Esercizi di Probabilità e Statisticas

Giacomo Zanatta

February 22, 2018

Indice

1 Probabilità elementare

1. Da un'indagine svolta presso una certa azienda di ICT è emerso che il 10% dei dipendenti sa programmare in Fortran, il 20% in C++, il 5% in Java. Inoltre il 5% sa usare Fortran e C++, il 3% Fortran e Java, il 2% Java e C++ e l'1% sa programmare in tutti e tre i linguaggi. Scegliendo a caso un dipendente, qual è la probabilità che usi solo C++? E che programmi in Fortran e Java ma non in C++?

   <u>SOLUZIONE:</u>
   Abbiamo che:

   $P(F) = 0.1$
   $P(C) = 0.2$
   $P(J) = 0.05$
   $P(F \cap C) = 0.05$
   $P(F \cap J) = 0.03$
   $P(C \cap J) = 0.02$
   $P(C \cap J \cap F) = 0.01$

   Per rispondere alla prima domanda, possiamo scomporre C, ossia l'insieme dei dipendenti che programmano in C++, in:
   $C = A \cup (C \cap J) \cup (C \cap F)$
   Dove A è l'insieme dei programmatori che sanno solo il C++, $C \cap J$ *è l'insieme dei programmatori che programmano in C++ e Java e* $C \cap F$ *è l'insieme dei programmatori che programmano in C++ e Fortran.*
   Possiamo scrivere tutto usando le probabilità:
   $P(C) = P(A) + P(C \cap F) + P(C \cap J) - P(C \cap J \cap F)$ *A noi serve P(A):*
   $P(A) = P(C) - P(C \cap F) - P(C \cap J) + P(C \cap J \cap F) =$
   $= 0.2 - 0.05 - 0.02 + 0.01 = 0.14$
   Per il punto 2 (probabilità che programmi in Fortran e Java ma non in C++) il procedimento è simile: definiamo l'insieme dei programmatori che conoscono Fortran e Java come
   $J \cap F = B \cup (J \cap F \cap C)$
   Dove B è l'insieme dei programmatori che conoscono Java e Fortran, ma non C++.
   Quindi,passando alle probabilità:
   $P(B) = P(J \cap F) - P(J \cap F \cap C) = 0.03 - 0.01 = 0.02$

2. Da un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6, se ne estraggono due con reinserimento. Descrivere uno spazio campionario per l'esperimento e calcolare la probabilità che la somma dei numeri sulle palline estratte
   a) sia 7 o 8?
   b) sia 7 ottenuto con 2 seguito da 5?
   c) sia 7 o 11?

d) sia maggiore di 7? Ripetere l'esercizio nel caso in cui l'estrazione avvenga senza reinserimento.
<u>SOLUZIONE:</u>

a) Dobbiamo fare 2 estrazioni senza reinserimento, quindi il nostro spazio campionario sarà composto da 36 elementi.
Possiamo ottenere un 7 in 6 modi diversi (1,6 - 2,5 - 3,4 - 4,3 - 5,2 - 6,1) e un 8 in 5 modi diversi (2,6 - 3,5 - 4,4 - 5,3 - 6,2). Quindi per ottenere P(A):
$P(A) = \frac{6+5}{36} = \frac{11}{36}$.
b) La probabilità di ottenere un 7 pescando un 2 seguito da un 5 è di $\frac{1}{36}$. *Questo perchè esiste una sola possibilità di ottenere un 7 secondo questa modalità. c) Sia 7 o 11: Sappiamo già che possiamo ottenere 7 in 6 modi diversi. Per ottenere 11, invece, è è possibile farlo in 2 modi diversi. (6,5 - 5,6). Quindi:*
$P(C) = \frac{6+2}{36} = \frac{2}{9}$
d) Dobbiamo considerare la probabilità che la somma dei numeri sia 8,9,10,11 o 12:
8: otteniamo 8 in 5 modi diversi.
9: otteniamo 9 in 4 modi diversi (3,6 - 4,5 - 6,3 - 5,4)
10: otteniamo 10 in 3 modi diversi (4,6 - 5,5 - 6,4)
11: otteniamo 11 in 2 modi diversi.
12: otteniamo 12 in 1 modo (6,6).
Quindi: $P(D) = \frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{5}{12}$

*Consideriamo ora il caso in cui l'estrazione avvenga senza reinserimento: Dobbiamo stare attenti al nostro spazio campionario. In questo caso, non ci saranno più 36 elementi, ma solo 30 (6*5). per la seconda estrazione sarà 5 perchè abbiamo tolto una pallina.*
a) Otteniamo un 7 in 6 modi diversi, un 8 in 4 modi diversi (non si conta più il caso in cui i 2 numeri sono uguali). Quindi $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{30}$.
b) In questo caso, $P(B) = \frac{1}{30}$.
c) Il numero di modalità con le quali otteniamo 7 o 11 non cambia.
$P(C) = 830 = 415$.
d) 8: 4 modi diversi.
9: 4 modi diversi.
10: 2 modi diversi.
11: 2 modi diversi.
12: 0 modi diversi. 12 può essere ottenuto solo da 6,6 e non è possibile nel caso di estrazioni senza reinserimento.
$P(D) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

3. Un'urna contiene due palle nere e una rossa. Una seconda urna ne contiene una bianca e due rosse. Si estrae a caso una palla da ciascuna urna.
   a) Descrivere uno spazio campionario per quest'esperimento.
   b) Descrivere il corrispondente spazio degli eventi.

c) Qual è la probabilità che entrambe le palline siano dello stesso colore?
d) E che siano di colore diverso?
<u>*SOLUZIONE:*</u>

a) Il nostro spazio campionario (insieme che rappresenta i possibili risultati di un fenomeno aleatorio) sarà composto quindi da tutte le possibili estrazioni: avremo quindi 9 possibili estrazioni.
b) Lo spazio degli eventi: un evento è un sottoinsieme A dello spazio campionario.
c) Probabilità che entrambe le palline siano dello stesso colore: ci saranno 2 possibili eventi che soddisfano questa condizione: dobbiamo pescare una pallina rossa dall'urna 1 e una dall'urna 2. Ci sono due palline rosse nell'urna 1, quindi avremo 2 possibili estrazioni: $(R_1, R - R_2, R)$*. Quindi la soluzione è* $\frac{2}{9}$*.*
d) Probabilità che le palline siano di colore diverso: Possiamo prendere l'evento certo e sottrarre da questo l'evento (c). Otteniamo quindi: $1-\frac{2}{9} = \frac{7}{9}$*.*

4. Un esperimento consiste nel chiedere a tre signore, scelte casualmente, se sono iscritte ad un social network .
a) Elencare gli elementi dello spazio campionario, usando le lettere Y per sì e N per no.
b) Elencare gli elementi di Ω corrispondenti all'evento E ="almeno due donne sono iscritte ad un social network".
c) Definire l'evento i cui elementi sono: {(Y, Y, Y), (N, Y, Y), (Y, Y, N), (N, Y, N)}.
<u>*SOLUZIONE:*</u>

a) Spazio campionario: $\Omega = \{(Y,Y,Y),(Y,Y,N),(Y,N,Y),(Y,N,N),(N,Y,Y),$ $(N,Y,N),(N,N,Y),(N,N,N)\}$.
b) Evento E="almeno 2 donne sono iscritte ad un social Network":
$E = \{(Y,Y,Y),(Y,Y,N),(Y,N,Y),(N,Y,Y)\}$
c) È l'evento F="al massimo 1 donna non è iscritta ad un social network".

5. Un mazzo da 40 carte viene distribuito fra 4 giocatori. Fissato un giocatore, calcolare:
a) la probabilità che abbia 4 Assi
b) che abbia almeno una carta di denari
c) che abbia non più di 2 Assi
<u>*SOLUZIONE:*</u>

Il nostro spazio campionario è dato da tutte le possibili combinazioni di 40 elementi (40 carte) presi 10 alla volta (ogni giocatore ha 10 carte):
$\binom{|\Omega|=40}{10}$ *a) la probabilità che il giocatore prefissato abbia tutti e 4 gli assi*

è data da:
$P(A) = \frac{\binom{4}{4} * \binom{6}{36}}{|\Omega|}$. *La prima combinazione mi dice in quanti possibili modi posso formare gruppi da 4 con i 4 assi che ho a disposizione. La seconda mi dice il numero di combinazioni in cui è possibile ottenere le 6 carte rimanenti tra le 36 restanti.*
$P(A) = 0.002298$
b) Che abbia almeno 1 carta di denari: possiamo calcolarlo semplicemente calcolando la probabilità che il giocatore non abbia nessuna carta di denari, $P(N) = \frac{\binom{10}{30}}{\binom{40}{30}}$, *e calcolando l'evento opposto di questo evento.*
Quindi, $P(B) = 1 - P(N) = 0.9645554$
c) Che abbia non più di 2 assi: sommiamo le probabilità che abbia 0, 1 e 2 assi:
$P(C) = \frac{\binom{4}{0} * \binom{36}{10} + \binom{4}{1} * \binom{36}{9} + \binom{4}{2} * \binom{36}{8}}{\binom{40}{10}} = 0.4466$