Alebra lineare

Giacomo De Liberali

22 dicembre 2015

Indice

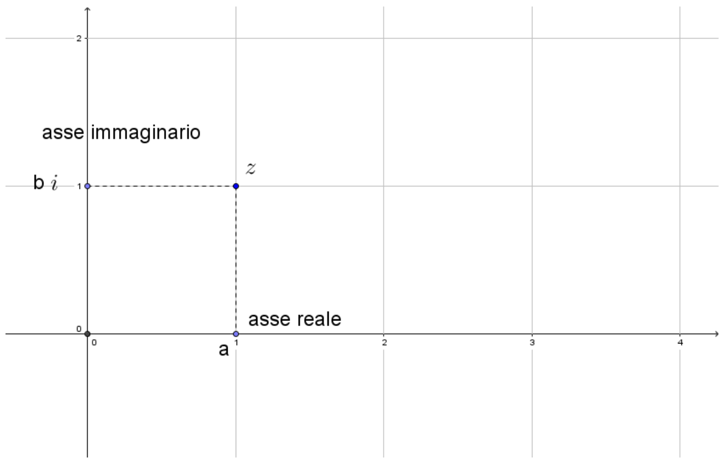
1 Numeri complessi

Un numero complesso è definito come: $z = a + bi$
La parte reale di z è definita come: $Re(z) = a$
La parte immaginaria di z è definita come: $Im(z) = b$
Il modulo (o lunghezza) è definito come: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

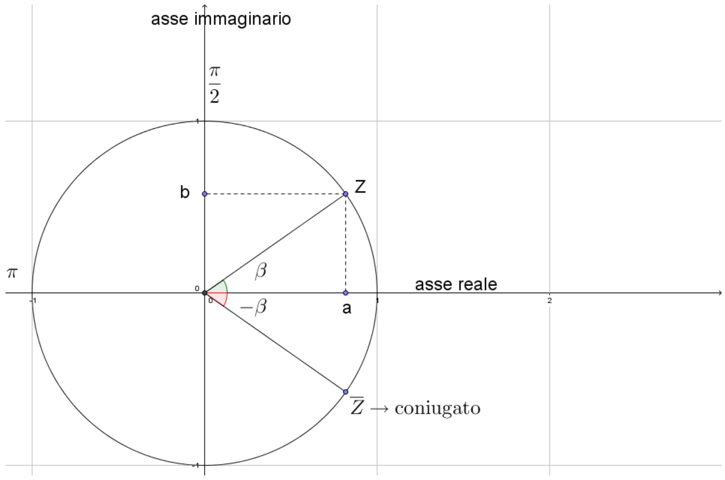
Proprietà

- coniugato $\rightarrow \overline{z} = a - bi$
- $\overline{z} \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$
- $z + \overline{z} = 2a = 2 \cdot Re(z)$
- $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2 \cdot Im(z)$
- $|z| = |\overline{z}|$ *[il modulo di un numero complesso è 0 solo quando anche z è 0]*
- $\overline{z1 + z2} = \overline{z1} + \overline{z2}$
- $\overline{z1 \cdot z2} = \overline{z1} \cdot \overline{z2}$
- $|z1 + z2| \leq |z1| + |z2|$

Argand - Gauss
Su un piano ogni punto può essere rappresentato da una coppia di coordinate.



1.1 Applicazione numeri complessi



Se z si trova sulla circonferenza di raggio unitario e centro $(0,0)$ allora z è definito come $z = \cos(\beta) + i \cdot \sin(\beta)$ dove β è l'angolo formato dal raggio unitario (che parte da $(0,0)$ fino a z) e la sua proiezione sull'asse positivo reale.

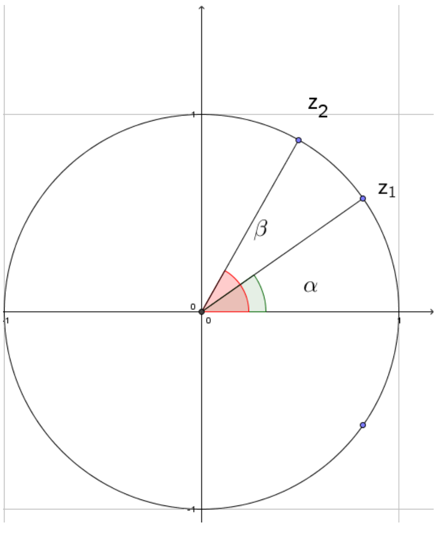
Il modulo di un numero complesso è definito come la lunghezza del segmento di origine $(0,0)$ e termine z. Si calcola come segue:

$$|z| = \sqrt{\cos(\beta)^2 + \sin(\beta)^2} = 1$$

Segue che $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$.
Se la circonferenza fosse stata di raggio r=2, anche il modulo del numero complesso sarebbe stato 2. $\to u = 2\cos\beta + 2i \cdot \sin\alpha$

1.2 Moltiplicazioni tra numeri complessi

Moltiplicare due numeri complessi tra loro significa sommare gli angoli.



$z_1 \cdot z_2 = \cos(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta)$

1.2.1 Rappresentazioni alternative

z_1 può essere definito come: $|z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, mentre z_2 può essere definito come: $|z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$.
Un numero complesso moltiplicato per il suo coniugato è uguale al quadrato del modulo:

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

Il prodotto di due numeri complessi z_1 e z_2 è definito come segue:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta))$$

L'inverso di un numero complesso z è definito come:

$$z_1 = \rho \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\beta) \qquad \text{dove } \rho \text{ è un numero reale qualsiasi}$$

E si calcola come:

$$z \cdot \overline{z} = \rho^2 \cdot 1$$
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\rho^2} = \frac{\cos\alpha - i \cdot \sin\alpha}{\rho}$$

1.2.2 Formula di Eulero

$$e^{e \cdot t} \qquad \text{dove } t \text{ è un numero reale}$$
$$e^{e \cdot t} = \cos(t) + i \cdot \sin(t)$$
$$z = \rho \cdot e^{i \cdot t}$$
$$e^z = e^{a + i \cdot b} = e^a \cdot e^{i \cdot b} = e^a \cdot (\cos b + i \cdot \sin b)$$
$$e^{z + 2k\pi \cdot i} = e^z \cdot \underbrace{e^{2k\pi \cdot i}}_{2k\pi \to angolo = 0} = e^z$$

1.2.3 Esercizio

$$z = i \to |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

$$i = \underbrace{\cos\beta}_{\frac{\pi}{2} \to 0} + i \cdot \underbrace{\sin\beta}_{\frac{\pi}{2} \to 1} = i$$

$$z = 1 + 1 \cdot i$$
$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot i\right)$$

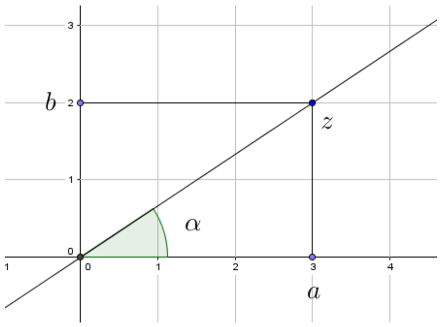
2 Aritmetica modulare

Nell'aritmetica modulare valgono le seguenti proprietà:

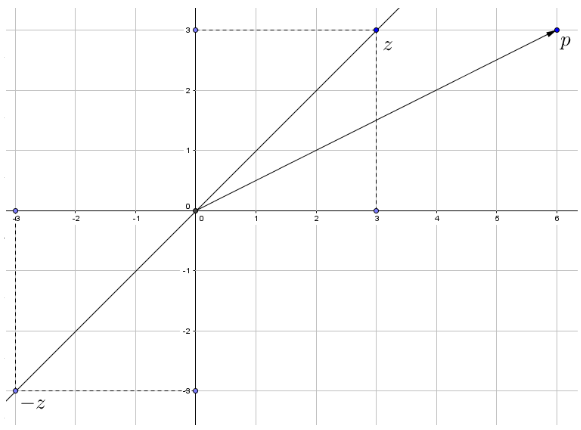
- commutativa
- elemento neutro
- distribuiva del prodotto
- dell'opposto
- dell'inverso

SOMMA	PRODOTTO
$0+0=0$	$0 \cdot 0 = 0$
$0+1=1$	$0 \cdot 1 = 0$
$1+0=1$	$1 \cdot 0 = 0$
$1+1=0$	$1 \cdot 1 = 0$

$z = a + b \cdot i = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha)$



Appena fisso un punto nel piano ottengo un segmento orientato che parte dell'origine e raggiunge il punto (in questo caso il punto P). Questo segmento prende il nome di **vettore**.
$z = (3,3) \rightarrow -1 \cdot z = (-1 \cdot 3, -1 \cdot 3) = (-3,-3)$



Moltiplicando un vettore per un numero reale k cambio la lunghezza del vettore, ovvero la sua intensità. Nel caso in cui k sia negativo, ottengo anche un cambiamento nella direzione del vettore. Il numero reale k prende il nome di **scalare**.

3 Vettori

I vettori sono una rappresentazione astratta delle grandezze che hanno una direzione (e talvolta un verso).

3.1 Somma vettoriale

Nella somma fra vettori valgono le seguenti proprietà:

- associativa
- commutativa
- elemento neutro
- opposto

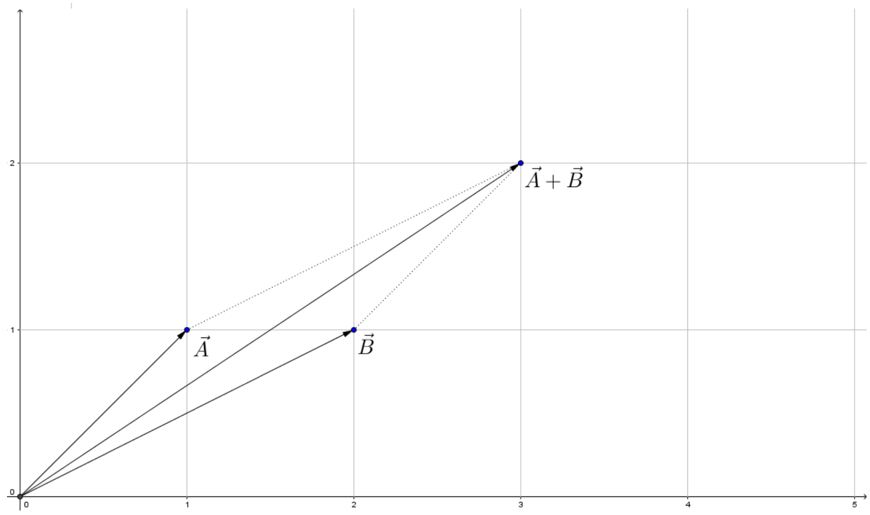
Le somme di vettori costituiscono un **gruppo additivo** che è **commutativo**.
I vettori sono rappresentati per convenzione con lettere maiuscole, a differenza degli scalari che vengono rappresentati con le lettere minuscole.

Esempi di proprietà

$(c+d)A = cA + dA$
$(c \cdot d)A = (dA) \cdot c$
$c \cdot (A+B) = cA + cB$
$1 \cdot A = A$
$0 \cdot A = \underline{0}$ $\rightarrow$ sottolineo la scalare 0, <u>non è un vettore</u>. Il vettore zero in un piano è definito come $A(0,0)$.

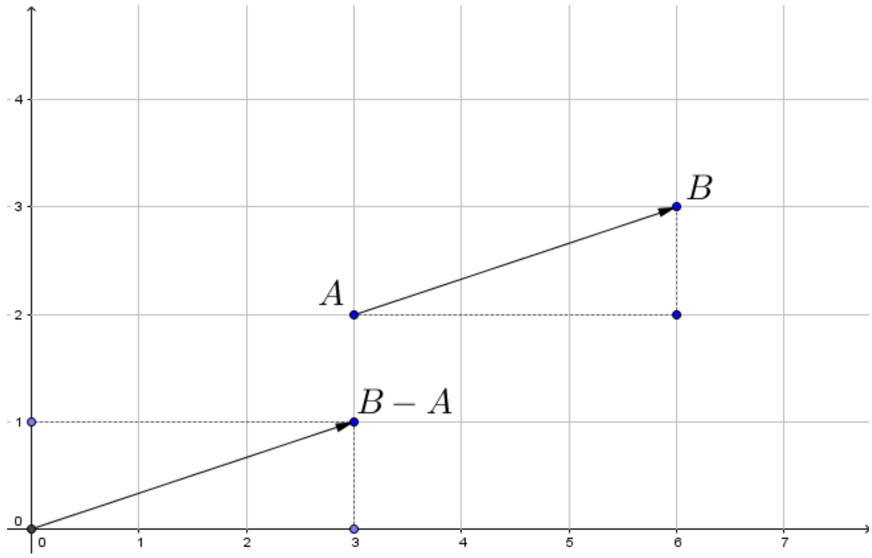
Lo spazio vettoriale su un campo numerico dipende da quale campo numerico sto utilizzando: se sto lavorando con i numeri complessi, lo spazio vettoriale sarà $\mathbb{C}$, oppure se sto lavorando con i numeri reali sarà $\mathbb{R}$ ...

Rappresentazione grafica della somma vettoriale:



3.2 Translazioni vettoriali

Per traslazione di un vettore si intende il suo spostamento nel piano mantenendo inalterate direzione e intensità.



$$A(3,3) \qquad B(6,4)$$

$$B - A = (6-3, 4-3) = (3,1) = B + (-A)$$

3.3 Prodotto scalare

Il prodotto scalare di due vettori A e B si indica con $A \cdot B$, ed è un elemento del campo numerico dello spazio vettoriale.

Esempio

$A(a_1, a_2)$
$B(b_1, b_2)$
$A \cdot B = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$

Il prodotto scalare di un vettore per se stesso è uguale al quadrato del modulo: $A \cdot A = ||A||^2 = a^2 + b^2$, dove a e b sono i coefficienti di x e y.

3.4 Operazioni vettoriali

Dati dei vettori $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$

$$A \cdot B = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$
$$||A|| \cdot ||B|| \cdot cos(\alpha) = A \cdot B$$

Il punto A è inteso come punto del piano o dello spazio.
I vettori godono delle seguenti proprietà:

- proprietà commutativa: $A \cdot B = B \cdot A$
- proprietà distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

Esempi proprietà:

- proprietà commutativa: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3$
- proprietà distributiva: $a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2c_2) + a_3(b_3c_3) = a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a2_c2 + a_3b_3 + a_3c_3$

3.4.1 Prodotto scalare

La lunghezza di un vettore è definita come

$||A|| = A \cdot A \rightarrow$ [A prodotto interno A]

$\vec{0} \cdot \vec{0} = 0$ *[vettore 0 moltiplicato vettore 0 = numero 0]*

Il prodotto scalare **può essere negativo**, mentre il prodotto scalare di un vettore per se stesso è uguale al quadrato del modulo.

Quando ottengo il prodotto scalare 0 significa che il coseno è 0, quindi i **due vettori** sono **perpendicolari**.

3.4.2 Dimostrazione teorema

$$(A \cdot B)^2 \leq (A \cdot A)(B \cdot B)$$

$(A \cdot B)^2 \leq ||A||^2 \cdot ||B||^2$ *[sempre positivo]*
$(A \cdot B) \leq ||A|| \cdot ||B||$ *[può essere negativo, aggiungo il modulo a sinistra (a destra c'è già)]*
$|A \cdot B| \leq ||A|| \cdot ||B||$

$A = (1, 3, -2)$ $||A|| = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$
$B = (-1, 4, 3)$ $||B|| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26}$

$$|A \cdot B| \leq ||A|| \cdot ||B||$$
$$5 \leq \sqrt{14} \cdot \sqrt{26}$$
$$5^2 \leq 14 \cdot 26$$
$$25 \leq 364$$

3.5 Vettori perpendicolari

Distanza tra due punti nel piano: $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)}$

$A \cdot B = 0$ sse i vettori sono perpendicolari.

Due vettori sono perpendicolari quando (dimostrazione):

$$||A - B|| = ||A - (-B)|| \to ||A - B|| = ||A + B||$$
$$(A - B) \cdot (A - B) = (A + B)(A + B)$$
$$\cancel{A^2} - 2AB + \cancel{B^2} = \cancel{A^2} + 2AB + \cancel{B^2} \to 4AB = 0 \to AB = 0$$

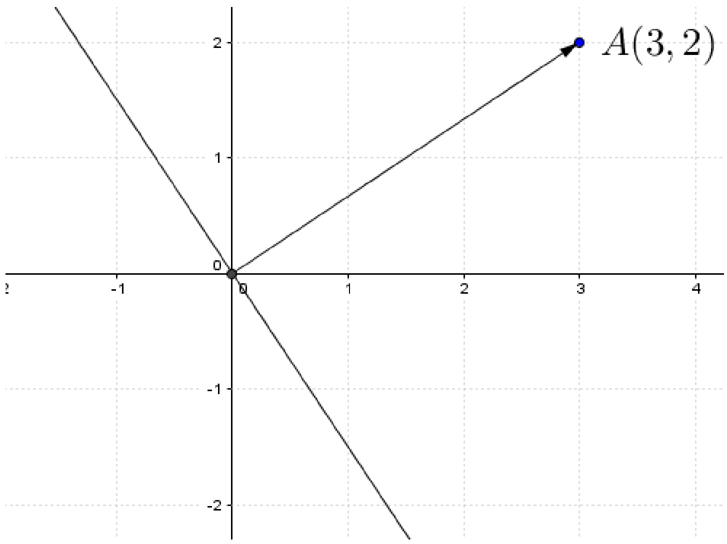
Il prodotto scalare è negativo quando l'angolo è $>$ di $\frac{\pi}{3}$

The other shit goes here...

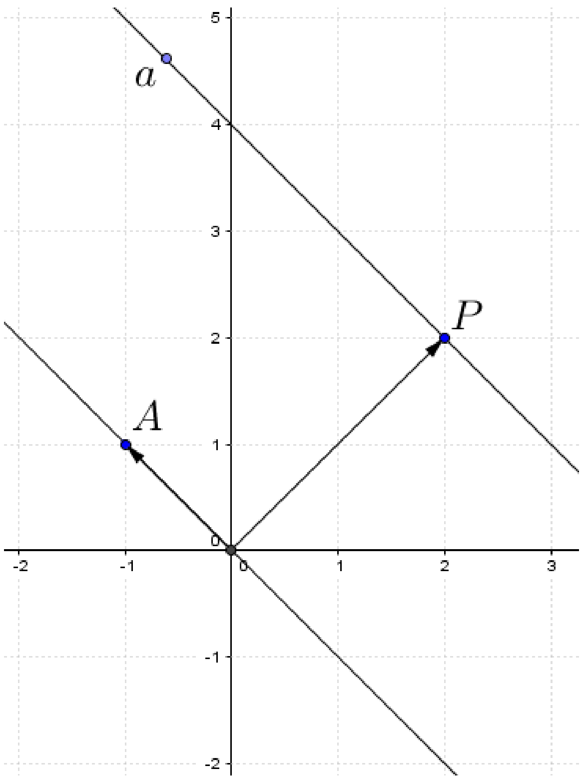
4 Altri vettori

4.1 Rette parallele e perpendicolari

Esempio 1



Esempio 2



4.1.1 Rappresentazioni alternative

I vettori si possono rappresentare come punti nel piano, delimitati dal punto e dal segmento che va dall'origine degli assi al punto stesso.

$$3x + 2y = 0 \textit{[è un'equazione lineare]}$$

Posso scriverlo come:

$$(3, 2) \cdot (x, y) = 0$$

Un altro modo è trasformare un'equazione in un altra equazione, ma parametrica:

$$R = \{(x, y) : 3x + 2y = 0\}$$

Il punto $(2, -3)$ sta nella retta. Una volta che scoperto che il punto è sulla retta, se moltiplico la coppia per lo scalare t, al variare di t ottengo tutti i punti (*vettori*) che stanno sulla stessa retta.

4.1.2 Esempio

$$\begin{aligned} 3x + 2y = 5 &\rightarrow (3, 2) \cdot (x, y) = 5 \\ &\rightarrow \sqrt{13} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\alpha) \\ \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{13}} & \qquad \textit{[dobbiamo capire che retta è]} \end{aligned}$$

Risolvo l'equazione e scopro che $(1, 1)$ appartiene alla retta:

- $\rightarrow$ $t(2, -3) = (2t, -3t) \rightarrow x' = 1 + 2t, x = 2t, y' = 1 - 3t, y = -3t$
- $\rightarrow$ $(1, 1) + (2, -3) = (3, -2) \rightarrow 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = 9 - 4 = 5$
- $\rightarrow$ $3 \cdot (1 + 2) + 2 \cdot (1 - 3) = 5$
- $\rightarrow$ $x = \frac{3}{2} - 2t$

5 Sistemi lineari

Un sistema di equazioni lineari, anche detto sistema lineare, è un sistema di equazioni lineari che devono essere verificate tutte contemporaneamente. Una soluzione del sistema è un vettore i cui elementi sono le soluzioni delle equazioni che compongono il sistema, ovvero tali che se sostituiti alle incognite rendono le equazioni delle identità.

$$3x + 5y + z = 7$$

$$\begin{cases} (3,5,1)(x,y,z) = 7 \\ (3,5,1)(x,y,z) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{sono due vettori diversi, ma paralleli } (A /\!/ B)$$

Nello spazio vettoriale, se abbiamo 3 punti non allineati *(quindi non sullo stesso piano)*, vi sarà un piano che li attraversa.

Numero di possibili soluzioni in generale. Il sistema ammette un'unica soluzione se le due rette non sono parallele e quindi si intersecano. Se le rette sono parallele, allora non abbiamo soluzioni, mentre abbiamo infinite soluzioni se le due rette coincidono.

Per determinare il numero di soluzioni di un sistema lineare, dobbiamo calcolare il prodotto interno di A e B.

Esempio

$$\begin{cases} (3,2)(x,y) = 5 \\ (1,4)(x,y) = 3 \end{cases} \rightarrow \text{sono parallele?}$$

$$A \cdot B = (3,2)(1,4) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$$

Trovati $||A|| = \sqrt{13}$ e $||B|| = \sqrt{17}$, determiniamo il coseno dell'angolo tra i due vettori

$$\cos(\theta) = \frac{A \cdot B}{||A|| \cdot ||B||}$$

$$\cos(\theta) = \frac{11}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} = \sqrt{\frac{212}{221}} < 1 \rightarrow \text{i due vettori non sono paralleli}$$

Due vettori sono paralleli quando $\cos(\theta) = 1$ oppure $\cos(\theta) = -1$

Esempio

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{come determiniamo il numero di soluzioni?}$$

$$A(3,2,1)$$
$$B(1,4,3)$$
$$C(1,1,1)$$

$$A \cdot B = 14$$
$$A \cdot C = 6$$
$$B \cdot C = 8$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\theta)_{AB} &= \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} < 1 \\ \cos(\theta)_{AC} &= \frac{6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} < 1 \\ \cos(\theta)_{BC} &= \frac{8}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{3}} < 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow 1 \text{ unica soluzione}$$

Esempio

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 2y + 6z = 7 \\ -x + y - z = 1 \end{cases}$$

$A = (1, 2, 3)$
$B = (5, 2, 6)$
$C = (-1, 1, -1)$

$A \cdot B = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 = 27$
$A \cdot C = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = -2$
$B \cdot C = 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) = -9$

$||A|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{14}$
$||B|| = \sqrt{5^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{65}$
$||C|| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$

$$\left.\begin{aligned} \cos(\theta)_{AB} = \frac{27}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{65}} < 1 \\ \cos(\theta)_{AC} = \frac{-2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} < 1 \\ \cos(\theta)_{BC} = \frac{-9}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{3}} < 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow 1 \text{ unica soluzione}$$

Inizio risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 2y + 6z = 7 \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{moltiplico tutto per 5 per far coincidere i coefficienti di x}$$

$5x + 10y + 15z = 20$ dato da $5 \times$ prima riga

$0x - 8y - 9z = -13$ sottraggo la prima riga dalla seconda [*combinazione lineare*]

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -8y - 9z = -13 \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \qquad \text{sostituisco con la combinazione lineare appena trovata}$$

$+x + 2y + 3z = 4 \quad +$

$-x + y - 1z = 1 \quad =$

$0x + 3y + 2z = 5$ sommo (o sottraggo) la seconda riga dalla terza

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -8y - 9z = -13 \\ 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

$\frac{3}{8} \cdot (-8y - 9z) = \frac{3}{8} \cdot (-13)$ voglio che il coefficiente della y sia uguale a 3

$= -3y - \frac{27}{8}z = -\frac{39}{8}$

$3y + 2z = 5 \quad +$

$-3y - \frac{27}{8}z = -\frac{39}{8}$

$=\!\!\rightarrow -\frac{11}{8}z = \frac{1}{8}$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -8y - 9z = -13 \\ -\frac{11}{8}y = \frac{1}{8} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{9}{11} \\ y = \frac{19}{11} \\ z = -\frac{1}{11} \end{cases}$$

Ora verifico che i risultati ottenuti di x, y, z soddisfino il sistema iniziale:

(1) $\frac{9}{11} + 2 \cdot \frac{19}{11} - \frac{3}{11} = 4 \Rightarrow \frac{9}{11} + \frac{38}{11} - \frac{3}{11} \Rightarrow \frac{44}{11} = 4 \Rightarrow 4 = 4$ vero

(2) $5 \cdot \frac{9}{11} + 2 \cdot \frac{19}{11} - \frac{6}{11} = 7 \Rightarrow \frac{45}{11} + \frac{38}{11} - \frac{6}{11} \Rightarrow \frac{77}{11} = 7 \Rightarrow 7 = 7$ vero

(3) $-\frac{9}{11} + \frac{19}{11} + \frac{1}{11} = 1 \Rightarrow \frac{11}{11} = 1 \Rightarrow 1 = 1$ vero

Il sistema è stato verificato.

5.1 Sistemi lineari e matrici

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ x + 4y + 3z = 3 \end{cases}$$

Se i piani sono paralleli sono vi sono soluzioni, se sono sovrapposti vi sono infinite soluzioni mentre se si incrociano vi è una retta di soluzioni.

$$A = (3, 2, 1)$$
$$B = (1, 4, 3)$$

$$||A|| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$
$$||B|| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26}$$

$$A \cdot B = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 14$$

$$\cos(\theta)_{AB} = \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} < 1 \rightarrow \text{la soluzione è una retta}$$

$$3 \cdot (x + 4y + 3z) = 3 \cdot 3 \qquad \text{moltiplico la seconda riga per 3, per far combaciare i coefficienti delle } x$$
$$\Rightarrow 3x + 12y + 9z = 9$$

$$3x + 12y + 9z = 9 \qquad +$$
$$-3x - 2y - z = -5 \quad \Rightarrow \quad 10y + 8z = 4 \quad \Rightarrow \quad 5y + 4z = 2$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 5y + 4z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x = -2y - z + 5 \\ 5y = 2 - 4z \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x = -2y - z + 5 \\ y = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}z \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x = -2(\frac{2}{5} - \frac{4}{5}z) - z + 5 \\ y = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = -\frac{4}{5} + \frac{8}{5}z - z + 5 \\ y = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{21}{5} - \frac{3}{5}z - z + 5 \\ y = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}z \end{cases}$$

Matrici dei coefficienti:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrice dei coefficienti con i punti:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Sia $\mathbb{D}$ un campo numerico. Una matrice $A = (A_{ij})$ con m righe e n colonne, è una famiglia di $m \times n$ elementi del campo.

6 Matrici

Una matrice A è quadrata se $m = n$, ovvero quando le righe sono tante quante le colonne:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una matrice **quadrata** A è simmetrica se $A_{ij} = A_{ji}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Una matrice **quadrata** A è **diagonale** se $A_{ij} = 0$ per $i \neq j$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Una matrice A è **triangolare superiore** se $A_{ij} = 0$ per $i > 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Sia A una matrice $m \times n$. Allora la **trasposta** di A si indica con A^T, ed è una matrice $n \times m$, e $A^T_{ij} = A_{ji}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A^T)^T = A$$

Siano A e B due matrici $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 13 & 4 \\ 5 & 2 & 5 \\ 9 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$5 \cdot A = 5 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 5 & 10 & 15 \\ 20 & 30 & 5 \end{bmatrix}$$

L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ sul campo $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale con la somma (matriciale) componente per componente e prodotto scalare.

6.1 Esercizio 1

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Per risolvere il sistema, possiamo creare la matrice dei coefficienti e ricavarci una matrice triangolare superiore.

Matrice dei coefficienti:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Costruzione matrice triangolare superiore:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{moltiplico la prima riga per } -{}^1\!/_3 \text{ e la sottraggo dalla seconda}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 - ({}^1\!/_3 \cdot 3) & 7 - ({}^1\!/_3 \cdot 2) & 0 - ({}^1\!/_3 \cdot 5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & {}^2\!/_3 & -{}^5\!/_3 \end{bmatrix}$$

6.2 Prodotto matriciale

Se abbiamo una matrice A di dimensione $m \times n$ e una matrice B di dimensione $n \times k$ allora possiamo definire il prodotto matriciale $A \cdot B$ di dimensione $m \times k$.

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 5 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 7 \cdot 4 + 0 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 & 44 \\ 22 & 30 \end{bmatrix}$$

6.3 Proprietà delle matrici

- $A(BC) = (AB)$
- identità: $AI = IA = A$
- nulla: $0A = A0 = 0$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$
- $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Dimensioni matrice di un prodotto:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow 2 \times 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow 2 \times 3$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow 3 \times 3$$

$$A \cdot B = (2 \times 2) \cdot (2 \times 3) = (2 \times 3)$$

$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = (2 \times 3) \cdot (3 \times 3) = (2 \times 3)$$

Esempio prodotto matriciale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow 2 \times 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow 3 \times 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow 3 \times 3$$

$$A \cdot B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 13 \\ 17 & -2 & 31 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B \cdot C = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 13 \\ 17 & -2 & 31 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -36 & 44 \\ 87 & -92 & 108 \end{bmatrix}$$

6.4 Esercizio

Data una matrice, ricavarne una triangolare superiore

Origine

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Sottraggo 3 volte la prima riga dalla seconda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Sottraggo la prima riga dalla terza

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Sommo 3 volte la seconda riga alla terza

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Se ora moltiplico ogni punto per la matrice di origine, ottengo la matrice triangolare superiore

Origine moltiplicata per a $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Risultato moltiplicato per b $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Risultato moltiplicato per c $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

6.5 Esercizio

Scambiare la prima riga con la terza

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3° \text{ riga} \\ 2° \text{ riga} \\ 1° \text{ riga} \end{array} \Rightarrow \text{Quando moltiplico una matrice per questa, la prima riga e la terza sono scambiate}$$

6.6 Esercizio

Sommare alla seconda riga 100 volte la prima

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Quando moltiplico una matrice per questa, la prima riga è sommata 100 volte alla seconda}$$

6.7 Esercizio

Sommare alla terza riga 50 volte la prima riga e 3 volte la seconda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 50 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

6.8 Esericizio

Risolvere un sistema lineare con le matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Devo ottenere una matrice triangolare superiore, quindi

a. Sottraggo 3 volte la prima riga alla seconda

b. Sommo due volte la prima riga alla terza

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & -2 \\ 0 & 11 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ora devo rendere 0 anche il valore in posizione $[3, 2]$, ovvero il numero 11.
Per farlo dovrò moltiplicare la seconda riga per ${}^{11}\!/_{15}$ e infine sottrarla alla terza riga

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & {}^{11}\!/_{15} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & -2 \\ 0 & 11 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & {}^{23}\!/_{11} \end{bmatrix}$$

Ora verifico che il risultato ottenuto sia corretto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & {}^{11}\!/_{15} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -{}^{1}\!/_{5} & {}^{11}\!/_{15} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -{}^{1}\!/_{5} & {}^{11}\!/_{15} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & -2 \\ 0 & 11 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -15 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & {}^{23}\!/_{11} \end{bmatrix}$$

Corretto

7 Matrici inverse

7.1 Esercizio

Trovare la matrice inversa.

La matrice si dice inversa quando se moltiplicata per la matrice di origine ottengo la matrice identica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{inversa}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infatti se moltiplico queste due matrici ottengo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La prima matrice, infatti, significa "*sommo x volte la prima riga alla seconda*", mentre l'inversa "*sottraggo x volte la prima riga dalla seconda*".

7.2 Determinante di una matrice

Data una matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice A si calcola come

$$det(A) = a \cdot d - b \cdot c$$

Se ad esempio devo trovare il determinante di B:

$$det(B) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Se il determinante è diverso da zero la matrice è invertibile, quindi se

se $det(A) = 0$ la matrice **non** è invertibile

Il determinante di una matrice è 0 solo quanto le due rette della soluzione (se quadrata) sono parallele o coincidenti.

7.3 Matrice inversa

Per trovare la matrice inversa posso

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

per verificare che sia veramente la matrice inversa, faccio la controprova:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \right) = \\
&= \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} ad - bc & a(-b) + ba = 0 \\ a(-b) + ba = 0 & ad - bc \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

7.4 Matrice inversa - metodo 1

Calcolare la matrice inversa di

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Calcolo il determinante

$$det(B) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

Inverto la diagonale della matrice e cambio segno sulla diagonale opposta

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ora divido ogni termine della matrice per il determinante

$$-\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{-2} & \frac{-2}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & \frac{1}{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

verifico che la matrice sia veramente l'inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ✔

7.5 Regole per il cambio della diagonale

Quando inverto la diagonale, in quella opposta devo cambiare i segni secondo lo scherma:

Somma coordinate pari	$+$
Somma coordinate dispari	$-$

Una matrice diagonale è invertibile se e solo se tutti gli elementi della diagonale sono diversi da zero.

7.6 Matrice inversa - metodo 2

Calcolare la matrice inversa di

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Accodo alla matrice di origine la matrice identità

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per trovare la matrice inversa devo ora rendere questa matrice diagonale.

Sottraggo 3 volte la prima riga dalla seconda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Sommo una volta la prima riga alla seconda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Divido la seconda riga per -2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Quella evidenziata in rosso a destra (il quadrato a destra) è la matrice inversa di quella iniziale.

Verifica:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ✔

7.7 Matrice inversa -metodo 3

Data una matrice triangolare superiore

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcolo la trasposta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Data la trasposta calcolo l'inversa:

I segni dell'inversa saranno determinati dalle stesse regole viste per l'inversione della diagonale

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Per il calcolo del primo elemento, [1][1], devo:

- prendere la trasposta e cancellare la riga e la colonna dell'elemento da calcolare:

$$\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{3} & 1 & 0 \\ \cancel{1} & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- calcolo il determinante della matrice rimanente (quella rossa)

$$det = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 1$$

- scrivo nella posizione [1][1] il determinante appena trovato, con il segno precedentemente calcolato

$$\begin{bmatrix} 1 & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Ripeto l'operazione su tutti gli elementi e ottengo

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8 Matrici a gradini

Una matrice $m \times n$ è a *gradini* se si verificano le seguenti condizioni

- tutte i vettori riga nulli sono nella parte bassa della matrice
- il primo elemento in una riga non nulla è un 1
- date due righe successive non nulle, il primo elemento non nullo della seconda riga si trova a destra del primo elemento non nullo della prima riga

ed è in forma *ridotta a gradini* solo se verifica anche questa condizione

- se una colonna contiene il primo elemento non nullo di una riga, allora tutte gli altri elementi della colonna sono nulli

8.1 Esempi

Matrice a gradini <u>non</u> ridotta

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice a gradini ridotta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.2 Ridurre una matrice a gradini

Ogni matrice non nulla è equivalente ad una matrice in forma ridotta a gradini, ovvero che ogni matrice può essere ridotta in forma a gradini.

8.2.1 Matrici equivalenti

Data una matrice A, applichiamo x matrici elementari fino ad arrivare ad una matrice B ridotta a gradini. A e B sono equivalenti se se passo da A a B applicando matrici elementari:

$$E_1 \dots E_k A = B \Rightarrow A = E_k^{-1} \dots E_1^{-1} B$$

Applico matrici elementari (E_i) ad A. Poiché le matrici elementari sono invertibili, le applico invertite a B e riottengo A.

8.2.2 Esempio riduzione

Date due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

determinare se sono equivalenti.

Inizio risoluzione

Per prima cosa riduco la matrice A a gradini e trovo le sue soluzioni. Poi controllo che le soluzioni trovate soddisfino anche la matrice B.

Riduco A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{riduco a triangolare superiore}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \text{riduco in forma a gradini}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \rightarrow \text{ora è in forma a gradini, ma non ridotta}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{9} \\ 0 & 1 & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \rightarrow \text{ora è in forma ridotta a gradini}$$

Ora, dato che la matrice A rappresenta un sistema a 3 incognite, e i termini noti sono nulli, posso decidere quale valore dare ai termini noti:

Il sistema rappresentato da A è

$$\begin{cases} x + \frac{11}{9}z = K \\ y + \frac{1}{9}z = K \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{11}{9}z \\ y = -\frac{1}{9}z \end{cases}$$

quindi come termine noto posso sciegliere $z = -9$

$$\begin{cases} x = -\frac{11}{9} \cdot (-9) \\ y = -\frac{1}{9} \cdot (-9) \\ z = -9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = +11 \\ y = +1 \\ z = -9 \end{cases}$$

Ora verifico che le soluzioni trovate soddisfino la matrice A:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 \cdot (11) + 5 \cdot (1) + 3 \cdot (-9) = 0 \\ 11 - 2 \cdot (1) + (-9) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 22 + 5 - 27 = 0 \\ 11 - 2 - 9 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 0 & ✔ \\ 0 = 0 & ✔ \end{cases}$$

Verifico quindi che soddisfino anche B. Se la soddisfano A e B sono equivalenti

$$\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 2y + 7z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 11 + 1 + 5 \cdot (-9) = 0 \\ 2 \cdot (1) + 7 \cdot (-9) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 11 + 1 - 45 = 0 \\ 2 - 63 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -33 = 0 & ✘ \\ -61 = 0 & ✘ \end{cases}$$

Le matrici A e B <u>non</u> sono equivalenti perché non ammettono le stesse soluzioni

8.2.3 Teorema

Due sistemi lineare

$$Ax = b \qquad e \qquad Bx = d$$

hanno le stesse soluzioni se $\underbrace{(A|b)}_{\text{estesa}}$ è equivalente a $(B|d)$.

$Ax = 0$ e $Bx = 0$ hanno le stesse soluzioni se A è uguale a B.

$$Ax = 0 \qquad \rightarrow A \text{ è una matrice } m \times n$$

In un sistema lineare omogeneo (termini noti non nulli) se il numero di colonne è maggiore del numero di righe la matrice avrà sicuramente soluzioni non nulle.

Due matrici A e B sono equivalenti se esiste un prodotto di matrici elementari F tale che

$$B = FA$$
$$A = F^{-1}B$$

Matrice estesa

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A|b = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.3 Variabili e matrici

Data una matrice ridotta in forma a gradini $m \times n$

$$m \left\{ \begin{array}{l} r \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \\ \end{array} \right. \begin{bmatrix} & \overbrace{}^{n} \\ 0 & \dots & 1 & x & x \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dove $r \leq m \leq n$, e $(n - r)$ rappresenta $x_1 \dots x_r$. Abbiamo quindi r variabili in funzione delle altre.

Esempio

$$m \left\{ \begin{array}{r} r \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. \\ \text{nulle} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right. \end{array} \right. \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{n} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_8 \end{bmatrix}$$

Le variabili che considero sono x_3, x_5, x_6, x_8:

$$x_8 = 0$$
$$x_6 = -2x_7$$
$$x_5 = -x_7$$
$$x_3 = -x_4 - 2x_7$$

La soluzione del sistema è un iperpiano a 4 dimensioni in un iperspazio di dimensione 8.

9 I sottospazi

Spazio vettoriale: sia $\mathbb{F}$ un campo numerico.
Uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}$ è un insieme V di vettori con somma vettoriale

$$+ : V \times V \to V$$

e prodotto per uno scalare

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$$

che soddisfano gli assiomi seguenti:

- $SV1: \quad P + (Q + R) = (P + Q) + R$
- $SV2: \quad P + Q = Q + P$
- $SV3: \quad 0 + P = P$
- $SV4: \quad P + (-P) = 0;$
- $SV5: \quad (r + s)P = rP + sP$
- $SV6: \quad (rs)P = r(sP);$
- $SV7: \quad r(P + Q) = rP + rQ$

9.1 Esempi di spazi vettoriali

9.1.1 Polinomi

L'insieme dei polinomi è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$:

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad \text{[polinomio]}$$
$$P(x) + q(x) \qquad \text{sommando due polinomi ottengo nuovamente un polinomio}$$

In uno spazio vettoriale delle sequenze limitate dei reali, l'insieme di tutte le successioni infinite $(a_n)_{n \geq 0}$ di numeri reali è uno spazio vettoriale sul campo reale (infatti si possono sommare, moltiplicare [es. come il prodotto interno], ...).

9.1.2 Numeri complessi

$\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, ma è anche uno spazio vettoriale su se stesso:

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Sia X un insieme. Allora l'insieme delle funzioni $X \to \mathbb{F}$ dove $\mathbb{F}$ è un campo, se $f, g : X \to \mathbb{F}$ sono funzioni e c è uno scalare, allora:

$$(f + g)x = f(x) + g(x)$$
$$(cf)x = c \cdot f(x) \qquad \forall x \in X$$

9.2 Definizione

Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{F}$. Un sottoinsieme U di V è un sottospazio vettoriale di V se la somma vettoriale di vettori di U è ancora in U e lo stesso accade per il prodotto di un vettore di U per un arbitrario scalare:

$$xy \in U \Rightarrow x + y \in U$$
$$x \in U \land c \in \mathbb{F} \Rightarrow c \cdot x \in U$$

Un sottospazio vettoriale è uno spazio vettoriale.

Esempio:
Sia V uno spazio vettoriale $U \subseteq X$ è un sottospazio vettoriale se è chiuso per somma, prodotto e contiene lo 0: $0 \in U$.

Lemma: se U e V sono sottospazi vettoriali, allora anche $U \cap W$ è un sottospazio:

$$
\begin{aligned}
x, y \in U \cap W \rightarrow \\
& x, y \in U \ \wedge \ x, y \in W \\
& x + y \in U \ \wedge \ x + y \in W \\
& x + y \in U \cap W
\end{aligned}
$$

Regola: ogni retta passante per l'origine è un sottospazio vettoriale in $\mathbb{R}^2$. Le rette passanti non per l'origine non sono sottospazi vettoriali, perché il vettore nullo non appartiene alla retta.

9.3 Sottospazi vettoriali

Lemma: l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo (termini noti <u>non</u> nulli) di m equazioni e n incognite, è un sottospazio vettoriale dello spazio $\mathbb{R}^n$.

Se A è la matrice del sistema, allora $N(A)$ è il sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esempio: consideriamo la matrice

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}
$$

L'insieme delle combinazioni lineari dei vettori colonna

$$
c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}
$$

costituisce un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Lemma: l'intersezione di due o più sottospazi vettoriali di V è ancora un sottospazio vettoriale.

9.4 Vettori linearmente indipendenti

Sia V uno spazio vettoriale e $x_1, ..., x_n \in V$ vettori. Un vettore $v \in V$ è una combinazione lineare se i vettori $x_1, ..., x_n$ se esistono scalari $c_1, ..., c_n$ tali che

$$v = c_1 x_1 + ...c_n x_n$$

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice $m \times n$ e sia $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1) $\quad Ax = 0$

(2) $\quad A_i \cdot x = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n \qquad$ dove A_i è la colonna i-esima (vettore colonna i)

(3) $\quad$ i vettori colonna sono linearmente dipendenti: $\underbrace{x_1} A_1 + \underbrace{x_2}_{\text{scalari}} A_2 + ... + \underbrace{x_n} A_n = \underline{0} \qquad \rightarrow \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{0}$

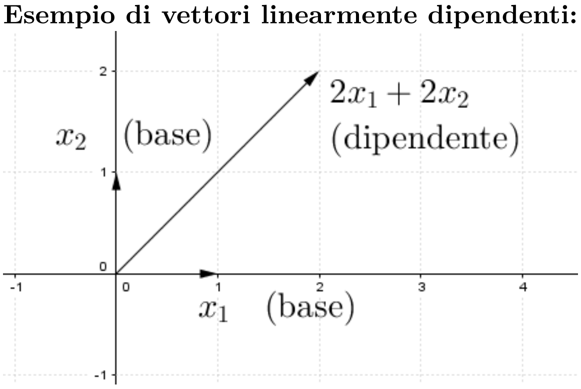
Una base di uno spazio vettoriale V (di dimensione finita) è un insieme finito di vettori $x_1, ..., x_n$, che sono linearmente indipendenti e generano tutto lo spazio:

$$V = c_1 x_1 + ... + c_n x_n \qquad \text{per opportuni scalari } c_1, ..., c_n$$
$$V = d_1 x_1 + ... + d_n x_n$$

$$V - V = 0 \rightarrow (c_1 - d_1)x_1 + ... + (c_n - d_n)x_n \qquad \text{sse} \quad c_1 = d_1 ... c_n = d_n$$

dove x_1, x_n sono la base. Ogni altro vettori si può infatti ricavare dalla moltiplicazione tra la base e degli scalari.

Esempio di vettori linearmente dipendenti:



Possiamo notare che in questo caso, ogni punto nel piano può essere rappresentato come combinazione lineare dei due vettori base.

Esercizio: verificare che

$$2 + 3i$$

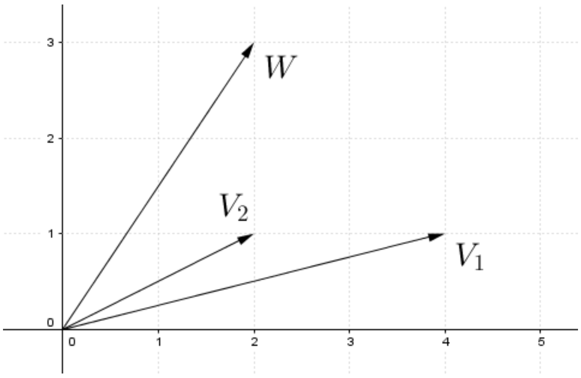
sia linearmente indipendente (ovvero che genera tutto lo spazio):

$$x(2 + 3i) + yi = 0 \qquad \text{se si, sono linearmente indipendenti}$$

$$2x + 3xi + yi = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \text{sono linearmente indipendenti e generano tutto lo spazio}$$

La base in questo caso non è un numero $\in \mathbb{R}$, ma $\in \mathbb{C}$.

Sia V uno spazio vettoriale di base $V_1, ..., V_k$. Allora ogni insieme di elementi $W_1, ..., W-n$ con $n > k$ è linearmente dipendente:



dove

$$W = c_1 \cdot V_1 + c_2 \cdot V_2$$
$$W = -c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 = 0$$

In particolare le due basi hanno lo stesso numero di elementi. Questo numero è la dimensione dello spazio vettoriale (2 in questo caso).

$$W_i = \underbrace{a_{1i}}_{\text{scalare}} \cdot V_1 + ... + a_{\overbrace{ki}^{\text{2 indici}}} \cdot \underbrace{V_k}_{\text{base}} \qquad \text{con } 1 \leq i \leq n$$

Dati i due indici, possiamo ricavare una matrice dei coefficienti:

$$k \text{ righe} \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \overbrace{a_{11}}^{W_1} & a_{12} & \dots & \overbrace{a_{1n}}^{W_n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix}}_{n \text{ colonne}} \right.$$

e data la matrice dei coefficienti possiamo ricavare:

$$\begin{bmatrix} V_1 & \dots & V_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 & \dots & W_n \end{bmatrix}$$

a cui segue

$$0 = \begin{bmatrix} W_1 & \dots & W_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & \dots & V_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & \dots & V_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

La cui rappresentazione significa

$$x_1 \cdot W_1 + ... + x_n \cdot W_n = 0$$

Le 2 regole principali sono:

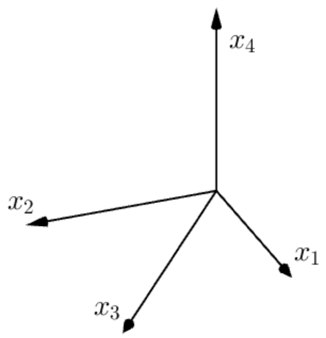
(1) Ogni insieme di vettori linearmente indipendenti può essere esteso ad una base

(2) Qualsiasi insieme di vettori che genera tutto lo spazio può essere ridotto ad una base

Se $x_1, \ldots, x_n$ sono vettori linearmente indipendenti, cosa manca per essere una base?
Se i vettori generano tutto lo spazio, sono basi

altrimenti W (sottospazio generato da $x_1, \ldots, x_n$, insieme delle combinazioni lineari)
$W = \{c_1 \cdot x_1 + \cdots + c_n \cdot x_n : c_1, ..., c_n \text{ sono scalari}\}$
$V \supsetneq W$
$x_1, \ldots, x_n, \underbrace{c_1 x_1, c_n x_n}_{x_{n+1}}$ aggiungo un elemento
$x_{n+1} - c_1 x_1 - \cdots - c_n x_n = 0 \rightarrow$ dipendenza lineare
$x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in V \setminus W$

In pratica



dati i vettori x_1, x_2, aggiungo il vettore x_3, complanare a x_1, x_2.
Ma dato che $x_3 - c_1 x_1 - x_2 = 0$ definisce un vettore dipendente, devo sostituire a x_3 un vettore che non sia dipendente da x_1 e x_2.
Sostituisco a x_3 il vettore x_4, che non complanare ai primi due.
Fatto ciò osservo che i 3 nuovi vettori sono linearmente indipendenti, e generano tutto lo spazio.
Se generano tutto lo spazio, sono base.

9.5 Tutorato

9.5.1 Esercizio 1

Dimostrare che l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali di grado al più 5 è uno spazio vettoriale con l'operazione +.

$$\left.\begin{array}{l} a_0x^5 + ... + a_5 \\ b_0x^5 + ... + b_5 \\ c_0x^5 + ... + c_5 \end{array}\right\} a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ (numeri razionali)}$$

In pratica sommando polinomi di grado massimo 5, ottengo comunque polinomi di grado al più 5, quindi forma uno spazio vettoriale.

9.5.2 Esercizio 2

Un campo numerico è diverso da uno spazio vettoriale:
campo numerico: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo numerico perché ogni numero $\neq 0$ è invertibile
spazio vettoriale: $(\mathbb{R}, +)$ è spazio vettoriale su $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

9.5.3 Esercizio 3

I polinomi di grado ≤ 1 su $\mathbb{Z}$, formano uno spazio vettoriale su $\mathbb{Z}$?

Poiché $\mathbb{Z}$ non ha la proprietà dell'inverso (solo 1 è invertibile)
non è un campo numerico. Se non è campo numerico, non è nemmeno spazio vettoriale

9.5.4 Esercizio 4

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di

$$2x - 3y + z = 0$$

è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

Soluzione:

$U = \{\text{insieme delle soluzioni di } 2x - 3y + z = 0\}$es.
$(0, 0, 0) \in U$
$(1, 1, 1) \in U$
$(1, 0, -2) \in U$
...

Ora dimostriamo che U è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$:

1. verifichiamo che U contenga lo zero:

   $0 \in U$ ✔

2. verifichiamo che $x + y \in U$

   $x, y \in U$
   $x = (a, b, c) \qquad 2a - 3b + c = 0$
   $y = (m, n, p) \qquad 2m - 3n + p = 0$
   Ora dimostro che $(a, b, c) + (m, n, p) = (a + m, b + n, c + p) \in U$
   $\underbrace{2a - 3b + c}_{0} + \underbrace{2m - 3n + p}_{0} = 0$
   $2(a + m) - 3(b + n) + (c + p) = 0$
   La somma di due vettori rimane ancora nello stesso spazio vettoriale, quindi $(a + m, b + n, c + p) \in U$ ✔

3. $k \in \mathbb{R}$, $x = (a, b, c) \in U$. Dimostrare che $kx = (ka, kb, kc) \in U$

$$k(2a - 3b + c) = k \cdot 0$$
$$2\underbrace{ka} - 3\underbrace{kb} + \underbrace{kc} = k \cdot 0$$
$$= 0$$

(ka, kb, kc) sono le coordinate del vettore k, e ho dimostrato trovando le sue coordinate che è nello stesso spazio vettoriale delle soluzioni. ✔

9.5.5 Esercizio 5

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni di

$$2x - 3y + z = 1$$

è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

Soluzione:

$U = \{\text{insieme delle soluzioni di } 2x - 3y + z = 1\}$

E' sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? No, perché $0 \notin U$ ✘

9.5.6 Vettori linearmente indipendenti

Due vettori v, w sono linearmente dipendenti se per ogni combinazione lineare

$$\lambda v + \mu w = 0 \qquad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Due vettori v, w sono linearmente indipendenti se per ogni combinazione lineare

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ per cui } \lambda v + \mu w = 0$$
$$\wedge (\lambda \neq 0 \ \vee \ \mu \neq 0)$$

9.5.7 Esercizio 5

Dimostrare $(1, 1)$ e $(2, 2)$ sono linearmente dipendenti.

Soluzione:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= -2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \to -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$ ✔

Dato che $c_1, c_2 \neq 0$, i vettori sono linearmente dipendenti

9.5.8 Esercizio 6

Dimostrare $(1, 1)$ e $(0, 1)$ sono linearmente indipendenti.

Soluzione:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \to 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$ ✔

Dato che $c_1, c_2 = 0$, i vettori sono linearmente indipendenti

9.5.9 Esercizio 7

I vettori $(1, 1, 2)$, $(1, -1, 1)$ e $(2, 0, 3)$ sono linearmente dipendenti?

Soluzione:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

E almeno c_1, c_2 o c_3 devono essere $\neq 0$

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \\ c_3 &= -1 \end{aligned}\right\} \to 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \qquad ✔$$

Dato che c_1, c_2 o c_3 sono diversi da zero, i vettori sono linearmente dipendenti

10 Applicazioni lineari

Siano V, W due sottospazi vettoriali su $\mathbb{K}$.
Una funzione $f : V \longmapsto W$ è un'applicazione lineare che trasforma i vettori v in w se:

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $f(x) = c \cdot f(x)$ dove c è uno scalare:

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 \xrightarrow{f} c_1 \cdot f(x_1) + c_2 \cdot f(x_2)$$

10.1 Esempi di applicazioni lineari:

10.1.1 Esempio 1

- Matrice identità: $I(x) = x$

$$V \xrightarrow{I} V$$

- Funzioni composte:

$$\begin{aligned}
&f : V \longmapsto W \qquad g : W \longmapsto H \\
&f \circ g : V \longmapsto H \\
&g \circ f(x+y) = g(f(x+y)) \\
&\qquad\qquad\quad = g(f(x) + f(y)) \\
&\qquad\qquad\quad = g(f(x)) + g(f(y)) \\
&\qquad\qquad\quad = (g \circ f)x + (g \circ f)y
\end{aligned}$$

10.1.2 Esempio 2: vettori

Dati due vettori: $\vec{x} = (3, 2, -2) \qquad \vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$
e data la funzione: $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(\vec{y}) &= \vec{y} \cdot \vec{x} \\
&= 3y_1 + 2y_2 - 2y_3
\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}
f\big(c(y_1, y_2, y_3)\big) &= f(cy_1, cy_2, cy_3) \\
&= 3cy_1 + 2cy_2 - 2cy_3 \\
&= c \cdot (3y_1 + 2y_2 - 2y_3) \\
&= c \cdot f(\vec{y}) \qquad ✔
\end{aligned}$$

1) $$\begin{aligned}
f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) &= 3(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) - 2(x_3 + y_3) \\
&= 3x_1 + 3y_1 + 2x_2 + 2y_2 - 2x_3 - 2y_3 \\
&= f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \qquad ✔
\end{aligned}$$

10.1.3 Esempio 3: R2 to R

Applicazione lineare: $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$
Trovo le basi di $\mathbb{R}^2$:

$$(1,0) \qquad (0,1) \qquad \textit{basi canoniche}$$

Per conoscere tutte le combinazioni lineari di f mi basta conoscere le immagini (*codominio*) delle basi:

$$f(1,0) = 3 \qquad f(0,1) = 4$$

Ora posso conoscere tutte le combinazioni lineari di f:

$$\begin{aligned} f[(6,-9)] &= f(6 \cdot (1,0) - 9 \cdot (0,1)) \\ &= 6 \cdot f(1,0) - 9 \cdot f(0,1) \\ &= 6 \cdot 3 - 9 \cdot 4 \\ &= -18 \end{aligned}$$

10.1.4 Esempio 4: R2 to R3

Siano V e W due spazi vettoriali di 2 e 3 dimensioni e siano v_1, v_2 le basi di V, e w_1, w_2, w_3 le basi di W.

$$f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

Trovo le basi di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^3 : \quad (1,0,0) \qquad (0,1,0) \qquad (0,0,1) \\ &\mathbb{R}^2 : \quad (1,0) \qquad (0,1) \end{aligned}$$

Per conoscere tutte le combinazioni lineari di f mi basta conoscere le immagini (*codominio*) delle basi:

$$\begin{aligned} &f(v_1) = 3w_1 + 5w_2 - 2w_3 \\ &f(v_2) = w_1 + w_3 \end{aligned}$$

Ora posso conoscere tutte le combinazioni lineari di f:

$$\begin{aligned} f(3v_1 + 2v_2) &= 3 \cdot f(v_1) + 2 \cdot f(v_2) \\ &= 3 \cdot (3w_1 + 5w_2 - 2w_3) + 2 \cdot (w_1 + w_3) \\ &= 11w_1 + 15w_2 - 4w_3 \end{aligned}$$

10.2 Teorema

Siano V e W due spazi vettoriali. La funzione

$$f : V \longmapsto W$$

è un'applicazione lineare.

Trovo le immagini di f:

$$\begin{aligned} cod(f) &= \{w \in W : \exists v \in V \quad f(v) = w\} \\ &= \{f(v) : v \in V\} \qquad \textit{insieme degli output} \end{aligned}$$

Determino il kernel (*nucleo*), ovvero tutti i vettori che vanno in zero:

$$ker(f) = \{v \in V : f(v) = \underline{0}\}$$

cioè l'insieme degli elementi del dominio V che hanno immagine $\underline{0}$ mediante f.

10.2.1 Regole

1. $\text{Imm}(f)$ è sottospazio di W
2. $\ker(f)$ è sottospazio di V
3. $\dim(V) = \dim\ ker(f) + \dim\ Imm(f)$

10.2.2 Esempio 1

Una funzione $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}$

$$f(y_1, y_2, y_3) = 3y_1 + 2y_2 - 2y_3$$

$$3 = \underbrace{\dim\ ker(f)}_{\mathbb{R}^3 - \mathbb{R}^1 \to 3-1=2} + \underbrace{\dim\ Imm(f)}_{\mathbb{R}^1 = 1}$$

10.2.3 Esempio 2

Data una funzione $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ dove

- v_1, v_2 sono base di $\mathbb{R}^2$
- w_1, w_2, w_3 sono base di $\mathbb{R}^3$

La funzione è definita come $f : V \longmapsto W$ ed è un'applicazione lineare.

$$f(v_1) = 4w_1 + w_2 + w_3$$
$$f(v_2) = w_1 + 2w_3$$

$$f(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1 \cdot f(v_1) + c_2 \cdot f(v_2)$$

Costruisco la matrice associata:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_1 + 2c_2 \end{bmatrix}$$

dove la prima riga indica la coordinata rispetto a w_1, la seconda e w_2 e la terza a w_3. I coefficienti vanno messi in colonna.

Prova:

$$\begin{aligned} f(c_1v_1 + c_2v_2) &= c_1(4w_1 + w_2 + w_3) + c_2(w_1 + 2w_3) \\ &= c_1 \cdot f(v_1) + c_2 \cdot f(v_2) \end{aligned}$$

10.3 Costruzione matrice associata

$$f(v_1) = \sum_{i=1}^{k} aw_{i1} = a_{11}w_1 + ... + a_{k1}w_k$$

dove possiamo notare che vi sono due indici, che indicano quindi una matrice:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix}$$

10.3.1 Esempio

Trovare l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ che soddisfi

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Trovo le basi di $\mathbb{R}^4$:

- $e_1 = (1, 0, 0, 0)$
- $e_2 = (0, 1, 0, 0)$
- $e_3 = (0, 0, 1, 0)$
- $e_4 = (0, 0, 0, 1)$

Trovo le basi di $\begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_4 \end{bmatrix}$, ovvero $\mathbb{R}^3$:

- $e'_1 = (1, 0, 0)$
- $e'_2 = (0, 1, 0)$
- $e'_3 = (0, 0, 1)$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 3e'_1 + 4e'_2 + e'_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(e_2) &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= 4e'_1 - 6e'_2 + 2e'_3 \end{aligned}$$

$\dots$

10.4 Applicazione lineare da matrice

Sia V spazio vettoriale di base $v_1, ..., v_n$ e sia W spazio vettoriale di base $w_1, ..., w_m$. Sia A una matrice di m righe e n colonne.

$$f : V \xrightarrow{f_A} W$$

La rappresentazione: **vedi pag. 54 SALPDF**

A^1 indica la prima colonna
A_1 indica la prima riga

Generazione matrice:

$$A \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \left[A^1, A^2, ..., A^n\right] \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= \left[A_1, A_2, ..., A_n\right] \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 \cdot \vec{c} \\ A_2 \cdot \vec{c} \\ \vdots \\ A_n \cdot \vec{c} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} \cdot c_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} \cdot c_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} \cdot c_i \end{bmatrix}$$

La matrice A determina:

- il sottospazio generato dalle righe: $A_1, ..., A_m \subseteq V$
- il sottospazio generato dalle colonne: $A^1, ..., A^n \subseteq W$
- il sottospazio generato dalle colonne e dalle righe è lo stesso:

  $\dim(Imm\ f_A) = \langle A^1, ..., A^n \rangle$
  $n =$ numero di colonne
  $n = \dim(ker\ f_A) + \dim(spazio\ colonne)$

  $\langle A^1, ..., A^n \rangle \subseteq V$
  $\langle A^1, ..., A^n \rangle$ è ortogonale al nucleo $ker(f_A)$
  $n = \dim(ker\ f_A) + \dim \langle A^1, ..., A^n \rangle$

Applicazione lineare:

$$f : V \longmapsto W$$

dove

$$v_1, ..., v_n \in V$$
$$w_1, ..., w_m \in W$$

$$\dim(V) = n$$
$$\dim(W) = m$$

La matrice associata avrà dimensione $m \times n$

$$f(v_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} w_k \text{ nella matrice } A = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

10.5 Isomorfismi

Quando un'applicazione lineare è un isomorfismo?
$f : V \longmapsto W$ è un isomorfismo lineare sse f è un'applicazione lineare biettiva:
$f^{-1} : W \longmapsto V$ è un isomorfismo lineare tale che

$$f \circ f^{-1} = I_V = f^{-1} \circ f$$
$$I_V : V \longmapsto V$$
$$I_V(\underline{x}) = \underline{x}$$

Due spazi vettoriali che hanno la stessa dimensione sono isomorfi se sono sullo stesso campo numerico:
es.

	$\mathbb{R}^4$	$P^3[x]$	matrici 2×2
e_1	$(0,0,0,1)$	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
e_2	$(0,0,1,0)$	x	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
e_3	$(0,1,0,0)$	x^2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
e_4	$(1,0,0,0)$	x^3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$e_1 \longmapsto 1$$
$$e_2 \longmapsto x$$
$$e_3 \longmapsto x^2$$
$$e_4 \longmapsto x^3$$

Esempio numerico :

$$v = (2,2,1,0) \longmapsto 2 + 2x + x^2 \text{ è bigettiva, quindi è un isomorfismo}$$

10.5.1 Teorema

due spazi vettoriali con la stessa dimensione sono isomorfi.
Il nucleo di un'applicazione lineare isomorfa è:

$$\ker(f) = \{0\}$$

Un'applicazione lineare è iniettiva sse $\ker(f) = \{0\}$ Una matrice quadrata è invertibile quando f_A è isomorfa (ovvero quando è associata ad un'applicazione lineare isomorfa).
Es.

$$\begin{aligned} &f : V \longmapsto W && A = m \times n \\ &g : W \longmapsto H && B = r \times m \\ &g \circ f : V \longmapsto H && BA = r \times n \end{aligned}$$

10.5.2 Cambio di base

esempio in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} &e_1 = (0, 1) && w_1(1, 2) \\ &e_2 = (1, 0) && w_2 = (3, 1) \end{aligned}$$

Voglio cambiare la base canonica e_1, e_2 con la base w_1, w_2.
Una volta controllato che w_1, w_2 siano linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned} e_1 &= c_1 w_1 + c_2 w_2 \\ e_2 &= d_1 w_1 + d_2 w_2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$(1, 0) = c_1(1, 2) + c_2(3, 1)$$

$$\begin{cases} 1 = c_1 + 3c_2 \\ 0 = 2c_1 + c_2 \end{cases} \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{5} \\ c_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1, 0) &= -\frac{1}{5}(1, 2) + \frac{2}{5}(3, 1) \\ &= (-\frac{1}{5} + \frac{6}{5}, -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}) \\ &= (1, 0) \qquad ✔ \end{aligned}$$

Ripeto lo stesso procedimento con d_1, d_2

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & d_1 \\ \frac{2}{5} & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix}$$

Ogni matrice elementare in quanto invertibile determina un isomorfismo.

Data la matrice $A = m \times n$:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0_m \end{bmatrix} \qquad \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^m$$

le soluzioni del sistema lineare omogeneo corrispondono al nucleo $\ker(f_A)$, che è sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

Se $m = n$??

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_E} \mathbb{R}^m$

$EA \qquad \ker(f_A \circ f_E) = \ker(f_A)$

infatti moltiplicando per una matrice elementare non modifico lo spazio delle soluzioni, semplifico solamente la matrice.

altrimenti se $n > m$

$$n = \dim(\ker(f_A)) + \dim(\mathrm{Imm}(f_A))$$

Esempio

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n$

$$\overset{m\times n}{\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad b \in \mathrm{Imm}(f_A)$$

$A\underline{x} = \underline{b}$

$EA \qquad EA\underline{x} = E\underline{b}$

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_E} \mathbb{R}^m$

il sistema ammette soluzioni: $(f_E \circ f_A)\underline{x} = E\underline{b}$

Esempio:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

risolvere questo sistema significa:

$$A_1 \cdot \underline{x} = 0$$

$$A_2 \cdot \underline{x} = 0 \qquad\qquad f_A : \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{spazio righe}} \longmapsto \overbrace{\mathbb{R}^3}^{\text{spazio colonne}}$$

$$A_3 \cdot \underline{x} = 0$$

ovvero trovare un vettore x perpendicolare ad ogni vettore riga A^1, A^2, A^3, che a sua volta significa essere ortogonale al sottospazio generato dai vettori riga A^1, A^2, A^3. Questo implica che il vettore x deve stare nel nucleo dell'applicazione lineare. Ma ogni vettore nel nucleo è perpendicolare ai vettori riga. Il nucleo $\ker(f_A)$ è quindi ortogonale al sottospazio generato dalle righe.

10.5.3 Teorema

sia V uno spazio vettoriale, sia $u \subseteq V$ un sottospazio di V. Allora il sottospazio di V ortogonale a u è:

$$u^{\perp} = \{x \in V : (\forall y \in u) x \cdot y = 0\}$$

verifica $\dim(V) = \dim(u) + \dim\left(u^{\perp}\right)$.

Tornando all'esempio di prima:
lo spazio generato dalle righe è lo spazio $(\ker(f_A))^{\perp}$

$$\begin{aligned}\dim(V) &= \dim(\ker(f_A)) + \dim(\text{spazio delle righe})\\ 3 &= \dim\left(\mathbb{R}^3\right)\\ &= \dim(\ker(f_A)) + \dim(\text{spazio delle righe})\\ &= \dim(\ker(f_A)) + \dim(\operatorname{Imm}(f_A))\\ &= \dim(\ker(f_A)) + \dim(\text{spazio delle colonne})\end{aligned}$$

10.6 Il determinante

Data una matrice quadrata $A = m \times n$, il $\det(A)$ appartiene campo numerico. Proprietà:

1. il determinante della matrice identica è 1:

$$\det(I) = 1$$

2. se due colonne contigue sono uguali:

$$\det(A) = 0$$

3. il determinate è lineare su ciascuna colonna:

$$\det\left(A^1, ..., A^n\right)$$
$$\det\left(A^1, ..., B + C, ..., A^n\right) = \det\left(A^1, ..., B, ..., A^n\right) + \det\left(A^1, ..., C, ..., A^n\right)$$

$$\det\left(A^1, ..., c \cdot A^i, ..., A^n\right) = c \cdot \det\left(A^1, ..., A^n\right)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) + \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

4. il determinante di una matrice diagonale è la il prodotto della diagonale stessa
5. se due colonne contigue vengono scambiate, il determinate cambia segno:

$$\det\left(A^1, A^2\right) = -\det\left(A^2, A^1\right)$$

6. se le colonne A^i e A^j con $i \neq j$ sono uguali, $\det(A) = 0$
7. se si sommano ad una colonna un multiplo scalare di un'altra colonna, il determinante non cambia

10.6.1 Calcolo del determinante

Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

il determinante della matrice A si indica anche come $\det(A) = |A|$.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \end{vmatrix} \\
&= \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot 4 - 0 \cdot 0 + (0 \cdot 0 - 2 \cdot 3) \\
&= 4 - 6 \\
&= -2
\end{aligned}$$

10.6.2 Regola di Cramer

Con la regola di Cramer possiamo risolvere il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ utilizzando i determinanti.

Sia A una matrice $n \times n$ con determinante diverso da 0.
Se b è un vettore colonna e $c_1, ..., c_n$ sono scalari tali che

$$A\underline{c} = c_1A^1 + c_2A^2 + ... + c_nA^n$$

allora abbiamo

$$c_i = \frac{\det\left(A^1, ..., A^{i-1}, b, A^{i+1}, ..., A^n\right)}{\det(A)}$$

10.6.3 Esercizio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo trovare c_1 e c_2:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\det(A)} = -1$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{3}{2}$$

Regola del determinante

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot |A_{i1}| + (-1)^{i+2} \cdot a_{i2} \cdot |A_{i2}| + ... + (-1)^{i+n} \cdot a_{in} \cdot |A_{in}| \\ &= (-1)^{i+1} \cdot a_{1i} \cdot |A_{1i}| + (-1)^{i+2} \cdot a_{2i} \cdot |A_{2i}| + ... + (-1)^{i+n} \cdot a_{ni} \cdot |A_{ni}| \end{aligned}$$

Esempio

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

quella non evidenzioata è la matrice A_{11}. Prendo l'elemento 11 e elimino la sua riga e colonna

Calcolo del determinante rispetto alla riga 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} \cdot 2|A_{i1}| + (-1)^{i+2} \cdot 1|A_{i2}| + (-1)^{i+3} \cdot 4|A_{i3}|$$

$$i = 2: \qquad = (-1)^{2+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot (-1) - 3 + 12 = 12 - 1 = 11$$

10.6.4 Esercizio

Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Devo scegliere una riga dalla quale partire. Mi conviene prendere quella con più zeri possibile. In questo caso l'ultima riga. Per facilitare ancora di più sottraggo la 3 riga dalla seconda, e ottengo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a questo punto scelgo come riga per calcolare il determinante la quarta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{vmatrix} = \underset{pos}{-} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

poi utilizzo la 1 riga, che ha più zeri delle altre:

$$-\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -\left(\mathbf{1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} + \mathbf{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}\right) = -(10 + 2 \cdot (-15)) = -(10 - 30) = 20$$

<u>Il determinante della matrice è 20.</u>

I segni "$-$" evidenziati con *pos* sono quelli derivanti dalla posizione del numero. Sommo indice riga e colonna, se sono dispari il segno è negativo, positivo altrimenti.

10.6.5 Determinante di un applicazione lineare

Sia $f : V \longmapsto W$ un'applicazione lineare. Sia $v_1, ..., v_n$ una base e sia A la matrice $n \times n$ che rappresenta f rispetto a $v_1, ..., v_n$.

Se consideriamo un'altra base di V, $w_1, ..., w_n$, allora consideriamo la matrice B che rappresenta f rispetto a questa nuova base. Sappiamo inoltre che esiste una matrice invertibile associata al cambiamento di base, che chiameremo matrice C. Cosi abbiamo:

$$B = C^{-1}AC$$

e quindi

$$|B| = |C^{-1}| \cdot |A| \cdot |C| = |A|$$

Segue che **il determinante di una applicazione lineare f è indipendente dalla scelta della base** (e quindi della matrice che rappresenta f).

Data una applicazione lineare f, possiamo scrivere quindi $\det(f)$, intendendo con questo il determinante di una qualsiasi matrice che rappresenta f.

$$\underset{v_1,...,v_n}{V} \underset{C}{\overset{I}{\longmapsto}} \underset{w_1,...,w_n}{V} \underset{B}{\overset{f}{\longmapsto}} \underset{w_1,...,w_n}{V} \overset{I}{\longmapsto} \underset{v_1,...,v_n}{V}$$

10.6.6 Esercizio

Data l'applicazione lineare identica $I : \underset{v_1,v_2}{\mathbb{R}^2} \longmapsto \underset{w_1,w_2}{\mathbb{R}^2}$.

$$v_1 = (1,1) \qquad w_1 = (1,-1)$$
$$v_2 = (0,1) \qquad w_2 = (-1,-1)$$

$$I(v_1) = v_1 = c_1 w_1 + c_2 w_2 = -w_2$$
$$I(v_2) = v_2 = d_1 w_1 + d_2 w_2 = d_1 w_1 + d_2 w_2$$

$$d_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} d_1 - d_2 = 0 \\ -d_1 - d_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = d_2 \\ -d_2 - d_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = d_2 \\ d_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = -\frac{1}{2} \\ d_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{2} \\ -1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} ???$$

10.6.7 Altre proprietà del determinante

$$\det(A^T) = \det(A)$$
$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$
$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$$

10.7 Autovettori e autovalori

Sia V uno spazio vettoriale e sia $f : V \longmapsto V$ un'applicazione lineare. Un *autovettore* è un elemento non nullo $v \in V$ per cui esiste uno scalare λ tale che

$$f(v) = \lambda v \qquad \text{dilato o restringo il vettore } v$$

Lo scalare λ viene detto autovalore.

Se A è una matrice che rappresenta un'applicazione lineare f rispetto ad una base $v_1, ..., v_n$, e l'autovettore ha coordinate $v = c_1v_1 + ... + c_nv_n$, allora

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

l'autovalore λ e l'autovettore v sono detti autovalore e autovettore della matrice A.

Esempio. Se V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$, v è un autovettore di autovalore sse

$$f(cv) = c \cdot \lambda v \qquad \textit{ovvero se trasforma rette in rette, dilatandole } (\lambda > 1) \textit{ o contraendole } (0 < \lambda < 1)$$

Condizioni equivalenti

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda c_1 \\ \vdots \\ \lambda c_n \end{bmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \lambda \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}^{\text{matrice identica}} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I) \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

In una matrice può esistere un autovalore sse esiste λ nel campo numerico tale che $\det(A - \lambda I) = 0$

10.7.1 Esercizio

Determinare gli autovalori di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Inizio a risolvere:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} &= (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 6 = 0 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \qquad \leftarrow \text{polinomio caratteristico} \end{aligned}$$

Le soluzione dell'equazione $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ sono $\lambda = \dfrac{5}{2} \pm \dfrac{\sqrt{33}}{2}$. Quindi la matrice ha due autovalori.

10.7.2 Esercizio 2

Determinare gli autovalori e autovettori di

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

inizio a risolvere trovando la matrice $A - \lambda I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

ora determino il determinante della matrice risultante, in modo da ottenere il polinomio caratteristico che mi determina gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

trovato il polinomio trovo le sue radici:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 3$$

determinati questi due autovalori vi sono due differenti casi:

- caso 1: $\lambda = 1$

  $$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ 2 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

  ora verifico che l'autovalore determini un vettore corretto (in questo caso cioè che un vettore venga trasformato in se stesso):

  $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  risolvo

  $$0c_1 + 0c_2 + 2c_1 + 2c_2 = 2c_1 + 2c_2$$

  e ottengo $c_1 = -c_2$.

  Ora scelgo arbitrariamente due numeri che soddisfano questa uguaglianza:

  $$c_1 = -1 \qquad c_2 = 1$$

  che sono un autovettore di autovalore $\lambda = 1$ e sostituisco:

  $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \checkmark$$

  Abbiamo verificato il primo autovalore per $\lambda_1 = 1$. Possiamo infatti notare che un vettore passante per quella retta viene trasformato in se stesso.

- caso 2: $\lambda = 3$

  $$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-3 & 0 \\ 2 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

  trovo un vettore passante per la retta

  $$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  trovo

  $$\begin{cases} -2c_1 + 0c_2 = 0 \\ 2c_1 + 0c_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2c_1 = 0 \\ 2c_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \text{arbitrario} \end{cases}$$

  sostituisco utilizzando $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$:

  $$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \checkmark$$

  che è esattamente una dilatazione del vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ di 3 volte. Abbiamo verificato anche il secondo autovalore per $\lambda = 3$.

Nell'esercizio precedente abbiamo utilizzato come base dell'applicazione lineare la base canonica di $\mathbb{R}^2$, ovvero $e_1 = (0, 1)$ ed $e_2 = (1, 0)$. Se ora volessi cambiare la base scegliendo come nuova base gli autovettori precedentemente trovati, come diventerebbe la matrice associata alla stessa applicazione lineare?

Prendo le nuove basi:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

conosco anche le immagini delle basi:

$$f(v_1) = v_1$$
$$f(v_2) = 3v_2$$

che sono determinate da λ trovato in precedenza.

Ora voglio per esempio verificare come viene trasformato il vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

- con la base canonica (e la relativa matrice associata) diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- mentre con la nuova base devo trovarlo (in quanto non ho ancora la nuova matrice)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  risolvo il sistema

$$\begin{cases} 1 = -c_1 + 0c_2 \\ 1 = c_1 + c_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

  sostituisco con i valori appena ricavati, trovando così le coordinate rispetto alla nuova base

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

  che equivalgono a $-1v_1 + 6v_2$. A questo punto verifico che i valori ricavati siano corretti:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad ✔$$

10.7.3 Condizioni equivalenti

Sia A una matrice $n \times n$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

I. λ è un autovalore di A

II. $|A - \lambda I| = 0$

III. la matrice $A - \lambda I$ non è invertibile

10.7.4 Matrici simili

Due matrici quadrate A e B sono simili quando esiste una matrice invertibile M tale che:

$$A = M^{-1}BM$$

Due matrici simili hanno:

- stesso determinante
- stesso polinomio caratteristico
- stessi autovalori

10.8 Autospazi

Sia A una matrice quadrata. Dato un autovalore λ di A, l'insieme degli autovettori di autovalore λ è un sottospazio vettoriale di V che coincide con il nucleo dell'applicazione lineare determinata dalla matrice $A - \lambda I$

10.8.1 Molteplicità di un autovalore

Sia V uno spazio vettoriale, $f : V \longmapsto V$ un'applicazione lineare e λ un autovalore di f. Allora il sottospazio vettoriale E_λ degli autovettori di λ si chiama autospazio. La dimensione dell'autospazio E_λ si dice molteplicità dell'autovalore λ.

Se

Esempio Determinare la molteplicità degli autovalori della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Devo trovare il polinomio caratteristico e vedere quali autovalori lo annullano quante volte:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

trovo gli zeri del polinomio

$$\lambda_0 = 1 \qquad \lambda_1 = -1$$

la molteplicità di λ_0 è 2, in quanto annulla due volte il polinomio caratteristico, mentre la molteplicità di λ_1 è 1 in quanto lo annulla solo una volta.

La **somma delle molteplicità** algebriche non può **mai superare la dimensione della matrice**. Se stiamo lavorando in $\mathbb{C}$, dove un polinomio di grado n ha esattamente n radici, la somma delle molteplicità sarà uguale alla dimensione della matrice, mentre se lavoriamo in $\mathbb{R}$, la somma delle molteplicità algebriche saranno al più equivalenti alla dimensione della matrice.

10.9 Diagonalizzare una matrice

Sia f l'applicazione lineare associata alla matrice A rispetto alla base canonica. Dire che A è diagonalizzabile significa dire che esiste un cambio di base dalla base canonica e_i ad una base opportuna w_i tale che che l'applicazione lineare f rispetto a questa nuova base ammette una matrice diagonale D.
Se P è la matrice del cambio di base da w_i a e_i, allora si ha

$$A = PDP^{-1}$$

da cui segue

$$D = P^{-1}AP$$

$$\text{e } A^{n} = \underbrace{A \cdot ... \cdot A}_{n \text{ volte}} = PD^{n}P^{-1}$$

10.9.1 Teorema

Sia A una matrice reale $n \times n$ e siano $\lambda_1, ..., \lambda_k$ tutti gli autovalori reali distinti di A. Allora si ha

(i) A è diagonalizzabile sse la somma delle dimensioni degli autospazi è n:

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(E_{\lambda_k}) = n$$

(ii) se A è diagonalizzabile con $D = P^{-1}AP$, allora le n colonne di P possono essere suddivise in k insiemi $\dim(E_{\lambda_1}), \ldots, \dim(E_{\lambda_k})$.

I vettori colonna del primo insieme sono una base del sottospazio E_{λ_1}, i vettori colonna del secondo insieme sono una base del sottospazio E_{λ_2} e così via. Gli elementi della diagonale di D sono gli autovalori. Un autovalore occorrerà tante volte in D quanto la dimensione del suo autospazio.

10.9.2 Esercizio

Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

vogliamo determinare

a) gli autovalori di A e la relativa molteplicità
b) gli autospazi di A e trovare, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A
c) calcolare la matrice P invertibile, tale che $P^{-1}AP$ sia diagonale

Inizio soluzione

a) autovalori e molteplicità:

1. trovo il polinomio caratteristico

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)$$

2. trovo le sue radici

$$\lambda_0 = 1 \qquad \lambda_1 = 2$$

3. la molteplicità di λ_0 è 1, in quanto annulla solo una volta $P(\lambda)$
4. mentre la molteplicità di λ_1 è 2 in quanto lo annulla due volte

b) autospazi: per trovare gli autospazi devo risolvere i due sistemi lineari omogenei per $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$

- risolvo il sistema per $\lambda = 1$:

  trovo $A - I$

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-1 & 0 \\ 1 & 0 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  imposto il sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  risolvo

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}$$

  ora scelgo 3 valori che soddisfino il sistema

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1 \qquad x_3 = -1$$

  avrò quindi che l'autospazio delle soluzioni ha come base l'autovettore per $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ per $\lambda = 1$

- risolvo il sistema per $\lambda = 2$:

  trovo $A - I$

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ -1 & 2-2 & 0 \\ 1 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  imposto il sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  risolvo

$$\begin{cases} -x_1 = 0 \\ -x_1 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \text{arbitarario} \\ x_3 = \text{arbitarario} \end{cases}$$

  la soluzione del sistema è un piano: fisso una dimensione, ovvero $x_1 = 0$ e rimango con due dimensioni, un piano. Scelgo la base canonica del piano ovvero $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$, da cui segue che la base è:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) matrice invertibile P

la matrice P tale che $D = P^{-1}AP$ è diagonale (ovvero la matrice che ci permette di diagonalizzare A), è la matrice le cui colonne sono gli autovettori v_1, v_2, v_3:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

infatti possiamo verificare la diagonalizzazione trovando anche P^{-1} e moltiplicando le matrici:

- trovo con Cramer l'inversa di P:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- moltiplico le matrici per ottenere la diagonalizzazione di A: $P^{-1}AP = D$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad ✔$$

10.10 Esercizi

10.10.1 Esercizio 1

Siano dati in $\mathbb{R}^3$ i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dobbiamo:

a) verificare che esiste una sola applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ avente v_1, v_2, v_3 come autovettori associati, rispettivamente, agli autovalori 0,3,6

b) determinare

   1) la matrice A associata ad f
   2) il kernel $\ker(f)$
   3) l'immagine $\operatorname{Imm}(f)$

Soluzione

Dagli autovalori ricavo che

$$f(v_1) = 0$$
$$f(v_2) = 3v_2$$
$$f(v_3) = 6v_3$$

ora verifico che v_1, v_2, v_3 siano linearmente indipendenti:

$$c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

risolvo il sistema e controllo che gli scalari c_1, c_2, c_3 siano uguali a zero:

$$\begin{cases} 2c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_3 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_3 = 2c_2 \\ c_2 = -2c_3 \\ c_2 = c_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_3 = 2c_2 \\ c_2 = -2(2c_2) \\ c_2 = c_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_3 = 2c_2 \\ c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

ho verificato che effettivamente siano linearmente indipendenti, e quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Ne segue che f è unica perché è definita su ogni vettore $v = c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3$ di $\mathbb{R}^3$:

$$f(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3) = c_1f(v_1) + c_2f(v_2) + c_3f(v_3) = 3c_2v_2 + 6c_3v_3$$

La matrice di f rispetto alla base v_1, v_2, v_3 di autovettori è la matrice diagonale:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

per calcolare A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ dobbiamo considerare la matrice P le cui colonne sono gli autovettori rispetto alla base canonica:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

siccome $D = P^{-1}AP$, ricaviamo che $A = PDP^{-1}$. Dobbiamo quindi calcolare l'inversa della matrice P. Per calcolare l'inversa dobbiamo:

1. calcolare il determinante, e se $\det(P) = 0$ dobbiamo fermarci
2. si calcola la matrice dei cofattori
3. si calcola la trasposta della matrice ricavata al punto sopra
4. si moltiplica la matrice trasposta per $\dfrac{1}{\det(P)}$

inizio del calcolo dell'inversa:

1. calcolo il determinante di P:

   come prima cosa sommo la seconda colonna alla prima, per ottenere un'altro 0:

   $$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   prendo come riferimento la 3 riga

   $$\det(P) = -1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$$

2. calcolo la matrice dei cofattori: $\text{cof}_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$

   $$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

3. calcolo la trasposta della matrice dei cofattori

   $$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

4. moltiplico la trasposta per $\dfrac{1}{\det(P)}$

   $$P^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

ora che ho P^{-1} posso determinare A:

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -4/3 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix} =$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Infine calcolo la dimensione del nucleo e dell'immagine di f:

$$3 = \underbrace{\dim(\ker(f))}_{1} + \underbrace{\dim(\text{Imm}(f))}_{2}$$

la dimensione del kernel è determinata da tutti i vettori che vanno in 0. L'unico vettore che va in zero è v_1, quindi $\dim(\ker(f)) = 1$, mentre la dimensione dell'immagine è 2, determinata da: $\dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2$.

10.10.2 Esercizio 2

Data un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ che ha $(1,2)$ e $(1,3)$ come autovettori e sia $f(1,0) = (4,6)$, determinare quali delle seguenti affermazioni è vera:

a) f ha autovalori 1 e 2

b) $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

c) $f(0,1) = (-1,-1)$

Soluzione

Se $(1,2)$ e $(1,3)$ sono autovettori, essendo linearmente indipendenti, formano i vettori colonna di $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, con le basi $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$. Quindi

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0) = 4e_1 + 6e_2 \\ f(e_2) &= c_1e_1 + c_2e_2 \end{aligned}$$

La matrice sarà:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & c_1 \\ 6 & c_2 \end{bmatrix}$$

Verifico ora che $\lambda_1 = 1$ sia autovalore di $f(1,2)$ e di $f(1,3)$:

$$\begin{aligned} f(1,2) &= \lambda_1(1,2) = 1(1,2) = (1,2) \\ f(e_1 + 2e_2) &= f(e_1) + 2f(e_2) \\ &= (4,6) + 2c_1 + 2c_2 \\ &= (4 + 2_c1,\ 6 + 2c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4 + 2c_1 = \lambda_1 = 1 \\ 6 + 2c_2 = \lambda_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2c_1 = 1 - 4 \\ 2c_2 = 1 - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -\frac{3}{2} \\ c_2 = -2 \end{cases}$$

adesso che ho trovato c_1 e c_2 li sostituisco:

$$f(1,2) = (4 + 2_c1,\ 6 + 2c_2) = \left(4 + 2\left(-\frac{3}{2}\right),\ 6 + 2(-2)\right) = (1,2)$$

il primo vettore è un autovettore di autovalore $\lambda_1 = 1$, ora verifico anche il secondo per $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{aligned} f(1,3) &= \lambda_2(1,3) = 2(1,3) = (2,6) \\ f(1e_1 + 3e_2) &= f(e_1) + 3f(e_2) \\ &= (4,6) + 3\left(-\frac{3}{2},\ -2\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2},\ 0\right) \end{aligned}$$

quindi $f(1,3) = \lambda_2(1,3)$, ma in realtà $f(1,3) = \left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, da cui $f(1,3) = \lambda_2(1,3) = (2,6) \neq \left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, per cui $\lambda_2 = 2$ non è un autovalore di questo autovettore.
Provo ad invertire λ_1 e λ_2, cioè a verificare se λ_1 è autovalore di $(1,3)$ e λ_2 è autovalore di $(1,2)$:

$$\begin{aligned} f(1,2) &= \lambda_2(1,2) = 2(1,2) = (2,4) \\ f(e_1 + 2e_2) &= f(e_1) + 2f(e_2) \\ &= (4,6) + 2c_1 + 2c_2 \\ &= (4 + 2_c1,\ 6 + 2c_2) \\ &= (4 + 2c_1,\ 6 + 2c_2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 4 + 2c_1 = \lambda_2 = 2 \\ 6 + 2c_2 = \lambda_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2c_1 = 2 - 4 \\ 2c_2 = 2 - 6 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

ora sostituisco nuovamente c_1 e c_2:

$$f(1,2) = (4 + 2c_1,\ 6 + 2c_2) = (4 + 2(-1),\ 6 + 2(-1)) = (2,4)$$

il primo vettore è un autovettore di autovalore $\lambda_2 = 2$, ora verifico anche il secondo per $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{aligned}
f(1,3) &= \lambda_1(1,3) = 1(1,3) = (1,3) \\
f(1e_1 + 3e_2) &= f(e_1) + 3f(e_2) \\
&= (4,6) + 3(-1,\ -1) \\
&= (4-3,\ 6-3) \\
&= (1,3)
\end{aligned}$$

il secondo vettore è un autovettore di autovalore $\lambda_1 = 1$, infatti $f(1,3) = \lambda(1,3) = 1(1,3) = (1,3)$. Quindi:

- l'autovalore $\lambda_1 = 1$ è associato all'autovettore $(1,3)$
- l'autovalore $\lambda_2 = 2$ è associato all'autovettore $(1,2)$

Ora posso controllare che il polinomio caratteristico $(\lambda^2 + 3\lambda + 2)$ sia uguale a zero:

- $\lambda_1 = 1$:

$$1^2 + 3 \cdot 1 + 2 = 0 \qquad \to \qquad 6 \neq 0$$

- $\lambda_2 = 2$:

$$2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 0 \qquad \to \qquad 12 \neq 0$$

da cui segue che questo non è il polinomio caratteristico di questa applicazione lineare.

A questo punto verifico che $f(0,1) = (-1,-1)$: sapendo però che la matrice (avendo trovato c_1 e c_2) è $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$, e che i vettori colonna sono la base, posso affermare che $(-1,-1) = e_2$, quindi $f(e_2) = (-1,-1)$.

10.10.3 Esercizio 3

Sia data un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^4$ che ha 0 e 5 come autovalori con molteplicità 2. L'applicazione f è semplice, ovvero ha una base di autovettori. Determinare quali delle seguenti affermazioni è vera:

Sia A la matrice associata alla base canonica,

a) le colonne di A sono autovettori associati ad f

b) $A^3 = 25A^2$

c) A ha almeno una colonna nulla

d) f è surgettiva

Soluzione

Sapendo che $P^{-1}DP = A$ e che quindi $A = PDP^{-1}$, e che gli autovettori stanno sulla diagonale della matrice D:

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

in quanto entrambi gli autovalori hanno molteplicità 2, la matrice sarà 4×4. Il determinante di questa matrice è 0, ed è indipendente dalle scelta della base, quindi tutte le matrici associate a questa applicazione lineare avranno $\det(A_f) = 0$. Se il determinante è zero, la matrice non è invertibile, e non è un isomorfismo. Infatti abbiamo almeno una retta che va in 0, da cui:

$$\dim(\ker(f)) \geq 1 \qquad \dim(\mathrm{Imm}(f)) \leq 3$$

Calcoliamo ora il rango di D, ovvero la più grande matrice quadrata che ha determinante diverso da zero: $\mathrm{rk}(D) = 2$, da cui:

$$\dim(\mathrm{Imm}(f)) = 2$$

da cui a sua volta segue:

$$\begin{aligned} &4 = \dim(\ker(f_A)) + \dim(\mathrm{Imm}(f_A)) \\ &4 = \dim(\ker(f_A)) + 2 \qquad \rightarrow \qquad \dim(\ker(f_A)) = 2 \\ &4 = 2 + 2 \end{aligned}$$

Abbiamo verificato che f <u>non</u> è suriettiva.

Verifico che $A^3 = 25A^2$:

$$\begin{aligned} A^3 = PD^3P^{-1} = P &\begin{bmatrix} 0^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5^3 \end{bmatrix} P^{-1} \\ = 25P &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} P^{-1} \\ = 25PDP^{-1} &= 25A = 5^2A \end{aligned}$$

quindi $A^3 \neq 25A^2$.

Verifico che le colonne siano autovettori associati ad f:

La prima colonna della matrice (A^1) sarà uguale alla base e_1 trasposta (e_1^T), quindi:

$$f(A^1) = AA^1 = A(Ae_1^T) = A^2e_1^T = 5Ae_1^T = 5f(A^1)$$

da cui, generalizzando, otteniamo:

$$f(A^i) = AA^i = A(Ae_i^T) = A^2e_i^T = 5Ae_i^T = 5f(A^i)$$

Quindi ogni colonna della matrice A è un autovettore dei autovalore $\lambda = 5$. Da cui deduciamo che non può nemmeno avere colonne nulle, perché per definizione un autovalore non può essere nullo.

11 Tutorato

Esercizi svolti durante le ore di tutorato

11.1 Rette e piani

11.1.1 Esercizio 1

Trovare l'angolo (θ) tra questi vettori:

a. $(1,0)$ e $(1,1)$

b. $(1,0)$ e $(\sqrt{3},1)$

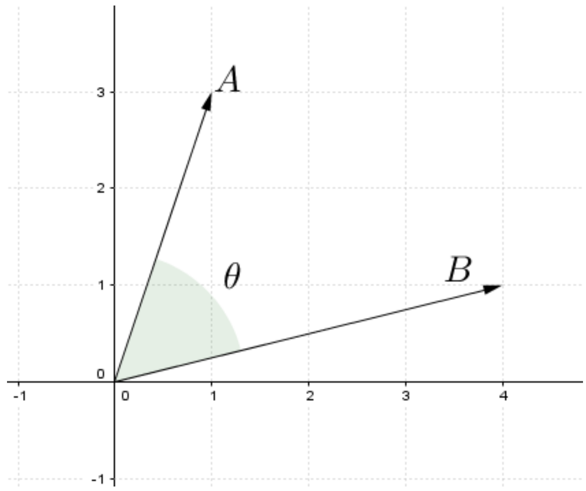
c. $(1,0)$ e $(1,\sqrt{3})$

d. $(1,0)$ e $(-1,\sqrt{3})$

e. $(0,1)$ e $(\sqrt{3},-1)$

Sapendo che

$$\cos(\theta) = \frac{A \cdot B}{||A|| \cdot ||B||}$$



inizio a trovare l'angolo della prima coppia di vettori

a. $\cos(\theta) = \dfrac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2} \cdot \sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b. $\cos(\theta) = \dfrac{1 \cdot 1\sqrt{3} + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2+0^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

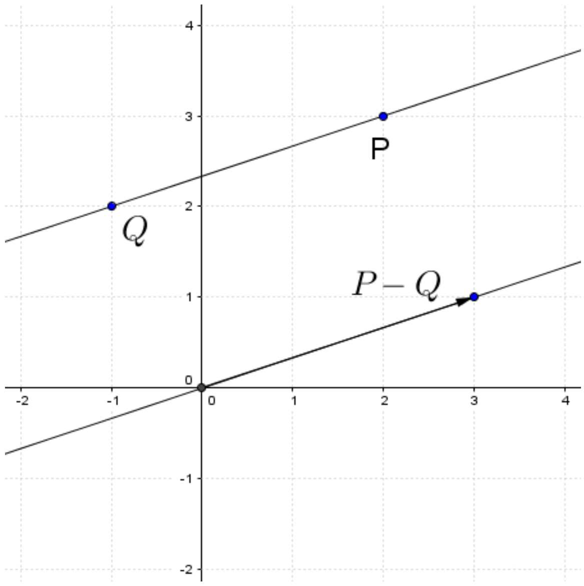
c. $\cos(\theta) = \dfrac{1 \cdot 1 + 0 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{1^2+0^2} \cdot \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}$

d. $\cos(\theta) = \dfrac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{1^2+0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}} = -\frac{1}{2}$

e. $\cos(\theta) = \dfrac{0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{0^2+1^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}} = -\frac{1}{2}$

11.1.2 Esercizio 2

Trovare l'equazione parametrica passante per $P(2,3)$ e $Q(-1,2)$



$P - Q = (2 - (-1), 3 - 2) = (3, 1)$
...?

11.1.3 Esercizio 3

Trovare l'equazione della retta passante per $P(1,1,-1)$ e $Q(-2,1,3)$

$P-Q=(3,0,-4)$ trovo $P-Q$
$(3,0,-4)t+(-2,1,3)$ sommo $(P-Q)t$ ad un punto appartenente alla retta (Q in questo caso)

$x=3t-2$
$y=1$
$z=-4t+3$

11.1.4 Esercizio 4

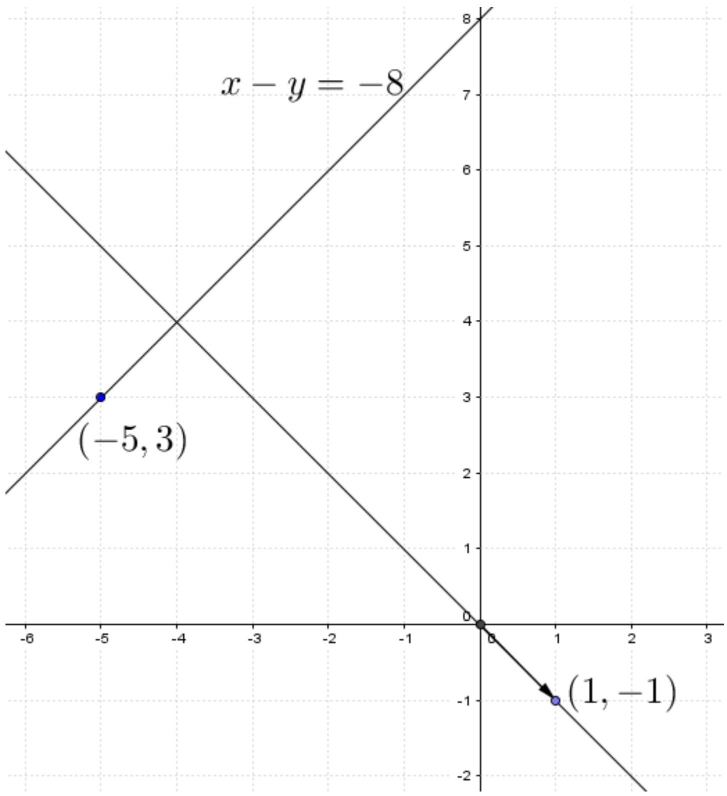
Trovare l'equazione della retta perpendicolare a $P(1,-1)$ e passante per $Q(-5,3)$

Sapendo che un vettore (x,y) è perpendicolare ad $(1,-1)$ sse $(1,-1)(x,y)=0 \rightarrow x-y+c=0$

$x-y+c=0$
$-5-3+c=0$ sostituisco con le coordinate del punto per il quale la retta passa
$c=8$ e trovo c

$x-y=-8$ equazione della retta perpendicolare

Disegno esplicativo:



11.1.5 Esercizio 5

Scrivere in forma cartesiana

$$(1,0)t + (0,3) = (x,y)$$

$$x = 1 \cdot t + 0 = t$$
$$y = 0 \cdot t + 3 = 3$$

11.1.6 Esercizio 6

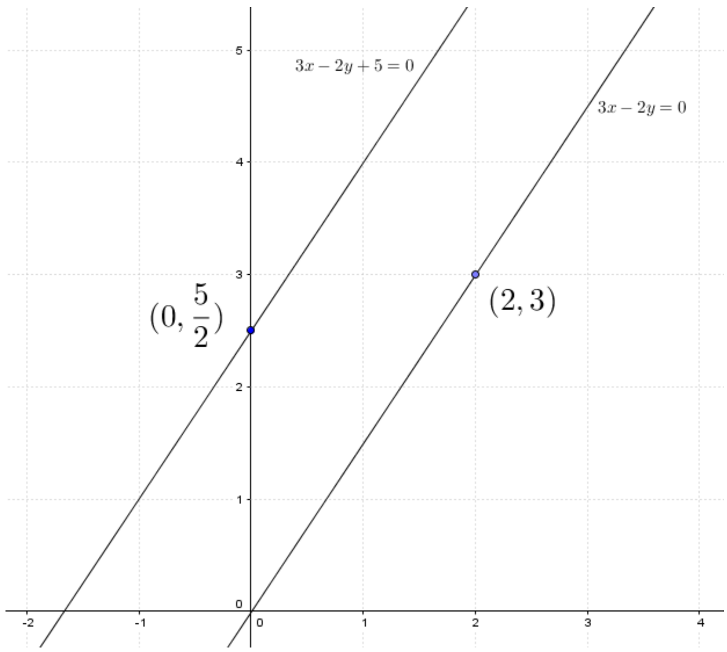
Scrivere in forma parametrica

$$3x - 2y + 5 = 0$$

Devo prendere un punto (*vettore*) della retta parallela passante per l'origine

$$t(2,3) + \left(0, \frac{5}{2}\right) = (x,y)$$

Disegno esplicativo:



11.2 Spazi vettoriali

11.2.1 Esercizio 1

Quali dei seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali:

$$v_1 = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \qquad x = y = z\}$$
$$v_2 = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \qquad x = 4\}$$
$$v_3 = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \qquad z = x^2\}$$
$$v_4 = \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 \qquad (x - y)^2 = 0\}$$

Svolgimento v_1: è sottospazio

- verifico che $0 \in v_1$:

$$\{0 \in v_1\} \qquad ✔$$

- verifico che il prodotto per uno scalare stia ancora in v_1:

$$(a, b, c) \in v_1 \qquad \lambda \in v_1$$

$$\lambda(a, b, c) \in v_1?$$
$$a = b = c$$
$$\lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda a = \lambda b = \lambda c \qquad ✔$$

- verifico che la somma resti in v_1:

$$(a, b, c), (m, n, p) \in v_1$$

$$(a + m, b + n, c + p) \in v_1?$$
$$\left.\begin{matrix} a = b = c \\ m = n = p \end{matrix}\right\} a + m = b + n = c + p \in v_1 \qquad ✔$$

Svolgimento v_2: non è sottospazio

- verifico che $0 \in v_2$:

$$\{0 \notin v_1\} \qquad ✘$$

Svolgimento v_3: non è sottospazio

- verifico che $0 \in v_3$:

$$\{0 \in v_1\} \qquad ✔$$

- verifico che la somma resti in v_3:

$$(a, b, c) \in v_3 \Leftrightarrow a = c^2$$
$$(a, b, a^2) \in v_3$$

$$\left.\begin{matrix} x = (2, 3, 4) \in v_3 \\ y = (3, 2, 9) \in v_3 \end{matrix}\right\} x + y = (5, 5, 13) \notin v_3 \qquad ✘$$

Svolgimento v_4: per casa

11.2.2 Esercizio 2

Trovare una base dello spazio vettoriale $(\mathbb{C}, +)$ sul campo numerico $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

> 1 e i sono linearmente indipendenti?

$$\underbrace{(-i)}_{\text{scalre su } \mathbb{C}} \cdot 1 + \overbrace{1}^{\text{scalare su } \mathbb{C}} \cdot i = 0 \qquad \text{non sono linearmente indipendenti}$$

Una delle basi è

> 1 : perché $1 \cdot (a + bi) = a + bi$ che è un numero in $\mathbb{C}$
> *oppure*
> i : perché $i \cdot (a + bi) = ai - b$ che è un numero in $\mathbb{C}$

11.2.3 Esercizio 3

Trovare una base dello spazio vettoriale $(\mathbb{C}, +)$ sul campo numerico $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Una delle basi è $(1, i)$ perché sono linearmente indipendenti, in quanto in $\mathbb{R}$ non esistono due scalari diversi da zero che annullino $a + bi$.

11.2.4 Esercizio 4

Estendere ad una base di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 1, 1) \qquad v_2 = (0, 1, 2) \qquad v_3 = (0, 1, 0)$$

$$\begin{aligned}
&\lambda(1, 1, 1) + \mu(0, 1, 2) + \delta(0, 1, 0) = \\
&\lambda + \delta = 0 \Rightarrow \delta = -\lambda \\
&\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -\lambda \\
&\lambda + \mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\mu
\end{aligned}$$

sono linearmente indipendenti in quanto non esistono scalari diversi da 0 che li annullino.

11.2.5 Esercizio 5

Siano

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\} \\
V_2 &= \{s(1, 0, 1) : s \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

e $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$.
$V_1 \cup V_2$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$?

Svolgimento $V_1 \cup V_2$: non è sottospazio

- verifico che $0 \in v_3$:

  $\{0 \in V_1 \cup V_2\}$ ✔

- verifico che la somma resti in $V_1 \cup V_2$:

  $$\begin{aligned}
  &a, b \in V_1 \cup V_2 \Leftrightarrow a + b \in V_1 \cup V_2 \ ? \\
  &(1, 1, 1) + (1, 0, 1) \in V_1 \cup V_2 \ ? \\
  &(2, 1, 2) \notin V_1 \cup V_2 \qquad ✘
  \end{aligned}$$

La somma non sta in $V_1 \cup V_2$ perché non soddisfa le condizioni iniziali.
Il punto $(1, 1, 1)$ equivale a scrivere $x = y = z$, e possiamo subito notare che su $(2, 1, 2)$ le variabili x, y, z non sono uguali.

11.2.6 Esercizio 6

Sia $P^5[x]$ lo spazio dei polinomi reali di grado ≤ 5. Qual è lo spazio generato dai vettori:

- $-x^3 + 4x^2$
- $5x^3$
- $-3x^2$

Svolgimento:

$$\{\lambda(-x^3 + 4x^2) + \mu(5x^3) + \delta(-3x^2) \quad \text{con } \lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}\}$$

Se $\lambda = \mu = \delta = 1$ allora

$$-x^3 + 4x^2 + 5x^3 - 3x^2 = 4x^3 + x^2$$

ma $4x^3$ può essere visto come una combinazione lineare di

$$\varepsilon x^3 \quad \text{con } \varepsilon = 4$$

Quindi i vettori utili alle generazione di tutto lo spazio sono $5x^3$ e $-3x^2$, che a loro volta possono generare anche il vettore $-x^3 + 4x^2$.

Questi due vettori tuttavia possono essere visti a loro volta come combinazioni lineari di altri vettori, e quindi possiamo verificare che una base di $P^5[x]$ può essere

$$\{\mu(5x^3) + \delta(-3x^2) \quad \text{con } \mu, \delta \in \mathbb{R}\}$$

ma essendo combinazione lineare di

$$x^2,\ x^3$$

possiamo assumere come base proprio x^2, x^3.

11.2.7 Esercizio 7

Sia $M(2 \times 2), \mathbb{R}$ lo spazio delle matrici 2×2.

Dimostrare che le seguenti matrici siano una base di $M(2 \times 2), \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Svolgimento:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Controllo che siano linearmente indipendenti:

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \\ 2c_2 + 2c_3 + 2c_4 = 0 \\ 3c_3 + 3c_4 = 0 \\ c_1 + 4c_4 = 0 \end{cases} \rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$$

Non esistono valori diversi da 0 di c_1, c_2, c_3, c_4 per cui il sistema sia verificato. Le matrici sono dunque linearmente indipendenti e sono una base di $M(2 \times 2), \mathbb{R}$.

20-11-2015

11.2.8 Esercizio 8

Dato un insieme X e un campo $\mathbb{K}$:

$$A = \{f : X \longmapsto \mathbb{K}\}$$

Dimostrare che è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni

- assioma 1: $(f+g)+h = f+(g+h)$

$$\begin{aligned}(f+g)x + h(x) &= (f+(g+h))(x)\\ f(x)+g(x)+h(x) &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= f(x)+g(x)+h(x) \qquad ✔\end{aligned}$$

- assioma 2: $f+g = g+f$

$$\begin{aligned}f(x)+g(x) &= g(x)+f(x)\\ &= f(x)+g(x) \qquad ✔\end{aligned}$$

- assioma 3: elemento neutro: $\bigcirc : X \longmapsto \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}(f+\bigcirc) &= f(x)+\bigcirc(x)\\ &= f(x) \qquad ✔\end{aligned}$$

- assioma 4: $-f : X \longmapsto \mathbb{K}$

$$(-f(x)) = -f(x) \qquad ✔$$

- assioma 5: $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f) \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}(\lambda\mu)f(x) &= \lambda(\mu f(x))\\ &= \lambda\left[(\mu f)(x)\right] \qquad ✔\end{aligned}$$

- assioma 6: $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g \qquad \lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\lambda(f+g)(x) &= \lambda f(x) + \lambda g(x)\\ &= \lambda\left[f(x)+g(x)\right]\\ &= (\lambda f + \lambda g)(x) \qquad ✔\end{aligned}$$

- assioma 7: $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu)f(x) &= \lambda f(x) + \mu f(x)\\ &= (\lambda f + \lambda g)(x) \qquad ✔\end{aligned}$$

11.2.9 Esercizio 9

Verificare che le seguenti funzioni siano lineari:

a) $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \qquad x \to \sin(x)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R} \qquad (x, y) \to (2x + y)$

c) $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3 \qquad (x, y) \to (-x, -x + y, -x + y^2)$

Una funzione è lineare quando:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Svolgimento
a) - non lineare

$$\begin{aligned} \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) &= \sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2}) \\ 0 &= 1 + 1 \\ 0 &= 2 \qquad ✘ \end{aligned}$$

b) - lineare

$$\forall (x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} f\left((x, y) + (a, b)\right) &= f(x, y) + f(a, b) \\ &= f(x + a, y + b) \end{aligned}$$

$$2x + y + 2a + b = 2(x + a) + y + b \qquad ✔$$

b) - non lineare

$$f\big((0, 1) + (0, 2)\big) = f(0, 3) = (0, 3, 9)$$
$$f(0, 1) + f(0, 2) = (0, 1, 1) + (0, 2, 4) = (0, 3, 5) \qquad ✘$$

11.2.10 Esercizio 10 - App. lineari

Data un'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$$

che definisce una matrice 3×3, determinare la dimensione del $\ker(f)$.

Le basi sono quelle canoniche di $\mathbb{R}^3$.

Le immagini delle basi sono

$$f(e_1) = (1, 0, 2)$$
$$f(e_2) = (-1, 1, 0)$$
$$f(e_3) = (0, 1, -1)$$

e determinano la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ c_2 + c_3 \\ 2c_1 - c_3 \end{bmatrix}$$

trovo

$$\begin{aligned} f(c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3) &= c_1(w_1 + 2w_3) + c_2(-w_1 + w_2) + c_3(w_2 - w_3) \\ &= w_1(c_1 - c_2) + w_2(c_2 + c_3) + w_3(2c_1 - c_3) \end{aligned}$$

$$\ker(f) = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = 0\} \qquad M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \to \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Imm}(f))$$
$$\dim(\ker(f)) = 0$$
$$\dim(\mathrm{Imm}(f)) = 3$$

Possiamo quindi concludere che questa applicazione lineare è isomorfa.