

1 Universo locale e le sue principali componenti

1.1 Barioni condensati in galassie

L'unità di misura fondamentale del cosmo è 1 Mpc, ciò deriva dalla misurazione della distanza della galassia di Andromeda, la più vicina galassia esterna di grandi dimensioni confrontabili con quella della Via Lattea. Queste due galassie non costituiscono un sistema unico ma fanno parte di un piccolo ammasso di galassie, il Gruppo Locale, di cui sono le componenti di massa e dimensione maggiore, nel quale sono comprese una trentina di galassie di piccole dimensioni (denominate *nane*).

Il Gruppo Locale costituisce un'entità strutturalmente e dinamicamente ben definita circondata da spazio vuoto. A sua volta esso si trova in prossimità di un sistema galattico di dimensioni maggiori: a 18 Mpc si trova infatti l'**ammasso della Vergine**, una concentrazione di galassie con dimensioni angolari di circa 6 (0.1 rad), che corrispondono a circa 2 Mpc di diametro. Esso risulta tuttavia difficilmente visibile dal momento che si tratta di una distribuzione molto ampia di galassie di debole magnitudine apparente.

L'Universo è popolato da numerose strutture di questo genere che costituiscono una delle componenti fondamentali del cosmo.

L'ammasso della Vergine ha una morfologia irregolare ed un relativamente molto alto numero di galassie a spirale. Ammassi di questo genere sono frequentemente caratterizzati da una distribuzione di galassie più regolare e concentrata e vengono chiamati "**ammassi ricchi**": in essi sono presenti galassie dei primi tipi morfologici in numero molto elevato, mentre negli **ammassi irregolari** la loro frazione è minore a vantaggio di galassie a spirale.

Un caso particolare è la galassia super-gigante M87, il cui alone si estende fino a 100 kpc: la sua enorme massa e dimensioni sono dovute alla cannibalizzazione di molte altre galassie che si sono fuse a causa di effetti dinamici.

Un altro ammasso di galassie molto conspicuo è **Abell 1689**, il quale si trova alla distanza di 670 Mpc e mostra un'enorme concentrazione di galassie nel nucleo.

A loro volta l'ammasso della Vergine e Abell 1689 sono elementi di un tessuto universale formato da strutture di massa e dimensioni sempre maggiori al crescere della scala.

Si nota quindi che l'elemento costitutivo fondamentale dell'Universo, le galassie, tendono a raggrupparsi tra loro, realizzando una gerarchia di strutture, la cosiddetta **Struttura su Grande Scala** (*Large Scale Structure*)

1.2 Plasmi diffusi e raggi cosmici

1.2.1 Plasmi diffusi

L'Universo locale include molte altre componenti non visibili in ottico. Mentre stelle e galassie corrispondono a plasma condensato gravitazionalmente in una gerarchia di strutture, si ipotizza la presenza di grosse quantità di plasmi non condensati, più o meno omogeneamente diffusi (massa media di materia inclusa nei plasmi diffusi circa 5 volte superiore alla massa di gas condensato in stelle e galassie). Tali plasmi sono difficilmente individuabili dal momento che, avendo temperature molto elevate emettono per free-free solo minima parte del loro flusso in ottico e producono inoltre radiazione diffusa di bassa brillanza superficiale.

1.2.2 Raggi cosmici

Sono flussi di particelle di elevata energia. Si distingue tra **raggi cosmici primari**, di natura extraterrestre, e **raggi cosmici secondari**, dovuti all'interazione dei primari con molecole dell'atmosfera terrestre che producono nuove particelle con un effetto a cascata.

I raggi cosmici primari sono costituiti da protoni (90%), nuclei di elio (9%) ed elettroni (1%), in minima parte sono presenti anche elementi leggeri, nuclei pesanti e antimateria (positroni e antiprotoni), valutata attorno al 0.01%.

Sono talvolta considerati raggi cosmici anche fotoni gamma di altissima energia prodotti da sorgenti extragalattiche, noi tuttavia li comprendiamo nella radiazione di fondo.

Lo spettro in energia (numero di particelle incidenti per unità di energia, per unità di tempo, per unità di superficie e di angolo solido) dei raggi cosmici primari è ben descritto da una legge di potenza:

$$F(E) \propto E^{-\alpha}$$

con $\alpha = 2.7$ per valori dell'energia inferiori a $\approx 10^{15}$ eV mentre per valori maggiori si ha $\alpha = 3$. Il punto in cui si ha il cambio di pendenza viene denominato ginocchio. Per valori ancora maggiori ($\approx 10^{18} - 10^{19}$ eV) l'esponente diminuisce dando luogo ad un ulteriore cambio di pendenza.

I raggi cosmici di più alta energia si ipotizza vengano generati entro la Galassia e siano prodotti da supernove.

1.3 Radiazioni cosmiche di fondo

I fotoni costituiscono il veicolo principale di informazione per indagare l'Universo. La velocità finita della luce impone un limite all'osservabilità ma permette al contempo l'esplorazione del lontano passato per oggetti sufficientemente lontani.

Una serie di scoperte ha mostrato che l'Universo è sede di un mare diffuso di fotoni di varie energie e lunghezze d'onda che fluiscono continuamente per ogni punto dello spazio-tempo. Il primo di questi fondi cosmici ad essere scoperto è stato il fondo in raggi X. Effettuando la scansione del cielo con un telescopio si avranno tre componenti per il flusso rivelato: un eventuale fondo fotonico diffuso ed isotropo, un segnale dovuto a sorgenti molto deboli che non possono essere singolarmente risolte e il rumore strumentale.

L'intensità dei fondi cosmici di radiazione è quantificata dalla funzione spettrale $I(\nu)$, detta **brillanza superficiale**. Assumendo che essa non vari con la direzione, ciò corrisponde ad una densità d'energia radiante ε_γ di fotoni di fondo ad una certa frequenza, data da:

$$\varepsilon = \frac{4\pi}{c} I(\nu) \cdot \bar{\nu}$$

dove $\bar{\nu}$ è la frequenza media di questi fotoni. L'unità di misura di ε_γ è quindi unità di energia radiante per unità di volume (erg cm^{-3}). In Fig. 1 si ha una rappresentazione dello spettro complessivo delle radiazioni cosmiche di fondo

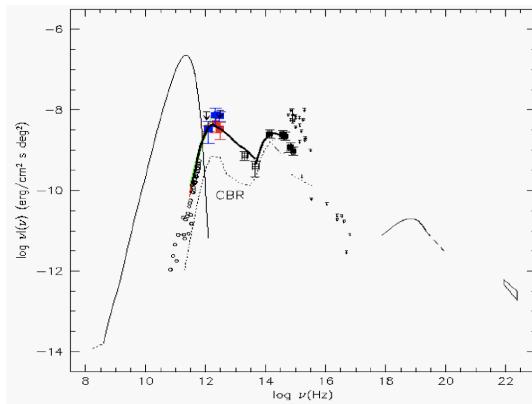


Figura 1: Intensità spettrale della radiazione cosmica di fondo su un vasto intervallo di frequenza

dal radio ai raggi gamma più energetici, su un grande intervallo di energia fotonica. La componente fotonica più rilevante è il fondo cosmico scoperto nelle microonde che ha un perfetto spettro di corpo nero ed un elevato grado di isotropia angolare. Si notano inoltre il fondo radio, il fondo infrarosso e quello ottico, il fondo X e gamma.

Si calcola facilmente la densità di energia dei fondi cosmici, ampiamente dominati dal fondo delle microonde con picco di frequenza a $2 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$:

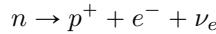
$$\varepsilon_\gamma = 400 \text{ cm}^{-3} \cdot h\bar{\nu} = (400)(6.6 \cdot 10^{-27})(2 \cdot 10^{11} \text{ Hz}) = 5.3 \cdot 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3} \simeq \frac{1}{3} \text{ eV cm}^{-3}$$

oppure in termini di massa equivalente:

$$\rho_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma}{c^2} \simeq 5.3 \cdot 10^{-13} \cdot 10^{-21} \simeq 5.3 \cdot 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$$

1.4 Neutrini cosmici

I neutrini sono particelle elementari che viaggiano ad una velocità prossima a quella della luce vista la loro piccola massa, la cui esistenza fu postulata a Pauli e Fermi per spiegare il disequilibrio di energia nel processo di decadimento β dei nuclei radioattivi:



Hanno una probabilità di interazione con la materia estremamente bassa dal momento che sono soggetti all'interazione nucleare debole. Telescopi neutrinici utilizzano tipicamente grandi vasche di liquidi poste sotto terra per eliminare il rumore dovuto ai raggi cosmici. La rivelazione utilizza l'effetto Cherenkov (piccoli flash di luce prodotti dalla cascata di elettroni provocata dal neutrino, oppure trasformazioni nucleari negli atomi del liquido). È possibile in questo modo ricostruire l'energia e la direzione di arrivo del ν .

1.5 Antimateria

L'esistenza di significative quantità di antimateria è uno dei rilevanti problemi della cosmologia dal momento che, se ve ne fosse in quantità rilevante, alle superfici di contatto tra volumi occupati da materia normale e antimateria si verificherebbero enormi rilasci di energia e grandi quantità di luce facilmente rivelabili.

Le teorie fisiche sulle prime fasi dell'espansione cosmica prevederebbero un eguale numero delle due tipologie di particelle. Si deve dunque essere verificata un'asimmetria tra il numero di particelle e antiparticelle molto presto durante l'espansione che, a seguito di annichilazioni, ha portato all'attuale universo dominato da materia normale. Tale processo viene chiamato **genesi dei barioni**.

Uno dei più importanti studi sull'antimateria sta utilizzando lo strumento *Alpha Magnetic Spectrometer* (AMS) a bordo della ISS, il quale sta cercando di fornire dei limiti alla quantità di antimateria nei raggi cosmici. Attualmente i limiti misurati sono di particella di antimateria su 1 milione di materia.

1.6 Materia oscura

Si tratta di materia non barionica di cui esiste ampia evidenza in numerosi oggetti cosmici. Si tratta di particelle che non interagiscono con il campo elettromagnetico e con le altre particelle se non in modo gravitazionale e non sono dunque osservabili se non andando ad analizzare gli effetti gravitazionali da esse prodotti.

Particelle candidate sono l'**assione** e il **neutralino**, e vengono anche denominate WIMPS (*Weakly Interacting Massive Particles*).

Osservazioni cosmologiche indicano che circa l'80% della materia gravitante nell'Universo sia costituita da materia oscura.

L'esperimento AMS ha rivelato un eccesso di antimateria nella forma di positroni e^+ rispetto agli elettroni, eccesso

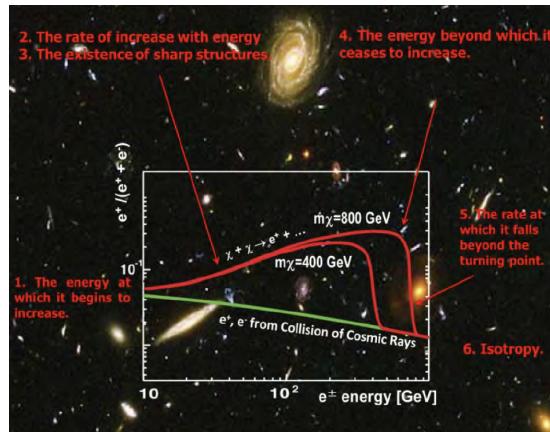


Figura 2: La curva in verde mostra il rapporto aspettato nel caso di una produzione di antielettroni per collisioni di raggi cosmici mentre le curve in rosso sono i dati di AMS che mostrano un chiaro eccesso forse spiegabile come effetto della presenza diffusa di materia oscura

che mostra un andamento preciso con l'energia riportato schematicamente in Fig. 2.

Vi sono ulteriori ricerche in corso da parte del satellite in raggi Gamma *Fermi/GLAST* e da altri telescopi gamma per individuare radiazione ad alta energia prodotta dal decadimento di particelle di materia oscura, osservando in particolare nelle direzioni di cielo dove ci si aspettano presenti grandi e concentrati quantitativi di materia oscura (il centro dinamico della nostra Galassia, l'alone della galassia di Andromeda, il centro dell'ammasso della Vergine, etc.).

1.7 Radiazione gravitazionale

Le onde gravitazionali sono perturbazioni della metrica spazio-temporale che si propagano alla velocità della luce e sono previste dalla teoria della Relatività Generale. Esse si generano da variazioni violente del potenziale gravitazionale (ad esempio nel collasso di stelle massive, nelle esplosioni stellari, nella fase di coalescenza di sistemi binari stellari, di stelle di neutroni, o di buchi neri massivi e super-massivi, ad esempio durante scontri e merging di galassie). Le modalità di distorsione dello spazio sono illustrate in Fig. 3. È anche possibile che esista un fondo di onde gravitazionali generate durante il Big Bang che potrebbe aver lasciato tracce nello stato di polarizzazione dei fotoni della radiazione di fondo primordiale nelle microonde. Un campo di onde gravitazionali è dunque una verosimile componente cosmica, anche se con un'energia trascurabile.

L'esistenza delle onde gravitazionali è stata studiata con una varietà di esperimenti terrestri dedicati alla rivelazione diretta tramite antenne altamente isolate, in grado di rivelare variazioni periodiche del potenziale gravitazionale.

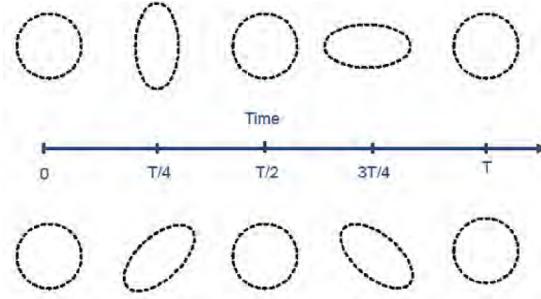


Figura 3: Le due modalità di oscillazione dello spazio investito da un'onda gravitazionale. Lo spazio si contrae e si dilata con queste oscillazioni periodiche

2 Una componente cosmologica fondamentale: le galassie normali

2.1 Tipologie di galassie

Le galassie costituiscono un elemento fondamentale dell'Universo globale, al di fuori della nostra Galassia. Le loro dimensioni tipiche sono di 10-30 kpc mentre la distanza tipica tra loro è di alcuni Mpc. La densità media di barioni all'interno delle galassie è $\sim 10^8$ volte superiore rispetto alla media universale.

Le galassie sono strutture ben organizzate caratterizzate da una limitata varietà di specie morfologiche. Sono utilizzate come traccianti dell'Universo e delle sue strutture. Sono ben visibili in ottico anche a grandi distanze e l'osservazione delle loro emissioni integrate ha un ruolo fondamentale nella comprensione della struttura su grande scala dell'universo.

2.1.1 La galassia prototipo: la Via Lattea

La più vicina galassia è quella che contiene il Sistema Solare, ovvero la Via Lattea. In Fig. 4 si ha uno schema delle varie componenti.

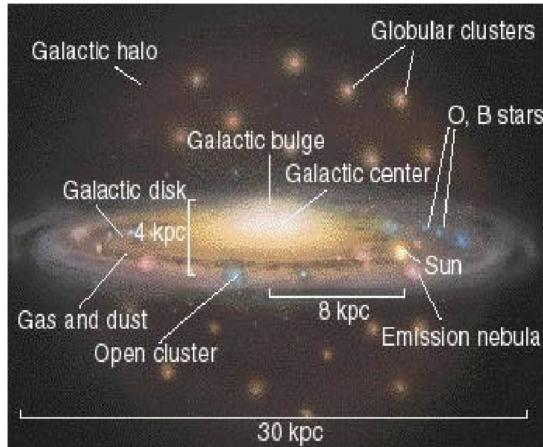


Figura 4: Schema delle componenti della Via Lattea

L'alone galattico. In esso troviamo gli ammassi globulari più antichi (età dedotte dallo studio del diagramma HR). Le osservazioni mostrano che l'alone è stato il primo ambiente galattico a formarsi. Le stelle di alone sono povere di elementi pesanti e mostrano moti orbitali con forti componenti radiali e scarso momento angolare. Si hanno due possibili spiegazioni per queste evidenze:

- il gas originario aveva forti moti radiali e le stelle si sono formate durante la fase di collasso gravitazionale del gas primordiale, un modo di formazione che va sotto il nome di *collasso monolitico*
- successivamente alla formazione, le stelle hanno subito disturbi dinamici (collisioni gravitazionali, scontri e fusioni: *merging* tre galassie) che hanno portato a disordinare i loro moti orbitali. Questa ipotesi si connette al modello di formazione per *clustering gerarchico tramite merging*

Disco spesso, nucleo e bulge. A causa del momento angolare, il gas che non è stato trasformato in stelle nella fase di formazione dell'alone è collassato in una struttura schiacciata discoidale sorretta dalla rotazione. Si tratta di stelle

piuttosto ricche di metalli. Lo spessore considerevole del disco è probabilmente dovuto all'effetto di *merging* e interazione tra galassie, che hanno prodotto un riscaldamento dei moti orbitali delle stele lungo la coordinata ortogonale al piano del disco. Età e metallicità delle popolazioni stellari risultano assumere valori intermedi.

Disco sottile. La componente più giovane dovuta al collasso del gas residuo in piano di simmetria sostenuto dalla rotazione. Il gas è tuttora presente in circa il 10% della massa galattica. Stelle giovani e blu si addensano nei bracci a spirale.

La Via Lattea contiene tutte le principali componenti morfologiche galattiche ovvero la **componente sferoidale**, che domina le ellittiche ed S0, e la **componente di disco**, importante nelle galassie a spirale.

Passando dalle ellittiche alle spirali e irregolari si nota una progressiva diminuzione della componente di bulge e un aumento di quella di disco, quantificabile con il rapporto disco/bulge.

Vi è una forte associazione tra la morfologia galattica e le proprietà delle popolazioni stellari. I bulge sono associati a stelle di popolazione II (vecchie) mentre i dischi a stelle di popolazione I (giovani).

Anche il contenuto di mezzo interstellare (gas idrogeno neutro, ionizzato e molecolare, regioni HII e polveri) è strettamente correlato con la morfologia (galassie sferoidali quasi prive, galassie a disco con importante residuo).

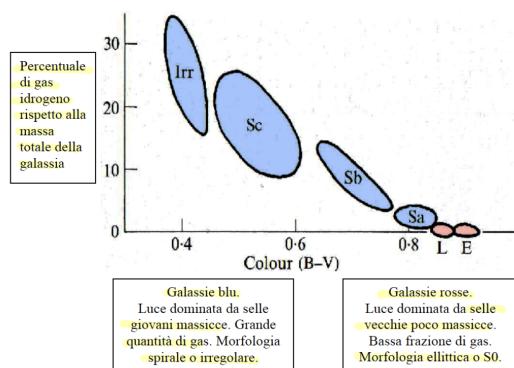


Figura 5: Andamento della frazione di gas idrogeno in funzione del colore integrato delle varie tipologie galattiche

2.1.2 Popolazioni stellari in galassie

Le caratteristiche delle popolazioni stellari e quindi le caratteristiche fotometriche e quelle fisiche delle galassie di cui fanno parte dipendono dall'equilibrio tra autogravità delle stelle e produzione di energia tramite processi di combustione termonucleare. L'efficienza di queste ultime dipende dalla temperatura e pressione del plasma stellare, a loro volta determinati dalla massa della stella.

Il diagramma utilizzato per descrivere le popolazioni stellari. è il diagramma **Hertzsprung-Russel** (HR), che può essere espresso in termini dei due osservabili stellari: la magnitudine assoluta contro il colore, che in quantità fisiche corrispondono alla luminosità contro la temperatura superficiale. La maggior parte delle stelle nel diagramma HR si colloca lungo la sequenza principale, durante la fase di bruciamento dell'idrogeno in elio nel nucleo.

2.2 Relazioni strutturali fondamentali delle stelle

2.2.1 Equilibrio idrostatico e termodinamico. Equipartizione energetica

Ricaviamo alcune leggi strutturali per stelle sulla sequenza principale assumendo che i tempi-scala evolutivi siano molto lunghi, il che implica una buona ripartizione delle energie in gioco e uno spettro approssimabile a quello di corpo nero. Assumiamo inoltre una relazione tra materia e radiazione governata dall'interazione tra campo elettrico ed elettroni liberi con una probabilità di interazione fotone-elettrone (sezione d'urto, area di collisione tra fotoni ed elettroni) pari a $\sigma_T = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$, indipendente dalla frequenza dei fotoni.

Consideriamo una stella di densità uniforme e assumiamo equilibrio viriale tra l'energia potenziale gravitazionale e l'energia cinetica delle particelle del gas stellare. Assumiamo inoltre come misura dell'energia cinetica media delle particelle la temperatura T del gas. Ciò implica che energia gravitazionale ed energia termica totale della stella siano circa eguali:

$$GM^2/R \approx nkTR^3$$

con n densità del gas e R raggio stellare. Poiché $n \approx M/R^3$, sostituendo si ha:

$$T \approx M^2/R^4 \cdot R^3/M \cdot M/R$$

2.2.2 Flusso di radiazione nella stella. Teoria semplificata del random-walk

Se i fotoni diffondono nella stella con cammino libero medio pari a:

$$\lambda = (n\sigma_T)^{-1} \approx R^3/M$$

dove σ_T è la sezione d'urto Thompson degli elettroni, il tempo scala con cui i fotoni escono dalla stella si può determinare sulla base della teoria del random-walk.

Ipotesi: in un mezzo di particelle cariche i fotoni vengono generati nella posizione A e si muovono casualmente collidendo di tanto in tanto con le particelle con una probabilità data dalla sezione d'urto Thompson σ_T , cui corrisponde il cammino libero medio λ . Lo spostamento medio è nullo (sommatoria di vettori con direzione e moduli

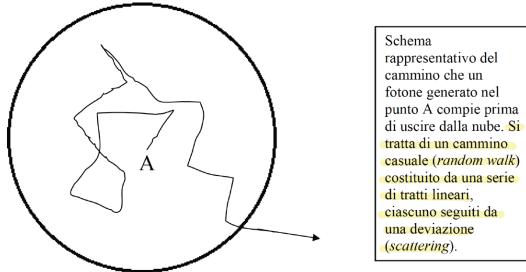


Figura 6: Random-walk

casuali) ma l'allontanamento netto (quanto il fotone si sarà allontanato in qualunque direzione rispetto all'origine) sarà diverso da zero e ottenibile dalla somma quadratica:

$$\langle R^2 \rangle = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 + 2r_1r_2 + 2r_1r_3 + \dots = N_\lambda^2$$

dove i termini misti si annullano poiché in media $\langle r_m \cdot r_n \rangle = 0$ per cui l'allontanamento netto non sarà dato da $\langle R \rangle = N\lambda$, ma piuttosto da $\sqrt{\langle R^2 \rangle} = \sqrt{N}\lambda$. Si tratta di un argomento statistico che riguarda medie su grandi numeri di particelle materiali e di fotoni. L'allontanamento medio di un insieme di fotoni dall'origine A può essere rappresentato visivamente da una serie di gusci sferici concentrici attorno al punto A, che stabiliscono la posizione media dei fotoni generati in A, di raggio crescente al trascorrere del tempo t :

$$R \propto N^{1/2} \lambda \propto t^{1/2}$$

Possiamo ora confrontare questo allontanamento netto compiuto dal fotone con il raggio R della stella e il tempo scala t che impiega la luce ad uscir dalla stella stessa. Risulta quindi che il numero di scattering necessario al fotone per uscire dalla stella è:

$$N_{scatt} = R^2/\lambda^2$$

mentre il tempo impiegato per uscire:

$$t = s/v \Rightarrow t = \frac{N_{scatt}\lambda}{c} = \frac{R^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\lambda}{c} = \frac{R^2}{\lambda c}$$

Questo è pari anche al tempo che la stella impiegherebbe per spegnersi se venisse meno la fonte di energia che la alimenta.

2.2.3 Scattering Thomson: diffusione fotonica su elettroni liberi

È il principale meccanismo di interazione tra fotoni e materia in astrofisica, ci limitiamo al limite classico e quindi a fotoni di energia minore rispetto all'energia a riposo dell'elettrone ovvero 511 keV, ed elettroni essenzialmente fermi o in moto non relativistico.

Consideriamo il caso più semplice di un elettrone investito da un'onda piana **linearmente polarizzata**. La configurazione geometrica della diffusione fotonica è rappresentata in Fig. 7 La forza dovuta ad un'onda di questo tipo è:

$$F = e\hat{\varepsilon}E_0 \sin \omega_0 t$$

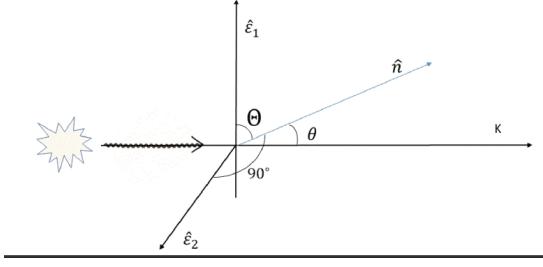


Figura 7: Configurazione geometrica dello scattering Thomson

di conseguenza l'equazione dinamica per il moto dell'elettrone è data da $F = m\ddot{r}$ e risulta:

$$\ddot{r} = \frac{e\hat{\varepsilon}E_0}{m} \sin \omega_0 t$$

con una soluzione per l'andamento temporale della posizione data da:

$$\vec{r}(t) = -\frac{eE_0}{m}\hat{\varepsilon} \sin \omega_0 t / \omega_0^2$$

Ricordiamo la formula di Larmor che indica la potenza della radiazione emessa da una particella carica non relativistica quando viene accelerata:

$$P = \frac{2q^2\dot{r}^2}{3c^3}$$

Usando la formula di Larmor in funzione dell'accelerazione della particella, la potenza emessa dall'elettrone è:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2\ddot{r}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m^2 c^3} \sin^2 \Theta$$

ed è pari alla potenza diffusa dall'elettrone entro l'angolo solido. Confrontandola con il flusso di energia radiante trasportata dalla radiazione incidente (teorema di Poynting):

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

è possibile definire una sezione d'urto differenziale dal rapporto delle due.

La sezione d'urto $d\sigma$ è definita come la frazione dell'energia incidente che è diffusa entro l'angolo solido $d\Omega$:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle &= \langle S \rangle \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{cE_0^2}{8\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} \\ \left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle_{pol} &= \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \Theta = r_0^2 \sin^2 \Theta \\ \text{con } r_0^2 &= \frac{e^2}{mc^2} \text{ (raggio classico dell'elettrone)} \end{aligned}$$

(Θ è l'angolo tra la direzione di oscillazione dell'elettrone e la direzione dell'osservatore \hat{n}). Integrando su tutte le direzioni otteniamo la **sezione d'urto totale di Thomson**

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \simeq 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

È facile ora calcolare la sezione d'urto nel caso di **radiazione non polarizzata**. La si può considerare come sovrapposizione lineare di due onde indipendenti linearmente polarizzate lungo le direzioni $\hat{\varepsilon}_1$ e $\hat{\varepsilon}_2$ in Fig. 7. La quantità differenziale $d\sigma/d\Omega$ sarà la media per le due, una componente che esce ad un angolo di $\pi/2$, l'altra con un angolo Θ :

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\Omega} \right\rangle_{non\ pol} = \frac{1}{2} \left(\left\langle \frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega} \right\rangle_{pol} + \left\langle \frac{d\sigma(90)}{d\Omega} \right\rangle_{pol} \right) = \frac{r_0^2}{2} (1 + \sin^2 \Theta)$$

L'integrale lungo tutte le direzioni mostra che la sezione d'urto totale rimane:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \simeq 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$$

Ci sono tre importati cose da notare riguardo questo processo:

1. L'energia e la frequenza dei fotoni in uscita è identica a quella di entrata, solo la direzione è modificata
2. La sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\Omega$ è simmetrica rispetto alla trasformazione $\Theta' \rightarrow -\Theta$, ovvero ha valori simmetrici avanti-indietro. Il processo di scattering Thomson è sostanzialmente isotropo
3. La radiazione diffusa ha un certo grado di polarizzazione lineare, anche se quella incidente è perfettamente non polarizzata. Il grado di polarizzazione e l'angolo di polarizzazione dipende dall'angolo della visuale Θ

2.2.4 Applicazioni alle strutture stellari

Ammettiamo che viga nella stella una condizione di equilibrio totale, di corpo nero. Flusso totale F , intensità della radiazione I e densità di energia fotonica sono legati da:

$$F = \int \cos \vartheta I_\nu d\nu d\Omega = \sigma T^4 \sim \text{densità energia fotonica} \cdot c \quad (1)$$

L'energia radiante totale contenuta nella stella sarà quindi il prodotto

$$E_{tot} \propto (\text{densità energia fotonica}) \cdot R^3 = \sigma T^4 \cdot R^3$$

mentre la luminosità bolometrica L della stella potrà essere calcolata come rapporto tra il contenuto energetico totale a disposizione e tempo scala di uscita dei fotoni:

$$L \sim \frac{E_{tot}}{t} \propto R^3 T^4 R^{-2} \cdot \lambda = R T^4 \lambda$$

Sostituendo l'espressione per λ , dalla formula del random walk si ha:

$$L \propto R T^4 \lambda \propto \frac{R^4 T^4}{M}$$

e, dal momento che $T \sim M/R$ allora:

$$L \propto M^3$$

relazione consistente con le osservazioni di stelle sulla sequenza principale del diagramma HR, come visibile in Fig. 8. Ovviamente da Eq. 1 possiamo esprimere la luminosità come:

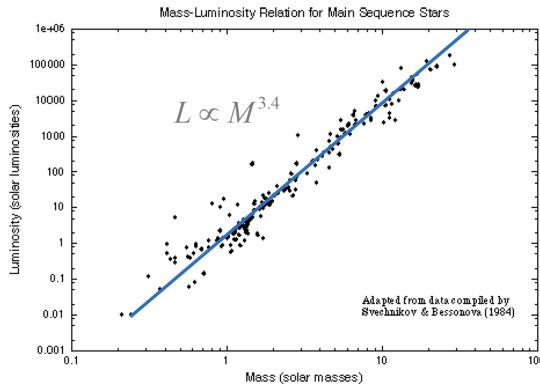


Figura 8: Dati sulla relazione massa-luminosità di stelle della sequenza principale

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

da cui, combinando con $T \sim M/R$ si ottengono le altre due importanti relazioni:

$$T \propto M^{1/2} \quad \text{e} \quad R \propto M^{1/2}$$

Per stelle di piccola massa la relazione massa-luminosità tende ad irripidirsi diventando:

$$L \sim M^{3.4}$$

Questo si spiega con il fatto che l'interazione tra fotoni e materia, in stelle di piccola massa ed alta intensità, coinvolge processi diversi dallo scattering elettronico: in particolare il cammino libero medio λ diventa dipendente dalla

temperatura del mezzo $\lambda \sim T^{3.5}/n$.

Le relazioni strutturali fondamentali delle stelle si possono quindi riassumere nello schema seguente:

$$L \propto M^{3.4}, \quad T \propto M^{0.5}, \quad L \propto T^{6.8}, \quad R \propto M^{0.5}$$

che facendo riferimento ai valori misurati per il Sole diventano:

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.4} \quad \text{e} \quad \frac{T}{5800 \text{ K}} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{0.5} \quad (2)$$

2.3 Efficienza ε della produzione di energia in stelle, tempi di vita stellare

Definiamo l'efficienza energetica ε della trasformazione (massa a riposo) \rightarrow (energia) facendo riferimento alla relazione tra massa ed energia $\varepsilon = E/mc^2$, ovvero

$$\frac{dE}{dt} = L = \varepsilon \dot{M} c^2 = \varepsilon c^2 \frac{dM}{dt} \quad (3)$$

Il bruciamento termonucleare di idrogeno in elio nelle stelle avviene con una efficienza ε che si calcola nel seguente modo. Per ogni grammo di H combusto vengono prodotti $6.3 \cdot 10^{14}$ erg di energia nella combustione $4H \rightarrow He$, ciò è dovuto al fatto che la massa di 4 idrogeni è di poco superiore alla massa di un nucleo di He e la differenza è rilasciata sotto forma di energia di fotoni gamma. Reazioni successive di bruciamento di He in C producono una frazione trascurabile di energia. L'efficienza energetica ε relativa alla conversione di una certa quantità di massa stellare di idrogeno in elio si ha:

$$\varepsilon = E/mc^2 = 6 \cdot 10^{18}/c^2 = 6.3 \cdot 10^{-3}$$

Questo è un valore limite dal momento che nelle stelle viene bruciata solo una piccola parte di idrogeno residente nelle zone nucleari: tale frazione dipende da quanto è esteso il nucleo convettivo della stella:

- $M = 1 M_\odot$: il nucleo convettivo è piccolo o nullo e solo circa il 15% della massa di H della stella subisce il bruciamento nucleare $\Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_\odot = 0.001$
- $M = 20 M_\odot$: il nucleo è pari al 50% e $\varepsilon = 0.003$
- $M = 50 M_\odot$: il nucleo arriva al 80% e $\varepsilon = 0.006$

Per una popolazione mista che includa stelle di varia massa, i valori dell'efficienza dipendono dalla forma della funzione iniziale di massa delle stelle IMF (fornisce la distribuzione in massa delle stelle al momento della generazione della popolazione, numero di stelle con una determinata massa) e $\varepsilon \sim \varepsilon_\odot$.

In generale la dipendenza di ε dalla massa si può rappresentare con la legge:

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_\odot (M/M_\odot)^{0.5}$$

con $\varepsilon_\odot = 0.001$ che implica, ad esempio, per una supergigante di $100 M_\odot$, un'efficienza di $\varepsilon = 0.01$. Da Eq. 3 si può calcolare il tempo di vita di una qualunque stella.

In particolare, prendendo i valori per il Sole $L = L_\odot = 4 \cdot 10^{33}$ erg/s, $M = M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ gr e $\varepsilon_\odot = 0.001$ si ottiene un'età per il Sole di:

$$t_\odot = L/\varepsilon c^2 \approx 1.5 \cdot 10^{10} \text{ yrs}$$

ove in questo calcolo si assume $dM/dt = \text{cost}$, ottima approssimazione di quanto accade nella sequenza principale. Calcoliamo il tempo di vita di una qualunque stella. Da Eq. 2 e Eq. 3, integrando sul tempo la $L = \varepsilon c^2 dM/dt$, si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon M c^2 &= \int_0^{\Delta t} L dt = L \cdot \Delta t = L_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.4} \Delta t \\ \varepsilon_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{0.5} M c^2 &= \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.4} L_\odot \Delta t \\ \text{da cui} \\ \Delta t &= \varepsilon_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{2.9} \frac{M c^2}{L_\odot} = \varepsilon_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2.9} \frac{M}{M_\odot} \frac{M_\odot L_\odot}{c} \\ \Delta t &= \frac{\varepsilon_\odot c^2}{1.9} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1.9} \text{ sec} \simeq 1.5 \cdot 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1.9} \text{ anni} \end{aligned}$$

dove il fattore 1.9 al denominatore corrisponde al valore di L_\odot/M_\odot in unità fisiche (CGS). Questa equazione per una supergigante di $100 M_\odot$ fornisce un tempo di vita di circa 1 milione di anni.

I tempi di vita e le luminosità delle stelle dipendono quindi molto fortemente dalla loro massa:

$$\Delta t \propto M^{-2}$$

di conseguenza stelle di massa maggiore sono molto luminose e calde ma hanno un tempo di vita breve mentre una stella di massa sub-solare è poco luminosa e fredda ma ha un tempo di vita praticamente infinito. In Fig. 9 si ha una

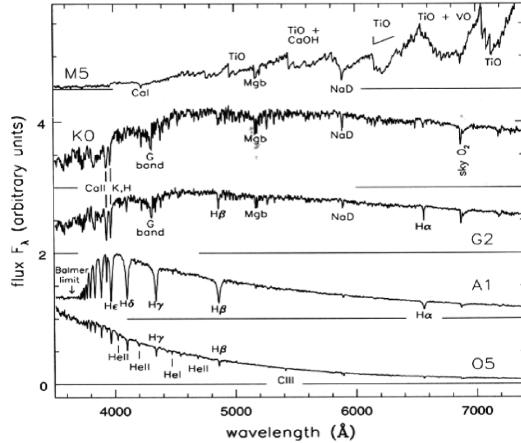


Figura 9: Spettri ottici di stelle della sequenza principale con composizione chimica all'incirca solare

sequenza di spettri stellari, dall'alto in basso aumenta la temperatura superficiale con i tipi spettrali indicati nei vari pannelli. Si noti l'incidenza degli assorbimenti molecolari in stelle nane. La Fig. 10 illustra come evolve il diagramma HR di ammassi stellari coevi con il tempo. Si hanno popolazioni stellari di ammassi di diverse età. Ammassi più giovani hanno una sequenza principale più estesa nel blu alle alte luminosità mentre per quelli più vecchi la sequenza piega a colori più rossi e luminosità più basse (M67): le stelle di massa maggiore nelle popolazioni muoiono prima ed escono dalla sequenza principale, che in questo modo si incurva a destra.

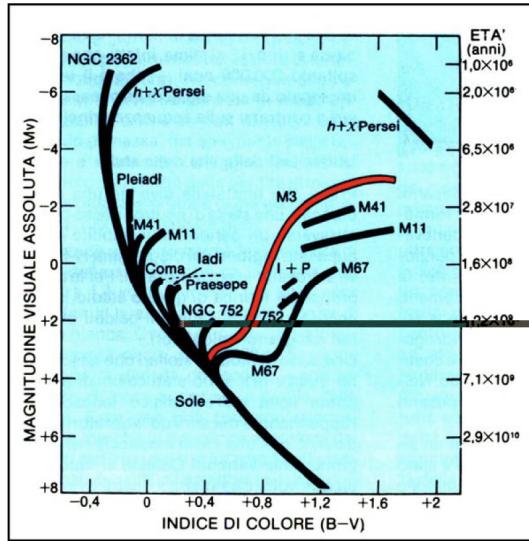


Figura 10: Diagramma HR di vari ammassi globulari di diverse età, riportati sulla stessa scala. Ammassi più vecchi hanno la sequenza principale che piega a destra a colori più rossi

2.4 Spettri e distribuzioni spettrali di energia delle galassie

Gli spettri integrati delle galassie sono costituiti dalla somma delle emissioni spettrali di numerose stelle e saranno quindi l'integrale di tutti gli spettri stellari delle popolazioni presenti nella galassia ad un certo istante di tempo. Si consideri che, in prima istanza e trascurando le righe di emissione e di assorbimento, per quanto visto gli spettri

costituiscono una sequenza monotona funzione della massa, che determina la temperatura superficiale T con spettri approssimabili in prima fase con leggi di corpo nero in funzione della sola T :

$$I(\nu) = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} [e^{h\nu/kT} - 1]^{-1}$$

(brillanza superficiale espressa ad esempio in $\text{erg}/\text{cm}^2/\text{sec}/\text{Hz}/\text{sr}$). In Fig. 11 sono riportati una serie di spettri sintetici

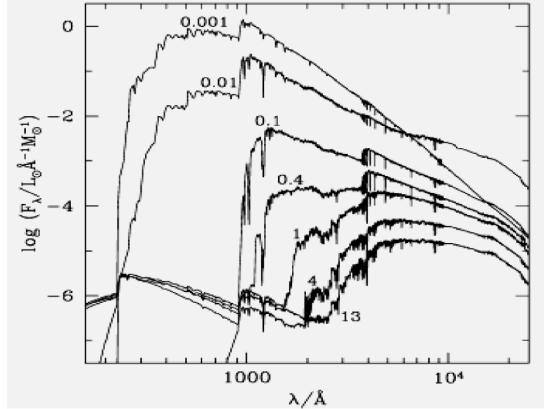


Figura 11: Spettri sintetici di popolazioni stellari singole. Le età sono riportate in miliardi di anni vicino ad ogni spettro

di popolazioni stellari singole (ovvero con stelle generate istantaneamente) a diverse età. Tali spettri consistono essenzialmente nella sommatoria di tutti gli spettri delle stelle presenti nella galassia. È visibile l'evoluzione spettrale che subisce una popolazione al trascorrere del tempo: le stelle più massicce abbondantemente presenti negli spettri giovani e che producono un flusso intenso tendono a scomparire rapidamente avendo tempi di vita molto brevi. Spettri più vecchi di 1 mld di anni appaiono arrossati e deboli. La parte dello spettro a grandi λ ($>10000 \text{ \AA}$) presenta un'evoluzione con il tempo molto pronunciata, dal momento che questa parte dello spettro è dominata dall'emissione di stelle di piccola massa con una temperatura superficiale bassa e quindi emettono solo fotoni a grande lunghezza d'onda: poiché queste stelle hanno tempi di vita molto lunghi, lo spettro in questa regione evolve poco rispetto a quelli a basse λ .

2.5 Effetti della presenza di elementi pesanti (metallicità del plasmastellare)

Con metallicità di un gas si intende la frazione media di elementi pesanti rapportata alla quantità di idrogeno nel gas. Gli elementi pesanti, chiamati anche metalli, hanno peso atomico superiore a 10 e sono principalmente C , N , O , Si , Fe . Questi atomi pesanti sono prodotti dalle stelle durante la loro evoluzione. Uno degli effetti di questi atomi è quello di modificare fortemente lo spettro rispetto alla pura emissione di corpo nero: più ci sono metalli, più profondi e numerosi sono gli assorbimenti di righe dovuti alle transizioni atomiche nelle atmosfere quindi lo spettro apparirà più eroso.

2.6 Effetti del mezzo interstellare. Assorbimento ed emissione di polveri

Il gas nelle galassie è generato dalle stelle che evolvendo producono polveri che vengono successivamente emesse nel mezzo interstellare ad esempio attraverso esplosioni di supernovae.

La presenza di un mezzo diffuso nella galassia può causare modifiche ancora più sostanziali nello spettro integrato. Tale mezzo può contenere gas e molecole in grado di produrre sequenze di righe in emissione o in assorbimento. Tali righe sono un veicolo molto importante di informazione sullo stato del mezzo interstellare e su fenomeni fisici che avvengono nella galassia.

Nel mezzo sono solitamente presenti polveri che possono modificare lo spettro integrato della galassia. Le polveri infatti assorbono parte della luce delle stelle e vengono da essa riscaldate. Tale effetto è tanto più forte quanto più corta è la lunghezza d'onda dei fotoni. In Fig. 12 è riportata la dipendenza della profondità ottica dell'estinzione da polveri dalla lunghezza d'onda fotonica. La legge di estinzione è data dall'effetto complessivo della polvere che assorbe e riscatterà la radiazione.

Data la forte dipendenza della curva di estinzione dalla lunghezza d'onda praticamente quasi tutti i fotoni blu e UV emessi dalle stelle giovani sono assorbiti dalle polveri, inoltre stelle giovani sono associate a regioni ricche di polveri, in particolare alle nubi molecolari. In Fig. 13 si ha lo spettro su un ampio intervallo spettrale di una galassia prototipo ad attiva formazione stellare (M82, galassia starbursting). La curva azzurra rappresenta lo spettro integrato

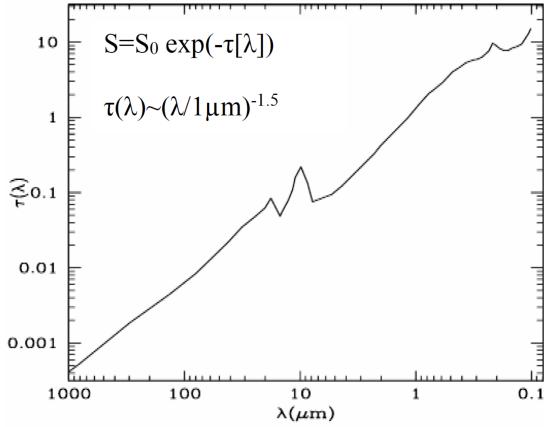


Figura 12: Curva dell'estinzione galattica, espressa come profondità ottica $\tau(\lambda)$ per un valore unitario di $E(B-V)$

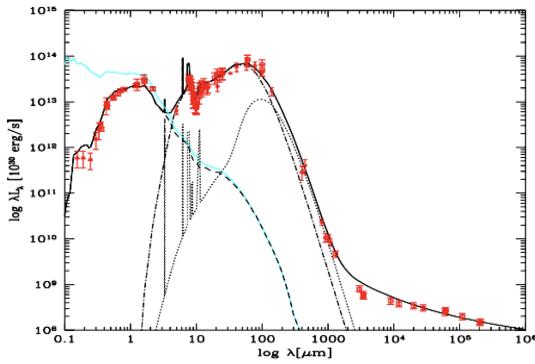


Figura 13: Spettro a larga banda del prototipo di galassia ad attiva formazione stellare M82

delle stelle e non tiene conto dell'estinzione delle polveri mentre la curva nera tratteggiata rappresenta il flusso integrato che emerge dalla galassia dopo aver considerato l'assorbimento (estinzione elevata per fotoni di λ più corta di $1 \mu\text{m}$). Se si avessero solamente dati in UV e ottico si potrebbero confondere l'età con l'estinzione; la coda nel radio è dovuta all'emissione di free-free e di sincrotrone. La curva continua è la somma di tutte le componenti e costituisce lo spettro integrato.

2.7 Teoria della sintesi spettrale di popolazioni stellari e galassie

La relazione tra le varie componenti delle galassie è schematicamente illustrata in Fig. 14 e si tratta di una serie di eventi ciclici che portano dal gas e polveri diffuse alla formazione di stelle e da queste al rilascio dei prodotti dell'evoluzione stellare di nuovo nel mezzo diffuso. Formalmente gli spettri integrati si possono calcolare tramite semplici somme di tutte le varie componenti presenti. Come prima cosa è necessario calcolare gli spettri integrati di popolazioni semplici e coeve come integrali dello spettro stellare in funzione di massa ed età sulla massa:

$$S_\lambda(t, Z) = \int_{M_i}^{M_S} IMF(M_i) \times \Sigma_\lambda(M_i, Z, t) dM_i$$

IMF : funzione iniziale di massa stellare

Σ_λ : spettro di singola stella di massa M_i , metallicità Z , al tempo t

Occorre ora una seconda integrazione sommando tutti i contributi alla luce integrata della galassia da parte di tutte le popolazioni stellari di diverse età presenti al tempo cosmico t :

$$L_\lambda(t, Z) = \int_{t_i}^t SFR(t - t') \times S_\lambda(t', Z) \times e^{-\tau_\lambda(t')} dt'$$

SFR : tasso di formazione stellare al tempo t

In questo integrale ogni popolazione di età stellare diversa è soggetta a diversi effetti di estinzione.

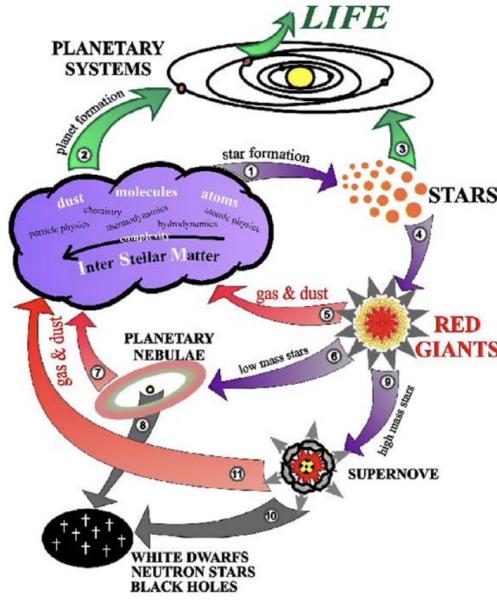


Figura 14: Illustrazione delle inter-relazioni tra le varie componenti galattiche

2.8 Analisi spettro-fotometriche di galassie

L'analisi spettrofotometrica fornisce vincoli importanti alla storia della formazione delle galassie e riguardo la loro popolazione stellare.

Se limitiamo tale analisi alle galassie locali tali vincoli possono essere indeboliti dal fatto che per questi oggetti è trascorso in media un tempo molto lungo dagli ultimi episodi di formazione stellare. Un piccolo errore nella valutazione dello spettro si potrebbe tradurre in un'ampia incertezza nei tempi di formazione delle stelle. Vincoli più decisivi possono essere ricavati dall'analisi spettrale di galassie molto lontane nello spazio-tempo, osservate dunque nel lontano passato in vicinanza degli episodi principali di formazione stellare.

Una tecnica alternativa a quella spettroscopica ad alta risoluzione, usata in particolare per oggetti deboli, è quella di misurare il flusso integrato di una galassia in diverse bande passanti, ricavando quella che viene anche chiamata *distribuzione spettrale d'energia*.

Le galassie sono strutture estese che includono diverse componenti distribuite spazialmente in modo diverso, per questo motivo lo spettro integrato di una galassia lontana fornisce una informazione integrata di difficile interpretazione. Utilizzando però la *spettroscopia spazialmente risolta* si può ricavare uno spettro per ogni diversa regione della galassia. In questo modo si possono ricavare le proprietà fisiche non solo mediate sull'intera galassia ma anche differenziate tra le sue varie componenti.

(APPENDICI VEDI DA DISPENSE)

3 Analisi statistiche di popolazioni e sorgenti cosmiche

Un problema fondamentale della cosmologia è la lontananza dell'oggetto in analisi dall'osservatore. Oltre a questo problema è il fatto di avere a disposizione un campione limitato che sta lungo la superficie del cono-luce passato nello spazio-tempo in quattro dimensioni il cui vertice coincide con la nostra posizione attuale. Da questo molto limitato campionamento dobbiamo dedurre proprietà generali sull'immensa realtà dell'oggetto della nostra indagine: è necessario quindi applicare un'analisi statistica per aggirare la limitazione cui sono soggetti i dati.

3.1 Descrittori statistici delle popolazioni di sorgenti cosmiche

La principale funzione che quantifica le proprietà statistiche di una popolazione di sorgenti astrofisiche è la **funzione di luminosità** $\phi(L)$, in funzione della luminosità e quindi $\phi(M)$ se la si considera in funzione della magnitudine assoluta in una certa banda spettrale. Tale funzione stabilisce il numero di oggetti entro l'unità di volume per unità di intervallo L o M .

Le tecniche e gli strumenti utilizzati per la determinazione delle funzioni di luminosità sono di vario tipo. Innan-

zitutto va introdotto il concetto di *campionamento completo* (o limitato in flusso) di sorgenti.

Selezione completa (limitata in flusso) di un campione di sorgenti. Si definisce selezione completa di un campione di sorgenti in una determinata banda e.m. osservativa un catalogo di tali sorgenti che includa tutti gli oggetti entro una certa area di cielo con flusso superiore ad un certo valore limite $S_{\nu lim}$.

Un campione che includa tutti gli oggetti con $S_{\nu} > S_{\nu lim}$ è detto campione limitato in flusso. Un campione così costituito ha il vantaggio di permettere analisi statistiche auto-consistenti in grado di fornire informazioni di validità generale sul cosmo e sue popolazioni di sorgenti, slegate dall'osservatore e dalle sue limitazioni. Per procedere con l'analisi statistica è quindi necessario verificare la completezza di un campione definendo il flusso limite sulla base della sensibilità dei rivelatori, la superficie del telescopio, il tempo di esposizione. La procedura standard è quella di operare una simulazione (Monte Carlo) che consiste nell'inserire sorgenti fittizie di diverso flusso in una immagine reale e verificare quali e quale flusso risultano riconoscibili nell'immagine e quali no.

Conteggi numerici di sorgenti. Si tratta di una semplice ma estremamente potente tecnica di indagine statistica di campioni di sorgenti. I conteggi stabiliscono semplicemente il numero di sorgenti $N(> S_{\nu})$ con flusso maggiore di un certo valore S_{ν} per unità di area di cielo (sr^{-1}) e come questo numero dipende dal flusso.

Dimensionalmente, se il campione è completo, in un Universo Euclideo i conteggi su tutto il cielo saranno dati da

$$N(> S_{\nu}) \propto \int \phi(L_{\nu}) dV = \int \phi(L_{\nu}) d(d^3) \approx \frac{4\pi}{3} \phi(L_{\nu}) \cdot d^3$$

dove $\phi(L_{\nu})$ è la funzione di luminosità e dove, considerando la relazione della distanza di luminosità $L_{\nu} = 4\pi d^2 S_{\nu}$, si ha:

$$d = \sqrt{\frac{L_{\nu}}{4\pi S_{\nu}}} \propto S_{\nu}^{-0.5}$$

A questa integrazione in distanza occorre aggiungerne una in luminosità L_{ν} , ovvero è necessario effettuare un integrale doppio su L_{ν} e sulla distanza d (o il redshift z):

$$N(> S_{\nu}) = \int \int dL_{\nu} dd \cdot \phi(L) 4\pi d^2$$

Supponiamo galassie tutte della stessa luminosità ossia che $\phi(L) = \delta(L)$ sia la funzione delta di Dirac e supponiamo $d \ll 4000$ Mpc in modo tale da ricadere nell'ambito della geometria euclidea. Si ottiene così, se lo spazio campionato è riempito da sorgenti in modo omogeneo,

$$N(> S_{\nu}) = \phi(L_{\nu}) \int dd \cdot 4\pi d^2 = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} \phi(L_{\nu}) L_{\nu}^{3/2} \cdot S_{\nu}^{-1.5}$$

La successiva integrazione sulla luminosità, anche nel caso di una forma generale per la $\phi(L)$, non modifica la dipendenza fondamentale dei conteggi totali dal flusso. La dipendenza dal flusso espressa dall'equazione precedente va sotto il nome di *andamento euclideo* dei conteggi.

Ragionando in termini di magnitudini, essendo $m_{\nu} \approx -2.5 \log S_{\nu} + \text{cost}$, si ha:

$$N(< m) \propto \phi(M) m^{0.6}$$

Dal punto di vista operativo dei conteggi integrali si tratta di stabilire la distribuzione cumulativa del numero di sorgenti in una certa area di cielo in funzione del loro flusso. Si ordinano quindi le sorgenti del campione completo in ordine di flusso decrescente, ottenendo quindi una stima dei conteggi da:

$$N(> S_{\nu lim}) = \sum_i \frac{1}{\Omega(S_{\nu,i})}$$

ove la sommatoria è estesa alle sorgenti i tali che il loro flusso $S_{\nu,i} > S_{\nu lim}$ e $\Omega(S)$ è l'area di cielo coperta dal campionamento a quel limite di flusso.

Se il campione che si è utilizzato per la stima dei conteggi non è perfettamente completo e limitato in flusso è possibile correggere la stima.

I conteggi di sorgenti costituiscono un osservabile cosmologico fondamentale e forniscono un metodo semplice e potente di analisi della distribuzione spaziale delle sorgenti. Si distingue la forma più semplice, i **conteggi integrali** $N(> S_{\nu})$, già definiti, e i **conteggi differenziali**:

$$N(S_{\nu}) = \frac{dN(> S_{\nu})}{dS_{\nu}}$$

La forma differenziale ha il vantaggio che i bins di dati entro cui sono definiti i conteggi differenziali sono statisticamente indipendenti (quelli dei conteggi integrali non lo sono perchè per ogni valore del flusso limite tutte le sorgenti più brillanti che contribuiscono ai dati a flussi limite più brillanti contribuiscono anche a questo flusso limite più debole). Nel caso euclideo si ha che questo comporta: $N(S) \propto S^{-2.5}$. È molto comune esprimere i conteggi differenziali come rapporto tra conteggi differenziali osservati e quelli previsti dall'andamento euclideo.

La tecnica dei conteggi può essere utilizzata per studiare la distribuzione spaziale e per verificare la **completezza del campione**: in questo caso bisogna assumere a priori l'omogeneità del campione e verificare il criterio che la distanza d sia piccola. Un campione completo deve presentare conteggi consistenti con un andamento in flusso $N \sim S^{-1.5}$.

Il test V/V_{max} : Un altro test statistico della distribuzione spaziale delle sorgenti è il test V/V_{max} . In presenza di un campione completo e spazialmente omogeneo è possibile verificare che il rapporto tra il volume V occupato dalla sorgente nell'area campionata e il volume massimo V_{max} a sua disposizione entro il flusso limite $S_{\nu,lim}$ è distribuito in modo uniforme tra i valori 0 e 1 per tutte le sorgenti del campione e pertanto:

$$\left\langle \frac{V}{V_{max}} \right\rangle = 0.5 \pm 1/\sqrt{12N}$$

dove N è il numero di sorgenti e la media consiste nella media aritmetica calcolata su tutte le sorgenti del campione ($1/\sqrt{N}$ è la deviazione standard). V è il volume calcolato entro il cono di osservazione sino alla distanza della sorgente:

$$V = \frac{\Omega}{3} d^3$$

dove Ω è l'area di cielo campionata dalla survey in steradiani mentre V_{max} è il volume calcolato alla distanza massima per la sorgente alla quale il suo flusso osservato sarebbe pari al flusso limite $S_{V,lim}$. Per calcolarlo si immagina di far aumentare la distanza dell'oggetto mantenendo la luminosità invariata finchè il flusso della sorgente diventa $S_V = S_{\nu,lim}$, cosa che avviene quando $d = d_{lim}(L)$.

Relativamente ad un universo euclideo si ha:

$$\frac{V}{V_{max}} = \frac{\Omega d^3 / 3}{\Omega d_{lim}^3 / 3} = d^3 \left(\frac{S_{\nu,lim}}{S_V d^2} \right)^{1.5} = \left(\frac{S_{\nu,lim}}{S_\nu} \right)^{1.5}$$

quindi risulta facilmente calcolabile anche se la distanza non è nota. In Fig. 15 è riportata l'applicazione di questo

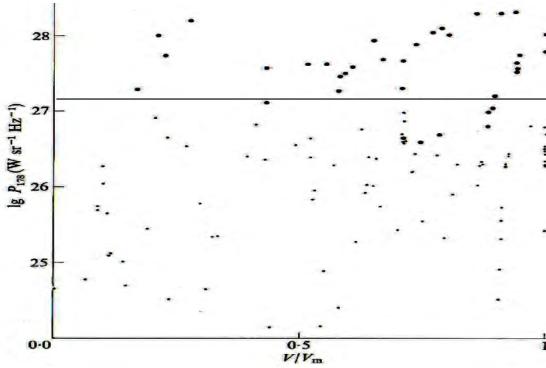


Figura 15: Applicazione del test V/V_{max} ad un campione di quasar radio e radio-galassie

test ad un campione di radiosorgenti: il test mostra se vi siano o meno scostamenti significativi dalla condizione di omogeneità. In questo caso tali disomogeneità sono evidenti per i quasar mentre per le radiogalassie la distribuzione è vicina al caso omogeneo. L'analisi della variabile V/V_{max} si effettua tipicamente in funzione della luminosità. Alternativamente il test può essere utilizzato come verifica della completezza del campione.

3.2 Stimatori statistici della funzione di luminosità delle galassie: lo stimatore $1/V_{max}$

Applicando questi concetti si può stimare la funzione di luminosità. Consideriamo un campione di galassie completo e limitato in flusso e assumiamo di conoscere la distanza di ogni oggetto, ad esempio misurandone il redshift e deducendone la distanza attraverso la legge di Hubble:

$$d \simeq \frac{c}{H_0} z$$

con $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$ costante di Hubble, oppure utilizzando gli stimatori di distanza. Una volta calcolate le luminosità degli oggetti di effettua un binning in luminosità ed eventualmente uno in distanza, ovvero in tempo cosmico considerando che la distanza temporale è semplicemente legata alla distanza fisica ($t \simeq d/c$).

Una stima della funzione di luminosità $\phi(L_\nu)$ è data dalla sommatoria su tutti gli oggetti entro un certo bin di L_ν e d :

$$\hat{\Phi}(L) = \sum_i [V(d_{max}) - V(d_{inf})]_i^{-1} / \Delta L$$

dove il segno di tetto denota che si tratta di una stima e dove $L = L_\nu$ e ΔL è l'intervallo di luminosità relativo al bin entro cui vogliamo calcolare la funzione di luminosità e

$$V(d_{inf}) = \frac{\Omega(sr)}{3} d_{inf}^3$$

e analogamente per $V(d_{sup})$. d_{inf} è il taglio inferiore in distanza mentre d_{max} è il minimo tra il taglio superiore in distanza d_{sup} e la distanza limite d_{lim} alla quale l'oggetto sarebbe rivelabile al flusso limite S_{lim} del campione:

$$d_{lim} \doteq S = \frac{L}{4\pi d_{lim}^2} = S_{lim}$$

quindi $d_{max} = \min[d_{sup}, d_{inf}]$.

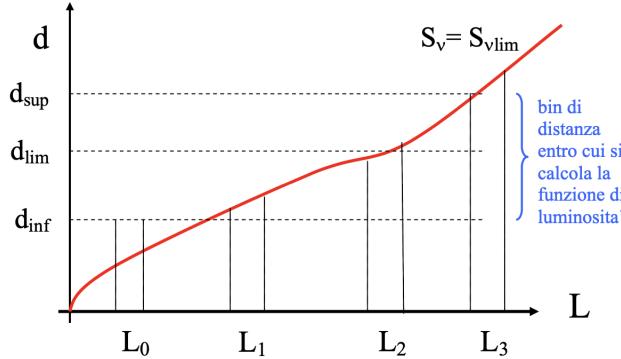


Figura 16: La figura illustra le varie quantità in gioco. La linea rossa simboleggia la relazione distanza-luminosità che corrisponde al flusso limite della survey $S_{\nu,lim}$. Il bin di distanza è definito a priori.

3.3 Funzioni di luminosità delle galassie

Sono state proposte varie forme per riprodurre le funzioni di luminosità locale (LLF) delle galassie. Zwicky ha proposto la seguente forma analitica in funzione della magnitudine assoluta:

$$\Phi(< M) = \cos t \cdot [10^{0.2(M-M^*)} - 1]$$

Una rappresentazione a due leggi di potenza è stata proposta da Abell studiando gli ammassi di galassie:

$$\begin{aligned} \Phi(L) &= \cos t \left(\frac{L}{L_l} \right)^{-a_1} \quad \text{per } L < L_l \\ &= \cos t \left(\frac{L}{L_l} \right)^{-a_2} \quad \text{per } L > L_l \end{aligned}$$

La forma che riproduce meglio i dati osservativi è quella proposta da Schechter, che è essenzialmente una legge di potenza alle luminosità medio/basse ed è tagliata esponenzialmente in prossimità di $L = L^*$:

$$\Phi(L)dL = \Phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^{-\alpha} \exp \left(-\frac{L}{L^*} \right) L^* \cdot d \left(\frac{L}{L^*} \right)$$

I valori caratteristici dei parametri sono:

$$L_V^* \simeq 10^{10.5} L_\odot \simeq 10^{44} \text{ erg s}^{-1}, \quad M_V^* \simeq -21.5$$

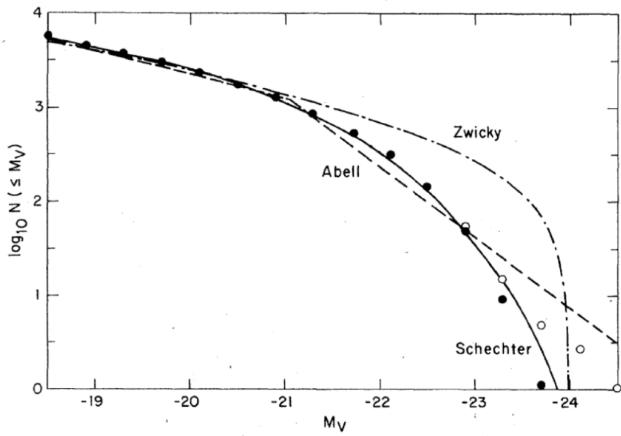


Figura 17: Rappresentazioni grafiche di varie forme analitiche suggerite per riprodurre le LLF delle galassie. Come si vede solo quella di Schechter fornisce un fit accettabile. I pallini pieni si riferiscono a galassie normali mentre i pallini vuoti sono galassie supergiganti nei nuclei degli ammassi.

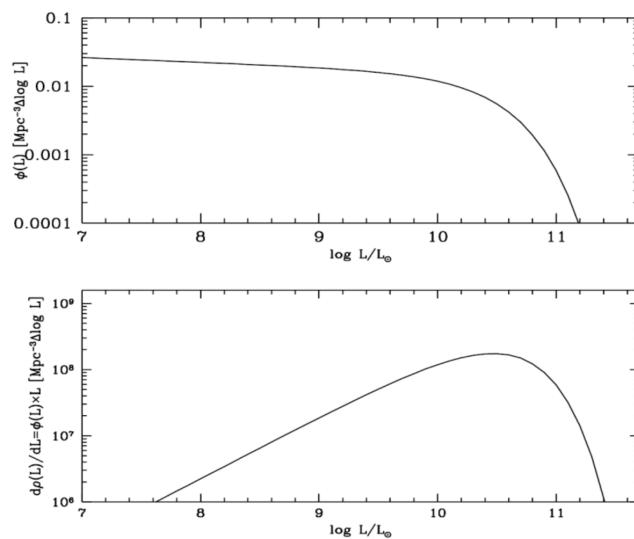


Figura 18: Sopra: rappresentazione grafica della legge di Schechter che riproduce bene la LLF

La funzione di Schechter è illustrata in Fig. 17 (linea continua) e Fig. 18: è quindi una forma funzionale che prevede una luminosità caratteristica L^* che rappresenta la luminosità delle galassie che dominano dal punto di vista fotometrico la funzione di luminosità. Definiamo **densità di luminosità** la quantità:

$$\rho_\nu \cdot dL = \Phi(L) \cdot L \cdot dL = \Phi(L) \cdot L^2 \cdot \ln 10 \cdot d\log L$$

Il parametro α assume valori piccoli ($\alpha \sim 1.07$) ovvero la pendenza della LLF è piuttosto piatta alle piccole-medie luminosità ed essendo quindi $\Phi(L)$ piatta, la densità totale media di luminosità è dominata da oggetti con $L \sim L^*$. La funzione di Schechter ha una buona capacità di riprodurre i dati sulla LLF per una varietà di popolazioni di galassie in diversi ambienti. La LLF di Schechter si riferisce alla emissione elettromagnetica della materia barionica condensata in stelle.

Il parametro Φ^* è una normalizzazione e si può determinare o facendo un fit della forma tri-parametrica di Schechter a dati sulla LLF e determinare quindi i tre parametri, oppure confrontando i conteggi di galassie in una certa banda modificando la normalizzazione fino ad ottenere un buon accordo con i conteggi osservati. I due metodi sono in buon accordo e indicano:

$$\Phi^* = 0.01 \text{ Mpc}^{-3}$$

quindi la densità media di galassie nell'universo locale è circa una galassia massiva per 100 Mpc^3 e quindi la distanza media tra galassie brillanti è:

$$\bar{d} \sim \left(\frac{1}{\Phi^*} \right)^{1/3} \simeq 5 \text{ Mpc}$$

3.4 Funzioni di massa stellare delle galassie

La conoscenza della LLF permette di determinare non solo la quantità di energia radiante media per unità di volume emessa dalle galassie in funzione della loro luminosità, ma anche la densità di massa in stelle nelle galassie, assumendo di conoscere il rapporto medio massa/luminosità delle varie classi di oggetti.

La funzione di massa si può facilmente ricavare da quella di luminosità. Il parametro M/L esprime una quantità fondamentale delle galassie ovvero la loro attitudine ad emettere fotoni per un certo valore della massa stellare e dipende in generale dalle caratteristiche delle popolazioni stellari, in particolare dalla loro età media: questa determina infatti il numero di stelle giovani di grande massa presente. Dipenderà quindi anche dalla porzione di galassia che si considera: bulge, alone o disco.

Con riferimento al raggio ottico si ottengono i seguenti valori medi per le galassie al tempo attuale.

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{M}{L} \right)} &\simeq 2 - 4 \left(\frac{M_\odot}{L_\odot} \right) \text{ per galassie a spirale} \\ \overline{\left(\frac{M}{L} \right)} &\simeq 4 - 10 \left(\frac{M_\odot}{L_\odot} \right) \text{ per galassie ellittiche/S0} \end{aligned}$$

Il rapporto M/L dipende anche dalla lunghezza d'onda cui si riferisce la luminosità. Inoltre la luminosità di una galassia varia molto anche con l'età delle stelle nell'ottico e nell'UV mentre varia di poco nel nIR. Ciò è dovuto al fatto che le stelle che dominano nell'UV vivono molto poco.

Le due diverse medie sono dovute al fatto che i due diversi tipi morfologici contengono popolazioni stellari con diverse età, più vecchie nelle ellittiche e più giovani nelle spirali.

Se includiamo anche le parti esterne delle galassie utilizzando ad esempio le curve di rotazione allora si ottengono valori per il rapporto M/L molto superiori:

$$\overline{\left(\frac{M}{L} \right)}_{\text{totale, dinamico}} \simeq 50 \left(\frac{M_\odot}{L_\odot} \right)$$

Questo risultato è considerata una prova del fatto che nelle parti esterne delle galassie si trovi materia gravitante oscura non in grado di emettere radiazione. Altre prove a riguardo sono fornite dallo studio dinamico degli ammassi di galassie, nei quali tale rapporto raggiunge valori di qualche centinaia. Infine su scale ancora maggiori le grandi concentrazioni di massa gravitazionale sulle scale dei super-ammassi evidenziano una frazione di materia oscura ancora superiore.

3.5 Densità cosmica media di luminosità e massa in galassie

La densità totale di luminosità delle galassie è data dall'integrale

$$\overline{\rho_\gamma} \simeq \int \Phi(L) \cdot L \cdot dL$$

che, essendo $\Phi(L)$ piatta, è dominata da oggetti con $L \sim L^*$. Ponendo in questa i valori dei tre parametri che determinano $\Phi(L)$ ricavati dalle osservazioni si ottiene una densità di luminosità galattica

$$\overline{\rho_\gamma} \simeq 10^8 L_\odot \text{ Mpc}^{-3}$$

con un incertezza di qualche decina percento.

Assumendo un rapporto medio sull'intera popolazione di galassie di $(\overline{M/L}) \simeq 5M_\odot/L_\odot$ si ottiene una densità di massa in stelle di galassie pari a

$$\rho_{\text{matter, stars}} = \int \Phi(M) \cdot M \cdot dM = \int \Phi(L) \cdot \left(\frac{M}{L} \right) \cdot L dL \simeq 5 \cdot 10^8 M_\odot/\text{Mpc}^3$$

mentre per la densità di materia oscura in galassie:

$$\rho_{\text{matter, dark}} \simeq 5 \cdot 10^9 M/\text{Mpc}^3 \simeq 212 \text{ eV cm}^3$$

Questi risultati forniscono delle importanti conclusioni riguardo alla struttura dell'Universo attuale: la densità di massa-energia della materia gravitante è vari ordini di grandezza superiore a quella di tutte le componenti radiative presenti nell'Universo. Per questo si parla di **Universo dominato energeticamente dalla materia gravitante** piuttosto che dai fotoni.

4 Proprietà evolutive delle sorgenti cosmiche

Le tecniche statistiche discusse in precedenza sono usate anche per investigare le caratteristiche evolutive dell'Universo, ossia se le sue strutture varino con il tempo cosmico.

Tramite le osservazioni cosmologiche è possibile violare in modo sostanziale la barriera temporale: ciò deriva dal fatto che la luce si propaga con velocità finita pari universalmente alla costante c , cosicché la rivelazione di sorgenti a distanze cosmologiche implica l'immediato accesso osservativo al lontano passato.

L'unità di misura delle distanze cosmologiche in senso spaziale, il Megaparsec, corrisponde ad una distanza temporale di 3 milioni di anni.

Se consideriamo la relazione tra flusso osservato S_ν e distanza d :

$$S_\nu = \frac{L_\nu}{4\pi d^2}$$

ovviamente per oggetti di data luminosità L_ν , il flusso diviene sempre minore con l'aumentare della distanza e quindi dell'intervallo temporale: il lontano passato diventa quindi accessibile solo se si dispone di strumenti estremamente sensibili. L'accesso al lontano passato è divenuto possibile solo con la scoperta dei **quasar** (sorgenti puntiformi di enorme luminosità).

Le varie quantità statistiche che abbiamo definito danno informazioni cruciali sul passato dell'universo. Per quanto riguarda i conteggi una sorgente molto debole può essere tale perché è poco luminosa pur essendo vicina oppure può essere relativamente luminosa ma collocata ad un'enorme distanza spazio-temporale.

Le varie funzioni di luminosità $\Phi(L)$ o le funzioni di massa galattica $\Psi(M)$ possono essere riferite non solo a quanto osservabile nell'universo locale ma anche a diversi intervalli di tempo cosmico: ad esempio i limiti d_{inf} e d_{sup} possono essere posti in corrispondenza di epoche cosmiche lontane. Si ottengono così **funzioni di luminosità dipendenti dal tempo cosmico** (time-dependent luminosity functions) con le quali è possibile confrontare le proprietà statistiche di galassie al tempo cosmico attuale con quelle nel passato.

Si parla di Pura Evoluzione di Luminosità o Pura Evoluzione di Densità a seconda che si verifichino traslazioni delle funzioni di luminosità puramente lungo l'asse X delle luminosità o lungo l'asse Y delle densità (vedi Fig. 19):

- **Pura Evoluzione di Densità:** corrisponde ad un semplice aumento o diminuzione andando avanti o indietro nel tempo del numero di sorgenti per unità di volume
- **Pura Evoluzione di Luminosità:** corrisponde al fatto che la densità di sorgenti rimane all'incirca costante nel tempo e si modifichino invece le sole luminosità caratteristiche della popolazione, tipicamente per fattori che dipendono dal tempo ma non dalla luminosità
- **Evoluzione Dipendente dalla Luminosità:** situazione in cui le funzioni di luminosità si deformano al trascorrere del tempo, nel senso che il tasso di evoluzione dipende dalla luminosità

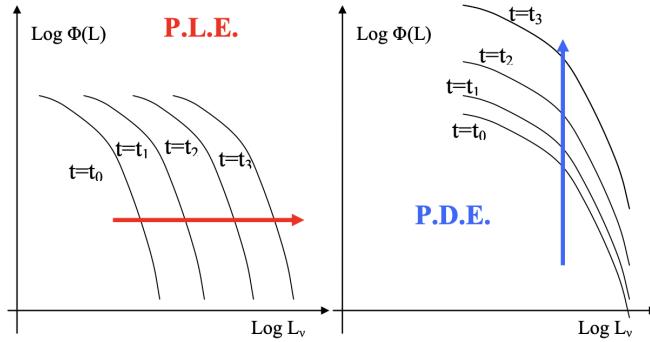


Figura 19: Schema rappresentante un’evoluzione di pura luminosità (sx) e un’evoluzione di pura densità (dx)

Evoluzione di pura luminosità per una popolazione di galassie si può verificare in una fase nella quale le masse in stelle delle galassie della popolazione non cambiano mentre la luminosità media delle stelle varia in seguito a variazioni delle popolazioni stellari che costituiscono le galassie. Supponiamo che tutte le stelle della popolazione di galassie si siano formate in una certa epoca passata e che poi evolvano nel tempo: le stelle più massive muoiono rapidamente mentre quelle di piccola massa durano per un tempo molto superiore all’età attuale dell’universo. Si ha quindi un arrossamento dei colori accompagnato da una progressiva diminuzione della luminosità della galassia. Ciò comporta un’evoluzione PLE della funzione di luminosità.

Una volta che le popolazioni stellari si sono formate, l’entità dell’evoluzione di luminosità dipenderà dalla composizione stellare iniziale ovvero dalla frazione iniziale di stelle di grande massa rispetto a quelle di piccola massa (Funzione Iniziale di Massa, IMF): più numerose sono le stelle massicce, più rapida sarà la diminuzione di L con il tempo. La IMF appare essere una legge di potenza $dN \sim M^{2.35} dM$.

La maggiore luminosità media delle galassie andando indietro nel tempo ha implicazioni nei conteggi e nelle distribuzioni di V/V_{max} . Situazioni che sottolineano effetti di evoluzione cosmologica sono state messe in luce dall’analisi dei conteggi di radio-sorgenti: in questo caso una evoluzione di densità o di luminosità che implica un aumento di L media o della densità media corrisponde ad un aumento dei conteggi integrali verso i bassi flussi più rapido di quanto previsto dalla legge euclidea. Andando verso i bassi flussi vengono incluse sorgenti via via sempre più lontane che sono più numerose di quanto previsto dall’ipotesi di omogeneità spaziale delle sorgenti presupposta nel derivare l’andamento euclideo.

Considerazioni analoghe riguardano il test V/V_{max} . Si verifica in questo modo che l’universo mostra proprietà fortemente evolutive in relazione alle sue popolazioni di sorgenti.

4.1 Cenni alla formazione ed evoluzione delle galassie

Per quanto riguarda le galassie normali, la Fig. 20 mostra un risultato riguardante l’evoluzione con il tempo cosmico delle funzioni di luminosità e delle funzioni di massa, basato su un campione di 1478 galassie molto deboli. Per tutte queste è stato possibile misurare il redshift con osservazioni spettroscopiche e determinarne le funzioni di luminosità a diverse epoche cosmiche. Nei pannelli di destra è mostrato come cambia con il tempo la funzione di massa stellare: mentre le galassie più massicce mantengono all’incirca la stessa densità, quelle di massa minore sembrano diminuire in densità andando verso tempi remoti. L’evoluzione risulta quindi apparentemente differenziata in massa.

I pannelli di sinistra mostrano l’evoluzione in funzione della luminosità: stabile a valori medio-bassi di L e un forte incremento di luminosità per galassie più luminose.

Si può concludere che la funzione di massa delle galassie non si modifica molto con il tempo cosmico entro l’intervallo considerato, mentre le funzioni di luminosità mostrano una significativa evoluzione che va nella direzione di maggiori luminosità in epoche passate.

L’ipotesi che tutte le galassie si siano formate in un flash iniziale si può applicare soltanto ad alcune categorie di galassie sferoidali di ammasso. Più probabile è che le stelle si siano formate durante una fase più o meno prolungata quindi la massa di gas primordiale che viene convertita in stelle per unità di tempo (tasso di formazione stellare) dipende dal tempo stesso.

La legge proposta da Schmidt per il tasso di formazione delle stelle nelle galassie si può esprimere come (con ρ_{gas} densità di gas freddo disponibile a formare stelle):

$$\frac{\partial \rho_{gas}}{\partial t} = -\kappa \rho_{gas}^n \quad \text{con } n \simeq 0.5 - 2$$

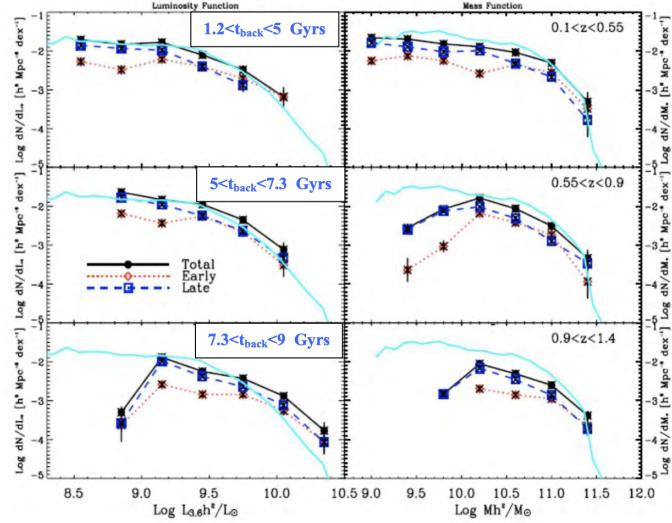


Figura 20: A sinistra: funzioni di luminosità in tre diversi intervalli di tempo cosmico. A destra: dati sull’evoluzione della funzione di massa stellare.

ovvero più gas si ha a disposizione più stelle si possono formare. Si ottiene quindi:

$$\frac{\partial \rho_{gas}}{\rho_{gas}^n} = -\kappa \partial t \quad \text{ovvero} \quad \frac{1}{-n+1} \rho_{gas}^{-n+1} = -\kappa t$$

nel caso $n=1$ ($\dot{\rho}_{gas} \propto \rho_{gas}$)

$$\ln \frac{\rho_{gas}}{\rho_{gas,0}} = -\kappa t \quad \text{quindi} \quad \rho_{gas}(t) = \rho_{gas,0} \exp(-\kappa t)$$

Sostituendo la soluzione della Schmidt e definendo $SFR(t)$ il tasso di formazione di stelle al tempo t , si ha:

$$SFR(t) = \frac{\partial M_{stelle}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_{gas}}{\partial t} = -\kappa \rho_{gas,0} \exp(-\kappa t) = K \exp(-\kappa t)$$

dove la costante κ ha le dimensioni dell’ inverso di un tempo scala e stabilisce quindi il tempo scala della formazione delle stelle durante la storia evolutiva di una galassia. Il tasso di formazione è l’ inverso del ritmo di consumo del gas. Il parametro K corrisponde al tasso di formazione stellare al tempo iniziale $K = (\partial M / \partial t)_{t=0}$.

Si ha quindi una fase accentuata di formazione stellare durante le prime fasi evolutive, quando vi è a disposizione molto gas. Un modo per interpretare la sequenza morfologica di Hubble è associarla ad un parametro τ , funzione crescente dal tipo E/S0 al tipo Irregolare. Le E hanno quindi τ piccolo (1-2 Gyrs) avendo formato le stelle in un lontano passato ed evolvendo successivamente in modo passivo, escludendo la successiva formazione di stelle giovani ed ammettendo solo l’ invecchiamento di quelle presenti. Le spirali di tipi tardi sono caratterizzate da valori di τ maggiori, sino a raggiungere l’ età stimata dell’ universo, ossia avrebbero un’ attività di formazione stellare oggi simile a quella delle epoche passate.

Le galassie ellittiche si sono formate quindi in un breve periodo nel passato mentre spirali e irregolari l’ avrebbero fatto in un periodo molto più lungo. Inoltre è interessante notare che le galassie dei primi tipi ruotano poco e nulla mentre le spirali devono la loro morfologia ad un elevato contenuto di momento angolare. Questo si spiega sulla base dei tempi scala di formazione considerando che la rotazioni delle spirali consegue fenomeni di interazione mareale della materia in collasso operanti solo su lunghi tempi scala e quindi inefficaci per le E/S0.

4.2 Tasso di formazione stellare nelle galassie

Il parametro $SFR = (\partial M / \partial t)$ è denominato tasso di formazione stellare e si tratta di un parametro fondamentale dal punto di vista cosmologico che caratterizza una galassia o una popolazione di galassie.

Solitamente viene misurata in masse solari per anno $M_{Sun} \text{ yr}^{-1}$.

È possibile stimare il tempo scala istantaneo τ_{ist} della formazione stellare da un confronto tra la massa in stelle misurata per una galassia ad un certo istante e il SFR:

$$\tau_{ist} \simeq \frac{M}{SFR}$$

La massa M si ottiene da osservazioni spettro-fotometriche confrontate con un modello di sintesi spettrale e dal rapporto M/L mediato sulle popolazioni stellari della galassia. SFR si misura dall'intensità della riga di emissione $H\alpha$ o dalle luminosità UV o radio. τ_{ist} si riferisce all'istante in cui la galassia viene osservata e non è detto coincida con τ globale.

La presenza di polveri complica molto la misura del tasso di formazione stellare basata su righe di emissione ottiche o sul continuo UV, richiedendo queste forti correzioni per estinzione.

Data la dipendenza della curva di assorbimento dalla lunghezza d'onda, tutti i fotoni blu e UV delle stelle giovani sono assorbiti dalle polveri. Per questo motivo si usa la luminosità bolometrica nell'IR. Questa luminosità, direttamente proporzionale al tasso di formazione stellare è data dall'integrale dell'emissione tra 3 e 1000 m. La relazione tra SFR e luminosità bolometrica è così:

$$SFR[M_\odot/yr] = 10^{-10}(L_{IR}/L_\odot)$$

Un altro indicatore efficiente per la SFR è la luminosità in radio, anch'essa non influenzata dalla presenza di polveri. Le varie costanti moltiplicative dipendono anche dalla Funzione Iniziale di Massa che viene assunta.

4.3 Statistiche della formazione stellare nelle galassie in funzione del tempo

Utilizzando campionamenti profondi di galassie nel lontano IR è stato possibile calcolare la luminosità bolometrica IR per numerosi campioni completi di galassie a diverse epoche cosmiche, e con questi stimare le funzioni di luminosità infrarossa. Ad essa possiamo aggiungere l'informazione riguardante la distribuzione statistica del tasso di formazione stellare nelle galassie $SFR = dM/dt$.

Il numero di galassie ad elevata SFR cresce molto velocemente andando indietro nel tempo. Oltre gli 8-10 mld di anni si trovano molti oggetti con $SFR > 100 M_\odot \text{ yr}^{-1}$, praticamente assenti al tempo attuale. Nel lontano passato l'attività di formazione stellare era concentrata nelle galassie più luminose e di grande massa.

5 Struttura generale dell'Universo: basi empiriche

È possibile ottenere una rappresentazione fisico-matematica dell'universo nel suo complesso e definirne in moto auto-consistente una geometria? Per rispondere a tale domanda è necessario che l'Universo, in grande scala, abbia una struttura sufficientemente semplice, altrimenti non è possibile ottenere una rappresentazione modellistica. Analizziamo dati sulla struttura generale dell'Universo considerando innanzitutto la sua dimensione spaziale per poi passare a considerare dati sulla sua struttura temporale. Usiamo a questo scopo sorgenti cosmiche come galassie e nuclei attivi, nonché componenti fotoniche diffuse come le radiazioni di fondo. Ci si deve inoltre domandare se tali traccianti siano buoni oppure "biased".

5.1 Isotropia nella distribuzione di galassie e sorgenti cosmiche

Nelle nostre vicinanze l'Universo appare estremamente complesso e variegato con la presenza di gruppi, ammassi di galassie e superammassi. Su scale maggiori si manifestano presenze di grandi vuoti con dimensioni sino a $\sim 100 \text{ Mpc}$.

Galassie in ottico: problema dell'estinzione galattica. Il test più semplice da effettuare riguarda l'isotropia delle distribuzioni di galassie e sorgenti proiettate sulla sfera celeste. Oltre ad alcune sovradensità nel cielo nord (ammasso della Vergine e della Chioma di Berenice), si nota una marcata diminuzione di galassie verso il piano di simmetria della Galassia: si tratta dell'estinzione da parti delle polveri galattiche, le quali assorbono fotoni a corta lunghezza d'onda e li riemettono a lunghezze maggiori.

Se osserviamo sufficientemente vicino al piano di simmetria galattico, oggetti fuori dalla galassia appaiono estinti secondo la legge:

$$S = S_0 \exp(-kh \csc b)$$

dove S_0 è il flusso originario, S quello estinto, b la declinazione galattica, k l'estinzione per unità di lunghezza, h è la metà dello spessore del disco delle polveri. In termini della magnitudine si ha:

$$m = m_0 + 1.086 kh \csc b$$

Al polo della galassia si ha $\Delta m = m - m_0 \approx 0.2$. A causa dell'estinzione la distribuzione osservata delle galassie nel cielo diventa più rarefatta nel piano galattico ed è massima ai poli. Nonostante ciò la distribuzione delle galassie appare comunque piuttosto disomogenea.

Galassie IRAS. Un modo per ovviare a questo problema è osservare a grandi lunghezze d'onda, come nell'IR, per la dipendenza dell'assorbimento da λ . Inoltre si hanno a disposizione 4 survey complete di tutto il cielo nel range

del micron. Le survey di IRAS sono state realizzate dallo spazio in eccellenti condizioni di stabilità ambientale e omogeneità nella scansione del cielo. I campioni ottenuti sono caratterizzati da completezza in flusso e precisione fotometrica, permettendo accurate indagini cosmologiche. Da queste survey si nota, fatta eccezione per gli addensamenti in prossimità degli ammassi, una generale isotropia nella distribuzione delle galassie. La distanza media è 500 Mpc, aumentando la distanza è possibile che aumenti l'isotropia della distribuzione.

Radiogalassie. Un altro modo per superare il problema dell'estinzione è di osservare in radio, nel quale l'estinzione è nulla. Una esplorazione in banda radio rivela quasi esclusivamente una popolazione di sorgenti esterne alla Via Lattea. Trattandosi di Nuclei Galattici Attivi (AGN) e quasar radio molto luminosi, questa popolazione è visibile sino ad enormi distanze nello spazio-tempo.

La survey radio eseguita con il Very Large Array evidenzia un alto grado di isotropia.

5.2 Isotropia delle componenti fotoniche diffuse

Osservazioni più precise e più profonde nello spazio-tempo sono possibili utilizzando le componenti fotoniche diffuse, in particolare il fondo X e il fondo cosmico primordiale nelle microonde (CMB, Cosmic Microwave Backgrpund). Queste due componenti con origine completamente diversa campionano il grado di isotropia dell'universo a epoche molto diverse.

Fondo Cosmico in Raggi X. Il fondo X ha origine dall'emissione integrata di popolazioni AGN luminosi in raggi X. La distanza spazio-temporale della maggior parte di questi oggetti è notevole e la loro densità areale è di qualche migliaio di oggetti/grado quadro. Questa componente ha uno spettro che si estende tra energie fotoniche di circa 1 keV e circa 100 keV. La maggior parte dei dati sono compresi nell'intervallo di energie tra 2 e 10 keV.

L'anisotropia che si può osservare nel fondo X è consistente con l'essere dovuta al rumore statistico delle sorgenti e non a forti anisotropie su grande scala angolare nella distribuzione delle stesse.

Radiazione Cosmica di Fondo nelle Microonde. Si tratta di un fondo di radiazione che ha una origine molto più remota del fondo X: essa proviene direttamente dal plasma primordiale poco dopo il Big Bang. È un fondo di fotoni di corpo nero, radiazione che oggi si può osservare nelle microonde ($\lambda_{peak} = 2 \text{ mm}$). A lunghezze d'onda centimetriche il satellite COBE ha mostrato un elevato grado di isotropia di questa radiazione una volta escluso il moto della Terra rispetto alla radiazione stessa. Nelle immagini di tale indagine si notano delle "nuvolette" che sono relative alla teoria secondo la quale le strutture cosmiche si originano per effetto dell'autogravità.

L'elevato grado di isotropia della radiazione nelle microonde testimonia una straordinaria isotropia dell'Universo fino ad almeno mezzo milione di anni dopo la sua formazione.

5.3 Test di omogeneità basati su statistiche di conteggi e V/V_{max}

Test diretti sull'omogeneità dell'universo si possono ottenere studiando conteggi di galassie e applicando il test V/V_{max} in diverse aree del cielo. Ricordiamo che l'espressione dei conteggi dipende dalla funzione di luminosità e dall'ipotesi di omogeneità (costanza spaziale della $\Phi(L)$).

5.4 Struttura 3D dell'Universo: distanze cosmiche, legge di Hubble

Per ottenere la distribuzione 3D è necessario aggiungere la dimensione della profondità all'analisi: è necessario quindi ottenere la distanza per ogni sorgente del campione. Per trovare le distanze è necessario utilizzare gli indicatori che permettono misure di distanza fino ad un migliaio di Mpc. La procedura risente ovviamente del problema che ogni errore sistematico in ciascun gradino della sequenza si propaga in modo non facilmente controllabile a tutta la sequenza successiva. Questi indicatori sono quindi usati per insiemi limitati di oggetti e strutture nell'Universo locale e non permettono uno studio sistematico della struttura tridimensionale dell'Universo.

Si giunge quindi alla relazione trovata da Hubble che lega la distanza di un oggetto al suo redshift. Le righe spettrali mostrano spostamenti in lunghezza d'onda dovuti al moto combinato dell'osservatore rispetto alla fotosfera e dovuti al moto relativo delle stelle e delle galassie. Questi moti sono ben misurati nelle componenti il Gruppo Locale di galassie e si hanno poche eccezioni di spostamenti verso il blu.

Tutti questi spostamenti sono dovuti all'effetto Doppler e la lunghezza d'onda osservata risulta essere:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\lambda$$

Per v sufficientemente piccole diventa:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0} = z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} - 1 \simeq \frac{v}{c}$$

relazione che definisce il redshift z e lo collega alle velocità di recessione delle galassie osservate nell'Universo locale. Per v negativo si parla di blueshift.

Hubble scoprì la relazione lineare tra la distanza di una galassia e il suo redshift misurato spettroscopicamente:

$$z \simeq \text{costante} \cdot d$$

A questa legge si aggiunge l'effetto dei moti peculiari delle galassie:

$$z \simeq \text{costante} \cdot d + v_{pec}/c$$

Si aggiungono anche le correzioni relative ai moti combinati del nostro sistema di riferimento: queste correzioni sono tanto più trascurabili quanto più lontano ci spingiamo con la mappatura 3D dell'Universo. Se escludiamo le galassie più vicine il secondo termine può essere quindi trascurato. Interpretando l'effetto di redshift come dovuto al moto possiamo scrivere:

$$v \simeq zc \simeq H_0 d$$

La costante H_0 è la costante di Hubble ed è solitamente espressa in Km/sec/Mpc. Le misure attuali forniscono per essa il valore

$$H_0 \simeq 70 \pm 6 \text{ Km/sec/Mpc}$$

La più ovvia interpretazione è che l'Universo si stia espandendo in modo apparentemente uniforme con un tempo scala di $1/H_0$.

Il raggio di Hubble $c\tau_0 = cH_0$ è invece il percorso effettuato dalla luce durante questo tempo, detto raggio Hubble dell'Universo:

$$R_H = 3 \cdot 10^{10} \cdot 14 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^7 [\text{cm}] \simeq 1.3 \cdot 10^{28} [\text{cm}] \simeq 4300 \text{ Mpc} \quad \text{se } v \ll c, z \ll 1$$

Si ottiene immediatamente

$$d \simeq \frac{c}{H_0} z \simeq 4300 z [\text{Mpc}]$$

avendo espresso la costante di Hubble in sec⁻¹. L'espansione universale offre dunque un metodo di stima delle distanze estremamente semplice e potente, necessitando della sola misurazione del redshift.

5.5 Test di omogeneità dall'analisi 3D

Sfruttando l'ultima equazione e potenti spettroografi è stato possibile ottenere scansioni 3-dimensionali dell'Universo già a partire dagli anni '80. La struttura 3D dell'universo appare fortemente disomogenea fino alla velocità di recessione massima qui campionata di 15000 km/s. Appaiono grandi strutture filamentari assieme a grandi vuoti ed è molto evidente una struttura a raggiera che si incentra nella posizione della Via Lattea, dovuta ai moti peculiari delle galassie che si sommano algebricamente a quello generale di espansione di Hubble. Il fatto che di questi moti non si tenga conto nel calcolo della distanza produce l'allungamento radiale nella distribuzione di punti qui osservata.

I risultati di varie survey mostrano che la distribuzione di galassie segue una struttura apparentemente cellulare e in parte filamentare. Da questi dati emerge che l'universo molto fortemente strutturato su scale sino a 100 Mpc. L'omogeneità dell'universo su scale di migliaia di Mpc è dimostrata dal fondo X e dalla distribuzione delle radiosorgenti. L'estrema omogeneità dell'universo primordiale è infine dimostrata dalla osservazioni della CMB.

5.6 Vincoli alla struttura temporale: un Universo di età finita

Estrapolazione dell'espansione di Hubble nel passato. Consideriamo la legge di espansione universale che si può riscrivere:

$$v \simeq zc \simeq H_0 d \simeq d/\tau_0$$

con τ_0 che ha le dimensioni di un tempo. Ricostruendo il moto di espansione a ritroso nel tempo ci si può chiedere quanto tempo le galassie cicine abbiano impiegato a percorrere 1 Mpc alla velocità di 70 km/s si ottiene:

$$\tau_0 = \frac{1}{H_0} = \frac{3.08 \cdot 10^{24} \text{ cm}}{7 \cdot 10^6 \text{ cm/sec}} \simeq 14 \text{ Gyrs}$$

In conclusione l'espansione universale contiene in se una indicazione per un Universo di età finita.

Datazione di elementi radioattivi. Il rapporto tra le abbondanze dei vari isotopi di elementi radioattivi dipende dalla loro età. Il loro studio fornisce quindi un metodo per valutare le età di sorgenti cosmiche (nucleo-cosmo-cronologia). Occorre misurare i rapporti di abbondanza di elementi che decadono spontaneamente su lunghi tempi scala.

Si tratta di elementi che sono prodotti durante le fasi finali della vita di una stella tramite il processo rapido. Esiste una teoria che predice le abbondanze con le quali questi elementi pesanti vengono inizialmente prodotti.

Datazione delle popolazioni stellari nella nostra e in altre galassie. I tempi evolutivi delle stelle sono determinati dalla quantità di idrogeno disponibile per il bruciamento termonucleare e dal tasso di bruciamento.

Al trascorrere del tempo dalla loro generazione le stelle più massicce e con colori più blu tendono ad uscire progressivamente dalla sequenza e migrare verso il ramo delle giganti rosse producendo un piegamento della sequenza chiamato "turn-off". Determinandone la posizione per le stelle di un ammassostellare (misurando magnitudine e colore per tutte le stelle) si ha una datazione piuttosto precisa dell'ammasso.

Applicando questo metodo agli ammassi più antichi, gli ammassi globulari, si ottengono età di 12-14 Gyrs, quindi si ha una stima dell'età minima che deve avere l'Universo e al contempo fornisce un'indicazione i massima per la sua età visto che per nessuna struttura si è stimata un'età superiore a 15 Gyrs.

Datazione di stelle Nane Bianche. Le nane bianche rappresentano la sezione in basso al centro nel diagramma HR e sono costituite di gas degenere fortemente arricchito di elementi pesanti prodotti dal precedente bruciamento nucleare. Queste stelle si raffreddano progressivamente con il tempo dal momento che non sono soggette a bruciamento nucleare e la loro luminosità diminuisce secondo una legge empirica ben definita:

$$L \propto M \Delta t^{-7/5}$$

Osservazioni di Nane Bianche nel disco della Via Lattea mostrano età di 9.3 ± 2 Gyrs.

5.7 Il paradosso di Olbers

Olbers e altri hanno provato a portare all'estremo l'argomento relativo ad un universo omogeneamente popolato di stelle e hanno confrontato questa ipotesi con quella di un Universo infinito.

Proviamo a calcolare sotto queste ipotesi quale dovrebbe essere la brillanza superficiale del cielo in ottico. Una shell di stelle tutte della stessa luminosità L e di densità spaziale pari a Φ , in numero pari a

$$dN = \Phi r^2 dr$$

darebbe un contributo all'intensità del fondo per unità di angolo solido pari a

$$dI = S \cdot dN = \Phi L dr$$

ove dI è il contributo differenziale della shell di sorgenti alla intensità I della radiazione di fondo cosmico nella banda osservata. Una distribuzione omogenea tra $r = 0$ e $r = R$ darebbe

$$I = \Phi \cdot L \cdot R$$

se fosse $R \rightarrow \infty$ allora $I \rightarrow \infty$. L'argomento si complica se consideriamo che ad una certa distanza la luce di una sorgente tende a sovrapporsi e confondersi con altre lungo la linea di vista. In questo modo la brillanza superficiale del cielo dovrebbe tendere a quella delle singole sorgenti.

Il fatto che la luminosità superficiale del cielo notturno sia molto inferiore a questa ha costituito un paradosso per lungo tempo. Oggi sappiamo che la risposta è dovuta ad una serie di fattori, principalmente al fatto che l'Universo ha un'età finita ed è attualmente in espansione. Tenendo conto che la velocità di propagazione è finita si ha un limite su R e quindi sull'intensità totale.

6 Struttura generale dell'Universo: modellistica interpretativa

6.1 Legge generale di espansione

La caratteristica generale e fondamentale dell'Universo è il suo moto di espansione che consiste in un allontanamento progressivo nel tempo di due punti presi a caso nello spazio. Le caratteristiche di questo moto di espansione si deducono dalla combinazione dell'isotropia osservativa su grande scala e l'omogeneità con la legge di Hubble.

Consideriamo due punti in espansione uniforme, una situazione nella quale due punti prei a caso aumenta dello stesso fattore dopo un certo intervallo di tempo. Si ha che:

$$\frac{r_1(t_2)}{r_1(t_1)} = \frac{r_2(t_2)}{r_2(t_1)} = \dots = \frac{r_n(t_2)}{r_n(t_1)} = \alpha = \text{cost}$$

ove la quantità α non dipende dalla posizione. La velocità di recessione all'origine della galassia 1 è quindi

$$v_1 = \frac{r_1(t_2) - r_1(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{r_1(t_1)}{t_2 - t_1} \left[\frac{r_1(t_2)}{r_1(t_1)} - 1 \right] = \frac{r_1(t_1)}{t_2 - t_1} [\alpha - 1] = H_0 r_1(t_1)$$

avendo posto in H_0 tutte le costanti non dipendenti dalla posizione. Ciò è valido per qualunque punto quindi possiamo scrivere

$$v_n = \frac{r_n(t_1)}{t_2 - t_1} [\alpha - 1] = H_0 r_n(t_1)$$

Quindi una espansione uniforme risulta in una legge velocità-distanza del tipo $v \propto r$.

Substrato cosmico e osservatori fondamentali. Per descrivere l'Universo non siamo interessati alle singole particelle costituenti ma definiamo alcune quantità macroscopiche (densità, pressione, temperatura) e ne seguiamo l'evoluzione con il tempo.

Immaginiamo che la materia nell'Universo sia distribuita omogeneamente, come appunto in un fluido: questo fluido ideale si chiama **substrato cosmico** ed è costituito da varie componenti fisiche, sia non relativistiche come i barioni che relativistiche come fotoni e neutrini.

Un **osservatore fondamentale** è il sistema di riferimento solidale localmente con il substrato. Se il substrato è in moto allora l'osservatore fondamentale sarà detto **comovente** con il substrato. Identifichiamo osservatori fondamentali con le galassie ma bisogna tenere in conto il loro moto proprio indotto dalle disomogeneità locali nella distribuzione della materia gravitante.

Un **modello cosmologico** è una descrizione formale dell'universo come visto da un osservatore fondamentale.

6.2 Il principio cosmologico

Il principio cosmologico si può enunciare dicendo che *l'Universo visto da osservatori fondamentali appare omogeneo e isotropo*.

Per isotropia intendiamo che in ogni direzione lo si guardi l'Universo appare essenzialmente lo stesso a tutti gli osservatori fondamentali che lo guardino ad un determinato istante di tempo cosmico.

Per omogeneità si intende che ogni osservatore fondamentale vede la stessa pittura generale dell'universo in funzione solamente del tempo cosmico.

Mentre l'isotropia è direttamente verificabile, l'omogeneità può essere fondamentalmente dedotta dalla prima e dal principio Copernicano.

Un'enunciazione alternativa del principio cosmologico è che *l'Universo appare lo stesso in tutte le direzioni a tutti gli osservatori fondamentali che si trovino ad osservare al medesimo tempo cosmico*.

Il principio vale solamente su scale spaziali grandi in quanto su scale più piccole si hanno deviazioni dall'omogeneità, sempre più rilevanti man mano che si scende in scala.

La rilevanza del principio cosmologico è che, al fine di ottenere una descrizione compiuta dell'universo è sufficiente una serie di misure dal nostro sistema di riferimento come osservatorio fondamentale e non sono necessarie informazioni da parte di altri osservatori fondamentali.

Un concetto implicito è quello dell'esistenza di un **tempo cosmico universale**, denotato con t . È il tempo misurato dal Big Bang, al quale tutti gli osservatori fondamentali osserverebbero le stesse proprietà generali dell'universo. In prima approssimazione possiamo pensare che il tempo cosmico corrisponda alla scala temporale in uno spazio-tempo quadridimensionale di tutti i sistemi di riferimento dotati di moto nullo rispetto al fluido cosmico locale. La dimostrazione dell'esistenza di un tempo cosmico universale riguarda la temperatura della radiazione cosmica di fondo nelle microonde. Il tempo cosmico attuale è indicato con t_0 .

6.3 Sistema di coordinate comoving. Fattore di scala cosmico $R(t)$

Consideriamo l'equazione dell'espansione isotropa $\mathbf{v} = H_0 \mathbf{d}$ con v velocità del moto di espansione e d distanza tra due punti tra i quali misuro la velocità di recessione.

Generalizziamo questa relazione. Sapendo che $\mathbf{v} = d\mathbf{d}/dt$ avremo

$$\frac{d\mathbf{d}}{dt}) = H(t)\mathbf{d}$$

ad un qualunque tempo t . Definiamo ora

$$\mathbf{d}(t) = \frac{R(t)}{R_0}\mathbf{r}$$

dove $R(t)$ è funzione del tempo cosmico e \mathbf{r} corrisponde ad un sistema di coordinate fisso nel tempo e dove

$$R_0 = R(t_0)$$

con t_0 tempo cosmico attuale. Si ottiene

$$\frac{dR(t)}{dt} \frac{\mathbf{r}}{R_0} = H(t) \frac{R(t)}{R_0} \mathbf{r}$$

che è verificata se si pone

$$H(t) = \frac{1}{R(t)} \frac{dR(t)}{dt}$$

la funzione $R(t)$ è detta **fattore di scala universale** e stabilisce come si espande o si contrae l'universo al trascorrere del tempo. Al tempo cosmico attuale, $H(t)$ coincide con il parametro H_0 .

Il sistema di coordinate \mathbf{r} è chiamato **sistema di coordinate comovente** nel quale la posizione di osservatori fondamentali non cambia con il tempo cosmico: tali osservatori hanno per definizione moto nullo in questo sdr.

Il volume in unità fisiche sarà proporzionale a $R(t)^3$ quindi la densità del substrato cosmico evolverà nel tempo come

$$\rho(t) \propto R(t)^{-3} \quad \text{ossia} \quad \rho(t) = \rho_0 R_0^3 R(t)^{-3}, \quad \text{ove } \rho_0 = \rho(t_0)$$

Le densità nel volume comovente sono costanti nel tempo per definizione.

6.4 Dalla teoria della Relatività Speciale alla Generale

La teoria speciale descrive un universo privo di gravità partendo dall'invarianza universale della velocità della luce. I risultati fondamentali riguardano:

- fattore di Lorentz $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ che stabilisce lo scaling tra sistemi di riferimento in moto
- principio di equivalenza massa-energia $E = mc^2$
- metrica di Minkowski

$$ds^2 = dt^2 = \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

con ds^2 distanza spazio-temporale tra due eventi.

La RS tratta in modo completo l'elettromagnetismo classico ma non la teoria Newtoniana della gravità che richiede di passare alla RG.

La base della RG è il principio di equivalenza: il campo di gravità si annulla in un sistema di riferimento in caduta libera. Quindi il campo di gravità è assimilabile ad un sistema di riferimento non inerziale in accelerazione. L'annullamento della gravità non vale globalmente ma solo localmente. Secondo RG lo spazio-tempo è incurvato dalla gravità. Quindi avremo a che fare con spazi curvi per i quali l'intervallo spazio-temporale infinitesimo si scriverà in modo generale:

$$ds^2 = \sum_{\lambda, \mu=0}^3 g_{\lambda\mu} dx_\lambda dx_\mu$$

ove le tre dimensioni $\lambda, \mu = 1, 2, 3$ sono spaziali e la quarta x_4 è la coordinata temporale. le funzioni $g_{\lambda\mu}$ determinano la curvatura dello spazio proporzionale all'intensità del campo di gravità.

L'espressione generale diventa la metrica di Minkowski nel caso in cui vi sia un'assenza di sorgenti del campo gravitazionale e per la quale:

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -\frac{1}{c^2}; \quad g_{00} = 1; \quad g_{\lambda\mu} = 0 \text{ se } \lambda \neq \mu$$

In questo spazio le traiettorie dei fotoni sono linee rette mentre in RG sono linee geodetiche ovvero curve di distanza minima tra due punti in uno spazio curvo.

Questo punto di partenza si basa sull'assunzione del principio cosmologico riguardante le caratteristiche di isotropia e omogeneità dell'universo e il fatto che esso sia in uno stato di espansione uniforme. Il principio cosmologico permette di semplificare la descrizione fisico-matematica dell'universo.

6.5 Spazi curvi isotropi

Una rappresentazione completa ed auto-consistente della struttura generale dell'universo è possibile solo nell'ambito di RG. Nella trattazione che segue non viene utilizzata una teoria della gravitazione ma puramente le condizioni di simmetria imposte dal principio cosmologico.

Consideriamo uno spazio bidimensionale curvo che possa rappresentare un sottospazio di tipo "spazio" della varietà quadridimensionale che rappresenta l'universo su grande scala. Consideriamo la superficie di una sfera ed elaboriamo una procedura tramite la quale definire la quantità fondamentale che definisce questo spazio omogeneo che è la sua curvatura. Una tale procedura consiste ad esempio nell'effettuare il trasporto parallelo di un vettore all'interno di questo spazio allo scopo di misurare la somma degli angoli interni di un triangolo o di un quadrilatero posti entro questo spazio curvo (si basa sull'utilizzo dei vettori di Killing). Operiamo il trasporto parallelo sul contorno di un triangolo massimo come in Fig. 21, facendo ruotare ogni volta il vettore indicato nel punto A in modo tale da riportarlo parallelo alla direzione iniziale. Facendo viaggiare il vettore da A a C parallelamente alla superficie della sfera, nel punto C dovremmo effettuare una rotazione di 90° per riportarlo alla direzione iniziale: la rotazione complessiva sarà di 270° . Supponiamo che l'angolo in A sia θ : la rotazione complessiva sarà $180 + \theta$. Consideriamo la dipendenza di

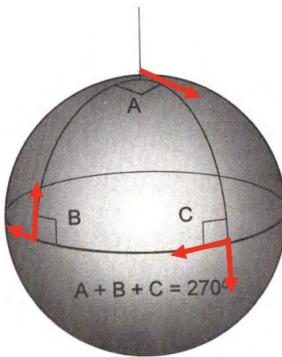


Figura 3 Rappresentazione della superficie di una sfera come spazio curvo a 2 dimensioni (2D). I 3 segmenti AB, AC, BC sulla superficie rappresentano geodetiche, ovvero curve di lunghezza minima tra questi punti. Il triangolo ABC disegnato sulla superficie ha una somma di angoli interni pari a 270 gradi, trattandosi di un triangolo massimo posto entro uno spazio curvo.

Figura 21: Trasporto parallelo

proporzionalità tra l'angolo di rotazione dall'area racchiusa dal triangolo che è $A = \theta R_c^2$: se $\theta = 0$ $A = 0$ e la somma degli angoli sarà 180° , se $\theta = 90^\circ$ $A = \pi R_c^2$ e la somma è 270° . Possiamo individuare la regola di proporzionalità tra area racchiusa e differenziale dell'angolo conseguente al trasporto parallelo rispetto al caso di uno spazio piatto:

$$(\text{somma angoli interni} - 180) \propto (\text{area del triangolo})$$

La costante di proporzionalità in questa relazione dipenderà sostanzialmente dal grado di curvatura dello spazio.

Generalizziamo al caso di uno spazio curvo generico, considerando un quadrilatero ABCD posto entro uno spazio curvo come in Fig. 22. Il quadrilatero è costruito con due lati che sono segmenti di due semirette geodetiche che si dipartono da una comune origine. Definiamo una funzione arbitraria del raggio vettore r $\xi(r)$ che stabilisca come scalano le distanze AB o CD all'aumentare di r . $\xi(r)$ rappresenta l'andamento con la distanza radiale r della dimensione trasversale propria, date le dimensioni angolari $d\theta$. Operiamo il trasporto parallelo operando le rotazioni per riportarlo ortogonale al lato. Nel punto B la rotazione sarà $90 - \beta$ ove β sarà dato da come cambia la distanza ξ con r : $\beta = d\xi/dr$; in C la rotazione sarà $90 + \beta + d\beta$ dove $d\beta$ stabilisce quanto cambia β aumentando la coordinata radiale di dr . Spostando il vettore in D e infine in A avremo due rotazioni di 90° per costruzione. La rotazione totale sarà pari alla somma degli angoli interni della figura in uno spazio piatto sommata algebricamente alla quantità angolare $-\beta + \beta + d\beta = d\beta = d^2\xi/d^2r \times dr$. Questa differenza $d\beta$ rispetto al caso piatto stabilisce il grado di curvatura dello spazio. Il risultato è intuitivo se si considera che solo se la derivata seconda di $\xi(r)$ è diversa da zero allora lo spazio è curvo.

Si sfrutta ora il concetto che il grado di curvatura sia proporzionale all'area racchiusa dalla figura tramite una costante che definisce appunto il grado di curvatura. L'area del quadrilatero nel nostro caso è $dA = \xi(r)dr$. Possiamo stabilire la relazione:

$$d\beta = \left(\frac{d^2\xi}{dr^2} \right) dr = -k\xi dr \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{d^2\xi}{dr^2} \right) = -k\xi$$

ove k è una costante generica presa con segno meno per comodità: se il differenziale $d\beta$ è negativo, lo spazio è a curvatura sferica (somma angoli > 360°) e la costante $k > 0$, viceversa nel caso di $d\beta$ positivo che implica costante di curvatura negativa e derivata seconda negativa. La relazione rappresenta quindi una condizione sull'andamento di $\xi(r)$ in funzione di r che risulta così dipendere dal solo parametro k .

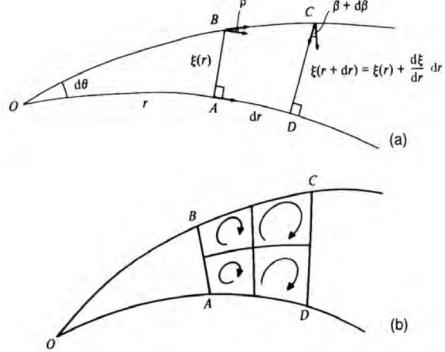


Figura 4

(a) Rappresentazione del trasporto parallelo in uno spazio qualunque. Si noti che gli angoli in A e in B sono di 90° .

(b) Effetto della dipendenza dall'area racchiusa nel definire la somma degli angoli interni della figura, e quindi la curvatura stessa dello spazio: l'angolo di rotazione differenziale $d\beta$ è proporzionale all'area della figura e si annulla quando l'area è infinitesima.

Figura 22: Trasporto parallelo

Nel caso di $k > 0$ è un'equazione di moto armonico che ha come soluzione:

$$\xi(r) = \xi_0 \sin(k^{1/2}r)$$

in cui la costante ξ_0 si trova considerando l'espressione limite nel caso Euclideo e si ottiene

$$\xi(r) = \frac{\theta}{k^{1/2}} \sin k^{1/2}r$$

se k è definito positivo. Se il parametro di curvatura è negativo si usano le funzioni iperboliche ottenendo

$$\xi(r) = \frac{\theta}{k^{1/2}} \sinh k^{1/2}r$$

Nel caso di spazio piatto si riduce all'andamento euclideo

$$\xi(r) = \theta r$$

Il risultato è molto generale e include tutti i possibili spazi a curvatura positiva, negativa o nulla. Tale quantità sarà costante nello spazio solamente se lo spazio è isotropo e omogeneo, diversamente dipenderà dalla posizione. La stessa costante sarà legata al raggio di curvatura dello spazio dalla relazione

$$R_c = \frac{1}{k^{1/2}}$$

con R_c positivo, negativo o immaginario nei tre casi rispettivamente.

Il passo successivo è definire la metrica, che corrisponde a definire la distanza generalizzata in termini di un tensore metrico. Con riferimento alla Fig. 23 il sistema di coordinate naturale in questo spazio isotropo a 2 dimensioni è quanto rappresentato dalla superficie sferica la cui origine sta nel polo con coordinata radiale $\rho = \theta R_c$ cosicché l'elemento metrico si scrive:

$$dl^2 = d\rho^2 + R_c^2 \sin\left(\frac{\rho}{R_c}\right) d\phi^2$$

In questo caso $R_c > 0$.

È frequente usare la forma alternativa per la misura della distanza radiale sulla superficie, definendo:

$$x = R_c \sin(\rho/R_c)$$

che differenziata da:

$$\begin{aligned} dx &= R_c \cos(\rho/R_c) \frac{1}{R_c} d\rho = \cos\left(\frac{\rho}{R_c}\right) d\rho \\ dx^2 &= \left[1 - \sin^2\left(\frac{\rho}{R_c}\right)\right] d\rho^2 \\ d\rho^2 &= \frac{dx^2}{1 - \frac{x^2}{R_c^2}} = \frac{dx^2}{1 - kx^2} \end{aligned}$$

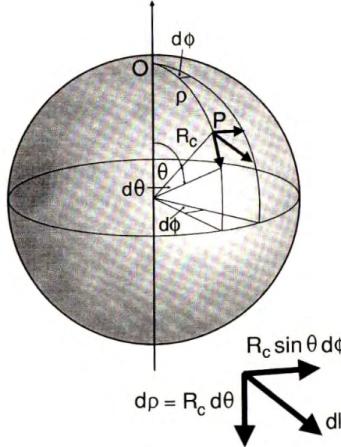


Figura 6

Superficie di una sfera come più semplice caso di uno spazio 2D a curvatura positiva. R_c è il raggio della sfera, e quindi rappresenta la curvatura stessa dello spazio. È indicato un sistema di coordinate sferiche sulla superficie.

Figura 23

Generalizziamo al caso reale tridimensionale scrivendo alternativamente

$$dl^2 = d\rho^2 + R_c^2 \sin^2 \left(\frac{\rho}{R_c} \right) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \quad \text{oppure}$$

$$dl^2 = \frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2]$$

È interessante notare che al crescere del tempo e del fattore di scala $R(t)$ il termine di curvatura k diventa sempre più piccolo e il raggio di curvatura $R_c(t)$ sempre più grande.

6.6 La metrica Robertson-Walker

Le ultime due relazioni forniscono la parte spaziale della metrica per uno spazio 3D omogeneo e isotropo. Occorre aggiungere la componente temporale per ottenere l'elemento di distanza generalizzato $ds^2 = dt^2 - dl^2/c^2$, ottenendo ad esempio:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \left\{ d\rho^2 + R_c^2 \sin^2 \left(\frac{\rho}{R_c} \right) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \right\}$$

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \left[\frac{dx^2}{1 - kx^2} + x^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

ove le coordinate ρ, x, θ, ϕ sono quantità proprie, non comoving. Con questa relazione, a causa della finitezza della velocità della luce, noi vediamo qualsiasi oggetto ad una certa distanza appartenere al cono-luce nel passato quindi non osserviamo gli oggetti al tempo attuale ma come erano nel passato, quando k e R_c erano diversi da ora. L'ultima relazione invece si riferisce a distanze misurate da un osservatore non fisico ad una singola epoca cosmica. Da questo punto di vista le distanze definite con ρ e x non hanno un reale significato applicativo. In conclusione anche i secondi termini spaziali, la costante k e il raggio R_c dipendono dal tempo nella situazione reale. In realtà non appiamo bene come variano le sitanze proprie con il tempo cosmico, sappiamo solo che queste quantità evolvono con il tempo come:

$$\frac{x_1(t_2)}{x_1(t_1)} = \frac{x_2(t_2)}{x_2(t_1)} = \dots = \frac{x_n(t_2)}{x_n(t_1)} = \text{costante} = \frac{R(t_2)}{R(t_1)}$$

ovvero tramite la variazione del fattore di scala $R(t)$. Per le distanze radiali possiamo scrivere:

$$\rho(t) = \frac{R(t)}{R_0} r \quad \text{e} \quad x(t) = \frac{R(t)}{R_0} r$$

con r coordinata radiale comoving (distanza radiale calcolata al tempo cosmico attuale).

Se inseriamo queste condizioni nel differenziale 3-spaziale della metrica otteniamo, per quanto riguarda il termine radiale, la condizione:

$$\frac{dl(t)}{dl(t_0)} = \frac{d\rho(t)}{d\rho(t_0)} = \frac{R(t)}{R_0}; \quad d\rho^2 = \frac{R^2(t)}{R_0} d\rho^2 t_0$$

se consideriamo distanze proprie ortogonali alla linea di vista otteniamo

$$dl(t) = x(t)d\theta = R_c \sin\left(\frac{\rho}{R_c}\right) d\theta$$

Imponendo la condizione che i rapporti tra distanze proprie ortogonali alla linea di vista scalino con il fattore di scala otterremo la seconda condizione

$$\frac{dl(t)}{dl(t_0)} = \frac{R(t)}{R_0} = \frac{R_c(t)}{R_c(t_0)} \frac{\sin\left(\frac{\rho}{R_c(t)}\right)}{\sin\left(\frac{\rho}{R_c(t_0)}\right)} \frac{d\theta}{d\theta}$$

dove r distanza radiale comoving. se facciamo coincidere gli argomenti delle funzioni trigonometriche è di semplice soluzione e si ottiene una regola di evoluzione del raggio di curvatura con il tempo cosmico:

$$\frac{R_c(t)}{R_c(t_0)} = \frac{R(t)}{R_0}$$

La costante (o il raggio) di curvatura non cambia segno al variare del tempo cosmico. Il raggio di curvatura invece cambia in valore assoluto con il tempo.

Per quanto riguarda la rappresentazione geometrica avremo:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \frac{R^2(t)}{R_0^2} \left[dr^2 + R_c^2(t_0) \sin^2\left(\frac{r}{R_c(t_0)}\right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

avendo sostituito

$$d\rho^2(t) = (R/R_0)^2 dr^2 \quad \text{e} \quad R_c^2(t) = (R/R_0)^2 R_c^2(t_0)$$

Lo scaling nel tempo del raggio di curvatura $R_c(t)$ tramite il fattore di scala implica un analogo scaling del parametro di curvatura k :

$$k = 1/R_c(t)^2 \propto R(t)^{-2}$$

Un'espressione alternativa è

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \frac{R^2(t)}{R_0} \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

Il parametro di curvatura può assumere i valori +1, 0, -1 per universi rispettivamente a curvatura positiva, nulla o negativa dando luogo quindi a universi sferici, piatti o iperbolici. Le due espressioni sono due formulazioni analoghe della metrica di Robertson Walker. Nell'ipotesi di omogeneità e isotropia la matrice rimane una matrice diagonale.

La derivazione di questa metrica si basa solo sul principio cosmologico e non coinvolge la relatività generale.

La metrica di Minkowski non è altro che la metrica di RW per r sufficientemente piccoli: entro un volume sufficientemente piccolo attorno ad un qualsiasi osservatore fondamentale la metrica è essenzialmente quella della relatività ristretta, ovvero la curvatura indotta dal contenuto di materia gravitante nell'Universo non si fa risentire nella descrizione metrica (quantità di materia gravitante troppo piccola per deformare lo spazio-tempo).

6.7 Proprietà geometriche dello spazio-tempo descritto dalla metrica RW

A seconda dei diversi valori che può assumere k si hanno diverse proprietà:

- $k = 0$. Ad un determinato istante la sezione spaziale della RW diventa lo spazio Euclideo con metrica

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Il volume racchiuso da un tale universo per ogni valore di tempo cosmico è l'integrale di dl ed è infinito.

- $k = +1$. La sezione spaziale della RW è

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

dove r assume valori compresi tra 0 e 1 altrimenti l'elemento di distanza radiale assumerebbe valori immaginari. Se un fotone si muove in senso radiale rispetto all'osservatore la sua coordinata radiale aumenterà fino ad un certo valore massimo oltre il quale un successivo apparente allontanamento corrisponderà ad un avvicinamento all'osservatore quando tale movimento attraverserà gli antipodi. In un universo di questo tipo è possibile per un fotone navigare nello spazio-tempo ed incrociare più volte lo stesso osservatore fondamentale il quale raccoglierebbe più immagini di uno stesso oggetto con fotoni che hanno percorso cammini ottici molto diversi tra loro.

La cosa importante da considerare è che in questo caso il dominio delle coordinate radiali comoving è limitato. Si tratta quindi di un universo con volume finito e area superficiale limitata ma non ha un limite. Per verificarlo integriamo sulla coordinata radiale $dr/\sqrt{1-r^2}$ entro i limiti imposti a r . Definiamo x il valore della coordinata radiale comoving che risulta essere:

$$x = \arcsin(r)$$

Per la superficie di questa sfera di raggio comoving x abbiamo:

$$S(x) = 4\pi \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \sin^2 x$$

che ha un massimo quando il seno vale 1 ovvero $x = \pi/2$ e a R_{max} la superficie massima sarà $S_{max} = 4\pi(R_{max}/R_0)^2$.

Analogamente per il volume a R_{max} sarà $V_{max} = 2\pi^2(R_{max}/R_0)^3$.

In questo universo finito un raggio luminoso può navigare compiendo più cicli e passando più volte per uno stesso punto.

- $k = -1$. Si tratta di un universo iperbolico che ha caratteristiche molto simili ad un universo piatto. La sezione spaziale di RW diventa:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

mentre l'integrazione dell'elemento di coordinata radiale dl da

$$x = \arcsin h(r)$$

con r che può assumere qualsiasi valore. È un universo formalmente infinito con una superficie e un volume totale infiniti ad ogni istante di tempo cosmico.

6.8 Considerazioni sui modelli geometrici di RW

Possiamo svolgere osservazioni in grado di stabilire con grande precisione queste caratteristiche geometriche ma non possiamo concludere niente sulla totalità della struttura spaziale dal momento che abbiamo una visione dell'universo limitata al cono luce passato. Non siamo quindi in grado di vincolare la sua struttura in regioni molto lontane dal cono luce e stabilire se in zone remote le caratteristiche di omogeneità ed isotropia siano ancora valide o se vi possa essere un limite spaziale alla sua struttura come esiste un limite temporale.

7 Modelli dinamici standard

La metrica RW fornisce una rappresentazione generale della metrica universale ma non dice come evolva nel tempo e non stabilisce se l'universo sia chiuso, piatto o aperto. Per risolvere occorre impostare condizioni ed equazioni dinamiche sull'universo. Per fare ciò si può usare un approccio semplificato che utilizza una trattazione Newtoniana oppure una trattazione general-relativistica della gravità utilizzando le equazioni di campo.

7.1 Trattazione newtoniana

Consideriamo un qualunque osservatore fondamentale in un generico punto dello spazio-tempo che chiamiamo O. Consideriamo una shell di particelle-eventi ad una distanza comoving \mathbf{r} da O. Tale shell si allontanerà da O con velocità $\dot{R}(t)\mathbf{r}/R_0$ e accelerazione $\ddot{R}(t)\mathbf{r}/R_0$.

Nella teoria di newton della gravitazione sappiamo che la forza che agisce su ogni particella della shell dipende solo dalla quantità di materia gravitante contenuta entro la sfera. Così si ha

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} = \frac{-4\pi Gm\rho\bar{x}}{3}$$

sostituendo il vettore in coordinate proprie \bar{x} con quello in coordinate comoving r ed eliminando m si ottiene

$$\begin{aligned} \ddot{R}\mathbf{r}/R_0 &= \frac{-4\pi G\rho(t)R(t)\mathbf{r}}{3R_0} \\ \ddot{R}(t) &= -\frac{4\pi G\rho(t)R(t)}{3} \end{aligned}$$

sostituendo ora $\rho(t) = \rho_0 [R(t)/R_0]^{-3}$ otteniamo la **prima equazione della dinamica**

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi}{3} G \rho_0 R_0^3 R(t)^{-2}$$

la seguente equazione detta **di Friedmann o seconda equazione della dinamica** ne è una soluzione generale

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3R(t)} G \rho_0 R_0^3 - kc^2$$

La prima equazione della dinamica pone in relazione l'accelerazione delle particelle del sistema con le forze in gioco. La seconda è invece una equazione di conservazione dell'energia: il membro a sinistra corrisponde all'energia cinetica, il primo termine al secondo membro è l'energia del potenziale gravitazionale mentre kc^2 corrisponde ad una costante di integrazione al momento arbitraria.

7.2 Teoria della gravitazione di Einstein

Per chiarire il significato della costante k è necessario utilizzare la relatività generale come teoria completa della gravitazione. Assumendo la velocità di propagazione della luce finita che limita sostanzialmente le porzioni di universo in grado di influenzare la dinamica locale ci permette di definire un sistema di condizioni al contorno al nostro problema dinamico che sia auto-consistente.

La relazione completa tra sorgenti del campo gravitazionale e quindi il contenuto di materia ed energia dell'universo e la metrica spazio-temporale stessa è fornita dalle **equazioni di campo** della relatività:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}$$

con $R_{ik} = R_{ijk}^l$ tensore di Ricci dato dalla contrazione del tensore di Riemann R_{ijk}^l e con $Rg^{ik}R_{ik}$ che è una quantità scalare detto scalare di curvatura. I tensori e lo scalare contengono essenzialmente derivate prime e seconde del tensore metrico g^{ik} mentre il tensore metrico stesso è l'equivalente del potenziale gravitazionale della teoria newtoniana. La precedente equazione generalizza l'equazione di Poisson alla condizione di covarianza dell'equazione dinamica per qualunque trasformazione di coordinate.

Il tensore T_{ik} descrive il contenuto di massa-energia del fluido cosmico, ossia la massa gravitazionale a riposo, la quantità di moto totale, energia e pressione. Assumendo che il fluido cosmico sia assimilabile ad un fluido perfetto, il tensore energia-impulso ha la forma

$$T_{ik} = (p + \rho c^2) U_i U_k - p g_{ik}$$

dove p e ρc^2 sono rispettivamente pressione e densità di energia della materia e U_i è la quadrivelocità del fluido. Alla gravità non contribuiscono solamente la massa gravitante a riposo ma anche tutti i termini di natura energetica quali ad esempio la pressione e ogni forma di energia.

Sostituendo la metrica RW nelle equazioni di campo si ottengono un set di due equazioni che corrispondono alla prima e seconda equazione dinamica. L'equazione di Friedmann resta uguale alla precedente, tuttavia il risultato fondamentale introdotto dalla derivazione relativistica è che la costante k che appare in

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3R(t)} G \rho_0 R_0^3 - kc^2$$

risulta coincidere con la costante di curvatura che appare nella metrica RW.

La prima equazione dinamica viene inoltre generalizzata con i termini di pressione come contribuenti al campo di gravità

$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) R(t)$$

avendo trascurato contributi dovuti ai moti macroscopici. Questa equazione costituisce un fondamentale progresso rispetto alla newtoniana mostrando che anche termini di pressione nel fluido cosmico contribuiscono alla dinamica.

7.3 Alcune soluzioni delle equazioni dinamiche. Modelli cosmologici

Il modello di Milne. Fig. 24. È il caso più semplice nel quale la densità di materia è nulla $\rho = 0$ e $k = -1$. È un universo di particelle di massa nulla. L'equazione di Friedman diventa:

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3R(t)} G \rho_0 R_0^3 - kc^2 = -kc^2 = c^2 ; \quad \frac{dR(t)}{dt} = \pm c$$

che ha come soluzione $R(t) = \pm ct$, ove $t = 0 \Rightarrow R(t) = 0$.

L'universo si espande o contrae in modo lineare uniforme e monotono.

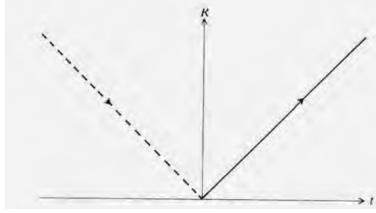


Figura 2

Fattore di scala $R(t)$ contro il tempo cosmico nel modello di Milne, nella soluzione formale a contrazione (tratteggiata) e in quella ad espansione (continua). Tempo $t=0$ coincide con l'istante del Big Bang, l'inizio dell'espansione.

Figura 24: Modello di Milne

Modello piatto di Einstein-De Sitter. Fig. 25. Corrisponde ad uno spazio-tempo a curvatura nulla $k = 0$ e $R_c \Rightarrow \infty$. Il modello è detto piatto in quanto rappresenta uno spazio piatto in espansione. La soluzione è

$$\dot{R}^2(t) = \frac{8\pi}{3} G \rho_0 R_0^3 R^{-1}(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \text{cost } R^{-0.5}; \int_0^{R(t)} R^{0.5} dR = \text{cost } t; \left. \frac{R^{1.5}}{1.5} \right|_0^{R(t)} = \text{cost } t; t \propto R^{3/2}$$

fissando la costante, per $t = t_0 \Rightarrow R(t) = R_0(t_0)$ si ottiene la soluzione per il fattore di scala

$$R(t) = \pm R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3}$$

Analizziamo la derivata di $R(t)$: $\frac{dR}{dt} = \frac{2}{3} t^{-1/3}$, che per $t \Rightarrow \infty$ tende a zero mentre per $t \Rightarrow 0$ diverge. Consideriamo cosa succede per tempi tendenti a zero: il fattore di scala va a zero in un determinato istante di tempo cosmico. A questo istante di tempo cosmico, detto Big Bang di verifica che i valori di tutti i parametri dinamici e termodinamici subiscono una divergenza. Per $t \Rightarrow \infty$ il tasso di espansione dR/dt va a zero ovvero l'espansione si arresta e l'universo tende alla condizione di un universo statico con densità di materia nulla.

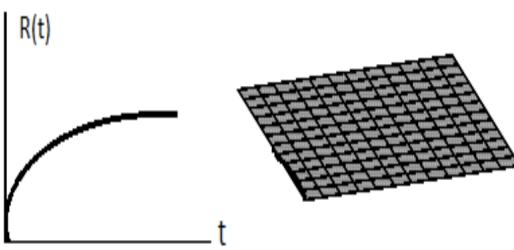


Figura 3

Modello di Einstein-deSitter. $R(t)$ ha derivata infinita a $t=0$ e nulla al limite per $t \rightarrow \infty$. Il modello è in questa figura rappresentato da uno spazio piatto, perché questo corrisponde formalmente al caso $k=0$.

Figura 25: Modello Einstein-De Sitter

Il modello aperto. Fig. 26. Spazio-tempo con materia gravitante $\rho > 0$ e $k = -1$. Per la Friedmann il fattore di scala mantiene una derivata con lo stesso segno per ogni valore di R ovvero una espansione infinita e monotona. Quando $R(t)$ diventa molto grande il termine $k c^2$ tende a dominare e la soluzione diventa $\dot{R}(t) = \pm c$ quindi l'universo tende progressivamente al caso di Milne. L'espansione dell'universo fa sì che la densità di materia tenda a zero al crescere del tempo e l'autogravità dell'universo ad annullarsi.

Il modello chiuso. Fig. 27. Spazio-tempo con materia gravitante $\rho > 0$ e $k = +1$. La Friedmann indica che il fattore di scala mostra una derivata prima nulla $\dot{R}^2(t) = 0$ per un determinato valore di R :

$$R(t) = R_c = \frac{8\pi}{3c^2} G \rho_0 R_0^3$$

e poiché $\ddot{R}(t) < 0$ per ogni valore di R , dopo l'arrestarsi dell'espansione si avrà una contrazione seguita alla fine da un completo collasso (Big Crunch).

Qualunque sia il valore di k , il primo addendo dell'equazione di Friedmann tende a dominare per valori piccoli del fattore di scala quindi la soluzione coincide con il modello di Einstein-De Sitter. Possiamo concludere che l'evoluzione del fattore di scala è univoca per piccoli valori di R e t .

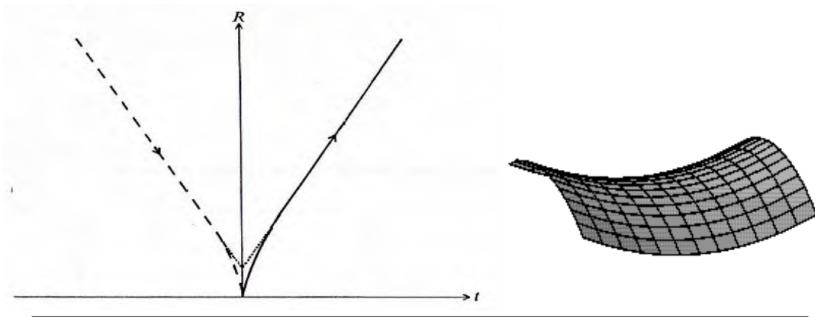


Figura 4 Modello di Universo aperto, $k=-1$. Sono mostrate le due soluzioni formali a collasso per $t<0$ ed espansione per $t>0$. $R(t)$ ha derivata infinita a $t=0$ (tasso di espansione infinito) e costante per $t\rightarrow\infty$. Per tempi sufficientemente avanzati tende alla soluzione di Milne con densità di materia nulla. Il riquadro a destra mostra la rappresentazione grafica del modello geometrico, corrispondente allo spazio *a sella* già menzionato in Fig. 5 della Sez.6.

Figura 26: Modello aperto

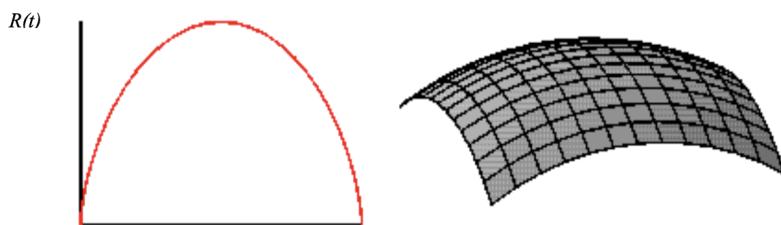


Figura 5 Modello di Universo chiuso, $k=+1$. $R(t)$ ha derivata nulla ad un determinato tempo cosmico e a tempi successivi ricollaissa su se stesso. Il riquadro a destra mostra la rappresentazione grafica del modello, corrispondente allo spazio *sferico* già menzionato in Fig. 5 della Sez.6.

Figura 27: Modello chiuso

Inevitabilità della singolarità iniziale. I vari modelli sono tutti modelli a Big Bang ovvero prevedono una singolarità $R(t) \Rightarrow 0$ ad un tempo finito nel passato e ciò consegue dal fatto che $\ddot{R}(t) < 0$, ossia $R(t)$ è concava verso il basso in funzione del tempo. Il Big Bang non è da considerare un'esplosione entro un volume preesistente vuoto, l'ipotesi di omogeneità implica che l'intero universo si espande e non vi è un volume esterno vuoto entro il quale l'espansione avviene. È lo spazio-tempo nel suo insieme che sta subendo una progressiva dilatazione.

7.4 Parametri cosmologici

Uno dei parametri è quello che descrive la derivata prima del fattore di scala $R(t)$:

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$$

il parametro di Hubble che fornisce una misura del tasso di espansione cosmico al tempo t . La costante di Hubble non è altro che $H(t)$ al tempo cosmico attuale.

Il secondo parametro è legato alla derivata temporale seconda del fattore di scala e quindi all'accelerazione (o decelerazione) dell'espansione:

$$q(t) = \frac{R(t)\ddot{R}(t)}{\dot{R}^2(t)}$$

Il suo valore al tempo attuale è indicato come parametro q_0 .

Il terzo è chiamato parametro di densità in quanto proporzionale alla densità di materia presente nell'universo:

$$\Omega(t) = \frac{8\pi G\rho(t)}{3H^2(t)}$$

Inserendo i parametri nelle equazioni dinamiche possiamo verificarne il ruolo ricavando che la densità di materia è legata alla decelerazione dell'espansione, cosa intuitiva essendo il rallentamento dell'espansione dovuto al contenuto di materia gravitante nel volume medio d'universo e quindi all'autogravitazione dell'universo.

7.5 Relazione tra parametri cosmologici e geometria

La relazione tra parametri e geometria si ottiene dalla Friedmann ricordando che la costante k che vi appare coincide con la costante di curvatura della RW:

$$kc^2 = \Omega(t)H^2(t)R^2 - H^2(t)R^2 = H^2(t)R^2[\Omega(t) - 1]$$

Essendo k invariante nel tempo di avrà $kc^2 = H_0^2R_0^2[\Omega_0 - 1]$. Si avrà quindi un universo piatto se $k = 0$, che implica $\Omega_0 = 1 \rightarrow q_0 = 0.5$. Se ciò si verifica ad un generico tempo cosmico il parametro di densità rimarrà $\Omega(t) = 1$ per qualunque valore di t . È evidente che questa condizione è verificata per un certo calore della densità locale media della materia.

Applicando $\Omega(t) = (8\pi G\rho(t))/(3H^1(t))$ al tempo attuale $t = t_0$ la situazione $\Omega(t_0) = 1$ corrisponde al caso in cui la densità di materia al tempo attuale coincide con il valore

$$\rho_0 = \rho_C = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 10^{-29} \left(\frac{H_0}{70 \text{ km/sec/Mpc}} \right)^2 \text{ in gr/cm}^3$$

Dalla definizione

$$\Omega_0 = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_C}$$

ovvero al parametro di densità eguale all'unità corrisponde una densità di materia pari alla densità critica $\rho = \rho_C$, una costante $k = 0$ e un modello geometrico di universo piatto, il modello di Einstein-De Sitter. Da un punto di vista fisico, quindi le caratteristiche fisiche dell'universo riflettono il rapporto relativo tra i due ingredienti energetici fondamentali: il contenuto di materia gravitante come sorgente di potenziale gravitazionale e l'energia cinetica media dovuta al moto di espansione. Nel caso queste due quantità siano identiche si ottiene una sorta di equilibrio dinamico che a sua volta comporta la piattezza geometrica dell'universo. Questa piattezza deve essere correttamente interpretata come relativa ad un universo in espansione in cui il bilancio tra le due energie comporta un appiattimento della metrica in un senso comprensibile solamente in un contesto general-relativistico.

7.6 Stato attuale dell'universo

Confrontiamo questi concetti con osservazioni attuali. Avevamo trovato:

$$\rho_{matter,stars} \simeq 5 \cdot 10^8 M_\odot/Mpc^3 \simeq 3.4 \cdot 10^{-29} Kg/m^3 = 3.4 \cdot 10^{-32} gr/cm^3$$

Materia oscura in galassie contribuisce per un fattore di circa ~ 10 volte superiore

$$\rho_{matter,dark} \simeq 5 \cdot 10^9 M_\odot/Mpc^3 \simeq 3.4 \cdot 10^{-28} Kg/m^3 = 3.4 \cdot 10^{-32} gr/cm^3$$

Confrontando questi valori con la densità critica $\rho_c \simeq 10^{-29} gr/cm^3$ la materia barionica nelle galassie risulta dar un contributo di solo lo 0.5% a quanto necessario per chiudere l'universo mentre la materia oscura arriva a meno del 5%:

$$\Omega_{dark,galassie} = \frac{\rho_{dark,gal}}{\rho_c} \simeq 0.034$$

Per quanto riguarda la materia oscura questo costituisce un limite inferiore poiché si limita a quanto misurato all'interno delle galassie. Il valore più attendibile di materia per unità di volume si attesta su valori di

$$\Omega_{dark,tot} = \frac{\rho_{dark,tot}}{\rho_c} \simeq 0.3$$

comunque non in grado di chiudere l'universo.

In base a queste osservazioni l'universo appare dominato dalla materia gravitante anche se questa non sembra sufficiente per produrre uno spazio chiuso e neppure uno spazio piatto di Einstein-De Sitter. I dati raccolti indicano quindi un universo aperto e dominato dalla materia.

7.7 Età dell'universo

Calcoliamo quando l'istante di singolarità si possa essere verificato. Chiamiamo t_0 il tempo cosmico attuale ovvero quello che ci separa dal Big Bang. Possiamo scrivere

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{R_0} \frac{dR}{\dot{R}}$$

dove la derivata del fattore di scala si ricava dalla Friedmann. Facendo alcune sostituzioni si può calcolare il tempo t_0 . Per fare ciò è necessaria la costante di Hubble, il cui valore è circa

$$H_0 \simeq 70 \pm 6 \text{ Km/sec/Mpc}$$

valore confermato da molti test cosmologici. Possiamo chiederci in quanto tempo una distanza di 1 Mpc sia stata percorsa dal moto di espansione:

$$\tau_0 = \frac{3.08}{7} \cdot 10^{19-1} \simeq 4.4 \cdot 10^{17} \text{ sec} \simeq 14.6 \cdot 10^9 \text{ anni}$$

Si ottengono due facili soluzioni dell'integrale nei due casi più semplici:

1. se $\Omega_0 = 1$ e $q_0 = 0.5$ si ha $t_0 = \tau_0 \int_0^1 x^{0.5} dx = \frac{2}{3} \tau_0 \simeq 10 \text{ Gyr}$ (Einstein-De Sitter)
2. se $\Omega_0 = q_0 = 0$ si ha $t_0 = \tau_0 \simeq 14.6 \text{ Gyr}$ (Milne)

L'integrale è comunque risolvibile analiticamente per ogni valore di q_0 . Se $q_0 > 0.5$ possiamo usare dei cambiamenti di variabili. Gli andamenti normalizzati del tempo di Hubble t_0 sono riportati in funzione del parametro di densità in Fig. 28. Si ha un tempo di Hubble $t_0 \simeq 11.55 \text{ Gyr}$ per un modello aperto con $\Omega_0 = 0.3$ e addirittura $t_0 = 10 \text{ Gyr}$ per un modello di Einstein-De Sitter. In entrambi i casi questi tempi sono più brevi dell'età degli ammassi globulari più antichi.

7.8 Il modello dello Stato Stazionario

È un modello di universo che ha oggi un valore unicamente storico che si basa su un ulteriore estensione del principio cosmologico al cosiddetto principio cosmologico perfetto per il quale l'universo avrebbe dovuto apparire identico a quanto visto da qualunque osservatore fondamentale a qualunque tempo. Il principio assume quindi perfetta omogeneità ed isotropia non solo spaziale ma anche temporale. Il modello dello stato stazionario aveva la caratteristica principale di evitare un'origine all'universo.

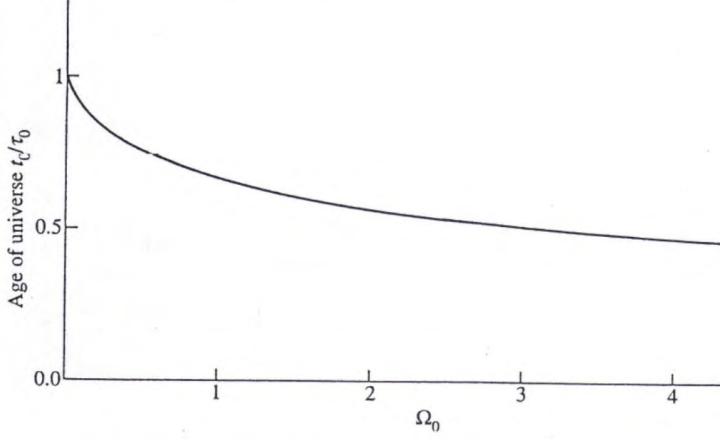


Figura 7 Dipendenza dell'eta' dell'Universo dal parametro di densita', espresso come rapporto t_0/τ_0 . All'aumentare di Ω , aumenta la curvatura verso il basso del fattore di scala $R(t)$ (Fig. 6) e quindi aumenta la correzione dovuta a questa curvatura rispetto al valore nel limite lineare τ_0 .

Figura 28: Età dell'universo

8 Alcuni osservabili cosmologici

La metrica RW e la modellistica dinamica forniscono un modo potente di descrivere l'universo permettendo di stabilire modalità e procedure osservative rigorose.

Definiamo i principali osservabili relativi a sorgenti fotoniche riguardanti misure di distanza, redshift, diametri, flussi e luminosità, volumi, conteggi di sorgenti, intensità dei fondi cosmici eccetera. Tutto questo concerne la propagazione nello spazio-tempo dei fotoni.

8.1 Osservabile fondamentale: il redshift cosmologico

Ricordiamo la metrica RW

$$ds^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2} \frac{R^2(t)}{R_0^2} \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

con coordinata radiale comoving r riscalata in modo tale che k assuma i valori -1, 0, 1.

Consideriamo due eventi collegati tra loro da un segnale luminoso: per definizione saranno collegati da un intervallo nullo $ds^2 = 0$. Immaginiamo che gli assi di riferimento permettano di non far variare tra Q e O gli angoli coordinati θ_0 e ϕ_0 tra la sorgente e l'osservatore. Il fotone viaggerà lungo una geodetica cosmica data dalla condizione:

$$\begin{aligned} ds^2 = 0 &= dt^2 - \frac{1}{c^2} \frac{R^2(t)}{R_0^2} \frac{dr^2}{1 - kr^2} \\ \frac{cR_0 dt}{R(t)} &= -\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \end{aligned}$$

presa con segno negativo per rendere consistenti gli andamenti del tempo e della coordinata radiale (primo cresce, secondo diminuisce). Integrando lungo la coordinata radiale comoving da Q a O:

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^{t_0} \frac{cR_0 dt}{R(t)}$$

Consideriamo ora che il segnale elettromagnetico consista in una serie di impulsi che vengono emessi con periodo dt_e nel sistema di riferimento della sorgente. Supponiamo che al segnale inviato al tempo incrementato corrisponda un segnale che arriva all'osservatore a $t_0 + dt_0$. Allora l'integrale riferito a questo secondo segnale fornirà la condizione:

$$\int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e + dt_e}^{t_0 + dt_0} \frac{cR_0 dt}{R(t)}$$

Procedendo con i calcoli si ottiene:

$$\frac{dt_e}{R(t_e)} = \frac{dt_0}{R(t_0)}$$

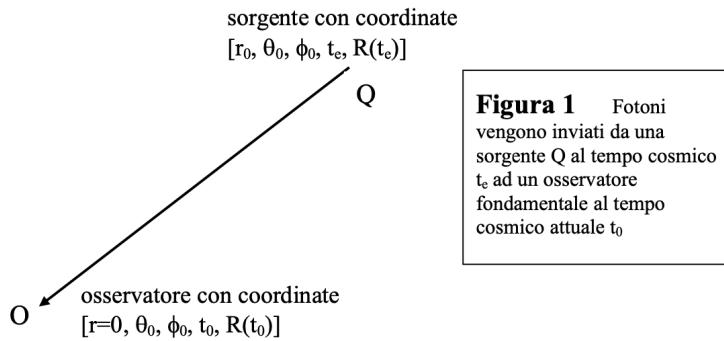


Figura 29

che costituisce la regola fondamentale con cui gli intervalli temporali scalano con il tempo cosmico a cui fanno riferimento e lo fanno proporzionalmente al fattore di scala a quel tempo. Le frequenze fotoniche vanno inversamente agli intervalli di tempo:

$$\frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{dt_0}{dt_e} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)}$$

Introducendo il parametro redshift z

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_e - \nu_0}{\nu_0} = z$$

otterremo la seguente relazione fondamentale tra tempi, frequenze, fattore di scala e redshift:

$$\frac{dt_0}{dt_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} = 1 + z$$

Se l'universo si espande si ha un effetto generalizzato di spostamento delle frequenze fotoniche verso le basse frequenze causato da un aumento del fattore di scala. Questo corrisponde ad un arrossamento dello spettro. Se invece fossimo in una fase di contrazione si verificherebbe un sistematico blue-shift. Il redshift cosmologico è quindi legato alla variazione del fattore di scala cosmico $R(t)$ tra il momento dell'emissione del fotone da parte della sorgente e quello della sua ricezione da parte dell'osservatore.

Nell'universo vicino il redshift osservato è legato ad un effetto doppler generato dal moto relativo di osservatore e sorgente. In questo caso la metrica è quella di Minkowski e gli effetti di curvatura sono trascurabili. Se consideriamo coppie osservatore-sorgente sufficientemente lontane tra loro l'effetto di curvatura è significativo e comporta importanti effetti di trasformazione dei tempi tra un sistema di riferimento e l'altro e di conseguenza importanti trasformazioni di quantità dipendenti dai tempi.

L'effetto di redshift ha quindi una interpretazione "locale" profondamente diversa da quella "generale": la locale interpreta il redshift come semplice effetto doppler dovuto al moto relativo sorgente-osservatore tra sistemi di riferimento inerziali entro scale temporali piccole mentre l'interpretazione generale fa riferimento a trasformazioni dei tempi indotte da variazioni nel fattore di scala cosmico $R(t)$. Questo risultato fa riferimento ad una regola di trasformazione dei tempi che riguarda la propagazione dei fotoni ($ds^2 = 0$). Osservando fotoni emessi al Big Bang, a $t_e = 0$ e $R(t_e) = 0$ avremmo che questi fotoni sarebbero osservati con un redshift infinito, ovvero si verificherebbe una totale perdita di energia di questi fotoni per un osservatore che tentasse di osservarli ad un qualsiasi tempo. In realtà sorgenti poste a redshift superiori di $z = 1000$ non sono direttamente osservabili a causa del fatto che l'universo in quelle epoche remote conteneva plasma completamente ionizzato a causa delle elevate temperature ($T > 5000$ K). Il gran numero di elettroni liberi nel fluido cosmico e la loro elevata sezione d'urto implicano un cammino libero medio dei fotoni molto piccolo e l'impossibilità di osservare oltre questi z .

Il redshift cosmologico è un osservabile di interesse primario per la cosmologia: può essere misurato in maniera diretta con dati spettrali su sorgenti lontane confrontati con spettri simili ottenuti in laboratorio e fornisce una quantificazione semplice, compatta e adimensionale della distanza nello spazio-tempo cosmico tra due osservatori posti a due epoche diverse e a grandi distanze tra loro.

8.2 La distanza di luminosità

Un secondo osservabile fondamentale è costituito dal flusso fotonico in una certa banda ϵm che dipenderà principalmente dalla luminosità intrinseca della sorgente e dalla sua distanza o redshift fatte salve eventuali perdite di fotoni

per assorbimenti.

In riferimento alla Fig. 30 consideriamo una sorgente in Q che emetta fotoni in modo isotropo e consideriamo una

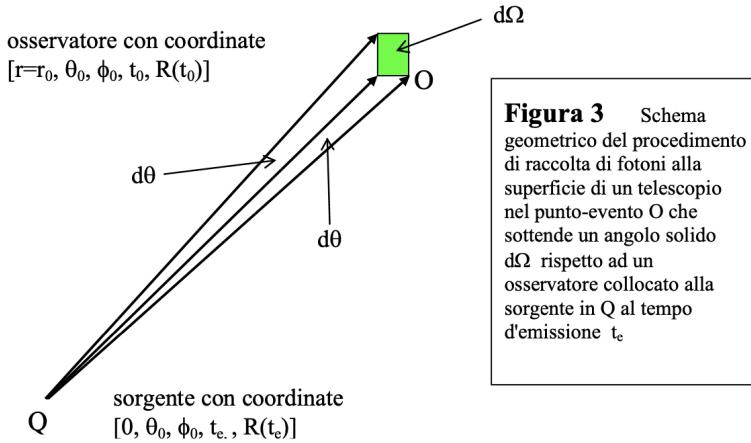


Figura 30

superficie sferica di raggio comoving $r = r_0$ centrata in Q e passante per O. Calcoliamo l'elemento d'area in O che sottende un angolo solido alla sorgente:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

Per trovare l'area sottesa consideriamo la distanza fisica tra i due bordi del telescopio cone visti nel sdr della sorgente. Tali bordi avranno $dt = 0 = dr$ con la distanza propria tra i bordi del telescopio fornita dalla distanza generalizzata $(-c^2 ds^2)^{1/2}|_{dt=0}$.

Considerando RW l'elemento d'area sarà:

$$dA = R(t_0)^{-2} R(t_0) r_0 d\theta \cdot R(t_0) r_0 \cdot \sin \theta d\phi = r_0^2 d\Omega$$

Prendendo $dA = 1$ ovvero considerando il flusso di energia raiante per unità d'area si ha:

$$d\Omega = r_0^{-2}$$

Essendo l'energia emessa per secondo in $d\Omega$ nel sdr della sorgente data da $L \cdot d\Omega / 4\pi$, il flusso totale di energia fonotica ricevuto in O sarà proporzionale al flusso emesso in quella direzione

$$S = \frac{L}{4\pi r_0^2} \cdot \frac{1}{(1+z)^2}$$

La correzione al denominatore è necessaria per tenere conto del fatto che ogni fotone perde energia a causa del redshift proporzionalmente a $R(t_0)/R(t)$ e per il fatto che il ritmo di arrivo dei fotoni è inferiore al ritmo di emissione ancora per lo stesso fattore.

La definizione corretta di distanza di luminosità d_L ovvero la distanza propria spazio-temporale alla quale una sorgente di luminosità L è vista con flusso S :

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi S} \right)^{1/2} = r_0 \cdot (1+z)$$

dove la coordinata comoving r_0 e il redshift z sono legati da

$$\int_{R_0/(1+z)}^{R_0} \frac{c R_0 dR}{R \dot{R}} = \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

Il secondo integrale è risolvibile analiticamente e fornisce

$$\begin{aligned} &\arcsin(r_0) \text{ se } k = 1 \\ &r_0 \text{ se } k = 0 \\ &\arcsin h(r_0) \text{ se } k = -1 \end{aligned}$$

Queste equazioni devono essere risolte facendo riferimento a qualche modello di un universo e i risultati di questo calcolo sono riassunti nella relazione di Hubble che lega la coordinata radiale comoving r_0 con il redshift, relazione mediata dai parametri cosmologici:

$$r_0 = \frac{c}{H_0} \frac{q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1)}{q_0^2}$$

È una delle relazioni più importanti della cosmologia osservativa e può essere utilizzata per riscrivere la distanza di luminosità con una semplice sostituzione.

Nel limite in cui si consideri un sottospazio Euclideo attorno ad un qualunque osservatore fondamentale la relazione d_L si riduce alla relazione di Hubble tra redshift e distanza. Questo caso limite si ottiene considerando la porzione di spazio attorno all'osservatore corrispondente a redshift $z \ll 1$. Sviluppando in serie il termine $\sqrt{1 + \Omega_0 z}$ si ottiene:

$$d_L \simeq \frac{c}{H_0} z ; \quad v \simeq H_0 d$$

appunto la relazione di Hubble considerando che $cz = v$ è la velocità di recessione. Ciò dimostra che la legge di Hubble è il caso limite di quella più generale di uno spazio curvo, limite che si applica nel sottospazio locale Minkowskiano in espansione.

8.3 Densità di flusso. Correzione K

Le quantità luminosità L e flusso S sono dette bolometriche in quanto si riferiscono al totale dell'energia radiante emessa e osservata. In realtà gli osservabili non sono mai di questo tipo ma fanno riferimento ai soli fotoni raccolti dal telescopio entro un limitato intervallo di frequenza. Si definisce una densità di flusso ovvero un flusso per unità di frequenza ad una certa frequenza fotonica ν . Prendiamo $L(\nu_e)d\nu_e$ l'energia emessa per secondo nell'intervallo di frequenza ν_e e $\nu_e + d\nu_e$ e supponiamo che l'energia ricevuta sia $S(\nu_0)d\nu_0$ dove

$$\nu_e = \nu_0(1 + z)$$

Dalla definizione di distanza di luminosità si ha

$$S(\nu_0)d\nu_0 = \frac{L(\nu_e)d\nu_e}{4\pi \cdot d_L^2}$$

e

$$S(\nu_0) = \frac{L(\nu_e)(1 + z)}{4\pi \cdot d_L^2}$$

Supponiamo che il telescopio e l'assorbimento facciano filtrare una frazione $\propto \Phi(\nu_0)$ dell'energia incidente in funzione della frequenza fotonica ν_0 e che tale funzione sia normalizzata a 1. Il flusso misurato in una certa banda sarà

$$S(\nu_0) = \int_{banda} \Phi(\nu) \cdot S(\nu)d\nu = \frac{(1 + z)}{4\pi \cdot d_L^2} \int_{banda} \Phi(\nu) \cdot L[\nu(1 + z)]d\nu$$

che si può anche scrivere come

$$S(\nu_0) = \frac{1}{4\pi \cdot d_L^2} L(\nu_0) \cdot K(z) \quad \text{con} \quad L(\nu_0) = \int_{banda} \Phi(\nu) \cdot L(\nu)d\nu$$

avendo definito la correzione K come

$$K(z) = (1 + z) \frac{\int_{banda} \Phi(\nu) \cdot L[\nu(1 + z)]d\nu}{\int_{banda} \Phi(\nu) \cdot L(\nu)d\nu} \approx (1 + z) \frac{L[\nu_0(1 + z)]}{L(\nu_0)}$$

Si possono ottenere espressioni analoghe ragionando in magnitudini.

Per semplificare queste espressioni si usa il fatto che spettri di sorgenti cosmiche si possono rappresentare entro limitati intervalli di frequenza con leggi di potenza:

$$L(\nu) \propto \nu^{-\alpha}$$

con α indice spettrale a quella frequenza.

In generale la correzione K tiene conto del redshift e quindi che fotoni che io osservo ad una certa frequenza non sono stati emessi a quella frequenza. L'effetto della correzione K non dipende solo dal redshift ma anche dalla forma dello spettro della sorgente osservata e dalla banda di osservazione. questa caratteristica di campionare diverse

porzioni dello spettro em di sorgenti collocate a diversi redshift è sfruttata per aumentare la copertura spettrale delle osservazioni.

Un caso particolare di correzione K è se osserviamo sorgenti nel sub-millimetrico perché a causa della ripidezza dello spettro in queste ragioni la correzione K è estremamente elevata. La conseguenza è che la densità di flusso anziché diminuire all'aumentare del redshiftva causa della maggiore distanza di luminosità, aumenta con esso: la sorgente appare più luminosa al crescere del redshift.

In presenza di effetti evolutivi negli spettri si fa riferimento ad una correzione combinata K ed evolutiva.

GRAFICI VEDI DA DISPENSE

8.4 Diagramma di Hubble. Primi vincoli sul parametro q_0

Se consideriamo le dipendenze del flusso dal redshift e dai parametri cosmologici possiamo immaginare di utilizzare osservazioni di campioni di sorgenti cosmiche di cui conosciamo la luminosità per ricavare H_0 , Ω_0 e q_0 . Il problema è stabilire la luminosità intrinseca della popolazione. le funzioni di luminosità sono descrivibili come leggi di potenza troncate esponenzialmente. Per oggetti di questo tipo Hubble aveva graficato la magnitudine apparente contro il redshift ottenendo i diagrammi di Hubble (Fig. 31). L'analisi di questi diagrammi ha mostrato che il migliore accordo

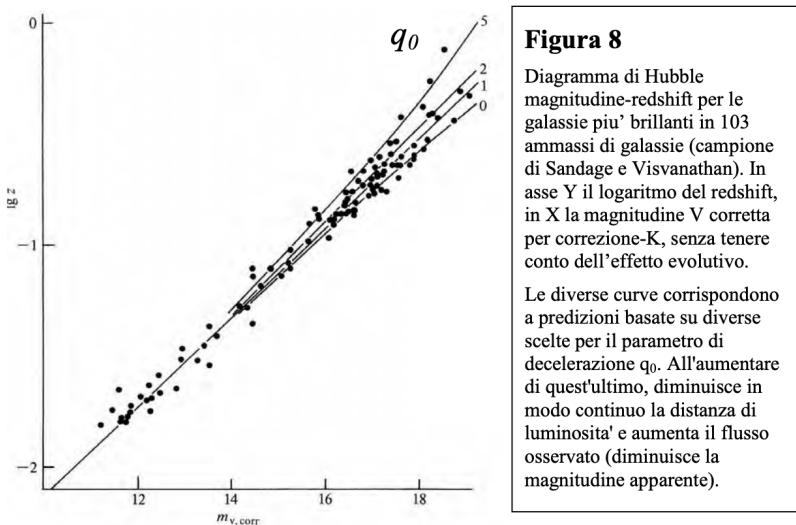


Figura 31: Diagramma di Hubble

tra dati e teoria si ottiene con valori di best-fit per il parametro di decelerazione pari a

$$q_0 \simeq 1.6 \pm 0.4$$

valore che implica un universo fortemente chiuso con un'età di $\tau_0 < 0.5/H_0$ ossia dell'ordine o inferiore a 7 Gyrs, inconsistente con l'età degli ammassi globulari più antichi. Questo si spiega considerando che le galassie mutano nel tempo le loro proprietà.

Considerando che le galassie a più alti redshift sono più giovani e quindi con popolazioni stellari più giovani e in media più luminose. A parità di redshift si ottengono quindi magnitudini apparenti maggiori. All'aumento della curvatura dello spazio-tempo le distanze si accorciano in modo sistematico.

Importante è la dipendenza della magnitudine apparente dal parametro di decelerazione q_0 e quindi dal parametro di densità Ω_0 : la magnitudine aumenta, ovvero il flusso diminuisce al diminuire di q_0 e Ω_0 e risulta massima per $q_0 = 0 = \Omega_0$ corrispondenti al modello di Milne.

8.5 Distanza di diametro angolare. Brillanza superficiale

In cosmologia non si ha un concetto univoco di distanza, esistono diversi metodi operativi di definirla. Un metodo alternativo è ricavare le dimensioni intrinseche di una sorgente cosmica conoscendone le dimensioni angolari apparenti. Consideriamo un oggetto di dimensione fisica l posto alla distanza comoving $r = r_0$ e che sottende un angolo $d\theta$. Consideriamo la distanza propria tra gli estremi dell'oggetto:

$$-(c^2 ds^2)^{1/2}|_{dt=0} = \frac{R(t_e)r_0 d\theta}{R_0} = l$$

e si ha

$$d\theta = \frac{R_0 l}{R_e r_0} = \frac{l(1+z)}{r_0} = \frac{l}{d_A}$$

dove la distanza di diametro angolare è stata definita come rapporto tra dimensione propria della sorgente e la sua dimensione angolare apparente $d_A = \frac{l}{d\theta}$ con angoli in radianti.

Dalla Mattig si ottiene la relazione tra d_{diam} e redshift:

$$d_A = \frac{r_0}{(1+z)} = \frac{c}{H_0} \frac{[q_0 z + (q_0 - 1)(\sqrt{1+2q_0 z} - 1)]}{q_0^2 (1+z)^2}$$

In Fig. 32 è illustrato l'andamento della dimensione angolare di una sorgente in funzione del redshift e le sue dipendenze

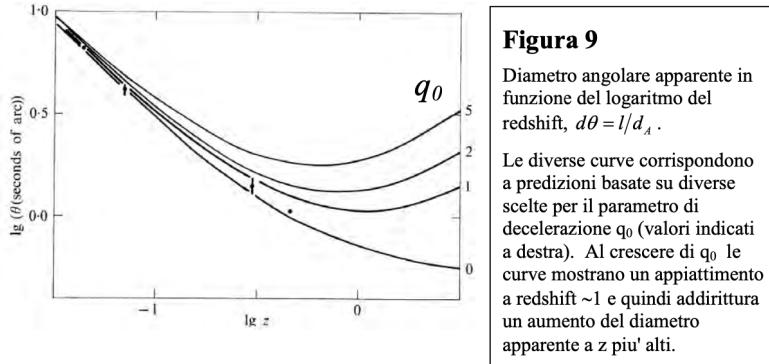


Figura 32

dai parametri cosmologici. A $z = 1$ si verifica un appiattimento e per valori di z più elevati si ha un'inversione. Questo effetto è dovuto al fatto che per distanze elevate cominciano ad intervenire effetti di curvatura che modificano le traiettorie dei fotoni rispetto alla propagazione rettilinea euclidea. Tale curvatura dipende dalla materia gravitante media quindi vi sarà una dipendenza dai parametri di decelerazione e densità (possiamo vederlo come un effetto di lente gravitazionale).

Per test cosmologici si usano le dimensioni angolari e i redshift delle galassie più brillanti d'ammasso. In questo caso i valori del parametro di decelerazione tendono ad essere bassi, in media $q_0 \approx 0$. Usando radiosorgenti compatte si hanno valori con $\Omega_0 = 1$, $q_0 = 0.5$.

È interessante il confronto tra le proprietà della distanza di diametro angolare e la distanza di luminosità dal momento che hanno due dipendenze molto diverse dal redshift che portano alla relazione:

$$d_a = \frac{r_0}{(1+z)} = \frac{d_L}{(1+z)^2}$$

A ciò è collegata la **brillanza superficiale** definita come il flusso di una sorgente cosmica per unità di area di cielo:

$$\mu = \frac{S}{(d\theta)^2} \propto d_L^{-2} d_A^2 \propto (1+z)^{-4}$$

quindi la brillanza superficiale di un oggetto diminuisce molto rapidamente al crescere del redshift z . μ invece non varia al cambiare della distanza in un universo euclideo ovvero per $z \ll 1$. Solo quando z si avvicina e supera il valore di 1 il taglio $(1+z)^{-4}$ si fa sentire. Il fattore di penalizzazione diviene alto a $z = 1$ e superiori, cosa che si somma ad un'eventuale correzione K di segno negativo nel caso ad esempio di osservazioni in ottico. Il risultato è che osservazioni di galassie a $z > 1$ richiedono enormi tempi di integrazione con i più potenti telescopi.

8.6 VEDI DA DISPENSE

9 Conteggi di sorgenti. Storia della formazione stellare e delle galassie

I conteggi di sorgenti cosmiche costituiscono un importante osservabile cosmologico e hanno fornito un metodo di indagine del cosmo. Per un po' i conteggi di sorgenti sono stati considerati anche come osservabile fondamentale per vincolare i parametri cosmologici, in particolare il parametro di densità q_0 ma in seguito le proprietà evolutive delle sorgenti impediscono nella realtà un uso di questo genere. Vi è inoltre una profonda relazione tra sorgenti cosmiche in una certa banda e la radiazione diffusa, relazione che è appunto determinata dai conteggi.

9.1 Calcolo dei volumi cosmici

VEDI DA DISPENSE

9.2 Conteggi di sorgenti nel limite di bassi redshift e flussi brillanti

VEDI DA DISPENSE

9.3 Conteggi di radio-sorgenti brillanti. Evidenze di un universo evolutivo

Per un certo periodo i conteggi sono stati considerati come test fondamentali dei parametri cosmologici, tuttavia la loro più rilevante applicazione ha riguardato verifiche del modelli di Universo dello stato stazionario. Tale modello prevedeva che tutte le proprietà fisiche del cosmo rimanessero invariate nel tempo. Una talmente forte predizione prevedeva un andamento preciso per i conteggi di sorgenti che i radio-astronomi hanno potuto confrontare con le loro osservazioni.

Nell'espressione dei conteggi il parametro β_0 rappresenta il ritmo con cui la funzione di luminosità evolve con il tempo cosmico. In assenza di evoluzione l'unico parametro libero in gioco è α ovvero l'indice spettrale medio delle sorgenti. L'andamento dei conteggi con queste assunzioni è univoco. I conteggi si discostano dalla legge di potenza e la pendenza dei conteggi diviene più piatta dell'andamento euclideo.

Confrontando le osservazioni con le previsioni teoriche si trova che le popolazioni che costituiscono l'universo sono realtà che si modificano rapidamente con il tempo, ovvero sono realtà evolutive.

VEDI DA DISPENSE

9.4 Espressioni per i conteggi nel caso più generale

VEDI DA DISPENSE

9.5 Radiazioni cosmiche di fondo. Contributo di popolazioni di sorgenti

I risultati della precedente sezione sono importanti per numerose applicazioni cosmologiche, come ad esempio l'interpretazione delle radiazioni di fondo cosmico, una importante componente cosmica che si tratta di un bagno di fotoni che permea in modo omogeneo l'universo ed è caratterizzata da uno spettro molto complesso ed esteso su un vasto intervallo di frequenze fotoniche. Nel grafico in Fig. 33 sono riportate le radiazioni diffuse: in ordinata si ha il logaritmo dell'intensità mentre in ascissa si ha il log della frequenza fotonica o dell'energia.

Partendo da sinistra (basse frequenze) e andando verso destra si notano le seguenti componenti:

- fondo radio (puntini): radiazione dovuta all'emissione integrata delle radio-sorgenti extragalattiche
- fondo cosmico nelle microonde (curva di corpo nero continua con picco a 10^{11} Hz corrispondente a 3 mm di lunghezza d'onda): principale componente radiativa cosmica dal punto di vista energetico che origina dal plasma primordiale 380000 anni dopo il Big Bang ed è di origine prettamente diffusa
- fondo nel lontano IR: dovuto in buona parte all'emissione integrata delle galassie primordiali e dei primi quasars
- fondo ottico e nIR: dovuto all'emissione di galassie in ottico
- fondo in raggi X tra 10^{18} e 10^{20} Hz: effetto della produzione di energia per collasso gravitazionale su buchi neri supermassicci presenti nei quasar e AGN
- fondo in raggi Gamma: emissioni di particolari categorie di AGN
- le radiazioni di fondo non sono misurabili tra 10^{16} e 10^{17} Hz a causa del completo assorbimento dei fotoni cosmici prodotto dall'idrogeno diffuso nella nostra galassia. In questa regione sono riportati solo limiti superiori all'intensità del fondo, non misure

Vi sono fondi cosmici rigorosamente diffusi, come il CMB ma la maggior parte di queste radiazioni originano dall'emissione integrata di vari tipi di popolazioni di sorgenti cosmiche. A seconda dello spettro caratteristico di queste e dalla loro distribuzione in redshift avremo diverse forme spettrali per i rispettivi fondi di radiazione.

È importante stabilire una relazione tra intensità della radiazione diffusa e proprietà statistiche delle sorgenti che la compongono in modo tale da trovare una spiegazione dell'origine di questa radiazione e dei vincoli alle proprietà integrate d'emissione della popolazione stessa.

PROSEGUI DA DISPENSE

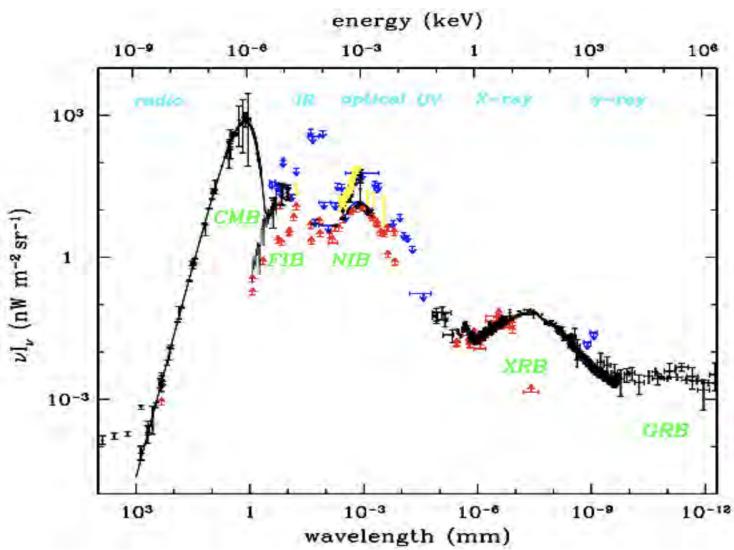


Figura 6

Intensità spettrale della radiazione cosmica di fondo su un vastissimo intervallo di frequenza. Il grafico log-log riporta in ordinata il log dell'intensità vI_ν (espressa in 10^{-9} Watt/m²/steradiane) contro il log della lunghezza d'onda (espressa in mm) e, sopra, della energia fotonica (in keV). Da sinistra (basse frequenze) a destra (alte frequenze) si notano: il fondo radio (puntini, dovuto all'emissione integrata delle radio-sorgenti extragalattiche), il fondo cosmico nelle microonde (curva di corpo nero continua con picco a 10^{11} Hz - 3 mm), il fondo nel lontano IR, il fondo ottico e vicino-infrarosso, il fondo in raggi X tra 1 e 1000 KeV, e il fondo in raggi Gamma sopra 1000 KeV. Notiamo che le radiazioni di fondo non sono misurabili tra 1000 Å e 100 Å a causa del completo assorbimento dei fotoni cosmici prodotto dall'idrogeno diffuso nella nostra Galassia: in questa regione sono riportati solo limiti superiori all'intensità del fondo, non misure.

Figura 33

9.6 Storia cosmica della formazione delle stelle, elementi pesanti e galassie

I processi di formazione stellare e degli elementi pesanti hanno lasciato tracce più o meno evidenti nella radiazione osservabile. Gran parte di questi processi sono avvenuto all'interno delle galassie.

La nostra discussione si limita ad un intervallo di tempo cosmico che copre gli ultimi 10 Gyr ($z = 5$) dove la maggior parte delle sorgenti possono essere individuate e analizzate. Alcune osservazioni si sono spinte anche fino a $z = 10$ utilizzando oggetti estremamente luminosi.

L'osservabile statistico fondamentale sono i conteggi profondi nelle varie bande osservative. Se a questi dati aggiungiamo osservazioni spettroscopiche per ogni galassia in grado di fornirci la sua distanza spazio-temporale ovvero il redshift possiamo aggiungere ulteriori importanti dati statistici sull'universo lontano. Per ottenere questa quantità con buona approssimazione non è necessaria una osservazione spettroscopica ad alta risoluzione spettrale, a volte è sufficiente una stima fotometrica del redshift (redshift fotometrico). Questa misura si ottiene osservando con elevata accuratezza fotometrica tutte le galassie in una determinata area di cielo e misurandone in ogni banda il flusso. Il vantaggio di questa tecnica consiste nel fatto che è possibile ottenere il redshift fotometrico per un enorme numero di galassie entro il campo simultaneamente con un limitato numero di esposizioni in imaging fotometrico.

Una volta conosciuto il redshift di tutti gli oggetti rivelati entro il flusso limite sarà possibile calcolare le funzioni di luminosità a diverse epoche cosmiche e nelle diverse bande e si parlerà di intervalli di redshift. Ottenuto un catalogo completo in flusso ad una determinata frequenza di osservazione entro una certa area di cielo ed avendo per ciascuna sorgente il redshift si inizia a segmentare il campione in intervalli di z mentre per ciascun oggetto viene calcolata la luminosità L_ν . Occorre anche calcolare la correzione-K utilizzando informazioni spettrali sulle sorgenti. A questo punto si applica lo stimatore $1/V_{max}$ per calcolare le funzioni di luminosità in ogni bin di redshift, ove i volumi si ottengono dal redshift a seguito di integrazione.

Osservazioni cosmologiche multi-banda sono essenziali per ottenere informazioni sui vari parametri fisici delle sorgenti.

I dati sulle funzioni di luminosità vengono quindi trasformati in dati riguardanti i tassi di formazione stellare SFR in funzione della luminosità. In questo modo i dati sulla luminosità bolometrica sono immediatamente convertiti in tassi di formazione stellare. Una volta calcolato il numero di galassie per unità di volume comovente con determinata SFR si integra su tutti i valori di SFR ottenendo il tasso di formazione stellare per unità di volume comovente calcolato ad ogni epoca cosmica.

Il motivo per cui considerare unità comoventi anzichè proprie deve risultare chiaro considerando che vogliamo misure di quanto sia avvenuto entro un volume rappresentativo di universo contenente la stessa quantità di componenti cosmiche indipendentemente dall'espansione cosmica.

L'attività di formazione stellare nelle galassie ha avuto un massimo compreso tra redshift $z \approx 1$ e 3 ovvero un tempo di look-back tra 6 e 12 miliardi di anni da oggi. È in questo intervallo di tempo che il grosso delle galassie e delle loro popolazioni stellari si sono formate.

Altra questione di particolare interesse cosmologico riguarda l'origine di elementi pesanti: non solo la formazione delle galassie e delle strutture è influenzata dalla presenza di tali elementi ma ovviamente essi forniscono la materia costituente la parte più rilevante delle strutture cosmiche, i sistemi planetari.

Tali elementi sono prodotti principalmente dalle stelle massicce quindi possiamo ritenere che la loro storia evolutiva sia anche approssimativamente quella della formazione dei metalli. Il tasso di produzione dei metalli dipende anche dalla funzione iniziale di massa stellare. Interessante porre a confronto i risultati sulla formazione stellare con evidenze riguardanti il progressivo accumulo di massa in stelle delle galassie tramite le funzioni di massa evolutive dipendenti dal tempo.

9.7 Soluzione del paradosso di Olberts

I risultati trovati nella sezione precedente costituiscono anche una soluzione al paradosso di Olberts che riguarda l'evidenza osservativa dell'oscurità del cielo notturno.

Possiamo utilizzare le relazioni che ci forniscono l'esatta stima del fondo contribuito da sorgenti. Vi sono due aspetti fondamentali dello spazio-tempo che limitano fortemente la luminosità del cielo notturno: il primo fatto è che l'universo ha un'età finita e quindi l'integrale in distanza dell'intensità non ha contributi rilevanti a valori del redshift z elevati. Il secondo aspetto da considerare è la dipendenza del flusso osservato di una sorgente cosmica dalla sua distanza tramite la distanza di luminosità: ci sono come minimo due fattori di penalizzazione pari a $(1+z)$ che fanno diminuire il flusso di una sorgente ad alti redshift. Ciò si traduce in un fattore di penalizzazione in funzione del redshift che va all'incirca come $(1+z)^{-6.5}$ per tipici valori di q_0 . Gli andamenti complessivi del tasso di generazione di energia fotonica e del tasso di ricezione sono riportati in Fig. 34. La figura mostra che, per storie evolutive plausibili dell'emissività per unità di volume comovente il fondo è prodotto principalmente a $z < 1$. Quello che viene riportato come curva spessa a

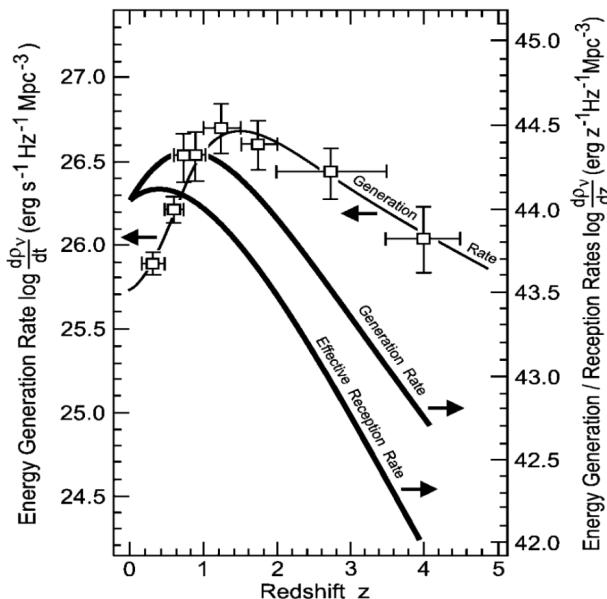


Figura 14 Dati: tasso di generazione di energia radiante per Mpc cubico nel volume *comoving* per unita' di tempo (asse a SX) e per unita' di redshift (a DX). La curva sottile e i dati a quadrato aperto si riferiscono all'asse a SX. Tali dati rappresentano misure dell'emissivita' galattica per volume *comoving* e per unita' di tempo, già riportati in Fig. 11.

Le due curve spesse (riferite all'asse a DX) traducono quanto osservato in contributi al fondo ottico-IR, e forniscono : quella a sinistra il contributo al fondo cosmico che un osservatore misura provenire dai vari redshift, per unita' di intervallo di redshift (eq. [9.31]); la curva spessa a destra il tasso di generazione di energia radiante per unita' di volume proprio e per unita' di intervallo di redshift, in funzione del redshift. Le due curve spesse differiscono per effetto del redshift che degrada l'energia dei fotoni prodotti, per il fattore $(1+z)$. [Da Harwit 1999].

Figura 34

sinistra è il tasso di ricezione dell'energia radiante corrispondente all'argomento dell'integrale, ossia la quantità

$$\frac{dI_\nu}{dz} = \frac{1}{4\pi} \frac{c}{H_0} \frac{j_\nu(z)}{(1+z)^6 \sqrt{1+2q_0z}}$$

dove l'emissività per volume proprio $j_\nu(z)$ è il tasso di generazione di fotoni al redshift z per unità di tempo mentre dI_ν/dz è per unità di redshift.

La curva spessa a destra rappresenta il tasso di generazione di energia radiante per intervallo unitario di z che differisce dall'altra solo per un fattore $(1+z)$. Riferendo le densità ai volumi comovingi, il numero di fotoni non cambia con z mentre la loro energia cambia per un fattore $(1+z)$ tra sorgente e osservatore.

L'integrale può essere tranquillamente limitato ad un redshift massimo $z \sim 1$ e sorgenti più lontane non contribuiscono significativamente al flusso di fondo anche se dovessero evolvere molto.

Con queste considerazioni possiamo dare una stima semplificata del fondo in banda ottica integrando e tenendo conto che

- l'emissività di volume locale delle galassie è $\sim 10^8 L_\odot/Mpc^3$
- l'emissività nel volume comoving evolve poco e si può considerare costante con $z = 0.5 - 1$
- il fondo in banda B sia prodotto ad un redshift medio tipicamente $z_* \sim 0.5$
- la correzione K si può calcolare assumendo indice spettrale $\alpha \sim 1$ cosicché $K(z) \sim 1$

Si trova così

$$I_\nu = [...] = 3.4 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2/\text{sr}$$

risultato perfettamente consistente con il fondo in banda B misurato.

Un altro modo per trovare il medesimo risultato è quello di considerare il parametro di densità dei barioni condensati in stelle Ω_b al tempo cosmico attuale e la relativa densità di massa

$$\rho_{b,0} = 5 \cdot 10^8 M_\odot/Mpc^3 \quad \text{con} \quad \Omega_{b,0} \sim 0.005$$

Possiamo scrivere per la densità al redshift z

$$\rho_b(z) = \rho_{b,0}(1+z)^3 = \frac{\Omega_{b,0} 3 H_0^2}{8\pi G} (1+z)^3$$

Questa densità di massa stellare ha prodotto energia fotonica al redshift medio z con efficienza $\varepsilon \sim 0.0016$

$$\rho_\gamma(z) = c^2 \varepsilon \rho_{b,0} (1+z)^3 = \frac{\Omega_{b,0} 3 c^2 \varepsilon H_0^2}{8\pi G} (1+z)^3$$

Assumendo che questo evento di formazione stellare sia avvenuto a $z \simeq z^* \simeq 1$ questa densità di energia fotonica si tradurrà in un'intensità locale del fondo ottico-infrarosso che restituisce un valore che è una buona approssimazione dell'integrale su tutte le frequenze dei fondi di radiazione nell'ottico e infrarosso.

Questi fondi si possono naturalmente spiegare come dovuti alla somma dei contributi di tutte le popolazioni stellari in galassie durante il tempo di Hubble.

9.8 Fondo residuo nel vicino IR

Si è osservato un apparente eccesso di fondo cosmico tra circa 1 e 5 μm basato su osservazioni dell'IRTF. Non vi è nessun modo di spiegare questo fondo utilizzando sorgenti note quindi è stato ipotizzato che questa radiazione sia il prodotto di una popolazione di stelle assolutamente primordiale denominata stelle di popolazione III, probabilmente oggetti molto massivi che si pensa abbiano costituito le prime luci che si sono accese nell'universo. La forma dello spettro IRTF indicherebbe che queste sorgenti siano state attive attorno a $z \sim 8 - 10$. Un'altra ipotesi è che si tratti di una cattiva sottrazione della luce zodiacale, molto intensa a quelle lunghezze d'onda e non facile da valutare.

10 Leggi generalizzate della dinamica cosmica

L'analisi dinamica svolta finora si è basata sulle leggi della fisica classica ma alcune evidenze osservative hanno sottolineato la necessità di alcune modifiche nella nostra descrizione dell'universo. Una delle prime avvisaglie di questo problema è la stima dell'età dell'universo, dipendente dal parametro di densità: per un modello aperto ($\Omega_m = \Omega_0 = 0.3$) risultava di 11 Gyrs mentre per un modello piatto di Einstein-De Sitter ($\Omega_m = \Omega_0 = 1$) risultava di 10 Gyrs. Entrambi i valori sono inconsistenti con l'età stimata per gli ammassi globulari più antichi che si attesta sui 12 Gyrs. Una volta che la costante di Hubble è nota con precisione, l'età dipende solamente dal parametro Ω_m .

Uno dei metodi più efficaci per la misura dei parametri cosmologici sono i diagrammi di Hubble che però hanno avuto il solo risultato di verificare che le galassie sono sorgenti cosmiche le cui proprietà di emissione fotonica evolvono rapidamente nel tempo.

10.1 Diagrammi di Hubble di supernovae 1A

Le supernovae 1A hanno migliori proprietà di candele campione. Si originano da nane bianche costituite da Carbonio e Ossigeno a temperatura superficiale elevata e densità elevatissima in un bagno di elettroni degeneri. Sono tipicamente in sistemi binari stretti nelle loro fase evolutive finali. Sono portate ad esplodere a causa dell'accrescimento di gas dalla stella compagna o dallo scontro diretto con essa, risultato di un degrado dell'orbita binaria per emissione di onde gravitazionali che porta i due oggetti a collidere l'uno sull'altro. L'accrescimento di gas fa aumentare la massa e la densità della stella fino a portarla al limite di nana bianca di $1.44 M_\odot$ e il sistema non si trova più in una situazione di stabilità dinamica. Si innescano quindi reazioni nucleari che coinvolgono il Carbonio e l'Ossigeno ma la degenerazione degli elettroni impedisce alla stella di reagire: la temperatura sale rapidamente e si verifica l'innesto di reazioni nucleari nell'intero corpo della stella con la conseguente deflagrazione che produrrà un immediato rilascio nell'ambiente circostante dell'intera massa stellare sotto forma di atomi di ferro e calcio. La luminosità prodotta risulta piuttosto precisamente definita, relativamente costante e indipendente dalle condizioni ambientali a causa del fatto che una massa costante di gas ($1.44 M_\odot$) viene processata nuclearmente e genera quindi la stessa quantità di energia. Ciò fa sì che le SN 1A siano utilizzabili come eccellenti candele campione e quindi come indicatori di distanza. In realtà

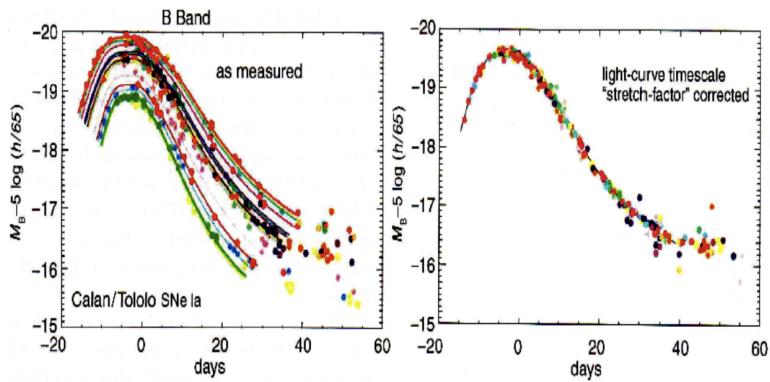


Figura 1

A sinistra è mostrata la curva di luce di un campione di Supernove 1A: si notano vari andamenti molto regolari: al diminuire della luminosità anche la durata del fenomeno diminuisce. Questa dipendenza è facilmente parametrizzabile e permette di ottenere una stima precisa della luminosità dal periodo ricavato dalla curva di luce. Una volta che si tenga conto di questo, correggendo la luminosità in base al periodo (nonché correggendo per estinzione interna alla galassia ospite), si ottengono andamenti della luminosità dal tempo validi per tutti gli oggetti di questa categoria e riportati nel pannello a destra. [Da Kim et al. 1997].

Figura 35

le SN 1A per le quali è stata possibile una determinazione indipendente dalla distanza mostrano una certa varietà di curve di luce cui si associano differenze nella luminosità al massimo: oggetti con curve di luce più allargate nel tempo sono anche i più luminosi, come si vede in Fig. 35. Il pannello sopra in Fig. 36 mostra che il diagramma di Hubble non corretto per un campione di supernovae ha una dispersione elevata se non si tiene conto di queste differenze. Queste differenze mostrano una notevole regolarità e sono state modellate con leggi empiriche che hanno posto in relazione la forma della curva di luce con la luminosità. È quindi possibile correggere i flussi di ciascun oggetto sulla base della forma e del periodo della curva di luce riportandoli ad una curva tipo caratterizzata da un ben determinato valore

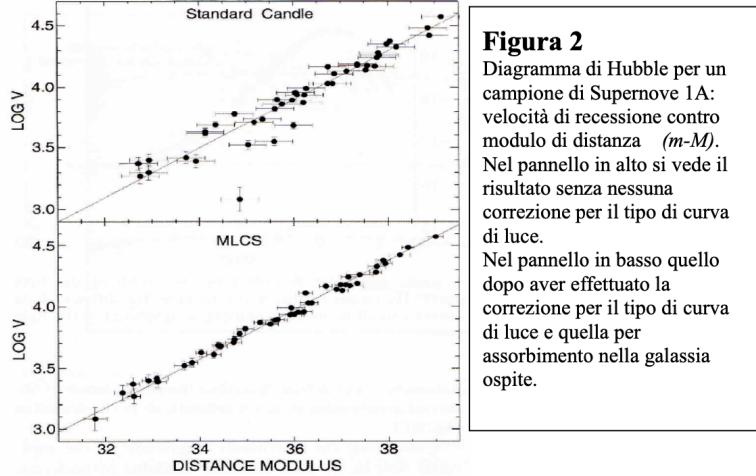


Figura 36

della luminosità al massimo pari a:

$$M_{B,max} \simeq -19.4 - 5 \log\left(\frac{H_0}{70 \text{ km/s/Mpc}}\right)$$

(il termine tra parentesi corregge $M_{B,max}$ volendo variare H_0). La curva di luce media così corretta è riportato nel pannello a destra in Fig. 35 mentre quello in basso in Fig. 36 mostra il risultato per quanto riguarda il diagramma di Hubble per sorgenti a basso redshift.

Occorre aggiungere una correzione riguardante l'assorbimento della luce della SN da parte di polveri della galassia che viene calcolata sulla base dei colori ottici osservati o analizzando lo spettro della sorgente. La determinazione della curva di luce permette quindi di determinare la luminosità al massimo.

Le SN 1A possono essere identificate facilmente alle più grandi distanze spazio-temporali dal momento che sono estremamente luminose, puntiformi e rapidamente variabili in modo sistematico con curve di luce ben definite. Le strategie osservative prevedono di osservare ampi campi di cielo in diverse bande ottiche con telescopi sensibili su grande scala e ripetere le osservazioni con cadenza periodica.

Ricavate la luminosità e il flusso al massimo si ricava la distanza di luminosità e, aggiungendo la determinazione del redshift della SN e della galassia ospite si può ottenere il diagramma di Hubble con un numero sufficiente di oggetti. Un risultato è la verifica dell'effetto del reshift cosmologico nel trasformare i ritmi temporali tra due sistemi di riferimento fondamentali situati a due diversi tempi cosmicci caratterizzati da diversi valori del fattore di scala $R(t)$: il redshift allunga i tempi-scala nel sdr dell'osservatore e quindi allarga temporalmente le curve di luce.

Le osservazioni di SN a $z > 0.2$ forniscono un modo per vincolare gli altri parametri cosmologici. Le varie curve si riferiscono a diverse scelte per il parametro di densità Ω_m , tutti facenti riferimento allo stesso valore di H_0 .

La maggior parte di SN con $0.2 < z < 0.8$ non solo si collocano a calori della magnitudine apparente più elevati rispetto alle predizioni del modello di Einstein-De Sitter ($\Omega_m = 1$) ma risultano anche più elevate di quelle per un modello aperto ($\Omega_m < 1$) o per un modello di Milne ($\Omega_m = 0$) dove Ω_m è il parametro di densità della materia gravitante. Il modello di Milne è quello al quale corrispondono le più grandi distanze di luminosità e i più deboli flussi per sorgenti a dato redshift. In Fig. 37 è riportato in funzione del redshift la differenza tra magnitudine osservata e quella prevista nel caso del modello vuoto di Milne. La magnitudine predetta da Milne è calcolata sulla base dei redshift osservato assumendo per i parametri cosmologici che entrano nella distanza di luminosità q_0, Ω_m . Il pannello in alto mostra i valori per le singole supernovae mentre quello in basso mostra la magnitudine media per i campioni di oggetti ai vari redshift: tutti i dati stanno sopra la precisione del modello con $\Omega_m = 1$ ma anche sopra la predizione di un modello estremo come quello di Milne $\Omega_m = 0$ per SN con reshift tra 0.2 e 1. Ciò significa che i flussi sono più deboli e quindi la distanza di luminosità è maggiore. In linea di principio si può diminuire il parametro di densità ma si hanno dei limiti alla possibilità di modificare Ω_m .

Il modello di Milne è quello che assume il minimo contenuto possibile di materia gravitante, ossia densità nulla. A questo corrisponde il massimo valore della distanza di luminosità a parità di redshift e conseguentemente il minimo flusso. Non si riesce comunque a spiegare il fenomeno: sembrerebbe essere necessario un universo con densità di materia negativa che si dovrebbe trovare in una condizione di espansione accelerata.

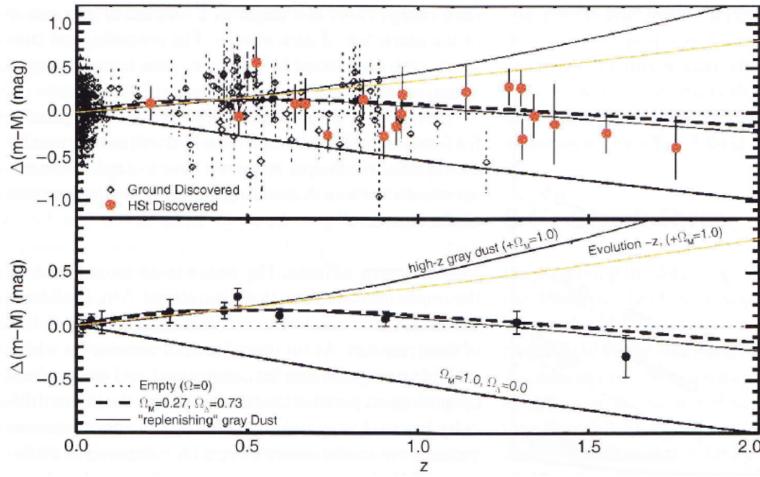


Figura 4

Il diagramma di Hubble per le Supernove 1A, nel quale la magnitudine osservata in ordinata è normalizzata al valore predetto per un modello di Milne, ossia quello con il minimo contenuto di materia gravitante ($\Omega_m=0$). Nel pannello sopra sono riportati i dati per ogni singola supernova, in quello sotto i valori medi in intervalli di redshift. Il modello di Milne sarebbe valido se le supernove si disponessero lungo la linea orizzontale punteggiata. Invece la eccedono tra $z \sim 0.2$ e $z \sim 1$. Peraltro il modello di Milne è quello che assume il minimo contenuto possibile di materia gravitante, ossia densità nulla e massima d_L . I dati sembrerebbero quindi indicare una densità di materia "negativa"! [Figura tratta da Riess et al. 2004 ApJ 607, 655]

Figura 37

Le spiegazioni in termini della fisica classica sono due. La prima riguarda possibili effetti evolutivi che il fenomeno di SN potrebbe aver subito in funzione del redshift ma ciò potrebbe anche dipendere dalla metallicità del gas stellare e, assumendo una diminuzione sistematica di questa con il redshift, dovrebbe influire sul diagramma di Hubble. Questa ipotesi però dovrebbe avere un qualche effetto visibile negli spettri ottici delle supernovae che però non stati rivelati.

Un'altra possibilità è legata all'estinzione da parte della galassia ospite. Il modo usuale di correggere per estinzione riguarda l'arrossamento degli spettri: occorrerebbe che l'estinzione si disaccoppiasse dall'arrossamento ad alti redshift, ma non vi è nessuna evidenza che ciò accada. Una possibilità considerata, indicata come presenza di **polvere grigia** nelle galassie ospiti ad alti z , è che si possa trattare di polvere che assorbe fotoni di qualsiasi λ allo stesso modo ma l'ipotesi è stata scartata in quanto sembra essere totalmente ad-hoc.

Si conclude che i diagrammi di Hubble di SN 1A dimostrano che la scala dell'Universo ad un dato redshift sia maggiore di quanto spiegabile da uno qualunque dei modelli dinamici e conseguentemente soggetto ad una espansione accelerata.

10.2 Equazioni di campo modificate. Costante cosmologica

La relatività permette di definire condizioni al contorno adeguate alla modellistica cosmica ma fallisce di fronte alle evidenze osservative appena spiegate. Non si può quindi escludere che le nuove osservazioni implichino un problema nella trattazione della gravità.

Einstein, cercando soluzioni per la dinamica universale nell'ipotesi di staticità si rese conto che la forza di auto-gravità avrebbe fatto collassare l'universo su un tempo-scala dinamico $t \sim 1/\rho^{1/2}$. Un universo statico sarebbe formalmente ottenibile dall'equazione dinamica:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) R$$

solo considerando un fluido cosmico con densità di energia o pressioni negative: $\rho < -\frac{3p}{c^2}$. Poiché un fluido del genere non sembrava fisicamente plausibile, Einstein modificò le equazioni di campo introducendo il termine Λ , detto **costante cosmologica**, e arrivando al risultato:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}$$

Questa generalizzazione corrisponde ad una nuova equazione fisica di carattere tensoriale che mantiene il carattere covariante dell'equazione a patto che Λ sia una costante universale e si tratta della forma più generale possibile delle

equazioni di campo in grado di mantenere il carattere di covarianza. La costante Λ è un termine dinamico totalmente imprevisto dalla teoria Newtoniana. Il vincolo sul valore di questa costante è che deve essere abbastanza piccolo da non modificare ad esempio le leggi del moto planetario. Immaginando di porre a zero tutte le sorgenti del campo $T_{ij} = 0$ si ottiene:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \Lambda g_{ij}$$

Λ rappresenta formalmente in questo modo il tensore energia-impulso nel vuoto. La costante è stata più volte abbandonata e riconsiderata. Le equazioni di campo, includendo Λ costante nello spazio e indipendente dal tempo diventano:

$$\begin{aligned}\dot{R}^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho R^2(t) - kc^2 + \frac{\Lambda}{3}R^2(t) \\ \ddot{R} &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)R(t) + \frac{\Lambda}{3}R(t)\end{aligned}$$

10.3 Interpretazioni dell'espansione cosmica accelerata e della costante cosmologica

Il termine Λ è interpretabile come la densità di energia nel vuoto. In MQ anche lo spazio completamente vuoto può avere una densità di energia finita ed eventualmente negativa (vedi campi di Higgs).

Per quantità fisiche che non coinvolgano la gravità, il valore di questa energia del vuoto è ininfluente poiché queste quantità dipendono unicamente da differenze di energia. La gravità è invece sensibile a questo stato fondamentale che chiamiamo energia nel vuoto, dal momento che la relazione $E = mc^2$ implica che a questa energia corrisponda una massa e quindi un effetto gravitazionale.

L'interpretazione della costante Λ è un termine di energia repulsiva del vuoto che si contrappone alla gravità. Espriamolo come un termine generico con densità di massa a riposo ρ_V che corrisponde ad una pressione $p_V = \rho_V c^2$.

Utilizziamo la prima legge della termodinamica:

$$dE = -p dV$$

applicandola ad un universo vuoto, omogeneo ed in espansione, a tale vuoto attribuendo una densità di massa-energia ρ_V e una pressione p_V ottenendo

$$\frac{d}{dt}(c^2\rho_V R^3)0_{pV} \frac{dR^3}{dt}$$

con $c^2\rho_V$ densità di energia associata. Se assumiamo che la densità di energia del vuoto $c^2\rho_V$ sia costante nello spazio e nel tempo, avremo:

$$\frac{d}{dt}(c^2\rho_V R^3) = c^2\rho_V \frac{dR^3}{dt} = -p_V \frac{dR^3}{dt} \text{ ossia } p_V = -c^2\rho_V$$

Quindi un'energia nel vuoto è vincolata a fornire una pressione negativa. In questo modo, trascurando la pressione della materia e rappresentando il termine $\Lambda R(t)/3$ nei termini dei suoi contributi a densità e pressione come densità e pressione nel vuoto, l'equazione dinamica diviene:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi GR(t)}{3}\left(\rho_m + \rho_V + \frac{3p_V}{c^2}\right)$$

ossia

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi GR(t)}{3}(\rho_m - 2\rho_V)$$

dove ρ_m e ρ_V sono rispettivamente la densità della materia gravitante e la densità di massa equivalente all'energia nel vuoto. Quando l'universo si espande si avranno le seguenti leggi di conservazione:

$$\rho_m(t) = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3, \quad \rho_V = \text{cost}$$

poichè la densità di energia nel vuoto non dipende dal valore di scala.

10.4 Il parametro Ω_Λ . Le nuove equazioni dinamiche

Potremmo riscrivere l'equazione dinamica nella forma

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G\rho_0 R_0^3}{3R^2(t)} + \frac{8\pi G\rho_V R(t)}{3}$$

che coincide con la soluzione dell'equazione di campo generalizzata se poniamo

$$\Lambda = 8\pi G \rho_V$$

Al tempo cosmico attuale $t = t_0$

$$\ddot{R}(t_0) = -\frac{4\pi G \rho_0 R_0}{3} + \frac{8\pi G \rho_V R_0}{3}$$

Possiamo introdurre un parametro di densità Ω_Λ associato all'energia nel vuoto:

$$\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G \rho_V}{3H_0^2} = \frac{\rho_V}{\rho_C} \quad \text{da cui } \Lambda = 3H_0^2 \Omega_\Lambda$$

con il parametro Λ che ha quindi le dimensioni di $[\text{tempo}]^{-2}$. Le osservazioni richiedono:

$$\rho_V \simeq 4 \cdot 10^{-29} [\text{gr/cm}^3]$$

un numero estremamente piccolo rispetto a valori che le teorie delle particelle elementari prevederebbero in modo naturale.

In termini di questi nuovi parametri Ω_Λ e Ω_m le equazioni dinamiche nell'Era dominata dalla materia prendono la forma:

$$\begin{aligned} \ddot{R}(t) &= -\frac{\Omega_m H_0^2 R_0^3}{2R^2(t)} + \Omega_\Lambda H_0^2 R(t) \\ \dot{R}^2(t) &= \frac{\Omega_m H_0^2 R_0^3}{R(t)} - kc^2 + \Omega_\Lambda H_0^2 R^2(t) \end{aligned}$$

Possiamo ottenere una nuova relazione tra i parametri di densità Ω_m e Ω_Λ e il parametro di decelerazione q_0 considerando che:

$$\begin{aligned} \ddot{R}(t) &= -\frac{4\pi G R(t)}{3} (\rho_m - 2\rho_V) \\ q_0 &= \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \end{aligned}$$

che produce la richiesta di espansione accelerata ossia $q_0 < 0$ per valori di Ω_Λ sufficientemente elevati e Ω_m piccoli. Sia Ω_m ce Ω_Λ influiscono sulla geometria dell'universo. Ricavando il parametro di curvatura kc^2 si ha infatti:

$$kc^2 = \frac{m H_0^2 R_0^3}{R(t)} + \Omega_\Lambda H_0^2 R^2(t) - \dot{R}^2(t)$$

e calcolandolo al tempo cosmico attuale si ottiene;

$$kc^2 = H_0^2 R_0^2 [\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1]$$

relazione che ci dice che si ha un universo piatto se $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Se l'universo è piatto deve esserlo stato in ogni tempo cosmico. L'unica situazione in cui questo rimane costante è quindi quando la somma delle densità è uno.

L'importante nota riguarda come i parametri di densità evolvono con il tempo cosmico:

$$\begin{aligned} \Omega_m(t) &\propto \rho_m(t) H(t)^{-2} \\ \Omega_\Lambda(t) &\propto H(t)^{-2} \end{aligned}$$

Per un universo con $kc^2 = 0$ al diminuire del tempo $\Omega_m \Rightarrow 1$ ovvero la densità di materia tende al valore critico corrispondente ad un universo di Einstein-De Sitter e al contempo $\Omega_\Lambda \Rightarrow 0$ al diminuire del tempo cosmico e al crescere di $H(t)$. Le convergenze avvengono in modo tale che se $k = 0$ a $t = t_0$ rimane $k = 0$ ad ogni tempo cosmico mantenendo invariata la somma $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

La relazione precedente dimostra che il termine Λ ha un grosso impatto sia sulla dinamica che sulla geometria del cosmo. Quest'ultimo aspetto è fondamentale in quanto le teorie attuali del Big Bang e delle prime fasi evolutive richiedono sostanzialmente un Universo a geometria piatta $k = 0$.

Per quanto riguarda la formulazione esatta del parametro di curvatura si ha

$$k = \frac{(\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1)}{c^2/H_0^2} = \frac{(\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1)}{R_H^2}$$

10.5 Soluzioni generali della dinamica cosmica

Riprendiamo le equazioni dinamiche generalizzate e investighiamo nuove soluzioni della dinamica cosmica su questa base.

Caso con $\Lambda < 0$ e $\Omega_\Lambda < 0$. È un caso non molto interessante: si manifesterebbe come un termine attrattivo che andrebbe ad aggiungersi alla gravità e aumenterebbe la sua forza di attrazione relativa al progredire del tempo e all'aumentare del fattore di scala $R(t)$. Ciò implicherebbe un veloce rallentamento dell'espansione con un inevitabile collasso.

Caso con $\Lambda > 0$ e $\Omega_\Lambda > 0$. Si prevede esista un tempo cosmico t_{min} corrispondente ad un minimo nel ritmo di espansione ovvero un minimo nel valore del parametro di Hubble $H(t)$, con un cambio di segno della \ddot{R} che si trova ponendola pari a zero:

$$R_{min} = R_0 \left(\frac{4\pi G \rho_0}{\Lambda} \right)^{1/3} = R_0 \left(\frac{\Omega_m}{2\Omega_\Lambda} \right)^{1/3}$$

corrispondente ad un redshift

$$z_{min} = \left(\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \right)^{1/3} - 1$$

sostituendo questo valore nella Friedman si ottiene il valore del tasso di espansione cosmica all'epoca della minima accelerazione:

$$\dot{R}_{min}^2 = \frac{3H_0^2 R_0^2}{2} (2\Omega_\Lambda \Omega_m^2)^{1/3} - kc^2$$

A questo punto si hanno diversi tipi di evoluzione del fattore di scala, a seconda che $\dot{R}_{min} >= < 0$:

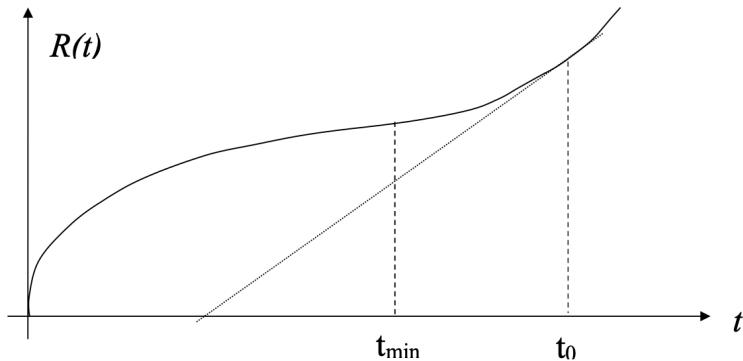


Figura 6

Evoluzione del fattore di scala $R(t)$ per un modello con $\Omega_\Lambda > 0$ e $\dot{R}_{min} > 0$. Il fattore di scala all'inizio segue un modello piatto di Einstein-de Sitter, poi quando si fa sentire la Λ a $t=t_{min}$ inizia una espansione esponenzialmente accelerata. La retta sottile a puntini indica la pendenza attuale del tasso di espansione, misurata dalla costante H_0 .

Figura 38

- Se $\dot{R}_{min} > 0$ avremo un'evoluzione come quella illustrata in Fig. 38. Per valori sufficientemente grandi di $R(t)$, il termine con Λ comincia a dominare su quello di autogravità e si ha un'espansione esponenziale;

$$\ddot{R}(t) \sim \frac{\Lambda R(t)}{3} \quad \text{la cui soluzione è } R(t) \propto \exp \left[\left(\frac{\Lambda}{3} \right)^{1/2} t \right]$$

- Se $\dot{R}_{min} \leq 0$ si ha una varietà di evoluzioni come si vede in Fig. 39. Il caso (B1) corrisponde a modelli di universo "rimbalzanti", il caso (B2) è simile alla soluzione in Fig. 38 solo che $\dot{R}_{min} = 0$ mentre i casi (B3) sono interessanti da un punto di vista teorico e vanno sotto il nome di Eddington-Lemaître. Il primo (1) è un universo in espansione esponenziale a partire da uno stato stazionario posto in un infinito passato, il (3) corrisponde ad un'espansione iniziata in un tempo finito nel passato e che arriva alla situazione $\dot{R}_{min} = 0$ per $t \Rightarrow \infty$. Il caso (2) coincide con l'asse dei tempi e corrisponde alla soluzione di un universo statico. La soluzione formale è quella di un modello chiuso con $k = +1$ e $\rho = \rho_C$. Vi è un valore critico che chiamiamo $\Lambda = \Lambda_C$ per cui si ha $\dot{R} = 0$

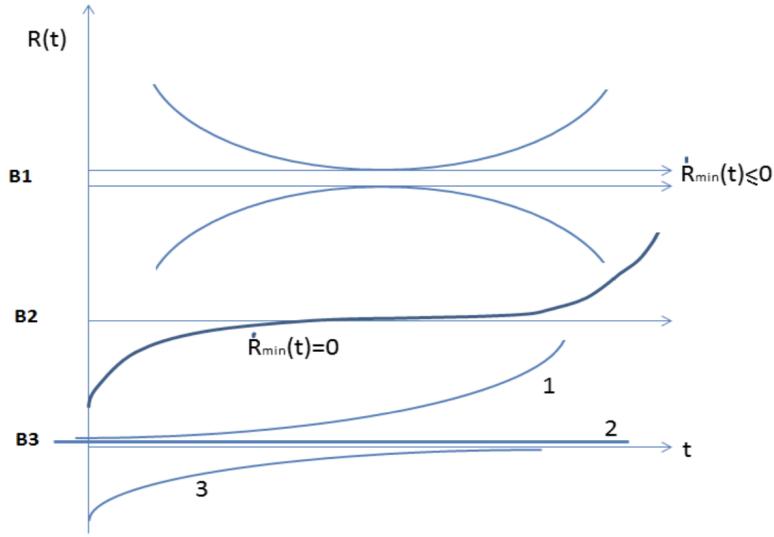


Figura 7

Vari tipi di soluzioni per l'evoluzione del fattore di scala $R(t)$ per un modello con $\Omega_\Lambda > 0$ e $\dot{R}_{\min} \leq 0$. Si veda il testo per maggiori dettagli.

Figura 39

e $\dot{R} = 0$. Dall'equazione dinamica si ha, trascurando effetti di pressione ($p = 0$) $\frac{4\pi G R}{3}\rho = \frac{\Lambda}{3}R$ che fornisce la condizione $4\pi G\rho_C = \Lambda_C$. Una seconda condizione si ottiene da $\dot{R} = 0$ che fornisce

$$\frac{8\pi G\rho R^2}{3} + \frac{\Lambda}{3}R^2 = kc^2$$

da cui sostituendo Λ_C , con $k = 1$

$$\Lambda_C = \frac{c^2}{R_C^2} = 4\pi G\rho_C$$

dalla quale si ottiene infine R_C . Pertanto una soluzione statica si ottiene formalmente per ogni tempo cosmico con $R = R_C$, $\Lambda = \Lambda_C$, $\rho = \rho_C$. Si tratta di una soluzione instabile poiché ogni piccola variazione potrebbe far cadere l'universo in una situazione di espansione o contrazione esponenziale.

Nessuno dei modelli con $\dot{R}_{\min} \leq 0$ ha reale interesse fisico: in universi del genere tutte le statistiche sulle sorgenti lontane sarebbero drammaticamente diverse da quanto osserviamo.

La soluzione riportata in Fig. 38 è invece in grado di riprodurre molto bene i dati a disposizione. In Fig. 40 si ha una sintesi delle caratteristiche delle soluzioni dinamiche che includano una costante cosmologica. La linea continua corrisponde a soluzioni con geometria piatta, quella continua orizzontale separa universi in continua espansione da quelli che collassano: un valore negativo di Λ implica un ri-collazzo dopo la fase espansiva. Le linee diagonali tratteggiate separano universi la cui espansione accelera da quelli in cui essa decelera. Per valori elevati di Ω_m si può avere decelerazione anche in presenza di una costante cosmologica positiva.

La parte ombreggiata a bassi valori di Ω_m e alti di Ω_Λ corrisponde ai casi di universo privi di singolarità iniziale: l'alto valore dell'energia repulsiva impedisce al fattore di scala di decrescere fino a zero.

10.6 Il nuovo modello standard di universo

Gran parte delle soluzioni formali discusse in precedenza sono in contrasto con le osservazioni cosmologiche. La soluzione presentata in Fig. 38 con $\Omega_m \sim 0.3$ e $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ fornisce una rappresentazione dell'evoluzione del fattore di scala con interessanti proprietà: questi parametri di densità permettono di riprodurre al meglio i dati del diagramma di Hubble delle SN 1A. Questi valori implicherebbero un universo piatto $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$ ma con una espansione con tasso che sta attualmente accelerando.

Questa soluzione dinamica corrispondente a $\dot{R}_{\min} > 0$ ha un redshift di minimo tasso di $z_{\min} \simeq (2\Omega_\Lambda/\Omega_m)^{1/3} - 1 \approx 0.66 \pm 0.1$. Durante la fase precedente a questo redshift l'universo si è espanso con una legge simile a quella di Einstein-De Sitter durante la quale l'effetto della costante cosmologica è stato quasi ininfluente. Con l'espandersi dell'universo la costante cosmologica prese il sopravvento. A partire dall'epoca z_{\min} l'espansione è progressivamente sempre più

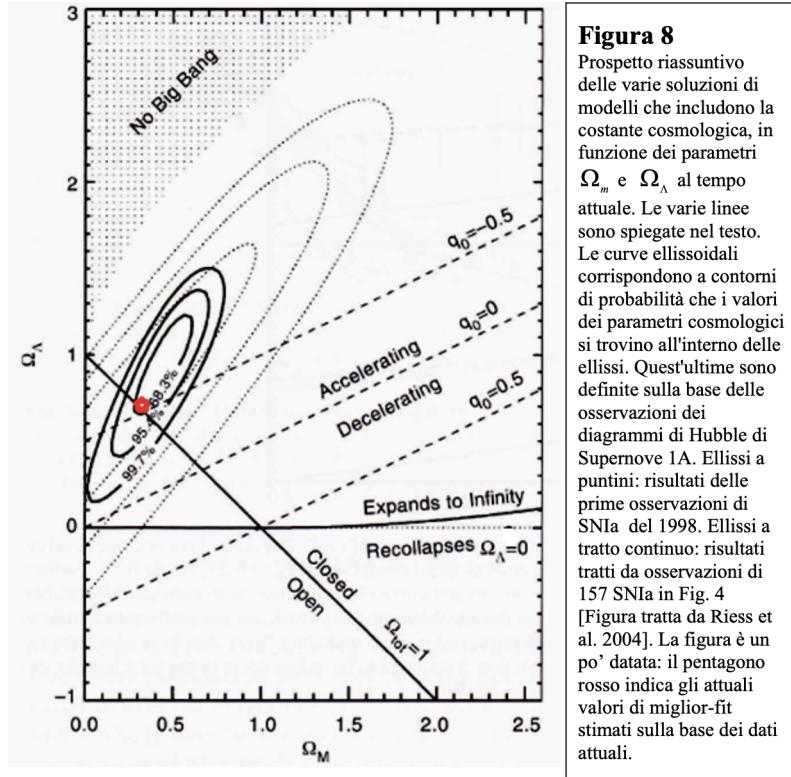


Figura 40

Figura 8

Prospetto riassuntivo delle varie soluzioni di modelli che includono la costante cosmologica, in funzione dei parametri Ω_m e Ω_Λ al tempo attuale. Le varie linee sono spiegate nel testo. Le curve ellisoidali corrispondono a contorni di probabilità che i valori dei parametri cosmologici si trovano all'interno delle ellissi. Quest'ultime sono definite sulla base delle osservazioni dei diagrammi di Hubble di Supernove 1A. Ellissi a puntini: risultati delle prime osservazioni di SNIa del 1998. Ellissi a tratto continuo: risultati tratti da osservazioni di 157 SNIa in Fig. 4 [Figura tratta da Riess et al. 2004]. La figura è un po' datata: il pentagono rosso indica gli attuali valori di miglior-fit stimati sulla base dei dati attuali.

dominata dall'energia oscura, sino ad arrivare ad una successiva fase di espansione esponenziale in cui l'energia oscura dominerà l'autogravità.

Le curve di forma ellisoidale in Fig. 40 corrispondono ai vincoli ai parametri di densità dedotti dalle SN 1A. Ben il 70% della massa-energia dell'universo sarebbe sotto forma di energia oscura responsabile dell'espansione accelerata: il 30% si trova sotto forma di materia gravitante di cui il solo 4% è materia barionica.

10.7 Nuove equazioni della dinamica cosmica

L'introduzione della costante cosmologica modifica la stima dell'età dell'universo. Possiamo infatti ottenere una generalizzazione dell'espressione che esprime il tasso di espansione di Hubble in funzione del tempo cosmico. Introduciamo un nuovo parametro di curvatura:

$$\Omega_K = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$$

che stabilisce il grado di curvatura dell'universo. Un suo valore negativo indica un universo chiuso.

Un caso di particolare interesse previsto da modelli di Big Bang è quello di un universo piatto con $k = 0$, $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, $\Omega_K = 0$ per il quale si trova immediatamente

$$\dot{R}(t) = R_0 H_0 (1+z)^{-1} [(1+z)^3 \Omega_m + \Omega_\Lambda]^{0.5} \quad \text{ovvero} \quad H(t) = H_0 [(1+z)^3 \Omega_m + \Omega_\Lambda]^{0.5}$$

Andando a ricavare il tempo e utilizzando i parametri di densità $\Omega_m = 0.3$, $H_0 = 70$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$ si ottiene:

$$t_0 = \frac{0.964}{H_0} \simeq 13.67 \text{ Gyrs}$$

Si nota nelle recenti osservazioni della radiazione di fondo che i parametri di densità hanno valori di $\Omega_m = 0.31$ e $\Omega_\Lambda = 0.69$ con $H_0 = 67.74$ che implicherebbero

$$t_0 \simeq 13.77 \text{ Gyrs}$$

L'effetto della costante è quello di stiracchiare il fattore di scala lungo l'asse dei tempi dilatando l'età pur in presenza di un valore relativamente elevato della costante di Hubble. L'età dell'universo risulta così consistente con l'età stimata degli ammassi globulari e delle stelle più antichi.

10.8 Effetti della costante cosmologica su scale di distanza, volumi e dimensioni angolari

Tutte le varie misure risentono della presenza della costante cosmologica ed è richiesta una significativa riformulazione della relazione di Mattig, che risulta più complessa.

[VEDI DA DISPENSE]

10.9 Interpretazioni alternative dell'espansione accelerata

Le principali interpretazioni per l'evidenza di un universo accelerato sono:

- presenza di una costante cosmologica nelle equazioni di campo relativistiche, termine puramente geometrico
- energia del vuoto: ben motivata fisicamente e matematicamente equivalente alla costante cosmologica
- campi scalari: periodo temporaneo di accelerazione cosmica, la quantità fisica corrispondente alla Λ può variare col tempo
- nuova fisica della gravitazione: modelli della gravitazione che vadano oltre alla relatività generale con deviazioni su grandissime scale spaziali
- soluzioni metriche che rinuncino al principio cosmologico mantenendo la relatività, richiederebbe una densità di materia che cresca all'aumentare della distanza

I dati a nostra disposizione non riescono ancora a vincolare precisamente il parametro Λ , una evidenza che tale parametro cambi con il tempo andrebbe nella direzione di porre in crisi la relatività e richiedere una nuova teoria della gravitazione.

11 Breve storia termica. Big Bang. Prime fasi evolutive

L'universo è una realtà che si modifica con il tempo cosmico, un universo evolutivo le cui proprietà nel passato erano totalmente diverse dalle attuali. Analizziamo i processi fisici principali che hanno regolato le prime fasi evolutive dell'universo.

11.1 Evoluzione del contenuto di materia ed energia dell'universo

Possiamo applicare la prima legge della termodinamica ad una porzione arbitraria di universo sufficientemente rappresentativa. Questa stabilisce una regola di conservazione dell'energia: il cambiamento di energia totale di un sistema in espansione egualia il lavoro delle forze di pressione

$$dE = -pdV$$

con l'energia legata alla massa da $E = mc^2$. I termini di densità d massa-energia includeranno i contributi sia della materia gravitante ρ_m che di particelle relativistiche ρ_γ :

$$E = (\rho_m + \rho_\gamma)c^2V = \rho c^2V$$

A causa dell'espansione il volume evolve in funzione del fattore di scala $R(t)$, $V \propto R(t)^3$, in modo tale da poter scrivere dalla prima equazione:

$$0 = \frac{dE}{dt} + p\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho R^3) + \frac{p}{c^2}\frac{d}{dt}(R^3)$$

questa è l'equazione fondamentale con la quale possiamo studiare alcuni aspetti fondamentali della storia termica dell'universo (si ottiene anche da una applicazione delle equazioni di campo relativistiche). Proviamo a trovare delle soluzioni inserendo i vari contenuti fisici nei termini di densità e pressione:

$$\rho = \rho_m + \rho_\gamma \quad p = p_r = \frac{\rho_\gamma c^2}{3}$$

dove si assume che la pressione sia solo dovuta alla componente fotonica e siano trascurabili quelli della materia gravitante (moti peculiari delle galassie avvengono con velocità molto minori di quella della luce). Universi con pressione della materia trascurabile sono detti universi di polvere. Sviluppiamo l'equazione:

$$0 = \frac{d}{dt}(\rho_m R^3) + \frac{d}{dt}(\rho_\gamma R^3) + \frac{\rho_\gamma c^2}{3c^2} \frac{d}{dt}(R^3)$$

dalla quale si ottiene la condizione generale di espansione adiabatica

$$\frac{d}{dt}(\rho_m R^3) + \frac{1}{R} \frac{d}{dt}(\rho_\gamma R^4) = 0$$

In assenza di radiazione questa equazione esprime la legge di evoluzione di un universo dominato da materia gravitante

$$\rho_m(t) = \rho_{m0} \left[\frac{R(t)}{R_0} \right]^{-3}$$

Per la componente radiativa, ponendo $\rho_m = 0$ si ha

$$\rho_\gamma(t) = \rho_{\gamma0} \left[\frac{R(t)}{R_0} \right]^{-4}$$

L'equazione di espansione adiabatica suggerisce che in assenza di conversione da materia a radiazione e viceversa, le due leggi evolutive per materia e radiazione valgono simultaneamente per le due componenti.

I due tassi evolutivi hanno una diversa dipendenza dal fattore di scala: mentre le particelle materiali non perdono la loro massa al trascorrere del tempo, i fotoni degradano in energia proporzionalmente a $(1+z)^{-1}$.

11.2 Epoca dell'equivalenza. Universi dominati dalla radiazione

Il rapporto tra le due componenti in funzione del tempo è

$$\frac{\rho_\gamma(t)}{\rho_m(t)} = \frac{\rho_{\gamma0}}{\rho_{m0}} \left[\frac{R(t)}{R_0} \right]^{-1}$$

che al diminuire del fattore di scala nel passato diventa un numero sempre più grande fino al momento che le due quantità si egualano, cosa che avviene all'epoca dell'equivalenza ottenibile egualando a 1 la precedente equazione:

$$\frac{R(t_{equiv})}{R_0} = \frac{\rho_{\gamma0}}{\rho_{m0}} = (1+z_{equiv})^{-1}$$

Dobbiamo aspettarci $z_{equiv} \geq 1000$. In epoche antecedenti all'epoca dell'equivalenza la densità di massa-energia della radiazione superava quella della materia $\rho_\gamma > \rho_m$ mentre in epoche più recenti ha dominato la materia.

Studiamo la dinamica cosmica in un universo dominato dalla radiazione. Questa soluzione si verificherà ad alti redshift ai quali sappiamo che le varie soluzioni dinamiche convergono verso un universo piatto. Nel caso di universo piatto dominato dalla radiazione l'equazione dinamica diventa:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G \rho_\gamma(t) R(t)}{3} = -\frac{4\pi G \rho_{0\gamma} R_0^4}{3R^3}$$

e la Friedman

$$\dot{R}^2 = \frac{4\pi}{3} G \rho_{0\gamma} \frac{R_0^4}{R^2} + kc^2$$

che si può risolvere facilmente:

$$\frac{dR}{dt} \propto R^{-1}, \quad \frac{R^2}{2} \propto t, \quad R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/2}$$

soluzione che ha un andamento diverso da quello classico di Einstein-De Sitter dominato dalla materia, $R(t) \propto t^{2/3}$, e che si applica nelle prime fasi espansive dell'universo.

11.3 Equazioni dinamiche generalizzate con materia, fotoni, energia oscura

La componente fotonica nell'universo locale è del tutto trascurabile da un punto di vista dinamico. È chiaro che la componente fotonica domina l'evoluzione dinamica del fattore di scala durante l'era dominata dalla radiazione, ma è anche significativa in epoche più tarde. Generalizzando le equazioni dinamiche inserendo una componente radiativa si ottiene, ad esempio, la relazione che esprime il parametro di Hubble come

$$H(z) = H_0 [\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_\gamma (1+z)^4 + \Omega_\Lambda]^{1/2}$$

dove $\Omega_\gamma = \rho_\gamma / \rho_C$ è il parametro di densità relativo ai fotoni e alle particelle relativistiche al tempo cosmico attuale.

11.4 Radiazione cosmica di fondo

Venne scoperta in modo completamente casuale e dal momento della sua scoperta si cercò di caratterizzare con sempre maggiore precisione questa radiazione per poter indagare direttamente il Big Bang. Un primo aspetto dibattuto fu la possibile origine di questa radiazione da parte di una popolazione di sorgenti cosmiche, tuttavia nessuna popolazione aveva le caratteristiche spettrali adeguate e inoltre alle frequenze della radiazione la maggior parte delle sorgenti produceva un minimo di emissione. Si scoprì presto che l'emissione era perfettamente consistente con una emissione di corpo nero nella regione di Rayleigh-Jeans con una radiazione quasi assolutamente isotropa.

11.5 La ricombinazione (disaccoppiamento)

Una prima considerazione da fare riguarda l'osservabilità dell'universo remoto. Potremmo in linea di principio calcolare la probabilità che un fotone generato da un evento qualsiasi dello spazio-tempo ha di essere assorbito da qualcuna delle componenti diffuse. Tale probabilità è funzione dell'energia dei fotoni: fotoni di altissima energia vengono rapidamente distrutti da collisioni con fotoni di energia minore che fanno parte delle radiazioni di fondo, oppure con particelle. Se consideriamo fotoni nel range dal radio agli X possiamo però dire che la probabilità di assorbimento all'epoca attuale è molto bassa, ovvero l'universo oggi è trasparente. Questa trasparenza però non può essersi mantenuta indefinitamente nel passato.

Nel nostro rewind temporale ci aspettiamo che le galassie si avvicinino sempre di più l'una all'altra, andando verso epoche in cui il fattore di scala $R(t)$ aveva un valore minore. Possiamo teorizzare che le galassie si tocchino: data la densità media di galassie massive di 10^{-2} Mpc^{-3} , la loro distanza caratteristica oggi è l'inverso della radice cubica della loro densità volumetrica, ovvero $(^3\sqrt{10^{-2}})^{-1} \approx 5 \text{ Mpc}$. Assumendo delle dimensioni di 30 Kpc ci potremmo aspettare che a $(1+z) \sim 100$ l'universo possa divenire completamente opaco a causa dell'addensarsi delle galassie tra loro e l'universo remoto diventerebbe così inosservabile. L'argomento non tiene conto del fatto che stelle e galassie si sono formate solamente in epoche più recenti di $z = 100$ quindi la trasparenza è garantita anche in epoche remote.

Per le componenti radiative? Molte di esse sono originate da attività di produzione di energia in sorgenti cosmiche in epoche relativamente recenti quindi nel passato tendono a scomparire. La CMB ha invece un'origine più antica. La sua perfetta forma di corpo nero ci porta ad affermare che i fotoni che meno hanno interagito con la materia durante un lunghissimo periodo di tempo sono quelli che mostrano lo spettro di corpo nero più perfetto.

La ricombinazione. Da una parte la densità di energia di questi fotoni è aumentata molto rapidamente con il redshift, d'altra parte anche la loro energia fotonica $h\nu$ è aumentata in proporzione lineare con $1+z$. Regredendo sufficientemente con il tempo, ci troveremo in condizioni fisiche sempre più peculiari del fluido cosmico nelle quali ogni singolo atomo di gas (idrogeno primordiale) si viene a trovare immerso in un bagno di fotoni sempre più denso e caldo, fotoni con i quali l'atomo viene sempre più spesso ad interagire. Si arriverà ad una situazione, quando la temperatura dei fotoni supererà $T \sim 3000 \text{ K}$, nella quale l'interazione inizia a produrre la ionizzazione degli atomi di idrogeno. Si verifica un rapido cambiamento di fase nel fluido cosmico, causato dal passaggio della fase ionizzata del gas primordiale ad una più recente fase neutra. In questa fase la sezione d'urto cambia drasticamente: passa da essere bassa o nulla ad una sezione d'urto Thompson σ_T . L'universo diviene così molto rapidamente da completamente trasparente a completamente opaco. Questa drastica trasformazione di fase va sotto il nome di ricombinazione. L'epoca della ricombinazione si colloca attorno al redshift $z \sim 1100$ e può essere vista come la superficie di ultimo scattering della radiazione di fondo, così come la fotosfera lo è per i fotoni emessi da una stella.

La posizione spaziale di questa superficie di ultimo scattering non è definita in assoluto ma è relativa ad ogni determinato osservatore fondamentale e cambia con la posizione spaziale di questo (mentre non cambia con il tempo).

A redshift superiori a quello della ricombinazione l'universo è completamente opaco, quindi nessuna sorgente cosmica è visibile a distanze cosmiche superiori a questo redshift. Questa superficie costituisce quindi una sorta di orizzonte oltre il quale la visione diretta dell'universo è impossibile.

Evoluzione spettrale della CMB. Il fenomeno della ricombinazione e la fase in cui tutto il fluido cosmico barionico era ionizzato spiega la forma perfetta di corpo nero della CMB: nel plasma primordiale prima della ricombinazione gli urti tra le particelle e tra le particelle e i fotoni erano talmente frequenti da realizzare uno stato di completo equilibrio tra materia e radiazione, cui è corrisposto uno spettro fotonico di corpo nero, uno spettro di Planck.

La densità di energia $\varepsilon_\gamma = \rho_\gamma c^2$ del campo di radiazione corrispondente ad uno spettro di Planck è data da:

$$\varepsilon_\gamma = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} [\exp(h\nu/kt) - 1]^{-1}$$

dove la temperatura ingloba l'unica dipendenza dal tempo. Si ha così

$$\varepsilon_\gamma = \frac{8\pi}{c} \int_0^\infty \frac{h\nu^3 d\nu}{[\exp(h\nu/kt_\gamma) - 1]^{-1}} \propto T_\gamma^4$$

dove T_γ è la temperatura del campo fotonico. Ma abbiamo

$$\rho_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma}{c^2} \propto R(t)^{-4} \propto T_\gamma^4$$

che implica un'evoluzione per il campo di radiazione tale da mantenere lo spettro di corpo-nero ad una temperatura che evolve con il fattore di scala secondo

$$T_\gamma \propto 1/R(t)$$

sino ad arrivare al tempo attuale ad una temperatura di $T = 2.728\text{ K}$ e una densità di energia:

$$\varepsilon_\gamma = 5.3 \cdot 10^{-13} \text{ erg cm}^{-3} = 0.3 \text{ eV/cm}^3$$

Prima dell'epoca della ricombinazione dato il fortissimo accoppiamento la materia barionica era vincolata a mantenere la stessa temperatura termodinamica della radiazione $T_m = T_\gamma$ ma in seguito tale accoppiamento è venuto meno e le due componenti si sono evolute indipendentemente.

Per quanto riguarda la radiazione dimostriamo ora che **lo spettro si mantiene rigorosamente di corpo-nero** e la temperatura evolve come

$$T_\gamma = T_0 R_0 / R(t) = 2.728(1+z)$$

nonostante dalla ricombinazione in poi non vi sia più stato alcun scambio di informazione tra la materia e la radiazione. Consideriamo l'evoluzione temporale della densità numerica dei fotoni per uno spettro di corpo nero che al generico tempo t_1 si scrive come

$$\frac{dN}{d\nu} = \frac{4\pi}{c} \frac{B_\nu}{h\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3 [\exp(h\nu/kT) - 1]}$$

Osservando ad un tempo successivo $t_0 > t_1$ tutti i fotoni saranno deppressi in energia per lo stesso fattore $\nu_0 = \nu R(t_1)/R(t_0) = \nu/(1+z)$. Anche l'intervallo di frequenza si restringe per lo stesso fattore mentre la densità fotonica diminuisce con $(1+z)^3$. Al tempo t_0 avremo quindi, dato dN/dt al tempo t_1 :

$$\frac{dN_0}{d\nu_0} = \frac{8\pi\nu_0^2}{c^3 [\exp(h\nu_0/kT_0) - 1]}$$

ove abbiamo posto $T_0 = T/(1+z)$. In conclusione lo spettro mantiene interamente la sua forma di corpo nero e l'unica variazione si ha nella temperatura.

Evoluzione del gas. Epoca della re-ionizzazione. La regola evolutiva della componente materiale è

$$\rho_m(t) = \rho_{0m} \left[\frac{R(t)}{R_0} \right]^{-3}$$

Utilizzando la corrispondente equazione di stato

$$P_m = \frac{\rho_m k T_m}{\mu m_H} = \text{cost } \rho_m^\gamma \quad T_m = \frac{\text{cost}}{k} r \rho_m^{\gamma-1} \mu m_H$$

con μ peso molecolare del fluido cosmico, ovvero essenzialmente il peso di un atomo di idrogeno, si ricava

$$T_m = 3000 \text{ K} \left(\frac{\rho}{\rho_{rec}} \right)^{\gamma-1} = 3000 \text{ K} \left(\frac{R(t)}{R_{rec}} \right)^{-3(\gamma-1)} = 3000 \text{ K} \left(\frac{1+z}{1000} \right)^2$$

avendo assunto espansione adiabatica con indice politropico $\gamma = 5/3$. La materia si raffredda quindi molto più velocemente della radiazione ($T_m \propto z^2$, $T_\gamma \propto z$).

Già al tempo corrispondente a $z \sim 30$ la materia si era portata praticamente allo zero di temperatura assoluta. L'universo è risultato sinora inosservabile durante tutta l'era cosmica che va dalla ricombinazione fino a circa $z \sim 11$ (420 milioni di anni dal Big Bang). Durante questo periodo si ritiene che il gas primordiale abbia cominciato a strutturarsi partendo da uno stato di grande omogeneità. Attorno a $z \sim 10$ vi sono chiare evidenze che le prime condensazioni di gas abbiano portato alla formazione delle prime sorgenti che evolvendo su tempi scala brevissimi hanno rilasciato nel mezzo diffuso primordiale una significativa quantità di elementi pesanti. Rapidamente queste prime luci hanno riscaldato la materia dell'universo e di nuovo ionizzato l'idrogeno diffuso. Questa epoca va sotto il nome di epoca della re-ionizzazione. La storia termica dell'universo è schematizzata in Fig. 41

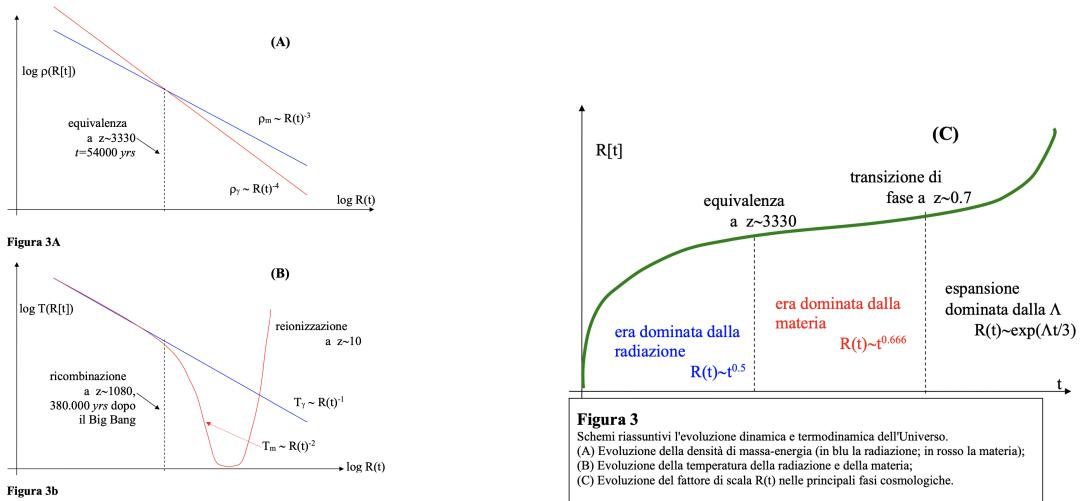


Figura 41

11.6 Era della ricombinazione

Rapporto fotoni/barioni. Per ogni atomo di idrogeno vi è un enorme numero di fotoni. Dividendo la densità di energia nella CMB per l'energia del fotone medio $h\nu$ con $\nu = 2 \cdot 10^{11}$ Hz, si ottengono circa $n_\gamma \sim 410$ fotoni/cm³. Per ottenere l'analogo numero di barioni si considera $\rho_{matter, stars} \simeq 5 \cdot 10^{-32}$ g/cm³ che però corrispondono solamente ai barioni condensati in stelle e galassie. Ha quindi senso considerare $\rho_{barion} \simeq 5 \cdot 10^{-31}$ g/cm³ e dividendo per la massa dell'idrogeno:

$$n_B \simeq 5 \cdot 10^{-31} [\text{g}/\text{cm}^3] / 1.6 \cdot 10^{-24} [\text{g}] \simeq 3 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-3}$$

da cui si ottiene che per ogni atomo vi sono circa un miliardo di fotoni, rapporto che viene indicato con il parametro

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \simeq 10^{-9}$$

Nonostante vi sia oggi una densità di materia 1000 volte superiore a quella della radiazione, in termini numerici i fotoni dominano largamente. Il parametro η è un'invariante cosmica ovvero in assenza di produzione e distruzione di fotoni tramite processi radiativi, questo numero non si modifica con l'espansione dell'universo (si vede immediatamente se si considera che la densità numerica di fotoni scala con R^{-3} , come la densità di particelle). Il reciproco del parametro η è anche detto entropia per barione.

Epoca della ricombinazione. Il numero di fotoni per barione ha un'importante conseguenza per quanto riguarda quando dia avvenuta la ricombinazione del plasma primordiale. La ionizzazione di un atomo di idrogeno avviene quando un fotone di energia 13.6 eV interagisce con l'atomo e viene assorbito. Questa è l'energia che ci si aspetterebbe caratterizzare il fluido cosmico al momento della ricombinazione e corrisponde ad una temperatura di

$$T \simeq h\nu/k \simeq 13.6 \text{ eV}/k \simeq 157000 \text{ K}$$

Dal confronto con la temperatura attuale della CMB si ottiene $z \sim 58000$.

Il ragionamento non tiene conto del fatto che ci sono molti fotoni per ogni atomo di idrogeno quindi a redshift inferiori vi sarà un numero sufficiente di fotoni nella coda di Wien dello spettro per mantenere la ionizzazione del plasma.

Per calcolare il corretto redshift della ricombinazione procediamo come segue. Consideriamo la frazione dei fotoni della planckiana con energia superiore a $h\nu$ (integrazione di $B_\nu(T)$ divisa per energia del fotone $h\nu$). L'integrale diventa analitico nel limite di Wien quindi per energie fotoniche superiori al picco e può essere confrontato con il numero totale di fotoni nella planckiana trovando la frazione di fotoni che ci interessa. Poniamo ora che questa frazione sia pari al numero medio di atomi di idrogeno per ogni fotone 10^{-9} . Per $E = 13.6$ eV si ha $T \simeq 5900$ K, temperatura alla quale l'universo era completamente ionizzato.

Un calcolo più accurato basato sulla risoluzione dell'equazione di Saha e del trasporto radiativo per scattering Thomson, mostra che la temperatura alla quale si ha il massimo della produzione di idrogeno neutro è un po' inferiore ovvero $T = 3000$ K che corrisponde un redshift $z_{rec} \simeq 1100$. Il processo non è istantaneo, la diminuzione del grado di ionizzazione avviene entro un intervallo di circa $\Delta z \sim 200$ attorno a $z \sim 1100$.

11.7 Evoluzione termodinamica nell'era della radiazione

Densità di energia della componente relativistica. Ricalcoliamo l'esatta epoca dell'equivalenza, considerando tutte le componenti di particelle relativistiche e confrontandole con tutte le componenti materiali presenti. Oltre ai fotoni dobbiamo aggiungere i neutrini cosmici, suddivisi in tre specie, una per ogni tipo di leptone. Possiamo esprimere la densità di massa-energia di neutrini ρ_ν come

$$\rho_\nu \simeq 3 \cdot \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \rho_\gamma \simeq 0.78 \rho_\gamma$$

Il totale per la componente relativistica al tempo attuale diviene

$$\rho_{rel} \simeq 1.78 \rho_\gamma \simeq 9.4 \cdot 10^{-34} \text{ g/cm}^3$$

dividendo questa quantità per la densità critica ρ_C otteniamo il parametro di densità Ω_γ della componente relativistica al tempo attuale:

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_C} \simeq 0.9 \cdot 10^{-4} \quad \text{con} \quad \rho_C = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \simeq 10^{-29} [\text{gr/cm}^3]$$

Dobbiamo porre questo a confronto con la densità di massa totale della materia gravitante, effettuando una stima sul contributo della materia oscura. Assumiamo come stima $\Omega_m \simeq 0.3$ con un contributo di 0.045 da parte dei barioni e 0.26 della materia oscura. Per questa componente avremo quindi

$$\rho_m \simeq \Omega_m \cdot \rho_C \simeq 3 \cdot 10^{-30} [\text{gr/cm}^3]$$

Epoche dell'equivalenza e della ricombinazione. Per definire il redshift a cui avviene la transizione tra la fase cosmica dominata dalla radiazione e quella dominata dalla materia si usa

$$(1 + z_{equiv}) = \frac{R_0}{R(t_{equiv})} = \frac{\rho_{m0}}{\rho_{rel}} \simeq \frac{3 \cdot 10^{-30}}{9 \cdot 10^{-34}} \simeq 3330$$

questo redshift è molto vicino a quello della ricombinazione. A quest'epoca il fluido cosmico aveva una temperatura di

$$T \simeq T_{equiv} \simeq T_0 \cdot z_{equiv} \simeq 9000 \text{ K}$$

Si può trovare con un calcolo accurato il tempo cosmico relativo all'equivalenza pari a $t_{equiv} \simeq 54000$ yrs.

Stimiamo ora l'età della ricombinazione considerando l'evoluzione del fattore di scala per un modello di Einstein-De Sitter, che fornisce una discreta rappresentazione sopra un'ampia parte dell'era dominata dalla materia:

$$R(t) = R_0 \left(\frac{t}{t_{EdS}} \right)^{2/3} \Rightarrow (1 + z) \simeq \left(\frac{9.6}{t[\text{Gyrs}]} \right)^{2/3}$$

Questa relazione fornisce una discreta rappresentazione dell'evoluzione del fattore di scala tra l'equivalenza e $z + 1$. Poiché $T_{equiv} > T_{rec}$ possiamo utilizzare la relazione per l'era dominata dalla materia per calcolare l'età corrispondente alla ricombinazione ottenendo $t_{rec} \sim 0.27$ Gyrs. Un risultato più preciso richiede l'integrazione della relazione completa e ritorna

$$t_{rec} \simeq 380000 \text{ yrs}$$

quindi la ricombinazione si è verificata meno di mezzo milione di anni dopo il Big Bang.

Le relazioni fondamentali nell'era della radiazione. In epoche antecedenti l'equivalenza calibriamo le relazioni del fattore di scala con il redshift e con il tempo cosmico ottendo

$$R(t) = R_{equiv} \left(\frac{t}{t_{equiv}} \right)^{1/2} \Rightarrow (1 + z) \simeq 3330 \left(\frac{54000}{t[\text{yrs}]} \right)^{1/2}$$

Ricaviamo una relazione tra il tempo e la temperatura del fluido cosmico

$$t[\text{sec}] \simeq \left(\frac{1.16 \cdot 10^{10}}{T[\text{K}]} \right)^2 \simeq \left(\frac{1 \text{ MeV}}{kT} \right)^2$$

una seconda equazione fondamentale riguarda la densità dei barioni

$$\rho_B(z) = \rho_B(0)(1 + z)^3 = \Omega_B \rho_C(1 + z)^3 \simeq 1.37 \cdot 10^9 \frac{\Omega_B}{0.005} (1 + z)^3 M_\odot \text{Mpc}^{-3}$$

dove $\rho_B(0)$ è la densità totale di materia barionica al momento ancora molto incerta, incertezza che parametrizziamo con il parametro Ω_B assumendo il vincolo $\Omega_B > 0.005$.

Queste sono le equazioni fondamentali che regolano la storia termica dell'universo durante le prime fasi di espansione. La prima delle due presuppone un equilibrio termico nel fluido di barioni e fotoni.

11.8 Equilibrio termodinamico primordiale

La condizione di equilibrio termodinamico quasi perfetto testimoniata dalle osservazioni spettrali si è mantenuta durante tutta l'era cosmica precedente la ricombinazione. Vi sono motivi per ritenere che questa condizione fosse verificata anche in epoche antecedenti il primo secondo dopo il Big Bang? Questo si può dimostrare considerando l'evoluzione del tempo scala di collisione τ_{coll} rispetto al tempo di vita dell'universo τ_H che a sua volta è all'incirca il tempo caratteristico dell'espansione τ_{dyn} . Abbiamo infatti

$$\tau_{dyn} \sim \frac{1}{(G\rho)^{1/2}} \propto R(t)^2 \propto t \quad \text{poichè } \rho(t) \propto R(t)^{-4} \quad \text{e} \quad R(t) \propto t^{1/2}$$

che coincide con l'andamento del tempo scala dell'espansione di Hubble durante l'era dominata dalla radiazione:

$$t_H \sim H(t)^{-1} = \frac{R(t)}{\dot{R}(t)} = \frac{t^{1/2}}{(2t^{1/2})^{-1}} \propto t$$

il tempo scala di interazione tra le varie componenti del fluido cosmico sarà invece

$$\tau_{coll} \sim \frac{1}{c\sigma n} \propto \rho(t)^{-1} \propto R(t)^3 \propto t^{1.5}$$

perchè la sezione d'urto d'interazione σ è dominata dalla micro-fisica e non risente dell'espansione. Avremo dunque complessivamente

$$\frac{\tau_{coll}}{\tau_H} \approx \frac{\tau_{coll}}{\tau_{dyn}} \propto R(t) \propto t^{0.5}$$

siccome sappiamo che $\tau_{coll} \ll \tau_H$ alla ricombinazione avremmo $\tau_{coll} \ll \tau_H$ a qualsiasi istante di tempo antecedente alla ricombinazione.

Proviamo ora a ricostruire i valori di alcuni parametri fisici in alcune fasi topiche dell'universo primordiale. Per quanto riguarda la quantità locale di barioni la approssimiamo a $\rho_B(0) \approx 10^9(\Omega_B/0.005)M_\odot/\text{Mpc}^3$ tenendo conto anche dei barioni non condensati in stelle.

- alla ricombinazione $T = 3330\text{ K}$ e $z \sim 1080$ con densità di gas $\rho_{rec} \approx 100\text{ atomi}/\text{cm}^3$ a fronte degli attuali $\rho_0 = 2.5 \cdot 10^{-7}\text{ atomi}/\text{cm}^3$ e di una temperatura fotonica di $T_\gamma = 2.728\text{ K}$
- all'equivalenza $T = 9000\text{ K}$ e $z = 3330$ troviamo $\rho_{equiv} \simeq 9000\text{ atomi}/\text{cm}^3$
- ad un secondo dopo il Big Bang la temperatura del plasma primordiale era $T \sim 10^{10}\text{ K}$ e $z_{1sec} \sim 4 \cdot 10^9$ con $\rho_{1sec} = 10\text{ Kg}/\text{m}^3$. Questo dato ci da un'idea di quanto velocemente l'universo si sia espanso durante le prime fasi
- a 10^{-6} secondi dal Big Bang la temperatura è di $T \sim 10^{13}\text{ K}$ e $z \sim 4 \cdot 10^{12}$ e la densità di materia raggiunge il valore di $10^{10}\text{ Kg}/\text{m}^3$

11.9 Nucleo-sintesi primordiale

Le sorgenti cosmiche non sono visibili direttamente a redshift superiori a $z_{rec} \sim 1100$ ma si possono effettuare delle osservazioni indirette, abbandonando l'utilizzo dei fotoni come messaggeri di informazioni. La più importante di queste osservazioni indirette riguarda il processo della nucleo-sintesi primordiale.

Tra circa 1 sec e qualche minuto dopo il Big Bang si sono create nel fluido cosmico condizioni di densità e temperatura del gas barionico favorevoli al bruciamento termonucleare di una parte dell'idrogeno primordiale in una serie di elementi più pesanti. La nucleo-sintesi primordiale permette di spiegare l'abbondanza di ${}^4\text{He}$ nel plasmastellare.

11.9.1 Primi secondi dell'espansione cosmica

Ogni particella elementare di massa m presente nel fluido cosmico pre-ricombinazione risulta immersa in un bagno di fotoni in una condizione di perfetto equilibrio termodinamico: se la temperatura del fluido è superiore a $kT \approx mc^2$ una collisione tra fotoni e particelle crea una coppia formata da una particella e dalla sua anti-particella che si può annichilire dando origine a due fotoni energetici. Ad alte temperature i processi si compensano mantenendo l'equilibrio termodinamico. Al diminuire della temperatura vengono a mancare i fotoni energetici che creano le particelle: la temperatura alla qual questo avviene è chiamata temperatura critica in relazione ad una determinata tipologia di particelle. Elenchiamo le principali tappe che portano alla nucleosintesi.

- **Transizione di fase quark-androne.** La temperatura critica alla quale gli androni (particelle pesanti, protoni e neutroni) si disaccoppiano dal fluido cosmico è $T \sim 10^{12.5}$ K ossia $t \sim 10^{-5}$ sec. In questa epoca i quark (costituenti fondamentali degli androni) che dominano in epoche precedenti vengono confinati negli androni (neutroni, protoni e pioni) ed ha inizio una breve fase chiamata era andronica. Questa fase finisce a circa $T \sim 10^{12}$ K ossia $t \sim 10^{-4}$ sec. In epoche successive a questa rimane un piccolo residuo di neutroni e protoni, quelli che andranno poi a costituire l'universo barionico in tutte le epoche successive. Ciò richiede ovviamente una piccola asimmetria tra particelle e anti-particelle a favore delle prime nelle primissime fasi, una questione ancora in investigazione.
- Dopo $t \sim 10^{-4}$ si ha l'era leptonica (delle particelle leggere). Queste sono in perfetto equilibrio di creazione e annichilazione con i fotoni e sono quindi molto numerose. L'equilibrio tra le due componenti androniche rimanenti a quest'epoca è mantenuto tramite le seguenti reazioni regolate dalle interazioni deboli:

$$n + \nu_e \leftrightarrow p + e^- \quad n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e \quad n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

- A causa della differenza di massa tra neutroni e protoni al diminuire della temperatura l'equilibrio si sposta progressivamente a favore dei protoni secondo la legge

$$\frac{N_n}{N_p} = \exp(-\Delta m \cdot c^2/kT) = \exp(-1.5 \cdot 10^{10}/T)$$

- **Annichilazione dei leptoni.** Tra $T = 10^{10}$ e $T = 5 \cdot 10^9$ K, corrispondente ad un intervallo compreso tra 1 secondo e 4 secondi dopo il Big Bang si annichilano prima i neutrini e gli anti-neutrini, poi gli elettroni e gli anti-elettroni. Al termine dell'era leptonica, ovvero quando la maggior parte dei leptoni si sono annichiliti il rapporto tra neutroni e protoni si congela al valore dato in precedenza in quanto non si hanno più le reazioni descritte prima. In seguito l'unico processo in grado di modificare tale rapporto è il decadimento β dei neutroni $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ che avviene con un ritmo temporale ben definito.
- Al momento del disaccoppiamento dei neutrini a $T = 10^{10}$ K avremo $N_n/N_p \simeq 0.2$ cosicchè da quel momento in poi la frazione di neutroni evolverà secondo la legge

$$\frac{N_n}{N_n + N_p} = \frac{0.2}{1.2} \exp(-t/886 \text{ sec}) \simeq 0.16 \exp(-t/886 \text{ sec})$$

- I neutroni sono a rischio di sparire completamente in una quindicina di minuti ma alla temperatura di $T = 10^9$ iniziano a verificarsi le condizioni di densità e temperatura adatte al verificarsi del **bruciamento nucleare** che porta alla formazione di nuclei di elio e altri nuclei leggeri. Questa temperatura si verifica circa 3 minuti dopo il Big Bang. In questo modo tutti i neutroni presenti vengono inglobati nei nuclei di elio e pochi altri, nuclei nei quali essi rimangono stabili nel tempo per un tempo illimitato.
- Il processo di **fusione termonucleare primordiale** si verifica con modalità complesse dal momento che il plasma è rarefatto e la densità di particelle è molto bassa. La nucleo-sintesi procede quindi attraverso una sequenza di urti e fusioni a due corpi.
- **Deuterium bottleneck.** La reazione che limita la produzione di elio è quella che produce il deuterio in quanto questo nucleo ha un debole legame che viene facilmente spezzato da fotoni con 2.2 MeV ($T \sim 2.5 \cdot 10^{10}$ K): solo a temperature del plasma sufficientemente basse il deuterio diventa stabile. In presenza di un elevatissimo numero di fotoni energetici il deuterio viene più efficacemente distrutto che creato: la temperatura alla quale il D comincia a sopravvivere si può calcolare con la stessa procedura con la quale abbiamo stimato l'epoca della ricombinazione. La catena nucleo-sintetica potrà dunque cominciare a procedere a $T \sim 10^9$ K ovvero circa due minuti dopo il Big Bang. Questo inoppo della nucleo-sintesi va sotto il nome di "collo di bottiglia del deuterio".
- Non esistono nuclei stabili con numero atomico 5 e 8 così una volta prodotto l'elio la nucleo-sintesi si arresta perché in pochi casi reazioni nucleari sono in grado di produrre nuclei più pesanti dell'elio: solo litio e berillio vengono prodotti in tracce significative.
- La nucleo-sintesi primordiale termina quando la temperatura del plasma è diminuita a tal punto da non permettere ulteriori reazioni importanti. Nel seguito plasma di idrogeno ed elio si raffredda insieme ai fotoni. Per effetto del forte accoppiamento dovuto all'elevata sezione d'urto σ_T , le temperature delle due componenti rimangono identiche fino alla ricombinazione, quando si verifica il loro disaccoppiamento.

11.9.2 Predizioni della nucleo-sintesi primordiale

Abbondanza di elio primordiale. La nucleo-sintesi può considerarsi conclusa una quindicina di minuti dopo il Big bang. Una volta assunto il modello standard di Big Bang caldo, la teoria è in grado di predire l'abbondanza di ^4He prodotto: a circa 250 s ($T \sim 10^9$) quando il deuterio comincia a stabilizzarsi e quando si ha la massima attività di nucleo-sintesi, la frazione in massa di neutroni è

$$X_n = \frac{N_n}{N_n + N_p} \simeq 0.12$$

mentre l'abbondanza in massa di elio sarà il doppio di questa quindi

$$Y = X_{He} = 2X_n \simeq 0.24$$

e corrispondentemente un'abbondanza in numero di atomi di ^4He pari a

$$N_{He} = \frac{N_{He}}{N_{He} + N_H} \simeq 0.06$$

Questo risultato ha una debolissima dipendenza da $\rho_B(0)$.

Da un punto di vista osservativo l'elio si può trovare in stelle di alta temperatura e nelle regioni HII. Esso è però prodotto anche da stelle durante la loro evoluzione in una quantità che è importante valutare. L'analisi prevede quindi di studiare regioni HII dove il plasma risenta minimamente dell'attivitàstellare (si vede dalla quantità di elementi pesanti presenti e dalle righe di emissione). Estrapolando l'abbondanza a zero metallicità si ha un valore di

$$Y \simeq 0.238 \pm 0.005$$

che corrisponde all'abbondanza in massa dell'elio indipendente dalla attivitàstellare (risultato molto simile a quanto previsto dalla nucleo-sintesi primordiale).

UN primo risultato di questa teoria ha riguardato quindi un test fondamentale della teoria del Big Bang caldo, test che si basa esclusivamente sul numero di fotoni oggi osservato nella radiazione CMB e sulla sua temperatura e sulle misure delle sezioni d'urto che stabiliscono la probabilità delle interazioni di sintesi termo-nucleare e quelle relative alle interazioni deboli.

In questo modo eventi occorsi nell'universo ben prima della ricombinazione divengono verificabili in modo indiretto tramite misure di abbondanza utilizzando come messaggeri dell'universo primordiale le abbondanze di elementi leggeri.

Abbondanze di elementi leggeri. Densità totale dei barioni. La teoria della nucleo-sintesi fornisce altre importanti informazioni dalla struttura dell'universo. IN particolare l'abbondanza di deuterio e litio dipendono fortemente dalla densità di plasma all'atto di nucleo-sintesi. In particolare una elevata densità di plasma fa sì che le reazioni nucleari proceda o con massima efficienza nel convertire dapprima tutti i neutroni presenti in deuterio, poi tutto il deuterio formato in elio. Viceversa una bassa densità di plasma comporta una bassa probabilità di interazione tra i nuclei che lascia una certa quantità di ioni di deuterio e ^3He che non hanno potuto interagire e che quindi sono rimasti incendiuti. Una misura delle abbondanze di questi elementi in siti astrofisici incontaminati produce quindi una misura della densità di barioni presenti a quell'epoca e, siccome la densità comovente si è conservata, la densità totale media dell'universo oggi.

Una misura dell'abbondanza di deuterio è abbastanza vincolante sotto questo punto di vista e fornisce come risultato una densità di barioni pari a

$$\Omega_B \simeq (0.045 \pm 0.002) \left(\frac{H_0}{70 \text{ Km/s/Mpc}} \right)^{-2}$$

Da notare che questa stima è perfettamente consistente con altre stime totalmente indipendenti.

La cosmologia fornisce così la più potente misura della quantità totale di materia barionica che risulta un fattore circa 10 volte superiore alla quantità totale di gas condensato in stelle che abbiamo precedentemente stimato pari a $\rho_{matter, stars} \simeq 3.4 \cdot 10^{-32} \text{ gr/cm}^3$ corrispondente ad un valore del parametro di densità $\Omega_B = \rho_{matter, stars}/\rho_C \simeq 0.0034$.

Pertanto una delle problematiche fondamentali della cosmologia osservativa è verificare questa previsione e identificare ove questo gas non congelato in stelle risiede.

11.10 Breve sguardo sui primi istanti dell'universo

La Fig. 42 riporta un sintetico riassunto delle prime fasi evolutive dell'universo e si nota che ci è una grande quantità di eventi occorsi durante il primo secondi dal Big Bang. L'andamento è chiaramente logaritmico.

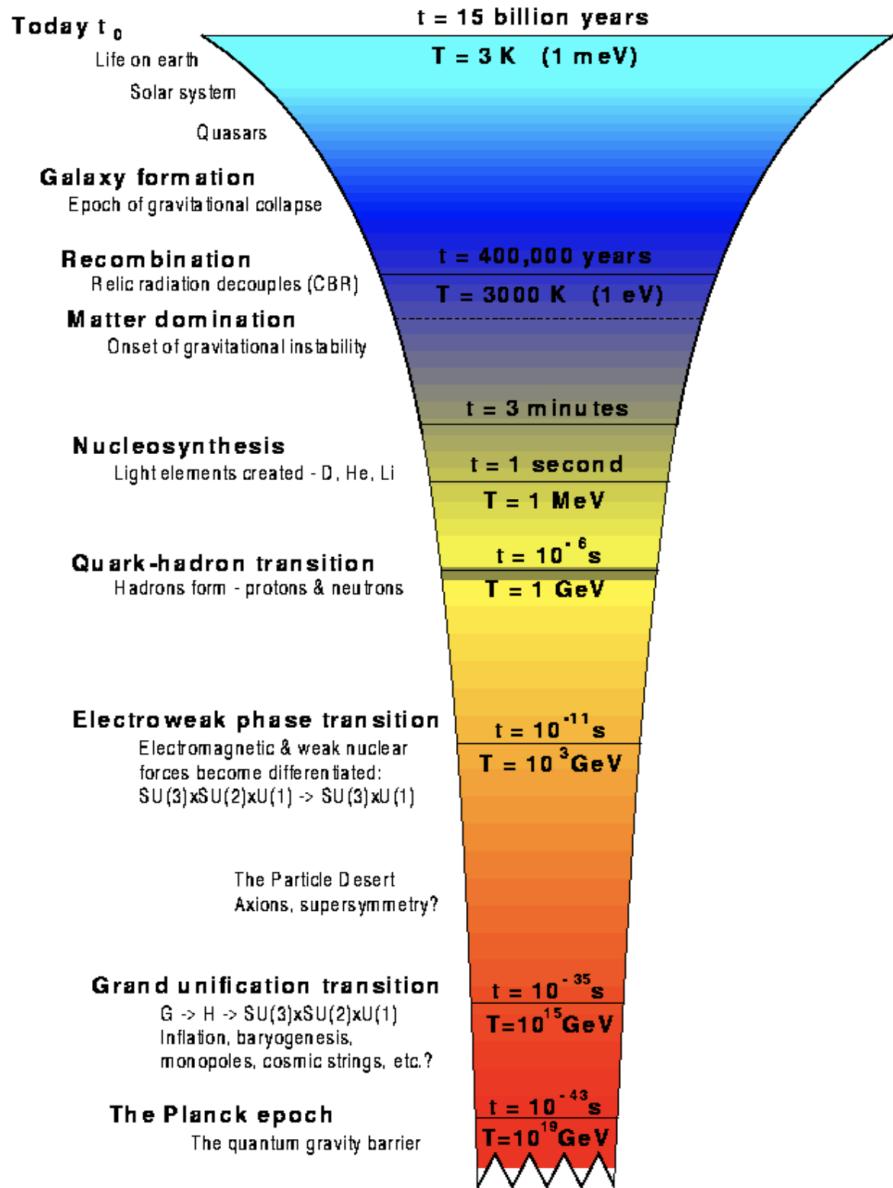


Figura 7 Principali fasi evolutive dell'Universo dopo il Big Bang. Il colore indica la temperatura del fluido cosmico, che diverge assieme agli altri parametri termodinamici alla base del grafico.

Figura 42

12 Nuclei galattici attivi

12.1 Principali categorie di AGN

Le popolazioni principalmente studiate sono le galassie normali, la popolazione di gran lunga maggioritaria che però è composta da oggetti che non sono molto luminosi. Per questo motivo le galassie normali sono risultate rivelabili solamente fino a moderate distanze cosmiche.

Gli unici oggetti rivelabili fino alle più grandi distanze spazio-temporali sono di una diversa categoria e non traggono la loro energia dal bruciamento termonucleare in stelle. Si tratta dei nuclei galattici attivi, ospitati solamente da galassie attive. Queste costituiscono una minima parte delle galassie normali e si dividono in tre categorie:

- galassie con eccesso di emissione infrarossa selezionare nel lontano IR, galassie luminose (LIRG), ultra-luminose (ULIRG) e iper-luminose (HYLIRG): le tre classi hanno luminosità bolometriche rispettivamente $> 10^{11} L_\odot$, $> 10^{12} L_\odot$, $> 10^{13} L_\odot$
- nuclei attivi radio-quieti (quasar ottici e galassie di Seyfert)
- nuclei attivi radio-brillanti (radiogalassie e quasar radio)

Lo studio delle funzioni di luminosità locale mostrano che nell'universo locale:

- galassie LIRG, ULIRG e galassie con violenta attività di formazione stellare (starburst) costituiscono il 10% delle galassie normali
- gli AGN radio-quieti costituiscono il 10% delle galassie starburst
- gli AGN radio-brillanti sono il 10% dei radio-quieti

ciò vale nell'universo locale. Le galassie attive hanno costituito una ben più importante componente cosmologica nel lontano passato dell'universo.

12.2 AGN radio-emittenti: le radiogalassie

Le radiogalassie hanno costituito la prima evidenza di rilevanti emissioni non-termiche da parte di sorgenti astrofisiche. Che queste emissioni sino da interpretare come dovute a fenomeni coinvolgenti particelle non-termiche è indicato dagli enormi valori della temperatura di brillanza T_B ovvero la temperatura che dovrebbe avere un corpo nero per emettere con quella brillanza superficiale

$$T_B = \frac{c^2 I_\nu}{2k\nu^2}$$

Queste emissioni radio sono dovute alla radiazione di sincrotrone da elettroni ultrarelativistici in un campo magnetico debole.

12.3 Emissione non-termica di sincrotrone

È il caso limite di un'emissione di ciclotrone per elettroni relativistici.

VEDI DA DISPENSE

12.4 Proprietà morfologiche e spettrali delle radiogalassie

Alle basse frequenze radio dominano strutture di enormi dimensioni a 2 lobi ben separate con spettri radio a legge di potenze. Le morfologie radio delle radiosorgenti estese sono state classificate da Fanaroff-Riley:

- **tipo I**: radiosorgenti doppie con distribuzioni di brillanza superficiale relativamente smussate e decrescenti verso i bordi, dette "relaxed doubles"
- **tipo II**: radiosorgenti doppie con distribuzioni di brillanza superficiale con margini esterni ad alta brillanza superficiale e appaiono come sorgenti ben collimate
- **peculiari**: tipo sorgenti a chioma e in generale complesse. Queste peculiarità sono ad esempio dovute al fatto che tali radiogalassie si trovano in ammassi di galassie: la presenza di un plasma caldo che permea l'ammasso induce un effetto di chioma all'emissione radio dovuta al moto della galassia ospite all'interno dell'ammasso

La galassia ottica che costituisce la controparte della sorgente radio si colloca tipicamente al centro lungo una linea che collega i due radio-volumi. Quasi sempre in prossimità del centro di queste galassie si manifestano emissioni radio compatte. Nel caso delle radiogalassie la galassia ospite risulta essere una galassia dei primi tipi morfologici. Gli spettri piatti a loro volta sono di due tipi: spettri realmente piatti e a legge di potenza o spettri multi-componenti, con evidenze di auto-assorbimento in sistemi di nubi emittenti sincrotron a diversa densità di particelle. In questo caso si hanno spettri complessivamente piatti ma a molte componenti.

Usando la Very Large Baseline Interferometry si è verificato che su scale angolari più piccole si trovano le stesse strutture a forma di getto osservate su scale maggiori. L'interpretazione è che esistono una sorta di cannoni entro il nucleo di questi oggetti in grado di produrre getti di plasma in grado di trasferire energia dalla sorgente centrali ai radiovolumi estesi.

12.5 Energetica dell'emissione delle radiogalassie

VEDI DA DISPENSE

12.6 AGN radio-quiete: quasars e galassie di Seyfert

Le radiogalassie costituiscono una piccola minoranza degli AGN. La popolazione più rilevante è quella degli oggetti radio-quieti, che include essenzialmente i quasar ottici e le galassie di Seyfert, le cui caratteristiche principali sono:

- intensa emissione non-risolta spazialmente in banda ottica
- l'emissione presenta un eccesso nell'infrarosso termico e talvolta nell'UV
- l'emissione ottica evidenzia una elevata variabilità del flusso in funzione del tempo
- negli spettri ottici si evidenziano intense righe d'emissione che spesso appaiono fortemente allargate
- l'emissione radio di questi oggetti è tipicamente molto debole, pertanto possiamo considerare che l'emissione in ottico e in radio siano piuttosto anti-correlate negli AGN

Le galassie di Seyfert sono state tra le prime ad essere identificate. La principale differenza tra quasar ottici e galassie di Seyfert consta dunque nella luminosità nucleare: nei quasar essa è così grande che la galassia ospite risulta praticamente invisibile mentre nelle galassie di Seyfert la luminosità del nucleo attivo è sufficientemente bassa che la galassia ospite risulta ben visibile.

Gli spettri ottici AGN presentano notevoli caratteristiche che certificano la diversa natura di questi oggetti rispetto alle galassie normali. Hanno intensissime righe di emissione in particolare righe permesse della serie di Balmer. Oltre ad essere molto intense queste righe sono anche molto allargate. Evidentemente le righe larghe emesse dagli AGN provengono da regioni galattiche caratterizzate da campi gravitazionali estremamente più intensi. Questo fatto è consistente con l'idea che l'attività nucleare delle radiogalassie sia dovuta ad accrescimento di gas su un buco nero supermassivo. Questo oggetto genererebbe così un intensissimo campo di gravità e spiegherebbe l'allargamento delle righe assumendo che esse originino da gas denso in moto in prossimità del buco nero.

Si evidenziano inoltre varie righe permesse di elementi pesanti (carbonio, magnesio, ossigeno ecc).

Sono stati identificati AGN privi di righe larghe e dell'intenso flusso UV: si tratta di AGN di tipo II.

Come possiamo comprendere gli oggetti di tipo II che sembrerebbero essere nuclei attivi privi di evidenza spettroscopica di un oggetto collassato nucleare? La risposta viene dal cosiddetto modello unificato dell'attività nucleare: il modello prevede che nella zona circumnucleare il gas e la polvere in accrescimento sul buco nero siano organizzati in una struttura a forma di toro che circonda il nucleo, che presenta una apertura in due zone polari corrispondenti all'asse di rotazione. Tale struttura, denominata toro d'accrescimento, sarebbe determinata dalla presenza di momento angolare nel gas che cresce, momento che schiaccia la struttura del piano equatoriale. La polvere presente nel toro oscura sia l'emissione del continuo UV, sia delle righe larghe emesse da nubi circumnucleari contenute entro il toro.