Quiz TEORIA appello 4 Luglio 2022

1. **4 Luglio 2022 QTCa**

   Si consideri un segnale periodico $x(t)$ con periodo $T_p = 1$ms, costituito dalla ripetizione di una porta nel tempo $p_{T_d}(t)$ di durata $T_d = 3$ns. Il segnale $x(t)$ è inviato ad un filtro passabasso ideale con una banda $B = 2.5$ kHz (cioè un filtro con funzione di trasferimento pari a 1 per $f \in [-B, +B]$ e zero altrove), dando luogo al segnale $y(t)$.

   Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 5 righe spettrali non nulle ✓
   (b) il segnale $y(t)$ non è periodico
   (c) il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 3 righe spettrali non nulle
   (d) il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 4 righe spettrali non nulle

   Soluzione
   Il segnale $x(t)$, essendo periodico, ha uno spettro costituito da righe spettrali (delta) spaziate di 1kHz, e vista l'espressione di $p_{T_d}(t)$ le righe a "bassa frequenza" sono tutte non nulle. Il filtraggio mantiene la periodicità e vista la forma del filtro passabasso ideale vengono annullate tutte le righe spettrali a frequenza $f > B$ con $B = 2.5$ kHz. Rimangono dunque 5 righe spettrali non nulle.

2. **4 Luglio 2022 QTCb**

   Si consideri un segnale periodico $x(t)$ con periodo $T_p = 1$ms, costituito dalla ripetizione di una porta nel tempo $p_{T_d}(t)$ di durata $T_d = 5$ns. Il segnale $x(t)$ è inviato ad un filtro passabasso ideale con una banda $B = 3.5$ kHz (cioè un filtro con funzione di trasferimento pari a 1 per $f \in [-B, +B]$ e zero altrove), dando luogo al segnale $y(t)$.

   Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 7 righe spettrali non nulle ✓
   (b) il segnale $y(t)$ non è periodico
   (c) il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 5 righe spettrali non nulle
   (d) il segnale $y(t)$ è periodico e il suo spettro è costituito da 4 righe spettrali non nulle

   Soluzione
   Valgono le stesse considerazioni della versione precedente dell'esercizio, salvo che qui $B = 3.5$ kHz e dunque "sopravvivono" al filtraggio 7 righe spettrali.

3. **4 Luglio 2022 QPCa**

   Un processo casuale $n(t)$ stazionario in senso lato ha una densità di probabilità del primo ordine uniforme nell'intervallo $[-2B; +2B]$ e spettro di potenza $S_n(f) = \frac{N_0}{2} \cdot p_{4A}(f)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) la media di $n(t)$ è nulla e vale la relazione $A = \dfrac{2B^2}{3N_0}$ ✓
   (b) la media di $n(t)$ è pari a B vale la relazione $A = \dfrac{2B^2}{3N_0}$
   (c) la media di $n(t)$ è nulla e vale la relazione $A = \dfrac{2B}{3N_0}$
   (d) la media di $n(t)$ è nulla e vale la relazione $A = \dfrac{B^2}{3N_0}$
   (e) Nessuna delle altre risposte è corretta

   Soluzione
   Iniziamo ad osservare che il processo in questione ha una densità di probabilità con media nulla. Inoltre abbiamo i dati per calcolare la varianza secondo due diverse modalità che ovviamente devono portare allo stesso risultato.

   La varianza calcolata sulla densità di probabilità è pari a $\dfrac{4B^2}{3}$

   La varianza calcolata come integrale dello spettro di potenza è pari a $2AN_0$

   Uguagliando le due quantità si ottiene la condizione $A = \dfrac{2B^2}{3N_0}$

4. **4 Luglio 2022 QPCb**

   Un processo casuale $n(t)$ stazionario in senso lato ha una densità di probabilità del primo ordine uniforme nell'intervallo $[-3B; +3B]$ e spettro di potenza $S_n(f) = \frac{N_0}{2} \cdot p_{3A}(f)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

   (a) la media di $n(t)$ è nulla e vale la relazione $A = \dfrac{2B^2}{N_0}$ ✓
   (b) la media di $n(t)$ è pari a B vale la relazione $A = \dfrac{B^2}{N_0}$

(c) la media di $n(t)$ è nulla e vale la relazione $A = \dfrac{2B}{3N_0}$
(d) la media di $n(t)$ è nulla e vale la relazione $A = \dfrac{B^2}{3N_0}$
(e) Nessuna delle altre risposte è corretta

Soluzione
Valgono le stesse considerazioni della versione precedente dell'esercizio, salvo che qui:

La varianza calcolata sulla densità di probabilità è pari a $3B^2$

La varianza calcolata come integrale dello spettro di potenza è pari a $\dfrac{3AN_0}{2}$

Uguagliando le due quantità si ottiene la condizione $A = \dfrac{2B^2}{N_0}$

5. **4 Luglio 2022**

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ che abbia una trasformata zeta $X(z)$ razionale. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo
(b) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo
(c) per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo
(d) per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo ✓

Soluzione
Si tratta di un quesito direttamente legato alla teoria vista a lezione per le regioni di convergenza e la risposta esatta è: per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo

6. **4 Luglio 2022**

Si consideri un segnale a tempo discreto $x[n]$ che abbia una trasformata zeta $X(z)$ razionale. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo
(b) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'esterno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo minimo
(c) per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'esterno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo ✓
(d) per un segnale $x[n]$ anti-causale la regione di convergenza è l'interno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo

Soluzione
Si tratta di un quesito direttamente legato alla teoria vista a lezione per le regioni di convergenza e la risposta esatta è: per un segnale $x[n]$ causale la regione di convergenza è l'esterno di una circonferenza il cui raggio è pari al polo di modulo massimo

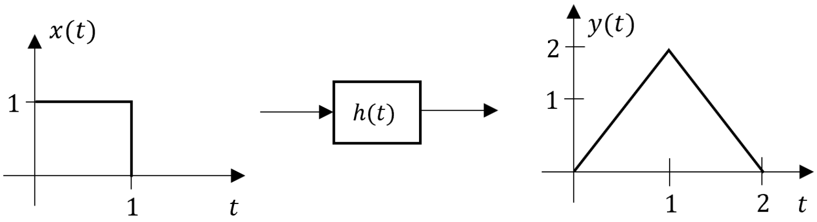
TC-01

1. **TC-01a**

MULTI | 1 point | 0.10 penalty | Single | Shuffle

Il sistema LTI rappresentato in figura fornisce in uscita il segnale $y(t)$ quando al suo ingresso viene posto il segnale $x(t)$. Si consideri ora l'uscita del sistema quando al suo ingresso viene posto il segnale $z(t) = e^{-t}p_2(t-1)$ per ottenere il segnale $w(t)$, essendo $p_\alpha(t) = 1$ per $|t| < \alpha/2$ e 0 altrove.

Il massimo del segnale di uscita $w(t)$ vale:



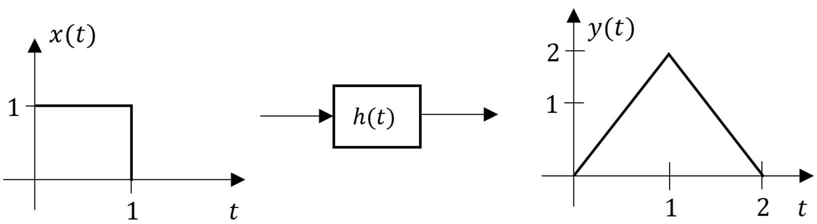
(a) $\max\{w(t)\} = 2(1 - e^{-1})$
(100%)
(b) $\max\{w(t)\} = \frac{2}{e}(1 - e^{-2})$
(−10%)
(c) $\max\{w(t)\} = e^{-1}$
(−10%)
(d) $\max\{w(t)\} = 2e^{-1}$
(−10%)
(e) $\max\{w(t)\} = 1 - e^{-1}$
(−10%)
(f) Nessuna delle altre risposte
(−10%)

2. **TC-01b**

MULTI | 1 point | 0.10 penalty | Single | Shuffle

Il sistema LTI rappresentato in figura fornisce in uscita il segnale $y(t)$ quando al suo ingresso viene posto il segnale $x(t)$. Si consideri ora l'uscita del sistema quando al suo ingresso viene posto il segnale $z(t) = e^{-(t+1)}p_4(t-2)$ per ottenere il segnale $w(t)$, essendo $p_\alpha(t) = 1$ per $|t| < \alpha/2$ e 0 altrove.

Il massimo del segnale di uscita $w(t)$ vale:



(a) $\max\{w(t)\} = 2(1 - e^{-1})$
(−10%)
(b) $\max\{w(t)\} = \frac{2}{e}(1 - e^{-2})$
(100%)
(c) $\max\{w(t)\} = \frac{2}{e}$
(−10%)
(d) $\max\{w(t)\} = 2e^{-2}$
(−10%)
(e) $\max\{w(t)\} = (1 - e^{-2})$
(−10%)
(f) Nessuna delle altre risposte
(−10%)

Total of marks: 2

Soluzione TC-01a

I segnali in figura e le loro trasformate di Fourier si possono scrivere come:

$$x(t) = p_1(t-1/2) \rightarrow X(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{-j\pi f}$$

$$y(t) = 2tri(t-1) \rightarrow Y(f) = 2\frac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2} e^{-j2\pi f}$$

La funzione di trasferimento vale dunque

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{2\frac{\sin^2(\pi f)}{(\pi f)^2} e^{-j2\pi f}}{\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{-j\pi f}} = 2\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{-j\pi f}$$

e

$$h(t) = 2p_1(t-1/2)$$

Considerando ora il segnale di ingresso $z(t) = e^{-t}p_2(t-1)$ (VERSIONE A)

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

che assume un massimo quando t=1

$$\max\{w(t)\} = 2\int_0^1 e^{-\tau}d\tau = 2\ e^{-\tau}\big|_1^0 = 2(1-e^{-1})$$

Considerando ora il segnale di ingresso $z(t) = e^{-(t+1)}p_2(t-2) = \frac{1}{e}e^{-t}p_4(t-2)$ (VERSIONE B)

$$w(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

che assume un massimo quando t=1

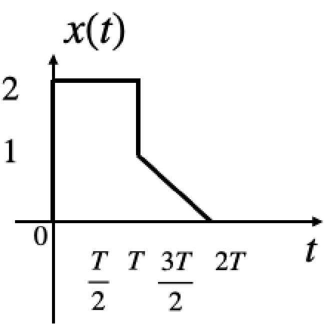
$$\max\{w(t)\} = 2\frac{1}{e}\int_0^1 e^{-\tau}d\tau = \frac{2}{e}\ e^{-\tau}\big|_1^0 = \frac{2}{e}(1-e^{-1})$$

TC-02a

1. **TC-02a**

   MULTI | 1 point | 0.10 penalty | Single | Shuffle

   Si consideri il segnale $x(t)$ rappresentato in figura



   e si calcoli la trasformata di Fourier del segnale

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-3nT) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(3mT-t)$$

   Quale delle seguenti affermazioni é VERA?

   (a) La trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ é nulla in $f = \pm\frac{1}{T}$ (100%)
   (b) La trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ é nulla in $f = \pm\frac{2}{3T}$ (-10%)
   (c) La trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ é nulla in $f = \pm\frac{5}{3T}$ (-10%)

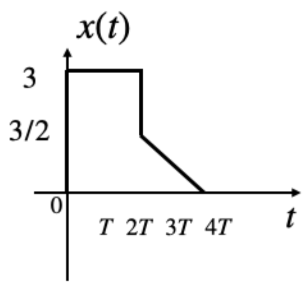
(d) Il modulo della trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ non é mai nullo $\forall f$ (-20%)

(e) nessuna delle altre risposte é vera (-10%)

2. **TC-02b**

MULTI | 1 point | 0.10 penalty | Single | Shuffle

Si consideri il segnale $x(t)$ rappresentato in figura



e si calcoli la trasformata di Fourier del segnale

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t-6nT) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(6mT-t)$$

Quale delle seguenti affermazioni é VERA?

(a) La trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ é nulla in $f = \pm\frac{1}{2T}$ (100%)

(b) La trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ é nulla in $f = \pm\frac{2}{3T}$ (-10%)

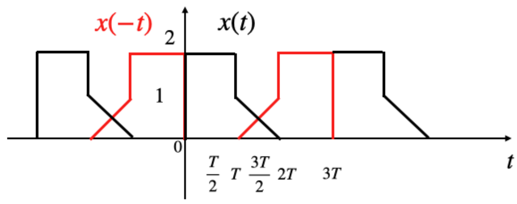
(c) La trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ é nulla in $f = \pm\frac{1}{6T}$ (-10%)

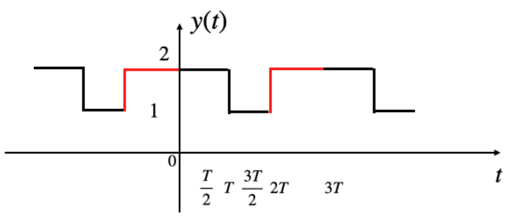
(d) Il modulo della trasformata di Fourier del segnale $y(t)$ non é mai nullo $\forall f$ (-20%)

(e) nessuna delle altre risposte é vera (-10%)

Solution TC-02a

Il segnale $y(t)$ é periodico e risulta essere come in figura





Il segnale si puó scrivere come

$$y(t) = 1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{2T}(t-3kT)$$

da cui

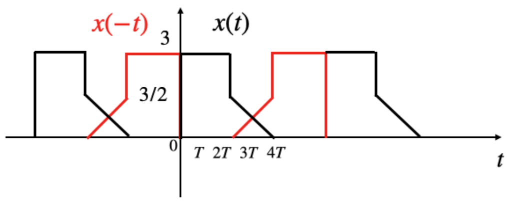
$$Y(f) = \delta(f) + \frac{1}{3T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left.\frac{\sin(2\pi fT)}{\pi f}\right|_{f=\frac{k}{3T}} \delta(f-\frac{k}{3T})$$

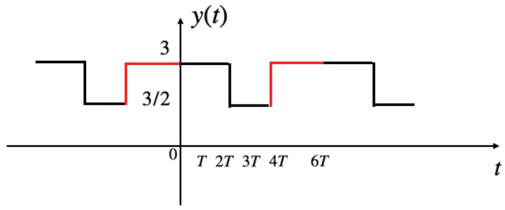
$$Y(f) = \delta(f) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\frac{k}{3})}{\pi k}\delta(f-\frac{k}{3T})$$

da cui si vede che per i $k = \pm 3$ la riga dello spettro in $\pm\frac{1}{T}$ ha coefficiente nullo

Solution TC-02b

Il segnale $y(t)$ é periodico e risulta essere come in figura





Il segnale si puó scrivere come

$$y(t) = \frac{3}{2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_{4T}(t - 6kT)$$

da cui

$$Y(f) = \frac{3}{2}\delta(f) + \frac{1}{6T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(4\pi f T)}{\pi f}\bigg|_{f=\frac{k}{6T}} \delta(f - \frac{k}{6T})$$

$$Y(f) = \delta(f) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\frac{k}{3})}{\pi k}\delta(f - \frac{k}{6T})$$

da cui si vede che per i $k = \pm 3$ la riga dello spettro in $\pm\frac{1}{T}$ ha coefficiente nullo

Total of marks: 4

TC-03

1. **TC-03b**

   MULTI | 1 point | 0.10 penalty | Single | Shuffle

   Si consideri il segnale a tempo continuo $y(t) = 2x(t)\cos^2(2\pi B_x t) + x(2t - 1)$, in cui $x(t)$ ha uno spettro $X(f)$ a banda limitata,

   $$X(f) \begin{cases} \neq 0, & \text{if } |f| < B_x \\ = 0, & \text{if } |f| > B_x \end{cases}$$

   La minima frequenza di campionamento f_s che permette la perfetta ricostruzione di $y(t)$ a partire dai suoi campioni vale

   (a) $f_s = 6B_x$ (100%)
   (b) $f_s = 8B_x$ (−10%)
   (c) $f_s = 10B_x$ (−10%)
   (d) $f_s = 4B_x$ (−10%)
   (e) nessuna delle altre risposte (−20%)

2. **TC-03b**

   MULTI | 1 point | 0.10 penalty | Single | Shuffle

   Si consideri il segnale a tempo continuo $y(t) = 2x(t)\cos^2(4\pi B_x t) + x(2t - 1)$, in cui $x(t)$ ha uno spettro $X(f)$ a banda limitata,

   $$X(f) \begin{cases} \neq 0, & \text{if } |f| < B_x \\ = 0, & \text{if } |f| > B_x \end{cases}$$

   La minima frequenza di campionamento f_s che permette la perfetta ricostruzione di $y(t)$ a partire dai suoi campioni vale

(a) $f_s = 6B_x$ (-10%)
(b) $f_s = 8B_x$ (-10%)
(c) $f_s = 10B_x$ (100%)
(d) $f_s = 4B_x$ (-20%)
(e) Nessuna delle altre risposte (-10%)

Total of marks: 6

SOLUZIONE

$$y(t) = 2x(t)\cos^2(2\pi B_x t) + x(2t-1) = x(t)(1+\cos(4\pi B_x t)) + x(t-1) \tag{1}$$

Hence

$$Y(f) = X(f) * \left[\delta(f) + \frac{1}{2}\delta(f-2B_x) + \frac{1}{2}\delta(f+2B_x)\right] + \frac{1}{2}X(f/2)e^{-j\pi f} \tag{2}$$

$$= X(f) + \frac{1}{2}X(f-2B_x) + \frac{1}{2}X(f+2B_x) + \frac{1}{2}X(f/2)e^{-j\pi f} \; . \tag{3}$$

Il termine ha banda $2B_x$ (scalamento nel tempo) e il ritardo non influisce sulla banda del segnale $\frac{1}{2}X(f/2)e^{-j\pi f}$ che viene determinata dal termine con le più alte frequenze nel suo spettro

$$B_y = 2B_x + B_x = 3B_x \; . \tag{4}$$

da cui f_s vale

$$f_s = 2B_y = 6B_x \; . \tag{5}$$

QuizTempo discreto - appello 4 Luglio 2022

1. **Luglio 2022 - TD1 - Versione A**

   Un filtro numerico, con risposta all'impulso $h_1[n]$, è ottenuto connettendo in serie i filtri con risposte all'impulso $g_1[n]$ e $g_2[n]$. Un altro filtro numerico, con risposta all'impulso $h_2[n]$, è ottenuto connettendo i filtri $g_1[n]$ e $g_2[n]$ in parallelo in modo che: $h_2[n] = A_1 g_1[n] + A_2 g_2[n]$ dove A_1 e A_2 sono costanti.

   Siano $g_1[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ e $g_2[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Le costanti A_1 e A_2 che rendono i filtri $h_1[n]$ e $h_2[n]$ equivalenti valgono:

   (a) $A_1 = \frac{2}{3}$, $A_2 = \frac{1}{3}$ ✓
   (b) $A_1 = \frac{4}{3}$, $A_2 = -\frac{4}{3}$
   (c) $A_1 = \frac{3}{4}$, $A_2 = \frac{1}{4}$
   (d) $A_1 = e^{j\pi}$, $A_2 = e^{-j\frac{\pi}{2}}$
   (e) $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$
   (f) Nessuna delle altre risposte è corretta.

   Soluzione

   Siccome $g_1[n]$ e $g_2[n]$ sono connessi in serie, la risposta all'impuòso del primo filtro è data da: $h_1[n] = g_1[n] * g_2[n]$. Nel dominio della trasformata zeta: $H_1(z) = G_1(z) \cdot G_2(z)$, con:

   $$G_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \qquad G_2(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}.$$

   La trasformata zeta di $h_2[n]$ è pari a: $H_2(z) = A_1 G_1(z) + A_2 G_2(z)$.

   I due filtri sono equivalenti se $H_1(z) = H_2(z)$, ossia se:

   $$\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} = A_1 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

   I coefficienti A_1 e A_2 corrispondono ai residui della scomposizione in fratti semplici della funzione $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$:

   $$R_1 = \left.\frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}\right|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \cdot 2} = \frac{2}{3}$$

   $$R_2 = \left.\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}\right|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \cdot 4} = \frac{1}{3}$$

2. **Luglio 2022 - TD1 - Versione B**

   Un filtro numerico, con risposta all'impulso $h_1[n]$, è ottenuto connettendo in serie i filtri con risposte all'impulso $g_1[n]$ e $g_2[n]$. Un altro filtro numerico, con risposta all'impulso $h_2[n]$, è ottenuto connettendo i filtri $g_1[n]$ e $g_2[n]$ in parallelo in modo che: $h_2[n] = A_1 g_1[n] + A_2 g_2[n]$ dove A_1 e A_2 sono costanti.

   Siano $g_1[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n u[n]$ e $g_2[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Le costanti A_1 e A_2 che rendono i filtri $h_1[n]$ e $h_2[n]$ equivalenti valgono:

   (a) $A_1 = \frac{3}{4}$, $A_2 = \frac{1}{4}$ ✓
   (b) $A_1 = \frac{2}{3}$, $A_2 = \frac{1}{3}$
   (c) $A_1 = 1$, $A_2 = -1$
   (d) $A_1 = e^{j\frac{3}{2}\pi}$, $A_2 = e^{j\frac{\pi}{2}}$
   (e) $A_1 = A_2 = \frac{1}{2}$
   (f) Nessuna delle altre risposte è corretta.

   Soluzione

   Siccome $g_1[n]$ e $g_2[n]$ sono connessi in serie, la risposta all'impuòso del primo filtro è data da: $h_1[n] = g_1[n] * g_2[n]$. Nel dominio della trasformata zeta: $H_1(z) = G_1(z) \cdot G_2(z)$, con:

   $$G_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \qquad G_2(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}.$$

   La trasformata zeta di $h_2[n]$ è pari a: $H_2(z) = A_1 G_1(z) + A_2 G_2(z)$.

   I due filtri sono equivalenti se $H_1(z) = H_2(z)$, ossia se:

   $$\frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} = A_1 \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1}} + A_2 \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

I coefficienti A_1 e A_2 corrispondono ai residui della scomposizione in fratti semplici della funzione $\frac{1}{\left(1-\frac{3}{4}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$:

$$R_1 = \left.\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\right|_{z=\frac{3}{4}} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$R_2 = \left.\frac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}\right|_{z=-\frac{1}{4}} = \frac{1}{1+\frac{3}{4}\cdot 4} = \frac{1}{4}$$

3. **Luglio 2022 - TD2 - Versione A**

Si consideri la seguente sequenza $x[n]$ di $N=9$ campioni:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \frac{1}{2} & n=3,6 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli $X[k] = DFT\{x[n]\}$, per $k=0,...,8$.

(a) $X[k] = \cos\left(\frac{2}{3}\pi k\right) + 1$ ✓
(b) $X[k] = 1 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4}{3}\pi k\right)$
(c) $X[k] = 1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2}{3}\pi k\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{4}{3}\pi k\right)$
(d) $X[k] = \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-3] + \frac{1}{2}\delta[k-6]$
(e) $X[k] = \frac{1}{2}e^{-j\frac{2}{3}\pi k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{4}{3}\pi k}$
(f) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione

La DFT della sequenx $x[n]$ su N punti è definita come:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\frac{n\cdot k}{N}} \quad \text{per} k = 0,...,N-1$$

In questo caso, $N=9$ e solo i campioni in 0, 3 e 6 sono diversi da zero:

$$X(k) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\frac{3}{9}k} + \frac{1}{2}e^{-j2\pi\frac{6}{9}k} = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2}{3}\pi k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{4}{3}\pi k}$$

Tenedo conto che $e^{j2\pi k} = 1$, l'espressione precedente si può riscrivere come:

$$X(k) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2}{3}\pi k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{4}{3}\pi k}\cdot e^{j2\pi k} = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2}{3}\pi k} + \frac{1}{2}e^{+j\frac{2}{3}\pi k} = 1 + \cos\left(\frac{2}{3}\pi k\right).$$

(anche la risposta (c) è corretta, in quanto $\cos\left(\frac{2}{3}\pi k\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi k\right)$).

4. **Luglio 2022 - TD2 - Versione B**

Si consideri la seguente sequenza $x[n]$ di $N=8$ campioni:

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \frac{1}{2} & n=3,5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si calcoli $X[k] = DFT\{x[n]\}$, per $k=0,...,7$.

(a) $X[k] = \cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right) + 1$ ✓
(b) $X[k] = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{5}{4}\pi k\right)$
(c) $X[k] = 1 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{5}{4}\pi k\right)$
(d) $X[k] = \delta[k] + \frac{1}{2}\delta[k-3] + \frac{1}{2}\delta[k-5]$
(e) $X[k] = \frac{1}{2}e^{-j\frac{3}{4}\pi k} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{5}{4}\pi k}$
(f) Nessuna delle altre risposte è corretta.

Soluzione

La DFT della sequenx $x[n]$ su N punti è definita come:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi\frac{n\cdot k}{N}} \quad \text{per} k = 0,...,N-1$$

In questo caso, $N = 8$ e solo i campioni in 0, 3 e 5 sono diversi da zero:

$$X(k) = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{3}{8}k} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\frac{5}{8}k} = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi k} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5}{4}\pi k}$$

Tenedo conto che $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k} = 1$, l'espressione precedente si può riscrivere come:

$$X(k) = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi k} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{5}{4}\pi k} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k} = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi k} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{+\mathrm{j}\frac{3}{4}\pi k} = 1 + \cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right).$$

(anche la risposta (c) è corretta, in quanto $\cos\left(\frac{3}{4}\pi k\right) = \cos\left(\frac{5}{4}\pi k\right)$).

Processi Casuali Luglio 2022.

1. **565**

MULTI | 1 point | 0.10 penalty | Single | Shuffle

Si consideri il processo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k s(t - kT) + n(t)$$

dove $n(t)$ è un processo gaussiano con densità spettrale di potenza $S_n(f) = N_0/2$ per $|f| \leq B$ e $S_n(f) = 0$ altrove; $s(t)$ è un impulso rettangolare che vale 1 per $0 \leq t < T$ e 0 altrove; le variabili casuali α_k sono statisticamente indipendenti fra loro, indipendenti da $n(t)$, ed assumono in modo equiprobabile i valori $[0, A, 2A, 3A]$. Si consideri la generica variabile casuale ottenuta campionando il processo negli istanti di tempo $t_n = nT + T/2$:

$$x_n = x(t_n) = x(nT + T/2)$$

Nel caso $A = 1$, la varianza di x_n vale

(a) $5/4 + N_0B$ (100%)
(b) $7/2 + N_0B$ (−10%)
(c) $7/2$ (−10%)
(d) N_0B (−10%)
(e) Nessuna delle altre risposte è corretta (−10%)

2. **566**

MULTI | 1 point | 0.10 penalty | Single | Shuffle

Si consideri il processo

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k s(t - kT) + n(t)$$

dove $n(t)$ è un processo gaussiano con densità spettrale di potenza $S_n(f) = N_0/2$ per $|f| \leq B$ e $S_n(f) = 0$ altrove; $s(t)$ è un impulso rettangolare che vale 1 per $0 \leq t < T$ e 0 altrove; le variabili casuali α_k sono statisticamente indipendenti fra loro, indipendenti da $n(t)$ ed assumono in modo equiprobabile i valori $[0, A, 2A, 3A]$. Si consideri la generica variabile casuale ottenuta campionando il processo negli istanti di tempo $t_n = nT + T/2$:

$$x_n = x(t_n) = x(nT + T/2)$$

Nel caso $A = 0.5$, la varianza di x_n vale

(a) $5/16 + N_0B$ (100%)
(b) $7/8 + N_0B$ (−10%)
(c) $7/8$ (−10%)
(d) N_0B (−10%)
(e) Nessuna delle altre risposte è corretta (−10%)

Soluzione 565:
Calcoliamo la varianza facendo la differenza tra valore quadratico medio e media al quadrato:

Media:

$$\begin{aligned}
E\{x(t)\} &= E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k s(nT + T/2 - kT) + n(nT + T/2) \right\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} E\{\alpha_k\} s(nT + T/2 - kT) + E\{n(nT + T/2)\} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}(0 + 1 + 2 + 3) s(nT + T/2 - kT) + 0 = \frac{3}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(nT + T/2 - kT) = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

si noti infatti che $\sum_{k=-\infty}^{\infty} s(nT + T/2 - kT) = 1$.

Valore quadratico medio:

$$
\begin{aligned}
E\{x^2(t)\} &= E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\alpha_k\alpha_j s(nT+T/2-kT)s(nT+T/2-jT)+n^2(nT+T/2)+0+0\right\} \\
&= E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k^2 s^2(nT+T/2-kT)\right\}+E\left\{n^2(nT+T/2)\right\} \\
&= E\left\{\alpha_k^2\right\}\sum_{k=-\infty}^{\infty}s^2(nT+T/2-kT)+E\left\{n^2(nT+T/2)\right\} \\
&= \frac{1}{4}(0^2+1^2+2^2+3^2)+N_0B=\frac{7}{2}+N_0B.
\end{aligned}
$$

si noti infatti che $s(nT+T/2-kT)s(nT+T/2-jT)=0\ \forall k\neq j$ e $\sum_{k=-\infty}^{\infty}s^2(nT+T/2-kT)=1$.
Il secondo termine (valore quadratico medio rumore), si ricava integrando la sua densitá spettrale di potenza:

$$E\{n^2(nT+T/2)\}=\int_{-B}^{B}N_0/2df=BN_0$$

Calcoliamo infine la varianza:

$$E\{x^2(t)\}-E\{x(t)\}^2=\frac{14}{4}+N_0B-\frac{9}{4}=\frac{5}{4}+N_0B$$

Per il secondo esercizio:

$$
\begin{aligned}
E\{\alpha_k^2\} &= \frac{1}{4}(0^2+1^2+2^2+3^2)\frac{1}{4}=\frac{14}{16} \\
E\{\alpha_k\}^2 &= \left(\frac{1}{4}(0+1+2+3)\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{16}.
\end{aligned}
$$

Fine Soluzione.

3. **665**

MULTI | 1 point | 0.10 penalty | Single | Shuffle

Si consideri un processo casuale WSS $X(t)$, e si definisca $Y(t) = X(t)g(t)$, dove $g(t)$ è uno di questi tre segnali periodici

(a) $g_1(t) = \cos(2\pi f_c t)$
(b) $g_2(t) = \sin(2\pi f_c t)$
(c) $g_3(t) = \exp(j2\pi f_c t)$

Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

(a) L'autocorrelazione di $Y(t)$, $R_Y(t, t+\tau)$, dipende solo da τ per $g(t) = g_3(t)$, mentre negli altri casi dipende sia da t che da τ.
(100%)
(b) L'autocorrelazione di $Y(t)$, $R_Y(t, t+\tau)$, dipende solo da τ per $g(t) = g_1(t)$, mentre negli altri casi dipende sia da t che da τ. (-10%)
(c) L'autocorrelazione di $Y(t)$, $R_Y(t, t+\tau)$, dipende solo da τ per $g(t) = g_2(t)$, mentre negli altri casi dipende sia da t che da τ.
(-10%)
(d) L'autocorrelazione di $Y(t)$, $R_Y(t, t+\tau)$, dipende solo da τ in tutti e tre casi. (-10%)
(e) L'autocorrelazione di $Y(t)$, $R_Y(t, t+\tau)$, dipende da t e da τ in tutti e tre casi. (-10%)
(f) Nessuna delle altre risposte è corretta (-10%)

4. **666**

MULTI | 1 point | 0.10 penalty | Single | Shuffle

Si consideri un processo casuale WSS $X(t)$, e si definisca $Y(t) = X(t)g(t)$, dove $g(t)$ è uno di questi tre segnali

(a) $g_1(t) = \mathrm{e}^{-2\pi f_c |t|}$
(b) $g_2(t) = \mathrm{e}^{-2\pi f_c t} u(t)$
(c) $g_3(t) = \exp(j2\pi f_c t)$

Dire quali delle seguenti affermazioni è vera:

(a) L'autocorrelazione di $Y(t)$, $R_Y(t, t+\tau)$, dipende solo da τ per $g(t) = g_3(t)$, mentre negli altri casi dipende sia da t che da τ. (100%)
(b) L'autocorrelazione di $Y(t)$, $R_Y(t, t+\tau)$, dipende solo da τ per $g(t) = g_1(t)$, mentre negli altri casi dipende sia da t che da τ. (-10%)
(c) L'autocorrelazione di $Y(t)$, $R_Y(t, t+\tau)$, dipende solo da τ per $g(t) = g_2(t)$, mentre negli altri casi dipende sia da t che da τ. (-10%)
(d) L'autocorrelazione di $Y(t)$, $R_Y(t, t+\tau)$, dipende solo da τ in tutti e tre casi. (-10%)
(e) L'autocorrelazione di $Y(t)$, $R_Y(t, t+\tau)$, dipende da t e da τ in tutti e tre casi. (-10%)
(f) Nessuna delle altre risposte è corretta (-10%)

Soluzione 665:
Applichiamo la definizione di funzione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned} R_Y(t, t+\tau) &\triangleq E\{Y(t)Y^*(t+\tau)\} = E\{X(t)g(t)X^*(t)g^*(t+\tau)\} \\ &= E\{X(t)X^*(t+\tau)\}g(t)g^*(t+\tau) \\ &= R_X(\tau)g(t)g^*(t+\tau). \end{aligned}$$

Si noti che le funzioni g_i sono deterministiche e che $X(t)$ é WSS.

$$\begin{aligned} g_1(t)g_1^*(t+\tau) &= \cos(2\pi f_c t)\cos(2\pi f_c(t+\tau), \\ g_2(t)g_2^*(t+\tau) &= \sin(2\pi f_c t)\sin(2\pi f_c(t+\tau), \\ g_3(t)g_3^*(t+\tau) &= \exp(j2\pi f_c t)\exp(-j2\pi f_c(t+\tau)) = \exp(-j2\pi f_c \tau). \end{aligned}$$

Solo g_3 (sinusoide complessa) da luogo a un termine che dipende solo da τ.

Fine Soluzione.

Total of marks: 4