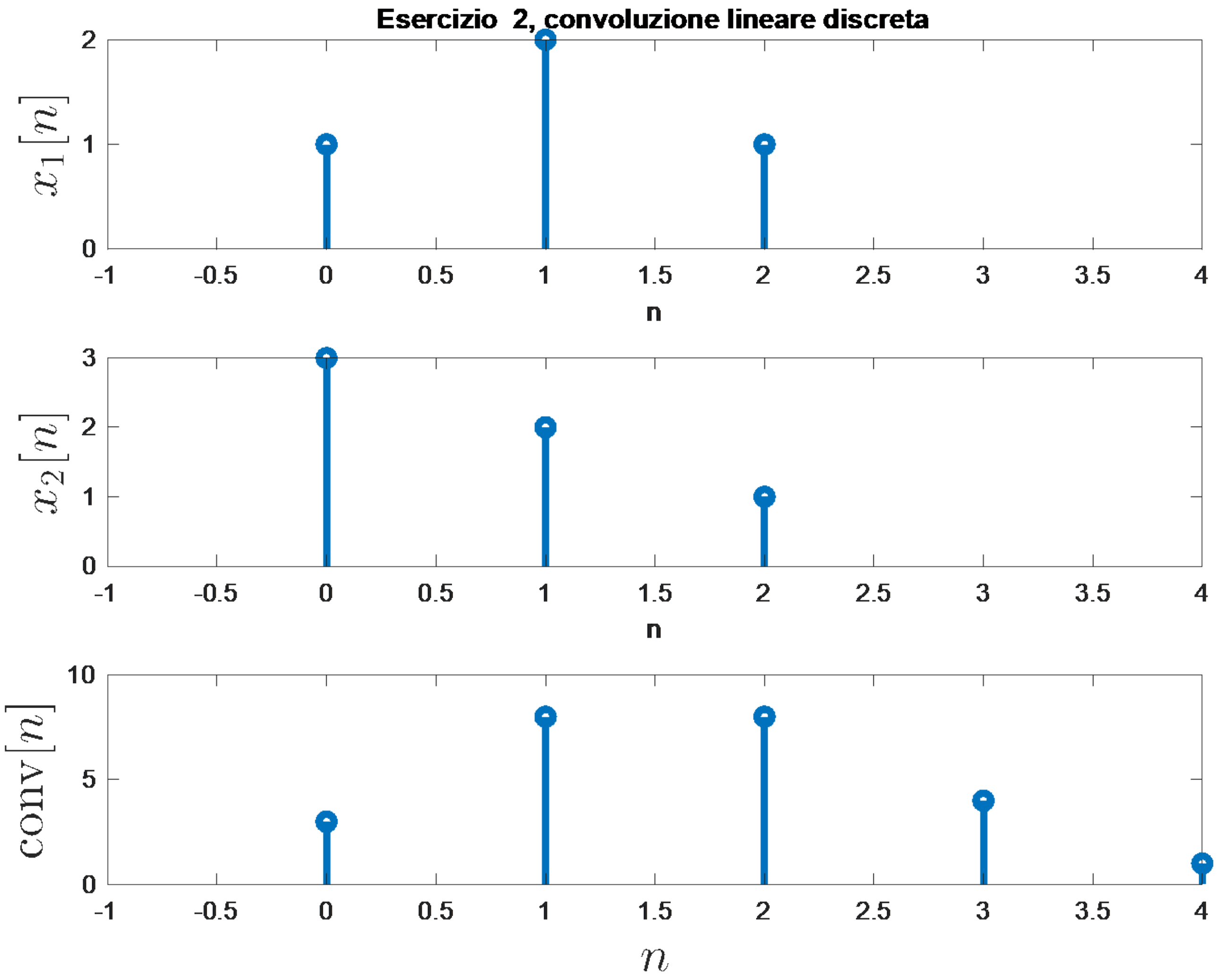


Soluzione 2



$$x_1[n]*x_2[n]=3\delta[n]+8\delta[n-1]+8\delta[n-2]+4\delta[n-3]+\delta[n-4]$$

Soluzione Matlab



Esercizio 3

Determinare se le seguenti sequenze sono a energia finita o a potenza finita e calcolarne energia e potenza.

a) $x[n] = \begin{cases} e^{-n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0. \end{cases}$

b) $x[n] = A$

c) $x[n] = Ae^{-j2\pi n/N}$

d) $x[n] = \begin{cases} A & n \geq 0 \\ 0 & n < 0. \end{cases}$

e) $x[n] = \begin{cases} A & |n - n_0| \leq N \\ 0 & |n - n_0| > N. \end{cases}$

Soluzione 3

- Ricordiamo che per le sequenze discrete valgono le seguenti relazioni:

- Energia:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

- Potenza:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

- Potenza di sequenze periodiche:

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} |x[n]|^2$$

Soluzione 3a

$$\textbf{a)}\ \ x[n] = \begin{cases} e^{-n} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0. \end{cases}$$

$$E_x = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n} = \frac{1}{1 - e^{-2}}$$

Soluzione 3b

b) $x[n] = A$

- L'energia è chiaramente infinita

- La potenza vale

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \underbrace{\sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2}_{(2N+1)A^2} = A^2$$

Soluzione 3c

c) $x[n] = Ae^{-j2\pi n/N}$

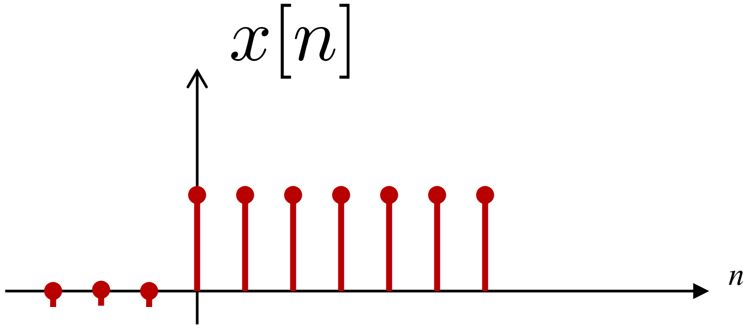
- L'energia e la potenza dipendono da:

$$\left|x(n)\right|^2 = A^2$$

- Questo segnale è quindi analogo al segnale del punto b) → $P_x = A^2$.

Soluzione 3d

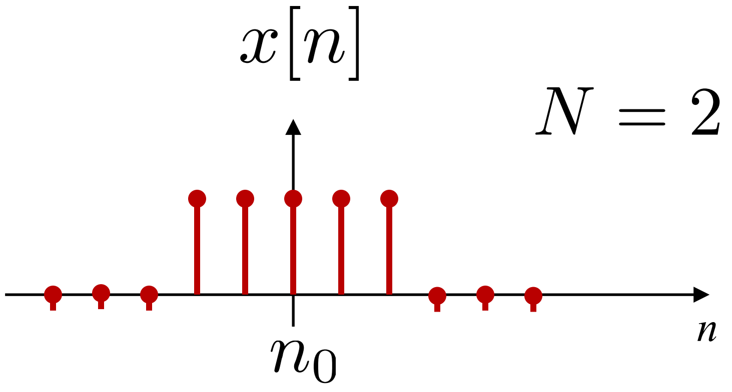
d) $x[n] = \begin{cases} A & n \geq 0 \\ 0 & n < 0. \end{cases}$



$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \underbrace{\sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2}_{(N+1)A^2} = \lim_{N\to+\infty} \frac{N+1}{(2N+1)} A^2 = \frac{A^2}{2}$$

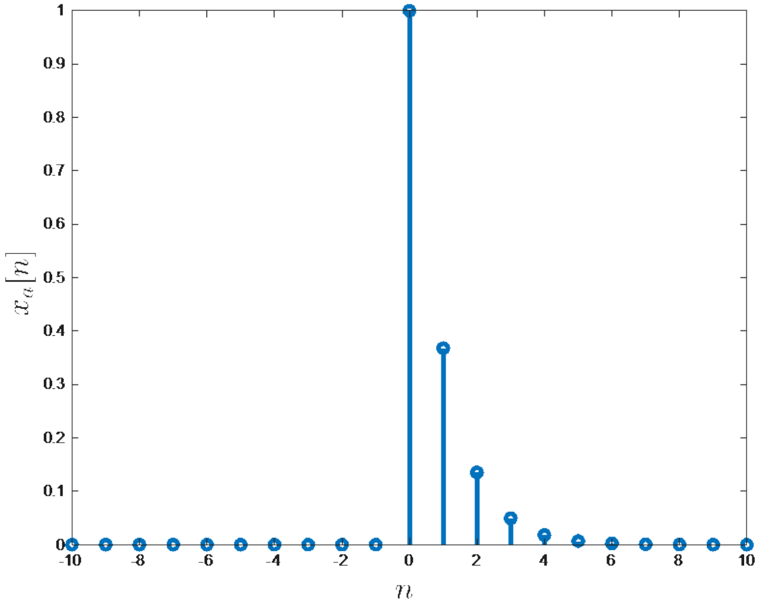
Soluzione 3e

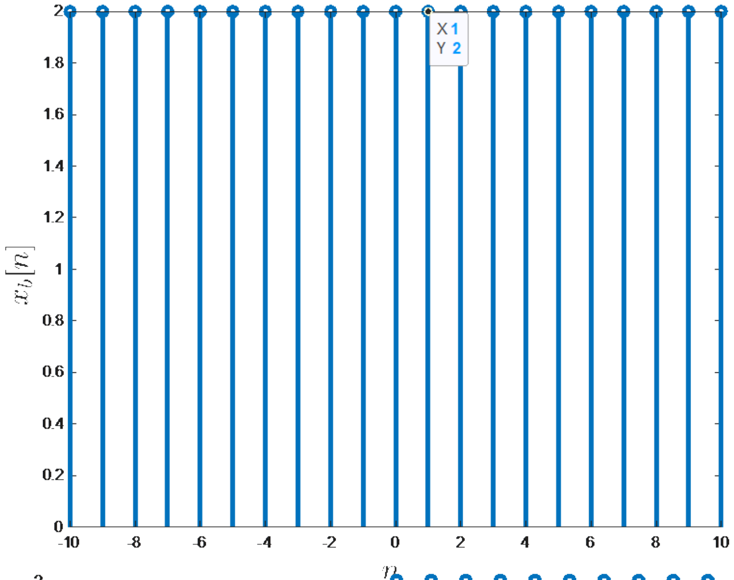
e) $x[n] = \begin{cases} A & |n - n_0| \leq N \\ 0 & |n - n_0| > N. \end{cases}$

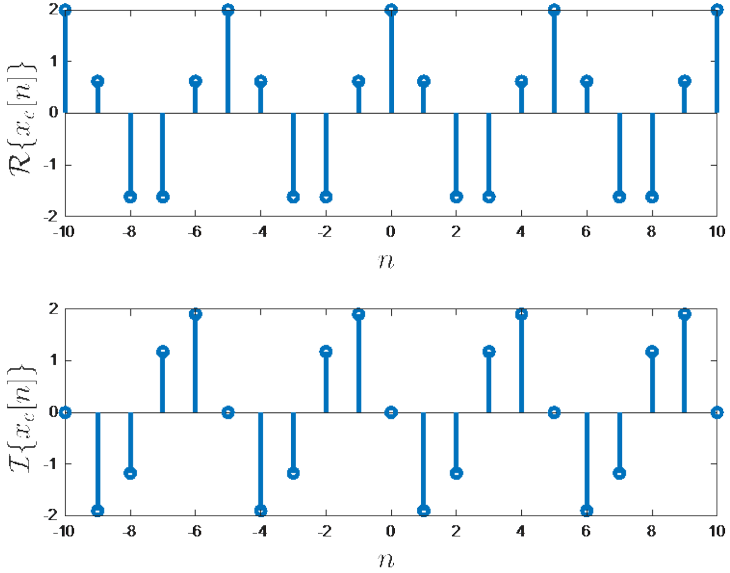


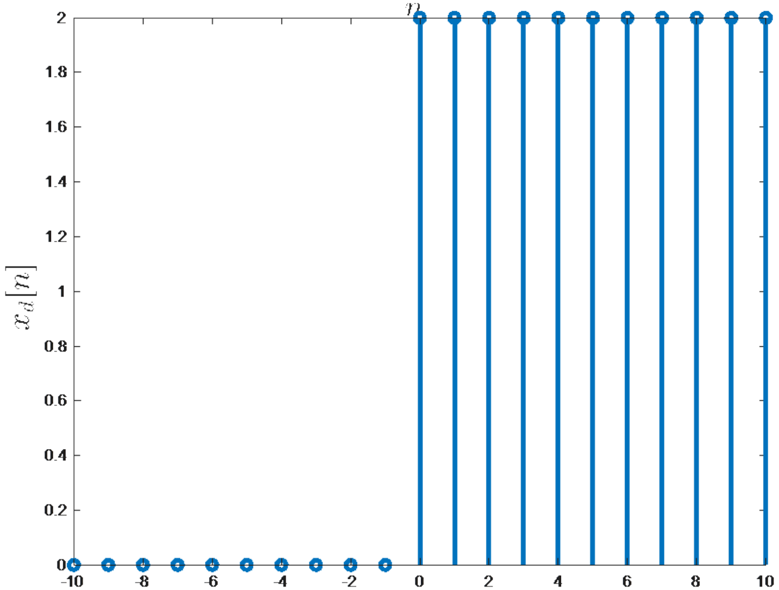
$$E_x = A^2(2N + 1)$$

Soluzione 3 Matlab









Esercizio 4

Un sistema di riconoscimento vocale deve determinare quale tra i segnali a durata finita

$$x_1[n] = -\delta[n] + 4\delta[n-1] + 5\delta[n-2] - 2\delta[n-3] - 3\delta[n-4]$$

e

$$x_2[n] = -2\delta[n] + 3\delta[n-1] + 5\delta[n-2] + 4\delta[n-3] - \delta[n-4]$$

è più simile ad un segnale di riferimento

$$x_{ref}[n] = -\delta[n] + 2\delta[n-2] - \delta[n-4].$$

utilizzando due diversi metodi:

1. Si considerino i segnali differenza $e_1[n] = \hat{x}_1[n] - x_{ref}[n]$ $e_2[n] = \hat{x}_2[n] - x_{ref}[n]$ dove $\hat{x}_1[n] = \alpha_1 x_1[n]$, $\hat{x}_2[n] = \alpha_2 x_2[n]$ sono due segnali nomalizzati affinché la loro energia sia pari all'energia di $x_{ref}[n]$ (α_1 e α_2 sono due coefficienti reali). Si calcoli quale tra $e_1[n]$ e $e_2[n]$ ha minore energia.
2. Si calcoli la funzione di autocorrelazione $R_{ref}[k]$ di $x_{ref}[n]$ e le cross-correlazioni $R_{c1}[k]$ tra $x_{ref}[n]$ e $x_1[n]$ e $R_{c2}[k]$ tra $x_{ref}[n]$ e $x_2[n]$. Si normalizzino le funzioni $R_{c1}[k]$ e $R_{c2}[k]$ affinché abbiano la stessa energia di $R_{ref}[k]$ e si calcli l'energia del segnale differenza per entrambi i casi.

Si ripeta l'esercizio utilizzando Matlab e caricando i segnali audio disponibili sul portale three_ref.wav, four_noise.wav, three_noise.wav} come segnali $x_{ref}[n]$, $x_1[n], x_2[n]$. Essi sono ottenuti campionando segnali analogici con una frequenza di campionamento $f_s = 44100$ Hz.

Nota: *In Matlab è possibile caricare il file audio attraverso il comando* `audioread('filename.wav')` *e riprodurre il segnale sonoro attraverso il comando* `sound('filename',fs)`. *Per il calcolo della correlazione si utilizzi* `xcorr(a,b)`

Esercizio 4.1

- Si considerino i segnali differenza $e_1[n] = \hat{x}_1[n] - x_{ref}[n]$ $e_2[n] = \hat{x}_2[n] - x_{ref}[n]$ dove $\hat{x}_1[n] = \alpha_1 x_1[n]$, $\hat{x}_2[n] = \alpha_2 x_2[n]$ sono due segnali nomalizzati affinché la loro energia sia pari all'energia di $x_{ref}[n]$ (α_1 e α_2 sono due coefficienti reali). Si calcoli quale tra $e_1[n]$ e $e_2[n]$ ha minore energia.

Soluzione 4.1

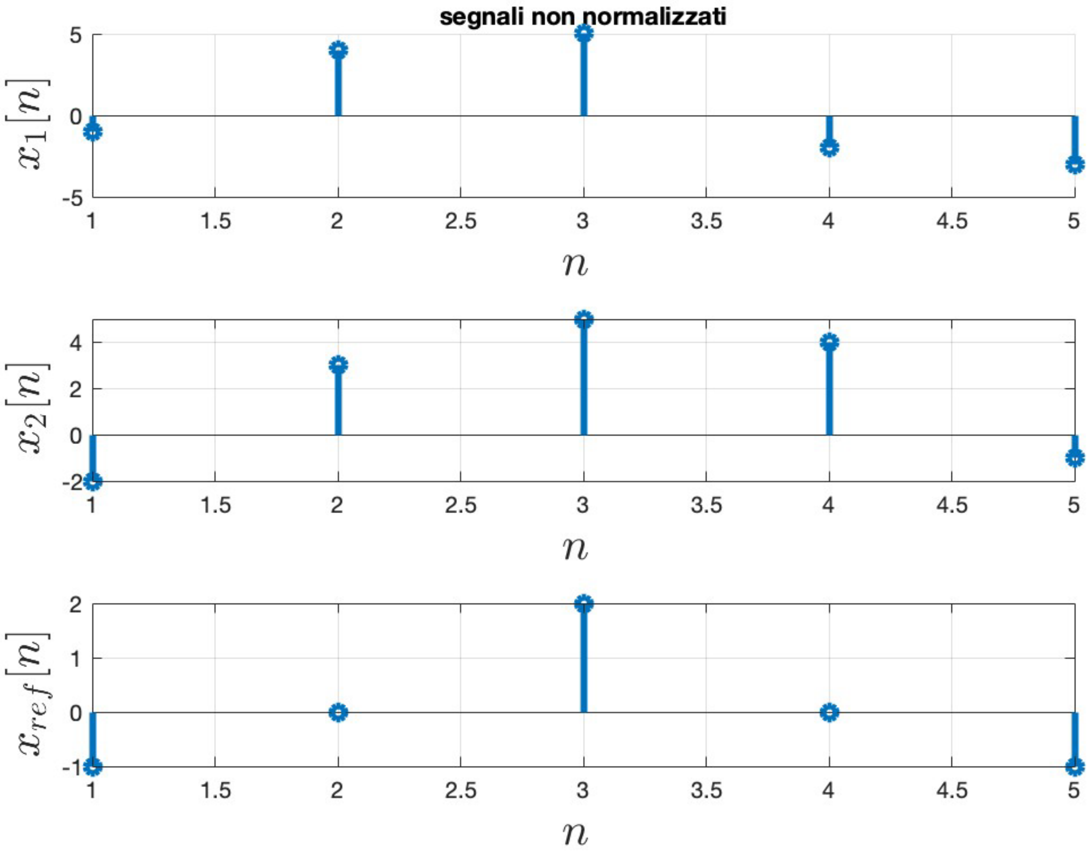
Calcoliamo l'energia dei segnali ricordando che

$$E(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2\,[n]$$

$$E(x_1) = 1 + 16 + 25 + 4 + 9 = 55$$

$$E(x_2) = 4 + 9 + 25 + 16 + 1 = 55$$

$$E(x_{ref}) = 1 + 4 + 1 = 6$$



Soluzione 4.1

I segnali normalizzati avranno energia

$$E(\hat{x}_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_1 x_1 [n])^2 \quad = \alpha_1^2 \, E(x_1)$$

$$E(\hat{x}_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\alpha_2 x_2 [n])^2 \quad = \alpha_2^2 \, E(x_2)$$

da cui ponendo che esse siano pari a $E(x_{ref})$ si ottiene

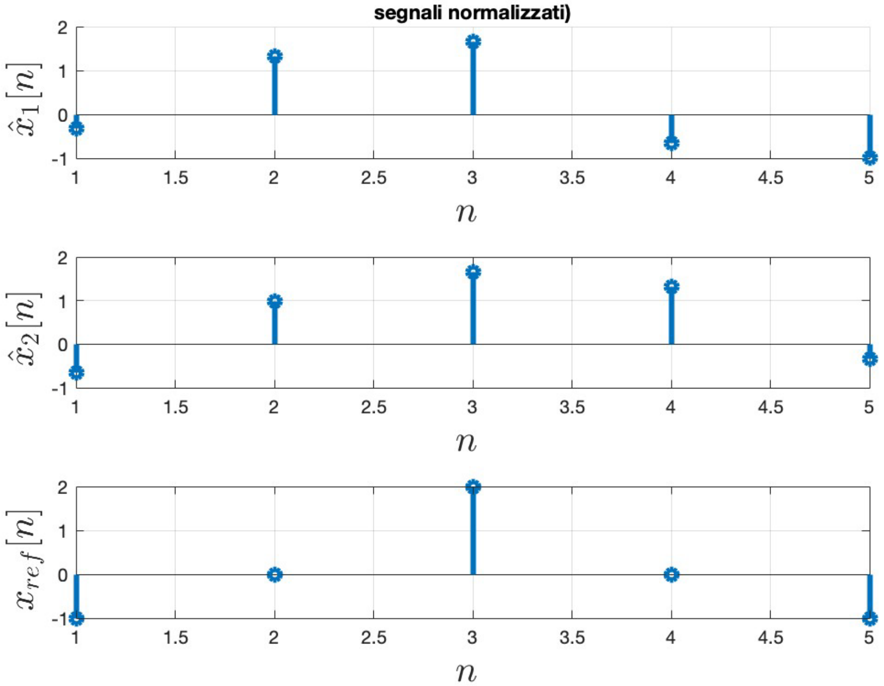
$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{E(x_{ref})}{E(x_1)}} = \quad 0.33 \qquad\qquad \alpha_2 = \sqrt{\frac{E(x_{ref})}{E(x_2)}} = 0.33$$

Soluzione 4.1

I segnali normalizzati sono dunque:

$$\hat{x}_1[n] = -0{,}33\delta[n] + 1{,}32\delta[n-1] + 1{,}65\delta[n-2] - 0{,}66\delta[n-3] - 0{,}99\delta[n-4]$$

$$x_2[n] = -0{,}66\delta[n] + 0{,}99\delta[n-1] + 1{,}65\delta[n-2] + 1{,}32\delta[n-3] - 0{,}33\delta[n-4]$$



che possiamo rapporesentare in forma vettoriale

$$\hat{x}_1 = [-0{,}33\ 1{,}33\ 1{,}65\ \ -0{,}66\ \ -0{,}99\ ]$$

$$\hat{x}_2 = [-0{,}66\ 0{,}99\ 1{,}65\ \ 1{,}32\ \ -0{,}33\ ]$$

$$x_{ref} = [-1\ 0\ 2\ 0\ 1]$$

Soluzione 4.1

Possiamo ottenere i segnali differenza utilizzando i vettori:

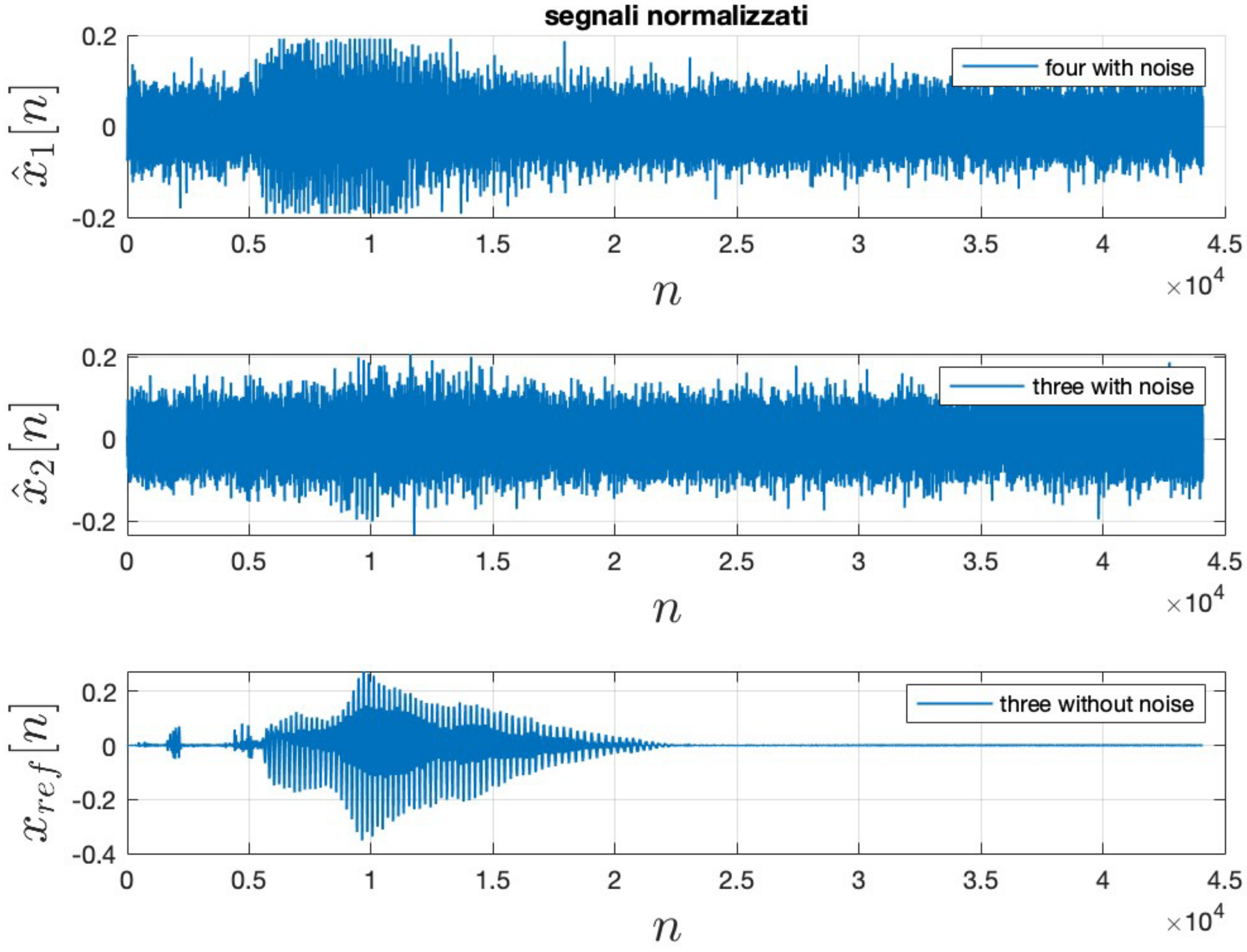
$$\mathrm{e}_1 = \hat{\mathrm{x}}_1 - \mathrm{x}_{ref} = [0.67 \quad 1.32 \quad -0.35 \quad -0.66 \quad 0.01]$$
$$\mathrm{e}_2 = \hat{\mathrm{x}}_2 - \mathrm{x}_{ref} = [0.34 \quad 0.99 \quad -0.35 \quad 1.32 \quad 0.67]$$

da cui otteniamo

$$E(e_1) = 2.75$$

$$E(e_2) = 3.41$$

Soluzione 4.1 - Segnali audio



La presenza del segnale di disturbo «maschera» la forma del segnale che vogliamo riconoscere

Soluzione 4.2

- La funzione di autocorrelazione vale

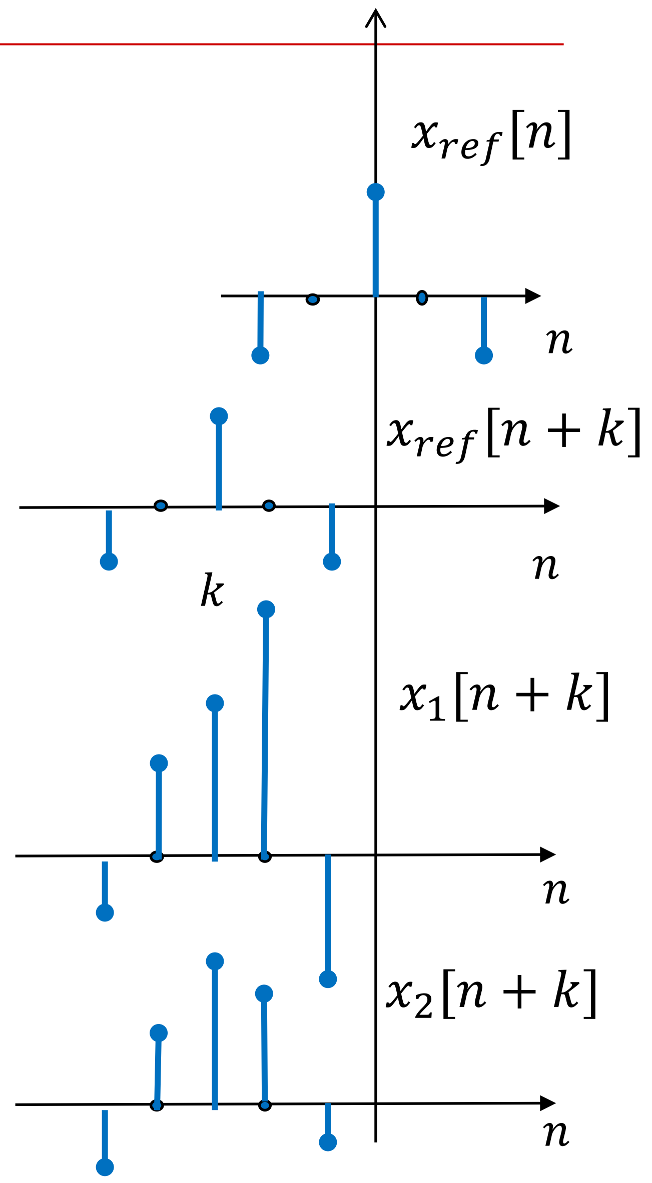
$$R_{ref}[k] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x_{ref}[n]x_{ref}[n+k]$$

$$R_{ref}[k] = \delta[k+4] - 4\delta[k+2] + 6\delta[k] - 4\delta[k-2] + \delta[k+4]$$

Analogmente otteniamo

$$R_{c1}[k] = 3\delta[k+4] + 2\delta[k+3] - 11\delta[k+2] - 8\delta[k+1] + 14\delta[k] + \\ +10\delta[k-1] - 7\delta[k-2] - 4\delta[k-3] + \delta[k-4]$$

$$R_{c2}[k] = \delta[k+4] - 4\delta[k+3] - 7\delta[k+2] + 5\delta[k+1] + 13\delta[k] + \\ + 2\delta[k-1] - 9\delta[k-2] - 3\delta[k-3] + 2\delta[k-4]$$



Soluzione 4.2

- Le sequenze $R_{c1}[k]$ e $R_{c2}[k]$ sono I segnali che vogliamo confrontare andando a calcolare l'energia del segnale differenza

- Ciascuna ha energia
  - $E(R_{ref})$=70
  - $E(R_{c1})$=560
  - $E(R_{c2}) = 358$

Soluzione 4.2

- Come nell'esercizio precedente otteniamo le funzioni normalizzate come

$$\hat{R}_{c1}[k] = R_{c1}[k] * \sqrt{\frac{E_{R_{ref}}}{E_{R_{c1}}}} \qquad \hat{R}_{c2}[k] = R_{c2}[k] * \sqrt{\frac{E_{R_{ref}}}{E_{R_{c1}}}}$$

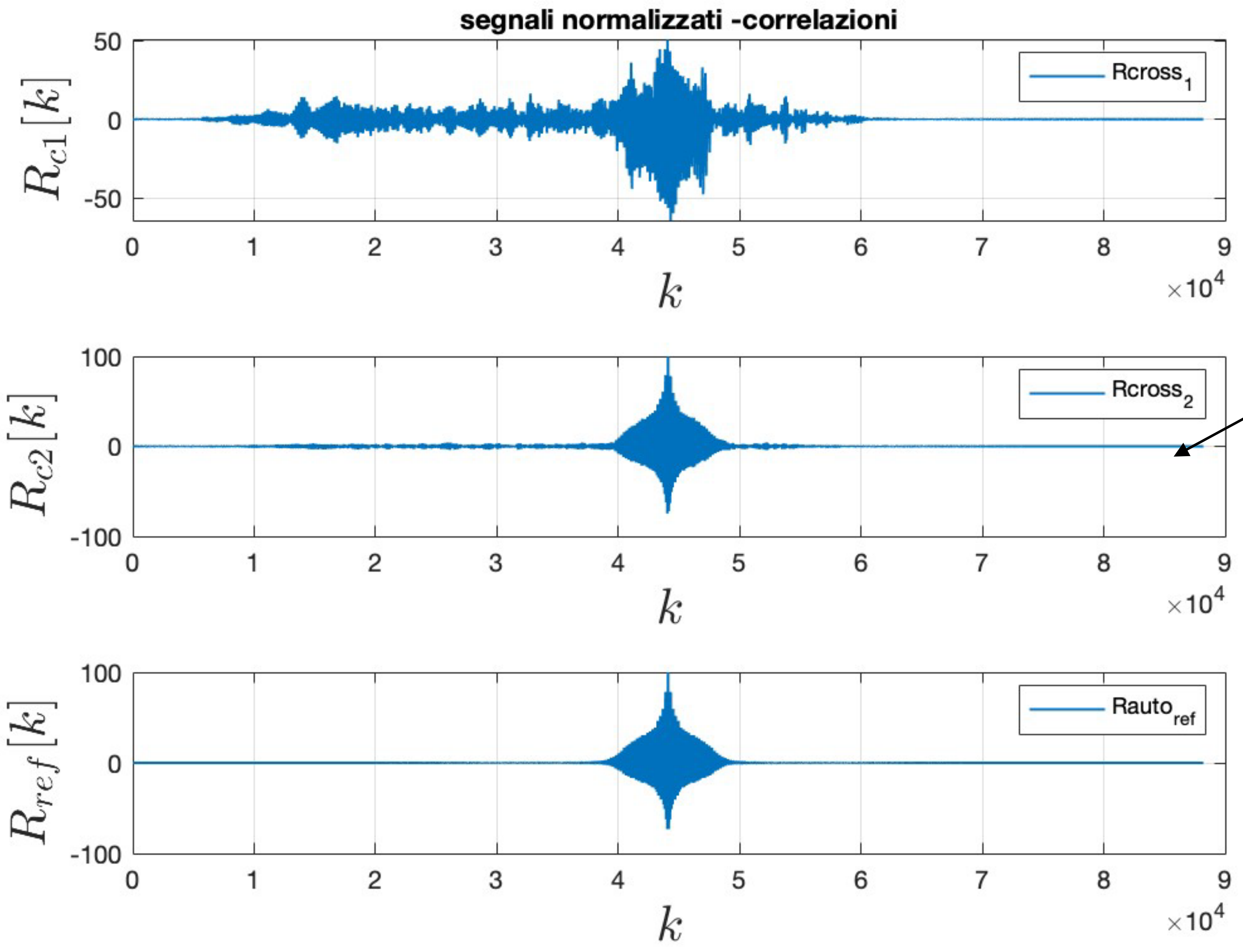
e quindi $\sqrt{\frac{E_{R_{ref}}}{E_{R_{c1}}}}$ =0.35 e $\sqrt{\frac{E_{R_{ref}}}{E_{R_{c2}}}}$=0.44

Da cui si ottiene l'energia dei segnali differenza tra le correlazioni

$$\sum_{k=1}^{2N+1} \left(R_{ref}[k] - \hat{R}_{c1}[k]\right)^2 = 26.9$$

$$\sum_{k=1}^{2N+1} \left(R_{ref}[k] - \hat{R}_{c2}[k]\right)^2 = 11.8$$

Soluzione 4.2 - Segnali audio



Si noti come la cross-correlazione in questo caso "assomigli" all'autocorrelazione del segnale di riferimento

Esercizio 5

- Si consideri il segnale a tempo discreto $x[n] = 5\cos\left(\frac{5\pi n}{3}\right)$. Il periodo di $x[n]$ vale:

a) 3
b) 6/5
c) 5/6
d) 6

Soluzione 5

$$x[n] = 5\cos\left(\frac{5\pi n}{3}\right)$$

- Si ricordi che una sequenza $x[n]$ è periodica se è possibile trovare un intervallo di tempo N per cui vale la relazione: $x[n] = x[n+N]$
- Per una generica sinusoide $x[n] = Acos(2\pi f_0 n + \theta)$ in cui A, θ sono costanti reali
- Nel nostro caso $A = 5$, θ=0 e $f_0 = \frac{5}{6}$.
  - Si ricorda che sinusoidi che differiscono per $k \cdot 2\pi$ sono indistinguibili nel dominio del tempo discreto, infatti sostituendo f_0 con $f_0 + k$ (con k intero), si ottiene la stessa sinusoide.

Soluzione 5

- Il periodo si ottiene come
- $x[n+N] = 5\cos\left(2\,\pi\frac{5}{6}(n+N)\right) = 5\cos\left(2\,\pi\frac{5}{6}n + 2\,\pi\frac{5}{6}N\right)$
- Poiché deve valere che $2\,\pi\frac{5}{6}N = 2\,\pi$ otteniamo il periodo N=6

- **Nota**: L'uguaglianza precedente si può ottenere nel caso in cui Nf_0 è pari a un numero intero, che può essere verificato solamente nel caso in cui f_0 è un numero razionale.

- Le sinusoidi discrete non sono necessariamente periodiche di periodo $1/f_0$, e se f_0 non è un numero razionale sono addirittura aperiodiche in n