Elaborazione dei Segnali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Lezione 11

Sistemi LTI e trasformata zeta:

Equazione alle differenze

Filtri digitali

Interconnessione di sistemi LTI

A.A. 2023-2024

Funzione di trasferimento

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Sia $h(n)$ la risposta all'impulso di un sistema LTI a tempo discreto. Se $x(n)$ è il segnale all'ingresso del sistema, il segnale all'uscita è dato da:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

- Usando la proprietà della convoluzione lineare discreta, si ottiene:

$$Y(z) = Z[x(n) * h(n)] = X(z)H(z)$$

- La regione di convergenza della trasformata $Y(z)$ coincide, nel caso più generale possibile, ovvero nel caso in cui non avvengano cancellazioni tra poli e zeri in $X(z)$ e $H(z)$, con l'intersezione tra le regioni di convergenza delle funzioni $X(z)$ e $H(z)$.

Sistemi a tempo discreto regolati dell’equazione alle differenze

Sistemi lineari e tempo invarianti

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Il comportamento di sistemi LTI causali a tempo discreto può essere descritto da un'equazione alle differenze finite e coefficienti costanti:

$$a_0 \cdot y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \ldots - a_M y(n-M) + \\ + b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \ldots + b_N x(n-N)$$

  - Tipicamente $a_0 = 1$

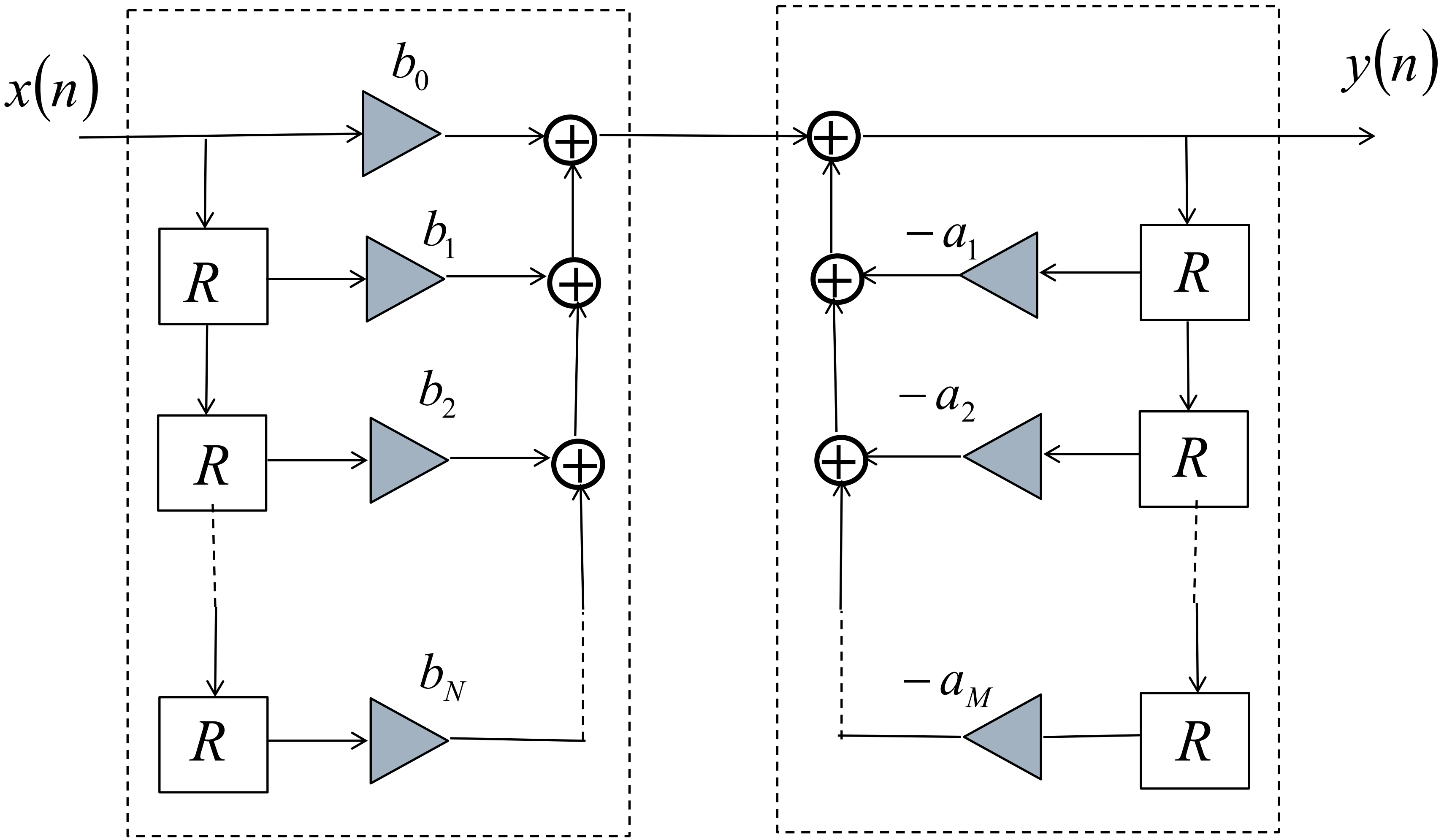
$$\boxed{y(n) = -\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)}$$

- L'equazione alle differenze si può rappresentare tramite un diagramma a blocchi composto da ritardatori, moltiplicatori e sommatori.

Diagramma a blocchi

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni



R = ritardatore di 1 campione

Equazione alle differenze

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$\boxed{y(n) = -\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)}$$

- Quest'equazione esprime l'uscita di un sistema LTI come combinazione lineare dell'ingresso attuale x(n), degli N valori precedenti assunti dall'ingresso e degli M valori precedenti assunti dall'uscita stessa.
  - L'equazione precedente é detta ricorsiva se almeno un coefficiente a_i , i = 1,…, *M*, é diverso da zero.
  - Se tutti i coefficienti a_i, i=1,…, *M*, sono nulli, allora l'equazione é detta non ricorsiva.

Calcolo della risposta all'impulso

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- L'equazione alle differenze o, equivalentemente, lo schema a blocchi descrivono completamente il comportamento del sistema LTI a tempo discreto.

- Tuttavia, lo stesso sistema è completamente caratterizzato anche quando se ne conosce la risposta all'impulso h(n).

- Il calcolo di h(n) può essere effettuato in maniera ricorsiva utilizzando l'equazione alle differenze con *x(n)=*δ*(n)* e *y(n)=h(n)*:

$$h(n) = -\sum_{k=1}^{M} a_k h(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k \delta(n-k)$$

- Questa equazione può essere risolta a partire dall'istante *n=0*, tenendo conto che, per la causalità, *h(n)=0* per *n<0*.

Esempio

POLITECNICO
DI TORINO
Dipartimento
di Elettronica
e Telecomunicazioni

- Calcolare la risposta all'impulso del sistema LTI a tempo discreto descritto dalla seguente relazione ingresso/uscita:

$$y(n) = a\,y(n-1) + b\,x(n)$$

- La risposta all'impulso h(n) può essere calcolata mediante la relazione ricorsiva che si ottiene ponendo $x(n)=\delta(n)$ e $y(n)=h(n)$:

$$h(n) = a\,h(n-1) + b\,\delta(n)$$

- Poiché il sistema è causale, h(-1)=0, quindi:

$$h(0) = a\,h(-1) + b\,\delta(0) = b$$

- Per $n>0$, $\delta(n)=0$, quindi: $h(n) = a\,h(n-1)$

Esempio

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

$$n<0: h(n)=0$$

$$n=0: h(n)=b$$

$$n>0: h(n)=a\,h(n-1) \Rightarrow$$

$$h(1)=a\,h(0)=a\,b$$

$$h(2)=a\,h(1)=a^2\,b$$

$$h(3)=a\,h(2)=a^3\,b$$

$$\ldots$$

$$h(n)=a\,h(n-1)=a^n\,b\,u(n)$$

- Lo stesso risultato si può ottenere utilizzando la trasformata zeta:

$$y(n)=a\,y(n-1)+b\,x(n) \Rightarrow Y(z)=a\,Y(z)z^{-1}+b\,X(z)$$

$$Y(z)\left[1-a\,z^{-1}\right]=b\,X(z)$$

$$\boxed{h(n)=b\,a^n\,u(n)} \Leftarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b}{1-a\,z^{-1}}$$

Filtri digitali

Filtri digitali

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La classe dei sistemi LTI più impiegati nella pratica, sono i cosiddetti filtri digitali.
  - Un filtro digitale è un sistema LTI descritto mediante una funzione di trasferimento H(z), che corrisponde all'equazione alle differenze:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

- Trasformata z:

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{M} a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{N} b_k X(z) z^{-k} \qquad Y(z) = Z[x(n) * h(n)] = X(z)H(z)$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_M z^{-M}} = H_N(z) H_R(z)}$$

Sistemi FIR e IIR

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- I sistemi descritti attraverso l'equazione alle differenze si distinguono in due importanti tipologie.

- **Sistemi LTI con risposta all'impulso a supporto finito (FIR=Finite Impulse Response)**
  - L'uscita y(n) dipende solo dal segnale in ingresso

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} = b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}$$

$$h(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k \delta(n-k) = b_0\delta(n) + b_1\delta(n-1) + \ldots + b_N\delta(n-N)$$

Sistemi FIR e IIR

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- **Sistemi LTI con risposta all'impulso a supporto illimitato (IIR=Infinite Impulse Response)**
  - L'uscita y(n) dipende non solo dal segnale in ingresso ma anche dai campioni del segnale in uscita:

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k x(n-k)$$

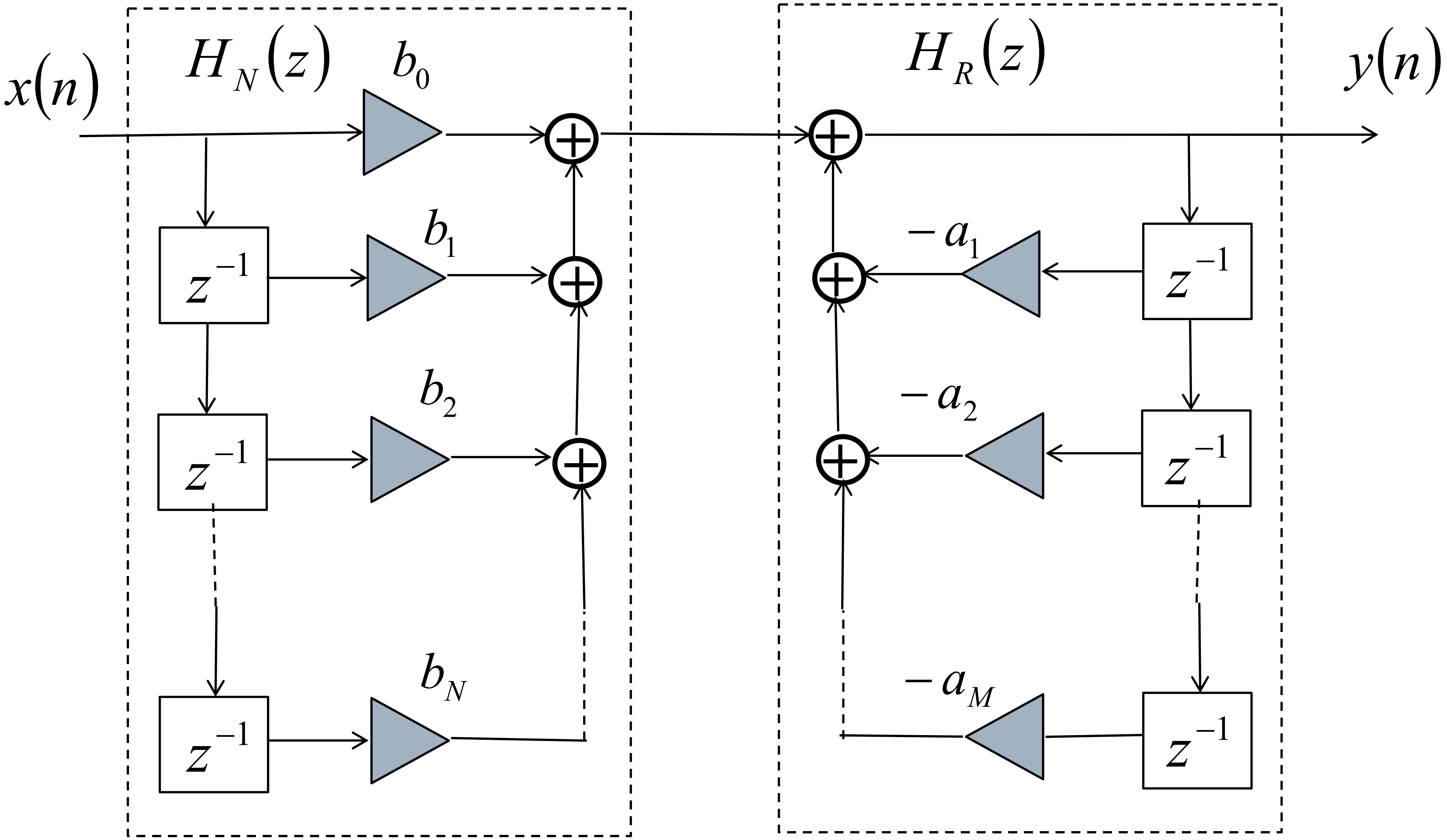
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_M z^{-N}}$$

  - Un sistema è detto "puramente ricorsivo" se:

$$y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M} a_k y(n-k)$$

Diagramma a blocchi

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni



$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}}=$$

$$=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Nz^{-N}}{1+a_1z^{-1}+\ldots+a_Mz^{-M}}=$$

$$=H_N(z)H_R(z)$$

Esempio

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- Calcolare la sequenza y(n) in uscita dal sistema LTI con funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + \frac{3}{4} z^{-1}} \qquad |z| > \frac{3}{4}$$

quando al suo ingresso è posta la sequenza:

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + u(-n-1)$$

Esempio

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La trasformata zeta della sequenza in ingresso è data da:

$$x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)+u(-n-1)$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} \qquad \frac{1}{3}<|z|<1$$

- La trasformata zeta della sequenza in uscita è data da:

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}\frac{1-z^{-1}}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}=\frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

Esempio

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- A causa della cancellazione del polo in z=1 (responsabile della parte anticausale), la ROC di Y(z) è l'esterno dalla circonferenza di raggio 3/4 → la sequenza y(n) è causale.
- Per ottenere y(n) usiamo l'espansione in fratti semplici di Y(z) (vista come funzione di z^{-1}):

$$Y(z)=\frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}=\frac{R_1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}+\frac{R_2}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

Esempio

$$Y(z) = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)} = \frac{R_1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} + \frac{R_2}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

$$R_1 = Y(z)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\Big|_{z^{-1}=3} = -\frac{8}{13} \qquad R_2 = Y(z)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)\Big|_{z^{-1}=-4/3} = \frac{8}{13}$$

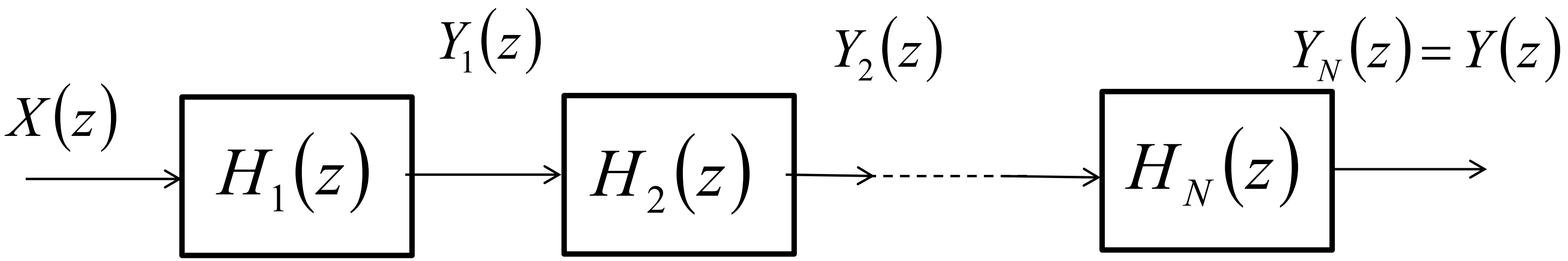
$$Y(z) = \frac{-8/13}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)} + \frac{8/13}{\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}\right)}$$

$$y(n) = -\frac{8}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \frac{8}{13}\left(-\frac{3}{4}\right)^n u(n)$$

Interconnessione di sistemi LTI

Interconnessione in serie

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

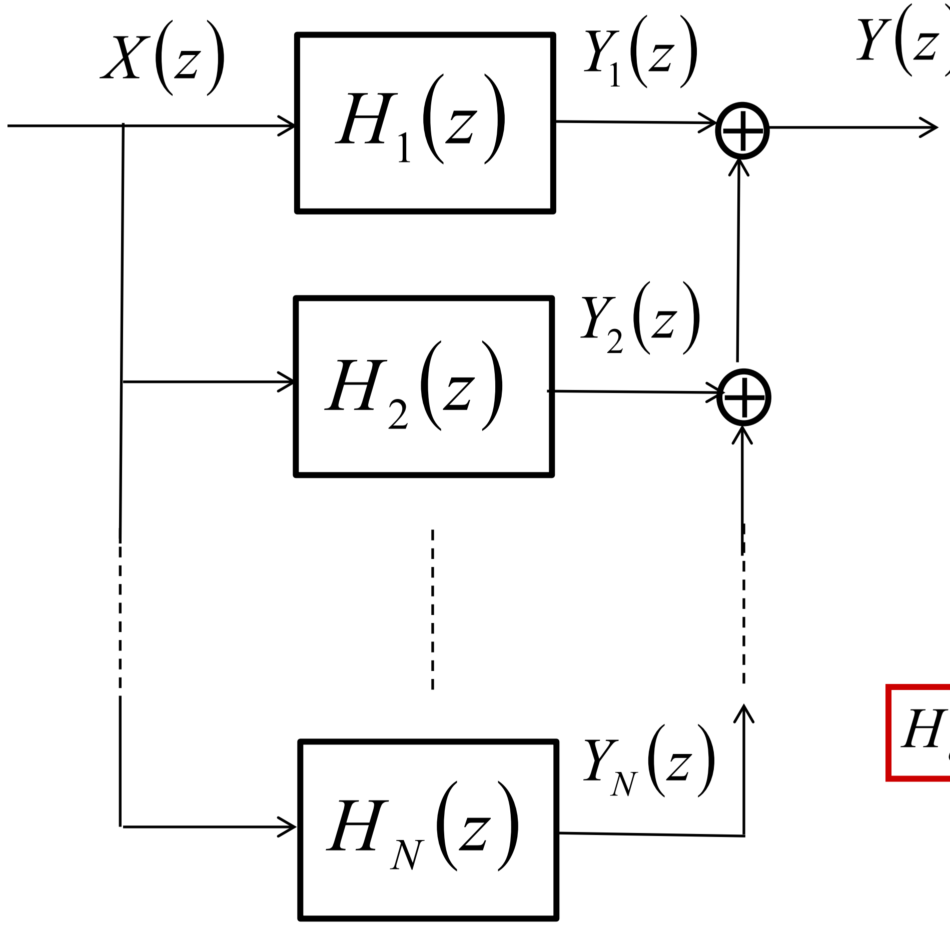


$$Y(z) = H_e(z)X(z)$$

$$\boxed{H_e(z) = H_1(z)H_2(z)\ldots H_N(z)}$$

Interconnessione in parallelo

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni



$$Y(z)=Y_1(z)+Y_2(z)+\ldots+Y_N(z)$$

$$Y_i(z)=X(z)H_i(z)$$

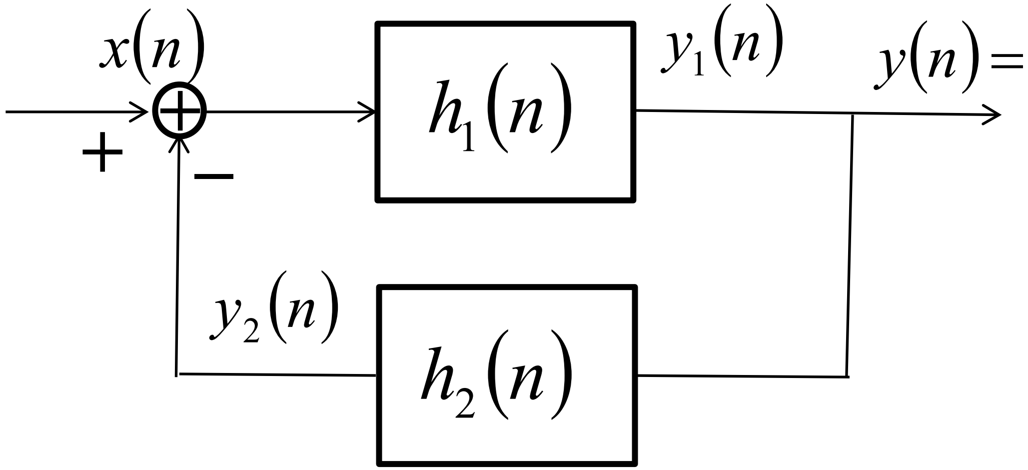
$$\Downarrow$$

$$Y(z)=X(z)\cdot H_e(z)$$

$$\boxed{H_e(z)=H_1(z)+H_2(z)+\ldots+H_N(z)}$$

Interconnessione con reazione

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni



$$y(n) = [x(n) - y(n) * h_2(n)] * h_1(n)$$

$$Y(z) = [X(z) - Y(z)H_2(z)]H_1(z)$$

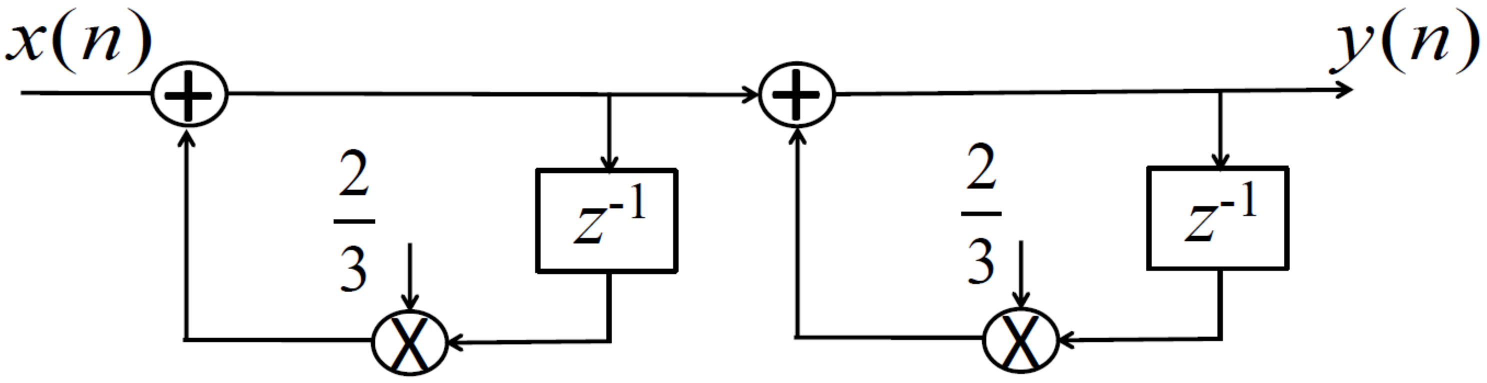
$$Y(z) = X(z)\frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

$$\boxed{H_e(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}}$$

Esempio

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

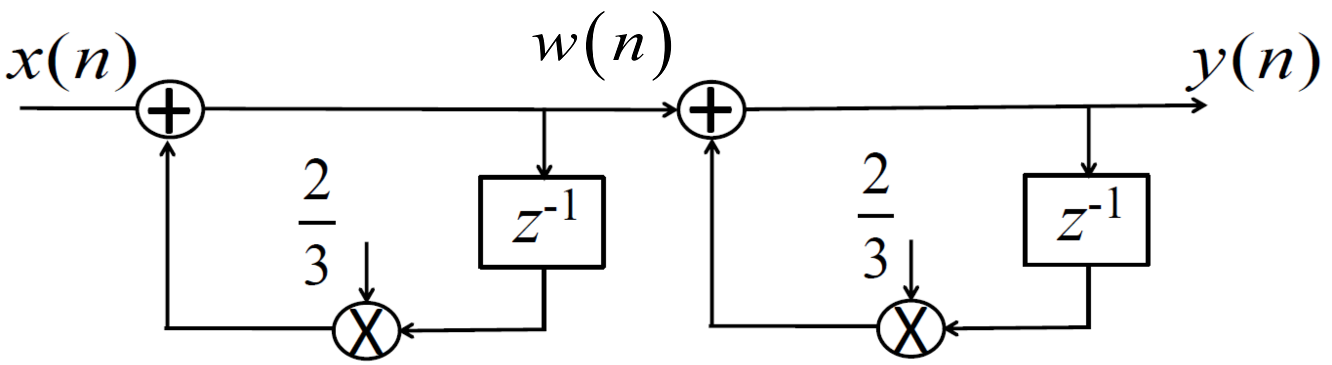
- Si consideri il sistema LTI a tempo discreto riportato nella seguente figura:



1. Calcolare la funzione di trasferimento H(z) e la risposta all'impulso h(n) del sistema.
2. Ricavare la relazione ingresso/uscita nel dominio del tempo (sotto forma di equazione alle differenze).
3. Calcolare l'uscita del sistema y(n) quando all'ingresso è posto il segnale: $x(n)=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n)-\frac{2}{3}\delta(n)$

Esempio (1)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni



- Il sistema nella figura è la cascata (connessione in serie) di due sistemi uguali con relazione ingresso/uscita: $w(n) = x(n) + \frac{2}{3} w(n-1)$
- Calcolando la trasformata zeta: $W(z) = X(z) + \frac{2}{3} W(z) z^{-1}$
- La funzione di trasferimento del singolo sistema è quindi: $H'(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{2}{3} z^{-1}}$

Esempio (1)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La funzione di trasferimento del sistema complessivo vale:

$$H(z) = H'(z) \cdot H'(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3} z^{-1}\right)^2}$$

- Dalle tavole si ricava l'anti-trasformata di H(z), che corrisponde alla risposta all'impulso:

$$h(n) = (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$$

Esempio (2)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La relazione ingresso/uscita del sistema complessivo si può ricavare dalla funzione di trasferimento:

$$Y(z) = X(z)H(z) = X(z)\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)^2} = X(z)\frac{1}{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{4}{9}z^{-2}}$$

$$Y(z)\left[1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{4}{9}z^{-2}\right] = X(z)$$

$$Y(z) = X(z)+\frac{4}{3}z^{-1}Y(z)-\frac{4}{9}z^{-2}Y(z)$$

- Antitrasformando:

$$y(n) = x(n)+\frac{4}{3}y(n-1)-\frac{4}{9}y(n-2)$$

Esempio (3)

POLITECNICO DI TORINO
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

- La trasformata zeta di x(n) vale:

$$X(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{2}{3}=\frac{3-2-\frac{2}{3}z^{-1}}{3\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}=\frac{1}{3}\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

- La trasformata zeta dell'uscita vale quindi:

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{1}{3}\frac{1-\frac{2}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)^{2}}=\frac{1/3}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{3}z^{-1}\right)}$$

- L'antitrasformata si può calcolare usando il metodo della scomposizione in fratti semplici:

$$Y(z)=\frac{R_1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{R_2}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$$

Esempio (3)

$$R_1 = \left.\frac{1/3}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}\right|_{z=-\frac{1}{3}} = \frac{1/3}{1+2} = \frac{1}{9} \qquad R_2 = \left.\frac{1/3}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}\right|_{z=\frac{2}{3}} = \frac{1/3}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}$$

- Quindi:

$$Y(z) = \frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{2}{9}\frac{1}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$$

- Antitrasformando: $y(n) = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$