

Esercizi di Probabilità e Statisticas

Giacomo Zanatta

February 23, 2018

Indice

1 Probabilità elementare

2

1 Probabilità elementare

1. Da un'indagine svolta presso una certa azienda di ICT è emerso che il 10% dei dipendenti sa programmare in Fortran, il 20% in C++, il 5% in Java. Inoltre il 5% sa usare Fortran e C++, il 3% Fortran e Java, il 2% Java e C++ e l'1% sa programmare in tutti e tre i linguaggi. Scegliendo a caso un dipendente, qual è la probabilità che usi solo C++? E che programmi in Fortran e Java ma non in C++?

SOLUZIONE:

Abbiamo che:

$$P(F) = 0.1$$

$$P(C) = 0.2$$

$$P(J) = 0.05$$

$$P(F \cap C) = 0.05$$

$$P(F \cap J) = 0.03$$

$$P(C \cap J) = 0.02$$

$$P(C \cap J \cap F) = 0.01$$

Per rispondere alla prima domanda, possiamo scomporre C , ossia l'insieme dei dipendenti che programmano in C++, in:

$$C = A \cup (C \cap J) \cup (C \cap F)$$

Dove A è l'insieme dei programmatori che fanno solo il C++, $C \cap J$ è l'insieme dei programmatori che programmano in C++ e Java e $C \cap F$ è l'insieme dei programmatori che programmano in C++ e Fortran.

Possiamo scrivere tutto usando le probabilità:

$$P(C) = P(A) + P(C \cap F) + P(C \cap J) - P(C \cap J \cap F) \text{ A noi serve } P(A):$$

$$P(A) = P(C) - P(C \cap F) - P(C \cap J) + P(C \cap J \cap F) =$$

$$= 0.2 - 0.05 - 0.02 + 0.01 = 0.14$$

Per il punto 2 (probabilità che programmi in Fortran e Java ma non in C++) il procedimento è simile: definiamo l'insieme dei programmatori che conoscono Fortran e Java come

$$J \cap F = B \cup (J \cap F \cap C)$$

Dove B è l'insieme dei programmatori che conoscono Java e Fortran, ma non C++.

Quindi, passando alle probabilità:

$$P(B) = P(J \cap F) - P(J \cap F \cap C) = 0.03 - 0.01 = 0.02$$

2. Da un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6, se ne estraggono due con reinserimento. Descrivere uno spazio campionario per l'esperimento e calcolare la probabilità che la somma dei numeri sulle palline estratte
 - a) sia 7 o 8?
 - b) sia 7 ottenuto con 2 seguito da 5?
 - c) sia 7 o 11?

d) sia maggiore di 7? Ripetere l'esercizio nel caso in cui l'estrazione avvenga senza reinserimento.

SOLUZIONE:

a) Dobbiamo fare 2 estrazioni senza reinserimento, quindi il nostro spazio campionario sarà composto da 36 elementi.

Possiamo ottenere un 7 in 6 modi diversi (1,6 - 2,5 - 3,4 - 4,3 - 5,2 - 6,1) e un 8 in 5 modi diversi (2,6 - 3,5 - 4,4 - 5,3 - 6,2). Quindi per ottenere $P(A)$:

$$P(A) = \frac{6+5}{36} = \frac{11}{36}.$$

b) La probabilità di ottenere un 7 pescando un 2 seguito da un 5 è di $\frac{1}{36}$. Questo perchè esiste una sola possibilità di ottenere un 7 secondo questa modalità. c) Sia 7 o 11: Sappiamo già che possiamo ottenere 7 in 6 modi diversi. Per ottenere 11, invece, è possibile farlo in 2 modi diversi. (6,5 - 5,6). Quindi:

$$P(C) = \frac{6+2}{36} = \frac{2}{9}$$

d) Dobbiamo considerare la probabilità che la somma dei numeri sia 8,9,10,11 o 12:

8: otteniamo 8 in 5 modi diversi.

9: otteniamo 9 in 4 modi diversi (3,6 - 4,5 - 6,3 - 5,4)

10: otteniamo 10 in 3 modi diversi (4,6 - 5,5 - 6,4)

11: otteniamo 11 in 2 modi diversi.

12: otteniamo 12 in 1 modo (6,6).

$$\text{Quindi: } P(D) = \frac{5+4+3+2+1}{36} = \frac{5}{12}$$

Consideriamo ora il caso in cui l'estrazione avvenga senza reinserimento: Dobbiamo stare attenti al nostro spazio campionario. In questo caso, non ci saranno più 36 elementi, ma solo 30 ($6*5$). per la seconda estrazione sarà 5 perchè abbiamo tolto una pallina.

a) Otteniamo un 7 in 6 modi diversi, un 8 in 4 modi diversi (non si conta più il caso in cui i 2 numeri sono uguali). Quindi $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

b) In questo caso, $P(B) = \frac{1}{30}$.

c) Il numero di modalità con le quali otteniamo 7 o 11 non cambia. $P(C) = 830 = 415$.

d) 8: 4 modi diversi.

9: 4 modi diversi.

10: 2 modi diversi.

11: 2 modi diversi.

12: 0 modi diversi. 12 può essere ottenuto solo da 6,6 e non è possibile nel caso di estrazioni senza reinserimento.

$$P(D) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

3. Un'urna contiene due palle nere e una rossa. Una seconda urna ne contiene una bianca e due rosse. Si estrae a caso una palla da ciascuna urna.
 - a) Descrivere uno spazio campionario per quest'esperimento.
 - b) Descrivere il corrispondente spazio degli eventi.

- c) Qual è la probabilità che entrambe le palline siano dello stesso colore?
 d) E che siano di colore diverso?

SOLUZIONE:

a) Il nostro spazio campionario (insieme che rappresenta i possibili risultati di un fenomeno aleatorio) sarà composto quindi da tutte le possibili estrazioni: avremo quindi 9 possibili estrazioni.

b) Lo spazio degli eventi: un evento è un sottoinsieme A dello spazio campionario.

c) Probabilità che entrambe le palline siano dello stesso colore: ci saranno 2 possibili eventi che soddisfano questa condizione: dobbiamo pescare una pallina rossa dall'urna 1 e una dall'urna 2. Ci sono due palline rosse nell'urna 1, quindi avremo 2 possibili estrazioni: $(R_1, R - R_2, R)$. Quindi la soluzione è $\frac{2}{9}$.

d) Probabilità che le palline siano di colore diverso: Possiamo prendere l'evento certo e sottrarre da questo l'evento (c). Otteniamo quindi: $1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

4. Un esperimento consiste nel chiedere a tre signore, scelte casualmente, se sono iscritte ad un social network .
- a) Elencare gli elementi dello spazio campionario, usando le lettere Y per sì e N per no.
- b) Elencare gli elementi di Ω corrispondenti all'evento $E = \text{"almeno due donne sono iscritte ad un social network"}$.
- c) Definire l'evento i cui elementi sono: $\{(Y, Y, Y), (N, Y, Y), (Y, Y, N), (N, Y, N)\}$.

SOLUZIONE:

a) Spazio campionario: $\Omega = \{(Y, Y, Y), (Y, Y, N), (Y, N, Y), (Y, N, N), (N, Y, Y), (N, Y, N), (N, N, Y), (N, N, N)\}$.

b) Evento $E = \text{"almeno 2 donne sono iscritte ad un social Network"}$:

$E = \{(Y, Y, Y), (Y, Y, N), (Y, N, Y), (N, Y, Y)\}$

c) È l'evento $F = \text{"al massimo 1 donna non è iscritta ad un social network"}$.

5. Un mazzo da 40 carte viene distribuito fra 4 giocatori. Fissato un giocatore, calcolare:
- a) la probabilità che abbia 4 Assi
- b) che abbia almeno una carta di denari
- c) che abbia non più di 2 Assi

SOLUZIONE:

Il nostro spazio campionario è dato da tutte le possibili combinazioni di 40 elementi (40 carte) presi 10 alla volta (ogni giocatore ha 10 carte):

$\binom{|\Omega|=40}{10}$ a) la probabilità che il giocatore prefissato abbia tutti e 4 gli assi

è data da:

$P(A) = \frac{\binom{4}{1} * \binom{6}{36}}{|\Omega|}$. La prima combinazione mi dice in quanti possibili modi posso formare gruppi da 4 con i 4 assi che ho a disposizione. La seconda mi dice il numero di combinazioni in cui è possibile ottenere le 6 carte rimanenti tra le 36 restanti.

$$P(A) = 0.002298$$

b) Che abbia almeno 1 carta di denari: possiamo calcolarlo semplicemente calcolando la probabilità che il giocatore non abbia nessuna carta di denari,

$$P(N) = \frac{\binom{10}{30}}{\binom{40}{30}}, \text{ e calcolando l'evento opposto di questo evento.}$$

$$\text{Quindi, } P(B) = 1 - P(N) = 0.9645554$$

c) Che abbia non più di 2 assi: sommiamo le probabilità che abbia 0, 1 e 2 assi:

$$P(C) = \frac{\binom{4}{0} * \binom{36}{10} + \binom{4}{1} * \binom{36}{9} + \binom{4}{2} * \binom{36}{8}}{\binom{40}{10}} = 0.4466$$