# MASSA DELLE GALASSIE

→ per misurarla si usa un tracciante:

- STELLARE: Teorema del viriale, equazioni dell'idrodinamica
- GASSOSO: dischi di gas ionizzato, molecolare e neutro, alone X

## GALASSIE ELLITTICHE: TEOREMA DEL VIRIALE

Consideriamo un sistema stellare a simmetria sferica in stato stazionario

Per il TEOREMA DEL VIRIALE si ha

$$2T + W = 0$$

dove $T$ = energia cinetica
$W$ = energia potenziale gravitazionale

dove l'energia cinetica di un sistema non rotante è

$$T = \frac{1}{2} M\sigma^2$$ → uso la dispersione di velocità

e l'energia potenziale di un sistema con un profilo di SB che segue la legge di de Vaucouleurs ($r^{1/4}$) è

$$W = -\frac{1}{3} \frac{G M^2}{r_e}$$

con $M$ = massa del sistema
$r_e$ = raggio efficace

→ si ricava dal profilo radiale di luminosità $L = L(r)$ se assumiamo un rapporto $M/L$ = cost e troviamo $M = M(r) = \frac{M}{L} L(r)$

⟹ sostituendo

$$2T + W = 2\left(\frac{1}{2} M\sigma^2\right) - \frac{1}{3}\frac{GM^2}{r_e} = M\sigma^2 - \frac{1}{3}\frac{GM^2}{r_e} = 0$$

$$\Longrightarrow \sigma^2 - \frac{1}{3}\frac{GM}{r_e} = 0 \Longrightarrow M = \frac{3 r_e \sigma^2}{G}$$

→ $r_e$ ricavato dalla fotometria e $\sigma$ dalla spettroscopia

**IPOTESI FATTE**

1) stato stazionario = le proprietà macroscopiche non variano nel tempo, galassia isolata, senza interazioni
2) sistema a simmetria sferica
3) sistema non rotante = $\bar{v}_{*,los} = 0$, velocità lungo la linea di vista nulla in qualsiasi punto
4) rapporto $M/L$ costante [HP MOLTO FORTE]

Problema della conversione delle unità di misura

$G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ m^3 s^{-2} kg^{-1}$ → devo portarla in unità astrofisiche

$\sigma = km s^{-1}$

$r_e$ = arcsec / pc

$M = M_\odot$ → voglio esprimere la massa in unità di masse solari

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} m^2 m\, s^{-2} kg^{-1} = 6.67 \cdot 10^{-11} \underbrace{\left(\frac{km}{10^3}\right)^2}_{m^2} \underbrace{\left(\frac{pc}{3.086 \cdot 10^{16}}\right)}_{m} \underbrace{\left(\frac{M_\odot}{1.99 \cdot 10^{30}}\right)^{-1}}_{kg^{-1}} s^{-2}$$

$\Longrightarrow G = 4.30 \cdot 10^{-3}\ km^2 s^{-2} pc\, M_\odot^{-1}$ → COSTANTE G IN UNITÀ ASTROFISICHE

→ per passare da pc ad arcsec mi serve la scala ⟹ mi serve la DISTANZA

$$r_e[pc] = r_e[arcsec]\,\frac{D[pc]}{206265} = r_e[arcmin] \cdot 60\,\frac{D[pc]}{206265}$$

$$\Longrightarrow M[M_\odot] = 3\,\underbrace{\frac{D[pc]}{206265}\, r_e[arcmin]\,60}_{pc}\ \frac{\sigma^2\,[km^2 s^{-2}]}{4.30\cdot 10^{-3}\,[km^2 s^{-2} pc\, M_\odot^{-1}]}$$

↳ G in unità astrofisiche

$$\Longrightarrow M[M_\odot] = 0.2\, D[pc]\, \underbrace{r_e[arcmin]}_{\text{da fotometria}}\, \underbrace{\sigma^2[km^2 s^{-2}]}_{\text{dagli spettri}}$$

⟹ sono tutte quantità osservate

PROBLEMA → assumere M/L costante è un'ipotesi molto forte perché in generale è variabile a causa degli aloni di materia oscura, si ho un gradiente di M/L [vedi ellittiche boxy - disky]

→ la materia oscura è distribuita diversamente rispetto alle stelle ⟹ TEOREMA DEL VIRIALE CADE (è valido solo come prima approssimazione)

## GALASSIE ELLITTICHE: EQUAZIONI IDRODINAMICA STELLARE (abbandono hp M/L costante)

Per un sistema stellare sferico non collisionale (= tempo scala degli urti molto più grande di tempo universo) in stato stazionario nello spazio delle fasi [in cui ogni punto è descritto da 6 coordinate $(\bar{x}, \bar{v}) = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$] vale l'equazione di continuità ⟹ eq di Boltzmann (eq fondamentale della dinamica stellare)

⇓

(uso quantità osservabili)
EQUAZIONI FONDAMENTALI DELL'IDRODINAMICA STELLARE
POSSO TRATTARLO COME UN FLUIDO

- * 1° eq di Jeans (eq di continuità nello spazio ordinario) → EQ DI VLASOV
- * 2° eq di Jeans (eq del moto) → EQ DI EULERO

$$\Longrightarrow \frac{1}{\rho}\frac{d}{dr}(\rho \sigma_r^2) + \frac{2}{r}(\sigma_r^2 - \sigma_t^2) = -\frac{G M(r)}{r^2}$$

→ calcolo andamento della massa indipendentemente da quello della luce

dove: $\rho$ = densità numerica del tracciante stellare (stelle per unità di volume, non densità di massa della galassia)

$\sigma_r$ = dispersione di velocità radiale

$\sigma_t$ = dispersione di velocità tangenziale

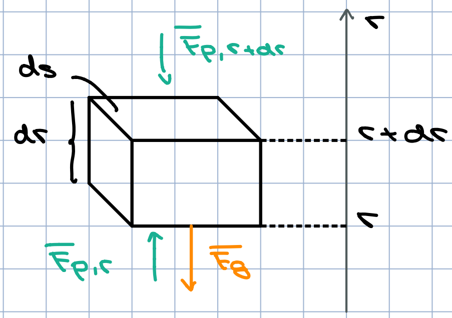
$M(r)$ = massa totale della galassia contenuta entro r

[GRAFICI VEDI SLIDE]

## GALASSIE ELLITTICHE : ALONI DI GAS CALDO IN EQUILIBRIO IDROSTATICO

Consideriamo un tracciante gassoso la cui densità di massa è $\rho = \rho(r)$ distribuita a simmetria sferica

Consideriamo un elemento di volume di area $ds$ e spessore $dr$ [volume $dV = ds\,dr$] di massa $dM = \rho dV = \rho\, ds\, dr$ su cui agiscono la forza di pressione e la forza di gravità




$\overline{F}_{p,r}$ = forza di pressione alla quota $r$

$\overline{F}_{p,r+dr}$ = forza di pressione alla quota $r+dr$

$\overline{F}_g$ = forza di gravità dovuta alla massa $M(r)$ contenuto entro $r$

$\Rightarrow$ pressione sulle facce laterali si elidono (stesso area, stesso quota)

EQUILIBRIO $\longrightarrow$ $\overline{F}_{p,r} + \overline{F}_{p,r+dr} + \overline{F}_g = 0$

$\Rightarrow F_{p,r} - F_{p,r+dr} - F_g = 0$

$p(r)$ = pressione sulla superficie unitaria alla quota $r$

La forza di pressione totale è

$$F_p = F_{p,r} - F_{p,r+dr} = p(r)ds - p(r+dr)ds = -[p(r+dr) - p(r)]ds = -dp\,ds$$

variazione infinitesima

La forza di gravità è $F_g = \frac{GM(r)dM}{r^2} = \frac{GM(r)}{r^2}\rho dV = \frac{GM(r)}{r^2}\rho\, ds\, dr$

$\longrightarrow$ se la massa entro $r$ ha una distribuzione sferica allora è come se fosse tutto concentrato al centro

La condizione di equilibrio allora si scrive come

$$-dp\,ds = \frac{GM(r)}{r^2}\rho\, ds\, dr \Rightarrow \frac{dp}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho$$

$\longrightarrow$ EQUAZIONE DELL' EQUILIBRIO IDROSTATICO (*)

GRADIENTE DI PRESSIONE

Nel caso di un gas perfetto l'equazione di stato è

$p = nkT = \frac{\rho}{m}kT$ dove $m$ = massa della singola particella di gas, $k$ = costante di Boltzmann

① **CASO ISOTERMO** [$T = \text{cost}$]

derivando l'eq. di stato si ha $\frac{dp}{dr} = \frac{kT}{m}\frac{d\rho}{dr}$

e inserendola in (*) si ottiene $\frac{kT}{m}\frac{d\rho}{dr} = -\frac{G\rho M(r)}{r^2}$

$$\Rightarrow M(r) = -\frac{kT}{m}\frac{r^2}{G\rho}\frac{d\rho}{dr} = -\frac{kT}{m}\frac{r}{G}\frac{r}{\rho}\frac{d\rho}{dr} = -\frac{kT}{mG}\, r\, \frac{d\ln\rho}{d\ln r}$$

$\longrightarrow$ gradiente di pressione ha segno negativo

② **CASO NON ISOTERMO** [$T = T(r)$]

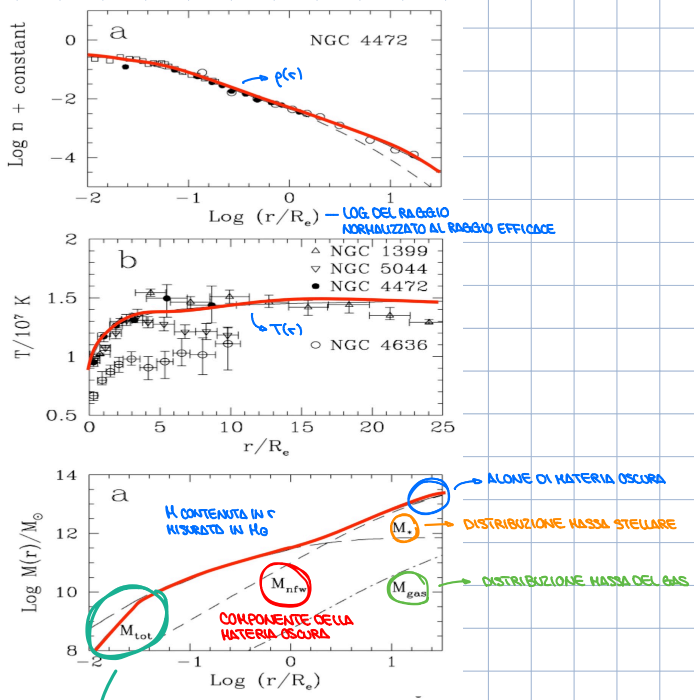
derivando l'eq di stato si ha $\frac{dp}{dr} = \frac{k}{m}\left(\frac{d\rho}{dr}T + \rho\frac{dT}{dr}\right)$

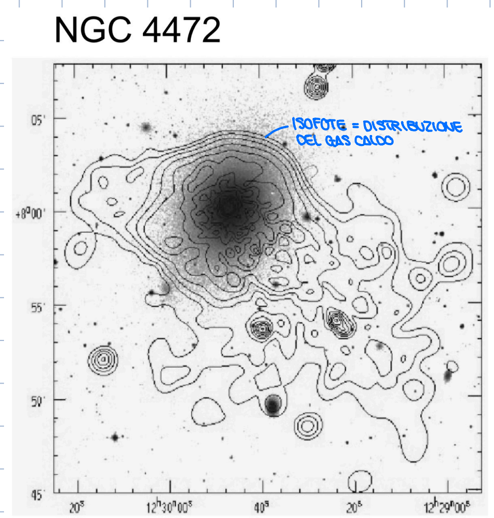
e eguagliandolo a (*) si ottiene $\frac{k}{m}\left(\frac{d\rho}{dr}T+\rho\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{G\rho M(r)}{r^2}$

$$\Rightarrow M(r) = -\frac{k}{Gm}\frac{r^2}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dr}T+\rho\frac{dT}{dr}\right) = -\frac{k}{Gm}\,rT\left(\frac{r}{\rho}\frac{d\rho}{dr}+\frac{r}{T}\frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\rho}}\frac{dT}{dr}\right)$$

$$= -\frac{k}{Gm}\,rT\left(\frac{d\ln\rho}{dr}+\frac{d\ln T}{d\ln r}\right)$$

$\Longrightarrow$ da $\rho=\rho(r)$ e $T=T(r)$ del gas si può derivare $M=M(r)$ del sistema di cui il gas è tracciante




MASSA DELLE STELLE PIÙ ALTA DELLA MASSA TOTALE

$\Longrightarrow$ ho posto ipotesi di simmetria sferica ma il tracciante non è disposto con simmetria sferica come si vede dalle isofote

## GALASSIE A DISCO : DISCO DI GAS

Gas in equilibrio dinamico con dispersione di velocità trascurabile si muove su orbite circolari a velocità $V(R)$

$\Longrightarrow \frac{V^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2}$ → andamento kepleriano, la massa decresce con l'aumentare del raggio

accelerazione centripeta

DISTRIBUZIONE SFERICA → elemento di volume: guscio infinitesimo

(densità $\rho(r)$)

$$dM(R) = 4\pi r^2\,dr\,\rho(r)$$

$$M(R) = \int_0^R 4\pi r^2\,dr\,\rho(r)$$

$\Longrightarrow V^2(R) = \frac{4\pi G}{R}\int_0^R \rho(r)r^2\,dr$ → $V(R)$ si ricava dalle osservazioni

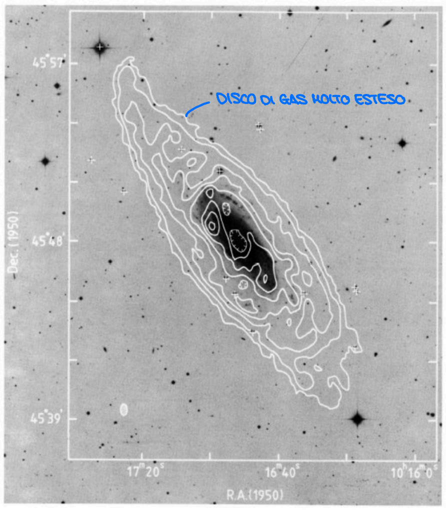
DISTRIBUZIONE SU ELLISSOIDI (densità $\rho(r)$ e rapporto assiale intrinseco $q=c/a$)

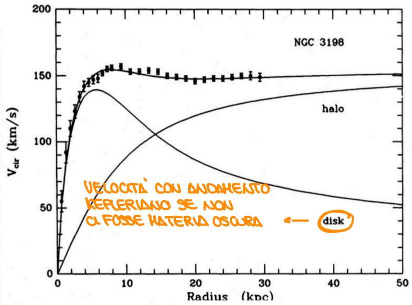
$\Longrightarrow V^2(R) = 4\pi G\int_0^R \frac{q\rho(r)r^2\,dr}{(R^2-(1-q^2)r^2)^{1/2}}$ $\Longrightarrow$ misurato $V(R)$ si ricava $\rho(R)$ e dunque $M(R)$

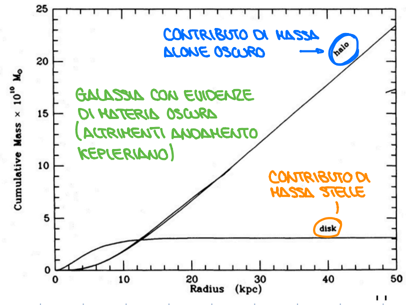
[ESPRESSIONE CORRETTA, SUL LIBRO È SBAGLIATA]

[ideale: usare più traccianti]

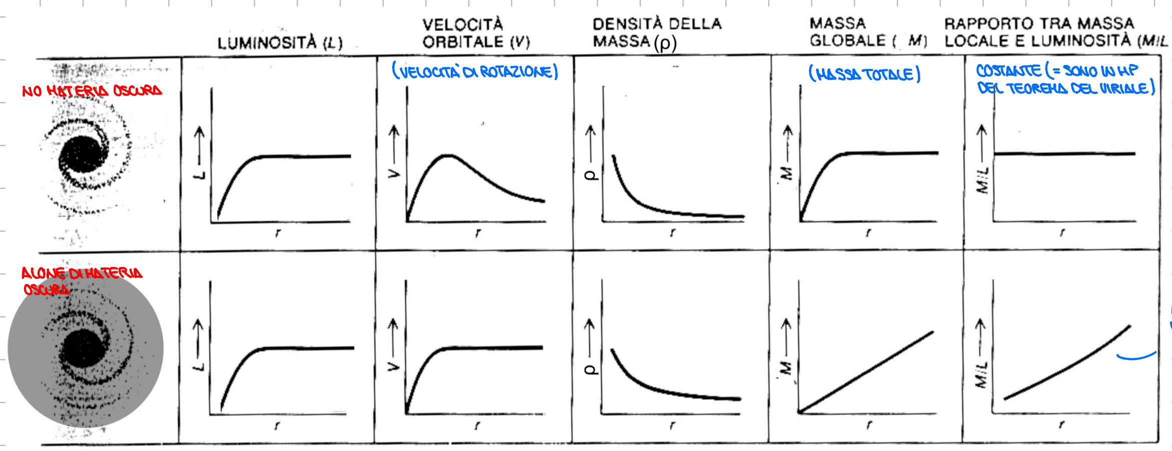
NGC3198 →




Differenza tra galassie con e senza materia oscura:




ALONE DI MATERIA OSCURA DISTRIBUITA DIVERSAMENTE RISPETTO ALLE STELLE

[ULTIMO GRAFICO VEDI SLIDE]