1 Elettrostatica

1.1 Forza elettrica, campo elettrostatico

L'interazione **elettromagnetica** è una delle interazioni fondamentali che gioca un ruolo essenziale nella costituzione della materia. Un aspetto particolare dell'interazione elettromagnetica è la **forza elettrica**. Si notò che alcuni corpi si caricano per stofinio: tali corpi vengono chiamati *isolanti* in quanto sono in grado di trattenere la carica; i corpi che al contrario non sono in grado di trattenere la carica vengono chiamati *conduttori*.
In seguito a delle evidenze sperimentali si concluse che esistono due diversi tipi di cariche elettriche: convenzionalmente si chiama positiva la carica che compare su una bacchetta di vetro quando viene elettrizzata mentre si chiama negativa la carica che compare sulle sostanze tipo bachelite. Si conclude dunque che:

1. due corpi con la stessa carica si respingono,
2. due corpi con carica opposta si attraggono,
3. nel processo di carica per strofinio i due corpi, la bacchetta di isolante ed il panno, assumono sempre una carica di segno opposto.

1.2 Struttura elettrica della materia

La materia stabile è formata da tre costituenti elementari: il *protone p*, il *neutrone n* e l'*elettrone e*. Neutroni e protoni hanno massa uguale entro qualche permille ed è pari a $m_p = m_e \simeq 1.67 \cdot 10^{-27}\ kg$, la massa dell'elettrone è invece più piccola ed è pari a $m_e \simeq 9.11 \cdot 10^{-31}\ kg$.
La carica dell'elettrone è la più piccola osservata e viene definita **carica fondamentale**, pari a $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\ C$. Tutte le particelle subatomiche hanno una carica che, in valore assoluto, è eguale alla carica elementare oppure è multipla intera di essa: la carica elettrica è dunque una grandezza **quantizzata**.
Poiché in un qualsiasi atomo il numero di elettroni è uguale al numero di protoni la somma delle singole cariche è nulla dunque l'atomo è neutro.
Sperimentalmente si prova che il raggio di un nucleo atomico è dato con buona approssimazione dalla formula:

$$r = R_0 A^{1/3} \quad \text{con} \quad R_0 = 1.5 \cdot 10^{-15}\ m$$

dove A è il numero di massa dell'atomo in questione.
Gli elettroni di un atomo sono più o meno legati al nucleo: in un isolante gli elettroni sono ben vincolati al nucleo quindi non possono trasportare facilmente la carica.

1.3 Legge di Coulomb

Coulomb utilizzò la bilancia di torsione per misurare la forza elettrica e stabilì che *due cariche puntiformi* q_1 e q_2 poste a distanza r interagiscono con forza $\vec{F}$ diretta secondo la loro congiungente di modulo:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1}$$

la forza cioè è direttamente proporzionale alle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Affinché le cariche possano essere definite puntiformi occorre che le dimensioni delle sferette siano piccole rispetto alla loro distanza e devono rimanere costanti durante l'esperimento. Infine bisogna avere cura che il sistema sia schermato dalle azioni delle cariche circostanti.
La costante k che compare nella formula dipende dalla scelta delle unità di misura e del mezzo in cui le cariche sono immerse, di norma un dielettrico. Nel sistema internazionale k nel vuoto assume il valore $k = 8.9875 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$ ma per ragioni pratiche è conveniente esprimere k come

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

dove la costante ϵ_0 è nota come costante dielettrica nel vuoto e ha il valore $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$. Utilizzando questa notazione la Eq. 1 diventa:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{2}$$

e, in termini vettoriali diventa

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u} \tag{3}$$

Distribuzioni di cariche: oltre alle cariche puntiformi, in cui i singoli elementi hanno dimensioni trascurabili, si possono avere anche distribuzioni discrete di N cariche puntiformi e distribuzioni continue in n dimensioni nelle quali la distanza tra le singole cariche è trascurabili rispetto all'osservatore.

1.4 Il campo elettrostatico

La grandezza vettoriale

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

viene chiamata campo elettrostatico. Più precisamente: il campo elettrostatico $\vec{E}$ generato in un punto dello spazio da un sistema di cariche ferme è definito come la forza elettrica risultante $\vec{F}$ che agisce su una carica di prova q_0 positiva posta in quel punto divisa per la carica stessa. La definizione diventerebbe più precisa se si facesse tendere a zero il valore di q_0 in modo da far scomparire la perturbazione prodotta da q_0 e dunque in formula:

$$\vec{E} = \lim q_0 \rightarrow 0 \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Il campo elettrico prodotto da un sistema discreto di cariche puntiformi è dunque

$$\vec{E}(x, y, z) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i}$$

Il campo elettrico prodotto da una **distribuzione continua di carica** di volume τ si calcola innanzitutto definendo la densità spaziale di carica $\rho(x', y', z')$ mediante la

$$dq = \rho(x', y', z') d\tau$$

dove $d\tau = dx'dy'dz'$ è il volume elementare intorno al punto di coordinate (x', y', z') in cui è contenuta la carica dq. La carica totale posseduta dal corpo è data dall'integrale $\int_\tau \rho(x', y', z') d\tau$ esteso a tutto il volume. Il campo elettrostatico prodotto dalla carica infinitesima dq in un punto $P(x, y, z)$ distante r da dq si esprime come:

$$d\vec{E}(x, y, z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

e l'integrale esteso a tutto il volume diventa

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\tau \frac{\rho d\tau}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\tau \frac{\rho(x', y', z') dx'dy'dz'}{r^2} \vec{u}$$

Nel caso di una distribuzione superficiale di carica si ha

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \frac{\sigma d\Sigma}{r^2} \vec{u}$$

mentre in presenza di una distribuzione lineare il campo diventa

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

Quando una distribuzione di carica occupa uno spazio limitato, allontanandosi deve avere andamento coulombiano.

Le **linee di forza del campo** sono linee orientante tangenti in ogni punto al vettore del campo elettrostatico $\vec{E}$

2 Lavoro elettrico e potenziale elettrostatico

Dalla definizione di campo elettrostatico si può definire la forza agente su una carica in presenza di un campo come $\vec{F} = q_0\vec{E}$. Il lavoro della forza $\vec{F}$ per uno spostamento elementare $d\vec{s}$ della carica q_0 è dato da

$$dW_1 = \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 E \cos\theta ds$$

con θ angolo tra il campo elettrico e il vettore spostamento. Per uno spostamento finito si ha quindi

$$W_1 = \int_{C_1} dW_1 = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \tag{4}$$

dove l'ultimo integrale è l'integrale di linea del campo $\vec{E}$ lungo C_1.
Il rapporto W_1/q_0 definisce la tensione elettrica tra i due punti A e B relativamente al percorso C_1:

$$T_1(AB\,\text{lungo}\,C_1) = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

In generale per un percorso chiuso il lavoro è diverso da zero:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = q_0 \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = q_0 \mathcal{E}$$

dove l'integrale $\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot s\vec{s}$ si definisce **forza elettromotrice (f.e.m.) relativa al percorso chiuso C**.
Il campo elettrostatico è però conservativo, in quanto le interazioni elettrostatiche hanno la forma di una forza centrale, e come tale dipende dal percorso effettivamente seguito, quindi può essere espresso come la differenza dei valori di una funzione delle coordinate:

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A)$$

All'opposto di questa funzione si da il nome di **potenziale elettrostatico** del campo $\vec{E}$ che risulta quindi definito dalla formula

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

In realtà è la differenza di potenziale ad essere definita in tal modo dunque il potenziale in un punto può essere definito a meno di una costante additiva. Inserendo Eq. 2 in Eq. 4 si ottiene

$$W_{AB} = q_0(V_A - V_B) = -q_0 \Delta V$$

ovvero il lavoro svolto dalla forza elettrica per portare q_0 da A a B è dato dal prodotto di q_0 per la d.d.p tra i due punti.
Dal momento che ad ogni forza conservativa è associata un'energia potenziale e che il lavoro di una forza conservativa è uguale all'opposto della variazione della corrispondente energia potenziale seguono le uguaglianze

$$\Delta U_e = q_0 \Delta V \qquad U_e = q_0 V$$

Per un qualsiasi percorso chiuso nella regione in cui è definito il campo $\vec{E}$, essendo la d.d.p. nulla in quanto $A \equiv B$ valgono le relazioni

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \qquad W = q_0 \mathcal{E} = 0$$

in un campo elettrostatico la forza elettromotrice è sempre uguale a zero e quindi è nullo il lavoro compiuto dalla forza elettrica per ogni spostamento che riporti la carica nella posizione iniziale.
Il potenziale elettrostatico, ammesso dal momento che la forza elettrostatica è centrale e dunque conservativa, può quindi essere definito come

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i} + c$$

considerando $E(\infty) = 0$, $F(\infty) = 0$, $V(\infty) = 0$, $U(\infty) = 0$.

Nel caso di una distribuzione continua di cariche con densità lineare λ o superficiale σ o spaziale ρ nel calcolo del potenziale la sommatoria viene sostituita dall'integrale di linea, di superficie o di volume (con $r = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$)

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_s \frac{\lambda ds}{r}$$
$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \frac{\sigma d\Sigma}{r}$$
$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\tau \frac{\rho d\tau}{r}$$

Il potenziale elettrostatico, in tutte le situazioni descritte, risulta una funzione (univoca) del punto, continua e derivabile, che può essere calcolata una volta definita la distribuzione delle cariche sorgenti, indipendentemente dalla presenza della carica q_0.
Il campo elettrostatico può inoltre essere definito come il gradiente del potenziale:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z}\right]$$

2.1 Superfici equipotenziali

Così come l'andamento del campo elettrostatico può essere visualizzato graficamente ricorrendo alle linee di campo, l'andamento del potenziale si può visualizzare utilizzando le superfici equipotenziali ovvero quella superficie dello spazio tridimensionale nei cui punti il potenziale ha lo stesso valore. Chiaramente queste superfici non posso intersecarsi, essendo il potenziale una funzione univoca. Ricordando le proprietà di direzione e verso del gradiente si ha che

$$dV = \nabla \cdot d\vec{s} = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$$

e quindi per uno spostamento $d\vec{s}$ tangente ad una superficie equipotenziale la variazione dV è nulla e quindi il gradiente (e quindi il campo $\vec{E}$) è ortogonale in ogni punto alla superficie equipotenziale.

per distribuzioni con potenziale vedi appunti

2.2 Il dipolo elettrico

Due cariche puntiformi $-q$ e $+q$ distanti a costituiscono un dipolo elettrico. Si chiama momento di dipolo il vettore

$$\vec{p} = q\vec{a}$$

con $\vec{a}$ orientato dalla carica negativa a quella positiva. Il potenziale generato dal dipolo si calcola usando la relazione

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

se $r >> a$ si può porre $r_2 - r_1 = a\cos\theta\,,\; r_1 r_2 = r^2$ e quindi $V(P)qa\cos\theta/4\pi\epsilon_0 r^2$ ovvero

$$V(P) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

essendo $\vec{u_r}$ il versore della direzione OP.
L'unica grandezza caratteristica del dipolo è il momento $\vec{p}$ e non q e a separatamente: dalle misure di potenziale possiamo quindi ricavare informazioni su $\vec{p}$ ma non sulla costituzione del sistema.
Il valore del potenziale decresce più rapidamente di quello generato da una singola carica dal momento che gli effetti di due cariche di segno opposto si neutralizzano parzialmente. La struttura del potenziale è caratterizzata da una geometria di rotazione attorno ad un asse z: diventa quindi spontanea la scelta delle coordinate polari. Tale proprietà è resa evidente analiticamente dal fatto che il potenziale non dipende dalla terza coordinata polare ϕ:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$
$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$
$$E_\phi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

Il campo sta pertanto nel piano $\vec{p}\vec{u_r}$ e ha formula:

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3}[2\cos\theta\vec{u_r} + \sin\theta\vec{u_\theta}]$$

Le linee di campo presentano una struttura a lobi: lungo z ($\theta = 0$) si ha $\vec{E} = \pm 2p/4\pi\epsilon_0 r^3\vec{u_r} = 2p/4\pi\epsilon_0 r^3\vec{u_r}$ mentre nel piano equatoriale $\vec{E} = p/4\pi\epsilon_0 r^3\vec{u_\theta}$. Utilizzando $\vec{u_z} = \cos\theta\vec{u_r} - \sin\theta\vec{u_r}$ il campo elettrico di dipolo si può riscrivere nella forma

$$\vec{E}(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}[3(\vec{p}\cdot\vec{u_r})\vec{u_r} - \vec{p}]$$

Potenziale di un sistema di cariche nell'approssimazione di dipolo: considerando un sistema di cariche q_i distribuite in una regione ristretta di dimensione massima d, detto O un punto qualsiasi all'interno della regione consideriamo il potenziale in un punto P a distanza $r >> d$. Se r_i è la distanza di q_i da P allora

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

chiamando $\vec{d_i}$ il vettore che unisce O alla carica q_i abbiamo $\vec{d_i} + \vec{r_i} = \vec{r}$ quindi avendo $r >> d$ possiamo scrivere $r_i = r - d_i \cos\theta_i = r - \vec{d_i} \cdot \vec{u_r}$ con $\vec{u_r}$ versore nella direzione OP pertanto

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{d_i} \cdot \vec{u_r}}{r^2}$$

e il potenziale si riscrive come

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum\frac{q_i\vec{d_i} \cdot \vec{u_r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p} \cdot \vec{u_r}}{r^2} = V_0 + V_{dip}$$

ovvero il potenziale è formato da un termine coulombiano (il primo) e un termine di dipolo. Se la Q è diversa da zero il termine di monopolo è preponderante infatti $V_{dip}/V_0 \approx d/r << 1$. Se invece il sistema è neutro e quindi $Q = 0$ il termine di monopolo è nullo e il potenziale in P è

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u_r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

con $\vec{p}$ proprietà intrinseca caratteristica del sistema e indipendente dalla scelta di O: si conclude che p ha significato unico solamente per distribuzioni di cariche neutre.

Forza su un dipolo elettrico: consideriamo un dipolo formato da una carica $-q$ posta nel punto $P_1(x, y, z)$ e da una carica $+q$ posta nel punto $P_2(x + a_x, y + a_y, z + a_z)$: il vettore $\vec{a} = a_x\vec{u_x} + a_y\vec{u_y} + a_z\vec{u_z}$ congiunge P_1 e P_2 e il momento di dipolo è $\vec{p} = q\vec{a}$.
Se il dipolo si trova in una regione in cui c'è un campo elettrico, la sua energia potenziale elettrostatica è

$$U_e = qV(x + a_x, y + a_y, z + a_z) - qV(x, y, z)$$

supponendo che la distanza a sia piccola si può scrivere

$$V(x + a_x, y + a_y, z + a_z) = V(x, y, z) + \frac{\partial V}{\partial x}a_x + \frac{\partial V}{\partial y}a_y + \frac{\partial V}{\partial z}a_z$$

da cui l'energia elettrostatica del dipolo diventa

$$U_e = qa_x\frac{\partial V}{\partial x} + qa_y\frac{\partial V}{\partial y} + qa_z\frac{\partial V}{\partial z} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p\cos\theta E$$

ricordando che il campo è l'opposto del gradiente del potenziale $\vec{E} = -\nabla V$. L'energia potenziale è minima per $\vec{p}$ed $\vec{E}$ paralleli e concordi.
Se il campo è uniforme le forze sulle cariche $\vec{F_1} = -q\vec{E}$ e $\vec{F_2} = q\vec{E}$ costituiscono una coppia e hanno dunque risultante nulla. Al contrario, facendo ruotare il dipolo di un angolo θ rispetto alla posizione di equilibrio esso risente di un momento che tende a riportarlo alla posizione $\theta = 0$. Tale momento è

$$\vec{M} = \vec{r_1} \times \vec{F_1} + \vec{r_2} \times \vec{F_2} = (\vec{r_2} - \vec{r_1}) \times q\vec{E} = q\vec{a} \times \vec{E} \to \vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

e tale momento è nullo se $\vec{p} \parallel \vec{E}$.

Quando il campo elettrico non è uniforme, oltre al momento $\vec{M}$ agisce anche una forza F. Tali forze si scrivono come

$$\vec{F_1} = -q\vec{E}$$
$$\vec{F_2} = q(\vec{E} + \Delta\vec{E}) = q\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}a_x + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y}a_y + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}a_z\right)$$

La forza risultante è

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = p_x\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z\frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

e le componenti della forza subita dal dipolo sono

$$F_x = p_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_x}{\partial z}$$
$$F_y = p_x\frac{\partial E_y}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_y}{\partial z}$$
$$F_z = p_x\frac{\partial E_z}{\partial x} + p_y\frac{\partial E_z}{\partial y} + p_z\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

o in forma compatta $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E}$.
In un campo elettrostatico deve essere vero anche che

$$\vec{F} = -\nabla U_e = -\nabla(-\vec{p} \cdot \vec{E}) = \nabla(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \nabla(p_x E_x + p_y E_y + p_z E_z)$$

e quindi la forza ha componenti

$$\begin{aligned}
F_x &= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} \\
F_y &= \frac{\partial}{\partial y}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial y} \\
F_z &= \frac{\partial}{\partial z}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial z} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial z} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

queste componenti sono uguali a quelle descritte in precedenza essendo il campo conservativo **(Teorema di Stokes)**.

Due dipoli elettrici posti a distanza r tra loro, interagiscono in quanto ciascuno è sottoposto al campo dell'altro. Essendo il campo prodotto da un dipolo $\vec{E_1} = 1/4\pi\epsilon_0 r^3[3(\vec{p_1} \cdot \vec{u_r}) - \vec{p_1}]$, un dipolo $\vec{p_2}$ nel campo dovuto a $\vec{p_1}$ ha energia:

$$U_{el} = -\vec{p_2} \cdot \vec{E_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}[\vec{p_1}\vec{p_2} - 3(\vec{p_1} \cdot \vec{u_2})(\vec{p_2} \cdot \vec{u_1})]$$

Se i dipoli sono posti sullo stesso piano allora l'energia è pari a

$$U_{el} = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}[\sin\theta_1 \sin\theta_2 - 2\cos\theta_1 \cos\theta_2]$$

che in base alla loro mutua disposizione diventa

$$\begin{aligned}
\text{paralleli concordi} \quad \theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad U_{el} = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\
\text{paralleli discordi} \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2}\ \theta_2 = -\frac{\pi}{2} \quad U_e l = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}
\end{aligned}$$

[Forze di dipolo vedi da libro]

3 La legge di Gauss

Consideriamo una superficie $d\Sigma$ immersa in una regione in cui è definito un campo $\vec{E}$ e orientiamola fissando il verso del versore della normale $\vec{u_n}$. Si definisce flusso del campo $\vec{E}$ attraverso la superficie $d\Sigma$ la quantità scalare

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = E\cos\theta d\Sigma = E_n d\Sigma$$

Il flusso attraverso una superficie finita Σ si ottiene integrando:

$$\Phi(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{u_n} d\Sigma$$

Se la superficie è chiusa il flusso si scrive:

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{u_n} d\Sigma$$

La normale è convenzionalmente orientata verso l'esterno. I contributi positivi rappresentano un flusso di $\vec{E}$ uscente dalla superficie e provengono da zone in cui $\vec{E} \cdot \vec{u_n} > 0$, analogamente i contributi negativi. Se la risultante è nulla significa che il flusso uscente eguaglia quello entrante.

Prendiamo ora in esame il campo prodotto da una caria puntiforme q e calcoliamone il flusso attraverso una superficie orientata:

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{u_r} \cdot \vec{u_n} d\Sigma}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma \cos\theta}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\Sigma_0}{r^2}$$

dove $d\Sigma_0$ è la proiezione di $d\Sigma$ sul piano perpendicolare a $\vec{u_r}$. Per definizione $d\Sigma_0/r^2$ è l'angolo solido $d\Omega$ sotto cui è visto dalla carica q il contorno di $d\Sigma$, per cui

$$d\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

quindi il flusso del campo $\vec{E}$ di una carica puntiforme q dipende solamente dall'angolo solido e non dalla superficie nè dalla sua distanza dalla carica. Il flusso attraversi una superficie finita è dato da

$$\Phi(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Omega$$

Nel caso di una superficie chiusa con la carica disposta internamente ad essa si ha

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Se invece la carica è esterna consideriamo un cono elementare che stacca sulla superficie chiusa due elementi $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$: l'orientazione della normale è tale che $\vec{E} \cdot \vec{u_n} d\Sigma_1 < 0$e $\vec{E} \cdot \vec{u_n} d\Sigma_2 > 0$. I flussi attraverso i due elementi sono

$$d\Phi_1(\vec{E}) = \vec{E_1} \cdot \vec{u_n} d\Sigma_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$
$$d\Phi_2 = \vec{E_2} \cdot \vec{u_n} d\Sigma_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = -d\Phi_1$$
$$\rightarrow d\Phi_1(\vec{E}) + d\Phi_2(\vec{E}) = 0$$

e integrando su tutta la superficie chiusa si ottiene

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \vec{E} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = 0$$

Si può dunque concludere che il flusso totale attraverso una superficie chiusa del campo di una carica puntiforme q vale q/ϵ_0 se la carica è interna alla superficie mentre vale zero se la carica è esterna.
Nel caso di una distribuzione discreta di cariche

$$\Phi(\vec{E}) = \oint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u_i} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \oint \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} d\Omega_i$$
$$\rightarrow \Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\sum_i q_i)_{int}$$

essendo la somma estesa a tutte e sole le cariche poste all'interno della superficie Σ.
Nel caso più generale di una distribuzione continua di cariche caratterizzata dalla densità spaziale $\rho(x,y,z)$ il flusso è definito come

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\Sigma \rho(x,y,z) d\tau \tag{5}$$

dove l'integrale, esteso al volume τ racchiuso dalla superficie Σ, rappresenta sempre la carica totale contenuta all'interno di Σ.
Queste formule costituiscono la **legge di Gauss**: il flusso del campo $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa è eguale alla somma algebrica delle cariche contenute entro la superficie, comunque siano distribuite, divisa per ϵ_0.

La legge di Gauss si basa sul fatto che l'esponente di r al denominatore è esattamente 2. Per un campo radiale qualunque del tipo $1/r^n$ con $n \neq 2$ non vale la legge di Gauss: questa può dunque essere considerata come una formulazione alternativa della legge di Coulomb basata sul concetto di campo.

3.1 Applicazioni e conseguenze della legge di Gauss

La legge di Gauss diventa uno strumento molto potente per determinare il campo $\vec{E}$ nei casi in cui la distribuzione di cariche presenti un elevato grado di simmetria (sferica, cilindrica, piana) *[esempi vedi appunti e libro]*.

3.2 Divergenza del campo elettrostatico

La legge di Gauss può essere espressa in forma differenziale tramite una relazione locale che lega le derivate del campo in un determinato punto con la densità di carica ρ in quel punto.
Si definisce **divergenza del campo** $\vec{E}$ la combinazione di derivate

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

che, essendo data dal prodotto scalare dell'operatore *del* per il campo costituisce una grandezza scalare.
Utilizzando il **teorema della divergenza** si ricava la legge di Gauss in forma locale ovvero

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \tag{6}$$

dalla quale si conclude che il campo $\vec{E}$ ha divergenza diversa da zero solamente nei punti in cui esiste una densità di carica, nello spazio vuoto la divergenza di $\vec{E}$ è nulla.

3.3 Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica. Equazioni di Poisson e Laplace

Attraverso il rotore e la divergenza possiamo esprimere le prime due leggi di Maxwell in forma locale definite come:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{8}$$

ciascuna delle quali corrisponde a tre equazioni differenziali nelle componenti del campo.
Poiché per il campo elettrostatico si ha $\vec{E} = -\nabla V$ inseriamo questa relazione nella seconda eq. di Maxwell ottenendo

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot \nabla V = -\nabla^2 V 0 \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Operando in coordinate cartesiane si ottiene l'**equazione di Poisson**:

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{9}$$

che lega il potenziale alla densità di carica.
Nello spazio vuoto essa diventa

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^V}{\partial z^2} = 0 \tag{10}$$

e viene chiamata **equazione di Laplace**. L'operatore ∇^2 è l'operatore laplaciano ed è

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

L'integrazione di queste equazioni con determinate condizioni al contorno permette di determinare univocamente il potenziale $V(x, y, z)$ e da questo il campo elettrico attraverso l'operazione di gradiente. L'unica soluzione di $\nabla^2 V = 0$ è

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d\tau'$$

4 Conduttori

I materiali conduttori sono caratterizzati dal fatto che al loro interno si verificano particolari condizioni che rendono possibile il moto i alcune delle cariche che li costituiscono.
In condizioni statiche il campo elettrico all'interno di un conduttore è nullo. Se fosse $\vec{E} \neq 0$ all'interno del corpo conduttore si avrebbero degli spostamenti di carica sotto l'azione del campo e dunque le condizioni non sarebbero statiche.
Tale condizione ha importanti conseguenze:

1. Se il campo elettrico è nullo, è nullo il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa Σ si tracci all'interno del conduttore e quindi secondo la legge di Gauss non ci sono cariche, nel senso che non c'è un eccesso di carica di un segno o dell'altro. Di conseguenza un eccesso di carica in un conduttore può stare solamente sulla superficie distribuito con densità superficiale $\sigma = dq/d\Sigma$.

2. Il potenziale del conduttore è costante in ogni punto del conduttore: presi due punti qualsiasi

   $$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow V(P_1) = V(P_2) = V_0$$

   Pertanto la superficie di un conduttore è una superficie equipotenziale.

3. Dato che la superficie è equipotenziale, il campo in un punto esterno molto vicino al conduttore è ortogonale alla sua superficie indipendentemente dalla sua forma:

$$d\Phi_{\Sigma'}(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = E d\Sigma = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d\Sigma \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u_n}$$

La densità di carica superficiale σ dipende dal raggio di curvatura locale di Σ e quindi

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_1 4\pi R_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} R_1 = V_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} R_2 \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Da questa relazione deriva la proprietà chiamata "potere delle punte".

4.1 Capacità di un conduttore isolato

La carica distribuita su tutta la superficie del conduttore e la densità della distribuzione sono legate da

$$q = \oint \sigma(x', y', z') d\Sigma$$

e il potenziale in un punto P qualsiasi è costante e il suo valore è dato da

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\sigma(x', y', z') d\Sigma}{r'}$$

La distribuzione di carica tale da rendere il campo elettrico nullo all'interno e quindi costante il potenziale è una ed una sola. Se la carica del conduttore viene portata al valore $q' = mq$ anche la densità varia dello stesso fattore $\sigma' = m\sigma$ e pure il potenziale del conduttore viene moltiplicato per m. Si deduce che il rapporto

$$C = \frac{q}{V} \tag{11}$$

non cambia al variare della carica sul conduttore. A questo rapporto si dà il nome di **capacità del conduttore** e dipende solamente dalla forma e dalle dimensioni del conduttore e dal mezzo che lo circonda.

4.2 Conduttore cavo. Schermo elettrostatico

Consideriamo un conduttore carico che abbia al suo interno una cavità. Nella massa del conduttore il campo elettrico è nullo e pertanto è nullo il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa, in particolare attraverso qualsiasi superficie chiusa Σ che racchiuda la cavità: segue, per la legge di Gauss, che all'interno di Σ non ci sono cariche e quindi sulle pareti della cavità la carica è nulla. Inoltre se sulle pareti della cavità fossero presenti delle distribuzioni di carica di segno opposto allora sarebbero presenti nella cavità delle linee di forza e dunque la circuitazione di $\vec{E}$ lungo una linea chiusa costituita da un tratto C_1 interno alla cavità su cui $\vec{E} \neq 0$ e da un tratto C_2 interno al conduttore dove $\vec{E} = 0$, darebbe

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

in contrasto con il fatto che $\vec{E}$ è conservativo. Si conclude dunque che sulle pareti della cavità non posso esserci delle cariche elettriche: la carica di un conduttore in equilibrio si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche se il conduttore è cavo (gabbia di Faraday).

All'interno della cavità di un conduttore C_2 isolato e privo di carica viene inserito un conduttore carico C_1 mantenendolo isolato. Se sul conduttore C_1 è presente una carica q, una carica $-q$ risulta distribuita sulla superficie interna e una carica q sulla superficie esterna di C_2.

Tale fatto si spiega con la legge di Gauss considerando una superficie C_2 e contenente la cavità:

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

In questa situazione siamo in presenza di un fenomeno di induzione chiamata **induzione completa**: tutte le linee di forza che partono da C_1 terminano su C_2.

Il campo all'interno della cavità è determinato dal valore di q, dalla posizione di C_1 e dalla forma geometrica delle due superfici affacciate. All'esterno non cambia nulla: il conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico perfetto tra uno spazio interno ed esterno.

4.3 Condensatori

Un sistema costituito da due conduttori tra i quali c'è un'induzione completa si chiama condensatore: i due conduttori prendono il nome di armature del condensatore.
La differenza di potenziale tra C_1 e C_2 è direttamente proporzionale a q e si definisce quindi la capacità del condensatore:

$$C = \frac{q}{V_2 - V_1} = \frac{q}{\Delta V} \tag{12}$$

in questa configurazione il conduttore C_1 a potenziale V_1 determina il campo $\vec{E}$ e V all'esterno di Σ_1 mentre all'interno $\vec{E} = 0$ e $V = V_1$. Al contempo il conduttore C_2 a potenziale V_2 nella cavità determina il campo $\vec{E}$ nella cavità oltre che $\vec{E} = 0$ al suo interno. Le due regioni non si influenzano a livello elettrostatico.
Le geometrie di condensatori più comuni sono:

1. **Condensatore piano**: lastre piane parallele, verso il bordo alcune linee di campo potrebbero fuoriuscire dalle piastre e andare all'infinito: tale fenomeno viene chiamato effetto di bordo ed è trascurabile se $h << \sqrt{\Sigma}$.
   La capacità di un condensatore piano si ricava come

$$V_2 - V_1 = E \cdot h = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{qh}{\epsilon_0 \Sigma}$$
$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{q\epsilon_0 \Sigma}{qh} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}$$

   e dipende solamente da parametri geometrici.

2. **Condensatore sferico**: due sfere concentriche, non si hanno effetti di bordo. La capacità si ricava come

$$E(r) = \frac{q}{\pi \epsilon_0 r^2}$$
$$V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$
$$C = \frac{q}{V_2 - V_1} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

4.4 Collegamento di condensatori

Un condensatore viene sostanzialmente utilizzato come deposito di carica. Tramite opportuni collegamenti conduttivi esterni è possibile far fluire la carica negativa da un'armatura all'altra generando una corrente elettrica che scarica il condensatore.
Condensatori in parallelo: nella connessione in parallelo, essendo ciascun conduttore equipotenziale, la d.d.p. applicata al condensatore C_1 è uguale a quella applicata al condensatore C_2 e quindi:

$$q_1 = C_1 V \quad q_2 = C_2 V$$
$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)V$$
$$\text{Capacità equivalente del sistema} \quad C_{eq} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2$$

Due condensatori in parallelo si comportano come un unico condensatore la cui capacità è data dalla somma delle capacità dei componenti. Tale ragionamento si estende a n componenti $C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$.
Condensatori in serie: in un collegamento in serie il valore della carica è lo stesso in entrambi i condensatori che però assumono una diversa differenza di potenziale. Si ha dunque:

$$V_A - V_B = \frac{q}{C_1} \quad V_B - V_C = \frac{q}{C_2}$$
$$V_A - V_C = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2})$$
$$\text{Capacità equivalente del sistema} \quad C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$$

Il ragionamento si estende a n condensatori collegati in serie $C_{eq} = (\sum_{i=1}^{n}(1/C_1)^{-1}$: la capacità equivalente del sistema è l'inverso della somma dei reciproci delle capacità dei singoli componenti.
Nel collegamento in serie la capacità è sempre minore della capacità di ciascun condensatore.

4.5 Energia del campo elettrostatico

Il processo di carica di un condensatore consiste in definitiva in una separazione di cariche e richiede un lavoro che, essendo il campo conservativo, dipende solamente dallo stato iniziale e da quello finale, ma non dalle modalità con cui avviene il processo. Per eseguire il calcolo possiamo immaginare che la carica del condensatore avvenga sottraendo una carica dq dall'armatura negativa e portandola sull'armatura positiva, così che alla fine del processo una carica $+q$ è stata portata da un'armatura all'altra lasciando la prima con una carica $-q$, e si è stabilita tra le armature la d.d.p. V: la carica totale in ogni istante è nulla.
Nelle fasi intermedie la d.d.p. è V' essendo già stata trasferita una carica $q' = CV'$, il lavoro per spostare l'ulteriore carica dq' attraverso la d.d.p. V' è

$$dW = V'dq' = \frac{q'}{C}dq'$$

e quindi il lavoro complessivo per la separazione delle cariche è

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}dq' = \frac{q^2}{2C}$$

esso dipende solamente della carica trasportata e dalla capacità del condensatore e non contiene informazioni sul processo effettivo.

Questo lavoro viene immagazzinato nel sistema sotto forma di **energia potenziale elettrostatica**. Assumendo che l'energia sia nulla quando $q = 0$, abbiamo $W = U_e$ e si possono dunque scrivere tre espressioni equivalenti per l'energia elettrostatica del condensatore di capacità C, carico con carica q e d.d.p. V:

$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}qV \tag{13}$$

Alle stesse espressioni si arriva per l'energia elettrostatica di un conduttore carico isolato immaginando il processo di carica come un trasporto di cariche all'infinito dove $V = 0$ alla superficie del conduttore.
È possibile trovare un'espressione alternativa dell'energia legata al campo prodotto da un sistema di cariche anziché alle sorgenti del campo stesso. Consideriamo per semplicità un condensatore piano con un campo elettrico tra le armature uniforme. In questa situazione si ha:

$$U_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0\Sigma}{h}E^2h^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0E^2\Sigma h = \frac{1}{2}\epsilon_0E^2\Sigma h = \frac{1}{2}\epsilon_0E^2\tau$$

essendo $\tau = \Sigma h$ il volume del condensatore, cioè il volume in cui è definito il campo elettrostatico. Facendo l'ipotesi che l'energia sia distribuita nei punti in cui c'è il campo e che questa distribuzione sia uniforme come il campo, possiamo dire che la **densità di energia elettrostatica**, ovvero l'energia elettrostatica per unità di volume, è:

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2}\epsilon_0E^2 \tag{14}$$

La generalità di questa formula, nella quale non compare alcun elemento caratteristico del sistema per il quale il calcolo è stato svolto, suggerisce che può essere applicata a qualsiasi situazione. Si ha infatti che

$$dU_e = u_e d\tau = \frac{1}{2}\epsilon_0E^2d\tau$$

$$\text{Energia totale del campo elettrostatico} \quad U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2}\epsilon_0E^2d\tau$$

Questa energia corrisponde al lavoro speso per costruire la distribuzione di cariche che dà origine al campo.

4.6 Energia di un sistema di cariche

Per una generica distribuzione di cariche, lineare, superficiale o di volume, l'energia si scrive come:

$$U_e = \frac{1}{2}\int_s V\lambda ds \quad U_e = \frac{1}{2}\int_\Sigma v\sigma d\Sigma \quad U_e = \frac{1}{2}\int_\tau V\rho d\tau$$

dove il potenziale V è quello generato da tutte le cariche presenti *[esempi di calcolo vedi appunti e libro]*.

4.7 Forza tra le armature di un condensatore. Pressione elettrostatica

L'energia elettrostatica di un condensatore piano con armature di area Σ distanti h è

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} h$$

Tra le armature, cariche di segno opposto, si esercita una forza $\vec{F}$ attrattiva che, per ragioni di simmetria, è parallela al campo, cioè ortogonale alle armature. Supponiamo di tenere fissa l'armatura negativa e lasciare avvicinare, sotto l'azione della forza, quella positiva di una quantità dh (negativa): la capacità C aumenta perché la distanza tra le armature diminuisce e quindi la d.d.p. diminuisce. Di conseguenza l'energia diminuisce della quantità

$$dU_e = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} dh = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\tau$$

e viene fornito dalle forze del campo il lavoro

$$dW = -dU_e = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} dh$$

positivo perché la forza è concorde allo spostamento. L'espressione della forza agente sull'armatura è quindi

$$F = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma$$

In maniera più generale l'espressione della forza si ottiene dalla relazione esistente tra forza e energia potenziale per un campo conservativo:

$$\vec{F} = -\nabla U_e \Rightarrow F = -\frac{dU_e}{dh} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma}$$

Invece che a carica costante il processo può essere svolto a potenziale costante: si connettono le armature ai poli di un generatore di tensione in grado di mantenere costante la d.d.p.. Di conseguenza, quando l'armatura positiva si sposta di dh avvicinandosi all'altra armatura, V resta costante, C aumenta e quindi q deve aumentare. Il processo ora comporta uno spostamento di carica da un'armatura all'altra, con spesa di lavoro: se aumenta q aumenta σ e pertanto il campo $E = \sigma/\epsilon_0$.
La variazione di energia elettrostatica è

$$dU_e = d\left(\frac{1}{2} C V^2\right) = \frac{V^2}{2} dC$$

e poiché

$$dC = d\left(\frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}\right) = -\frac{\epsilon_0 \Sigma}{h^2} dh$$

è positiva essendo dh negativo, l'energia elettrostatica aumenta di

$$dU_e = -\frac{\epsilon_0 V^2}{2h^2} \Sigma dh = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} d\tau$$

Visto che l'energia aumenta e che è necessario del lavoro positivo per spostare l'armatura, evidentemente c'è un intervento dall'esterno: in effetti ora il sistema non è isolato bensì è collegato al generatore che mantiene costante la d.d.p.
Il lavoro per lo spostamento della carica $dq = V dC$ è

$$dW = V dq = V^2 dC = -dU_{gen}$$

ed è fornito a spese dell'energia interna del generatore.
L'energia totale del sistema, somma dell'energia elettrostatica e dell'energia interna del generatore, varia quindi in corrispondenza dello spostamento dh di

$$dU = dU_e + dU_{gen} = \frac{V^2}{2} dC - V^2 dC = -\frac{V^2}{2} dC = -dU_e$$

In definitiva il bilancio energetico è il seguente: l'energia interna del generatore diminuisce, la metà dell'energia così resasi disponibile la ritroviamo sotto forma di energia elettrostatica, l'altra metà deve corrispondere al lavoro per avvicinare le armature e concludiamo che:

$$dW = \frac{V^2}{2} dC = dU_e = -\frac{\epsilon_0 V^2}{2h^2} \Sigma dh$$

a cui corrisponde la forza attrattiva

$$F = -\frac{\epsilon_0 V^2}{2h^2}\Sigma = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\Sigma$$

Esprimendo σ in funzione del campo E abbiamo in modulo

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}\Sigma = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\Sigma$$

e la forza per unità di superficie risulta

$$p = \frac{F}{\Sigma} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \tag{15}$$

detta **pressione elettrostatica**. In questa espressione non compaiono elementi caratteristici del sistema e possiamo assumere pertanto che sia valida in generale, qualsiasi sia la distribuzione di carica superficiale e la forma delle armature.
La Eq. 15 può essere dimostrata anche considerando un elemento di carica $dq = \sigma d\Sigma$ sulla superficie di un conduttore di forma qualunque e determinando qual è la forza agente su di esso.
Il campo elettrico nelle immediate vicinanze di dq all'esterno del conduttore vale

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{u_n}$$

secondo il teorema di Coulomb, invece all'interno il campo è nullo. D'altra parte lo strato di carica dq sulla superficie $d\Sigma$ genera nei punti immediatamente vicini il campo elettrostatico:

$$\vec{E'} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u_n} \quad \text{all'esterno}$$
$$-\vec{E'} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u_n} \quad \text{all'interno}$$

Allora evidentemente tutte le cariche del conduttore generano nella zona in cui si trova q il campo elettrico

$$\vec{E''} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u_n}$$

il quale sommandosi a $\vec{E'}$ e a $-\vec{E'}$ dà la situazione nota.
Data una distribuzione di carica leviamo una piccola area su cui c'è l carica $dq = \sigma d\Sigma$ e lasciamo il resto imperturbato. Il campo nel foro vale

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u_n}$$

La carica dq è dunque sottoposta al campo $\vec{E''}$ e subisce la forza

$$d\vec{F} = dq\vec{E''} = \sigma d\Sigma\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{u_n} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}d\Sigma\vec{u_n}$$

diretta sempre verso l'esterno qualunque sia il segno della carica. A questa forza corrisponde la pressione (anch'essa diretta verso l'esterno)

$$p = \frac{dF}{d\Sigma}\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

che tende a dilatare la distribuzione di carica.

5 Dielettrici

Studiamo come viene modificato il campo elettrostatico nello spazio tra conduttori carichi quando viene parzialmente o totalmente riempito con un materiale isolante e quali fenomeni avvengono all'interno di un materiale isolante sottoposto ad un campo $\vec{E}$.

Consideriamo un condensatore piano carico e isolato , in modo che la carica sulle armature resti costante. Se q_0 è il valore della carica, distribuita con densità uniforme σ_0, tra le armature c'è un campo elettrico E_0 e una d.d.p. V_0 dati da

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \quad V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h$$

con C_0 capacità e h distanza tra le armature.
Introduciamo parallelamente alla armature una lastra conduttrice di spessore $s < h$: si osserva che la d.d.p. tra le

armature diminuisce. Sulle facce della lastra si formano, per induzione elettrostatica completa, due distribuzioni di densità σ_0 con segno tale da annullare il campo all'interno della lastra; all'esterno invece il campo resta invariato e pertanto

$$V = E_0(h - s) < V_0$$

indipendentemente dalla posizione della lastra.
Ripetendo l'esperimento con una lastra di materiale isolante si nota che la d.d.p. diminuisce ma l'effetto a parità di spessore s è minore di quello rilevato con la lastra di conduttore: un esame dello stato di carica non segnala la presenza di carica elettrica libera. La d.d.p. diminuisce linearmente all'aumentare dello spessore della lastra e assume il valore minimo $V_{\mathcal{K}}$ quando lo spazio tra le armature è completamente riempito di materiale isolante.
Il rapporto tra la d.d.p. V_0 misurata con il condensatore vuoto e la d.d.p. $V_{\mathcal{K}}$ misurata con il condensatore riempito di materiale isolante dipende solamente dal tipo di materiale ed è sempre maggiore di 1. Le sostanze isolanti che hanno la proprietà di ridurre la d.d.p. tra le armature e quindi il campo elettrico si chiamano **sostanze dielettriche** o **dielettrici** e il rapporto adimensionale

$$\mathcal{K} = \frac{V_0}{V_{\mathcal{K}}} > 1$$

è detto **costante dielettrica relativa del dielettrico**.
Nel condensatore riempito completamente con un dielettrico il campo elettrico deve valere

$$E_{\mathcal{K}} = \frac{V_{\mathcal{K}}}{h} = \frac{V_0}{\mathcal{K}h} = \frac{E_0}{\mathcal{K}} = \frac{\sigma_0}{\mathcal{K}\epsilon_0}$$

pertanto risulta ridotto dello stesso fattore $\mathcal{K}$.
La variazione del campo elettrico dovuto alla presenza di un dielettrico è pari a

$$E_0 - E_{\mathcal{K}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\mathcal{K}\epsilon_0} = \frac{\mathcal{K}-1}{\mathcal{K}}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\chi}{\chi+1}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

definendo

$$\chi = \mathcal{K} - 1$$

una grandezza chiamata **suscettività elettrica del dielettrico**.
Per il campo elettrico possiamo dunque scrivere

$$E_{\mathcal{K}} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\mathcal{K}-1}{\mathcal{K}}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_P}{\epsilon_0} \tag{16}$$

ponendo

$$\sigma_P = \frac{\mathcal{K}-1}{\mathcal{K}}\sigma_0$$

come **densità di cariche di polarizzazione**.
La Eq. 16 mostra che il campo elettrico all'interno del dielettrico ha la stessa espressione di un campo nel vuoto sovrapposizione del campo dovuto alle cariche libere sulle armature e del campo di una distribuzione uniforme di carica con densità σ_P che immaginiamo depositata sulle facce della lastra dielettrica.

La capacità del condensatore pieno di dielettrico è

$$C_{\mathcal{K}} = \frac{q_0}{V_{\mathcal{K}}} = \mathcal{K}\frac{q_0}{V_0} = \mathcal{K}C_0$$

aumentata dello stesso fattore $\mathcal{K}$ di cui è diminuita la d.d.p. ai capi del condensatore, in accordo con fatto che la carica è rimasta costante.
Le formule date per dei condensatori nel vuoto restano quindi valide se si sostituisce a ϵ_0 la grandezza $\epsilon = \mathcal{K}\epsilon_0$ detta **costante dielettrica assoluta del dielettrico**. In particolare, per il condensatore piano scriviamo esplicitamente

$$C_{\mathcal{K}} = \mathcal{K}C_0 = \frac{\mathcal{K}\epsilon_0\Sigma}{h} = \frac{\epsilon\Sigma}{h}$$

Il vuoto può essere assimilato ad un dielettrico con costante dielettrica assoluta ϵ_0, costante dielettrica relativa $\mathcal{K} = 1$ e suscettività elettrica $\chi = 0$. Ai dielettrici è anche associata una **rigidità dielettrica**, cioè il massimo valore del campo elettrico che può essere applicato ad un dielettrico senza che avvengano scariche al suo interno.

5.1 Polarizzazione dei dielettrici

In un atomo neutro i centri di carica positivi e negativi sono sovrapposti: se viene introdotto un campo elettrico $\vec{E}$ esso può produrre uno spostamento dei centri di carica (=la struttura dell'atomo si riassesta per riequilibrare le forze). Detta x la distanza tra i centri delle cariche ovvero $\vec{x}$ il vettore che va dal centro della carica negativa al nucleo e definiamo il momento di dipolo elettrico di questa configurazione come

$$\vec{p_a} = Ze\vec{x} = 4\pi\epsilon_0 R E_{est}$$

IL fenomeno per cui un atomo acquista un momento di dipolo elettrico sotto l'azione di un campo $\vec{E}$ si chiama **polarizzazione elettronica**.

Considerando un volumetto $\Delta\tau$ nell'intorno di un punto O in cui sono contenuti ΔN atomi o molecole, il momento di dipolo risultante è dato da $\Delta\vec{p} = \Delta N < \vec{p} >$ e il momento di dipolo per unità di volume nell'intorno del punto O si scrive

$$\vec{P} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta N} = \frac{\Delta N}{\Delta\tau} < \vec{p} >= n < \vec{p} >$$

dove n è il numero di atomi o molecole per unità di volume.
Il vettore $\vec{P}$ che caratterizza l'effetto di formazione dei momenti di dipolo indotti dal campo esterno si chiama polarizzazione del dielettrico. Nei dielettrici lineari, ovvero materiali amorfi caratterizzati da isotropia spaziale, esiste una relazione di proporzionalità tra $\vec{P}$ ed $\vec{E}$ ovvero

$$\vec{P} = \epsilon_0(\mathcal{K} - 1)\vec{E} = \epsilon_0\chi\vec{E}$$

5.2 Campo elettrico prodotto da un dielettrico polarizzato

Consideriamo una lastra di dielettrico polarizzata uniformemente, ovvero nella quale il vettore polarizzazione P è costante in ogni punto e suddividiamo la lastra in prismi infinitesimi di base $d\Sigma_0$, altezza dh e volume $d\tau = d\Sigma_0 dh$: ciascuno di questi ha momento di dipolo

$$d\vec{p} = \vec{P}d\tau = Pd\Sigma_0 d\vec{h}$$

essendo $d\vec{h}$ orientato concordemente a $\vec{P}$.
Sostituiamo al prima un sistema costituito da due cariche $\pm dq_p = \pm Pd\Sigma_0$ poste nel vuoto e distanti dh distribuite nelle basi con densità $\pm\sigma_p = \pm dq_p/d\Sigma_0 = \pm P$. Tali cariche hanno momento di dipolo $d\vec{p}$ eguale a quello del prisma. Considerando due prismi consecutivi con una base in comune e, se $\vec{P}$ è costante, la carica $-dq_p$ di un prisma si annulla con la carica $+dq_p$ dell'altro sulla base in comune. Ripetendo tale procedimento per tutti i prismi alla fine rimangono solamente le cariche sulle basi dei prismi che appartengono alle facce della lastra: la carica è dunque localizzata entro uno strato con spessore pari alle dimensioni atomiche ed è trattabile come una distribuzione superficiale di carica.
La lastra viene quindi ad essere equivalente a due distribuzioni di carica localizzate sulle facce con densità $\pm\sigma_p = \pm P$. Le cariche di polarizzazione non sono libere.

Estendiamo la trattazione ad un dielettrico di forma qualunque: in un punto in cui il versore $\vec{u_n}$ normale alla superficie e orientato verso l'esterno forma con $\vec{P}$ l'angolo θ, la carica $dq_p = Pd\Sigma_0$ è distribuita sulla superficie $d\Sigma$, con $\Sigma_0 = d\Sigma\cos\theta$, pertanto la densità superficiale è

$$\sigma_p = \frac{dq_p}{d\Sigma} = P\frac{d\Sigma_0}{d\Sigma} = P\cos\theta = \vec{P}\cdot\vec{u_n}$$

Possiamo allora dire in generale che la densità superficiale di cariche di polarizzazione di un dielettrico è uguale alla componente di $\vec{P}$ lungo la normale alla superficie

$$\sigma_p = \vec{P}\cdot\vec{u_n} = P\cos\theta \tag{17}$$

Se la polarizzazione è uniforme non si manifestano cariche all'interno del dielettrico e quindi la carica totale deve essere nulla pertanto l'integrale esteso a tutta la superficie del dielettrico risulta

$$\oint \sigma_p d\Sigma = \oint \vec{P}\vec{u_n} d\Sigma = 0$$

Nel caso in cui la polarizzazione non sia uniforme esaminiamo il valore della carica sulla base comune a due prismi infinitesimi contigui con asse parallelo all'asse x e area di base $d\Sigma = dydz$:

$$-dq_p' = \vec{P'}\cdot\vec{u_x'}d\Sigma = -P_x dydz$$

$$dq_p = \vec{P}\cdot\vec{u_x}d\Sigma = P_x dydz$$

$$dq_p - dq_p' = -(P_x' - P_x)dydz = -\frac{\partial P}{x}dxdydz$$

Se $\vec{P}$ varia lungo l'asse x non c'è compensazione tra le cariche e compare una carica di polarizzazione anche all'interno del dielettrico. Generalizzando si ha che all'interno di un volume infinitesimo $d\tau = dxdydz$ c'è la carica

$$dq_p = \left(-\frac{\partial P_x}{\partial x} - \frac{\partial P_y}{\partial y} - \frac{\partial P_z}{\partial z}\right)d\tau$$

distribuita con densità

$$\rho_p = \frac{dq_p}{\tau} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Quindi un dielettrico in cui la polarizzazione non sia uniforme, oltre alla densità superficiale esiste anche una densità spaziale di carica di polarizzazione eguale in ogni punto all'opposto della divergenza del vettore $\vec{P}$. Il dielettrico deve comunque essere neutro e

$$\oint_\Sigma \sigma_p d\Sigma + \int_\tau \rho_p d\tau = 0$$
$$\oint_\Sigma \vec{P} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \int_\tau \nabla \cdot \vec{P} d\tau$$

5.3 Equazioni generali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici

Il campo elettrico prodotto da cariche ferme è conservativo anche in presenza di dielettrici polarizzati. Continuano pertanto a valere le due formulazioni, integrale e locale, date da

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

e la proprietà equivalente che il campo elettrico si possa ottenere come gradente della funzione potenziale $\vec{E} = -\nabla V$. Anche la legge di Gauss resta valida nella forma

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \frac{q_{lib} + q_p}{\epsilon_0}$$

Il flusso del campo attraverso una superficie chiusa è eguale alla somma delle cariche libere e delle cariche di polarizzazione contenute all'interno della superficie. In forma differenziale

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib} + \rho_p}{\epsilon_0}$$

Si ha quindi, ricordando $\rho_p = dq_p/d\tau = -\nabla \cdot \vec{P}$:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho - \nabla \cdot \vec{P} \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho$$

a cui corrisponde la legge integrale

$$\oint (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \vec{u_n} d\Sigma = q$$

Introduciamo il vettore $\vec{D}$ detto induzione dielettrica:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \tag{18}$$

la cui definizione è generale, valida qualunque sia la relazione tra $\vec{P}$ ed $\vec{E}$. Le leggi precedenti si scrivono allora

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{19}$$
$$\oint \vec{D} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = q \tag{20}$$

Il flusso del vettore $\vec{D}$ attraverso una superficie chiusa, contenente in generale sia cariche libere che cariche di polarizzazione dipende soltanto dalle cariche libere.

Ragionando sulla forma integrale della legge di Gauss, prendiamo una superficie chiusa Σ che contiene la carica libera q_0 e una parte di dielettrico polarizzato. Chiamiamo Σ_1 la superficie di dielettrico interna a Σ e Σ_2 la superficie di intersezione con il dielettrico, inoltre τ è il volume di dielettrico racchiuso in Σ. Abbiamo

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_0}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\Sigma_1} \sigma_p d\Sigma + \frac{1}{\epsilon_0}\int_\tau \rho_p d\tau$$

dove σ_p è la densità superficiale e ρ_p la densità spaziale di carica di polarizzazione.
Utilizzando il teorema della divergenza scriviamo

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int_{\Sigma_1}\sigma_p d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\Sigma_1}\vec{P}\cdot\vec{u_n}d\Sigma$$
$$\frac{1}{\epsilon_0}\rho_p d\tau - \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\tau}\nabla\cdot\vec{P}d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0}\int_{\Sigma_1+\Sigma_2}\vec{P}\cdot\vec{u_n}d\Sigma$$

Pertanto nella somma gli integrali estesi a Σ_1 si elidono e si ottiene

$$\Phi(\vec{E}) = \oint_{\Sigma}\vec{E}\cdot\vec{u_n}d\Sigma = \frac{q_0}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\Sigma_1}\vec{P}\cdot\vec{u_n}d\Sigma$$

il flusso di $\vec{E}$ contiene un contributo, in generale non nullo, dovuto alle cariche di polarizzazione. Poiché nella parte di Σ non coincidente con Σ_2, cioè nella parte esterna al dielettrico, $\vec{P}$ è nulla, è lecito scrivere

$$\int_{\Sigma_1}\vec{P}\cdot\vec{u_n}d\Sigma = \oint_{\Sigma}\vec{P}\vec{u_n}d\Sigma$$

e in conclusione

$$\oint_{\Sigma}(\epsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot\vec{u_n}d\Sigma = q_0$$

che tenendo conto della definizione di vettore di induzione elettrica è $\oint\vec{D}\cdot\vec{u_n}d\Sigma$.
Se avessimo scelto Σ completamente all'interno del dielettrico, dove non ci sono cariche libere non ci sarebbero stati il termine con q_0 e con σ_p e avremmo trovato

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{\tau}\rho_p d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0}\int_{\tau}\nabla\cdot\vec{P}d\tau = -\frac{1}{\epsilon_0}\oint\vec{P}\cdot\vec{u_n}d\Sigma$$

ovvero $\Phi(\epsilon_0\vec{E}+\vec{P}) = 0$ in accordo con Eq. 21.
Nello spazio provo di cariche libere, come può essere lo spazio tra conduttori carichi riempito da un dielettrico, le relazioni generali diventano

$$\nabla\cdot\vec{D} = 0 \qquad \oint\vec{D}\cdot\vec{u_n}d\Sigma = 0 \tag{21}$$

e quindi in assenza di cariche libere il campo vettoriale $\vec{D}$ è solenoidale. Inoltre per il vettore induzione elettrica non si può stabilire che la circuitazione lungo un qualsiasi percorso chiuso è nulla: $\vec{D}$ non è cioè un campo conservativo. Notiamo infine che è significativo utilizzare $\vec{D}$ soltanto in presenza di un dielettrico dal momento che nello spazio vuoto $\vec{P} = 0$ e $\vec{D} = \epsilon_0\vec{P}$ per cui $\vec{D}$ non ha nessuna proprietà particolare che lo distingua da $\vec{E}$.

5.4 Energia elettrostatica nei dielettrici

In un condensatore riempito completamente di dielettrico con costante relativa $\mathcal{K}$ l'energia immagazzinata risulta

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2\Sigma^2}{3\epsilon\Sigma/h} = \frac{1}{2}\epsilon E^2\Sigma h$$

La quantità

$$u_e = \frac{U_e}{\Sigma h} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\epsilon}$$

rappresenta la densità di energia elettrostatica e nei dielettrici anisotropi diventa

$$u_e = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$

In una regione in cui esiste campo elettrico l'energia elettrostatica è distribuita con densità u_e vale

$$U_e = \int_{\tau}u_e d\tau = \int_{\tau}\frac{1}{2}\epsilon E^2 d\tau$$

[considerazioni di natura energetica e forza vedi da appunti]

6 Corrente elettrica

I materiali conduttori solidi sono caratterizzati dalla presenza di cariche di conduzione che si muovono liberamente all'interno del corpo. Considerando una quantità di carica dq che attraversa una superficie $d\Sigma$ con velocità $\vec{v_d}$ nell'unità di tempo si ha

$$dq = -ned\Sigma \cos\theta v_d dt$$

e si può quindi definire l'intensità di corrente infinitesima come

$$di = \frac{dq}{dt} = -ne\vec{v_d} \cdot \vec{u_n} d\Sigma$$

Da questa relazione si può ricavare il vettore $\vec{j} = -ne\vec{v_d}$ ovvero il **vettore densità di corrente** e di conseguenza

$$i = \int_\Sigma -ne\vec{v_d} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \int_\Sigma \vec{J} \cdot u_n d\Sigma = \Phi_\Sigma(\vec{j}) \tag{22}$$

ovvero si definisce l'intensità di corrente come il flusso di $\vec{j}$ attraverso la superficie Σ. Per convenzione il verso di i è quello delle cariche positive e si misura in Ampere.
In presenza di cariche positive e negative si ha

$$j = n_+ e\vec{v_+} - n_- e\vec{v_-}$$

Per avere un flusso di corrente elettrica è necessario disporre di un dispositivo in grado di mantenere una differenza di potenziale tra due conduttori a contatto. In tal modo si instaura una corrente elettrica stabile in un regime di equilibrio dinamico. Un dispositivo con tale caratteristica è definito come **generatore di forza elettromotrice (f.e.m.)**.

6.1 Legge di conservazione della carica. Regime di corrente stazionaria

Consideriamo una regione di spazio di volume τ delimitato da una superficie Σ che orientiamo in modo che il versore della normale $\vec{u_n}$ sia in ogni punto diretto verso l'esterno. Se nella regione è presente una densità di carica di corrente $\vec{j}$ la carica totale nell'unità di tempo è

$$i = \oint \vec{j}\vec{u_n} d\Sigma$$

Il **principio di conservazione della carica** richiede che i, pari alla carica che attraversa Σ nell'unità di tempo sia uguale alla variazione nell'unità di tempo della carica complessiva contenuta all'interno di Σ ovvero

$$i = \oint \vec{j} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = -\frac{\partial q_{int}}{\partial t} \tag{23}$$

Un caso particolare si ha quando la carica contenuta all'interno della superficie non varia per cui $\partial q_{int}/\partial t = 0$ che costituisce la **condizione di stazionarietà**

$$\oint \vec{j} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = 0$$

di cui ne ricaviamo la forma locale scrivendo $q_{int} = \int_\tau \rho d\tau$ e inserendola nella Eq. 23 scambiando contemporaneamente le operazioni di integrazione su τ e di derivazione rispetto al tempo, che sono indipendenti in quanto Σ e τ non variano nel tempo:

$$\oint \vec{j} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = -\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Applicando il teorema della divergenza all'integrale superficiale otteniamo

$$\int_\tau \left(\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) d\tau = 0$$

se questa relazione deve essere valida qualunque sia il volume τ, deve essere nullo l'integrando:

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

nota come **equazione di continuità della corrente elettrica** ed esprime in modo dinamico la **conservazione della carica elettrica**. Essa è l'espressione locale della legge integrale Eq. 23.
In condizioni stazionarie $\partial\rho/\partial t = 0$ e quindi

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0$$

che si chiama **equazione di continuità della corrente elettrica in regime stazionario**.

Considerando un tratto di conduttore (come un tubo di flusso in fluidodinamica) di superficie Σ costituita dalle superfici Σ_1 e Σ_2 più la superficie laterale attraverso la quale non passa corrente ed è dunque trascurabile si ha

$$\oint \vec{j} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \int_{\Sigma_1} \vec{j_1} \cdot \vec{u_1} d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} \vec{j_2} \cdot \vec{u_2} d\Sigma_2 = 0$$
$$\int_{\Sigma_2} \vec{j_2} \cdot \vec{u_1} d\Sigma_2 = \int_{\Sigma_1} \vec{j_1} \cdot (-\vec{u_1}) d\Sigma_1$$

e di conseguenza

$$i_1 = i_2$$

in condizioni stazionarie l'intensità di corrente è la stessa attraverso ogni sezione del conduttore. Se il conduttore è a sezione variabile la densità di corrente e di conseguenza la velocità di deriva sono maggiori dove la sezione è minore (esattamente come avviene per la portata di un fluido incompribrimibile in un tubo di flusso).

6.2 Modello classico della conduzione elettrica. Legge di Ohm

Nel modello di Drude-Lorentz si assume che le cariche di conduzione subiscano urti elastici successivi con dei centri diffusori fissi la cui dimensione è può essere approssimata alla distanza tra atomi. Tali urti diffondono le cariche in modo isotropo, dunque senza una direzione privilegiata, tra un urto e il successivo il moto è libero e la traiettoria è rettilinea. L'insieme delle traiettorie è completamente casuale e non si ha flusso netto di carica, cioè una corrente, in nessuna direzione.
Si possono definire un *cammino libero medio* l e un tempo medio τ tra due urti successivi, legati dalla relazione

$$\tau = l/v$$

essendo v la velocità del metallo.
Quando si applica un campo elettrico $\vec{E}$ ciascun elettrone acquista un'accelerazione $\vec{a} = \vec{F}/m = -e\vec{E}/m$, opposta al campo elettrico. Alla distribuzione casuale e isotropa si sovrappone dunque una velocità $\vec{v_d}$ di deriva che, essendo più piccola di quella propria degli elettroni, non va a cambiare il tempo medio τ tra due urti successivi.
Se diciamo $\vec{v_i}$ la velocità di un elettrone subito dopo un urto e $v_{\vec{i+1}}$ la velocità subito prima dell'urto successivo abbiamo

$$v_{\vec{i+1}} = \vec{v_i} - \frac{e\vec{E}}{m}\tau$$

Facciamo la media su un gran numero N di urti e definiamo la **velocità di deriva** come

$$\vec{v_d} = \frac{1}{N}\sum_i v_{\vec{i+1}} = \frac{1}{N}\sum_i \vec{i} - \frac{e\vec{E}}{m}\tau$$

la media non cambia il termine contenente il campo elettrico che è uguale per tutti gli elettroni inoltre $\sum_i \vec{v_i} = 0$ in quanto dopo ogni urto la distribuzione delle velocità resta casuale. Pertanto

$$\vec{v_d} = -\frac{e\tau}{m}\vec{E} \tag{24}$$

per effetto del campo elettrico ogni elettrone nel metallo acquista una velocità $\vec{v_d}$ nella direzione del campo elettrico che è proporzionale al campo elettrico stesso.

La densità di corrente che consegue a questo moto ordinato è

$$\vec{j} = -ne\vec{v_d} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} \tag{25}$$

Indicando con

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

una grandezza caratteristica del materiale detta **conduttività**, la formula della densità di corrente si scrive

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \tag{26}$$

Essa può essere generalizzata al moto dei portatori dei due segni ottenendo

$$\vec{v_+} = \frac{e\tau_+}{m_+}\vec{E} \quad \vec{v_-} = -\frac{e\tau_-}{m_-}\vec{E}$$

e la densità di corrente è data da

$$\vec{j} = ne\vec{v_+} - ne\vec{v_-} = ne^2\left(\frac{\tau_+}{m_+} + \frac{\tau_-}{m_-}\right)\vec{E}$$

e possiamo definire la **conduttività nel mezzo** come

$$\sigma = \frac{ne^2\tau_+}{m_+} + \frac{ne^2\tau_-}{m_-}$$

La Eq. 26 è nota come **legge di Ohm della conduzione elettrica** ed è molto spesso scritta nella forma

$$\vec{E} = \rho\vec{j}$$

dove la grandezza

$$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

è chiamata resistività del conduttore.

La potenza spesa dalla forza $\vec{F} = e\vec{E}$ per mantenere in moto la carica e con velocità $\vec{v_d}$ è

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v_d} = e\vec{E} \cdot \vec{v_d}$$

se nel conduttore ci sono n portatori di carica per unità di volume, la potenza spesa per unità di volume è

$$P_\tau = nP = ne\vec{v_d} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

e applicando la legge di Ohm si ottiene

$$P_\tau = \sigma E^2 = \rho j^2$$

La legge di Ohm ha le caratteristiche di una **equazione di stato** che descrive le proprietà del materiale rispetto alla conduzione elettrica.

6.3 Legge di Ohm per i conduttori metallici

Consideriamo un tratto di conduttore cilindrico di lunghezza h e sezione Σ. Ai capi del conduttore è applicata una d.d.p. tramite un generatore di f.e.m., $V = V_A - V_B$ per cui il conduttore è sede di un campo elettrico $\vec{E}$ parallelo all'asse del cilindro, ed è percorso da una corrente elettrica di densità

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E} = \sigma\vec{E}$$

Il regime è stazionario e l'intensità di corrente ha lo stesso valore attraverso qualsiasi sezione del conduttore e vale

$$i = j\Sigma = \frac{\Sigma}{\rho}E \;\Rightarrow\; E = \frac{\rho}{\Sigma}E$$

Tra campo elettrico e d.d.p. esiste la relazione

$$V = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Eh$$

e in definitiva

$$V = \frac{\rho h}{\Sigma} i \tag{27}$$

che, chiamando **resistenza del conduttore** la quantità

$$R = \rho\frac{h}{\Sigma}$$

diviene

$$V = Ri \tag{28}$$

nota come **legge di Ohm per i conduttori metallici**.
Se il conduttore è a sezione variabile e si ha quindi $\Sigma = \Sigma(h)$, per un tratto di conduttore dh e di sezione Σ scriviamo

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{s} = \rho \frac{dh}{\Sigma} i$$

e integrando lungo tutto il conduttore si può scrivere la resistenza come

$$R = \int_A^B \frac{\rho}{\Sigma} dh$$

Nella maggior parte dei metalli la resistività varia in funzione della temperatura secondo la relazione

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

dove α è il coefficiente di temperatura.

6.4 Potenza ed effetto Joule

La potenza che bisogna spendere per far circolare la corrente elettrica i in un tratto di conduttore di sezione Σ e lungo dh è

$$dP = P_\tau \Sigma dh = \rho \frac{i^2}{\Sigma^2} \Sigma dh = \rho \frac{dh}{\Sigma} i^2$$

Per un conduttore di lunghezza finita si ha

$$P = i^2 \int_A^B \rho \frac{dh}{\Sigma}$$

e, ricordando l'espressione della resistenza si ha

$$P = Ri^2$$

6.5 Resistori in serie e in parallelo

Resistori in serie: due resistori sono collegati in serie quando hanno un estremo in comune. In regime stazionario l'intensità di corrente che li attraversa è la stessa. Applicando a ciascun resistore la legge di Ohm si ottiene

$$V_A - V_B = R_1 i \quad V_B - V_C = R_2 i$$
$$V_A - V_C = (R_1 + R_2) i = R_{eq}$$
$$\text{Resistenza equivalente} \quad R_{eq} = R_1 + R_2$$

che generalizzando risulta $R_{eq} = \sum_i R_i$ ovvero la resistenza equivalente di un sistema di resistori collegati in serie è eguale alla somma delle resistenze di ciascuna componente.
Resistori in parallelo: due resistori si dicono in parallelo quando sono collegati tra loro in entrambi gli estremi. In questo caso la quantità in comune ad entrambi i resistori la d.d.p. $V = V_A - V_B$ e sono attraversati da due correnti diverse i_1 ed i_2 e per la condizione di stazionarietà $i = i_1 + i_2$ pertanto

$$i = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V}{R_{eq}}$$
$$\text{Resistenza equivalente} \quad R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$

estendibile a un numero qualsiasi di resistori in parallelo. La resistenza equivalente risulta quindi pari all'inverso della somma dei reciproci delle singole resistenze.

6.6 Forza elettromotrice. Legge di Ohm generalizzata

Per un conduttore di resistenza R vale la legge di Ohm

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = Ri$$

che applicata ad un circuito chiuso con resistenza totale R_t diventa

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = R_T i$$

Per avere nel circuito una corrente di intensità i è necessaria la presenza di una f.e.m. ovvero di un campo elettrico $\vec{E}$ la cui circuitazione non sia nulla e dunque non deve essere generato da forze di natura elettrostatica.

Consideriamo un circuito formato da un conduttore collegato ai poli A e B di un generatore sui quali sono accumulate le cariche $+q$ e $-q$. Il campo elettrostatico prodotto da tali cariche è sempre diretto da A verso B, sia nel conduttore che all'interno del generatore, in accordo col fatto che

$$\oint \vec{E_{el}} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{E_{el}} \cdot d\vec{s})_{ext} * \int_B^A (\vec{E_{el}} \cdot d\vec{s})_{int} = 0$$

dove il primo termine è calcolato lungo il conduttore esterno e il secondo all'interno del generatore. Il passaggio di una carica positiva all'interno del generatore non può dunque avvenire per effetto del campo $\vec{E_{el}}$, deve esistere all'interno del generatore un campo $\vec{E}*$ di natura non elettrostatica che chiamiamo **campo elettromotore**, per cui il campo elettrico $\vec{E}$ che esiste nel circuito vale

$$\vec{E} = \vec{E}* + \vec{E_{el}} \quad \text{all'interno del generatore}$$
$$\vec{E} = \vec{E_{el}} \quad \text{nel conduttore}$$

La f.e.m. del campo $\vec{E}$ si scrive

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{E_{el}} + \int_B^A (\vec{E}* + \vec{E_{el}}) \cdot d\vec{s} = \int_B^A \vec{E}* \cdot d\vec{s}$$

Il campo $\vec{E}$ non è dunque conservativo e la sua f.e.m. coincide con la tensione del campo elettromotore $\vec{E}*$ calcolata lungo una linea interna al generatore che va da B ad A.

Si possono scrivere una serie di relazioni

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}* = \int_B^A \vec{E}* \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{E}* + \vec{E_{el}}) \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{E_{el}} \cdot d\vec{s}$$
$$\int_B^A (\vec{E}* + \vec{E_{el}}) \cdot d\vec{s} + (V_A - V_B) = \int_B^A (\vec{E}* + \vec{E_{el}}) \cdot d\vec{s} + iR = ir + iR$$
$$\text{dove} \quad \int_B^A (\vec{E}* + \vec{E_{el}}) \cdot d\vec{s} = ir$$

dove r è la resistenza interna del generatore, in generale trascurabile ma comunque $\neq 0$.
Si ha quindi

$$\mathcal{E} = ir + iR = ir + (V_A - V_B)$$

Tale relazione, chiamata **legge di Ohm generalizzata** può essere estesa ad un ramo comprendente un numero qualsiasi di generatori e resistori:

$$V_A - V_B + \sum_k \mathcal{E}_k = R_T i \tag{29}$$

con la convenzione che se la corrente entra nel polo negativo ed esce da quello positivo la f.e.m. $\mathcal{E}$ viene presa con segno positivo, viceversa ha segno negativo. Se il circuito è chiuso e $V_A = V_B$ otteniamo

$$\sum_k \mathcal{E}_k = R_T i$$

6.7 Leggi di Kichhoff per le reti elettriche

Gli elementi distintivi di una rete sono i **nodi** e le **maglie**. Un nodo è un punto in cui convergono più di tre conduttori, i nodi sono collegati dai rami in cui possono esserci componenti passivi (resistori) e componenti attivi (generatori).
Prima legge di Kirchhoff: detta anche legge dei noti, dice che scelto un verso positivo per le diverse correnti entranti o uscenti dal nodo, la somma algebrica delle correnti è nulla

$$\sum_k i_k = 0$$

Seconda legge di Kirchhoff: detta anche legge delle maglie, sostiene che la somma delle f.e.m. in una maglia è uguale alla $\sum_l i_l R_l$ con i_l e R_l correnti e resistenze di ramo

$$\sum_k \mathcal{E}_k = \sum_l i_l R_l$$

In una rete composta da L rami e N nodi si individuano $M = L - N + 1$ maglie e altrettante equazioni di maglia. A M maglie indipendenti si attribuisce una corrente di maglia e le correnti di ramo nelle M equazioni si descrivono come sovrapposizione delle correnti delle maglie che lo condividono.

[carica e scarica di un condensatore e considerazioni energetiche vedi da libro]

7 Il campo magnetico

Le azioni magnetiche sono il risultato dell'interazione tra cariche in moto: adottando la rappresentazione tramite un campo diciamo che l'azione magnetica è dovuta al fatto che un sistema di cariche in moto genera un campo magnetico che indichiamo con il simbolo $\vec{B}$ e che l'altro sistema di cariche risente di una forza in quanto immerso in $\vec{B}$.
Determinare $\vec{B}$ in una certa regione vuol dire darne in ogni punto direzione, verso e modulo che in generale variano punto per punto e in funzione del tempo. Ci limitiamo inizialmente alla trattazione di fenomeni magnetici nel vuoto e stazionarie (il campo magnetico è costante nel tempo).
Una rappresentazione grafica dell'andamento di $\vec{B}$ si fa tramite le linee di campo ovvero quelle linee che in ogni punto sono equiverse e tangenti al vettore $\vec{B}$.

Dal momento che il campo magnetico ha comportamento dipolare in ogni sua sezione, considerando una superficie chiusa Σ si ha che

$$\Phi_\Sigma(\vec{B}) = \oint_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = 0$$

Considerando un percorso chiuso orientato C che divide Σ in Σ_1 e Σ_2 si ha

$$\oint_{\Sigma_1+\Sigma_2} \vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = 0 \Rightarrow \int_{\Sigma_1} \vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \vec{B} \cdot \vec{u_n'} d\Sigma$$

con $\vec{u_n'}$ versore uscente individuato dall'orientazione di C. Si conclude che il flusso di $\vec{B}$ attraverso una qualsiasi superficie che poggia sullo stesso percorso chiuso è lo stesso e il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa è sempre nullo. In termini locali la divergenza del campo magnetico è sempre nulla (il campo magnetico è solenoidale)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Di conseguenza si ha anche che le linee di forza del campo magnetico $\vec{B}$ sono linee chiuse senza né inizio né fine.

7.1 Forza di Lorentz

Consideriamo una particella di massa m e carica q posta in un campo magnetico $\vec{B}$. Se la particella è ferma su di essa non agisce alcuna forza, in accordo col fatto che l'interazione magnetica si manifesta solamente tra cariche in moto. Se invece la particella è in moto con velocità $\vec{v}$ rispetto al sistema di riferimento si verifica che su di essa viene esercitata una forza detta **forza di Lorentz**:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{30}$$

il cui modulo ha valore

$$F = qvB \sin\theta$$

Generalizzata ad una situazione in cui agisce sia un campo elettrico che un campo magnetico si ha che la forza assume il valore

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

La forza di Lorentz è sempre ortogonale alla velocità e pertanto in base alla definizione di lavoro ed energia cinetica si ha

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_Q^2 - \frac{1}{2}mv_P^2 = \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

quindi la forza di Lorentz non compie lavoro sulla particella.

Consideriamo il moto di una particella in un campo magnetico $\vec{B}$ nella condizione in cui la velocità iniziale $\vec{v}$ della particella sia ortogonale al campo. La forza, anch'essa ortogonale a produce una variazione della direzione della velocità mantenendo però la particella sullo stesso piano.
La legge del moto è

$$F = qvB = ma_n = m\frac{v^2}{r}$$

da cui si ricava il **raggio di curvatura** della traiettoria

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$

dove p è il modulo della quantità di moto. Il raggio di curvatura è costante in quanto B è costante per definizione, q e m sono costanti, la velocità non cambia in modulo essendo la forza esclusivamente centripeta. Essendo il raggio comunque costante, la traiettoria è un arco di circonferenza di raggio r o una circonferenza completa se la particella resta sempre nella regione in cui è definito $\vec{B}$.
Il moto lungo la traiettoria è circolare uniforme con velocità uguale a quella iniziale e velocità angolare

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

In termini vettoriali si ha

$$q\vec{v} \times \vec{B} = m\vec{\omega} \times \vec{v} = -m\vec{v} \times \vec{\omega}$$
$$\vec{\omega} = -\frac{q}{m}\vec{B}$$

Questa relazione mostra che la velocità angolare è sempre parallela a $\vec{B}$: se la carica è negativa $\vec{\omega}$ e $\vec{B}$ hanno lo stesso verso, se la carica è positiva hanno verso opposto.
Di conseguenza il periodo e la frequenza del moto circolare uniforme non dipendono dal raggio dell'orbita e dalla velocità con cui questa viene descritta, valendo sempre

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB} \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$$

Nel caso il moto della carica avvenga in una regione in cui la sua velocità forma con il campo magnetico un angolo θ generico scomponiamo la velocità in due componenti $v_n = v \sin\theta$ ortogonale a $\vec{B}$ e $v_p = v\cos\theta$ parallela a $\vec{B}$. La forza magnetica che agisce sulla particella è

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{v_n} + \vec{v_p}) \times \vec{B} = q\vec{v_n} \times \vec{B}$$

in quanto $\vec{v_p} \times \vec{B} = 0$ essendo i fattori paralleli.
Il moto proiettato nella direzione di $\vec{B}$ è dunque rettilineo uniforme con velocità $\vec{v_p}$ mentre quello proiettato ortogonalmente al campo magnetico è circolare uniforme con raggio

$$r = \frac{mv_n}{qB} = \frac{mv\sin\theta}{qB}$$

La composizione dei due moti da origine ad un moto elicoidale avente come asse la direzione di $\vec{B}$. Nel corso di un tempo T pari al periodo del moto circolare la particella si è spostata di una quantità

$$p = v_p T = \frac{2\pi mv\cos\theta}{qB}$$

detta passo dell'elica.

7.2 Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente

La corrente elettrica in un conduttore è dovuta al moto degli elettroni sotto l'azione di un campo elettrico applicato tramite un generatore. Se n è il numero di elettroni per carica di volume con carica $-e$ e $\vec{v_d}$ è la loro velocità di deriva, la densità di corrente si scrive $\vec{j} = -ne\vec{v_d}$ ed è parallela e concorde al campo elettrico applicato.
Quando il conduttore è immerso in un campo magnetico a ciascun elettrone è applicata la forza di Lorentz

$$\vec{F_L} = -e\vec{v_d} \times \vec{B}$$

In un tratto di conduttore lungo ds e di sezione Σ sono contenuti $n\Sigma ds$ elettroni e la forza risultante è

$$d\vec{F} = n\Sigma ds\vec{F_L} = -(\Sigma ds)ne\vec{v_d} \times \vec{B} = \Sigma ds\vec{j} \times \vec{B}$$

da cui si vede che, essendo $\Sigma ds = d\tau$ la forza agente per unità di volume sul conduttore è

$$\vec{F_\tau} = \vec{j} \times \vec{B}$$

Riferendoci ad un conduttore filiforme e ricordando che Σj è la corrente i che percorre il filo, orientiamo $d\vec{s}$ come $\vec{j}$ e otteniamo

$$d\vec{F} = id\vec{s} \times \vec{B}$$

Questa relazione si chiama **seconda legge elementare di Laplace** ed esprime il fatto che la forza magnetica su un tratto infinitesimo di filo percorso da corrente è ortogonale al filo ed è orientata rispetto a $d\vec{s}$ e a $\vec{B}$ secondo la regola della mano destra.

Per ottenere la forza su un tratto di filo indeformabile di lunghezza finita con P e Q estremi del filo, percorso dalla corrente stazionaria i si integra la formula infinitesima e

$$\vec{F} = i \int_P^Q d\vec{s} \times \vec{B}$$

Supponiamo che il campo magnetico sia uniforme e il conduttore sia rettilineo di lunghezza l: allora l'espressione della forza diventa

$$\vec{F} = i\left(\int_P^Q d\vec{s}\right) \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{in modulo} \quad F = ilB\sin\theta$$

Se il conduttore è curvilineo ma sta su un piano si ha

$$\vec{F} = i \int_P^Q d\vec{s} \times \vec{B} = i\vec{PQ} \times \vec{B}$$

Se infine il filo che giace in un piano forma un circuito chiuso si ha che la forza risulta nulla dal momento che $\vec{PQ} = 0$, tuttavia la forza può agire nei vari tratti del circuito che si può deformare.

7.3 Momento meccanico su un circuito piano

Consideriamo una spira rettangolare di lati a e b libera di ruotare su z e scegliamo un versore normale $\vec{u_n}$ coerentemente con il verso di i, immersa in un campo $\vec{B}$ uniforme che forma un angolo θ con $\vec{u_n}$.
Le forze magnetiche $\vec{F_3}$ e $\vec{F_4}$ sono eguali e contrarie e hanno la stessa retta di azione quindi nel loro insieme formano una coppia di forza di braccio nullo e di conseguenza di momento nullo. Le forze $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, ciascuna di modulo iaB costituiscono una coppia di braccio $b\sin\theta$. Il **momento della coppia** vale in modulo

$$M = b\sin\theta F = iabB\sin\theta = i\Sigma B\sin\theta$$

Definiamo **momento magnetico della spira** il vettore

$$\vec{m} = i\Sigma\vec{u_n}$$

parallelo e concorde a $\vec{u_n}$ e con modulo uguale al prodotto dell'intensità di corrente per l'area della spira. Il momento meccanico $\vec{M}$ può dunque essere riscritto come

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = i\Sigma\vec{u_n} \times \vec{B}$$

Considerando una spira piana infinitesima con momento $d\vec{m} = id\Sigma\vec{u_n}$ su cui agisce il momento meccanico $d\vec{M} = d\vec{m}\times\vec{B}$ e si ha per il momento meccanico risultante:

$$\vec{M} = \int_\Sigma d\vec{M} = \int_\Sigma d\vec{m} \times \vec{B} = i\int_\Sigma d\Sigma\vec{u_n} \times \vec{B} = i\left(\int_\Sigma d\Sigma\right)\vec{u_n} \times \vec{B} = i\Sigma\vec{u_n} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Il momento risulta nullo soltanto quando $\vec{m}$ è parallelo a $\vec{B}$: la posizione con $\theta = 0$ è quella di equilibrio stabile mentre quella con $\theta = \pi$. Per qualsiasi latro valore di θ $\vec{M}$ tende a far ruotare la spira in modo che il momento magnetico $\vec{m}$ diventi parallelo e concorde a $\vec{B}$.

Il **principio di equivalenza di Ampere** enuncia che una spira piana di area $d\Sigma$ percorsa da una corrente i equivale agli effetti magnetici ad un dipolo elementare di momento magnetico

$$d\vec{m} = id\Sigma\vec{u_n}$$

perpendicolare al piano della spira e orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della mano destra.

Anche per il dipolo magnetico si definisce una **energia potenziale**, legata alla posizione angolare rispetto alla direzione di $\vec{B}$

$$U_p = \vec{m} \cdot \vec{B} = -mB\cos\theta = -i\Sigma B\cos\theta$$

minima nella posizione di equilibrio stabile ($\theta = 0$) e massima in quella di equilibrio instabile ($\theta = \pi$). Tra momento meccanico $\vec{M}$ e energia potenziale U_p sussiste la relazione

$$M = -\frac{dU_p}{d\theta} = -mB\sin\theta$$

7.4 Espressioni di forza, momento e lavoro attraverso il flusso magnetico

Consideriamo un circuito qualsiasi C percorso dalla corrente i e una qualunque superficie Σ che appoggi sul circuito C. Suddividiamo la superficie Σ in tanti piccoli circuiti rettangolari di are $d\Sigma$: l'energia potenziale del generico circuito infinitesimo è

$$dU_p = -d\vec{m} \cdot \vec{B} = -i\vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = -id\Phi(\vec{B})$$

introducendo l'espressione del flusso infinitesimo di $\vec{B}$ attraverso la superficie $d\Sigma$. L'energia potenziale del circuito C è quindi

$$U_p = -i\int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = -i\Phi(\vec{B})$$

quindi l'energia potenziale di un circuito C percorso da corrente i e immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ è eguale al prodotto cambiato di segno della corrente i per il flusso di $\vec{B}$ concatenato con il circuito.

A seguito di uno spostamento rigido del circuito il flusso varia in modo infinitesimale di una quantità $d\Phi(\vec{B})$ e cambia l'energia potenziale da U_p a $U_p + dU_p$ e viene quindi compiuto il lavoro elementare

$$dW = -dU_p = id\Phi(\vec{B})$$

che per una variazione finita vale

$$W = i\Delta\Phi = i[\Phi_2(\vec{B}) - \Phi_1(\vec{B})]$$

Se W è positivo il lavoro è compiuto dalle forze del campo, se è negativo è compiuto contro di esse.
Se il circuito compie un traslazione rigida lungo l'asse x il lavoro per uno spostamento infinitesimo dx è

$$dW = F_x dx = i\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx \Rightarrow F_x = i\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

Procedendo in modo analogo per le altre componenti si ottiene

$$\vec{F} = i\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{u_z}\right) = i\nabla\Phi = -\nabla U_p \tag{31}$$

la forza agente sul circuito è proporzionale al gradiente del flusso magnetico attraverso il circuito. Tale espressione può essere ricavata dal lavoro ricordando la proprietà del gradiente:

$$dW = id\Phi = i\nabla\Phi \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \vec{F} = i\nabla\Phi$$

[vedi pagina 225-227]

8 Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampère

L'analisi dei primi esperimenti sulle caratteristiche del campo magnetico prodotto da correnti in conduttori filiformi indusse Laplace a formulare una legge nota come **prima legge elementare di Laplace**, che esprime il campo magnetico prodotto da un tratto infinitesimo $d\vec{s}$ di filo. percorso dalla corrente i, in un punto P distante r dall'elemento di filo

$$d\vec{B} = k_m i\frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2} = k_m\frac{ids}{r^2}\vec{u_t} \times \vec{u_r}$$

dove $\vec{u_r}$ è il versore della direzione orientata da $d\vec{s}$ a P, $\vec{u_t}$ il versore tangente al filo per cui $d\vec{s} = ds\vec{u_t}$, k_m è una costante che dipende dal sistema di unità di misura e dal mezzo ed usualmente viene scritta come

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

e la costante

$$\mu_0 = k_m 4\pi = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1.26 \cdot 10^{-6}\,\frac{H}{m}$$

è chiamata permeabilità magnetica nel vuoto.
La prima legge di Laplace diventa quindi

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ids}{r^2}\vec{u_t} \times \vec{u_r}$$

Un segmento infinitesimo di filo non ha significato fisico quindi ha senso misurare la sovrapposizione dei contributi, cioè l'integrale esteso ad un circuito chiuso finito: il risultato costituisce la **legge di Ampère-Laplace**:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint \frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2} \tag{32}$$

che dà in ogni punto dello spazio il campo magnetico dovuto ad un circuito chiuso di forma qualunque, percorso dalla corrente stazionaria i.
In generale se il circuito non è filiforme si considera un elemento ds di sezione $d\Sigma$ percorso da una corrente di densità $\vec{j}(x, y, z)$; l'elemento di corrente si scrive

$$idd\vec{s} = \vec{j}d\Sigma ds = \vec{j}d\tau$$

tenendo conto che $\vec{j}$ è parallelo a $d\vec{s}$. Si ha quindi

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j} \times \vec{u_r}}{r^2}d\tau \;\Rightarrow\; \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{j} \times \vec{u_r}}{r^2}d\tau \tag{33}$$

8.1 Campo magnetico prodotto da una carica in moto

La densità di corrente è legata alla velocità dei portatori di carica e al loro numero per unità di volume da $\vec{j} = nq\vec{v}$ quindi

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \vec{u_r}}{r^2}nd\tau$$

in cui $nd\tau$ dà il numero di cariche contenute nel volume $d\tau$ che con il loro moto producono il campo $d\vec{B}$. Il campo magnetico prodotto da una singola carica in moto è quindi

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \vec{u_r}}{r^2} \tag{34}$$

Il campo elettrico dovuto alla carica nello stesso punto P è

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u_r} \tag{35}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\vec{v} \times \vec{E} = \frac{1}{c^2}\vec{v} \times \vec{E}$$

nella quale abbiamo posto

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

8.2 Filo rettilineo e legge di Biot-Savat

Consideriamo un filo conduttore rettilineo di lunghezza $2a$ percorso dalla corrente continua i e poniamoci sull'asse mediano del filo in un punto P distante R dal filo. Un elemento di filo produce in P il campo magnetico

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2} \;\Rightarrow\; dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{ds\sin\theta}{r^2}$$

Osserviamo che

$$r\sin(\pi-\theta) = r\sin\theta = R \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\theta}{R^2}$$
$$s\tan(\pi-\theta) = -s\tan\theta = R \Rightarrow ds = \frac{Rd\theta}{\sin^2\theta}$$
$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\sin\theta d\theta}{R} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d(\cos\theta)}{R}$$

Il tratto di filo di lunghezza a produce quindi il campo di modulo

$$B_a = -\frac{\mu_0 i}{4\pi R}\int_{\cos\theta_1}^{0} d(\cos\theta) = \frac{\mu_0 i\cos\theta_1}{4\pi R}$$

e il campo in tutto il filo vale, esprimendo $\cos\theta_1$ in funzione della lunghezza del filo

$$B = 2B_a = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R\sqrt{R^2+a^2}}$$

Nel piano mediano $\vec{B}$ è costante su ogni circonferenza di raggio R ed è tangente a tale circonferenza. Detto $\vec{u_\phi}$ il versore tangente alla circonferenza e orientato rispetto al verso della corrente secondo la regola della mano destra possiamo scrivere

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i a}{2\pi R\sqrt{R^2+a^2}}\vec{u_\phi}$$

Facendo tendere la lunghezza a all'infinito e di conseguenza θ_1 a zero e $\cos\theta_1$ a 1 tale espressione diventa

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\vec{u_\phi} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\vec{u_t}\times\vec{u_n} \tag{36}$$

essendo $\vec{u_t}$ il versore parallelo al filo e $\vec{u_n}$ il versore normale al filo e diretto verso il punto P.
Tale legge detta **legge di Biot-Savat** afferma che il campo magnetico di un filo rettilineo indefinito dipende solo dalla distanza del filo e le sue linee sono circonferenze concentriche al filo.

8.3 Spira circolare

Calcoliamo il campo magnetico sull'asse di una spira circolare di raggio r percorsa da una corrente i. Nel punto P distante x dal centro O della spira, un elemento $d\vec{s}$ genera il campo $d\vec{B}$ di modulo

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{|d\vec{s}\times\vec{u_r}}{r^2} = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2}$$

in quanto $d\vec{s}$ e $\vec{u_r}$ sono ortogonali. La componente lungo l'asse x vale

$$dB_x = \frac{\mu_0 i ds}{4\pi r^2}\cos\theta$$

Considerando il contributo di tutti gli elementi $d\vec{s}$ che formano la spira, le componenti parallele all'asse si sommano mentre quelle trasversali si elidono a due a due. Nei punti dell'asse della spira il campo magnetico è dunque parallelo e concorde all'asse stesso. In totale

$$\vec{B} = \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}ds\vec{u_n} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}2\pi R\vec{u_n}$$

essendo r e $\cos\theta$ costanti. Posto $r^2 = x^2+R^2$ e $\cos\theta = R/r$ si ottiene

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2r^3}\vec{u_n} = \frac{\mu_0 i R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}} \tag{37}$$

Nel centro della spira il campo è massimo e vale

$$\vec{B}_{max} = \frac{\mu_0 i}{2R}\vec{u_n} \tag{38}$$

mentre per $x \to \infty$ il campo tende a zero.
Quando è soddisfatta la condizione $x >> R$ diventa

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i R^2}{2x^3}\vec{u_n} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{21\pi R^2}{x^3}\vec{u_n} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\vec{m}}{r^3}$$

indicando con $\vec{m} = i\Sigma\vec{u_n} = i\pi R^2\vec{u_n}$ il momento magnetico della spira.

In generale l'andamento del campo magnetico $\vec{B}$ della spira è identico a quello del campo elettrico $\vec{E}$ di un dipolo (dipolo approssimato ad una piccola spira piana con $\Sigma << r^2$) così che valgono le espressioni

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}(2\cos\theta\vec{u_r} + \sin\theta\vec{u_\theta})$$

8.4 Campo generato da un solenoide rettilineo

Un solenoide rettilineo è generato da un filo conduttore avvolto a forma di elica cilindrica di piccolo passo. Sia d la lunghezza del solenoide, R il suo raggio e N il numero di spire totali ($n = N/D$ il numero di spire per unità di lunghezza).
Il campo generato da una singola spira è

$$B_x = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{[R^2 + x^2]^{3/2}}$$

e considerando che nel tratto dx ci sono ndx spire si ha

$$dB_x = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2 ndx}{[R^2 + (x - x_0)^2]^{3/2}}$$

Facendo le sostituzioni

$$x - x_0 = -\frac{R}{\tan\phi}$$

$$dx = \frac{R}{\tan^2\phi}\frac{1}{\cos^2\phi}d\phi = \frac{R}{\sin^2\phi}d\phi$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{\sin^3\phi}{R}\frac{nR}{\sin^2\phi}d\phi = \frac{\mu_0 i}{2}n\sin\phi d\phi$$

si ottiene

$$B_x = \frac{\mu_0 ni}{2}[\cos\phi_1 - \cos\phi_2]$$

Per $l >> R$ si ha $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = \pi$ e quindi

$$B_x = \mu_0 ni$$

Le linee di campo del campo $\vec{B}$ prodotto da un solenoide sono molto simili a quelle di un magnete cilindrico.

8.5 Azioni elettrodinamiche tra fili rettilinei percorsi da corrente

In un sistema composto da due fili percorsi da corrente si ha che il campo generato da ogni filo è pari a

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{u_\phi}$$

Per la legge di Laplace la forza che esercitata su un filo da un campo magnetico è

$$d\vec{F} = id\vec{s} \times \vec{B}$$

si ha che quindi

$$\vec{F}_{1,2} = -\frac{\mu_0}{2\pi r}i_1 i_2 l\vec{u_{1,2}} = -\vec{F}_{2,1} \quad \text{per un tratto di lunghezza } l \tag{39}$$

La forza per unità di lunghezza è data da

$$\frac{F_{1,2}}{l} = -\frac{\mu_0}{2\pi r}i_1 i_2$$

ed è attrattiva se i_1 ed i_2 sono equiverse, repulsiva se sono opposte.
Dalla forza si ricava la definizione dell'unità di misura Ampere: due fili rettilinei e paralleli posti alla distanza di 1 metro e percorsi da una corrente di 1 Ampere risentono di una forza per unità di lunghezza pari a $F/l = \mu_0/2\pi r = 2 \cdot 10^{-7}\, N/m$.

8.6 Azioni elettrodinamiche tra circuiti percorsi da corrente

Le leggi elementari di Laplace sostengono che

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2} \quad \text{prima legge di Laplace}$$
$$d1\vec{F} = id\vec{s} \times \vec{B} \quad \text{seconda legge di Laplace}$$

Si ha quindi che per un tratto infinitesimo di circuito

$$d\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \frac{d\vec{s_1} \times \vec{u_{1,2}}}{r^2}$$
$$d\vec{F}_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_2 i_1 \frac{s\vec{s_2} \times \vec{u_{2,1}}}{r^2}$$

dove in generale $d\vec{F}_{2,1} \neq d\vec{F}_{1,2}$, in contrasto con il principio di azione e reazione. Integrando sull'intero circuito si ripristina tale principio e si ha:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{s_2} \times (d\vec{s_1} \times \vec{u_{1,2}})}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{s_1} \cdot d\vec{s_2}}{r^2} \cdot \vec{u_{1,2}} = -\vec{F}_{2,1}$$

e dunque la forza tra due circuiti obbedisce al principio di azione-reazione.

8.7 Effetto Hall

Un conduttore a forma di nastro sottile, di sezione $\Sigma = ab$ è percorso da una corrente di intensità i con densità di carica

$$\vec{j} = J\vec{u_x} = \frac{i}{ab}\vec{u_x} = ne\vec{v_d}$$

Se il nastro è sottoposto all'azione di un campo magnetico $\vec{B}$ perpendicolare a $\vec{j}$ e concorde all'asse y su ciascun portatore di carica agisce la forza di Lorentz:

$$\vec{F} = e\vec{v_d} \times \vec{B}$$

Sulla carica e agisce una forza $\vec{F}$ non elettrostatica e si viene dunque a creare un campo elettromotore, chiamato **campo di Hall**:

$$\vec{E_H} = \frac{\vec{F}}{e} = \vec{v_d} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{ne} \times \vec{B}$$

tale campo provoca una deflessione del moto delle cariche aggiungendo una componente trasversa alla velocità di deriva, tendendo a far accumulare cariche di segno opposto sulle due facce ortogonali a $\vec{E_H}$. Tale accumulo genera un campo $\vec{E_{el}}$ opposte e in condizioni stazionarie si ha

$$\vec{E_H} + \vec{E_{el}} = 0$$

In equilibrio il sistema si comporta come un generatore in cui non circola corrente, la tensione del campo $\vec{E_H}$ è

$$\mathcal{E}_H = \int_P^Q \vec{E_H} \cdot d\vec{z} = \vec{E_H} \cdot \vec{PQ} = \pm E_H b$$

con segno positivo se $e > 0$ e negativo se $e < 0$. In modulo la tensione di Hall vale

$$\mathcal{E}_H = E_H b = \frac{jBb}{ne} = \frac{iB}{nea} = \frac{Bb}{ne\rho}\frac{V_A - V_B}{d} \tag{40}$$

Tale fenomeno si chiama **effetto Hall trasversale** e dal segno di $\mathcal{E}_H$ si può determinare il segno dei portatori di carica, inoltre noti i moduli di $\mathcal{E}_H$ e di B si può ricavare la densità ne dei portatori di carica.

8.8 Legge di Ampère

Consideriamo un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente i che produce un campo magnetico e scriviamo il prodotto scalare tra il campo B e un generico vettore infinitesimo $d\vec{s}$ posto nello spazio circostante al filo e a distanza r da questo

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u_\phi} \cdot d\vec{s}$$

ma $\vec{u_\phi} \cdot d\vec{s}$ dà la proiezione di $d\vec{s}$ lungo $\vec{u_\phi}$ che è eguale a $rd\phi$ e quindi

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\phi$$

La circuitazione di $\vec{B}$ estesa ad una linea chiusa è data da

$$\Gamma = \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \oint d\phi$$

Si presentano dunque due possibilità: o la linea chiusa concatena il filo e in tal caso l'integrale a secondo membro vale 2π per cui

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \pm \mu_0 i \tag{41}$$

oppure la linea chiusa non concatena il filo e tale integrale è nullo.
Se la linea chiusa concatena più fili rettilinei percorsi dalle correnti i_1, i_2 ..., i_n che producono i campi magnetici $\vec{B_1}$; ..., $\vec{B_n}$ il campo magnetico in ogni punto dello spazio è dato da $\vec{B} = \vec{B_1} + ... + \vec{B_n}$ e quindi

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint (\sum_k \vec{B_k}) \cdot d\vec{s} = \sum_k \oint \vec{B_k} d\vec{s} = \sum_k \Gamma_k$$

In conclusione possiamo dire che la circuitazione del campo magnetico è espressa dalla legge di Ampère

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int_\Sigma \vec{j} \cdot \vec{u_n} d\Sigma \tag{42}$$

sottintendendo che la corrente al secondo membro è la somma delle correnti concatenate, presa ciascuna con il segno opportuno secondo la regola della mano destra.

Il teorema di Stokes permette di trasformare la circuitaizone di $\vec{B}$ lungo la linea nel flusso del rotore di $\vec{B}$ attraverso la superficie Σ appoggiata sulla linea per cui

$$\int_\Sigma (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \mu_0 \int_\Sigma \vec{j} \cdot \vec{u_n} d\Sigma$$

e dovendo questa uguaglianza essere valida per qualsiasi superficie Σ deve essere

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{43}$$

espressione locale della legge integrale vista prima.

[applicazioni e campo magnetico terrestre vedi da appunti]

8.9 Equazioni di Maxwell nel vuoto in condizioni stazionarie

$$\text{Circuitazione di } \vec{E} \quad \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\text{Legge di Gauss} \quad \oint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \frac{q_i}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{Flusso di } \vec{B} \text{ attraverso una superficie} \quad \oint_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = 0 \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\text{Circuitazione di } \vec{B} \quad \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i_c \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

8.10 Potenziale vettore

Chiamiamo $\vec{A}(x,y,z)$ potenziale vettore che risulta legato al campo $\vec{B}$ dalla relazione $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$.
Se $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ allora $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A})$ identicamente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = 0$$

$\vec{A}(x,y,z)$ è definito a meno del gradiente di una funzione scalare $\phi(x,y,z)$ infatti dato $\vec{A_0}(x,y,z)$ e $\vec{B} = \nabla \times \vec{A_0}$ se $\vec{A}(x,y,z) = \vec{A_0}(x,y,z) + \nabla\phi(x,y,z)$ si ha

$$\nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A_0} + \nabla \times (\nabla\phi) = \nabla \times \vec{A_0} = \vec{B}$$

$$\text{essendo} \qquad \nabla \times (\nabla\phi) = [\nabla \times (\nabla\phi)]_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0$$

e analogamente per $[\,]_y$ e $[\,]_z$

la scelta della funzione ϕ è quindi arbitraria.
In magnetostatica la funzione ϕ viene scelta in modo tale da avere $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ [condizione o "gauge" di Coulomb]

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = -\nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{j} \qquad \text{con} \qquad \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

La relazione $\nabla^2\vec{A} = \mu_0\vec{j}$ è l'analogo dell'equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$ e si ricava il valore del potenziale vettore

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\vec{j}(x',y',z')}{|\vec{r} - \vec{r'}|}d\tau'$$

9 Proprietà magnetiche della materia

Consideriamo un blocchetto di materiale di volume τ sospeso vicino all'estremità di un solenoide. Il campo $\vec{B}$ prodotto dal solenoide induce un momento di dipolo. Un dinamometro misura la forza sul blocchetto in presenza del campo magnetico.
Definiamo $\vec{u_m} = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ dove $\vec{m}$ è il momento di dipolo del blocchetto, il cui modulo vale $-mB$ se i vettori sono concordi mentre vale mB se questi sono discordi.
Sul blocchetto agisce la forza

$$F_z = -\frac{\partial u_m}{\partial z} = m\frac{\partial B}{\partial z} \qquad \text{con} \qquad \frac{\partial B}{\partial z} < 0$$

Tale forza è negativa se m e B sono concordi mentre è positiva se i vettori sono discordi.
La forza per unità di volume si può scrivere come

$$F_\tau = \frac{F_z}{\tau} = \frac{m}{\tau}\frac{\partial B}{\partial z} = M\frac{\partial B}{\partial z}$$

dove

$$\vec{M} = \frac{\vec{m}}{\tau} \qquad \text{è la magnetizzazione ovvero il momento di dipolo magnetico per unità di volume}$$

9.1 Permeabilità e suscettività magnetica

Consideriamo un solenoide indefinito nel quale il campo magnetico vale $\vec{B_0} = \mu_0 ni$, supponiamo di riempirlo completamente con un mezzo omogeneo e di misurarne nuovamente il campo magnetico $\vec{B}$ con una sonda di Hall.
Dalla misura di $\vec{B}$ troviamo che esso è parallelo e concorde a $\vec{B_0}$ e che il rapporto tra i moduli vale

$$\frac{B}{B_0} = \mathcal{K}_m$$

A questo rapporto diamo il nome di **permeabilità magnetica relativa del mezzo**. Quindi

$$B = \mathcal{K}_m B_0 = \mu_0\mathcal{K}_m ni = \mu ni$$

definendo **permeabilità magnetica assoluta** la grandezza

$$\mu = \mu_0\mathcal{K}_m$$

Possiamo quindi dire che sperimentalmente il campo magnetico esistente in un mezzo indefinito omogeneo in cui è immerso un circuito percorso da corrente è dato da

$$\vec{B} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2}$$

La variazione del vampo magnetico dovuta alla presenza del mezzo è dunque

$$B - B_0 = \mathcal{K}_m B_0 - B_0 = (\mathcal{K}_m - 1)B_0 = \chi_m B_0$$

definendo così una nuova grandezza, la **suscettività magnetica** come

$$\chi_m = \mathcal{K}_m - 1$$

La suscettività magnetica assume valori positivi nei materiali *paramagnetici* (sostanze attratte dal solenoide) mentre assume valori negativi nei materiali *diamagnetici* (sostanze respinte dal solenoide). Le sostanze *ferromagnetiche* sono invece fortemente attratte dal solenoide.
Sulla superficie del mezzo si vengono a creare delle correnti dette **correnti amperiane** che si formano per effetto del campo magnetico prodotto dalla corrente di conduzione.

9.2 Correnti amperiane e magnetizzazione

Il moto di elettroni intorno al nucleo può essere assimilato a correnti microscopiche alle quali è associato un momento magnetico. Nella maggior parte dei casi questi momenti si compensano e l'atomo non ha momento magnetico, mentre quando agisce un campo magnetico esterno il moto degli elettroni è perturbato e ha origine un momento magnetico che è opposto al campo esterno. La situazione ricorda il meccanismo di polarizzazione elettronica.
Tutti gli atomi o le molecole di un materiale sotto l'azione di un campo magnetico $\vec{B}$ acquistano un momento magnetico medio $<\vec{m}>$ orientato parallelamente a $\vec{B}$. Considerato un volumetto $\Delta\tau$ nell'intorno di un punto P, in cui sono contenuti ΔN_τ atomi il momento magnetico è

$$\Delta\vec{m} = \Delta N_\tau < \vec{m} >$$

e il momento magnetico per unità di volume, ovvero la **magnetizzazione** vale

$$\vec{M} = \frac{\Delta\vec{m}}{\Delta\tau} = \frac{\Delta N_\tau}{\Delta\tau} < \vec{m} >= n\vec{m}$$

dove n è il numero di atomi o molecole per unità di volume nell'intorno di P.
Al tendere di $\Delta\tau$ a zero si definisce la magnetizzazione in funzione della posizione. Si parla di **magnetizzazione uniforme** quando $\vec{M}$ è costante nel mezzo: di norma ciò avviene per le sostanze amorfe dotate di simmetria spaziale.

Supponiamo di avere un cilindro di materiale magnetizzato con $\vec{M} = M\vec{u_z}$ uniforme e isoliamone un disco di spessore dz a sua volta suddiviso in prismi di base $d\Sigma$, altezza dz e volume $d\tau = d\Sigma dz$. Ciascuno dei prismetti ha momento magnetico

$$d\vec{m} = \vec{M} d\tau = M d\Sigma dz \vec{u_z}$$

Secondo il principio di equivalenza di Ampere lo stesso momento magnetico è posseduto da una spira a forma di nastro di area $d\Sigma$ e altezza dz percorsa da una corrente di_m tale che

$$d\vec{m} = di_m d\Sigma \vec{u_z} = M d\Sigma dz \vec{u_z} \Rightarrow di_m = M dz$$

Sostituiamo ogni prisma con l'equivalente circuito percorso dalla corrente di_m. Se $\vec{M}$ è costante le correnti si elidono a due a due sui lati contigui e rimangono attive solamente le correnti sulla superficie laterale del cilindro. Il disco di materiale magnetizzato è dunque a tutti gli effetti equivalente ad un circuito percorso dalla corrente di_m.
Iterando il procedimento a tutti i dischi di altezza dz che compongono il cilindro iniziale di altezza h concludiamo che esso equivale ad una fascia di altezza h percorsa dalla corrente

$$i_m = \int_0^h M dz = Mh$$

ovvero percorsa dalla corrente di densità lineare

$$M = \frac{i_m}{h} = \frac{di_m}{dz} = j_{s,m}$$

che vettorialmente si esprime come

$$\vec{j}_{s,m} = \vec{M} \times \vec{u_n}$$

indicando con $\vec{u_n}$ il versore normale all'asse del cilindro e orientato verso l'esterno.

Un'altra forma della relazione tra magnetizzazione e correnti amperiane si ottiene eseguendo la circuitazione di $\vec{M}$ lungo un percorso chiuso generico che concateni la corrente i_m: al di fuori del cilindro $\vec{M} = 0$ e all'interno, qualsiasi sia il percorso vale $I_m = Mh$ si ha

$$\oint \vec{M} \cdot d\vec{s} = i_m$$

Nel caso più generale $\vec{M}$ può essere non uniforme nel materiale. In tal caso tra due prismi contigui lungo l'asse x si può avere la magnetizzazione lungo l'asse z pari a $M_z(x)$ e $M_z(x + dx)$ per cui la corrente effettiva lungo l'asse y è

$$di_1 - di_2 = [M_z(x) - M_z(x + dx)]dz = -\frac{\partial M_z}{\partial x} dxdz$$

Ripetendo il ragionamento per due prismi contigui lungo l'asse z per la componente M_x della magnetizzazione si ha

$$di_4 - di_3 = [M_x(z + dz) - M_x(z)]dx = \frac{\partial M_x}{dz} dxdz$$

e in totale lungo l'asse y si ha la corrente

$$di_y = (di_4 - di_3) + (di_1 - di_2) = \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}\right) dxdz$$

La componente lungo y della densità di corrente è

$$j_y = \frac{di}{dxdz} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = (\nabla \times \vec{M})_y$$

Completando il ragionamento per gli altri due assi si ha

$$\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M}$$

Attenzione al fatto che $\vec{j}_m$ è una densità di corrente definita in un volume mentre $\vec{j}_{s,m}$ è una densità lineare di corrente definita su una superficie.

9.3 Il campo magnetizzante H

Le equazioni generali della magnetostatica nel vuoto devono essere modificate in presenza di materiali magnetizzati:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 (i + i_m) = \mu_0 i + \mu_0 \oint \vec{M} \cdot d\vec{s}$$

e, in forma differenziale,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \nabla \times \vec{M}$$

Raccogliendo allo stesso membro i termini con $\vec{B}$ e $\vec{M}$ abbiamo

$$\oint (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 i \qquad \nabla \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) = \mu_0 \vec{j}$$

Introducendo il nuovo campo vettoriale $\vec{H}$ attraverso la definizione

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad \text{ovvero} \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

si nota che esso soddisfa alle condizioni

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$$

La prima di queste relazioni esprime la legge di Ampere per il campo H: la circuitazione di $\vec{H}$ estesa ad una qualsiasi linea chiusa è eguale alla somma delle correnti di conduzione concatenate alla linea e in termini locali il rotore di $\vec{H}$ è eguale alla densità di corrente di conduzione.
Riscrivendo le equazioni generali della magnetostatica in termini di $\vec{B}$ e $\vec{H}$ si ha

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i \qquad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}$$

Una relazione caratteristica del mezzo magnetizzato è

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

e come immediata conseguenza si ha

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0 \mathcal{K}_m \vec{H} = \mu \vec{H}$$

e riassumendo

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu} \chi_m \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\chi_m}{\mathcal{K}_m} \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathcal{K}_m - 1}{\mathcal{K}_m} \vec{B}$$

9.4 Discontinuità del campo magnetico

Il campo magnetico subisce una discontinuità tangenziale quando si passa da una parte all'altra di una superficie sede di una corrente di conduzione. Un effetto analogo si ha anche nel passaggio attraverso la superficie di separazione di due mezzi magnetizzati diversi: infatti sulle rispettive superfici sono localizzate correnti amperiane in generale diverse tra loro e con somma non nulla.
Detti $\vec{H}_1$ e $\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1$ i campi nel primo mezzo e $\vec{u_n}$ il versore della normale alla superficie di separazione in un dato punto P, resta individuato un piano in cui stanno i tre vettori $\vec{u_n}$, $\vec{H}_1$, $\vec{B}_1$ e anche la magnetizzazione $\vec{M}_1$. La densità lineare di corrente amperiana $\vec{j}_{s,m}$ è ortogonale a questo piano e la discontinuità ad essa dovuta, ortogonale a $\vec{j}_{s,m}$, sta nel piano suddetto: quindi $\vec{B}_1$ pur essendo discontinuo, sta nel medesimo piano. Tutto ciò è corretto se il secondo mezzo è il vuoto ma resta vero in generale.
Ammettiamo che $\vec{H}_1$, $\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1$, $\vec{H}_2$, $\vec{B}_2 = \mu_2 \vec{H}_2$ siano tutti in uno stesso piano che contiene la normale alla superficie di separazione nel punto P considerato. L'applicazione della legge di Gauss ad una scatola cilindrica di altezza infinitesima con le basi nei due mezzi e parallele alla superficie porta alla relazione

$$B_{1,n} = B_{2,n} \qquad \text{ovvero} \qquad B_1 \cos\theta_1 = B_2 \cos\theta_2$$

indicando con θ_1 e θ_2 gli angoli che $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ formano con la normale.
Il **campo magnetico ha la stessa componente normale** dalle due parti della superficie di separazione, come è ovvio potendo essere la discontinuità solamente tangenziale. Da $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ segue

$$\mathcal{K}_{1,m} H_{1,n} = \mathcal{K}_{2,m} H_{2,n}$$

ovvero **la componente normale del campo $\vec{H}$ è discontinua**.
Applichiamo successivamente la legge di Ampere ad un rettangolo che sta nel piano individuato dai campi, con due lati paralleli alla superficie di separazione e da parti opposte gli altri due lati infinitesimi:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{1,t} h - H_{2,t} h = 0$$

non essendoci le correnti di conduzione concatenate e quindi

$$H_{1,t} = H_{2,t} \qquad \text{ovvero} \qquad H_1 \sin\theta_1 = H_2 \sin\theta_2$$

Quindi mentre la componente tangenziale di $\vec{H}$ è continua, quella di $\vec{B}$ è discontinua secondo la relazione

$$\frac{B_{1,t}}{\mathcal{K}_{1,m}} = \frac{B_{2,t}}{\mathcal{K}_{2,m}}$$

Combinando le relazioni si trova

$$H_1 \sin\theta_1 = H_2 \sin\theta_2 \qquad \frac{B_1}{\mathcal{K}_{1,m}} \sin\theta_1 = \frac{B_2}{\mathcal{K}_{2,m}} \sin\theta_2 \Rightarrow \frac{\tan\theta_1}{\mathcal{K}_{1,m}} = \frac{\tan\theta_2}{\mathcal{K}_{2,m}}$$

detta **legge di rifrazione delle linee di campo magnetico**.

[applicazioni vedi appunti]

10 Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo

Le proprietà locali dei campi elettrici e magnetici costanti nel tempo sono stabilite nel vuoto dalle quattro equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

in cui le sorgenti sono rappresentate dalla densità di carica $\rho(x, y, z)$ e dalla densità di corrente $\vec{j}(x, y, z)$, entrambe costanti nel tempo.
Il campo elettrico statico $\vec{E}$, conservativo, è generato dalle cariche elettriche fisse, mentre il campo magnetico statico $\vec{B}$, non conservativo, è generato dalle cariche elettriche in moto stazionario.

La forza elettromotrice f.e.m. è definita come integrale del campo elettrico $\vec{E}$ lungo una linea chiusa, cioè come la circuitazione di $\vec{E}$

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

e un suo valore non nullo implica che il campo elettrico non sia conservativo.
Il flusso del campo magnetico $\vec{B}$ attraverso una superficie Σ è dato da

$$\Phi(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma$$

10.1 Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica

Consideriamo una spira A di filo conduttore e notiamo che se si muove un magnete rispetto a tale spira compare in essa una corrente che chiamiamo **indotta**. Dal momento che per avere una corrente in un circuito è necessaria la presenza di una f.e.m. individuiamo una **forza elettromotrice indotta** $\mathcal{E}_i$. Questa è una delle evidenze sperimentali del **fenomeno dell'induzione di Faraday** ovvero ogni qual volta il flusso del campo magnetico $\Phi(\vec{B})$ concatenato con il circuito varia nel tempo si ha nel circuito una forza elettromotrice indotta data dall'opposto della derivata del flusso rispetto al tempo

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Phi(\vec{B})}{dt}$$

Tale legge di chiama **legge di Faraday-Neumann-Lenz dell'induzione elettromagnetica**.
Se il circuito ha resistenza R in esso circola una corrente

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

La variazione del flusso magnetico concatenato con una linea chiusa s dà origine ad un campo elettrico indotto non conservativo $\vec{E}_i$

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma$$

10.2 Legge di Lenz

Il segno meno che compare nella definizione di forza elettromotrice indotta viene messo in evidenza nella legge di Lenz: l'effetto della f.e.m. indotta è sempre tale da opporsi alla causa che ha generato il fenomeno ovvero si oppone alla variazione del flusso del campo $\vec{B}$. Tale comportamento è in accordo con il principio di conservazione dell'energia.

10.3 Origine fisica della forza elettromotrice indotta

Ricordando l'espressione della legge di Faraday attraverso il campo elettrico indotto

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma$$

mettiamo in evidenza che Σ è una qualsiasi superficie che poggia sulla linea chiusa s. Il simbolo di derivata parziale indica che è la variazione temporale di flusso concatenato a causare il fenomeno. Ci sono vari modi per realizzare una variazione di flusso:

1. consideriamo un circuito indeformabile che compie un moto rigido in una zona in cui è presente un campo magnetico $\vec{B}$ constante nel tempo. Se il moto è solamente traslatorio e il campo è uniforme non si ha variazione di flusso. Se il campo magnetico non è uniforme il flusso attraverso il circuito varia al variare della posizione dello stesso producendo una f.e.m. indotta. Una situazione analoga si presenta se il moto è rotatorio dal momento che cambia l'orientazione del circuito rispetto al campo magnetico.

2. il circuito viene deformato, sia in campo magnetico uniforme che non.

3. il circuito viene mantenuto fisso e si varia la posizione delle sorgenti del campo magnetico.

4. con circuito fisso e sorgenti di $\vec{B}$ fisse il flusso concatenato cambia nel tempo se si muove un mezzo ferromagnetico magnetizzato dal momento che questo altera la distribuzione geometrica delle linee di campo di $\vec{B}$

5. in assenza di qualsiasi moto relativo tra circuito e campo magnetico e di variazioni locali di permeabilità magnetica, si ha una variazione di flusso attraverso il circuito se il campo magnetico, uniforme o no, varia nel tempo a causa della variazione nel tempo dell'intensità di corrente che lo genera.

In generale si ha variazione di flusso quando viene variata almeno una delle tre componenti che concorrono a formare il flusso ovvero il campo magnetico, l'area del circuito o l'angolo tra $\vec{B}$ e $\vec{u_n}$.
Cominciando dal primo caso si ha che all'origine del fenomeno dell'induzione c'è la forza di Lorentz e si può definire un campo elettromotore

$$\vec{E_i} = \frac{\vec{F}}{-e} = \vec{v} \times \vec{B}$$

Sotto l'azione di $\vec{E_i}$ le cariche entrano in movimento lungo la spira e per uno spostamento corrispondente al tratto infinitesimo $d\vec{s}$ di spira viene compiuto sull'unità di carica il lavoro

$$d\mathcal{E}_i = \vec{E_i} \cdot d\vec{s} = \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = d\vec{s} \times \vec{v} \cdot \vec{B}$$

I singoli elementi della spira si muovono con velocità

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

e quindi si può scrivere

$$d\mathcal{E}_i = \frac{d\vec{s} \times d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{B} = \frac{d\Sigma \vec{u_n}}{dt} \cdot \vec{B}$$

e quindi integrando

$$\mathcal{E}_i = \oint d\mathcal{E}_i = \frac{\oint \vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma}{dt} = \frac{d\Phi_t(\vec{B})}{dt}$$

Detto $\Phi_1(\vec{B})$ il flusso concatenato nella posizione iniziale e $\Phi_2(\vec{B})$ quello nella posizione finale dopo la traslazione infinitesima vale la relazione $\Phi_2(\vec{B}) - \Phi_1(\vec{B}) + d\Phi_t(\vec{B})$. La variazione di flusso attraverso la spira vale dunque

$$d\Phi(\vec{B}) = \Phi_2(\vec{B}) - \Phi_1(\vec{B}) = -d\Phi_t(\vec{B})$$

in definitiva si ha

$$\mathcal{E}_i = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{d\Phi_t(\vec{B})}{dt} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

in accordo con la legge di Faraday. Quando un elemento di materiale conduttore si muove in un campo magnetico fisso al suo interno avviene una separazione di cariche dovuta ad un campo elettromotore che ha origine nella forza di Lorentz.

[applicazioni vedi da libro]

10.4 Legge di Felici

Quando una spira di resistenza R si muove in un campo magnetico $\vec{B}$ in essa viene indotta una corrente data da

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

Nell'intervallo di tempo da t_1 a t_2 nella spira fluisce una carica q data da

$$q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt = -\frac{1}{R}\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R}$$

Il valore della carica non dipende dalla legge temporale con cui varia il flusso ma solamente dal valore iniziale e finale. Tale relazione nota come **legge di Felici** fornisce un metodo semplice di misura dell'intensità del campo magnetico.

10.5 Corrente di spostamento. Legge di Ampère-Maxwell

Il campo magnetico nel vuoto in condizioni stazionarie soddisfa alla legge di Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i = \mu_0 \int \vec{j} \cdot \vec{u_n} d\Sigma$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

L'espressione in forma locale è in accordo con la conservazione della carica elettrica solamente nel caso stazionario, infatti si ha

$$\mu_0 \nabla \cdot \vec{j} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{B} = 0$$

e appunto $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ è la forma differenziale della conservazione della carica elettrica nei processi non dipendenti dal tempo. Nel caso generale in cui la densità di carica vari nel tempo essa soddisfa l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \nabla \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

essa ha quindi divergenza non nulla.

La non validità della legge di Ampère in condizioni non stazionarie si può verificare nel processo di carica di un condensatore. Se calcoliamo il flusso netto di carica attraverso una superficie chiusa che racchiude entrambe le armature vediamo che tale flusso è nullo, se invece la superficie racchiude una sola armatura il flusso di $\vec{j}$ non è nullo perché c'è una carica entrante o uscente ma nello spazio tra le armature non si ha nessun passaggio di carica.
Tale superficie può essere divisa in due parti Σ_1 e Σ_2 come nel disegno. La circuitazione di $\vec{B}$ lungo la linea s è diversa da zero però mentre attraverso Σ_1 abbiamo

$$\int_{\Sigma_1} \vec{j} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = i = \frac{dq}{dt}$$

attraverso Σ_2 che appoggia anch'essa su s ma non incontra il filo si ha

$$\int_{\Sigma_2} \vec{j} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = 0$$

Il vettore densità di corrente non è quindi solenoidale nel caso considerato.
Per ovviare a questo problema Maxwell estese il significato di densità di corrente nel modo seguente. Esprimiamo la densità di carica utilizzando la legge di Gauss in forma locale $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ e scriviamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Si ha quindi

$$\nabla \cdot \vec{j} + \epsilon_0 \nabla \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

In questo modo il vettore

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

risulta avere sempre divergenza nulla. Modifichiamo allora la legge di Ampère sostituendo alla densità di corrente di conduzione la densità $\vec{j}_{tot}$:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \mu_0 (i + i_s)$$
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_s)$$

Le quantità

$$\vec{j}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$
$$i_s = \int \vec{j}_s \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \epsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi(\vec{E})}{\partial t}$$

si chiamano rispettivamente **densità di corrente di spostamento nel vuoto** e **corrente di spostamento nel vuoto**.

In presenza di materiali con proprietà dielettriche conviene servirsi del vettore **induzione dielettrica** $\vec{D}$: la sua divergenza è legata alla densità di carica libera dalla $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ e la densità di corrente a divergenza nulla è

$$\vec{j}_{tot} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

La legge di Ampère-Maxwell si scrive

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \mu_0 (i + i_s)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_s)$$

con

$$\vec{j}_s = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$i_s = \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{u_n} d\Sigma = \frac{\partial \Phi(\vec{D})}{\partial t}$$

densità di corrente di spostamento e corrente di spostamento nel mezzo. Nel vuoto $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ e si ritrovano tutte le relazioni precedenti.
Se infine nella densità di corrente deve essere compresa anche la densità di corrente amperiana $\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M}$ ricorrendo al vettore $\vec{H} = (\vec{B}/\mu_0) - \vec{M}$ e la legge di Ampère-Maxwell diventa

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = i_{cond} + \frac{d\Phi(\vec{D})}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{cond} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

11 Induttanza

11.1 Mutua induzione

Il campo magnetico $\vec{B}_1$ generato da un circuito percorso dalla corrente i_1 determina un certo flusso magnetico $\Phi_{1,2}$ attraverso un qualsiasi altro circuito presente nella regione in cui agisce $\vec{B}_1$. Ricordando

$$\Phi(\vec{B}) = \int_\Sigma \vec{B} \cdot \vec{u_n} d\Sigma$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{u_r}}{r^2} \qquad \text{legge di Laplace}$$

e mettendole insieme si ottiene

$$\Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2} \left(\oint \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \frac{d\vec{s}_1 \times \vec{u_r}}{r^2} \right) \cdot \vec{u_n} d\Sigma_2$$

dove Σ_2 è una qualsiasi superficie che poggia sul secondo circuito e r è la distanza dell'elemento $d\vec{s}_1$ del primo circuito dall'elemento di area $d\Sigma_2$ e $\vec{u_r}$ è il versore della direzione orientata $\vec{r}$.
L'espressione del flusso può essere riscritta come

$$\Phi_{1,2} = M_{1,2} i_1$$

conglobando in $M_{1,2}$ tutti i fattori geometrici e l'eventuale dipendenza delle proprietà magnetiche del mezzo in cui sono immersi i circuiti. In modo analogo si trova che

$$\Phi_{2,1} = M_{2,1} i_2$$

M si chiama **coefficiente di mutua induzione** e dipende dalla forma dei circuiti e dalla loro posizione relativa oltre che dalle proprietà magnetiche del mezzo, è costante solamente se i circuiti sono indeformabili e fissi uno rispetto

all'altro.
Si può dimostrare che $M = M_{1,2} = M_{2,1}$ nel seguente modo:

$$\int_{\Sigma_2}\left(\oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{s_1}\times\vec{u_1}}{r_1^2}\right)\cdot\vec{u_n}d\Sigma = \int_{\Sigma_1}\left(\oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{s_2}\times\vec{u_2}}{r_2^2}\right)\cdot\vec{u_n}d\Sigma$$

$$\text{ricordando che}\quad \vec{B} = \nabla\times\vec{A}\qquad \Phi_{1,2} = \int_{\Sigma_2}\vec{B_1}\cdot\vec{u_n}d\Sigma = \int_{\Sigma_2}\nabla\times\vec{A_1}\cdot\vec{u_n}d\Sigma = \oint\vec{A}\cdot d\vec{s_2}$$

$$\vec{A_1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau_1}\frac{j_1}{r_{1,2}}d\tau = \frac{\mu_0}{4\pi}i_1\oint_{C_1}\frac{d\vec{s_1}}{r_{1,2}}$$

$$\Phi_{1,2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{d\vec{s_1}\cdot d\vec{s_2}}{r_{1,2}}i_1 = M_{1,2}i_1$$

analogamente si procede per il secondo flusso ottenendo

$$\Phi_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{s_2}\cdot d\vec{s_1}}{r_{2,1}}i_2 = M_{2,1}i_2$$

e dal momento che $r_{1,2} = r_{2,1}$ le espressioni sono simmetriche.

11.2 Autoflusso

Il campo magnetico generato da un circuito produce un flusso anche attraverso il circuito stesso detto autoflusso del circuito che si scrive

$$\Phi = \int_{\Sigma}\left(\oint \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times\vec{u_r}}{r^2}\right)\cdot\vec{u_n}d\Sigma$$

Mettendo in evidenza la corrente l'espressione dell'autoflusso è

$$\Phi = Li$$

dove il fattore L si chiama **coefficiente di autoinduzione** del circuito e dipende dalla forma del circuito e dalle proprietà magnetiche del mezzo ed è costante solamente se il circuito è indeformabile.

La nozione di autoflusso acquista particolare importanza quando la corrente nel circuito non è costante nel tempo oppure quando la sua forma varia. In tal caso compare nel circuito una f.e.m. detta di autoinduzione che si calcola come

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li)$$

Nei casi pratici più comuni il coefficiente di autoinduzione resta costante e la formula assume la forma

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$$

Il coefficiente di autoinduzione viene anche chiamato **induttanza**.
La presenza di un induttore in un circuito impedisce alla corrente di aumentare o diminuire istantaneamente in quanto la variazione genera una f.e.m. che si oppone alla variazione stessa. In un circuito RL in serie la legge di Ohm si può scrivere come

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = Ri \Rightarrow \mathcal{E} = L\frac{di}{dt} + Ri$$

separando le variabili e integrando si ottiene

$$\frac{di}{\mathcal{E} - Ri} = \frac{dt}{L}\qquad \ln\mathcal{E} - Ri = -\frac{R}{L}t + cost\qquad \mathcal{E} - Ri = Ae^{-Rt/L}$$

dove A è una costante di integrazione che si determina in base alle condizioni iniziali. *[vedi libro]*

11.3 Energia magnetica

La presenza di una f.e.m. in un circuito implica un lavoro sulle cariche. In un circuito RL la potenza erogata dal generatore quando la corrente ha il valore i è

$$\mathcal{E}i = Ri^2 + Li\frac{di}{dt}$$

e il lavoro nel tempo dt vale

$$\mathcal{E}idt = Ri^2dt + Lidi$$

la quale esprime il bilancio energetico del circuito: il primo membro, pari a $\mathcal{E}dq$ è il lavoro compiuto dal generatore, Ri^2dt rappresenta il lavoro speso per far circolare la corrente nel circuito (effetto Joule) mentre $Lidi$ è il lavoro speso contro la f.e.m. di autoinduzione per far aumentare la corrente da i a $i + di$.
In condizioni stazionarie $di = 0$ e il lavoro del generatore è dissipato totalmente nel resistore

$$dW_{gen} = \mathcal{E}idt = Ri^2$$

Nel tempo il cui il circuito raggiunge le condizioni stazionarie viene dissipato un lavoro

$$W_{gen}^L = \int_0^\infty Li\frac{di}{dt}dt = \frac{1}{2}Li^2$$

e tale lavoro può essere interpretato come energia fornita al sistema.
L'**energia intrinseca della corrente** si definisce quindi come

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2$$

Se si prende in considerazione un tratto d di solenoide rettilineo che quindi ha un coefficiente di induzione $L_d = \mu_0 n^2 \Sigma d$ si trova che l'energia associata al tratto di solenoide è pari a

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 \Sigma d)i^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}\Sigma d = \frac{B^2}{2\mu_0}\tau$$

Se si associa l'energia fornita al sistema a un'energia del campo magnetico nel solenoide ponendo $U_L = U_m$ si può definire la **densità di energia**:

$$u_m = \frac{U_m}{\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Tale risultato vale sempre nel vuoto dal momento che dipende solamente dal campo magnetico e dalla permeabilità del mezzo. Ricordando che nel vuoto $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ allora

$$u_m = \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} \quad \text{e} \quad U_m = \int_\tau \frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} d\tau$$

[finire da libro]

12 Riepilogo sulle onde meccaniche

In generale si definisce come onda una qualsiasi perturbazione, impulsiva o periodica, che si propaga con una velocità ben definita. Le onde hanno origine da una sorgente in cui si produce una perturbazione: questa può consistere in una vibrazione di un corpo materiale che mette in moto le molecole di un mezzo (onde elastiche) o in un movimento di cariche elettriche (onde elettromagnetiche).
La perturbazione di un campo che si propaga nello spazio viene rappresentata dalla funzione $\xi(x, y, z, t)$ detta **funzione d'onda**. Una situazione particolare è costituita dalle cosiddette onde piane descritte dalla funzione $\xi(x, t)$ spazialmente unidimensionale. In questa situazione la funzione d'onda soddisfa sempre all'equazione differenziale

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

detta appunto **equazione delle onde piane** o **equazione di d'Alembert**.
Questa equazione è un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine, omogenea, a coefficienti costanti e lineare nella funzione incognita ξ. Si dimostra che le funzioni soluzioni dell'equazione delle onde piane possono essere di qualsiasi tipo però la dipendenza delle variabili x e t deve assumere una delle due forme

$$\xi(x - vt),\ \xi(x + vt)$$

l'argomento di ξ deve pertanto contenere le variabili x e t sotto forma di combinazione lineare. Pertanto

$$\xi = (x - vt)^2 \qquad \xi = \xi_0 \sin k(x - vt) \qquad \xi = \xi_0 e^{k(x-vt)}$$

sono tutte soluzioni possibili. Dalla sua linearità segue anche che la somma di due soluzioni è ancora soluzione. La soluzione più generale si ottiene quindi come

$$\xi(x, t) = \xi_1(x - vt) + \xi_2(x + vt)$$

Il valore ξ_0 assunto dalla funzione ξ all'istante t_0 nella posizione x_0, $\xi_0 = \xi(x_0 - vt_0)$ si ritrova in qualsiasi istante successivo nel punto x che soddisfa alla condizione

$$x - vt = x_0 - vt_0 \qquad \text{ovvero} \qquad x = x_0 + v(t - t_0)$$

Le onde soddisfano al principio di sovrapposizione dal momento che la sovrapposizione di due onde è ancora un'onda e in particolari condizioni può dar origine ad un fenomeno di interferenza.
Le onde armoniche rispondono alla condizione

$$\xi(x - vt) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

con argomento adimensionale $[x = kx,\ t = \omega t]$ dove $\omega = 2\pi/T$ con T periodo temporale e $k = 2\pi/\lambda$ periodo spaziale.

12.1 Onde longitudinali in una sbarra solida

Supponiamo di avere una sbarra solida di lunghezza l e sezione Σ e supponiamo di deformarne il tratto iniziale di lunghezza dx e massa $dm = \rho\Sigma dx$ applicando una forza. Sotto l'azione di tale forza ogni sezione cambia posizione: indichiamo con $\xi(x, t)$ lo spostamento della sezione iniziale di ascissa x e con $\xi(x + dx, t)$ quello della sezione di ascissa $x + dx$.
La lunghezza del tratto, inizialmente pari a dx, diventa

$$x + dx + \xi(x + dx, t) - x - \xi(x, t) = dx + d\xi \qquad \text{perché} \qquad \xi(x + dx, t) = \xi(x, t) + d\xi$$

L'allungamento relativo del cilindretto è $d\xi/dx$ o meglio $\partial\xi/\partial x$. Abbiamo quindi

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{E}\frac{F}{\Sigma} \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = E\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

La forza risultante sul blocchetto è quindi

$$F(x + dx) - F(x) = \frac{\partial F}{\partial x} dx = E\Sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx$$

Il moto della sezione, di massa $dm = \rho\Sigma dx$, avviene con accelerazione $a = \partial^2\xi/\partial t^2$ e per la legge di Newton si ha

$$E\Sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = \rho\Sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx$$

In definitiva si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad v = \left[\frac{E}{\rho}\right]^{1/2}$$

12.2 Onde trasversali su una corda tesa

Consideriamo una corda tesa e una perturbazione trasversale rispetto alla direzione di propagazione. Consideriamo un piccolo tratto di corda dl sottoposto ad una tensione T ad entrambi gli estremi e siano α e α' gli angoli formati con l'asse x dalla tangente all'elemento dl in corrispondenza degli estremi. La risultante delle forze di tensione agenti su dl ha una componente parallela all'asse x e una all'asse y

$$F_x = T(\cos\alpha' - \cos\alpha)$$
$$F_y = T(\sin\alpha' - \sin\alpha)$$

Se gli spostamenti della corda sono piccoli anche la curvatura della corda è piccola allora i termini contenenti gli angoli si possono approssimare

$$\sin\alpha = \tan\alpha = \alpha \qquad \sin\alpha' = \tan\alpha' = \alpha'$$
$$\cos\alpha = 1 \qquad \cos\alpha' = 1$$

e per le componenti della forza agente si ottiene

$$F_x = 0 \quad , \quad F_y = T(\alpha' - \alpha) = T\frac{\partial \tan\alpha}{\partial x}dx$$

dal momento che $\tan\alpha = \partial\xi/\partial x$ abbiamo

$$F_y = T\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx$$

La massa dell'elemento dl di corda è

$$dm = \rho\Sigma dl = \rho_l dx$$

Si ha quindi per la legge di Newton che

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho_l}\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \qquad v = \left[\frac{T}{\rho_l}\right]^{1/2}$$

[onde nei gas, cavo coassiale e linea di trasmissione vedi da appunti]

12.3 Onde piane armoniche

La funzione d'onda nel caso di un'onda armonica si scrive

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t) \quad , \quad \xi(x,t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

in cui $\omega = k\nu$ è la pulsazione dell'onda armonica e $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda.

[fine onde meccaniche + onde stazionarie vedi libro e appunti]

13 Onde elettromagnetiche

Le onde elettromagnetiche hanno la proprietà di propagarsi nel vuoto, in assenza di materia, di essere trasversali in tali condizioni e di essere prodotte da cariche elettriche in moto con accelerazione molto grande. Possono inoltre essere rivelate a grande distanza dalla sorgente ad esempio sfruttando l'interazione del campo magnetico ed elettrico di cui sono composte con le cariche libere presenti in un conduttore.
Nelle equazioni di Maxwell sono contenuti dei fenomeni ondulatori.
Consideriamo un mezzo indefinito e omogeneo di costante dielettrica ϵ e permeabilità magnetica μ nel quale non ci siano cariche libere e correnti di conduzione per cui $\rho = 0$ e $\vec{j} = 0$. In queste condizioni le equazioni di Maxwell in forma locale sono:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Limitiamoci a cercare una soluzione particolare nella quale il campo elettrico $\vec{E}$ e il campo magnetico $\vec{B}$ dipendano solamente dal tempo e dalla coordinata x assumendo quindi lo stesso valore ne punti di un piano ortogonale all'asse

x (soluzione di onda piana). Tenendo presente che nelle nostre ipotesi sono nulle tutte le derivate parziali rispetto a y e z otteniamo

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 & \frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0 \\
\nabla \cdot \vec{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 & \frac{\partial B_x}{\partial x} &= 0 \\
(\nabla \times \vec{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} & \frac{\partial B_x}{\partial t} &= 0 \\
(\nabla \times \vec{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} & \frac{\partial B_y}{\partial t} &= \frac{\partial E_z}{\partial x} \\
(\nabla \times \vec{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} & \frac{\partial B_z}{\partial t} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x} \\
(\nabla \times \vec{B})_x &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \epsilon\mu\frac{\partial E_x}{\partial t} & \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0 \\
(\nabla \times \vec{B})_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon\mu\frac{\partial E_y}{\partial t} & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon\mu}\frac{\partial B_z}{\partial x} \\
(\nabla \times \vec{B})_z &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \epsilon\mu\frac{\partial E_z}{\partial t} & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon\mu}\frac{\partial B_y}{\partial x}
\end{aligned}$$

Le relazioni $\partial E_x/\partial x = 0\,,\, \partial E_x/\partial t = 0$ permettono di dedurre che la componente $E_x(x,t)$ del campo elettrico è costante. Dal momento che siamo interessati a campo variabili nel tempo concludiamo che $E_x(x,t) = 0$. Allo stesso modo da $\partial B_x/\partial x = 0\,,\, \partial B_x/\partial t = 0$ concludiamo che $B_x(x,t) = 0$.
Le relazion delle altre derivate:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial B_y}{\partial t} \quad , & \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\
\frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\epsilon\mu}\frac{\partial B_y}{\partial x} \quad , & \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\epsilon\mu}\frac{\partial B_z}{\partial t}
\end{aligned}$$

le quali mostrano correlazioni tra componenti mutualmente ortogonali.
Derivando la prima e la terza rispettivamente rispetto a x e rispetto a t otteniamo

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} \quad , \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon\mu}\frac{\partial^2 B_y}{\partial t \partial x}$$

Le due derivate miste di B_y sono uguali quindi si ottiene

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = \epsilon\mu\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Analogamente

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} = \epsilon\mu\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

e lo stesso vale per le altre componenti

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \epsilon\mu\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Ognuna delle componenti del campo elettrico e del campo magnetico soddisfa all'equazione differenziale delle onde piane

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \epsilon\mu\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad (\xi = E_y, E_z, B_y, B_z)$$

I campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ si propagano quindi lungo l'asse x sotto forma di onde piane con velocità

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}\frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}_e\mathcal{K}_m}} = \frac{c}{\sqrt{\mathcal{K}_e\mathcal{K}_m}}$$

Dunque le equazioni di Maxwell prevedono come soluzione particolare campi elettrici e magnetici che si propagano con le caratteristiche di onde piane trasversali e con velocità che assume nel vuoto un preciso valore.

Deduciamo ora le relazioni che sussistono in ogni istante e in ogni punto tra $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Ricordiamo che nell'ipotesi di propagazione lungo il verso positivo dell'asse x le soluzioni sono del tipo:

$$E_y = E_y(x - vt) \ , \ \ E_z = E - z(x - vt) \ , \ \ B_y = B_y(x - vt) \ , \ \ B_z = B_z(x - vt)$$

ovvero in forma vettoriale

$$\vec{E} = E_y(x - vt)\vec{u_y} + E_z(x - vt)\vec{u_z} \ , \ \ \vec{B} = B_y(x - vt)\vec{u_y} + B_z(x - vt)\vec{u_z}$$

Detto $u = x - vt$ l'argomento delle funzioni per cui $\partial u/\partial x = 1$ e $\partial u/\partial t = -v$ da cui si ha

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{E_z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial E_z}{\partial u}$$
$$B_y = \int \frac{\partial B_y}{\partial x} dt = \int \frac{\partial E_z}{\partial u} dt = -\frac{1}{v}\int \frac{\partial E_z}{\partial u} du = -\frac{E_z}{v} + cost$$

e si ha quindi che

$$B_y(x - vt) = -\frac{1}{v}E_z(x - vt)$$

e analogamente

$$B_z(x - vt) = \frac{1}{v}E_y(x - vt)$$

Le componenti del campo $\vec{B}$ risultano quindi dipendenti da quelle del campo $\vec{E}$ e i due vettori si possono scrivere nella forma

$$\vec{E} = E_y(x - vt)\vec{u_y} + E_z(x - vt)\vec{u_z}$$
$$v\vec{B} = -E_z(x - vt)\vec{u_y} + E_y(x - vt)\vec{u_z}$$

Dalla seconda equazione si ricava la relazione tra i moduli dei campi, valida in ogni istante e in ogni punto:

$$B^2 = B_y^2 + B_z^2 = \frac{1}{v^2}(E_y^2 + E_z^2) = \frac{E^2}{v^2} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{E}{v} \quad , \quad E = vB \quad , \quad \frac{E}{B} = v$$

Dal prodotto scalare si ottiene

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = E_y B_y + E_z B_z = \frac{1}{v}(-E_y E_z + E_z E_y) \quad \Rightarrow \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$$

i due vettori sono sempre perpendicolari tra loro. Dal prodotto vettoriale si ha invece

$$\vec{E} \times \vec{B} = (E_y B_z - E_z B_y)\vec{u_x} = \frac{1}{v}(E_y^2 + E_z^2)\vec{u_x} = \frac{E^2}{v}\vec{u_x}$$
$$\Rightarrow \vec{E} \times \vec{B} = \frac{E^2}{v}\vec{u_x} = vB^2\vec{u_x} = EB\vec{u_x}$$

il quale dà la direzione e il verso di propagazione essendo parallelo e concorde all'asse x e inoltre descrive il contenuto energetico dell'onda.

Nella maggior parte dei mezzi la suscettività magnetica è tale che $|\mathcal{K}_m - 1| > 10^{-5}$ per cui possiamo porre $\mathcal{K}_m = 1$ e definire il rapporto

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\mathcal{K}_e}$$

Nello studio della propagazione della luce n prende il nome di **indice di rifrazione assoluto del mezzo** e può essere misurato indipendentemente dalla relazione che lo lega a $\mathcal{K}_e$.
Quando si può scrivere $B = \mu H$ la relazione tra i moduli dei campi assume la forma

$$\frac{E}{H} = \mu v = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = Z$$

La quantità Z che ha le dimensioni di un'impedenza prende il nome di **impedenza caratteristica del mezzo** e nel vuoto assume il valore di $377\,\Omega$.
Nei mezzi trasparenti alle onde con $\mathcal{K}_m = 1$ sussiste la relazione

$$Z = \frac{Z_0}{\sqrt{\mathcal{K}_e}} = \frac{Z_0}{n}$$

13.1 Stati di polarizzazione delle onde elettromagnetiche

Per un'onda elettromagnetica piana si definisce la polarizzazione: è sufficiente specificare il comportamento del campo elettrico $\vec{E}$ dal momento che il campo magnetico $\vec{B}$ è sempre perpendicolare ad esso. Descriviamo quindi un'onda armonica piana tramite le equazioni

$$E_y(x,t) = E_{0y}\sin(kx-\omega t) \ \ , \ \ E_z(x,t) = E_{0z}\sin(kx-\omega t+\delta)$$

Valgono le solite relazioni

$$\omega = kv = 2\pi\nu \ \ , \ \ \lambda\nu = v \ \ , \ \ k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Se δ è costante l'onda è polarizzata, se invece varia nel tempo in modo casuale e dunque $\delta = \delta(t)$ l'onda non è polarizzata.

- **Polarizzazione rettilinea**: $\delta = 0\,,\, \delta = \pi$
  Il rapporto tra le componenti del campo elettrico è costante

  $$\frac{E_z}{E_y} = \pm\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \tan\theta = cost$$

  Il campo $\vec{E}$ giace su un piano passante per l'asse x e forma con il piano x, y un angolo θ. In questo piano esso oscilla con ampiezza

  $$E_0 = \sqrt{E_{0,y}^2 + E_{0,z}^2} \ \ \Rightarrow \ \ E_{0,y} = E_0\cos\theta\,,\, E_{0,z} = E_0\sin\theta$$

- **Polarizzazione ellittica**: $\delta = \pi/2\,,\, \delta = 3\pi/2$
  Le componenti del campo sono

  $$E_y(x,t) = E_{0y}\sin(kx-\omega t)$$
  $$E_z(x,t) = \pm E_{0z}\cos(kx-\omega t)$$

  Tra le componenti sussiste la relazione

  $$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0z}}\right)^2 = 1$$

  la quale rappresenta l'equazione di un'ellisse con gli assi paralleli a y e z.
  Se δ è costante ma assume un valore qualsiasi la polarizzazione è ellittica e l'ellisse ha gli assi inclinati.

- **Polarizzazione circolare**: il campo elettrico ha ampiezza costante E_0 e le equazioni dell'onda sono

  $$E_y = E_0\sin(kx-\omega t) \ \ , \ \ E_z = \pm E_0\cos(kx-\omega t)$$

13.2 Energia e quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana

La presenza di un campo elettrico $\vec{E}$ e di un campo magnetico $\vec{B}$ comporta la presenza di una certa quantità di energia distribuita nello spazio con densità u. In un mezzo omogeneo le densità sono

$$u_e = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \quad , \quad u_m = \frac{B^2}{2\mu}$$

e la densità istantanea di energia elettromagnetica è

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{B^2}{2\mu}$$

Per un'onda elettromagnetica piana tenendo conto che $B = E/v$ si ha

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{E^2}{2\mu v^2} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = u_e$$

per cui

$$u = 2u_e = \epsilon E^2 \tag{44}$$

e l'energia elettromagnetica risulta per metà dovuta al campo elettrico e per metà a quello magnetico.
Consideriamo un volume infinitesimo di base $d\Sigma$ e altezza $dx = vdt$ dove u_n è il versore normale alla superficie e forma

un angolo α con la direzione di propagazione dell'onda e calcoliamo l'energia associata all'onda e.m. che attraversa $d\Sigma$ in un tempo dt

$$dU = ud\Sigma\vec{v} \cdot \vec{u_n}dt = \epsilon E^2\vec{v} \cdot \vec{u_n}d\Sigma dt = \epsilon E^2 v\cos\alpha d\Sigma dt$$

La potenza che attraversa $d\Sigma$ è pertanto

$$dP = \epsilon E^2 v\cos\alpha d\Sigma$$

e tale relazione permette di definire il vettore

$$\vec{S} = \epsilon E^2\vec{v}$$

avente la proprietà che il suo flusso attraverso la superficie $d\Sigma$ dà la potenza istantanea attraverso $d\Sigma$

$$dP = \vec{S} \cdot \vec{u_n}d\Sigma = \epsilon E^2 v\cos\alpha d\Sigma = \epsilon E^2 v d\Sigma_0 = Sd\Sigma_0$$

dove $d\Sigma_0$ è la superficie infinitesima ortogonale a $\vec{v}$ pari a $d\Sigma\cos\alpha$.
Il vettore $\vec{S}$, chiamato **vettore di Poynting** si può scrivere anche come

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B} \tag{45}$$

e quindi

$$dP = \frac{1}{\mu}(\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{u_n}d\Sigma$$

Integrando su una superficie finita Σ la potenza istantanea che la attraversa è data dal flusso di $\vec{S}$

$$P = \int_\Sigma \vec{S} \cdot \vec{u_n}d\Sigma = \int_\Sigma \frac{1}{\mu}(\vec{E} \times \vec{B}) \cdot \vec{u_n}d\Sigma \tag{46}$$

Il vettore di Poynting ha dunque direzione e verso coincidenti con quello della velocità di propagazione e il suo modulo rappresenta l'energia elettromagnetica che per unità di tempo passa attraverso l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione.
Nel caso di un'onda piana polarizzata rettilineamente rappresenta nel piano di polarizzazione da

$$E = E_0\sin{(kx - \omega t)}$$

il modulo del vettore di Poynting è

$$S = \epsilon E^2 v = \epsilon v E_0^2\sin^2 kx - \omega t$$

Il valore medio del vettore di Poynting è

$$S_m = \epsilon v(E^2)_m = \epsilon v\frac{1}{t}\int_0^2 E_0^2\sin^2{(kx - \omega t)}dt = \frac{1}{2}\epsilon v E_0^2$$

Ricordando che il valore efficace di una grandezza sinusoidale e la definizione di intensità si ha che l'intensità trasportata da un'onda elettromagnetica piana armonica polarizzata rettilineamente vale

$$I = S_m = \epsilon v(E^2)_m = \frac{1}{2}\epsilon v E_0^2 = \epsilon v E_{eff}^2$$

Scomponendo nelle componenti y e z l'intensità si ha che

$$I_y = \frac{1}{2}\epsilon v E_{0y}^2 \quad , \quad I_z = \frac{1}{2}\epsilon v E_{0z}^2 \quad \Rightarrow \quad I = I_y + I_z = \frac{1}{2}\epsilon v(E_{0y}^2 + E_{0z}^2)$$

Attraverso la relazione $\epsilon v = \frac{n}{Z_0}$ si può scrivere

$$I = \frac{1}{2}\frac{n}{Z_0}E_0^2 = \frac{n}{Z_0}E_{eff}^2$$

Un'onda e.m. piana con $\vec{E} = E(x,y)\vec{u_y}$ che si propaga nella direzione dell'asse x investe una superficie Σ con densità superficiale di carica σ uniforme. La forza per unità di superficie è $\vec{F_\sigma} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}_\sigma \times \vec{B})$ e la potenza ceduta per unità di superficie è

$$P = \vec{F_\sigma} \cdot \vec{v}_\sigma = \sigma\vec{v}_\sigma \cdot \vec{E} = \sigma v_\sigma E \quad [\vec{v}_\sigma \cdot \vec{v}_\sigma \times \vec{B}]$$

L'intensità assorbita dalla superficie è $I = P_\sigma = \sigma\vec{v}_\sigma \cdot \vec{E}$ La forza media per unità di superficie esercitata dalla radiazione è

$$\vec{F_m} = \sigma(\vec{v}_\sigma \times \vec{B})_m = \sigma(v_\sigma B)_m\vec{u_x} = \sigma\left(v_\sigma\frac{E}{v}\right)_m\vec{u_x} = \frac{I_m}{v}\vec{u_x}$$

Si ha quindi che l'onda trasporta una quantità di moto per unità di tempo e di superficie e

$$\vec{F}_m = \frac{d\vec{p}}{\Sigma dt} = \frac{I}{v}\vec{u_x}$$

Questa forza media per unità di superficie corrisponde ad una pressione media detta **pressione di radiazione** che viene esercitata dall'onda sulla superficie Σ.
Nel caso di completo assorbimento della radiazione, ovvero nel caso in cui questa ceda completamente la sua energia e quantità di moto, su una superficie Σ perpendicolare alla direzione di propagazione si ha che

$$P_{rad} = \frac{I}{v}$$

L'altro caso limite è se si ha completa riflessione della radiazione. In tal caso la superficie non assorbe energia, la quantità di moto cambia verso e l'impulso comunicato a Σ è il doppio rispetto al caso dell'assorbimento completo. La pressione di radiazione risulta allora

$$P_{rad} = \frac{2I}{v}$$

Se la direzione della radiazione forma con la normale alla superficie un angolo θ si ha

$$\text{assorbimento completo} \qquad P_{rad} = \frac{I}{v}\cos^2\theta$$
$$\text{riflessone completa} \qquad P_{rad} = \frac{2I}{v}\cos^2\theta$$

dal momento che

$$\Sigma_i = \Sigma_0\cos\theta \qquad \vec{F}_m \cdot \vec{u_n}\Sigma_i = \frac{I}{v}\Sigma_0\cos^2\theta$$
$$\frac{\vec{F}_m \cdot \vec{u_n}\Sigma_i}{\Sigma_0} = \frac{I}{v}\cos^2\theta$$

13.3 Teorema di Poynting

Il lavoro del campo e.m. su una singola carica q per uno spostamento infinitesimo è $dW = \vec{F}\cdot d\vec{s} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})d\vec{s}$.
In presenza di n cariche per unità di volume $dW_\tau = nq\vec{E}\cdot d\vec{s} = nq\vec{v}\cdot\vec{E} = \vec{j}\cdot\vec{E}dt$ e la potenza istantanea per unità di volume $dW_\tau/dt = \vec{E}\cdot\vec{j}$.
Dalla legge di Ampère-Maxwell

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B} - \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

quindi

$$\frac{dW_\tau}{dt} = \vec{E}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B} - \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

e ricordando che $\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})$ e che $\vec{E}\cdot\partial\vec{E}/dt = 1/2\partial E^2/\partial t$ scriviamo che

$$\frac{dW_\tau}{dt} = \frac{1}{\mu_0}[\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{E} - \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})] - \frac{1}{2}\epsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t} \qquad \text{e con} \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$
$$\Rightarrow \qquad \frac{dW_\tau}{dt} = -\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{1}{2}\epsilon_0\frac{\partial E^2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$
$$\Rightarrow \frac{dW_\tau}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla\cdot\vec{S}$$

Quest'ultima rappresenta la potenza per unità di volume espressa dal campo elettromagnetico. In forma integrale si ha

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_\tau U d\tau - \oint_\Sigma \vec{S}\cdot\vec{u_n}d\Sigma$$

14 Riflessione e rifrazione delle onde

La velocità di propagazione delle onde dipende da proprietà fisiche del mezzo in cui avviene la propagazione. Nel passaggio tra un mezzo e un altro la velocità di propagazione cambia e in corrispondenza cambia anche la direzione di propagazione.
Nel caso più generale l0incidenza di un'onda sulla superficie di separazione tra due mezzi dà origine ad un'onda riflessa che si propaga nello stesso mezzo in cui si propaga l'onda incidente e ad un'onda rifratta che si propaga nel secondo mezzo. Quest'onda è anche detta trasmessa. Le relazioni che legano l'ampiezza dell'onda incidente ξ_i a quella dell'onda riflessa ξ_r e dell'onda trasmessa ξ_t dipendono dalla natura dell'onda stessa e sono caratterizzate dai coefficienti di Fresnel.

14.1 Principio di Huygens-Fresnel

Ogni elemento $d\Sigma$ di una superficie d'onda Σ si può considerare formalmente come una sorgente di onde secondarie sferiche la cui ampiezza è proporzionale all'ampiezza dell'onda primaria e all'area $d\Sigma$ e può variare secondo una funzione dell'angolo θ rispetto alla normale alla superficie. La perturbazione in un punto dello spazio si ottiene dalla sovrapposizione di tutte le onde sferiche elementari che raggiungono il punto considerato.

14.2 Le leggi della rifrazione e della riflessione

Quando un'onda attraversa una superficie tra due mezzi la sua velocità di propagazione cambia, come varia anche la sua lunghezza d'onda λ e il suo numero d'onda k.
Dette v_1 e v_2 le velocità di propagazione nei due mezzi si ha

$$\omega = 2\pi\nu \quad , \quad \lambda_1\nu = v_1 \quad , \quad \lambda_2\nu = v_2 \tag{47}$$

$$k_1 = \frac{\omega}{v_1} = \frac{2\pi}{\lambda_1} \quad , \quad k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{2\pi}{\lambda_2} \tag{48}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad , \quad \frac{k_1}{k_2} = \frac{v_2}{v_1} \tag{49}$$

In particolare per un'onda elettromagnetica piana che passi dal vuoto ($v_1 = c$, $\lambda_1 = \lambda_0$, $k_1 = k_0$) ad un materiale trasparente ($v_2 = c/n$, $\lambda_2 = \lambda$, $k_2 = k$) valgono le relazioni

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} \quad , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0}n = k_0 n$$

Consideriamo un'onda piana armonica

$$\xi_i = \xi_0 \cos(\vec{k_i} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

che incida lungo la direzione individuata dal vettore $\vec{k_i}$ sulla superficie di separazione dei mezzi. Dall'onda incidente ha origine un'onda riflessa

$$\xi_r = \xi_{0r} \cos(\vec{k_r} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

che si muove con velocità v_1 e un'onda rifratta

$$\xi_t = \xi_{0t} \cos(\vec{k_t} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

che si muove nel secondo mezzo con velocità v_2.
Sulla superficie di separazione le fasi delle tre onde devono risultare uguali in ogni istante quindi

$$\vec{k_1} \cdot \vec{r} - \omega t = \vec{k_r} \cdot \vec{r} - \omega t = \vec{k_t} \cdot \vec{r} - \omega t \qquad \Rightarrow \qquad \vec{k_1} \cdot \vec{r} = \vec{k_r} \cdot \vec{r} = \vec{k_t} \cdot \vec{r}$$

Supponiamo che la superficie di separazione coincida con il piano xy e che il vettore $\vec{k_i}$ giaccia nel piano yz. Scriviamo allora

$$\vec{r} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y} \quad , \quad \vec{k_i} = k_{iy}\vec{u_y} + k_{iz}\vec{u_z}$$

$$\vec{k_r} = k_{rx}\vec{u_x} + k_{ry}\vec{u_y} + k_{rz}\vec{u_z} \quad , \quad \vec{k_t} = k_{tx}\vec{u_x} + k_{ty}\vec{u_y} + k_{tz}\vec{u_z}$$

da cui si ricava

$$k_{iy}y = k_{rx}x + k_{ry}y = k_{tx}x + k_{ty}y$$

che devono valere per ogni valore di x e y e quindi deve essere

$$k_{rx} = k_{tx} = 0$$
$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$$

Definito come **piano di incidenza** il piano ortogonale alla superficie di separazione individuato da $\vec{k_i}$ e da $\vec{u_z}$ si deduce che anche che $\vec{k_r}$ e $\vec{k_t}$ devono stare sul piano di incidenza e quindi si enuncia la **prima legge della riflessione e della rifrazione**:

1. le direzioni di propagazione dell'onda incidente, dell'onda riflessa e di quella trasmessa giacciono nel piano di incidenza, individuato dalla direzione di incidenza e dalla normale alla superficie nel punto di incidenza. Si ha inoltre che

$$k_r = k_i = \frac{\omega}{v_1} \qquad k_{ry} = k_{iy} \qquad k_r \sin\theta_r = k_i \sin\theta_i$$
$$\Rightarrow \qquad \theta_i = \theta_r$$

2. per la componente trasmessa si ha

$$k_t = \frac{\omega}{v_2} \qquad k_{ty} = k_{iy} \qquad k_t \sin\theta_t = k_i \sin\theta_i \qquad \frac{1}{v_2}\sin\theta_t = \frac{1}{v_1}\sin\theta_i$$
$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \qquad \Rightarrow \qquad \textbf{LEGGE DI SNELL}$$

Queste leggi sono valide per tutti i tipi di onde. I fronti d'onda riflessi e rifratti sono piani se la superficie di separazione è piana. Se questa non è piana in generale la forma d'onda incidente viene alterata sia in riflessione che in rifrazione.

[Coefficienti di Fresnel vedi foglio]

14.3 Onde e.m. in mezzi anisotropi

Nei dielettrici lineari i vettori $\vec{P}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$ sono legati tra loro dalle relazioni

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\mathcal{K}_e - 1}{\mathcal{K}_e}\vec{D}$$

dove $\mathcal{K}_e$ caratterizza il mezzo e non dipende dalla direzione dei campi in un mezzo omogeneo. I campi $\vec{P}$, $\vec{D}$, $\vec{E}$ sono paralleli tra loro.
In un mezzo anisotropo i campi sono legati tra loro in modo più articolato che considera la dipendenza di $\mathcal{K}_e$ e χ_e dalla posizione.
In tal modo di può verificare che, con $\mathcal{K}_e(\vec{r})$

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = -\epsilon_0\frac{\mathcal{K}_e - 1}{\mathcal{K}_e}\nabla\cdot\vec{D} - \vec{D}\cdot\nabla\epsilon_0\left(\frac{\mathcal{K}_e - 1}{\mathcal{K}_e}\right) = -\vec{D}\nabla\epsilon_0\left(\frac{\mathcal{K}_e - 1}{\mathcal{K}_e}\right) \neq 0 \quad \text{anche se} \quad \nabla\cdot\vec{D} = 0$$

in assenza di cariche libere.
Le relazioni tra il vettore polarizzazione e il campo elettrico sono

$$\begin{cases} P_x = \epsilon_0(\chi_{11}E_x + \chi_{12}E_y + \chi_{13}E_z) \\ P_y = \epsilon_0(\chi_{21}E_x + \chi_{22}E_y + \chi_{23}E_z) \\ P_z = \epsilon_0(\chi_{31}E_x + \chi_{32}E_y + \chi_{33}E_z) \end{cases}$$

mentre quelle tra il campo elettrico e il vettore $\vec{D}$ sono

$$\begin{cases} D_x = \epsilon_0(\mathcal{K}_{11}E_x + \mathcal{K}_{12}E_y + \mathcal{K}_{13}E_z) \\ D_y = \epsilon_0(\mathcal{K}_{21}E_x + \mathcal{K}_{22}E_y + \mathcal{K}_{23}E_z) \\ D_z = \epsilon_0(\mathcal{K}_{31}E_x + \mathcal{K}_{32}E_y + \mathcal{K}_{33}E_z) \end{cases}$$

dove $\mathcal{K}_{\rangle|} = 1 + \chi_{ij}$. In questi materiali si possono individuare tre assi ortogonali rispetto ai quali le relazioni tra le componenti dei campi diventano $D_{xyz} = \epsilon_0 E_{xyz} + P_{xyz} = \epsilon_0\mathcal{K}_{xyz}E_{xyz}$. Se si ha che $\mathcal{K}_x \neq \mathcal{K}_y \neq \mathcal{K}_z$ allora i vettori $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{P}$ non sono più paralleli tra loro.
In un mezzo anisotropo tutti i vettori caratteristici $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$ dipendono da $\vec{r}$ e da t come $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ con $\vec{K}$ vettore

d'onda perpendicolare al fronte d'onda piano. Assumendo $\vec{H}$ e $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\vec{H}$, $\nabla \times \vec{H} = \vec{K} \times \vec{H} = \partial\vec{D}/\partial t = -\omega\vec{D}$ e $\vec{D} = -1/\omega\vec{K} \times \vec{H}$ si ha

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{da cui} \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\omega\mu_0}\vec{K} \times \vec{H}$$

e si conclude che $\vec{D}$ e $\vec{H}$ sono perpendicolari a $\vec{K}$, $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{K}$ e $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ sono complanari.
Il vettore $\vec{D}$ giace sul fronte d'onda e l'indice di rifrazione dipende dalla direzione di $\vec{D}$. Posto $\vec{K} = K\vec{u}$ vettore d'onda, $\vec{D} = -\frac{1}{\omega}\vec{K} \times \vec{H}$ e $\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu_0}\vec{K} \times \vec{E}$ si ottiene

$$\vec{D} = -\frac{K^2}{\mu_0\omega^2}\vec{u} \times (\vec{u} \times \vec{E}) = \epsilon_0 \frac{c^2}{v^2}[\vec{E} - (\vec{u} \cdot \vec{E})\vec{u}]$$

Ricordando che $n^2 = c^2/v^2$

$$\vec{D} \cdot \vec{D} = D^2 = \epsilon_0 n^2 \vec{D} \cdot \vec{E} = n^2 \left(\frac{D_x^2}{K_1} + \frac{D_y^2}{K_2} + \frac{D_z^2}{K_3} \right) \qquad \text{dove} \qquad D_{xyz} = \epsilon_0 K_{123} E_{xyz}$$

Si ottiene infine con $K_{123} = n_{123}^2$ e con $x/y/z = n\frac{D_x}{D}/D - y/D_z$ l'equazione

$$\frac{x^2}{n_1^2} + \frac{y^2}{n_2^2} + \frac{z^2}{n_3^2} = 1 \qquad n^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \textbf{ellissoide degli indici di rifrazione}$$

Dati n_1, n_2, n_3 la direzione di $\vec{D}$ determina l'indice di rifrazione n.

14.4 Birifrangenza

Nei cristalli monoassici l'asse ottico è un'asse si simmetria e si indica con **indice di rifrazione straordinario** l'indice di rifrazione relativo all'asse ottico e con **indice di rifrazione ordinario** quello relativo ad un qualsiasi asse ortogonale all'asse ottico. L'equazione dell'ellissoide degli indici di rifrazione diventa quindi

$$\frac{x^2}{n_s^2} + \frac{y^2 + z^2}{n_0^2} = 1$$

Si distinguono due tipi di cristalli monoassici:

- cristalli positivi per i quali $n_s > n_o$: l'ellissoide risulta allungato nella direzione dell'asse ottico
- cristalli negativi per i quali $n_s < n_o$: l'ellissoide è schiacciato nella direzione dell'asse ottico

Quando un fronte d'onda si propaga in un cristallo monoassico si nota che il vettore $\vec{D}$ si può scomporre in due componenti: $\vec{D_o}$ nel piano yz e $\vec{D_e}$ nel piano definito da $\vec{K}$ e dall'asse ottico. Per l'onda ordinaria associata a $\vec{D_o}$ l'indice di rifrazione è n_o mentre per quella straordinaria associata a $\vec{D_e}$ l'indice di rifrazione è n_e con

$$\frac{n_e^2 \sin^2\theta}{n_s^2} + \frac{n_e^2 \cos^2\theta}{n_o^2} = 1$$

e $v_e^2 = v_s^2 \sin^2\theta + v_o^2 \cos^2\theta$ con v_e velocità di fase della componente straordinaria.
Le superfici d'onda centrate in O ad un istante t sono descritte dall'equazione di un ellissoide

$$v_e^2 = v_s^2 \sin^2\theta + v_o^2 \cos^2\theta = v_e^2 \sin^2\phi + v_e^2 \cos^2\phi$$

dove $v_{e,x} = v_e \cos\phi = v_o\theta$ e $v_{e,yz} = v_e \sin\phi = v_s \sin\theta$. Al tempo t si ha $x = v_{e,x}t = v_o \cos\theta t$, $[y^2 + z^2]^{1/2} = v_{e,yz}t = v_s \sin\theta t$ da cui

$$\frac{x^2}{v_o^2 t^2} + \frac{y^2 + z^2}{v_s^2 t^2} = 1$$

e $\vec{v_e}$ e $\vec{K}$ non sono paralleli. $\vec{K}$ forma un angolo θ con l'asse ottico e $\vec{v_e}$ un angolo ϕ. I fronti d'onda piani procedono spostandosi lateralmente rispetto alla normale formando un angolo $\beta = \theta - \phi$ con

$$\tan\beta = \frac{(n_s - n_o)\tan\theta}{(n_s + n_o)\tan^2\theta}$$

14.5 Lamine di ritardo

Le lamine di ritardo sono lamine di cristalli monoassici con le superfici parallele all'asse ottico. Se un cristallo lavorato in questo modo viene investito da fronti d'onda piani e paralleli alle facce, questo si scompone in una componente straordinaria ed una ordinaria che si propagano rispettivamente con velocità $v_s = c/n_s$ e $v_o = c/n_o$.
Le due componenti dell'onda acquistano una differenza di fase

$$\phi = 1\frac{2\pi}{\lambda}d(n_s - n_o) \qquad \text{con } d \text{ spessore della lamina}$$

Se ϕ è un multiplo di π la lamina è detta **a mezz'onda**:

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}d(n_s - n_o) = m\pi \qquad d = m\frac{\lambda}{2}\frac{1}{n_s - n_o}$$

Se ϕ è multiplo dispari di $\pi/2$ la lamina è a **quarto d'onda**

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}d(n_s - n_o) = (2m+1)\frac{\pi}{2} \qquad d = (2m+1)\frac{\lambda}{4}\frac{1}{n_s - n_o}$$

Quando un'onda polarizzata linearmente $\vec{E}(x,t) = E_{0y}\sin(kx - \omega t)\vec{u_y} + E_{0z}\sin(kx - \omega t)\vec{u_z}$ investe una lamina di ritardo a mezz'onda una componente acquista una fase π rispetto all'altra, il piano di polarizzazione viene capovolto e l'onda uscente si descrive come

$$\vec{E}(x,t) = -E_{0y}\sin(kx - \omega t)\vec{u_y} + E_{0z}\sin(kx -)\vec{u_z}$$

Se l'onda polarizzata linearmente investe invece una lamina a quarto d'onda la sua polarizzazione diventa ellittica e quindi l'onda uscente si descrive come

$$\vec{E}(x,t) = \pm E_{0y}\cos(kx - \omega t)\vec{u_y} + E_{0z}\sin(kx - \omega t)\vec{u_z}$$

Se $E_{0y} = E_{0z}$ e quindi il piano di polarizzazione dell'onda incidente forma un angolo di $\pi/4$ con l'asse y, l'onda risulta polarizzata circolarmente.

Se la luce incidente non è polarizzata la lamina non ha alcun effetto dal momento che uno sfasamento tra due componenti che sono incoerenti non altera l'incoerenza intrinseca.

14.6 Sostanze dicroiche e polarizzatori

Esistono in natura sostanze che assorbono in proporzioni molto diverse l'onda straordinaria e quella ordinaria. Tale fenomeno si chiama **dicroismo**. Una lamina dicroica è un dispositivo che fornisce un'onda polarizzata rettilineamente lungo una direzione che chiamiamo asse ottico della lamina e vengono generalmente chiamate polarizzatori.
Quando un'onda piana polarizzata investe un polarizzatore P_1 con intensità

$$I_0 = \frac{1}{2}\frac{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}{Z_0}$$

La radiazione trasmessa da P_1 ha intensità

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \quad \text{e} \quad \vec{E_1} = E_{1y}\sin(kx - \omega t)\vec{u_y}$$

Se poi investe un secondo polarizzatore P_2 con l'asse ottico inclinato di un angolo θ rispetto all'asse y viene trasmessa un'onda con un campo

$$\vec{E_2} = E_{1y}\cos^2\theta\sin(kx - \omega t)\vec{u_y} + E_{1z}\cos\theta\sin\theta\sin(kx - \omega t)\vec{u_z}$$
$$\vec{E_2} = E_{2y}\sin(kx - \omega t) + E_{2z}\sin kx - \omega t\vec{u_z}$$

È possibile enunciare la **legge di Malus** secondo cui quando un'onda di intensità I_0 colpisce un polarizzatore il cui asse ottico è inclinato di un angolo θ rispetto all'asse y, l'intensità della radiazione uscente è

$$I = \frac{1}{2}\frac{E_y^2 + E_z^2}{Z_0} = \frac{1}{2}\frac{E_{0y}^2\cos^2\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{Z_0} = I_0\cos^2\theta$$

Un'onda piana polarizzata investe un polarizzatore P con l'asse ottico inclinato di un angolo α rispetto all'asse y

$$\vec{E} = E_y \vec{u_y} + E_z \vec{u_z}$$

$$E_y(x,t) = E_{0y} \sin(kx - \omega t) \qquad E_z(x,t) = E_{0z} \sin(kx - \omega t + \delta) \qquad \text{con } \delta \text{ sfasamento delle componenti}$$

Il campo proiettato lungo l'asse del polarizzatore risulta

$$E_P = E_{0y} \cos\alpha \sin(kx - \omega t) + E_{0z} \sin\alpha \sin(kx - \omega t + \delta)$$

che elevato al quadrato e mediato nel tempo risulta

$$E_P^2 = \frac{1}{2} E_{0y}^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2} E_{0z}^2 \sin^2\alpha + E_{0y} E_{0z} \sin\alpha \cos\alpha \cos\delta$$

e la radiazione trasmessa ha intensità

$$I = \frac{E_P^2}{Z_0}$$

che dipende da δ.
Per $\delta = 0$ con $\tan\beta = E_{0z}/E_{0y}$ si ha

$$E_P^2 = \frac{E_0^2}{2} (\cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha)^2 = \frac{E_0^2}{2\cos^2(\alpha - \beta)} \qquad \text{legge di Malus}$$

Per $\delta = \pi/2$ si ha

$$E_P^2 = \frac{E_{0y}^2}{2} \cos^2\alpha + \frac{E_{0z}^2}{2} \sin^2\alpha \qquad \Rightarrow \qquad I_P = I_y \cos^2\alpha + I_z \sin^2\alpha$$

15 Fenomeni di interferenza

Il termine interferenza è riferito propriamente a quei fenomeni di sovrapposizione ottenuti con onde emesse da due o più sorgenti coerenti. L'interferenza si verifica con ogni tipo di onda e la trattazione analitica è indipendente dalla natura delle onde in esame.
Un metodo per analizzare al somma di due grandezze vettoriali è il metodo dei **vettori rotanti** o dei **fasori**.
Supponiamo che due onde si propaghino lungo l'asse x e che il punto P disti x_1 dalla sorgente della prima onda e x_2 dalla sorgente della seconda. Le espressioni delle due onde in P sono

$$\xi_1 = A_1 \cos(kx_1 - \omega t + \phi_1) = A_1 \cos(\omega t - kx_1 - \phi_1) = A_1 \cos \omega t + \alpha_1$$
$$\xi_2 = A_2 \cos(kx_2 - \omega t + \phi_2) = A_2 \cos(\omega t - kx_2 - \phi_2) = A_2 \cos \omega t + \alpha_2$$

Le costanti ϕ_1 e ϕ_2 dipendono solo dalle sorgenti mentre le costanti α_1 e α_2 contengono anche la fase dovuta al percorso.
Ciascuna oscillazione in P è rappresentata come la proiezione sull'asse orizzontale di un vettore rotante con velocità angolare ω e la somma si calcola come proiezione della risultante dei vettori. Essa ha l'espressione

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t + \alpha)$$

dove modulo A e fase α sono dati da

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta} \qquad \delta = \alpha_1 - \alpha_2 = \phi_2 - \phi_1 + k(x_2 - x_1)$$
$$\tan\alpha = \frac{A_1 \sin\alpha_1 + A_2 \sin\alpha_2}{A_1 \cos\alpha_1 + A_2 \cos\alpha_2}$$

Poiché l'intensità è proporzionale al quadrato dell'ampiezza, l'intensità misurata nel punto P è

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\delta$$

Nel caso particolare di eguali ampiezze $A_1 = A_2 = A_0$ si ha

$$A = \sqrt{2A_0^2(1 + \cos\delta)} = 2A_0 \cos\frac{\delta}{2}$$
$$\tan\alpha = \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

e per l'intensità si ha

$$I = 2I_0(1+\cos\delta) = 4I_0\cos^2\frac{\delta}{2}$$

L'ampiezza della somma dipende dalla differenza di fase: il valore massimo si ha quando le onde sono in fase, il minimo quando le onde sono in opposizione di fase. Si ha quindi **interferenza costruttiva** per $\delta = 2m\pi$ e **interferenza distruttiva** per $\delta = (2m+1)\pi$.
Considerando due sorgenti S_1 ed S_2 ed un rivelatore R la differenza di fase può essere dovuta alle sorgenti, alla differenza di cammino percorso o ad un diverso mezzo attraversato $[\delta = \delta_s + 2\pi/\lambda(n_2r_2 + n_1r_1)]$. Il cammino ottico è il prodotto della distanza geometrica percorsa per l'indice di rifrazione $L = nl$.

15.1 Esperimento di Young

Il dispositivo di Young è costituito da un fascio di luce ordinaria monocromatica che incide su uno schermo su cui è praticata una fenditura che funge da sorgente primaria. Le onde uscenti da questa fenditura arrivano su uno secondo schermo su cui sono praticati due fori equidistanti dall'asse del dispositivo che fungono da sorgenti coerenti di radiazione. Nell'ipotesi $L >> d$ si può scrivere $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta = x/L$ e quindi

$$I(x) = 4I_1\cos^2\frac{\pi d n x}{\lambda_0 L}$$

I massimi si hanno per

$$\theta = m\frac{\lambda_0}{nd} \qquad x = m\frac{\lambda_0 L}{nd}$$

mentre i minimi si hanno in corrispondenza di

$$\theta = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2nd} \qquad x = (2m+1)\frac{\lambda_0 L}{2nd}$$

Il passo dei massimi è $\Delta x = \lambda_0 L/nd$ e l'intensità massima, costante nelle diverse frange chiare, è $I_{max} = 4I_1$.

15.2 Interferenza prodotta da N sorgenti coerenti

Consideriamo N sorgenti coerenti equispaziate di una distanza d e osservate da una distanza $r >> d$. Tra due sorgenti consecutive vi è la differenza di fase

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

Per calcolare l'ampiezza totale utilizziamo il metodo dei vettori rotanti. Le ampiezze E_{0i} sono uguali per $i = 1, ..., N$ quindi si ha che

$$E_0 = 2\rho\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

mentre

$$E_{0i} = 2\rho\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Combinando queste relazioni si ottiene

$$E_0 = E_{0i}\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

Per quanto riguarda l'intensità risultante si ha invece

$$I(\theta) = I_1\left(\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)^2 = I_1\left(\frac{\sin\frac{N\pi d\sin\theta}{\lambda}}{\sin\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}}\right)^2$$

I massimi principali si hanno per

$$\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda} = m\pi \qquad \sin\theta_{max} = m\frac{\lambda}{d} \qquad I(\theta_{max}) = N^2 I_1$$

e hanno una larghezza angolare pari a $\Delta\sin\theta = 2\lambda/Nd$.
I minimi (N-1) per

$$\frac{N\pi d\sin\theta}{\lambda} = m\pi \qquad \sin\theta_{min} = \frac{m\lambda}{Nd} \qquad I(\theta_{min}) = 0$$

I massimi secondari (N-2) si ottengono in corrispondenza di

$$\frac{N\pi d\sin\theta}{\lambda} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \qquad \sin\theta = (2m+1)\frac{\lambda}{2Nd}$$

[interferenza su lamine e diffrazione vedi appunti]