Teoria ed Elaborazione dei Segnali - Appello 30 gennaio 2024

(1) **1a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un segnale $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(t - 4\,k\,a)$ dove $z(t) = p_{3a}(t)$ (la funzione $p_T(t)$ è qui definita come una porta unitaria in $[-T/2, +T/2]$).

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. la riga spettrale del segnale $x(t)$ in $f = 0$ è nulla
b. il segnale $x(t)$ non è periodico
c. lo spettro del segnale $x(t)$ è costituito da delta di Dirac posizionate nei multipli di $\frac{1}{3a}$
d. lo spettro del segnale $x(t)$ è costituito da delta di Dirac spaziate tra di loro di $\frac{1}{4a}$

SOLUZIONE Come visto a lezione, un segnale esprimibile come $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(t - k\,b)$ è periodico di periodo b indipendentemente dalla forma di $z(t)$ e conseguentemente lo spettro del segnale $x(t)$ è costituito da righe ai multipli di $1/b$. Con le notazioni di questo esercizio, le righe si trovano dunque nei multipli di $\frac{1}{4a}$.

La riga in $f = 0$ non è nulla, in quanto il segnale ha media temporale non nulla. La riposta corretta è dunque: lo spettro del segnale $x(t)$ è costituito da delta di Dirac spaziate tra di loro di $\frac{1}{4a}$

(2) **1b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un segnale $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(t - 5\,k\,a)$ dove $z(t) = triangle_{3a}(t)$ (la funzione $triangle_T(t)$ sia qui definita come una funzione triangolare in $[-T/2, +T/2]$).

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. la riga spettrale del segnale $x(t)$ in $f = 0$ è nulla
b. lo spettro del segnale $x(t)$ è costituito da delta di Dirac spaziate tra di loro di $\frac{1}{5a}$
c. lo spettro del segnale $x(t)$ è costituito da delta di Dirac posizionate nei multipli di $\frac{1}{3a}$
d. lo spettro del segnale $x(t)$ non contiene delta di Dirac

SOLUZIONE Come visto a lezione, un segnale esprimibile come $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z(t - k\,b)$ è periodico di periodo b indipendentemente dalla forma di $z(t)$ e conseguentemente lo spettro del segnale $x(t)$ è costituito da righe ai multipli di $1/b$. Con le notazioni di questo esercizio, le righe si trovano dunque nei multipli di $\frac{1}{5a}$.

La riga in $f = 0$ non è nulla, in quanto il segnale ha media temporale non nulla. La riposta corretta è dunque: lo spettro del segnale $x(t)$ è costituito da delta di Dirac spaziate tra di loro di $\frac{1}{5a}$

(3) **2a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un sistema in cui un processo casuale $x(t)$ passa attraverso un sistema lineare e tempo invariante con risposta in frequenza $H(f)$, generando in uscita un processo casuale $y(t)$. Considerando la trattazione sui processi casuali vista in questo corso, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. siamo sempre in grado di calcolare la densità di probabilità di $y(t)$
b. siamo in grado di calcolare la densità spettrale di potenza di $y(t)$ data la densità spettrale di potenza di $x(t)$ solo quando $x(t)$ è stazionario in senso lato.
c. siamo sempre in grado di calcolare la densità spettrale di potenza di $y(t)$ data la densità spettrale di potenza di $x(t)$ senza nessuna ipotesi aggiuntiva su $x(t)$.
d. la definizione di densità spettrale di potenza introdotta in questo corso richiede che $x(t)$ assuma valori reali.

(4) **2b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri un sistema in cui un processo casuale $x(t)$ passa attraverso un sistema lineare e tempo invariante con risposta in frequenza $H(f)$, generando in uscita un processo casuale $y(t)$. Considerando la trattazione sui processi casuali vista in questo corso, quale delle seguenti affermazioni è vera?

a. siamo sempre in grado di calcolare la densità di probabilità di $y(t)$
b. la definizione di densità spettrale di potenza introdotta in questo corso non vale se $x(t)$ assume valori complessi.
c. siamo in grado di calcolare la densità spettrale di potenza di $y(t)$ data la densità spettrale di potenza di $x(t)$ solo quando $x(t)$ è stazionario in senso lato.
d. è indispensabile che $x(t)$ sia stazionario in senso stretto di ordine due per poter calcolare la densità spettrale di potenza di $y(t)$ data la densità spettrale di potenza di $x(t)$.

SOLUZIONE per entrambe le versioni del quiz La trattazione vista a lezione in questo corso relativamente alla densità spettrale di potenza è stata sviluppata SOLO nel caso di processi casuali stazionari in senso lato. Non è invece necessaria nessuna richiesta su valori reali o complessi su $x(t)$. Inoltre abbiamo discusso che non esistono formule generali per calcolare la densità di probabilità dell'uscita del sistema LTI. Conseguentemente la risposta esatta è: siamo in grado di calcolare lo densità spettrale di potenza di $y(t)$ dato lo densità spettrale di potenza di $x(t)$ solo quando $x(t)$ è stazionario in senso lato.

(5) **3a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si considerino i seguenti due segnali a tempo discreto: $x_1[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [2, 5]$ e $x_2[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [6, 9]$. Entrambi i segnali sono invece strettamente nulli al di fuori degli intervalli specificati. Sia $y[n]$ il segnale che risulta dalla convoluzione lineare tra $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

a. $y[n]$ assume (al massimo) 8 valori non nulli
b. $y[n]$ assume (al massimo) 7 valori non nulli
c. $y[n]$ assume (al massimo) 6 valori non nulli
d. $y[n]$ è certamente non nullo per $n = 1$

SOLUZIONE I due segnali discreti hanno entrambi supporto temporale strettamente limitato, in particolare $x_1[n]$ e $x_2[n]$ hanno entrambi quattro valori non nulli. Il risultato della convoluzione lineare avrà dunque un supporto dato dalla somma dei due supporti meno uno, e dunque si estenderà (al massimo) su un supporto pari a sette. La risposta corretta è dunque "$y[n]$ assume (al massimo) 6 valori non nulli".

La risposta "$y[n]$ è certamente non nullo per $n = 1$" è anch'essa sbagliata, in quanto risulta evidente che in $n = 1$ i due segnali (opportunamente shiftati come richiesto dalla costruzione grafica della convoluzione) non si sovrappongono temporalmente.

(6) **3b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si considerino i seguenti due segnali a tempo discreto: $x_1[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [2, 3]$ e $x_2[n]$ che assume valori strettamente non nulli solo per $n \in [7, 9]$. Entrambi i segnali sono invece strettamente nulli al di fuori degli intervalli specificati. Sia $y[n]$ il segnale che risulta dalla convoluzione lineare tra $x_1[n]$ e $x_2[n]$. Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

a. $y[n]$ è certamente non nullo per $n = 0$
b. $y[n]$ assume (al massimo) 3 valori non nulli
c. $y[n]$ assume (al massimo) 4 valori non nulli
d. $y[n]$ assume (al massimo) 5 valori non nulli

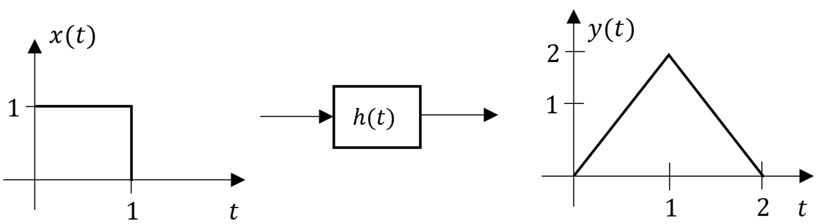
SOLUZIONE I due segnali discreti hanno entrambi supporto temporale strettamente limitato, in particolare $x_1[n]$ e $x_2[n]$ hanno rispettivamente due e tre valori non nulli. Il risultato della convoluzione lineare avrà dunque un supporto dato dalla somma dei due supporti meno uno, e dunque si estenderà (al massimo) su un supporto pari a quattro. La risposta corretta è dunque "$y[n]$ assume (al massimo) 4 valori non nulli".

La risposta "$y[n]$ è certamente non nullo per $n = 0$" è anch'essa sbagliata, in quanto risulta evidente che in $n = 0$ i due segnali (opportunamente shiftati come richiesto dalla costruzione grafica della convoluzione) non si sovrappongono temporalmente.

(7) **4a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Il sistema LTI rappresentato in figura fornisce in uscita il segnale $y(t)$ quando al suo ingresso viene posto il segnale $x(t)$. Si consideri ora l'uscita del sistema quando al suo ingresso viene posto il segnale $z(t) = (-t + 2)p_2(t - 1)$ per ottenere il segnale $w(t)$, essendo $p_\alpha(t) = 1$ per $|t| < \alpha/2$ e 0 altrove.

Il massimo del segnale di uscita $w(t)$ vale:



a. 6

b. 1.5

c. 4

d. 3

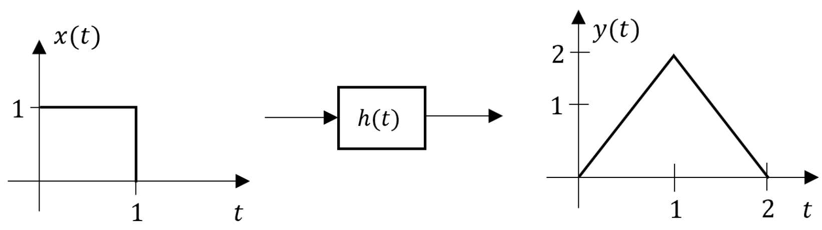
e. Nessuna delle altre risposte

f. 2

(8) **4b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Il sistema LTI rappresentato in figura fornisce in uscita il segnale $y(t)$ quando al suo ingresso viene posto il segnale $x(t)$. Si consideri ora l'uscita del sistema quando al suo ingresso viene posto il segnale $z(t) = 2tp_2(t-1)$ per ottenere il segnale $w(t)$, essendo $p_\alpha(t) = 1$ per $|t| < \alpha/2$ e 0 altrove.

Il massimo del segnale di uscita $w(t)$ vale:



a. 2

b. 1.5

c. Nessuna delle altre risposte

d. 4

e. 3

f. 6

Soluzione 4a e 4b

I segnali in figura e le loro trasformate di Fourier si possono scrivere come:

$$x(t) = p_1(t - 1/2) \rightarrow X(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{-j\pi f}$$

$$y(t) = 2tri(t-1) \rightarrow Y(f) = 2\frac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2} e^{-j2\pi f}$$

La funzione di trasferimento vale dunque

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{2\frac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2} e^{-j2\pi f}}{\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{-j\pi f}} = 2\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{-j\pi f}$$

e

$$h(t) = 2p_1(t - 1/2)$$

Considerando ora il segnale di ingresso $z(t) = (-t+2)p_2(t-1)$ (VERSIONE A)

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

che assume un massimo quando t=1

$$\max\{w(t)\} = 2\int_0^1 (-\tau + 2)d\tau = 2\left(\frac{-\tau^2}{2} + 2\tau\right)|_1^0 = 2(-\frac{1}{2} + 2) = 3$$

Considerando ora il segnale di ingresso $z(t) = 2tp_2(t-1) =$ (VERSIONE B)

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

che assume un massimo quando t=2

$$\max\{w(t)\} = 4\int_1^2 \tau d\tau = 4\frac{\tau^2}{2}|_1^2 = 4(2 - \frac{1}{2}) = 8 - 2 = 6$$

(9) **5a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$x(t) = a_1 \cos(2\pi f_0 t) + a_2 z(t) \cos(2\pi f_1 t),$$

in cui $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}$, $f_1 = \frac{5}{2} f_0$ e

$z(t)$ é un segnale a energia finita con banda $B_z = \frac{f_0}{2}$

Il segnale viene campionato da un campionatore ideale ad una frequenza di campionamento $f_s = 3f_0$ e filtrato attraverso un filtro passabasso ideale con funzione di trasferimento $H(f)$ e banda $B = \frac{3}{2} f_0$ per ottenere il segnale $y(t)$. La minima frequenza di campionamento f_s necessaria per campionare il segnale $y(t)$ in modo da garantire la sua possibile perfetta ricostruzione vale:

a. $f_s = 3f_0$
b. $f_s = 6f_0$
c. $f_s = f_0$
d. nessuna delle altre risposte
e. $f_s = 2f_0$

(10) **5b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$x(t) = a_1 \cos(2\pi f_0 t) + a_2 z(t) \cos(2\pi f_1 t),$$

in cui $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = 1$, $f_1 = \frac{5}{2} f_0$ e $z(t)$ é un segnale a energia finita con banda $B_z = \frac{f_0}{2}$

Il segnale viene campionato da un campionatore ideale ad una frequenza di campionamento $f_s = 3f_0$ e filtrato attraverso un filtro passabasso ideale con funzione di trasferimento $H(f)$ e banda $B = \frac{3}{2} f_0$ per ottenere il segnale $y(t)$.La minima frequenza di campionamento necessaria per campionare il segnale $y(t)$ in modo da garantire la sua possibile perfetta ricostruzione vale

a. $f_s = 6f_0$
b. $f_s = 2f_0$
c. nessuna delle altre risposte
d. $f_s = f_0$
e. $f_s = 3f_0$

SOLUZIONE 5a

Lo spettro del segnale $x(t)$ per le proprietá di lineritá ha due componenti: lo spettro a righe del coseno a frequenza f_0 e lo spettro del segnale $z(t)$ modulato alla frequenza $f_1 = 2,5f_0$. Lo spettro $Z(f)$ ha banda $\frac{f_0}{2}$.

Si noti che ai fini di determinare la frequenza di campionamento é necessario valutare il supporto dello spettro, mentre il valore di ampiezza non ha impatto sulla scelta della f_s. Lo spettro é dunque:

$$X(f) = \frac{a_1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{a_1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{a_2}{2} Z(f - 2,5f_0) + \frac{a_2}{2} Z(f + 2,5f_0).$$

come rappresentato in figura 1a.

A seguito del campionamento lo spettro viene periodicizzato, come rappresentato in figura 1b. Poiché il filtro passabasso ideale taglia tutte le frequenze per $|f| > 1,5f_0$, lo spettro risultante sará

$$Y(f) = \frac{a_1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{a_1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{a_2}{2} Z(f - f_0/2) + \frac{a_2}{2} Z(f + f_0/2)$$

La massima frequenza presente nello spettro del segnale (banda) é f_0 da cui per il criterio di Nyquist la minima frequenza di campionamento necessaria é

$$f_s = 2f_0$$

(11) **6a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q(t - nT)$$

in cui

$$q(t) = p_{T/2}(t + T/4) - p_{T/2}(t - T/4)$$

essendo $p_\alpha(t) = 1$ per $|t| < \alpha/2$ e 0 altrove.

Il segnale $x(t)$ viene filtrato da un sistema LTI la cui funzione di trasferimento vale

$$H(f) = p_{1/T}(f - k/T)$$

Il segnale di uscita $y(t)$ quando $T = 1$ e $k = 3$ vale:

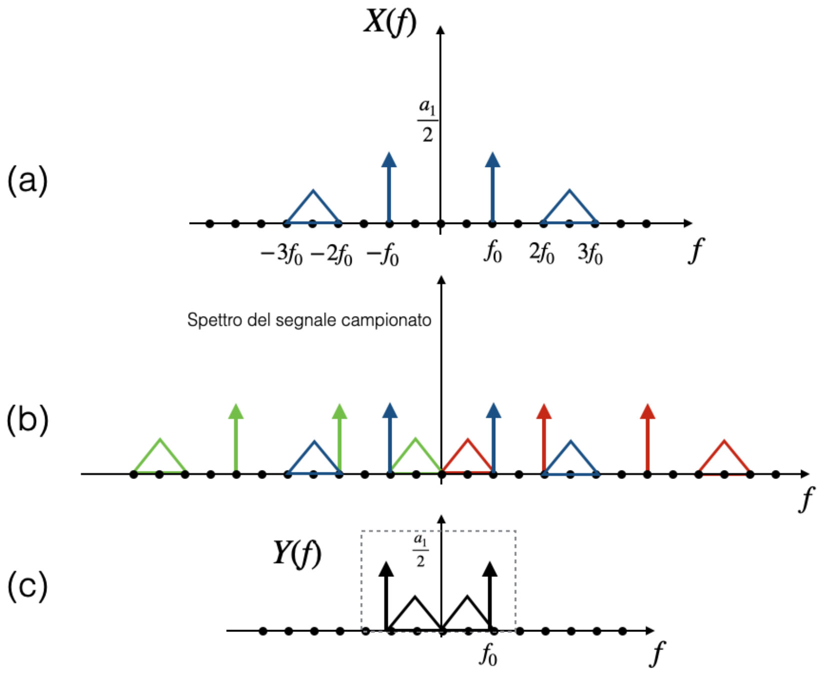


Figura 1: Soluzione

a. nessuna delle altre risposte
b. $y(t) = \frac{2}{3\pi} \sin\left(\frac{2}{3}\pi t\right)$
c. $y(t) = \frac{2j}{6\pi} \sin(6\pi t)$
d. $y(t) = \frac{2j}{3\pi} e^{j6\pi t}$
e. $y(t) = \frac{4j}{3\pi} e^{j3\pi t}$

(12) **6b** RISPOSTA MULTIPLA | Una sola alternativa

Si consideri il segnale

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q(t - nT)$$

in cui

$$q(t) = p_{T/2}(t + T/4) - p_{T/2}(t - T/4)$$

essendo $p_\alpha(t) = 1$ per $|t| < \alpha/2$ e 0 altrove.
Il segnale $x(t)$ viene filtrato da un sistema LTI la cui funzione di trasferimento vale

$$H(f) = p_{1/T}(f - k/T)$$

Il segnale di uscita $y(t)$ quando $T = 4$ e $k = 7$ vale:

a.
$$y(t) = \frac{2j}{7\pi} \sin\left(\frac{7}{2}\pi t\right)$$

b.
$$y(t) = \frac{4j}{7\pi} e^{j\frac{7}{2}\pi t}$$

c.
$$y(t) = \frac{2}{7\pi} \sin(14\pi t)$$

d. nessuna delle altre risposte

e.
$$y(t) = \frac{2j}{7\pi} e^{j\pi\frac{7}{2}t}$$

SOLUZIONE
Lo spettro del segnale periodico vale

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{+\infty} Q\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right).$$

Il segnale

$$Q(f) = R(f)e^{j\pi f\frac{T}{2}} - R(f)e^{-j\pi f\frac{T}{2}} = 2jR(f)\sin\left(\pi f\frac{T}{2}\right)$$

Il filtro seleziona solo a riga k dello spettro, quindi

$$Y(f) = \frac{1}{T}Q\left(\frac{k}{T}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) = \frac{1}{T}2jR\left(\frac{k}{T}\right)\sin\left(\pi\frac{k}{T}\frac{T}{2}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Dato che

$$R(f) = \frac{\sin\left(\pi f\frac{T}{2}\right)}{\pi f}$$

$$R\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right)}{\pi\frac{k}{T}}$$

da cui

$$Y(f) = \frac{1}{T}2j\frac{\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right)}{\pi\frac{k}{T}}\sin\left(\pi\frac{k}{2}\right)\delta\left(f-\frac{k}{T}\right) =$$

$$= 2j\frac{\sin^2\left(\pi\frac{k}{2}\right)}{\pi k}\delta\left(f-\frac{k}{T}\right)$$

Sostituendo $T = 1$ e $k = 3$

$$Y(f) = \frac{2j}{\pi 3}\delta\left(f-\frac{3}{2}\right)$$

$$y(t) = \frac{2j}{\pi 3}e^{j6\pi t}$$

Sostituendo $T = 4$ e $k = 7$

$$Y(f) = \frac{2j}{\pi 7}\delta\left(f-\frac{7}{4}\right)$$

$$y(t) = \frac{2j}{\pi 7}e^{j\frac{7}{2}\pi t}$$

(13) **7a** Risposta multipla Una sola alternativa

Un segnale discreto $x[n]$, che vale 3 per n=0, vale 2 per n=1 vale 1 per n=2 e vale 0 altrove, viene posto in ingresso ad un sistema LTI discreto con risposta all'impulso $h[n]$ che vale 1 per n=0,1, vale -1 per n=3,4 e vale 0 altrove. Sia $y[n]$ il segnale all'uscita.

a. $y[1] = 5, y[3] = 2, y[5] = 3$
b. $y[1] = 5, y[3] = -2, y[5] = -3$
c. $y[1] = 2, y[3] = 1, y[5] = 2$
d. $y[1] = 1, y[3] = -2, y[5] = -1$
e. nessuna delle altre risposte è corretta

Soluzione

L'uscita del sistema è data dalla convoluzione tra $x(n)$ e $h(n)$:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

Reappresentando i due segnali $x(n)$ e $h(n)$ come vettori di campioni:

$$x(n) = \{\underline{3}, 2, 1\} \qquad h(n) = \{\underline{1}, 1, 0, -1, -1\}$$

$$h(k) = \{0, 0, \underline{1}, 1, 0, -1, -1, 0, 0\}$$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(-k) = 3 \qquad x(-k) = \{1, 2, \underline{3}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(1-k) = 5 \qquad x(1-k) = \{0, 1, \underline{2}, 3, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$y(2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(2-k) = 3 \qquad x(2-k) = \{0, 0, \underline{1}, 2, 3, 0, 0, 0, 0\}$$

$$y(3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(3-k) = -2 \qquad x(3-k) = \{0, 0, \underline{0}, 1, 2, 3, 0, 0, 0\}$$

$$y(4) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(4-k) = -5 \qquad x(4-k) = \{0, 0, \underline{0}, 0, 1, 2, 3, 0, 0\}$$

$$y(5) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(1-k) = -3 \qquad x(5-k) = \{0, 0, \underline{0}, 0, 0, 1, 2, 3, 0\}$$

$$y(6) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(6-k) = -1 \qquad x(6-k) = \{0, 0, \underline{0}, 0, 0, 0, 1, 2, 3\}$$

La soluzione corretta è quindi la (b).

(14) **7b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Un segnale discreto $x[n]$, che vale 1 per n=1,3 vale 2 per n=2, e vale 0 altrove, viene posto in ingresso ad un sistema LTI discreto con risposta all'impulso $h[n]$ che vale 1 per n=0,1,2,3 e vale 0 altrove. Sia $y[n]$ il segnale all'uscita.

a. $y[1] = 1, y[3] = 0, y[5] = -1$
b. nessuna delle altre risposte è corretta
c. $y[1] = 1, y[3] = 4, y[5] = 3$
d. $y[1] = 1, y[3] = 3, y[5] = 2$
e. $y[1] = 1, y[3] = 0, y[5] = 1$

Soluzione

L'uscita del sistema è data dalla convoluzione tra $x(n)$ e $h(n)$:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

Reappresentando i due segnali $x(n)$ e $h(n)$ come vettori di campioni:

$$x(n) = \{\underline{0}, 1, 2, 1\} \qquad h(n) = \{\underline{1}, 1, 1, 1\}$$

$$h(k) = \{0, 0, 0, \underline{1}, 1, 1, 1, 0, 0\}$$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(-k) = 0 \qquad x(-k) = \{1, 2, 1, \underline{0}, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(1-k) = 1 \qquad x(1-k) = \{0, 1, 2, \underline{1}, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

$$y(2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(2-k) = 3 \qquad x(2-k) = \{0, 0, 1, \underline{2}, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

$$y(3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(3-k) = 4 \qquad x(3-k) = \{0, 0, 0, \underline{1}, 2, 1, 0, 0, 0\}$$

$$y(4) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(4-k) = 4 \qquad x(4-k) = \{0, 0, 0, \underline{0}, 1, 2, 1, 0, 0\}$$

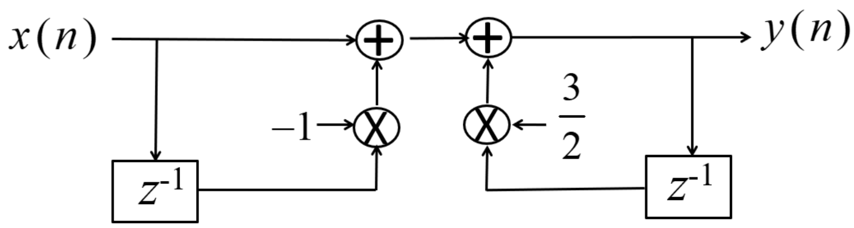
$$y(5) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(1-k) = 3 \qquad x(5-k) = \{0, 0, 0, \underline{0}, 0, 1, 2, 1, 0\}$$

$$y(6) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(6-k) = 1 \qquad x(6-k) = \{0, 0, 0, \underline{0}, 0, 0, 1, 2, 1\}$$

La soluzione corretta è quindi la (c).

(15) **8a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Ricavare la risposta all'impulso del filtro numerico descritto dal seguente schema a blocchi:



a. $h[n] = \delta[n] + u[n-1]\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
b. $h[n] = u[n] - \frac{3}{2}u[n-1]$
c. $h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}u[n-1]\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$
d. nessuna delle altre risposte è corretta
e. $h[n] = \frac{1}{2}u[n]\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$

Soluzione

La relazione ingresso/uscita corrispondente allo schema a blocchi del filtro è:

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{3}{2}y[n-1]$$

La trasformata zeta della relazione ingresso uscita è:

$$Y(z) = X(z) - X(z)z^{-1} + \frac{3}{2}Y(z)z^{-1} \quad \rightarrow \quad \left[1 - \frac{3}{2}z^{-1}\right]Y(z) = \left[1 - z^{-1}\right]$$

La funzione di trasferimento $H(z)$ vale quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}} - z^{-1}\frac{1}{1-\frac{3}{2}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n} u(n) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

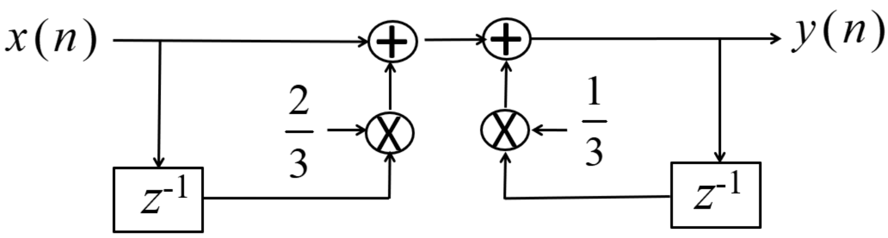
Sostituendo $u(n)$ con $\delta(n) + u(n-1)$:

$$h(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n}[\delta(n) + u(n-1)] - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n}\delta(n) + \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1) =$$

$$= \delta(n) + \left[\frac{3}{2} - 1\right]\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1) = \delta(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

(16) **8b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Ricavare la risposta all'impulso del filtro numerico descritto dal seguente schema a blocchi:



a. $h[n] = \delta[n] + u[n-1]\frac{1}{3^{(n-1)}}$
b. $h[n] = \delta[n] - u[n]\frac{1}{3^{n}}$
c. nessuna delle altre risposte è corretta
d. $h[n] = \frac{1}{3^{n}}u[n]$

e. $h[n] = \left(-\frac{2}{3}\right)^n u[n] - \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} u[n-1]$

Soluzione

La relazione ingresso/uscita corrispondente allo schema a blocchi del filtro è:

$$y[n] = x[n] + \frac{2}{3}x[n-1] + \frac{1}{3}y[n-1]$$

La trasformata zeta della relazione ingresso uscita è:

$$Y(z) = X(z) + \frac{2}{3}X(z)z^{-1} + \frac{1}{3}Y(z)z^{-1} \quad \rightarrow \quad \left[1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right]Y(z) = \left[1 + \frac{2}{3}z^{-1}\right]$$

La funzione di trasferimento $H(z)$ vale quindi:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + \frac{2}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{2}{3}z^{-1}\frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Antitrasformando:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Sostituendo $u(n)$ con $\delta(n) + u(n-1)$:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n [\delta(n) + u(n-1)] + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \delta(n) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) =$$

$$= \delta(n) + \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right]\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1) = \delta(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} u(n-1)$$

(17) **9a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Un processo gaussiano bianco stazionario $N(t)$, con densitá spettrale di potenza $N_0/2 = 1$, è filtrato con un filtro con funzione di trasferimento $H_1(f) = \Pi_2(f)$ producendo il processo $X(t)$. Il processo $X'(t) = X(t) + 2$ è filtrato con un filtro con funzione di trasferimento $H_2(f) = \sqrt{\Lambda(f)}$ producendo il processo $Y(t)$.

$\Pi_2(t)$ è la porta simmetrica di supporto [-1,1], mentre $\Lambda(t)$ è la funzione triangolare simmmetrica di supporto [-1,1].

Calcolare media μ_Z e la varianza σ_Z^2 della processo $Z(t) = Y(t) + Y(t + 0.5)$

Indicare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

a. $\mu_Z = 4$, $\sigma_Z^2 = 2$
b. $\mu_Z = 0$, $\sigma_Z^2 = 2$
c. $\mu_Z = 0$, $\sigma_Z^2 = 2(1 + \text{sinc}^2(0.5)) - 16$
d. $\mu_Z = 2$, $\sigma_Z^2 = 2(1 + \text{sinc}^2(0.5)) + 8$
e. $\mu_Z = 4$, $\sigma_Z^2 = 2(1 + \text{sinc}^2(0.5))$
f. $\mu_Z = 4$, $\sigma_Z^2 = 1 + \text{sinc}(0.5)$

Soluzione 7835:

Il processo $X(t)$ ha media nulla, perche $N(t)$ ha media nulla, quindi $X'(t)$ ha media 2. La media di $Y(t)$ é quindi pari a $\mu_Y = 2H_2(0) = 2$, per ogni t. La media di $Z(t)$ é quindi pari a $\mu_Z = 4$, per ogni t.

Calcolo la funzione di autocorrelazione di $Y(t)$:

$$S_Y(f) = \left(\frac{N_0}{2}|H_1(f)|^2 + 4\delta(f)\right)|H_2(f)|^2 = \frac{N_0}{2}\Lambda(f) + 4\delta(f)|\Lambda(0)|^2 = \Lambda(f) + 4\delta(f)$$

$$R_Y(\tau) = F^{-1}(S_Y(f)) = \text{sinc}^2(\tau) + 4$$

Si noti che la porta $\Pi_2(f)$ non tronca la funzione triangolare $\Lambda(f)$ e quindi non altera il risultato

$$E\{Z(t)^2\} = E\{Y(t)^2\} + E\{Y(t+0.5)^2\} + 2E\{Y(t)Y(t+0.5)\} = 2R_Y(0) + 2R_Y(0.5) = 2(R_Y(0) + R_Y(0.5))$$

$$\sigma_Z^2 = E\{Z(t)^2\} - \mu_Z^2 = 2(\text{sinc}^2(0) + 4 + \text{sinc}^2(0.5) + 4) - 16$$

$$= 2(\text{sinc}^2(0) + \text{sinc}^2(0.5)) = 2(1 + \text{sinc}^2(0.5))$$

(18) **9b** Risposta multipla | Una sola alternativa

Un processo gaussiano bianco stazionario $N(t)$, con densitá spettrale di potenza $N_0/2 = 2$, è filtrato con un filtro con funzione di trasferimento $H_1(f) = \Pi_2(f)$ producendo il processo $X(t)$. Il processo $X'(t) = X(t) + 3$ è filtrato con un filtro con funzione di trasferimento $H_2(f) = 2\sqrt{\Lambda(f)}$ producendo il processo $Y(t)$. $\Pi_2(t)$ è la porta simmetrica di supporto [-1,1], mentre $\Lambda(t)$ è la funzione triangolare simmmetrica di supporto [-1,1].

Calcolare media μ_Z e la varianza σ_Z^2 della processo $Z(t) = Y(t) + Y(t - 0.5)$

Indicare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

a. $\mu_Z = 12$, $\sigma_Z^2 = 8(1 + \mathrm{sinc}^2(0.5))$
b. $\mu_Z = 6$, $\sigma_Z^2 = 4(1 + \mathrm{sinc}^2(0.5)) + 16$
c. $\mu_Z = 0$, $\sigma_Z^2 = 2$
d. $\mu_Z = 9$, $\sigma_Z^2 = 2$
e. $\mu_Z = 0$, $\sigma_Z^2 = 8(1 + \mathrm{sinc}^2(0.5)) - 144$
f. $\mu_Z = 4$, $\sigma_Z^2 = 1 + \mathrm{sinc}(0.5)$

Soluzione:
Il processo $X(t)$ ha media nulla quindi $X'(t)$ ha media 3. La media di $Y(t)$ é quindi pari a $\mu_Y = 3H_2(0) = 6$, per ogni t. La media di $Z(t)$ é quindi pari a $\mu_Z = 12$, per ogni t.

Calcolo la funzione di autocorrelazione di $Y(t)$:

$$\begin{aligned}
S_Y(f) &= \left(\frac{N_0}{2}|H_1(f)|^2 + 9\delta(f)\right)|H_2(f)|^2 = \frac{N_0}{2}2\Lambda(f) + 9\delta(f)|\Lambda(0)|^2 = 4\Lambda(f) + 36\delta(f) \\
R_Y(\tau) &= F^{-1}(S_Y(f)) = 2\mathrm{sinc}^2(\tau) + 36
\end{aligned}$$

Si noti che la porta $\Pi_2(f)$ non tronca la funzione triangolare $\Lambda(f)$ e quindi non altera il risultato

$$\begin{aligned}
E\{Z(t)^2\} &= E\{Y(t)^2\} + E\{Y(t+0.5)^2\} + 2E\{Y(t)Y(t+0.5)\} = 2R_Y(0) + 2R_Y(0.5) = 2(R_Y(0) + R_Y(0.5)) \\
\sigma_Z^2 &= E\{Z(t)^2\} - \mu_Z^2 = 2(4\mathrm{sinc}^2(0) + 36 + 4\mathrm{sinc}^2(0.5) + 36) - 144 \\
&= 8(\mathrm{sinc}^2(0) + \mathrm{sinc}^2(0.5)) = 8(1 + \mathrm{sinc}^2(0.5))
\end{aligned}$$

(19) **10a** Risposta multipla | Una sola alternativa

Considerare il processo casuale $y(t) = x^2(t)$, dove $x(t)$ è un processo stazionario con densità di probabilità del primo ordine pari a

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{per } -3 \le x \le -1 \\ \frac{1}{4} & \text{per } 1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Indicare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

a. $y(t)$ ha varianza pari a 244/45.
b. $y(t)$ ha varianza pari a 121/5 e valor medio pari a 13/3.
c. $y(t)$ ha valor medio pari a 4.
d. $y(t)$ ha varianza pari a 121/5 e valor medio pari a 0.
e. $y(t)$ non è stazionario per la media.

Soluzione:
Il processo $x(t)$ é stazionario in senso stretto del prim'ordine, perche la sua distribuzione non dipende da t. Lo stesso vale per $y(t)$.

Calcoliamo direttamente la varianza, come differenza del valore quadratico medio con la media al quadrato.

$$E\{y(t)\} = E\{x^2(t)\} = \int x^2 f_X(x)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{-1} + \frac{x^3}{3}\Big|_{1}^{3} \right) = \frac{13}{3}$$

$$E\{y^2(t)\} = E\{x^4(t)\} = \int x^5 f_X(x)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{x^5}{5}\Big|_{-3}^{-1} + \frac{x^5}{5}\Big|_{1}^{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{242}{5} = \cdot \frac{121}{5}$$

$$\sigma_y^2 = E\{y^2(t)\} - E^2\{y(t)\} = \frac{121}{5} - \frac{169}{9} = \frac{244}{45}$$

Fine Soluzione.

(20) **832** Risposta multipla | Una sola alternativa

Considerare il processo casuale $y(t) = |x(t)|$, dove $x(t)$ è un processo stazionario con densità di probabilità del primo ordine pari a

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{per } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Indicare quale delle seguenti affermazioni è corretta.

a. $y(t)$ ha varianza pari a 1/6, e valor medio pari ad 1/3.
b. $y(t)$ ha varianza pari a 1/18.
c. $y(t)$ ha varianza pari a 1/18, e valor medio pari ad 0.
d. $y(t)$ non è stazionario per la media.
e. $y(t)$ ha valor medio nullo.

Soluzione 10b
Il processo $x(t)$ śtazionario in senso stretto del prim'ordine, perche la sua distribuzione non dipende da t. Lo stesso vale per $y(t)$

Calcoliamo direttamente la varianza.

$$E\{y(t)\} = E\{|x(t)|\} = \int |x| f_X(x)dx = 2\int_0^1 x(1-x)dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$E\{y^2(t)\} = E\{|x(t)|^2\} = 2\int_0^1 x^2(1-x)dx = 2\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$\sigma_y^2 = E\{y^2(t)\} - E^2\{y(t)\} = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{3}{54} = \frac{1}{18}$$