Calcolabilità e Linguaggi Formali

Giacomo De Liberali

15 novembre 2017

Indice

1 Introduzione

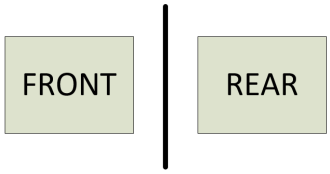
21 Settembre 2017

Gli argomenti trattati in questo corso sono:

1. Teoria degli automi (capitoli $1, 2, 3$)
2. Calcolabilità: cosa si può computare? (capitili $3, 4, 5$)
3. Complessità delle soluzioni

2 Linguaggi regolari

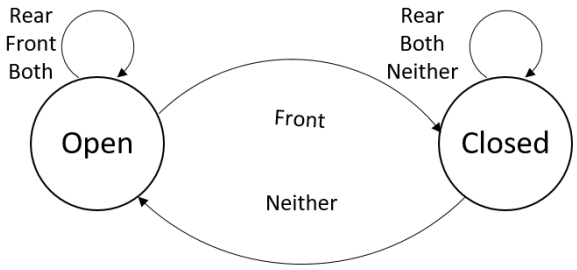
Il modello di computazione più elementare sono gli automi a stati finiti. Andiamo a rappresentare tramite un automa una porta con una bilancia da ogni lato che permetta l'accesso alle persone e impedisca alla porta stessa di colpire qualcuno:



La pressione della pedana *Font* comporterà quindi l'apertura della porta. I possibili input sono quattro:

1. Front
2. Rear
3. Both
4. Neither

e rappresentati in un automa:



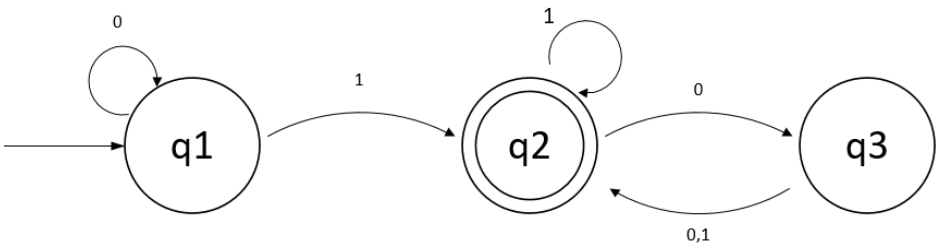
3 Automa a stati finiti

3.1 Definizione

Un automa a stati finiti è una 5-tupla $(Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$ dove:

1. Q è un insieme finito di stati
2. Σ è un insieme finito di simboli (detto *alfabeto*)
3. δ è la *funzione di transizione* che data una coppia stato-alfabeto ritorna uno stato: $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
4. $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale (negli automi è ammesso solo uno stato iniziale)
5. $F \subseteq Q$ è un insieme degli stati finali (o *accettanti*)

Esempio.



L'automa può essere rappresentato formalmente mediante la seguente sintassi:

$$A = (\{q_1, q_2, q_3\},\ \{0, 1\},\ \delta,\ q_1,\ \{q_2\})$$

dove δ è definita come:

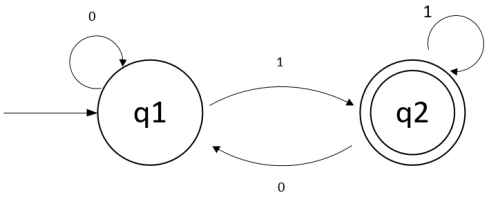
$$\begin{array}{ll} \delta(q_1, 0) = q_1 & \delta(q_1, 1) = q_2 \\ \delta(q_2, 0) = q_3 & \delta(q_2, 1) = q_2 \\ \delta(q_3, 0) = q_2 & \delta(q_3, 1) = q_2 \end{array}$$

Analizzando le stringhe che l'automa accetta, possiamo notare che quelle valide (e quindi accettate) sono tutte quelle che

1. finiscono con 1
2. oppure finiscono con 0 e hanno un numero pari di 0 dopo l'ultimo 1

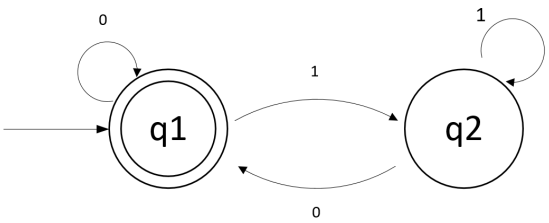
Ad esempio, la stringa 1101 è una stringa valida in quanto alla fine dell'input l'automa è nello stato q_2 che è l'unico stato finale.

Esempio.



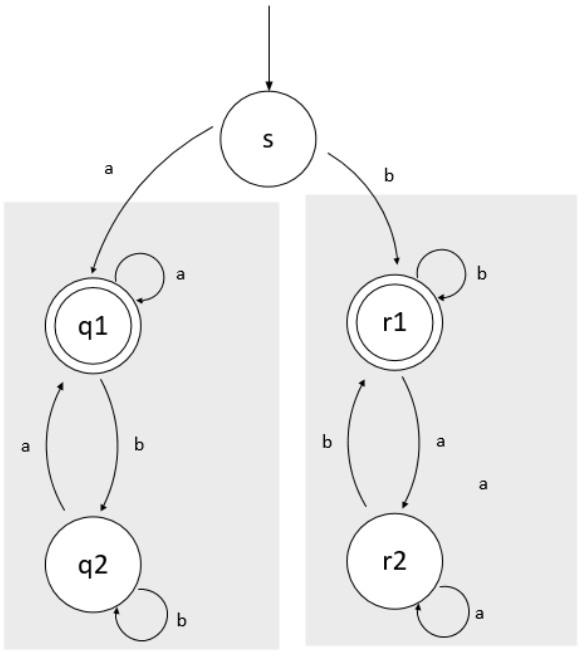
Questo automa riconosce stringhe in $\{0, 1\}$ che finiscono per 1. Nel caso di stringa vuota (ε) non entro in nessuno stato e non mi muovo.

Esempio.



Questo automa riconosce stringhe in $\{0, 1\}$ che finiscono per 0 oppure ε.

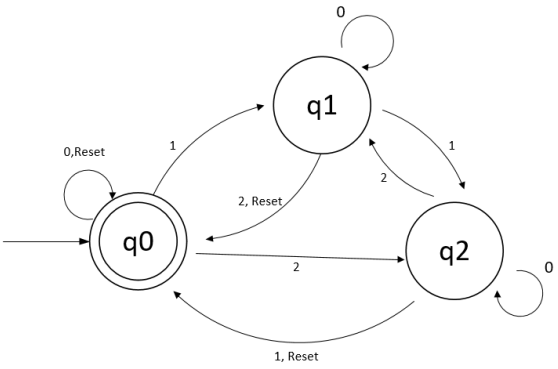
Esempio.



Questo automa riconosce stringhe in $\{a, b\}$ che iniziano e finiscono per lo stesso simbolo. In automi come in questo caso è utile poter scomporre il problema in più sotto-problemi Possiamo notare infatti che una volta scelto uno dei due rami che non è possibile passare all'altro. Questo suggerisce di studiare singolarmente i due automi sinistro e destro e infine di comporre la soluzione.

L'automa di sinistra accetta stringhe che iniziano e finiscono solo per a, mentre l'automa di sinistra solo stringhe che iniziano e finiscono per b.

Esempio.



Questo automa fa la somma modulo 3 di tutti i numeri letti in input dopo l'ultimo simbolo di *Reset*, se esiste.

3.2 Accettazione di una stringa

Sia $M = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$ un automa a stati finiti e sia $w = w_1, ..., w_n$ una stringa tale che

$$\forall i \in [1...n] : w_i \in \Sigma$$

Diciamo che M accetta w se e solo se esiste una sequenza di stati $R_0, R_1, ..., R_n \in Q$ tali che

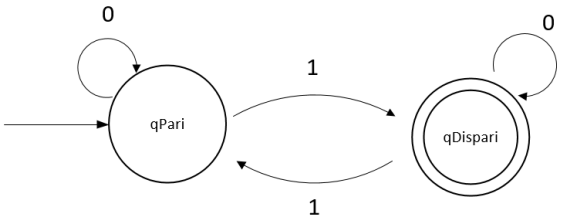
1. $R_0 = q_0$ (partendo dal nodo iniziale)
2. $R_n \in F$ (terminando in uno stato finale)
3. $\forall i \in [0, n-1] : \sigma(R_i, w_{i+1}) = R_{i+1}$ (per ogni input la *funzione di transizione* termini in uno stato finale)

M riconosce il linguaggio A se e solo se

$$A = \{w \mid M \text{ accetta } w\}$$

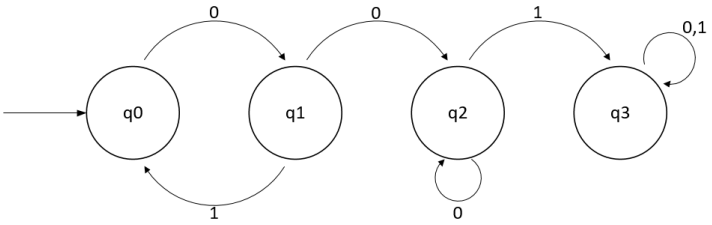
Un linguaggio A è *regolare* se e solo se esiste un automa a stati finiti M tale che M riconosce A.

Esempio. : alfabeto $\{0, 1\}$ e vogliamo riconoscere tutte le stringhe con un numero dispari di 1. L'idea è di avere un bit di informazione, quindi due stati, che mi rappresentano la condizione: ho contanto un numero pari di 1 oppure ho contanto un numero dispari di 1. L'automa è il seguente:



Esempio. : alfabeto $\{0, 1\}$ e vogliamo riconoscere tutte le stringhe che contengono almeno una volta la sotto-stringa 001. L'invariante è:

1. q_0: non ho letto sequenze di 001
2. q_1: ho letto 0
3. q_2: ho letto 00
4. q_3: ho letto 001



3.3 Operazioni regolari

Siano A e B due linguaggi. Definiamo le operazioni regolari **unione**, **concatenazione** e **star** come segue:

1. **Unione**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2. **Concatenazione**: $A \circ B = \{xy \mid x \in A \wedge y \in B\}$
3. **Star**: $A^* = \{x_1 x_2 \dots x_n \mid k \geq 0 \wedge \forall i \; x_i \in A\}$

L'operazione *star* è un'operazione unaria e non binaria come le altre due. Si applica quindi ad un solo linguaggio invece che a due. Funziona combinando le stringhe in A con se stesse per ottenere una stringa nel nuovo linguaggio. Poiché ogni numero include 0 come possibilità, la stringa vuota ε è sempre un membro di A^*, indipendentemente da cosa A sia.

Esempio. : sia Σ l'alfabeto composto dalle 26 lettere standard $\{a, b, \dots, z\}$. Se $A = \{\text{good}, \text{bad}\}$ e $B = \{\text{boy}, \text{girl}\}$ allora:

$A \cup B = \{\text{good}, \text{bad}, \text{boy}, \text{girl}\}$

$A \circ B = \{\text{goodboy}, \text{goodgirl}, \text{badboy}, \text{badgirl}\}$

$A^* = \{\varepsilon, \text{good}, \text{bad}, \text{goodgood}, \text{goodbad}, \text{badgood},$
$\text{badbad}, \text{goodgoodgood}, \text{goodgoodbad}, \text{goodbadgood}, \text{goodbadbad}, \dots\}$

Una collezione di oggetti si dice chiusa sotto un'operazione se applicando tale operazione ai membri della collezione l'oggetto ritornato è ancora nella collezione di partenza (es. $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto al prodotto ma non rispetto alla divisione).

3.4 Chiusura

3.4.1 Rispetto all'unione

La classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione di unione $\cup$.

Siano A_1, A_2 due linguaggi regolari, vogliamo dimostrare che $A_1 \cup A_2$ è un linguaggio regolare. Poiché A_1 e A_2 sono regolari, sappiamo che esiste un automa a stati finiti M_1 che riconosce A_1 ed un automa M_2 che riconosce A_2. Per dimostrare che $A_1 \cup A_2$ è regolare dimostriamo un automa a stati finiti M che riconosce $A_1 \cup A_2$.

Sia $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e sia $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$, assumendo che abbiano lo stesso alfabeto Σ, costruiamo $M = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ come segue

1. $Q = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1 \wedge r_2 \in Q_2\}$. Questo insieme è il prodotto cartesiano degli insiemi $Q_1 \times Q_2$. È l'insieme delle coppie degli stati, la prima di Q_1 e la seconda di Q_2.
2. Σ, l'alfabeto, è lo stesso in M_1 e M_2. Assumiamo per semplicità che sia lo stesso.
3. δ, la funzione di transizione, è definita come segue. Per ogni $(r_1, r_2) \in Q$ e per ogni $a \in \Sigma$, sia

   $$\delta\left((r_1, r_2), a\right) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$$

   Quindi δ prende uno stato di M (che è una coppia di stati di M_1 e M_2) insieme ad un simbolo di input e ritorna il prossimo stato di M.
4. q_0 è la coppia (q_1, q_2).
5. F è l'insieme delle coppie nelle quali è accettato lo stato in M_1 oppure M_2. Possiamo scriverla come

   $$F = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in F_1 \vee r_2 \in F_2\}$$

Questo conclude la costruzione dell'automa M che riconosce l'unione di A_1 e A_2.

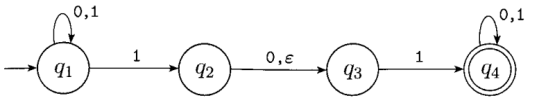
3.4.2 Rispetto alla concatenazione

La classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione di concatenazione $\circ$.

Per dimostrare questo teorema dobbiamo anche questa volta costruire un nuovo automa, con la differenza che questa volta non accetterà l'input se lo accetta M_1 oppure M_2. M deve accettarlo se l'input può essere spezzato in due pezzi, dove M_1 accetta il primo pezzo e M_1 accetta il secondo pezzo. Il problema è che M non sa quando spezzare l'input. Per risolvere questo problema dobbiamo introdurre il concetto di *non determinismo*.

3.5 Non determinismo

Fino ad ora ogni passo di una computazione portava ad un unica via. Quando una macchina è in un dato stato e legge il prossimo simbolo di input, sappiamo quale sarà il prossimo stato. Questo meccanismo viene chiamato **deterministico**. In un sistema **non deterministico** scelte differenti possono esistere per il prossimo stato, in ogni punto.

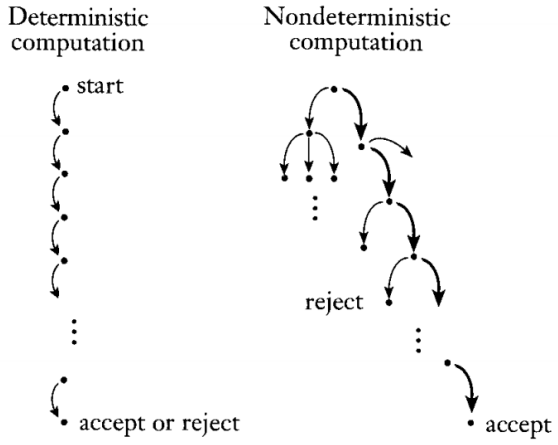


La differenza fra un automa a stati finiti deterministico (*DFA*, Deterministic Finite Automaton) e non deterministico (*NFA*, Nondeterministic Finite Automaton):

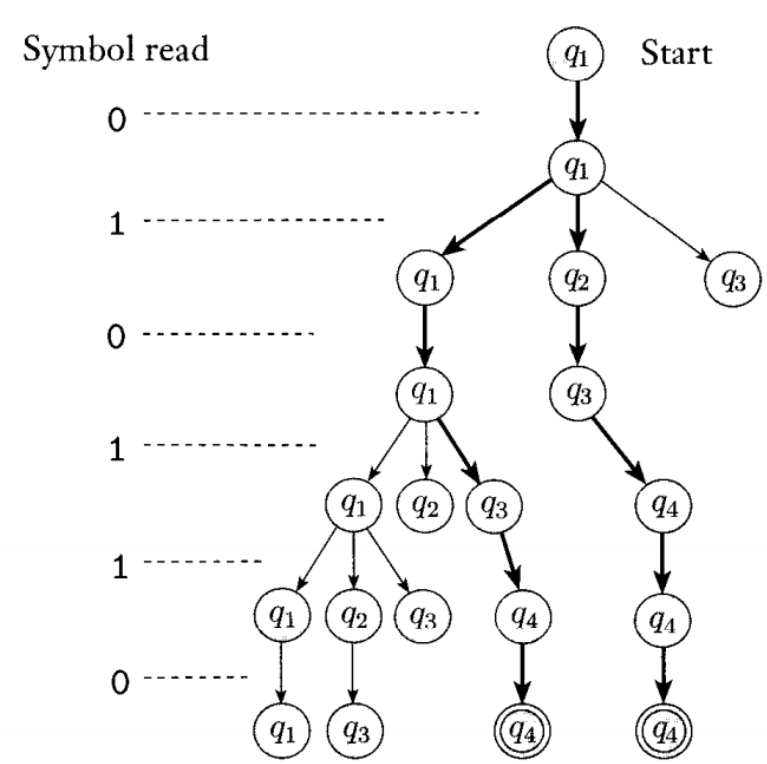
- Ogni stato di un DFA ha esattamente una freccia uscente per ogni simbolo dell'alfabeto. Un NFA vìola questa regola.
- Un stato di un NFA può avere zero, una o più frecce uscenti per ogni simbolo dell'alfabeto (compreso ε).

3.5.1 Come computa un NFA?

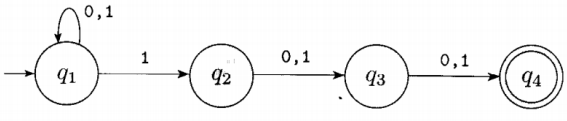
Supponiamo di trovarci in un NFA con una stringa in input che ci ha condotti allo stato q_1 che ha più modi di procedere. Per esempio, diciamo che il prossimo simbolo di input è 1. Dopo aver letto il simbolo la macchina si divide in copie multiple di se stessa e segue **tutte** le possibili vie in parallelo. Ogni copia della macchina prende una direzione e continua la computazione come prima, dividendosi a sua volta in più copie se necessario. Se il prossimo simbolo di input non compare in nessuna freccia uscente dallo stato corrente di ogni copia, quella copia cessa di esistere assieme al ramo della computazione a lei associato. Alla fine dell'input, se almeno una delle copie si trova in uno stato accettante, il NFA accetta la stringa di input.
Se viene incontrato uno stato con una freccia uscente con il simbolo ε, senza nemmeno leggere l'input la macchina se divide in copie multiple, una per ogni freccia uscente marcata da ε e una copia rimane ferma sullo stato corrente. Successivamente la macchina procede in modo non deterministico come prima.



Esempio. di computazione non deterministica dell'automa visto sopra con l'input 010110:



Esempio. : sia A il linguaggio che consiste in tutte le stringhe in $\{0,1\}$ che contengono un 1 nella terza posizione dalla fine (es. 000100). Il seguente NFA a tre stati riconosce A:

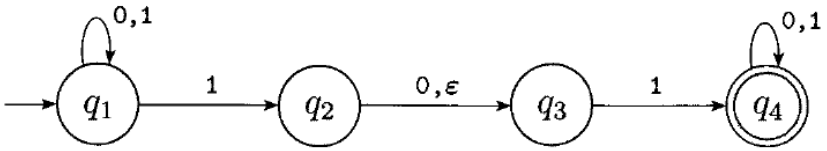


3.5.2 Definizione

Una NFA è una quantupla $(Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$ dove:

1. Q è un insieme finito di stati
2. Σ è un insieme finito di simboli detto alfabeto
3. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q)$
4. $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
5. $F \subseteq Q$ è un insieme degli stati finali

Esempio.



L'automa può essere rappresentato formalmente mediante la seguente sintassi:

$$A = (\{q_1, q_2, q_3, q_4\},\ \{0, 1\},\ \delta,\ q_1,\ \{q_4\})$$

dove δ è definita come:

$\delta(q_1, 0) = \{q_1\}$	$\delta(q_2, 0) = \{q_3\}$	$\delta(q_3, 0) = \varnothing$	$\delta(q_4, 0) = \{q_4\}$
$\delta(q_1, 1) = \{q_1, q_2\}$	$\delta(q_2, 1) = \varnothing$	$\delta(q_3, 1) = \{q_4\}$	$\delta(q_4, 1) = \{q_4\}$
$\delta(q_1, \varepsilon) = \varnothing$	$\delta(q_2, \varepsilon) = \{q_3\}$	$\delta(q_3, \varepsilon) = \varnothing$	$\delta(q_4, \varepsilon) = \varnothing$

3.5.3 Accettazione di una stringa

Sia $N = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$ un NFA. Diciamo che N accetta una stringa w nell alfabeto Σ se e solo se w può essere scritta nella forma $y_1, \ldots, y_n$ dove $\forall i \in [1, n] : y_i \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\})$ ed esiste una sequenza di stati $R_0, \ldots, R_n \in Q$ tali che:

- R_0 è lo stato iniziale
- $R_m \in F$
- $\forall i \in [0, m-1] : R_{i+1} \in \delta(R_i, y_{i+1})$, ovvero che lo stato successivo (R_{i+1}) appartiene all'insieme degli stati ottenuti dalla funzione di transizione applicata allo stato corrente (R_i) e al prossimo carattere in input (y_{i+1}).

3.5.4 Equivalenza tra NFA e DFA

Dimostrare che ogni NFA ha un equivalente DFA.

Sia $N = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$ un NFA che riconosce il linguaggio A, costruisco un DFA $M = (Q',\ \Sigma,\ \delta',\ q_0',\ F')$ che riconosce esattamente A. Assumiamo per semplicità che non vi siano $\varepsilon-$transizioni. Definiamo le componenti di M:

- $Q' = \mathcal{P}(Q)$, insieme delle parti di Q
- $\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} \delta(r, a), \quad R \in Q', a \in \Sigma$
- $q_0' = \{q_0\}$

- $F' = \{R \in \mathcal{P}(Q) \mid \exists r \in R, r \in F\}$, ovvero esiste un insieme R nell'insieme delle parti di Q tale che R contenga almeno uno stato accettante (finale) di N

Verifichiamo che le funzioni di transizione siano ben tipate:

1. NFA: $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$
2. DFA: $\delta' : \underbrace{\mathcal{P}(Q)}_{Q'} \times \Sigma \to \underbrace{\mathcal{P}(Q)}_{Q'}$

Generalizziamo ora il caso delle ε-transizioni definendo una funzione $E(R) = \{q \mid q \in Q\}$ può essere raggiunto da uno stato in R seguendo solamente ε-transizioni (anche zero). Riformulando i componenti visti sopra:

- $\delta'(R, a) = \bigcup_{r \in R} E\left(\delta(r, a)\right)$
- $q_0 = E(\{q_0\})$

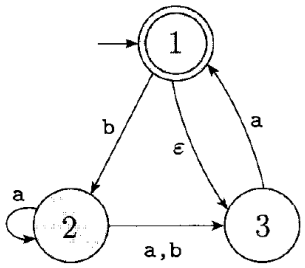
3.5.5 Linguaggi regolari

Andiamo a dimostrare che un linguaggio è regolare se e solo se esiste un NFA che lo riconosce. Dimostrazione:

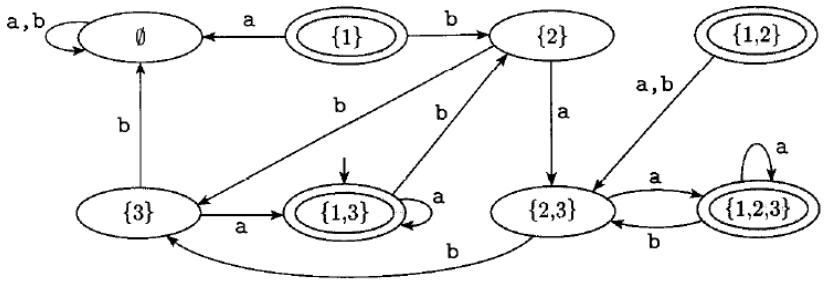
> $\Rightarrow$ Se un linguaggio è regolare, per definizione esiste un DFA che lo riconosce. Ma un DFA è un caso speciale di un NFA, quindi la prima parte è dimostrata.
>
> $\Leftarrow$ Sia A un linguaggio tale che A è riconosciuto da un NFA. Per il teorema esiste un DFA che riconosce A, quindi A è regolare.

Esempio. di conversione di un NFA in un DFA

NFA:

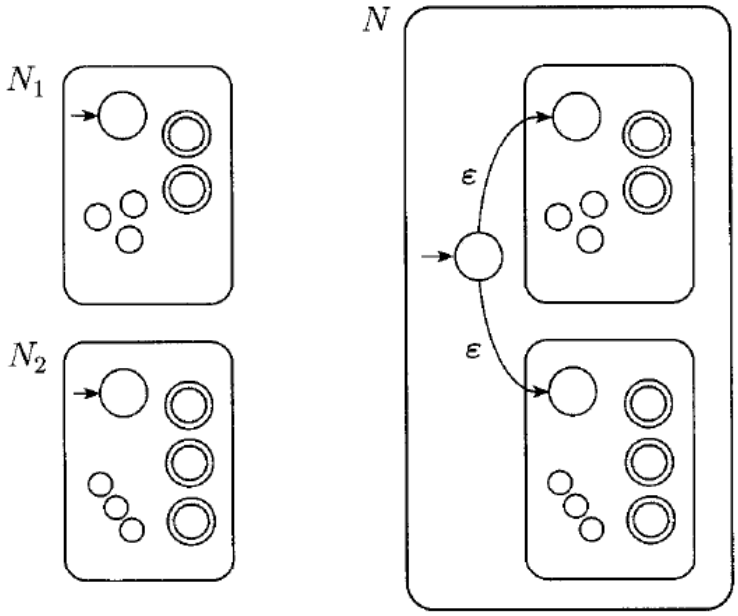


DFA:



Chiusura rispetto all'unione La classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'unione. Dimostrazione:

Siano A_1 e A_2 due linguaggi regolari, allora esistono due NFA N_1 ed N_2 che li riconoscono. Costruisco da N_1 ed N_2 un NFA che riconosce $A_1 \cup A_2$, da cui concludo che $A_1 \cup A_2$ è regolare.



Definizione formale:

$$N_1 = (Q_1,\ \Sigma,\ \delta_1,\ q_1,\ F_1) \qquad N_2 = (Q_2,\ \Sigma,\ \delta_2,\ q_2,\ F_2)$$

sia

$$O = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$$

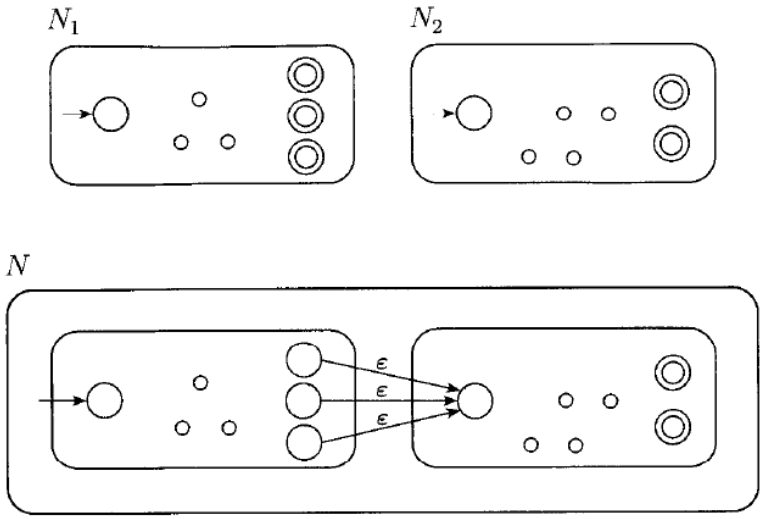
dove:

- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$
- $F = F_1 \cup F_2$
- e la funzione di transizione è definita come

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{se } q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a) & \text{se } q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\} & \text{se } q = q_0 \wedge a = \varepsilon \\ \varnothing & \text{se } q = q_0 \wedge a \neq \varepsilon \end{cases}$$

Chiusura rispetto alla concatenazione La classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto alla concatenazione. Dimostrazione:

Siano A_1 e A_2 due linguaggi regolari, allora esistono due NFA N_1 ed N_2 che li riconoscono.



In pratica salto dagli stati finali (non più) del primo automa allo stato iniziale del secondo automa. Definizione formale:

$$N_1 = (Q_1,\ \Sigma,\ \delta_1,\ q_1,\ F_1) \qquad N_2 = (Q_2,\ \Sigma,\ \delta_2,\ q_2,\ F_2)$$

sia

$$N = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$$

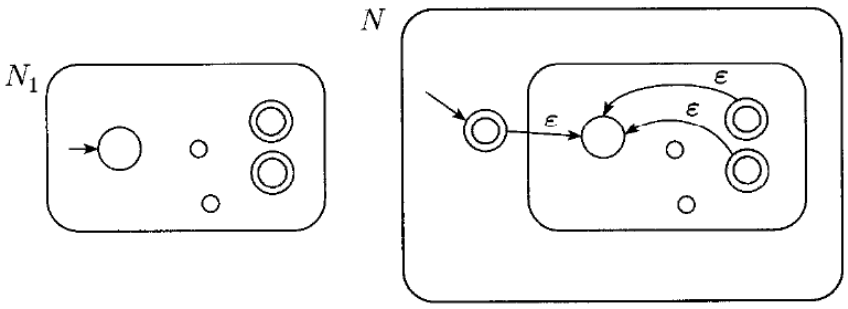
dove:

- $Q = Q_1 \cup Q_2$
- $F = F_2$
- e la funzione di transizione è definita come

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{se } q \in Q_1 \wedge q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & \text{se } q \in F_1 \wedge a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\} & \text{se } q \in F_1 \wedge a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a) & \text{se } q \in Q_2 \end{cases}$$

Chiusura rispetto all'operazione star La classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto all'operazione *star*. Dimostrazione:

Sia N_1 un linguaggio regolare, allora esiste un NFA N_1 che lo riconosce. Costruisco un automa $N = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$ che accetta A^*:



Aggiungo un primo stato accettante e due ε-transizioni per poter iterare un numero arbitrario di volte. Il primo stato è accettante perche ε fa sempre parte dei A^*. Definizione formale:

$$N_1 = (Q_1,\ \Sigma,\ \delta_1,\ q_1,\ F_1)$$

sia

$$N = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$$

dove:

- $Q = Q_1 \cup \{q_0\}$
- $F = \cup\{q_0\}$
- e la funzione di transizione è definita come

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a) & \text{se } q \in Q_1 \wedge q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a) & \text{se } q \in F_1 \wedge a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\} & \text{se } q \in F_1 \wedge a = \varepsilon \\ \{\varepsilon\} & \text{se } q = q_0 \wedge a = \varepsilon \\ \varnothing & \text{se } q = q_0 \wedge a \neq \varepsilon \end{cases}$$

4 Espressioni regolari

Definiamo i linguaggi regolari in modo più compatto e semplice rispetto agli automi:

$$L((0 \cup 1)0^*) = \{w \mid w \text{ inizia con 0 oppure 1 e ha un numero arbitrario di 0}\}$$

Secondo le regole della precedenza $(^*, \circ, \cup)$, * è applicabile a 0 ma non a $(0 \cup 1)$.

4.1 Definizione

Diciamo che R è un espressione regolare su un alfabeto Σ se R è:

1. $a \mid a \in \Sigma$, ovvero se è un membro dell'alfabeto (che è sempre un'espressione regolare) $L(a) = \{a\}$
2. ε $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
3. $\varnothing$ $L(\varnothing) = \{\varnothing\}$
4. $(R_1 \cup R_2)$, dove R_1 e R_2 sono espressioni regolari $L(\overbrace{(R_1 \cup R_2)}^{\text{regexp}}) = \overbrace{L(R_1) \cup L(R_2)}^{\text{linguaggio regolare}}$
5. $(R_1 \circ R_2)$, dove R_1 e R_2 sono espressioni regolari $L((R_1 \circ R_2)) = L(R_1) \circ L(R_2)$
6. (R_1^*), dove R_1 è un'espressione regolare $L(R_1^*) = L(R_1)^*$

Esempio. in $\Sigma = \{0, 1\}$:

- $L(0^*10^*) = \{w \mid w \text{ contiene esattamente un 1}\}$
- $L(01 \cup 10) = \{01, 10\}$
- $L((0 \cup \varepsilon)1^*) = \{w \mid w \text{ è una stringa di soli 1 possibilmente preceduta da 0 }\}$
- $L(1^* \circ \varnothing) = \varnothing$, concatenando l'insieme vuoto con qualunque altra cosa si ottiene insieme vuoto
- $L(\varnothing^*) = \{\varepsilon\}$, l'operatore di star su un insieme vuoto ritorna la combinazione di 0 stringhe, ovvero solamente stringa vuota

Identità delle espressioni regolari, dove R è una *regexp*:

- $R \cup \varnothing = R$ ✔
- $R \cup \varepsilon = R$ ✘
- $R \circ \varepsilon = R$ ✔
- $R \circ \varnothing = R$ ✘

4.2 Equivalenza con automi a stati finiti

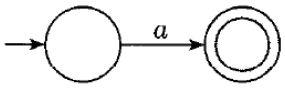
Teorema. *Un linguaggio è regolare se e solo se esiste un'espressione regolare che lo descrive. Quindi A è regolare se e solo se esiste una regexp in R tale che $L(R) = A$.*

Essendo un *se e solo se* vanno dimostrate entrambe le parti.

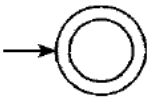
Lemma. *Se A è descritto da una rgexp, allora A è regolare.*

Sia A descritto da una regexp R. Per induzione sulla struttura di R procediamo per casi:

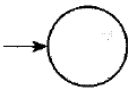
1) $R = a$ per qualche $a \in \Sigma$, Dimostro che $L(a)$ è regolare se trovo un NFA che lo riconosca:



2) $R = \varepsilon$. Allora $L(R) = \{\varepsilon\}$, e il seguente NFA riconosce $L(R)$



3) $R = \varnothing$. Allora $L(R) = \varnothing$, e il seguente NFA riconosce $L(R)$



4) $R = R_1 \cup R_2$

5) $R = R_1 \circ R_2$

6) $R = R_1^*$

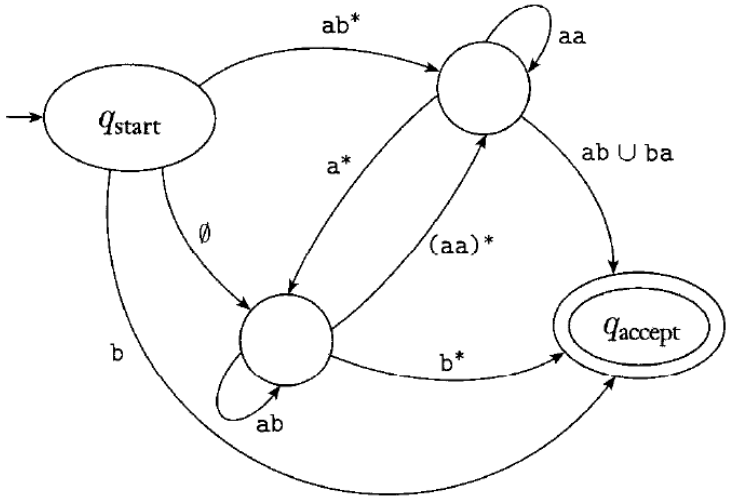
Per gli ultimi tre casi utilizziamo le costruzioni date delle dimostrazioni precedenti, ovvero che i linguaggi regolari sono chiusi rispetto alle operazioni regolari.

Lemma. *Se un linguaggio è regolare, allora esiste un'espressione regolare che lo riconosce.*

Per dimostrare questo lemma abbiamo bisogno di introdurre un nuovo tipo di automa, i GNFA, ovvero un automa a stati finiti non deterministico generalizzato, sui quali archi non vi sono più simboli, ma espressioni regolari.

4.3 GNFA

Esempio.



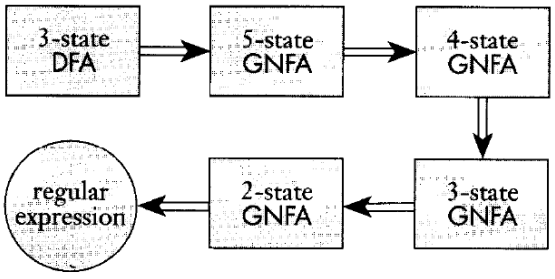
Ci focalizziamo su un GNFA con un formato particolare, ovvero

1. Lo stato iniziale ha archi uscenti verso tutti gli altri stati e nessun arco entrante
2. Lo stato finale ha archi entranti da tutti gli altri stati e nessun arco uscente
3. Per tutti gli altri stati esiste un arco verso ciascun altro stato, incluso se stesso, ma esclusi quelli finale ed iniziale

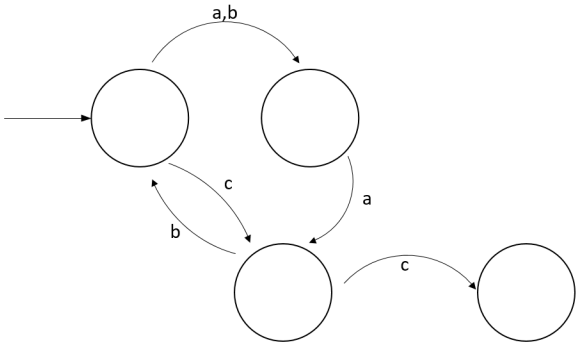
Per convertire un DFA in un GNFA ben formato è necessario seguire una serie di passaggi:

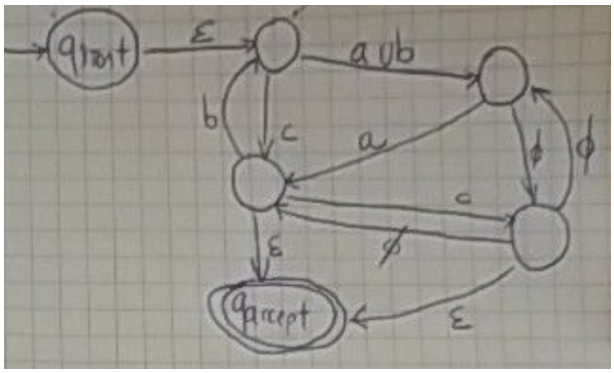
1. Aggiungi un nuovo stato iniziale con $\varepsilon-$transizioni verso lo stato iniziale originario (il nuovo stato iniziale non ha transizioni in entrata)
2. Aggiungi uno stato finale, metti $\varepsilon-$transizioni da ciascuno dei vecchi stati finali verso esso e rendi tali stati non finali
3. Se una freccia ha più etichette, rimpiazzale con l'unione delle etichette stesse ($a, b \Rightarrow a \cup b$). Se una freccia è mancante, aggiungila ed etichettala con $\varnothing$.

Passaggi tipici di una conversione da GNFA a regular expression:

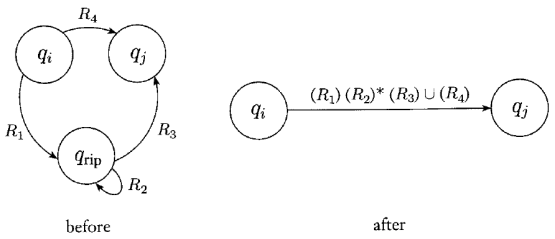


Esempio. di conversione da DFA a GNFA:

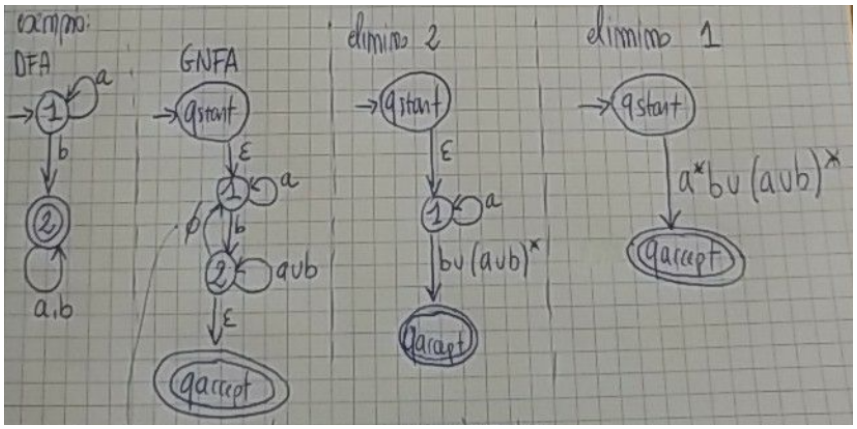




Esempio. di normalizzazione di un GNFA, che permette di ridurne gli stati al fine di ottenere un'espressione regolare:



Esempio. di normalizzazione di un GNFA:



5 Linguaggi non regolari

I linguaggi non regolari sono tutti quei linguaggi che non possono essere riconosciuti da nessun automa a stati finiti (DFA).

$A = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\} \rightarrow$ non regolare

$A = \{w \mid w$ ha lo stesso numero di 0 e 1$\} \rightarrow$ non regolare

$A = \{w \mid w$ ha lo stesso numero di occorrenze delle sottostringhe 01 e 10$\} \rightarrow$ regolare

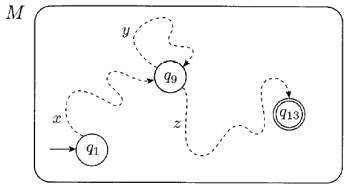
Andiamo ora a definire uno dei modi che permettono di determinare la regolarità di un linguaggio.

5.1 Pumping

Lemma. *Se A è un linguaggio regolare, esiste un numero p (pumping length) tale che ogni stringa di A di lunghezza almeno p, può essere divisa in tre pezzi xyz tali che*

1. $\forall i \geq 0 : xy^i z \in A$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$

Intuizione: Se A è un linguaggio regolare allora esiste un DFA M che lo riconosce. Imposto p al numero di stati di M. Prendiamo una stringa s tale che $|s| > p$. Poiché $|s| > p$ devo attraversare almeno $p+1$ stati per riconoscerla, da qui ricaviamo che uno stato dell'automa deve necessariamente essere attraversato almeno due volte.



Dimostrazione. Sia A un linguaggio regolare, allora esiste un DFA M che lo riconosce. Sia $M = (Q,\ \Sigma,\ \delta,\ q_0,\ F)$ e sia p il numero di stati in Q. Sia $s = s_1, \ldots, s_n$ tale che $n \geq p$ e sia $r_1, \ldots, r_{n+1}$ la sequenza di stati attraversati per riconoscere s, allora $r_{i+1} = \delta(r_i, s_i)$.
Tra i primi $p+1$ stati in $r_1, \ldots, r_n$ deve esserci una ripetizione, chiamata prima occorrenza r_j e una seconda occorrenza chiamata r_l con $l \leq p+1$. Spezziamo s in tre sotto-stringhe xyz dove:

$x = s_1, \ldots, s_{j-1}$

$y = s_j, \ldots, s_{l-1}$

$z = s_l, \ldots, s_n$

Verifichiamo ora le tre condizioni:

1. $\forall i \geq 0 : xy^i z \in A$
2. $|y| > 0$ vero perché considero occorrenze diverse dello stato
3. Sappiamo che $j \neq l$ e che $l \leq p$, da cui $|xy| \leq p$

□

Per dimostrare che un linguaggio A è non regolare, posso dunque utilizzare il *puming lemma*:

1. Assumo per assurdo che A sia regolare
2. Poiché A è regolare, deve valere il *puming lemma*
3. Trovo una stringa s, con $|s| \geq p$ tale che per ogni particolare xyz, con $|xyz| > p$ ho che esiste i tale che $xy^i z \notin A$
4. Concludo che A non poteva essere regolare

Esempio. di applicazione del *puming lemma* per verificare la non regolarità di un linguaggio.

$A = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

Assumo per assurdo che A sia regolare, allora esiste p tale che ogni stringa $s \in A$ può essere scritta come xyz in modo che: 1) $\forall i \geq 0 : xy^i z \in A$, 2) $|y| > 0$ e 3) $|xy| \leq p$.

Prendo $s = 0^p 1^p$ e mostro che $xy^i z \notin A$ per qualche i. Procedo per casi:

1. y contiene solo 0. In questo caso $xy^2 z \notin A$ perché $xy^2 z$ contiene più 0 che 1.
2. y contiene solo 1. In questo caso $xy^2 z \notin A$ perché $xy^2 z$ contiene più 1 che 0.
3. y sia 0 che 1.

$$s = 00\underbrace{01}_{y}11$$
$$s = 00\underbrace{0101}_{y^2}11$$

In questo caso $xy^2 z \notin A$ perché $xy^2 z$ conterrà degli 1 prima di uno 0.

Esempio. di applicazione del *puming lemma* per verificare la non regolarità di un linguaggio.

$C = \{w \mid w \text{ ha lo stesso numero di 0 e 1}\}$

Sia $s = 0^p 1^p$. Poiché la parte della stringa che vado a pompare deve occorrere nei primi p caratteri di s, y deve contenere solo 0. Perciò $xy^2 z$ contiene più 0 che 1, da cui $xy^2 z \notin C$.

Esempio. di applicazione del *puming lemma* per verificare la non regolarità di un linguaggio.

$F = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$

Sia $s = 0^p 10^p 1$. Poiché $|xy| \leq p$, y deve contenere solo 0, perciò $xy^2 z$ contiene più 0 che 1, che è lecito, ma rompe la simmetria, da cui $xy^2 z \notin F$.

Esempio. di applicazione del *puming lemma* per verificare la non regolarità di un linguaggio.

$D = \{1^{n^2} \mid n \geq 0\} \rightarrow$ tutte le stringhe di 1 la cui lunghezza sia un quadrato perfetto

Sia $s = 1^{p^2} = xyz$, allora $|s| = p^2$. Per il terzo punto del *pumping lemma* ($|xy| \leq p$) impostiamo:

$$|xy^2 z| = |xyz| + |y|$$

dove $|xyz| = p^2$, $|y| > 0$ e $|y| < p$. Quindi

$$|xy^2 z| \leq p^2 + p < p^2 + 2p + 1 = (p+1)^2$$

perciò , poiché $|y| > 0$

$$p^2 < |xy^2 z| < (p+1)^2$$

ma allora $|xy^2 z|$ non è un quadrato perfetto, e $xy^2 z \notin D$.

6 Esercizi

Esercizio. *Dimostrare che la classe dei linguaggi regolari è chiusa rispetto alla concatenazione.*

Dimostrazione. Siano A e B due linguaggi regolari. Poiché sono regolari esisteno due DFA M ed N tali che $L(M) = A$ e $L(N) = B$. Sia $M = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ e sia $N = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$, definisco un DFA $O = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ dove:

1. $Q = Q_1 \times Q_2$
2. $\delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$
3. $q = (q_1, q_2)$
4. $F = \{(q_1, q_2) \mid q_1 \in F_1 \wedge q_2 \in F_2\} = F_1 \times F_2$

□

Esercizio. *Dimostrare che $C = \{w \mid w$ ha lo stesso numero di 0 e 1$\}$ non è regolare, senza utilizzare il pumping lemma.*

Dimostrazione. Per assurdo assumo che C sia regolare. Poiché i linguaggi regolari sono chiusi rispetto all'intersezione, la seguente intersezione

$$C \cap 0^*1^*$$

dovrebbe essere regolare. Ma $C \cap 0^*1^* = \{01^n \mid n \geq 0\}$ e questo non è regolare, da cui C è non regolare. □

Esercizio. *Dimostrare che il linguaggio $D = \{w \mid w$ lo stesso numero di sottostringhe 01 e 10 $\}$ è regolare.*

Dimostrazione. Costruisco un DFA che non ho voglia di inserire... □

Esercizio. *Dimostrare che i linguaggi regolari sono chiusi rispetto all'operazione di complemento $\bar{A} = \{w \mid w \notin A\}$.*

Dimostrazione. Sia A un linguaggio regolare. Allora esiste un DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tale che $L(M) = A$. Costruisco un altro DFA $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q/F)$, e osservo che $L(N) = \bar{A}$. □

Esercizio. *Dimostrare che il linguaggio $B = \{w \mid w$ non contiene la stringa ab $\}$ è regolare.*

Dimostrazione. Costruisco un DFA N tale che $L(N) = \{w \mid w$ contiene la stringa ab $\}$. Poiché $B = L(\bar{N})$ concludo la chiusura rispetto al complemento che B è regolare. □

Esercizio. *Dimostrare che il linguaggio $E = \{0^i1^j \mid i > j\}$ è non regolare.*

Dimostrazione. Assumo per assurdo che E sia regolare, allora esiste p tale che ogni stringa $s \in E$ è tale che $|s| > p$ può essere scritta come xyz dove:

1. $\forall i xy^i z \in E$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$

Prendo $s = o^{p+1}1^p$. Poiché $|xy| \leq p$, so che y comprende solo 0. La stringa $xy^0z \notin E$, perché essa comprende meno di $p + 1$ zeri:

$$\underbrace{\overbrace{0\ldots0}^{p+1}}_{x}\underbrace{0}_{y}\underbrace{\overbrace{1\ldots1}^{p}}_{z}$$

□

7 Context-free languages

In questo capitolo introdurremo le grammatiche *context-free*, un metodo più potente per descrivere linguaggi.

7.1 Context-free grammars

Il seguente è un esempio di una grammatica *context-free*, che chiameremo G_1:

$A \to 0A1$
$A \to B$
$B \to \#$

Una grammatica consiste in una collezione di *regole di sostituzione*, anche chiamate **produzioni**. Ogni regola appare come una linea e comprende un *simbolo* e una stringa, separati da una freccia. Il simbolo è chiamato **variabile**, mentre le stringhe consistono in altre variabili e simboli, chiamati **terminali**. I simboli delle variabili spesso sono rappresentate in lettere maiuscole, mentre i terminali sono analoghi all'alfabeto di input e sono spesso rappresentati da lettere minuscole, numeri o caratteri speciali. Una tra le variabili della grammatica è la **variabile di start**, e solitamente si trova a sinistra della regola più in alto.

La grammatica G_1 contiene dunque tre produzioni (le tre righe), le sue variabili sono A e B, dove A è la variabile di start. I sui terminali sono 0, 1 e #.

Si utilizza una grammatica per descrivere un linguaggio generando ogni stringa di quel linguaggio nel seguente modo:

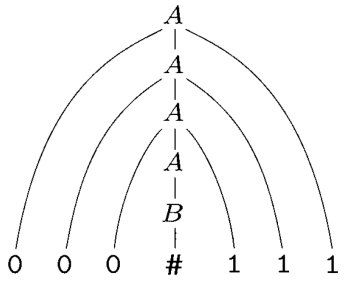
1. Si scrive la variabile di start
2. Si seleziona una della variabili disponibili e la si riscrive come parte destra di una produzione per quella variabile
3. Si torna al punto 2 fino a che ci sono ancora variabili disponibili

Per esempio la grammatica G_1 genera la stringa 000#111. La sequenza di sostituzioni per ottenere la stringa viene detta **derivazione**. La derivazione della stringa 000#111 nella grammatica G_1 é

$$A \Rightarrow 0A1 \Rightarrow 00A11 \Rightarrow 000A111 \Rightarrow 000B111 \Rightarrow 000\#111$$

Tutte le stringhe generate in questo modo costituiscono il *linguaggio della grammatica*. Indichiamo con $L(G_1)$ il linguaggio della grammatica G_1, che è formalmente definito come $\{0^n\#1^n \mid n \geq 0\}$. Ogni linguaggio che può essere generato da una grammatica *context-free* è chiamato *context-free language (CFL)*.

Un altro modo per indicare visivamente una grammatica *context-free* sono i *parse tree*



dove la radice rappresenta la start variable, le foglie i terminali e i nodi intermedi sono dettati dalle produzioni.

7.1.1 Definizione

Una grammatica context-free è una 4-tupla $(V,\ \Sigma,\ R,\ S)$ dove

1. V è un insieme finito di variabili
2. Σ è un insieme finito, disgiunto da V, di terminali
3. R è un insieme finito di regole (produzioni), dove ogni produzione ha la forma $A \to w$ dove $A \in V$ e $w \in (\Sigma \cup V)^*$, ovvero che w può essere una stringa di terminali e/o variabili
4. $S \in V$ è la start variable

Siano $u, v, w \in (\Sigma \times V)^*$ e sia $A \to w$ una produzione. Diciamo che uAv produce uwv ($uAv \Rightarrow uwv$). Diciamo che u deriva da v ($u \overset{*}{\Rightarrow} v$) sse $u = v$ oppure $\exists w_1, \ldots, w_n \mid u \Rightarrow w_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow w_n \Rightarrow v$.

Data una grammatica $G = (V,\ \Sigma,\ R,\ S)$, definiamo il linguaggio generato da G come l'insieme delle stringhe di terminali derivabili dalla start variable:

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

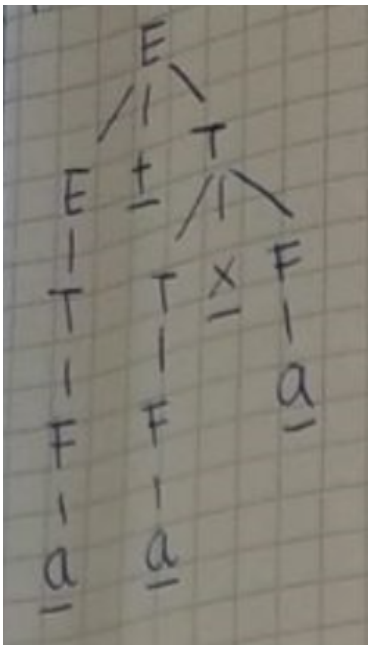
Esempio. Dato $G = (\{S\}, \{a, b\}, R, S)$, dove R è definito da $S \to aSb \mid SS \mid \varepsilon$, determinare alcune stringhe che può comporre.

- $abab$: $\quad S \Rightarrow SS \Rightarrow aSbS \Rightarrow abS \Rightarrow abaSb \Rightarrow abab$
- $aabb$: $\quad S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb$

Supponendo quindi che a rappresenti la parentesi sinistra "(" e b quella destra ")", il linguaggio di G è quello di tutte le stringhe le cui parentesi siano annidate correttamente.

Esempio. Generare il *parse tree* che generi $a + a \times a$ dati

- $E \Rightarrow E + T \mid T$
- $T \Rightarrow T \times F \mid F$

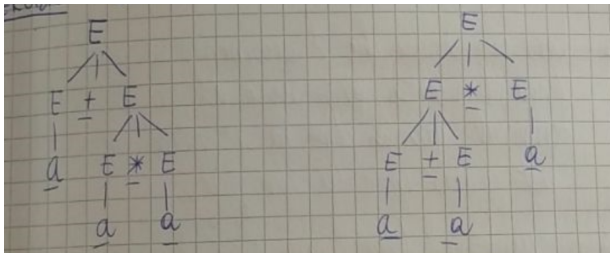


7.1.2 Ambiguità

Una grammatica è *ambigua* se e solo se esiste $w \in L(G)$ con almeno due *leftmost* diversi. Per *leftmost* si s'intende che nel processo di derivazione (e di conseguenza nel *parse tree*) scrivo il terminale a sinistra.

Esempio. Dato $E \to E + E \mid E \times E \mid a \mid (E)$, verificare che sia ambiguo.

A questo punto sviluppo due *parse tree*, e dal momento che ottengo la stessa stringa "$a + a \times a$" in due modi differenti, concludo che la grammatica è ambigua.



7.2 Forma normale di Chomsky

Un *context-free language* è in forma normale di Chomsky se ogni sua produzione ha la forma $A \to BC$ oppure $A \to a$ con l'eccezione che B, C non possono essere la variabile di start. Inoltre ammettiamo $S \to \varepsilon$ dove S è la start variable.

Teorema. *Ogni linguaggio context-free è generabile da una grammatica context-free in forma normale di Chomsky. [vedi pag 99, theorem 2.6]*

Dimostrazione. Definiamo un algoritmo per convertire una CFG qualsiasi in forma normale:

1. Sia S lo start symbol, invento un nuovo start symbol $S' \to S$
2. Sia $A \to \varepsilon$ una ε-produzione con $A \neq S$. Allora cancello $A \to \varepsilon$ e in tutti i punti in cui A occorre, aggiungo una nuova produzione dove A è cancellata per ogni possibile occorrenza di A, ovvero

   $$\begin{aligned} R \to uAwAv \rightsquigarrow & R \to uAwAv \text{ non cancello occorrenze di } A \\ & R \to uwAv \text{ cancello 1 occorrenza di } A \\ & R \to uAwv \text{ cancello 2 occorrenze di } A \\ & R \to uwv \text{ cancello 3 occorrenze di } A \end{aligned}$$

   Se avessi

   $$\begin{aligned} R \to A \rightsquigarrow & R \to A \\ & R \to \varepsilon \end{aligned}$$

3. Elimina le produzioni unitarie della forma $A \to B$ se esiste $A \to B$ e $B \to w_1 \mid \ldots \mid w_n$, cancella $A \to B$ e sostituiscilo con $A \to w_1 \mid \ldots \mid w_n$.
4. A questo punto tutte le produzioni della grammatica hanno almeno due simboli a destra.
5. Nelle regole precedenti rimpiazzo ogni terminale u_i con $1 \leq i \leq k$ con un non terminale U_i e aggiungi $U_i \to u_i$

□

Esempio. Normalizzazione il CFG G nella forma normale di Chomsky.

1. Il CFG è mostrato sulla sinistra. Il risultato dell'applicazione del primo step per creare un nuovo start symbol appare sulla destra.

$$\begin{aligned} &A \to ASA \mid aB \\ &A \to B \mid S \\ &B \to b \mid \varepsilon \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &S_0 \to S \\ &A \to ASA \mid aB \\ &A \to B \mid S \\ &B \to b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

2. Rimuovendo le ε-produzioni $B \to \varepsilon$ sulla sinistra, e $A \to \varepsilon$ sulla destra:

$$\begin{aligned} &S_0 \to S \\ &S \to ASA \mid aB \mid a \\ &A \to B \mid S \mid \varepsilon \\ &B \to b \mid \varepsilon \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &S_0 \to S \\ &S \to ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S \\ &A \to B \mid S \mid \varepsilon \\ &B \to b \end{aligned}$$

3. Rimuovendo le produzioni unitarie $S \to S$, sulla sinistra e $S_0 \to S$ sulla destra:

$$\begin{aligned} &S_0 \to S \\ &S \to ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \mid S \\ &A \to B \mid S \\ &B \to b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &S_0 \to S \mid ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ &S \to ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ &A \to B \mid S \\ &B \to b \end{aligned}$$

4. Rimuovendo le produzioni unitarie $A \to B$ e $A \to S$:

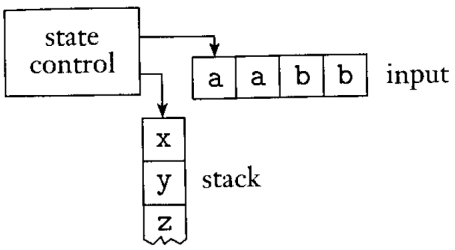
$$\begin{aligned} &S_0 \to ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ &S \to ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ &A \to B \mid S \mid b \\ &B \to b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &S_0 \to ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ &S \to ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ &A \to S \mid b \mid ASA \mid aB \mid a \mid SA \mid AS \\ &B \to b \end{aligned}$$

5. Convertiamo le produzioni rimanenti nella forma corretta aggiungendo le variabili e le produzioni necessarie. Il risultato finale è

$$\begin{aligned} &S_0 \to AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\ &S \to AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\ &A \to B \mid AA_1 \mid UB \mid a \mid SA \mid AS \\ &A_1 \to SA \\ &U \to a \\ &B \to b \end{aligned}$$

7.3 Push-down automata

In questa sezione introdurremo i *pushdown automata*. Questi automi sono simili agli automi finiti non deterministici, ma hanno un componente in più chiamato stack. Lo stack fornisce memoria addizionale a quella finita disponibile ni NFA. Lo stack permette dunque a questi speciali automi di riconoscere alcuni linugaggi non regolari. Gli autocmi *pushdown* sono equivalenti in espressività alle grammatiche *context-free*.



Notiamo che l'alfabeto dello stack e di input possono essere differenti.

7.3.1 Definizione

Un automa *pushdown* è una 6-tupla $(Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ q_0,\ F)$ dove

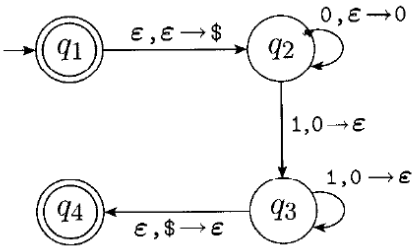
1. Q è un insieme finito di stati
2. Σ è un insieme finito di simboli di input
3. Γ è un insieme finito di simboli per lo stack
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \to \mathcal{P}(Q \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}))$
5. $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
6. $F \subseteq Q$ è l'insieme degli stati finali

Un PDA $M = (Q,\ \Sigma,\ \Gamma,\ \delta,\ q_0,\ F)$ accetta l'input w se w si può scrivere come $w_1 w_2 ... w_n$ dove $\forall i\ w_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ (ovvero come negli NFA posso avere ε-transizioni spontanee) ed esiste una sequenza di stati $r_0, r_1, \ldots, r_n \in Q$ e stack $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma^*$ tali che:

1. $r_0 = q_0$ e $s_0 = \varepsilon$, ovvero che M inizia nello stato iniziale e con lo stack vuoto
2. $r_n \in F$, ovvero che M finisce di computare in uno stato accettante dopo aver concluso di leggere l'input
3. $\forall i \in [0, n-1] :\ (r_{i+1}, b) \in \delta(r_1, w_{i+1}, a)$ dove $s_i = at$ e $s_{i+1} = bt$ per qulche $a, b \in \Gamma \cup \{\Sigma\}$ e $t \in \Gamma^*$. Ovvero che per tutti gli stati, lo stato successivo (r_{i+1}) è calcolato dallo stato precedente e dal successivo simbolo di input $(\delta(r_i, w_{i+1}))$. Però in ogni momento posso leggere un simbolo dallo stack e aggiornare lo stato dello stack. Quindi valuto sia chi transita dallo stato sia il carattere a in cima allo stack dello stato corrente nel tempo i (enllo stato r_i). Nello stato successivo voglio aggiornare a con b (pop di a e push di b). Però non vengono sempre fatte push e pop perché possono esserci anche le ε-transizioni e al posto di a e b possono esserci tre casi:
   (a) $a = \varepsilon, b \neq \varepsilon$: push
   (b) $a \neq \varepsilon, b = \varepsilon$: pop
   (c) $a = \varepsilon, b = \varepsilon$: non modifico lo stack, ma faccio un ε-transizione

Esempio. Trovare un PDA che riconosca il linguaggio $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$.

L'idea è che se leggo 0 riempio lo stack, mentre leggendo 1 lo svuoto. Mantengo un simbolo di flag (\$) che mi indica quando lo stack è vuoto, e quando arrivo alla fine dell'input se lo stack è vuoto significa che l'input viene riconosciuto.

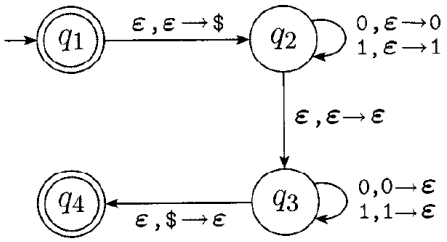


Quando scriviamo $a, b \to c$ significa che quando l'automa sta leggendo un a dall'input, può rimpiazzare il simbolo b nella testa dello stack con il simbolo c. Sia a che b e c possono essere ε. Se $a = \varepsilon$, l'automa esegue la transizione senza leggere nessun simbolo dall'input. Se $b = \varepsilon$ l'automa può eseguire la transizione senza leggere dall'input e prendere il primo simbolo dallo stack. Se $c = \varepsilon$ l'automa non scrive nessun simbolo nello stack eseguendo questa transizione.

Esempio. Determinare il PDA che riconosce il linguaggio

$\{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$ dove w^R equivale ad w rovesciato (reverse)

Il DFA deve riconoscere quindi, ad esempio, la stringa $\underbrace{100}_{w}\overbrace{001}^{w^R}$



Teorema. *Un linguaggio è context-free se e solo se è riconosciuto da un PDA.*

Dimostrazione. Se un linguaggio è *context-free* allora è riconosciuto da un PDA. Intuitivamente, se esiste un linguaggio è *context-free*, esiste una grammatica G che lo genera. Diamo una definizione informale del PDA:

1. Metti sullo stack "\$" seguito da S, dove S è lo *start symbol* della grammatica
2. Ripeti i seguenti passi
   (a) Se in cima allo stack ho A, scegli una produzione $A \to w$ e sostituisci A con w
   (b) Se in cima allo stack ho a, confrontalo con il prossimo carattere in input e fai la pop se sono uguali, fallisci termina questo ramo del non determinismo
   (c) Se in cima allo stack ho "\$" ed ho finito l'input, accetta

Per semplificare la definizione che andremo a vedere, occorre introdurre una notazione sharthand, più compatta, che ci permette di fare il push di stringhe intere anziché di singoli caratteri.

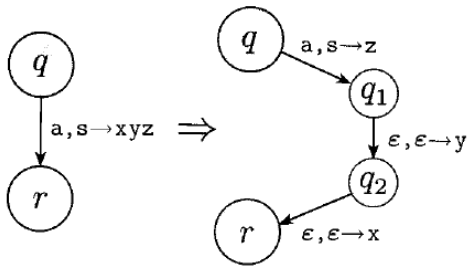


Figura 1: Implementazione della shorthand $(r, xyz) \in \delta(q, a, s)$

Sia l'immagine lo schema che ci permette di fare il push di una stringa e sia E l'insieme degli stati ausiliari utilizzati per simulare le transizioni necessarie per pushare una stringa e non un carattere.

Sia $Q = \{q_{start}, q_{loop}, q_{accept}\} \cup E$ e sia definita la funzione di transizione come

$$\delta(q_{start}, \varepsilon, \varepsilon) = \{q_{loop}, S\$\}$$
$$\delta(q_{loop}, \varepsilon, A) = \{q_{loop}, w \mid A \to w \text{ è una produzione}\}$$
$$\delta(q_{loop}, a, a) = \{q_{loop}, \varepsilon\}$$
$$\delta(q_{loop}, \varepsilon, \$) = \{q_{accept}, \varepsilon\}$$

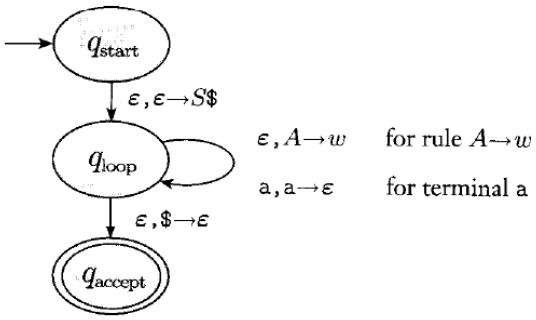


Figura 2: Diagramma di stato di Q

□

Dimostrazione. Se un li linguaggio è riconoscibile da un PDA, allora è *context-free*. Ci focalizziamo su un PDA con tre caratteristiche:

1. Ha un unico stato finale q_{accept}
2. Svuota lo stack prima di accettare
3. Ogni transizione è o una push o una pop, ma mai entrambe contemporaneamente

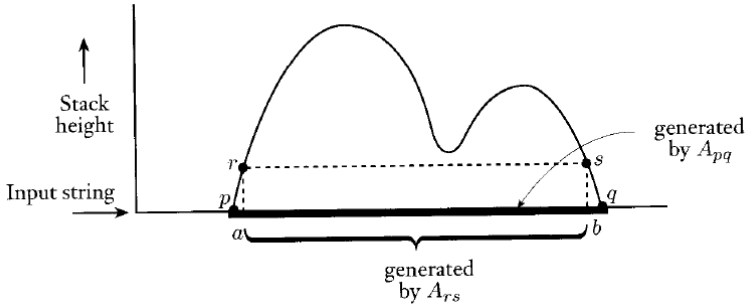
L'idea è che per ogni coppia di stati p e q del PDA, invento una variabile A_{pq} che genera tutte le stringhe che portano il PDA da p a q con lo stack vuoto. Quindi dato un input x il PDA farà come prima mossa una push e come ultima mossa una pop, dal momento che inizio e termino con lo stack vuoto.

- Se il carattere che poppo alla fine è lo stesso che ho pushato all'inizio, lo stack non si è mai svuotato. Simulo con

  $a =$ primo carattere letto
  $b =$ ultimo carattere letto
  $r =$ stato dopo di p
  $s =$ stato prima di q

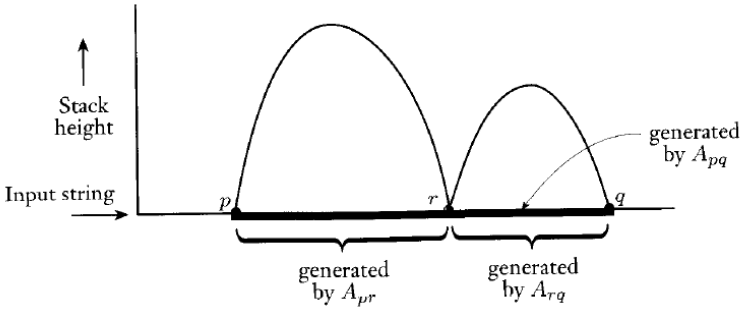
  allora

  $$A_{pq} \to aA_{rs}b$$



- Altrimenti esiste uno stato r dove lo stack si è svuotato. Simulo con:

  $$A_{pq} \to A_{pr}A_{rq}$$



□

Sia $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \{q_{accept}\})$ un PDA delle forma specificata. Le variabili della grammatica sono

$$\{A_{pq} \mid p, q \in Q\}$$

mentre le produzioni sono

1. Per ogni $p, q, r, s \in Q$ e per ogni $a, b \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, se $(r, u) \in \delta(p, a, \varepsilon)$ e $(q, \varepsilon) \in \delta(s, b, u)$
2. Per ogni $p, q, r, s \in Q$, aggiungi $A_{pq} \to A_{pr}A_{rq}$
3. Per ogni $p \in Q$ aggiungi $A_{pp} \to \varepsilon$

7.4 Pumping lemma per CFL

Se A è un linguaggio *context-free* esiste un numero p (*pumping length*) tale che per ogni $i \in A$ tale che $|s| \geq p$ abbiamo che $s = uvxyz$, dove:

1. $\forall i \geq 0 : uv^i xy^i z \in A$
2. $|vy| > 0$
3. $|vxy| \leq p$

7.4.1 Proof idea

Sia A un linguaggio *context-free* e sia G una *context-free grammar* che lo descrive. Dobbiamo dimostrare che qualunque stringa sufficientemente lunga può essere pompata e rimanere in A.

Sia s una stringa molto lunga in A (dopo definiremo il quanto lunga). Poiché $s \in A$ è derivabile da G, ha un *parse-tree*. Il *parse-tree* deve essere molto alto in quanto s è molto lunga. Il *parse-tree* deve dunque contenere un cammino dalla *start variabile* alla radice dell'albero ad un simbolo terminale in una foglia. In questo lungo cammino qualche variabile R deve ripetersi per il principio dei cassetti. Come mostra le figura seguente questa ripetizione ci permette di rimpiazzare il sottoalbero sotto la seconda occorrenza di R con il sottoalbero sotto la prima occorrenza di R e continuare ad avere un *parse-tree* valido e legale.

Pertanto possiamo dividere s in cinque pezzi $vuxyz$ come indica la figura, e possiamo ripetere il secondo e il quarto pezzo ottenendo una stringa ancora nel linguaggio. In altre parole $uv^i xy^i z \in A \; \forall i \geq 0$.

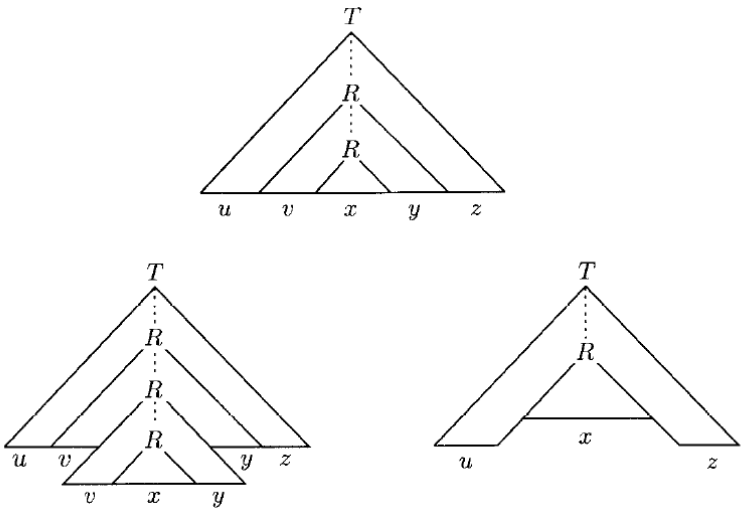


Figura 3: Rimpiazzamento dei *parse-tree*

Andiamo ora a definire i dettagli per ottenere le tre condizioni del *pumping lemma* e per calcolare il *pumping length* p.

7.4.2 Dimostrazione

Sia G una CFG per il CFL A. Sia b la lunghezza massima dei simboli nella parte destra delle produzioni, per assunzione $b \geq 2$. In ogni *parse-tree* utilizzando questa grammatica sappiamo che un nodo non può avere più di b figli. In altre parole al massimo b foglie sono alla distanza di 1 passo dalla radice; al massimo b^2 foglie sono al massimo a 2 passi dalla radice; al massimo b^h foglie sono al massimo a h passi dalla radice.Quindi se l'altezza del *parse-tree* è al massimo h, la lunghezza della stringa generata è al massimo b^h.

Sia $|V|$ il numero di variabili in G. Definiamo $p = b^{|V|+2}$. Poiché $b \geq 2$, sappiamo che $p > b^{|V|+1}$, quindi un *parse-tree* per una stringa di A di lunghezza almeno p richiede un'altezza di almeno $|V| + 2$. Supponiamo che s sia una stringa di A con lunghezza almeno p. Ora mostreremo come pompare s.

Sia τ un *parse-tree* per s. Se s ha più di un *parse-tree* prendiamo in considerazione quello con il minor numero di nodi. Siccome $|s| > p$, sappiamo che τ ha altezza almeno $|V|+2$, quindi il cammino più lungo è di lunghezza almeno $|V|+2$. Questo cammino deve avere almeno $|V|+1$ variabili in quando solo la foglia è terminale. Con G che ha solo $|V|$ variabili, qualche variabile R appare più di una volta nel cammino. Per convenienza prendiamo R in modo che sia la variabile che si ripete nelle $|V|+1$ variabili più in basso nel cammino.

Dividiamo s come mostrato in Figura 3. Ogni occorrenza di R ha un sottoalbero sotto di essa, generando così una parte della stringa s. L'occorrenza più in alto di R ha un sottoalbero più grande e genera vxy, mentre l'occorrenza più in basso genera solo x con un sottoalbero più piccolo. Entrambi questi sotto-alberi sono generati dalla stessa variabile, quindi noi potremmo sostituirli uno con l'altro e ottenere comunque un *parse-tree* valido. Rimpiazzando il sottoalbero più piccolo con quello più grande ripetutamente otteniamo un *parse-tree* che genera le stringhe $uv^ixy^iz \ \forall i > 1$. Rimpiazzando il più grande con il più piccolo otteniamo invece la stringa uxz. Questo soddisfa la condizione 1 del pumping lemma. Andiamo ora a vedere come soddisfare le altre due condizioni.

Per ottenere la condizione 2 dobbiamo essere sicuri che entrambi v e y siano non ε. Se lo fossero il parse-tree ottenuto sostituendo il sottoalbero più piccolo con quello più grande avrebbe meno nodi di τ e genererebbe comunque s. Ma questo è impossibile in quanto avevamo già scelto il parse-tree in modo che fosse quello con il minor numero di nodi.

Per soddisfare il punto 3 dobbiamo essere sicuri che vxz abbia lunghezza al massimo p. Nel parse-tree di s l'occorrenza più in alto di R genera vxz. Abbiamo scelto R in modo che entrambe le occorrenze fossero nelle $|V| + 1$ variabili più in basso del cammino, e abbiamo scelto il più lungo cammino nel parse-tree, quindi il sottoalbero dove R genera vxz è al massimo alto $|V| + 2$. Un albero di questa altezza può generare una stringa di lunghezza massima $b^{|V|+2} = p$.

Esempio. Utilizzare il pumping lemma per dimostrare che il linguaggio $B = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ è non context-free.

Assumo per assurdo che B sia *context-free* per ottenere una contraddizione. Sia p il pumping-length, la cui esistenza è garantita dal pumping lemma per i CFL. Prendiamo la stringa $s = a^p b^p c^p$. Chiaramente $s \in B$ e $|s| > p$. Il pumping lemma ci dice che s può essere pompata, ma dimoreremo che in realtà non è così. Il altre parole verificheremo che in qualunque modo dividiamo s in $uvxyz$, una delle tre condizioni del lemma viene violata.
Per prima cosa verifichiamo lo condizione 2, ovvero che sia v che y sono non vuoti. Consideriamo uno di questi due casi, in funzione di cosa contengono le sotto stringhe v e y (possono contenere solo un tipo di simbolo dell'alfabeto, oppure più di uno).

1. Quando entrambi v e y contengono solo un tipo di simbolo, esiste almeno un simbolo che non occorre ne in v ne in y. Ma allora uv^ixy^iz avrà almeno un simbolo con troppe/troppo poche occorrenze rispetto agli altri due, e quindi $uv^ixy^iz \notin B$.

2. Quando sia v che y contengono più di un tipo di simbolo uv^2xy^2z potrebbe contenere il numero corretto di occorrenze per tutti e tre i simboli dell'alfabeto, ma non li conterrà nel gusto ordine. Quindi non può essere un membro di B.

Qui abbiamo dunque una contraddizione. Poiché entrambi questi casi si concludono con una contraddizione, l'assunzione iniziale che B fosse un CFL deve essere falsa. Abbiamo dunque dimostrato che B non è *context-free*.

Esempio. Utilizzare il pumping lemma per dimostrare che il linguaggio $C = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$ è non context-free.

Assumo per assurdo che C sia *context-free* per ottenere una contraddizione. Sia p il pumping-length, la cui esistenza è garantita dal pumping lemma per i CFL. Utilizziamo la stringa $s = a^p b^p c^p$ che abbiamo utilizzato anche nell'esercizio sopra, ma questa volta dobbiamo sia fare "pump down" che "pump up". Sia $s = uvxyz$, consideriamo nuovamente i due casi dell'esercizio sopra.

1. Quando entrambi v e y contengono solo un tipo di simbolo, esiste almeno un simbolo che non occorre ne in v ne in y. La condizione di prima non è più sufficiente a garantire che $s \notin C$, dobbiamo quindi suddividere ulteriormente in sottocasi:
   (a) La a non appare. Proviamo a fare un "pump down" per ottenere la stringa $uv^0xy^0z = uxz$. Contiene lo stesso numero di a della stringa s, ma contiene meno b o meno c, quindi non è un membro di C.
   (b) La b non appare. Allora sia a che c devono apparire in v o y perché entrambi non possono essere stringa vuota. Se a appare la stringa uv^2xy^2z contiene più a che b e quindi non è in C. Se c appare, la stringa $uv^0xy^0z = uvz$ contiene più b che c e non è in C.
   (c) La c non appare. Allora la stringa uv^2xy^2z contiene più a o più b che c, e non è in C.
2. Quando sia v che y contengono più di un tipo di simbolo uv^2xy^2z non contiene i simboli nel gusto ordine. Quindi non può essere un membro di C.

Abbiamo dimostrato che s non può essere pompata in quanto vìola il pumping lemma, e che quindi C non è *context-free*.

7.5 Chiusura rispetto alle operazioni

7.5.1 Rispetto a concatenazione

Dobbiamo dimostrare la classe dei context-free languages è chiusa rispetto alla concatenazione. Siano A, B due CFL, allora esistono due CFG G_1, G_2 tali che $L(G_1) = A$ e $L(G_2) = B$. Siano $G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1)$ e $G_2(V_2, \Sigma, R_2, S_2)$, assumiamo senza perdita di generalità che $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Costruisco una nuova grammatica $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$, dove S è un nuovo simbolo tale che $S \notin V_1 \cup V_2$.

7.5.2 Rispetto all'intersezione

Dobbiamo dimostrare la classe dei context-free languages è chiusa rispetto all'intersezione. Siano

$$x = \{a^m b^m c^n \mid m, n \geq 0\}$$
$$y = \{a^m b^n c^n \mid m, n \geq 0\}$$

$$X \begin{cases} S \to Ac \\ A \to aAb \mid \varepsilon \\ C \to cC \mid \varepsilon \end{cases}$$
$$Y \begin{cases} S \to BD \\ B \to aB \mid \varepsilon \\ D \to bDc \to \varepsilon \end{cases}$$

$$X \cap Y = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Quindi X e Y sono CF, ma $X \cap Y$ non è CF perché non esiste una CFG che lo descrive.

7.5.3 Rispetto al complemento

Assumo per assurdo che la classe dei CFL non sia chiusa rispetto al complemento. Siano A, B due CFL. Sappiamo che $\overline{A}$ e $\overline{B}$ sono CFL. Ma allora $\overline{A} \cup \overline{B}$ è CF (abbiamo già dimostrato la chiusura rispetto all'unione). Ma allora $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ è CFL:

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \overset{De\ Morgan}{=} \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$$

Ma prima ho dimostrato che l'intersezione non è CF, mentre qua ho dimostrato che è CF ed ho ottenuto un assurdo.

7.5.4 Rispetto all'intersezione

Sia C una CFL e sia R un RL, dimostrare che $C \cap R$ è CF. Poiché C è CF esiste un PDA $P = (Q_1, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ che lo riconosce. Poiché R è regolare esiste un DFA $D = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ che lo riconosce. Costruisco un nuovo PDA P' tale che $L(P') = C \cap R$:

$$P' = (Q \times Q', \Sigma, \Gamma, \hat{\delta}, (q_0, q_0'), \hat{F})$$

dove

$$\hat{\delta} = (\underbrace{(q, q')}_{\text{stato PDA}}, \overset{\text{input}}{a}, \overset{\text{cima stack}}{s}) = \{((\hat{q}, \hat{q}'), \underbrace{t}_{\text{simbolo sullo tack}}) \mid (\hat{q}, t) \in \overbrace{\delta(q, a, s)}^{\text{insieme possibili stati PDA e simboli da mettere nello stack}} \wedge\ \hat{q} = \delta'(q', a)\}$$

Gli stati accettanti sono tali quando sia il PDA che il DFA sono in uno stato accettante, ovvero $\hat{F} = F \times F'$.

7.6 Esercizi

Esempio. Definire la grammatica dei seguenti linguaggi su $\{0, 1\}$.

- $\{w \mid w$ contiene almeno tre $1\}$. Le produzioni sono

  $$A \to 0A \mid 1A \mid \varepsilon$$
  $$S \to A1A1A1A$$

- $\{w \mid w$ inizia e finisce con lo stesso simbolo$\}$. Le produzioni sono

  $$A \to 0A \mid 1A \mid \varepsilon$$
  $$S \to 1A1 \mid 0A0$$

  In questo modo posso ottenere anche le sole stringhe palindrome con $S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1 \mid \varepsilon$.

- $\{w \mid w$ ha lunghezza dispari$\}$. In questo caso ho due possibilità:

  1. genero tutte le stringhe pari e aggiungo un carattere:

     $$S \to 0S0 \mid 0S1 \mid 1S0 \mid 1S1 \mid 0 \mid 1$$

  2. genero tutti i modi possibili

     $$A \to 00A \mid 01A \mid 10A \mid 11A \mid \varepsilon$$
     $$S \to 0A \mid 1A$$

Esempio. Dimostrare che $A = \{0^n\#0^{2n}\#0^{3n} \mid n \geq 0\}$ non è *context-free*.

Assumo per assurdo che A sia CF, allora esiste p tale che p sia il pumping lemma length. Considero $S = 0^p\#0^{2p}\#0^{3p}$ e procedo per casi:

1. v o y contiene '#': $uv^2xy^2z \notin A$ perché avrò più di due sharp nella stringa
2. v e y sono formate solo da zero: osservo che $|vxy| \leq p$. Da ciò si deduce che non posso pompare in entrambi i pezzi assieme perché il pumping length è al massimo su due pezzi.

8 Macchine di Turing

Una macchina di Turing (o più brevemente MdT) è una macchina ideale che manipola i dati contenuti su un nastro di lunghezza potenzialmente infinita, secondo un insieme prefissato di regole ben definite. In altre parole, è un modello astratto che definisce una macchina in grado di eseguire algoritmi e dotata di un nastro potenzialmente infinito su cui può leggere e/o scrivere dei simboli.

La seguente lista riassume le differenze tra i DFA e le MdT:

- Una MdT può sia scrivere che leggere dal nastro
- Il nastro è infinito
- Gli stati speciali per accettare o rifiutare hanno effetto immediato

Considerando ad esempio una MdT M per testare che l'input appartenga al linguaggio $B = \{w\#w \mid w \in \{0,1\}^*\}$, che non è context-free, essa computerà nel seguente modo:

0110#0110

Dopo aver letto il primo zero a sinistra, lo marco con una 'x', dopodiché vado nello zero a destra dello sharp e marco anche quest'ultimo con una 'x'. La situazione è quindi

x110#x110

Procedendo in questo modo quando ho marcato tutto l'input posso determinare che esso appartiene all'alfabeto, mentre nel caso non trovi una corrispondenza, rifiuto immediatamente.
L'algoritmo utilizzato da M è dunque riassunto come:

1. Fai zig-zag sul nastro tra posizioni corrispondenti a destra e a sinistra del simbolo '#' per controllare se i simboli corrispondono. Se non lo fanno oppure non c'è il carattere '#' rifiuta. Cancella i simboli man mano che sono stati controllati
2. Quando tutti i simboli a sinistra di '#' sono stati cancellati, controlli tutti i simboli a destra di '#'. Se ne sono rimasti, rifiuta, altrimenti accetta

8.1 Definizione

Una macchina di Turing è una 7-upla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ dove

1. Q è un insieme finito di stati
2. Σ è un insieme finito di simboli di input non contenente il simbolo speciale '$\sqcup$' (*blank symbol*)
3. Γ è un insieme finito di simboli per il nastro, con '$\sqcup$' $\in \Gamma$
4. $\delta : \ Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ è la funzione di transizione
5. $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
6. $q_{accept} \in Q$ è lo stato accettante
7. $q_{reject} \in Q$ è lo stato rifiutante, dove $q_{reject} \neq q_{accept}$

8.2 Configurazione

Quando una MdT computa avvengono dei cambiamenti

- nello stato corrente
- nel contenuto del nastro
- nella posizione corrente della testina che legge il nastro

Un'impostazione di questi tre elementi è detta *configurazione* della macchina di Turing. Essa si rappresenta in modo compatto con una terna uqv dove $uv \in \Gamma^*$ e $q \in Q$, dove

- il nastro contiene uv
- la testina è sul primo carattere di v
- lo stato della MdT è q

Una configurazione C_1 produce una configurazione C_2 quando la macchina di Turing può legalmente andare da C_1 a C_2 in un solo passo. Supponendo di avere $abc \in \Gamma$, $uv \in \Gamma^*$ e gli stati q_i e q_j. Diciamo che

uaq_ibv produce uq_jacv

se la funzione di transizione $\delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$. Questo nel caso la MdT si muova verso sinistra. Nel caso speculare di movimento verso destra invece abbiamo che

uaq_ibv produce $uacq_jv$

se $\delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$. Dei casi speciali occorrono quando la testina si trova alla fine della configurazione. Per il caso in cui sia più a sinistra, al configurazione

q_ibv produce q_jcv

se la funzione di transizione si sta muovendo verso sinistra (perché vogliamo prevenire che la MdT esca dal margine sinistro del nastro), e

q_ibv produce cq_jv

se la funzione si transizione si muove verso destra. Se la testina si trova nel margine destro della configurazione invece, la configurazione uaq_i è equivalente a $uaq_i\sqcup$ perché assumiamo che blank symbols seguano la parte di nastro rappresentata nella configurazione.

Una configurazione uqv è accettante se e solo se $q = q_{accept}$, mentre è rifiutante se e solo se $q = q_{reject}$.

Una macchina di Turing accetta l'input se e solo se esiste una sequenza di configurazioni $C_1, \ldots, C_k$ tali che:

1. $C_1 = q_0w$, ovvero C_1 è la configurazione di partenza di M sull'input w
2. $\forall i \in [1, k-1], c_i \Rightarrow c_{i+1}$
3. C_k è accettante

Un linguaggio A si dice Turing riconoscibile se e solo se esiste una MdT M tale che $L(M) = A$. Quando una MdT non riconosce una stringa w ho due casi:

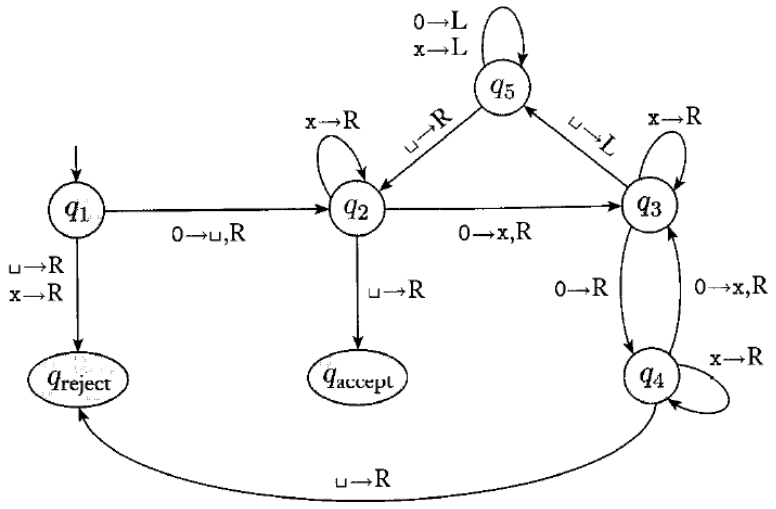
1. ho raggiunto q_{reject}
2. sono in loop

Se una MdT termina su tutti gli input è chiamata *decisione*. A è decidibile se e solo se esiste una decisione M tale che $L(M) = A$.

Esempio. Macchina di Turing che riconosce il linguaggio $A = \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$. L'algoritmo di M sull'input w è:

1. Scorri da sinistra a destra del nastro, eliminando alternativamente gli zero
2. Se nel passo 1 il nastro contiene un solo zero, accetta
3. Se nel passo 1 il nastro contiene più di uno zero e il numero di zeri è dispari, rifiuta
4. Ritorna all'inizio sinistro del nastro
5. Vai al passo 1

Ad ogni iterazione del passo 1 il numero di zeri viene dimezzato. Come la macchina attraversa il nastro da sinistra a destra nel passo 1, tiene traccia se il numero di zeri visti è pari o dispari. Se quel numero è dispari e maggiore di 1, il numero originale di zeri nell'input non poteva essere una potenza di 2. Infatti la macchina rifiuta in questo caso. In ogni caso, se il numero di zeri visti è 1, il numero originale doveva essere una potenza di 2. Quindi in questo caso accetta.



Esempio di computazione di M sull'input 0000:

$q_1$0000
␣$q_2$000
␣x$q_3$00
␣x0$q_4$0
␣x0xq_3␣
␣x0q_5x␣
␣x$q_5$0x␣
␣q_5x0x␣
q_5␣x0x␣
␣q_2x0x␣
␣x$q_2$0x␣
␣xxq_3x␣
␣xxxq_3␣
␣xxq_5x␣
␣x$q_5$xx␣
␣$q_5$xxx␣
q_5␣xxx␣
␣$q_2$xxx␣
␣x$q_2$xx␣
␣xxq_2x␣
␣xxxq_2␣
␣xxx␣q_{accept}

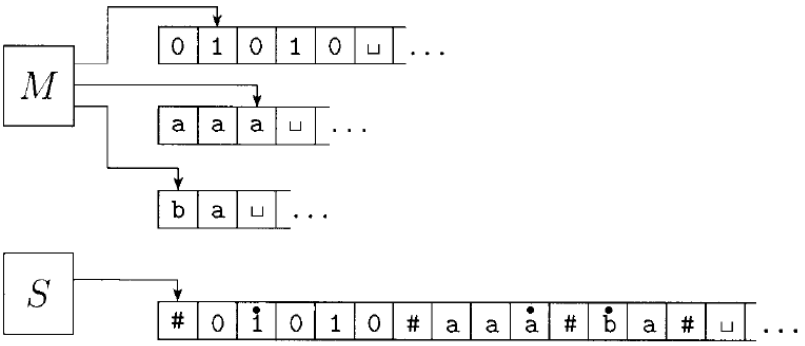
8.3 Macchine di Turing multitape

Una macchina di Turing multi-tape è equivalente ad una macchina di Turing standard, con la differenza che sono disponibili k nastri. Ogni nastro ha la propria testina per leggere e scrivere. Inizialmente i'input compare solo sul nastro 1, mentre gli altri sono bianchi. La funzione di transizione cambia permettendo di leggere e scrivere su tutti i nastri simultaneamente. Formalmente

$$\delta : Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k$$

Teorema. *Ogni macchina di Turing multitape può essere simulata con una macchina di Turing a nastro singolo.*

Dimostrazione. Sia M una MdT multitape e sia S una MdT singletape. Definiamo che M abbia k nastri. Allora simuliamo in S i k nastri di M, memorizzando tutte le informazioni nell'unico nastro disponibile. Utilizziamo un nuovo simbolo # per delimitare il contenuto di un nastro dall'altro. Oltre a mantenere il contenuto di tutti i nastri, dobbiamo anche tener traccia della posizione della testina in ogni nastro (nastro virtuale dal momento che ne esiste solo uno). Per fare ciò marcheremo con un punto • il simbolo nel nastro che corrisponde alla posizione della testina su quel nastro.



Per rappresentare una MdT con $k = 3$ nastri con una MdT a nastro singolo dobbiamo:

S = input su $w_1, \ldots, w_n$

- Porta il nastro di S nella forma $\underbrace{\#\dot{w}_1 w_2 \ldots w_n \# \dot{\sqcup} \# \dot{\sqcup} \# \ldots \#}_{k \text{ pezzi}}$
- Scorri il nastro dal primo # all'ultimo # per determinare il contenuto delle testine
- Fai una seconda passata del nastro aggiornandolo
- Se S muove una testina a destra di # allora rimpiazza # con ␣ e fai uno shift a destra di tutto

□