

1 Introduzione

1.1 Background storico

1666: Isaac Newton con l'esperimento del prisma dimostra la natura composita della luce bianca. La parola *spettro* fu introdotta proprio da Newton per indicare una distribuzione continua di una quantità. La parola *spettroscopia*, invece, indica un'osservazione quantitativa dello spettro.

1800: Herschel dimostra il potere "riscaldante" dei raggi dello spettro solare con un effetto massimo nell'IR. Ritter scopre l'oscuramento del cloruro d'argento quando esposto al lato violetto dello spettro.

1801: Young dimostra la natura ondulatoria della luce con gli esperimenti di diffrazione e interferenza attraverso le fenditure.

1802: Wollaston identifica delle righe scure collocate nello spettro del sole tra i colori primari.

1814: Fraunhofer produce il lavoro classico sullo spettro solare utilizzando prismi e grating di alta qualità, catalogando centinaia di righe e stimando la loro intensità (fino al 1860 si crede che tali righe abbiano origine dall'atmosfera terrestre).

1823: Herschel suggerisce che il colore delle fiamme prodotte bruciando diverse sostanze potrebbe essere usato per delle analisi chimiche.

1842: Becquerel ottiene il primo spettro fotografico dello spettro solare, includendo le righe nell'UV.

1860: Kirchhoff e Bunsen studiano lo spettro delle fiamme prodotte da vari sali trovando alcune lunghezze d'onda delle righe corrispondenti a quelle dello spettro solare trovate da Fraunhofer dimostrando che le righe di Fraunhofer sono una testimonianza della composizione chimica della superficie solare. Kirchhoff inoltre definisce le leggi spettroscopiche riguardanti la produzione di spettri continui e righe di emissione e assorbimento:

- un oggetto denso e caldo produce un **continuo**
- un gas caldo e di bassa densità produce emissioni a lunghezze d'onda discrete \Rightarrow **linee di emissione**
- un gas freddo e tenue assorbe la radiazione da una fonte di radiazione nel background alle stesse lunghezze d'onda discrete \Rightarrow **linee di assorbimento**

Nello stesso periodo vennero condotti parallelamente dei lavori di analisi dello spettro stellare che portarono allo schema di classificazione di Harvard.

1.2 Informazioni ricavate dagli spettri astronomici

L'analisi degli spettri permette di derivare un numero di proprietà importanti:

- temperatura e stato di eccitazione
- pressione o densità
- composizione chimica
- velocità radiali e campi di velocità
- forza dei campi magnetici

1.3 Galassie: dall'UV al radio

In Fig. 1 è riportata schematicamente la distribuzione di energia di una galassia late-type, dal lontano ultravioletto al radio.

Le componenti principali che si individuano sono:

- *stelle* - righe di assorbimento nella parte alta del continuo. Il flusso di quest'ultimo diventa trascurabile se confrontato con le emissioni della polvere a lunghe lunghezze d'onda

- *gas* - radiazione continua di free-free viene emessa nelle regioni ionizzate da elettroni che decelerano in presenza di ioni. Processi atomici e molecolari danno luogo a righe di emissione. Il diagramma include le righe dell'idrogeno nell'ottico e nel vicino IR, righe proibite di metalli nel mIR e fIR e righe molecolari (CO) nel millimetrico. Molecole presenti nel mezzo interstellare freddo creano bande interstellari diffuse in assorbimento in spettri di stelle e altre fonti in background
- *polveri* - a brevi lunghezze d'onda i fotoni sono assorbiti e scatterati da grani di polveri che emettono radiazione termica con picchi nel fIR. I silicati producono forti righe, principalmente in assorbimento, nel mIR. Composti organici complessi danno luogo a bande di emissione nel nIR

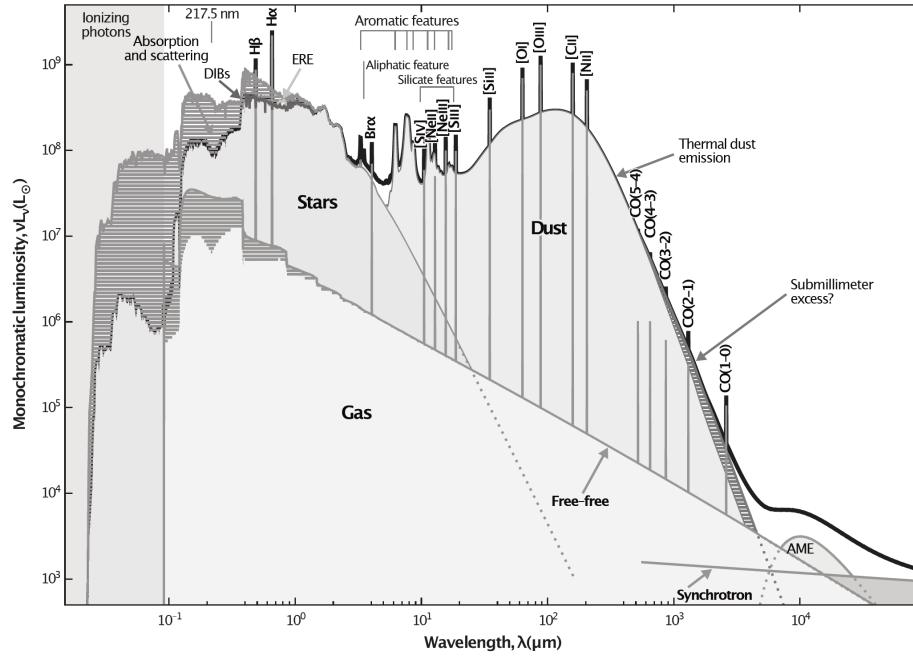


Figura 1: Distribuzione dell'energia spettrale di una galassia late-type

2 Spettrografi

Cominciamo con l'analizzare come gli spettri astronomici nell'ottico possono essere ottenuti e studiati. Una schematizzazione della struttura di uno spettrografo ottico long-slit è riportata in Fig. 2. I principali elementi sono:

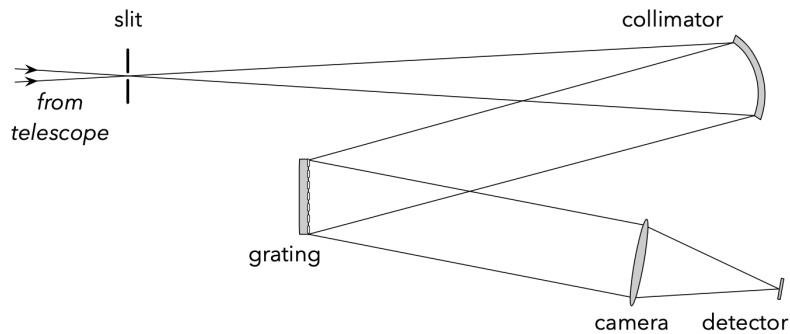


Figura 2: Principali elementi di uno spettrografo grating

1. **Slit di entrata**, posizionata sul piano focale del telescopio: isola l'emissione dell'oggetto in esame. Se si restringe la slit si aumenta la risoluzione spettrale, definita come:

$$R = \lambda / \Delta\lambda$$

a spese della quantità di luce trasmessa. $\Delta\lambda$ è il minimo intervallo di lunghezza d'onda che può essere risolto. Nell'ottico e IR risoluzioni medie e basse sono date da $R < 5000$ mentre alte risoluzioni hanno valori di $R \simeq 30\,000 - 50\,000$. Per un osservatore la larghezza della slit è solitamente espressa in termini del suo angolo di vista nel cielo e sono dell'ordine di 1 arcsec o comunque confrontabili con il valore del seeing. Uno spettro può essere interpretato come una successione di immagini della slit al variare della lunghezza d'onda. La spettroscopia slitless produce spettri per tutti gli oggetti presenti nel campo di vista: tale tecnica può essere usata per grandi surveys, per esempio per analizzare le linee di emissione di stelle o galassie.

2. **Collimatore**, tipicamente un paraboloide fuori asse, che converte i raggi di luce divergenti provenienti dalla slit in un fascio di raggi paralleli. Il suo rapporto focale (*f*-number: lunghezza focale divisa per il diametro) è pari a quello del raggio del telescopio.
3. **Elemento dispersore**, solitamente un **prisma** o un **grating**. Il prisma disperde la luce usando la rifrazione (indice di rifrazione dipende dalla lunghezza d'onda), mentre il grating utilizza il principio di diffrazione della luce.
4. **Camera**: focalizza lo spettro nel rivelatore. Aumentando la risoluzione spettrale si va a diminuire il range di lunghezza d'onda dello spettro nell'immagine finale.

2.1 Prismi e rifrazione

La rifrazione avviene quando la luce monocromatica incontra la superficie tra due mezzi trasparenti e obbedisce alla legge di Snell:

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

che, considerando l'aria come primo mezzo, può essere riscritta come:

$$\frac{\sin i}{\sin r} \approx n_2$$

In un prisma la dispersione della luce avviene perché l'indice di rifrazione del vetro è dipendente dalla lunghezza d'onda, con le lunghezze d'onda verso il blu che vengono rifratte maggiormente. La dispersione di un prisma è non lineare, aumenta velocemente mano a mano che ci si sposta verso il blu.

2.2 Grating e diffrazione

La dispersione della luce da un grating di diffrazione avviene per la presenza di strette scanalature sulla superficie del grating (vetro o metallo) ad una distanza l'una dall'altra paragonabile alla lunghezza d'onda della luce incidente. Tipicamente vengono utilizzati gratings con $\sim 100 - 1\,000$ linee per millimetro.

La luce che attraversa delle slit molto strette è soggetta a diffrazione, disperdendosi in pattern di linee. Quanto slit multiple sono presenti, i raggi di luce producono interferenza. Il meccanismo fisico presente nei gratings è lo stesso per grating a trasmissione e grating a riflessione. La Fig.3 illustra il caso di un grating a trasmissione illuminato da una radiazione monocromatica di lunghezza d'onda λ . Denotando con α l'angolo di incidenza del fascio di luce incidente relativamente alla normale al grating e considerando un particolare angolo di diffrazione β , l'interferenza costruttiva tra due raggi luminosi che entrano in due fenditure adiacenti separate da una distanza d , raggiunge un massimo quando la differenza di cammino $d \sin \alpha + d \sin \beta$ è un multiplo intero m della lunghezza d'onda:

$$m\lambda = d(\sin \alpha + \sin \beta)$$

L'Eq. 2.2 è l'**equazione dei gratings** dove m definisce l'ordine spettrale. Per incidenza normale l'equazione diventa $m\lambda = d \sin \beta$. All'aumentare dell'ordine si aumenta la distanza angolare dello spettro dall'ordine zero ma si ha anche una diminuzione dell'intensità della luce. Inoltre all'aumentare dell'ordine si possono avere sovrapposizioni di ordini spettrali diversi, fatto che può essere eliminato utilizzando dei filtri che blocchino le lunghezze d'onda al di sotto di un certo valore.

La dispersione angolare si ottiene differenziando l'equazione del grating ed è data da:

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \beta} \quad (1)$$

Di conseguenza la dispersione aumenta con l'ordine m e dal momento che $\cos \beta$ è solitamente costante durante un'osservazione, la dispersione è approssimativamente costante con λ . Inoltre diminuire d aumenta la dispersione.

La risoluzione spettrale di un grating di diffrazione può essere scritta come:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

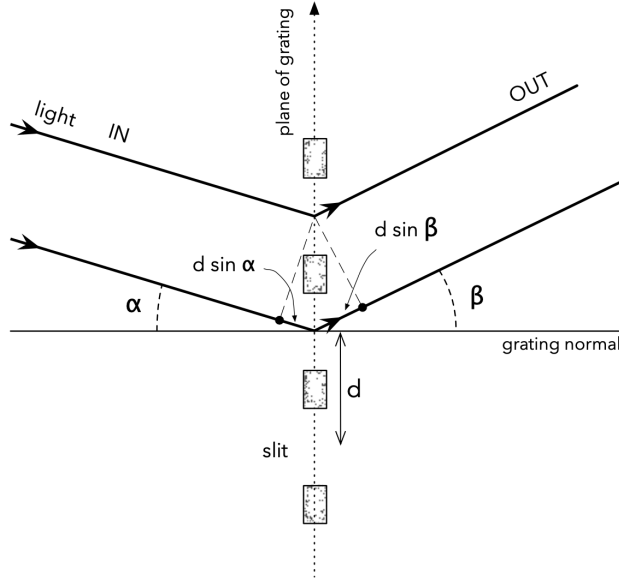


Figura 3: Grating di diffrazione a trasmissione

con N numero totale di scanalature e non dipende dalla spaziatura tra le fenditure. Un modo di aumentare la copertura spettrale è dividere il range di lunghezza d'onda con un filtro dicroico che trasmette la luce solamente in un range specifico, riflettendo la radiazione a λ diverse.

La risoluzione di un grating può essere scritta in modo alternativo come:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{Nd}{\lambda} (\sin \alpha + \sin \beta)$$

FINE DEL CAPITOLO SPECTROGRAPHS VEDI DA DISPENSE

3 La radiazione elettromagnetica

3.1 Concetti base

La lunghezza d'onda in ottico viene solitamente misurata in angstroms ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$) mentre nel nIR sono espresse in micron. La relazione tra frequenza e lunghezza d'onda è:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

mentre il numero d'onda è:

$$\tilde{\nu} = \frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda}$$

ed è proporzionale all'energia del fotone $E = h\nu$, quindi può essere riscritto come:

$$\tilde{\nu} = \frac{E}{hc}$$

L'effetto Doppler è la variazione di lunghezza d'onda della radiazione proveniente da una sorgente in funzione della velocità radiale della sorgente stessa. La formula non relativistica è:

$$\frac{\lambda_{obs} - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

dove λ_{obs} è la lunghezza d'onda osservata e λ_0 è la lunghezza d'onda a riposo.

Il redshift cosmologico è definito come:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_0}{\lambda_0}$$

possiamo definire la lunghezza d'onda a riposo come

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_{obs}}{1+z}$$

mentre in termini di frequenza diventa

$$\nu_0 = (1+z)\nu_{obs}$$

Lo **spettro elettromagnetico** comprende l'intero range di lunghezze d'onda della radiazione, dai raggi gamma al radio. Solitamente si utilizza la descrizione in lunghezza d'onda per l'UV, l'ottico e il nIR, mentre si usa la frequenza nel radio e l'energia nei raggi X.

Quando si osserva dalla superficie terrestre la radiazione è filtrata dall'atmosfera la quale è perlopiù opaca eccetto per alcune finestre nell'ottico, nel nIR e nel radio. In Fig. 4 è riportata la trasmissione dell'atmosfera in funzione della lunghezza d'onda.

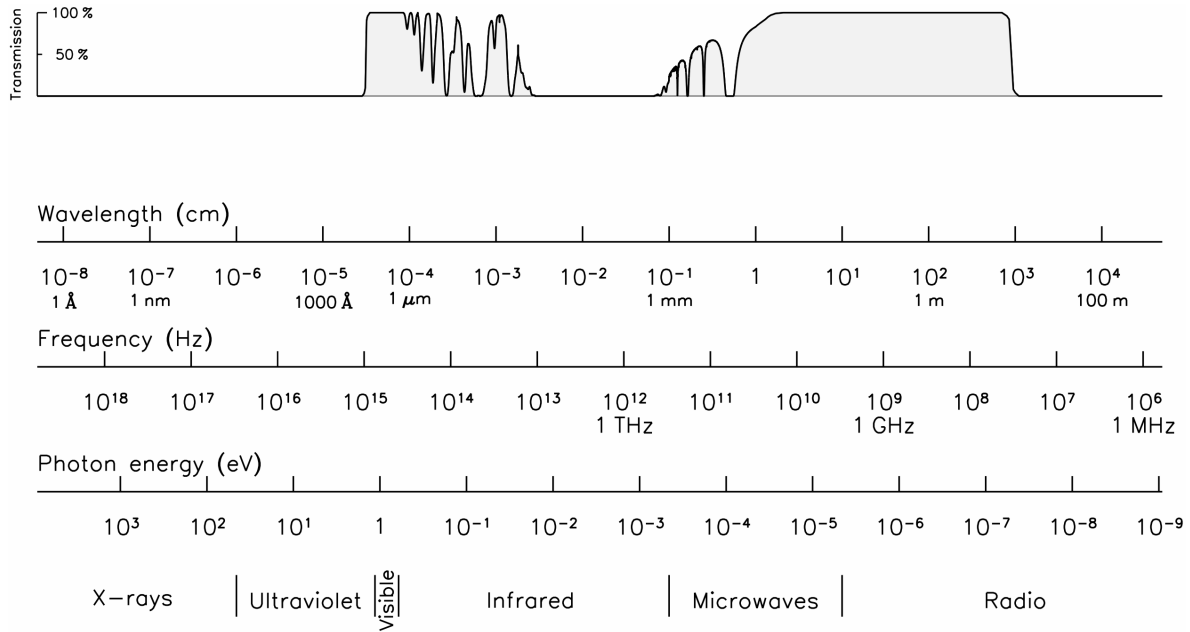


Figura 4: Spettro elettromagnetico e trasmissione dell'atmosfera

3.2 Intensità specifica e flusso

Consideriamo la radiazione proveniente da una superficie come raffigurato in Fig. 5 e un elemento di superficie di area dA la cui normale forma un angolo θ relativo alla direzione della luce rispetto all'osservatore. Usiamo delle coordinate

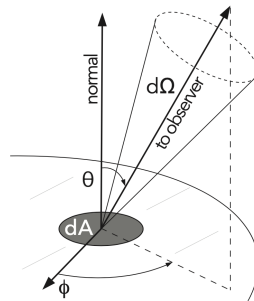


Figura 5: Geometria di una superficie che irradia

sferiche centrate in dA con l'angolo azimutale ϕ che varia tra 0 e 2π e θ tra 0 e π . L'angolo solido è

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$$

(area dell'elemento di superficie corrispondente su una sfera centrata in dA e con raggio unitario).

Nel limite in cui queste quantità sono infinitesimali, la quantità di energia che attraversa l'area dA nell'intervallo di tempo dt entro l'angolo solido $d\Omega$ nell'intervallo di frequenza $d\nu$:

$$dE_\nu = I_\nu \cos \theta dA d\nu d\Omega dt$$

che definisce l'**intensità specifica** I_ν , data ad una frequenza ν nella direzione dell'angolo solido $d\Omega$. Utilizzando $d\lambda$ anziché $d\nu$ imponiamo la condizione di conservazione:

$$I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda$$

con

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

dove il segno meno indica che al crescere di λ , ν decresce. Perciò

$$I_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} I_\nu$$

L'intensità specifica è una quantità indipendente dalla distanza della sorgente.

L'**intensità media** è la media direzionale di I_ν definita dall'integrazione sull'intero angolo solido (4π steradiani):

$$\langle I_\nu \rangle = J_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu d\Omega$$

Per un osservatore è importante definire la **densità di flusso** alla frequenza ν che misura il flusso netto di energia che attraversa l'area dA nel tempo dt nell'intervallo di frequenza $d\nu$:

$$F_\nu = \frac{\int dE_\nu}{dA dt d\nu} = \int I_\nu \cos \theta d\Omega$$

L'integrale si estende a tutte le direzioni. Questo è un flusso monocromatico, come si evince dal pedice ν . Il flusso totale si ottiene integrando sulla frequenza:

$$F = \int F_\nu d\nu$$

È possibile passare da F_ν a F_λ :

$$F_\lambda = \frac{c}{\lambda^2} F_\nu$$

3.2.1 Caso isotropico

Se la radiazione è isotropica e dunque indipendente dalla direzione, I_ν può essere portato fuori dall'integrale e, dal momento che $\int \cos \theta d\Omega = 0$, si ottiene $F_\nu = 0$. Il flusso è dunque una misura dell'anisotropia del campo di radiazione. Scrivendo l'angolo solido in coordinate sferiche $d\Omega = \sin \theta d\phi d\theta$ ed escludendo la dipendenza azimutale, l'integrazione sull'emisfero risulta:

$$F_\nu = 2\pi \int_0^{\pi/2} I_\nu \sin \theta \cos \theta d\theta$$

Se I_ν è indipendente dalla direzione l'integrazione porta a

$$F_\nu = \pi I_\nu$$

Allo stesso modo, integrando sulla frequenza troviamo che il flusso totale e l'intensità totale sono legati dalla relazione:

$$F = \pi I$$

3.2.2 Pressione di radiazione

Consideriamo dei fotoni che colpiscono l'elemento di superficie dA ad un angolo θ relativo alla normale, e trasferiscano momento. La componente del momento normale alla superficie per unità di tempo, frequenza e area è la **pressione di radiazione** alla frequenza ν :

$$dp_\nu = \frac{1}{c} \frac{dE_\nu \cos \theta}{dt dA d\nu}$$

Usando la definizione dell'intensità specifica:

$$dp_\nu = \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\Omega$$

Integrazione sull'angolo solido porta alla pressione di radiazione alla frequenza ν :

$$p_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega = \frac{4\pi}{c} K_\nu$$

dove si indica con K l'integrale:

$$K_\nu = \frac{1}{4\pi} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega$$

Se I_ν è indipendente dalla direzione l'integrazione risulta:

$$p_\nu = \frac{4\pi}{3c} I_\nu$$

La pressione di radiazione totale in unità di dyn cm^{-2} si ottiene integrando sulla frequenza:

$$p = \int p_\nu d\nu$$

3.2.3 Densità di energia

L'energia contenuta in un cilindro disposto lungo la direzione della propagazione, di volume $dV = c dt dA$ è

$$dE_\nu = I_\nu dA d\Omega dt = \frac{1}{c} I_\nu d\nu d\Omega dV$$

La densità di energia specifica è definita come l'energia per unità di volume per unità di range di frequenza. Possiamo ottenerla per l'angolo solido infinitesimale dividendo l'energia per il volume e per $d\nu$:

$$du_\nu(\Omega) = \frac{dE_\nu}{dV d\nu} = \frac{1}{c} I_\nu d\Omega$$

e integrando sull'angolo solido:

$$u_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu$$

La densità di energia totale (erg cm^{-3}) è, integrando sulla frequenza:

$$u = \int u_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c} \int J_\nu d\nu$$

3.3 Radiazione termica

La radiazione emessa da materia in equilibrio termodinamico è descritta dall'intensità specifica della radiazione di corpo nero. Dipende unicamente dalla temperatura T ed è data dalla funzione di Planck:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Dal momento che $B_\nu(T)$ è isotropica si può concludere che:

- la sua intensità media è $J_\nu = B_\nu(T)$
- la densità di flusso uscente dalla superficie del corpo nero è $F_\nu = \pi B_\nu(T)$
- il flusso totale uscente dalla superficie del corpo nero è $F = \pi B(T)$
- la densità di energia della radiazione in funzione della frequenza è $u_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu$

Legge di Stephan-Boltzmann

Il flusso totale uscente dalla superficie di corpo nero è

$$F = \sigma T^4$$

dove $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ deg}^{-4}$ è la costante di Stephan-Boltzmann.

Legge dello spostamento di Wien

Il picco della funzione di Planck $B_\nu(T)$ si ha alla frequenza ν_{max} per la quale si ha $\partial B_\nu / \partial \nu = 0$ dalla quale si ottiene $h\nu_{max} = 2.82kT$. In termini di lunghezza d'onda si ha:

$$\lambda_{max}T = 0.29 \text{ cm deg}$$

Il picco dunque si sposta a lunghezze d'onda maggiori al diminuire della temperatura.

3.3.1 Limiti a basse ed alte energie

Possiamo semplificare la funzione di Planck considerando limiti a basse e alte energie:

- $h\nu \ll kT$ - **Limite di Rayleigh-Jeans** che restituisce:

$$B_\nu \approx \frac{2\nu^2}{c^2} kT \quad B(\lambda) \approx \frac{2ckT}{\lambda^4}$$

Queste curve spiegano le lunghe code a lunghe λ ed è una buona approssimazione nel regime radio.

- $h\nu \gg kT$ - **Limite di Wien** che restituisce:

$$B_\nu \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \quad B_\lambda = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{-hc/\lambda kT}$$

La dipendenza dall'esponenziale descrive la grande pendenza. Lo spettro continuo nell'UV di stelle molto calde cade entro il regime di Wien.

4 Struttura atomica

4.1 Atomi con un solo elettrone

Consideriamo la funzione d'onda $\psi(x, y, z, t) = \psi(\mathbf{r}, t)$. La probabilità di trovare un elettrone in una certa posizione nello spazio specificata dal vettore \mathbf{r} è data da $\psi^*\psi$ dove ψ^* è il complesso coniugato di ψ . La probabilità di trovare l'elettrone in un qualsiasi punto dello spazio è data da:

$$\int \psi^* \psi dx dy dz = 1$$

L'equazione di Schrödinger tempo-indipendente descrive stati atomici stazionari di energia E :

$$H\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

dove l'operatore Hamiltoniano, corrispondente all'energia totale (cinetica e potenziale) del sistema atomico,

$$H = -\frac{\hbar}{2\mu} \nabla^2 + V(r) = -\frac{\hbar}{2\mu} \nabla^2 - \frac{Ze^2}{r}$$

contiene la massa ridotta dell'elettrone che ruota attorno ad un nucleo di massa M ($M = m_p$ per l'idrogeno),

$$\mu = \frac{m_e M}{m_e + M}$$

L'operatore Laplaciano ∇^2 è:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

In coordinate sferiche la funzione d'onda $\psi(\mathbf{r})$ si esprime come:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

e l'equazione di Schrödinger viene separata in due componenti, una radiale e una angolare.

Per un sistema legato (un'entità atomica con energia totale negativa), l'esistenza di una soluzione fisica all'equazione della meccanica quantistica necessita della definizione di un numero quantico $n = 1, 2, \dots$ in modo tale che i livelli discreti di energia siano dati da:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{Z^2}{n^2} \mathcal{R}_M$$

dove \mathcal{R}_M è la costante di Rydberg per un atomo di massa M e carica effettiva Z ed è data da:

$$\mathcal{R}_M = \frac{\mu}{m_e} \mathcal{R}_\infty$$

dove

$$\mathcal{R}_M = \frac{2\pi^2 m_e e^4}{h^3 c} = 109737.31 \text{ cm}^{-1}$$

4.1.1 Linee spettrali

Transizioni elettroniche tra due livelli di energia di un atomo corrispondono ad emissione o assorbimento di energia. Le differenze di energia possono essere espresse dalla frequenza di linee spettrali dal momento che transizioni energetiche danno luogo a linee spettrali di emissione e di assorbimento. Per l'atomo di idrogeno ($Z = 1$) il numero d'onda di una linea spettrale in emissione è dato dalla formula di Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda_{n_1, n_2}} = \Delta \mathcal{E}_{n_1, n_2} = \left[\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right] \mathcal{R}_H$$

Si possono avere diverse serie di righe di transizione. Per quanto riguarda quelle dell'idrogeno, esse sono categorizzate sulla base del valore di n_1 : ad esempio la serie di Lyman (lontano UV) ha $n_1 = 1$ mentre quella di Balmer (ottico) ha $n_1 = 2$. La linea α di una serie corrisponde a $\Delta n = 1$, la linea β corrisponde a $\Delta n = 2$ e così via. Il limite di una serie si può trovare ponendo $n_2 = \infty$.

4.1.2 Numeri quantici

I livelli discreti di energia di un atomo sono caratterizzati da quattro numeri quantici:

- **numero quantico principale** - si riferisce alla quantizzazione dei livelli di energia e, equivalentemente nel modello atomico di Bohr, alla dimensione delle orbite degli elettroni:

$$n = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

- **numero quantico orbitale (o azimutale)** - legato al momento angolare delle orbite e la loro eccentricità, aumenta con l'aumentare del momento angolare:

$$l = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \quad n \text{ valori}$$

- **numero quantico magnetico** - caratterizza la componente del vettore del momento angolare lungo una certa direzione, imposta ad esempio dalla situazione sperimentale:

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l \quad (2l+1) \text{ valori}$$

La componente lungo l'asse z del momento angolare orbitale è $L_z = m_l \hbar$

- **numero quantico di spin** - definisce un momento angolare intrinseco degli elettroni lungo una direzione preferenziale e assume due possibili valori:

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Questi quattro numeri quantici caratterizzano lo stato di ogni singola particella chiamato **orbitale**. Sommando tutti i possibili valori si ottengono $2n^2$ orbitali con la stessa energia. Tale valore definisce inoltre il numero di stati degeneri e il peso statistico di un livello n .

4.2 Atomi multi-elettronici

L'Hamiltoniana per un atomo contenente N elettroni può essere scritta come:

$$H = \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_i^2 - \frac{Ze^2}{r_i} \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} + \sum_{i=1}^N \xi(r_i) (\vec{l}_i \cdot \vec{s}_i)$$

Le tre componenti rappresentano, nell'ordine:

- energia cinetica e potenziale di tutti gli elettroni
- energia potenziale dalla repulsione tra coppie di elettroni (quadrupolo elettrico)
- energia potenziale delle interazioni spin-orbit (dipolo magnetico)

In approssimazione di campo centrale il movimento di ciascun elettrone è considerato indipendente da quello degli altri quindi assumiamo il campo di potenziale con simmetria sferica. Il secondo ed il terzo termine possono essere dunque trascurabili, passando ad un'approssimazione di dipolo elettrico.

Sotto questa approssimazione si hanno N equazioni di Schrödinger per atomi con un elettrone:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_i^2 + V(r_i) \right] \psi_i(\vec{r}_i) = \epsilon_i \psi_i(\vec{r}_i)$$

La funzione d'onda del sistema completo è il prodotto delle funzioni individuali $\psi_i(\vec{r}_i)$:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \psi_1(\vec{r}_1) \psi_2(\vec{r}_2) \dots \psi_N(\vec{r}_N)$$

con energia totale

$$E = \sum_{i=1}^N \epsilon_i$$

In approssimazione di campo centrale l'energia è funzione dei numeri quantici n e l .

4.2.1 Parità

La parità π si riferisce alla simmetria spaziale della funzione d'onda $\psi(\vec{r})$. È **pari** se $\psi(-\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})$ mentre è **dispari** se $\psi(-\mathbf{r}) = -\psi(\mathbf{r})$. Si stabilisce con:

$$\pi = (-1)^{\sum_i l_i}$$

se il risultato è 1 allora è pari, se è -1 è dispari.

4.2.2 Shells

Una shell è definita da un valore di n ed è suddivisa in un numero l di subshells. Le shell sono indicate con lettere maiuscole. Una shell caratterizzata da un numero quantico principale n è chiusa quando tutte le possibili combinazioni di l , m_l e m_s sono assegnate agli elettroni. Shell complete hanno momento angolare totale L nullo e un momento angolare totale di spin S .

4.2.3 Configurazioni elettroniche

La configurazione elettronica nl^q descrive come gli elettroni sono distribuiti nelle shell e nelle subshell e q indica il numero di elettroni presenti in una subshell nl .

Il **principio di esclusione di Pauli** dice che due elettroni non possono coesistere in uno stato identificato dagli stessi numeri quantici.

Gli **elettroni di valenza** determinano le proprietà chimiche dell'atomo, il valore del momento angolare totale e la parità. Per questo motivo molte volte viene riportata unicamente la configurazione elettronica delle subshell non complete.

Elettroni equivalenti sono definiti come elettroni con lo stesso n e lo stesso l .

4.3 LS coupling

Vanno considerati, nel trattamento dell'energia degli elettroni negli atomi, anche le repulsioni elettrostatiche tra gli elettroni e le interazioni spin-orbit. Nello schema di accoppiamento LS i due contributi aggiuntivi sono considerati separatamente. Per prima cosa il contributo energetico dall'interazione elettrostatica non-centrale, dipendente dalla repulsione di coppie elettrone-elettrone, porta alla divisione della configurazione in **termini**. In seguito l'interazione spin-orbit porta ad un'ulteriore divisione in **livelli**.

4.3.1 Termini

Nell'accoppiamento LS i $1/r_{ij}$ contributi all'energia sono considerati dipendenti dai momenti orbitali totali e angolari di spin, considerati indipendenti: $\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_i$ e $\mathbf{S} = \sum \mathbf{s}_i$ dove le somme sono somme vettoriali.

Un termine è specificato dal momento totale orbitale e angolare di spin di tutti gli elettroni dell'atomo e dalla parità. Un termine si scrive come

$$^{2S+1}L^\pi$$

Il valore $2S + 1$ indica la **molteplicità** e identifica i singoletti, i doppietti i tripletti e così via, in dipendenza del numero di elettroni presenti.

4.3.2 Livelli

La perturbazione dell'Hamiltoniana a causa dell'interazione spin-orbit è dovuta all'interazione tra il campo magnetico generato dal momento orbitale degli elettroni e il momento magnetico di dipolo totale degli elettroni, dato da:

$$\mu_s = -g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{s}$$

dove

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

è il magnetone di Bohr e $g_s = 2$ è il rapporto giromagnetico dell'elettrone.

Nell'accoppiamento LS il contributo energetico dall'interazione spin-orbit dipende dal vettore del momento angolare totale:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

ottenuto dalla somma vettoriale di \mathbf{L} (vettore del momento angolare orbitale) e \mathbf{S} (vettore del momento angolare di spin).

I possibili valori per il numero quantico J corrispondente sono:

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S|$$

La variazione di energia tra diversi valori di J è piccola rispetto alla variazione di energia tra termini diversi e da luogo alla cosiddetta **struttura fine** dei livelli energetici.

Un livello è specificato dai valori di L , S , dalla parità π e dal momento angolare totale J e si scrive come:

$$^{2S+1}L_J^\pi$$

Un termine può essere visto quindi come un insieme di livelli che condividono lo stesso momento angolare totale e molteplicità. Le transizioni tra i livelli danno luogo ai **multipletti**.

Le transizioni tra stati dello stesso multipletto, dovute alla divisione spin-orbit sono chiamate **linee di struttura fine**. Dal momento che la differenza di energia coinvolta è molto piccola queste linee sono nel nIR e nel fIR.

L'energia di un termine è la media pesata dell'energia dei suoi livelli. Il ground state è il livello con minore energia.

Una **linea di risonanza** corrisponde alla transizione tra il primo stato eccitato permesso e il ground state.

In generale ci sono $2S + 1$ possibili livelli J se $L \geq S$ e $2L + 1$ livelli se $L < S$.

È possibile associare a J un numero quantico M_J che descrive la proiezione spaziale del vettore momento angolare totale \mathbf{J} lungo una direzione preferenziale.

M_J ha i valori:

$$M_J = J, J - 1, \dots, -J$$

In assenza di un campo magnetico esterno, l'energia non dipende da M_J , ci sono $2J + 1$ sottolivelli con la stessa energia. Questo definisce il **peso statistico** del livello J :

$$g = 2J + 1$$

La degenerazione dei sottolivelli può essere distrutta dall'interazione degli atomi con un campo magnetico esterno (effetto Zeeman). In tal caso le transizioni tra sottolivelli danno luogo alle **componenti**.

L'energia per elettroni equivalenti è data dalle regole empiriche di Hund:

- il termine con molteplicità maggiore $2S + 1$ ha l'energia minore
- per termini con lo stesso $2S + 1$, il termine con L maggiore ha energia minore

È possibile ricavare un nuovo numero quantico associando il momento totale \mathbf{J} con il momento di spin del protone \mathbf{I} dando luogo a $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$ e producendo la cosiddetta **struttura iperfine**.

4.4 Regole di selezione

Il trattamento quantistico delle interazioni tra un atomo e un campo elettromagnetico danno luogo ad una serie di regole di selezione che individuano le transizioni permesse. Se tali regole non vengono rispettate si hanno delle transi-

| | |
|-------------------------|--|
| Δn | any |
| $\Delta \ell = \pm 1$ | Laporte rule: parity must change |
| $\Delta J = 0, \pm 1$ | $J = 0 \rightarrow 0$ not allowed |
| $\Delta M_J = 0, \pm 1$ | $M_J = 0 \rightarrow 0$ not allowed if $J = 0$ |
| $\Delta L = 0, \pm 1$ | $L = 0 \rightarrow 0$ not allowed (valid in LS coupling) |
| $\Delta S = 0$ | intercombination transitions between levels of different multiplicity are not allowed (valid in LS coupling) |

Figura 6: Regole di selezione

zioni possibili ma poco probabili che danno luogo a transizioni **proibite**. Tali linee si hanno principalmente in nebulose ionizzate di bassa densità.

ESEMPI DI ATOMI DI IMPORTANZA ASTROFISICA VEDI DA DISPENSE

5 Spettri molecolari

Gli spettri molecolari vengono studiati in diversi campi astrofisici: atmosfere planetarie e comete, stelle fredde e nubi interstellari, galassie con formazione stellare e nuclei galattici attivi.

Caratteristiche spettrali delle molecole hanno luogo dal movimento dei nuclei atomici e dalle transizioni degli elettroni. La prima coinvolge la rotazione e la vibrazione dei nuclei e genera spettri più semplici dei spettri atomici. Le complicazioni hanno luogo quando si vanno a considerare transizioni tra diversi livelli di energia degli elettroni.

L'energia interna di una molecola può essere separata in tre componenti: **elettronica** E_e , **vibrazionale** E_v e **rotazionale** E_r . Se M è la massa di un nucleo atomico, queste tre componenti hanno un rapporto relativo

$$E_e : E_v : E_r \simeq 1 : (m_e/M) : (m_e/M)^2$$

I valori tipici di energia sono:

| | E (eV) | $\tilde{\nu}$ (cm ⁻¹) | range spettrale |
|--------------------|------------------|-----------------------------------|-----------------|
| Elettronica E_e | 10 | 10 ⁵ | UV - ottico |
| Vibrazionale E_v | 10 ⁻¹ | 10 ³ | IR - far IR |
| Rotazionale E_r | 10 ⁻³ | 10 | microonde |

Tabella 1: Valori tipici

5.1 Stati elettronici

Per una molecola diatomica con nuclei A e B l'equazione di Schrödinger è:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2M_A} \nabla_A^2 - \frac{\hbar^2}{2M_B} \nabla_B^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_i \nabla_i^2 + V_e - E \right) \Psi(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{r}_i) = 0$$

I vettori \mathbf{R}_A e \mathbf{R}_B collegano il centro di massa delle molecole agli atomi A e B. Il termine contenente ∇^2 esprime l'energia cinetica dei due nuclei e degli elettroni mentre V_e è l'energia potenziale del sistema e E è l'energia totale.

Nell'approssimazione di Bohr-Oppenheimer il movimento degli elettroni e dei nuclei è assunto essere indipendente, grazie alla piccola massa degli elettroni rispetto a quella dei nuclei. Per questo motivo la funzione d'onda può essere separata in due componenti:

$$\Psi(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B, \mathbf{r}_i) = \psi_e(\mathbf{r}_i) \cdot \psi_n(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}_B)$$

dove ψ_e e ψ_n sono le autofunzioni dell'equazione di Schrödinger per i moti elettronici e nucleari, rispettivamente. Nell'approssimazione B-O, al primo ordine gli stati rotazionali e vibrazionali non si influenzano e gli stati energetici possono essere calcolati separatamente. L'energia totale può quindi essere scritta come la somma delle energie elettroniche, rotazionali e vibrazionali:

$$E = E_e + E_r + E_v$$

5.2 Molecole rotanti

Per prima cosa analizziamo gli spettri rotazionali delle molecole (uno dei principali è lo spettro rotazionale del monossido di carbonio CO). Le energie coinvolte sono basse quindi gli spettri rotazionali a lunghezze d'onda radio sondano ambienti come il mezzo interstellare freddo.

Per un rotatore rigido diatomico nel quale i due atomi girano attorno al centro di massa mantenendo una distanza costante, i possibili livelli di energia (espressi come numero d'onda $\epsilon_r = E_r/hc$) sono:

$$\epsilon_r = B J(J+1) \text{ cm}^{-1}$$

dove J è il numero quantico del momento angolare rotazionale e B è la costante rotazionale ($\sim 1 - 10 \text{ cm}^{-1}$) definita come:

$$B = \frac{h^2}{8\pi^2 I}$$

con I momento d'inerzia:

$$I = \mu r^2$$

calcolato per la distanza di equilibrio inter-nucleare $r = R_A + R_B$. Il valore della costante B dipende dalla specifica molecola diatomica considerata.

Mentre le molecole diatomiche ruotano sono soggette a una distorsione centrifuga che aumenta la distanza inter-nucleare e il momento d'inerzia facendo decrescere B e ϵ . Per questo rotatore non rigido l'espressione dei livelli energetici diventa:

$$\epsilon_r = B J(J+1) - D J^2(J+1)^2 \text{ cm}^{-1}$$

dove D è una costante di distorsione.

5.2.1 Spettri rotazionali

Transizioni di dipolo permesse sono possibili per $\Delta J = \pm 1$ e per molecole che hanno un momento di dipolo elettrico, come ad esempio per molecole eteronucleari come CO e CH ma non per molecole omonucleari come H_2 o O_2 .

Per un rotatore rigido l'energia corrispondente ad una transizione da un livello superiore ad uno inferiore (emissione $\Delta J = -1$) si calcola come:

$$\Delta\epsilon_r = \epsilon_{J+1,J} = B(J+1)(J+2) - B J(J+1)$$

Perciò l'energia tra due linee molecolari adiacenti è data da:

$$\Delta\epsilon_r = 2B(J+1) \text{ cm}^{-1}$$

Questo porta ad uno spettro linearmente spaziato di linee di emissione, con spaziature pari a $2B$ partendo da un'energia $2B$. Dal momento che B sta nel range $1 - 10 \text{ cm}^{-1}$ lo spettro si trova tipicamente nel FIR, nel sub-millimetrico e nel millimetrico.

Se la distorsione centrifuga non è trascurabile, la spaziatura decresce all'aumentare di J .

Come esempio di spettro rotazionale consideriamo CO, la molecola diatomica più stabile e più abbondante dell'Universo dopo l'idrogeno molecolare H_2 . Quest'ultima è una molecola omonucleare quindi non produce uno spettro rotazionale quindi CO è usato come tracciante dell'idrogeno molecolare e di formazione stellare nelle galassie.

5.3 Molecole vibranti

L'equazione di Schrödinger radiale, dopo la separazione nelle componenti radiali e angolari, può essere scritta come:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) - E_v \right) \psi_v(r) = 0$$

Il potenziale energetico può essere approssimato con una parabola:

$$V(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2$$

dove r_0 è la separazione inter-nucleare di equilibrio e k è la costante di forza, dipendente dalla forza di legame. Imponiamo il livello zero di energia $V_0 = V(r = r_0) = 0$.

La forma di questo potenziale è uguale al potenziale dell'oscillatore armonico con livelli di energia quantizzati che dipendono dal numero quantico vibrazionale v :

$$\epsilon_v = \left(v + \frac{1}{2} \right) \omega_0 \text{ cm}^{-1}$$

dove ω_0 è la costante vibrazionale, che dipende dalla costante di forza k e dalla massa ridotta μ :

$$\omega_0 = \left(\frac{k}{\mu} \right)^{1/2}$$

Una buona approssimazione della buca di potenziale che comunque permette soluzioni analitiche dei livelli energetici è il potenziale di Morse (vedi Fig. 7):

$$V(r) = D_e [1 - e^{a(r_0 - r)}]^2$$

In questo potenziale non armonico i livelli energetici non sono più ugualmente spaziati ma diventano più vicini

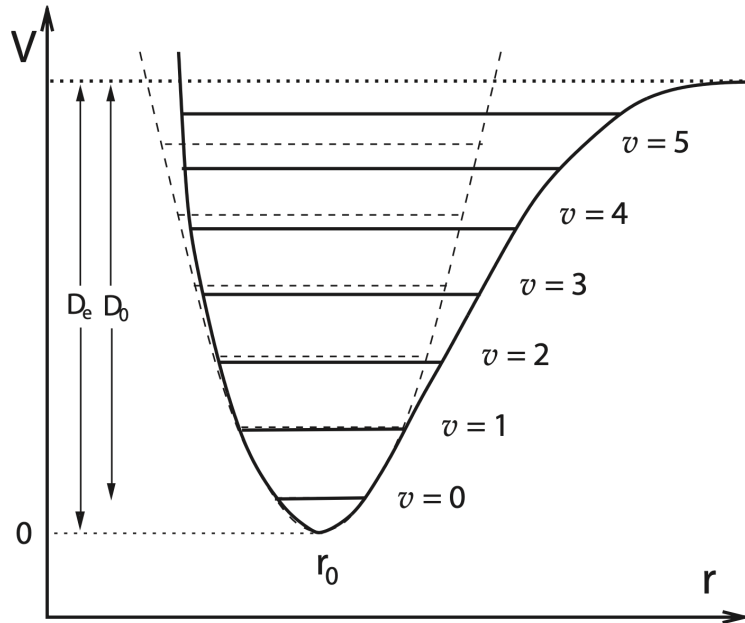


Figura 7: Potenziale armonico (linea tratteggiata) confrontato con un caso più realistico. D_e è la profondità della buca di potenziale. D_0 è l'energia di dissociazione.

all'aumentare del numero quantico v .

5.3.1 Spettri vibrazionali

La regola di selezione del dipolo elettrico dà luogo a linee singole. Tuttavia, dal momento che le transizioni vibrazionali sono spesso accompagnate da transizioni rotazionali dando luogo a bande spettrali più complesse.

Per l'oscillatore anarmonico le linee diventano sempre più deboli all'aumentare del $|\Delta v|$ e la spaziatura tra stati vibrazionali contigui diminuisce all'aumentare di v .

5.4 Spettri elettronici

Si hanno transizioni elettroniche quando si hanno cambiamenti di configurazione elettronica delle molecole e sono solitamente accompagnati da variazioni della distanza intra-molecolare. Gli spettri elettronici sono più complicati degli spettri roto-vibrazionali e danno luogo ad una serie di bande molecolari.

Le transizioni elettroniche sono comunemente osservate nell' H_2 , viste in assorbimento nel cold ISM nella parte dello spettro del lontano UV.

6 Transizioni radiative

6.1 Equazione di Boltzmann

Consideriamo un sistema in equilibrio termodinamico, nel quale la popolazione numerica dei livelli energetici dipende unicamente dalla temperatura T . Questo stato si raggiunge attraverso frequenti collisioni tra gli atomi.

Il rapporto di popolazione tra due livelli energetici 1 e 2, con energia di eccitazione rispettivamente E_1 ed E_2 è dato dall'equazione di Boltzmann:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-(E_2-E_1)/kT}$$

dove n è la densità numerica di atomi per unità di volume e g è il peso statistico. La temperatura T definisce la temperatura di eccitazione.

Per un arbitrario livello j , indicando con n la popolazione totale $n = \sum n_j$, e mettendo l'energia del ground level a zero, si ottiene una generalizzazione dell'equazione di Boltzmann:

$$\frac{n_j}{n} = \frac{g_j e^{-E_j/kT}}{g_1 + g_2 e^{-E_2/kT} + g_3 e^{-E_3/kT} + \dots}$$

perciò:

$$\frac{n_j}{n} = \frac{g_j}{u(T)} e^{-E_j/kT}$$

dove $u(T)$ è la funzione di partizione:

$$u(T) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i e^{-E_i/kT}$$

A basse temperature gli atomi si trovano nel ground level e $u(T) = g_1$ mentre ad alte T gli atomi sono principalmente ionizzati.

6.2 Equazione di Saha

La distribuzione di specie atomiche tra due successivi stadi di ionizzazione (es: neutro e ionizzato una volta) è descritta dall'equazione di Saha per l'equilibrio di ionizzazione. Questa equazione può essere derivata come una generalizzazione dell'equazione di Boltzmann ai livelli energetici del continuo utilizzando il potenziale di ionizzazione dello ione χ .

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} n_e = \frac{2u_{r+1}(T)}{u_r(T)} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\chi_r/kT}$$

con n_e densità elettronica, $u(T)$ funzione di partizione e χ_r energia richiesta per rimuovere un elettrone dall'atomo ionizzato r volte.

Usando la legge dei gas ideali con la pressione in dyn cm^{-2}

$$P_e = n_e kT$$

si ottiene una forma alternativa utilizzata in astrofisica:

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} P_e = \frac{2u_{r+1}(T)}{u_r(T)} \left(\frac{2\pi m_e}{h^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} e^{-\chi_r/kT}$$

Si può anche utilizzare la formula in cui χ_r viene espresso in eV:

$$\frac{n_{r+1}}{n_r} = \frac{0.6668}{P_e} \frac{u_{r+1}}{u_r} T^{5/2} 10^{-5040\chi_r/T}$$

Le equazioni di Boltzmann e Saha possono essere combinate per calcolare la frazione di atomi ad un particolare livello di eccitazione che può produrre una particolare riga spettrale.

6.3 Distribuzione di velocità di Maxwell-Boltzmann

La ridistribuzione energetica dovuta all'impatto tra particelle porta un sistema in equilibrio termico ad avere delle particelle con velocità distribuite in un modo descritto dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

La frazione di particelle nell'intervallo di velocità $(v, v + dv)$ è:

$$\frac{dn(v)}{n_{tot}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Essendo una funzione di distribuzione esprime la percentuale di particelle con una certa velocità nell'intervallo considerato.

La forma della distribuzione di Maxwell-Boltzmann è riportata in Fig. 8: è una curva asimmetrica che presenta una coda alle alte velocità.

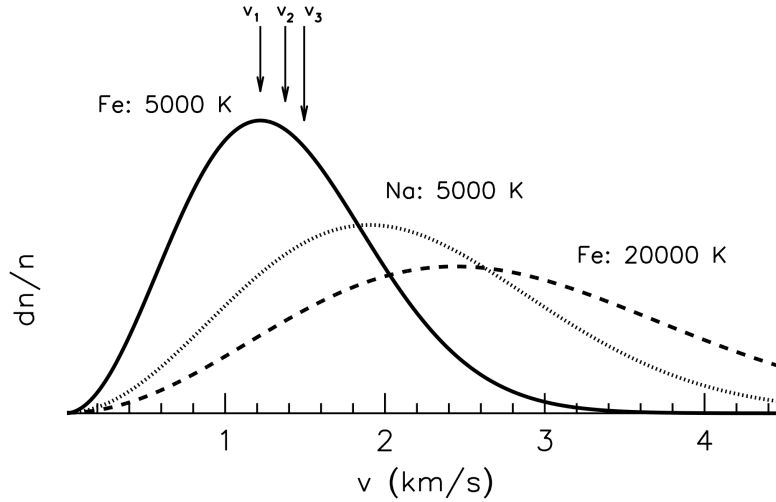


Figura 8: Distribuzione di Maxwell-Boltzmann per atomi di ferro a 5000 K e 20 000 K e atomi di sodio a 5000 K

Il picco della distribuzione è la velocità più probabile ed è dato da:

$$v_1 = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}$$

La velocità media è:

$$v_2 = \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} = 1.128 v_1$$

e la velocità quadratica media (rms) è data da:

$$v_3 = \left(\frac{3kT}{m}\right)^{1/2} = 1.225 v_1$$

La distribuzione scritta in precedenza è valida per il caso tridimensionale. Se si analizza il caso unidimensionale l'equazione diventa:

$$\frac{dn(v_x)}{n_{tot}} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x$$

6.4 Equilibrio termodinamico

L'equilibrio termodinamico è caratterizzato da un'unica temperatura che può essere usata per descrivere l'energia di radiazione, la popolazione dei livelli energetici, la velocità delle particelle e lo stato di ionizzazione atomica. Queste quantità sono descritte dalle seguenti funzioni:

- il campo di radiazione è dato dall'espressione del corpo nero di Planck
- la popolazione dei livelli è data dall'equazione di Boltzmann
- la velocità delle particelle è data dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann

- il bilancio di ionizzazione è dato dall'equazione di Saha

In un sistema in equilibrio termodinamico locale (LTE) la popolazione dei livelli può ancora essere calcolata con l'equazione di Boltzmann e la distribuzione di velocità con la distribuzione di Maxwell-Boltzmann, ma si hanno deviazioni dalla funzione di radiazione del corpo nero.

Condizioni di LTE si possono raggiungere ad alte densità, come ad esempio negli interni stellari e, parzialmente, nella fotosfera. La temperatura può variare spazialmente ma localmente il sistema è in equilibrio.

6.5 Coefficienti di probabilità di Einstein

Consideriamo un sistema con due livelli di energia E_1 ed E_2 e densità numerica n_1 e n_2 . Si hanno tre possibili casi di transizioni radiative, la cui probabilità è data dai coefficienti di Einstein A_{21} , B_{12} e B_{21} :

- **emissione spontanea** $2 \rightarrow 1$: transizione con emissione di un fotone con energia $h\nu_{12}$ e probabilità (numero di transizioni per secondo) data da A_{21} (unità di s^{-1}). Il tempo di vita del livello eccitato 2 è dato da $\tau_2 = 1/A_{21}$.
- **assorbimento** di un fotone con energia $h\nu_{12}$ da un campo di radiazione avente densità di energia di $\rho(\nu_{12})$ che porta alla transizione $1 \rightarrow 2$. La probabilità è definita come $B_{12}\rho(\nu_{12})$ quindi il numero di eventi N_{abs} per unità di tempo e di volume è dato da:

$$N_{abs} = n_1 B_{12} \rho(\nu_{12}) \text{ (cm}^{-3} \text{ s}^{-1}\text{)}$$

- **emissione stimolata** di un fotone $h\nu_{12}$ in presenza di una radiazione con densità di energia $\rho(\nu_{12})$ e conseguente transizione $2 \rightarrow 1$. La probabilità è definita come $B_{21}\rho(\nu_{12})$. Questo "assorbimento negativo ha luogo nella direzione della radiazione incidente"

Questi tre coefficienti sono in relazione tra loro nel seguente modo:

$$g_1 B_{12} = g_2 B_{21} \quad A_{21} = \frac{8\pi h \nu_{12}^3}{c^3} B_{21}$$

6.6 Forza dell'oscillatore

Il coefficiente di Einstein B_{12} può essere espresso in termini della **forza dell'oscillatore** f adimensionale (o f -value), introdotta nel modello classico dell'elettrodinamica per l'assorbimento della radiazione e la formazione di linee dovute alle oscillazioni armoniche, il cui moto è dovuto alla radiazione incidente. Esso varia tra 0 e 1 e le forti transizioni permesse hanno f -value vicini a 1.

La sezione d'urto totale classica per atomo per una transizione data è una costante descritta dall'espressione:

$$\sigma_{cl} = \frac{\pi e^2}{m_e c} = 0.0265 \text{ cm}^2$$

Il coefficiente di assorbimento totale misurato per linee reali è minore di questo valore e varia da linea a linea. Per una specifica linea di assorbimento a frequenza ν_{12} la sezione d'urto totale si ottiene moltiplicando per l'effettivo numero di assorbimenti:

$$\sigma_{\nu_{12}} = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{12} = \sigma_{cl} f_{12}$$

Per questo motivo la forza dell'oscillatore f_{12} porta ad una misura della forza della linea di assorbimento.

La relazione tra la forza dell'oscillatore e il coefficiente di Einstein può essere scritta come:

$$f_{12} = \frac{m_e}{\pi e^2} h \nu_{12} B_{12}$$

$$f_{12} = \frac{m_e c^3}{8\pi^2 e^2 \nu_{12}^2} \frac{g_2}{g_1} A_{21} = 1.499 \cdot 10^{-16} \lambda^2 \frac{g_2}{g_1} A_{21}$$

con λ in Å. Queste relazioni sono valide per le transizioni permesse e non per le linee proibite.

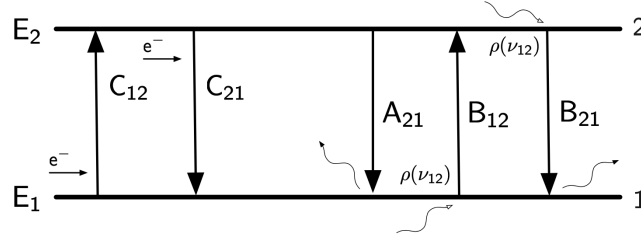


Figura 9: Atomo di due livelli con processi radiativi e collisionali

7 Collisioni

7.1 Forza delle collisioni

Consideriamo un atomo con due livelli dove le transizioni collisionali sono incluse. La differenza di energia tra i due livelli è $E_{21} = E_2 - E_1 = h\nu_{12}$. Collisioni dell'atomo con altre particelle possono eccitare e de-eccitare l'atomo. I corrispondenti tassi di transizione collisionale sono C_{12} (eccitazione dal livello 1 al livello 2) e C_{21} (de-eccitazione da 2 a 1). Il processo di eccitazione può avvenire soltanto se l'energia cinetica degli elettroni che collidono è maggiore di una certa soglia $1/2m_e v^2 > E_2 - E_1$.

La **collisional cross section** σ_{12} è inversamente proporzionale all'energia E delle particelle che collidono:

$$\sigma_{12} = \left(\frac{h^2}{8\pi m_e E} \right) \frac{\Omega_{12}}{g_1}$$

dove Ω_{12} è la forza di collisione per una specifica transizione, dipendente dalla temperatura ($\Omega_{12} = \Omega_{21}$).

La relazione tra il tasso delle transizioni collisionali e la collisional cross section σ_{12} si esprime come di seguito. Il numero di collisioni al secondo per un atomo con elettroni di velocità v e densità n_e è $n_e v \sigma(v)$. Per considerare tutti gli elettroni dobbiamo considerare la distribuzione di velocità $f(v)dv$. Il tasso di collisioni è:

$$C = n_e \int_0^\infty v \sigma(v) f(v) dv = n_e \langle v \sigma(v) \rangle$$

dove $\langle v \sigma(v) \rangle$ è il valore medio di $v \sigma(v)$.

Possiamo quindi scrivere:

$$C_{12} = n_e \langle v \sigma_{12}(v) \rangle = n_e q_{12}$$

$$C_{21} = n_e \langle v \sigma_{21}(v) \rangle = n_e q_{21}$$

dove q_{12} e q_{21} sono i coefficienti collisionali di eccitazione e de-eccitazione. Usando la distribuzione di velocità maxwelliana, essi sono collegati tra loro e con la forza di collisione da:

$$q_{12} = \frac{g_1}{g_2} q_{21} e^{-E_{12}/kT} \quad q_{21} = 8.63 \cdot 10^{-6} \frac{\Omega_{21}}{T^{1/2} g_2}$$

In equilibrio termodinamico il numero di transizioni $1 \rightarrow 2$ deve eguagliare il processo opposto (principio del bilancio dettagliato):

$$n_1 C_{12} = n_2 C_{21}$$

che usando l'equazione di Boltzmann porta a:

$$C_{12} = C_{21} \frac{g_2}{g_1} e^{h\nu_{12}/kT}$$

Possiamo immaginare una situazione di equilibrio statistico nella quale la popolazione numerica dei livelli è stazionaria. Includendo processi radiativi e collisionali, eguagliamo il numero di transizioni per secondo $1 \rightarrow 2$ a quelle $2 \rightarrow 1$:

$$n_1 \rho(\nu_{12}) B_{12} + n_1 C_{12} = n_2 \rho(\nu_{12}) B_{21} + n_2 A_{21} + n_2 C_{21}$$

dove $\rho(\nu_{12})$ è la densità di energia di radiazione.

Se trascuriamo il campo di radiazione incidente ($\rho(\nu_{12}) = 0$) la precedente equazione porta al rapporto tra le popolazioni:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{C_{12}}{C_{21} + A_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \frac{e^{-E_{21}/kT}}{1 + A_{21}/(q_{21} n_e)}$$

che si riduce all'equazione di Boltzmann per $A_{21} \ll q_{21}n_e$: a densità sufficientemente elevate le collisioni sono molto frequenti e diventano importanti rispetto alla de-eccitazione spontanea nella regolazione della popolazione dei livelli. La quantità

$$n_{crit} = \frac{A_{21}}{q_{21}}$$

definisce la **densità critica** per la transizione ed è sensibile alla temperatura perché il coefficiente di de-eccitazione q_{21} dipende dalla temperatura.

Mano a mano che la densità di elettroni aumenta e si avvicina a n_{crit} la de-eccitazione collisionale diventa mano a mano più importante. Per densità elettroniche $n_e < n_{crit}$ le linee spettrali non sono attenuate dalle collisioni e sono quindi alla loro intensità massima. Per $n_e > n_{crit}$ le linee diventano più deboli e talvolta sono troppo deboli per essere osservate dal momento che le collisioni rimuovono gli elettroni dal loro livello eccitato e le transizioni radiative diventano poco frequenti.

7.2 Atomi a tre livelli

Quando consideriamo lo spettro ottico di un gas ionizzato, molti atomi possono essere trattati come sistemi di tre livelli. Tra questi atomi ci sono atomi che emettono forti linee proibite, anche chiamate **linee eccitate dalla collisione**, strumento importante di diagnostica per le condizioni fisiche del gas. Facendo riferimento alla Fig.10, sono di

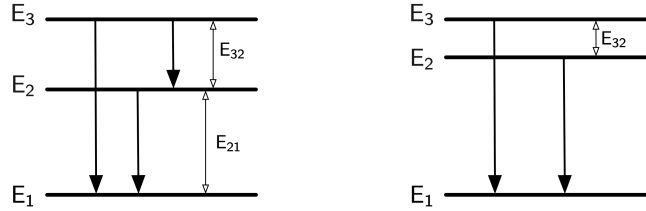


Figura 10: Atomo a tre livelli: linee diagnostiche per la temperatura (sx) e per la densità (dx)

particolare interesse astrofisico quei sistemi per i quali $E_{32} \simeq E_{21}$ (diagnostica temperatura) e $E_{32} \ll E_{21}$ (diagnostica densità). Se si considera la struttura energetica fine, il ground level è in realtà diviso in tre livelli e si parla di approssimazione a cinque livelli.

Per un atomo a tre livelli, trascurando la radiazione incidente, le equazioni per l'equilibrio statistico sono:

$$\begin{aligned} n_1 C_{13} + n_2 C_{23} &= n_e (C_{31} + C_{32} + A_{31} + A_{32}) \\ n_1 C_{12} + n_3 (C_{32} + A_{32}) &= n_2 (C_{23} + C_{21} + A_{21}) \\ n_1 + n_2 + n_3 &= 1 \end{aligned}$$

dove l'ultima somma risulta uno perché per semplicità si normalizza la popolazione totale dei livelli. Perciò si hanno tre equazioni in tre incognite.

7.3 Temperature diagnostics

Consideriamo casi di bassa densità per atomi dove $E_{32} \simeq E_{21}$. Possiamo ignorare de-eccitazioni collisionali e eccitazioni collisionali per livelli superiori all'1 (soglia energetica molto alta) per cui $n_3 \ll n_2 \ll n_1$. Le tre equazioni diventano:

$$\begin{aligned} n_1 C_{13} &= n_3 (A_{31} + A_{32}) \\ n_1 C_{12} + n_3 A_{32} &= n_2 A_{21} \\ n_1 + n_2 + n_3 &= 1 \end{aligned}$$

Perciò $n_3 = n_1 C_{13} / (A_{32} + A_{31})$ e $n_2 = n_1 C_{12} / A_{21}$ (quest'ultima perché $n_3 \ll n_2$).

In generale il flusso della linea di emissione per una transizione spontanea $2 \rightarrow 1$ può essere scritto come:

$$F_{21} = n_2 A_{21} E_{21}$$

prendendo quindi il rapporto tra i flussi delle linee:

$$\frac{F_{32}}{F_{21}} = \frac{n_3 A_{32} E_{32}}{n_2 A_{21} E_{21}} = \frac{E_{32} A_{32} C_{13}}{E_{21} (A_{32} + A_{31}) C_{12}}$$

si hanno C_{12} e C_{13} incognite ma si possono sostituire utilizzando il rapporto $n_e q_{13}/n_e q_{12}$. Si ottiene quindi il temperature diagnostic line ratio:

$$\frac{F_{32}}{F_{21}} = \frac{E_{32} A_{32} \Omega_{13}}{E_{21} (A_{32} + A_{31}) \Omega_{12}} e^{-E_{32}/kT}$$

Il termine esponenziale comporta una forte dipendenza dalla temperatura. Per le approssimazioni fatte, il rapporto tra le linee è indipendente da n_e .

Molti ioni con p^2 (NII, OIII, NeV, SIII) e p^4 (OI, NeIII, ArIII) configurazioni ground hanno delle linee di collisione che possono essere usate per determinare la temperatura. Esempi di diagrammi di livelli per OIII e NII sono

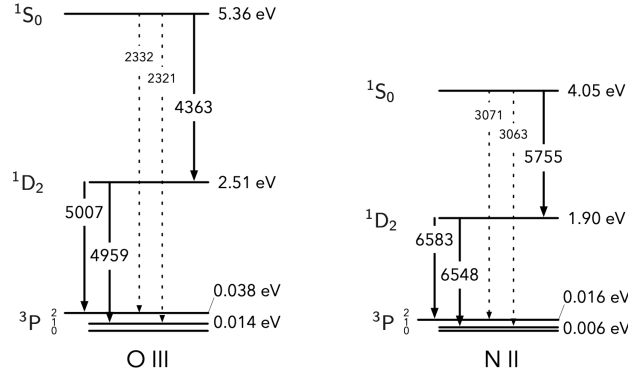


Figura 11: Diagrammi dei livelli energetici per OIII e NII nella loro p^2 ground configurations

riportati in Fig. 11. Il ground level è diviso in tre sottolivelli dalle interazioni spin-orbit, ma la divisione di energia può essere trascurata perchè molto piccola rispetto alla differenza di energia tra gli altri livelli.

Considerando i parametri atomici degli ioni OIII e NII si trova la dipendenza dei rapporti delle linee dalla temperatura:

$$\frac{F(\lambda 4363)}{F(\lambda 4959) + F(\lambda 5007)} = 0.132 e^{-32970/T_e} \quad (\text{OIII})$$

$$\frac{F(\lambda 5755)}{F(\lambda 6548) + F(\lambda 6583)} = 0.123 e^{-25000/T_e} \quad (\text{NII})$$

esse forniscono quindi una diretta stima della temperatura effettiva.

7.4 Density diagnostics

Consideriamo il caso in cui $E_{32} \ll E_{21}$. I rapporti di coppie di linee proibite corrispondenti alle transizioni tra due livelli vicini 2 e 3 e il ground level 1 sono sensibili alla densità degli elettroni. Consideriamo i sistemi 2-1 e 3-1 come due sistemi di atomi a due livelli indipendenti e quindi ignoriamo le transizioni 2-3 tra gli stati eccitati.

Il rapporto tra le linee può essere scritto come:

$$\frac{F_{31}}{F_{21}} = \frac{n_3 A_{31} E_{31}}{n_2 A_{21} E_{21}} \simeq \frac{n_3 A_{31}}{n_2 A_{21}}$$

perché $E_{31} \simeq E_{21}$. Possiamo scrivere il rapporto tra le popolazioni come:

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{n_3/n_1}{n_2/n_1}$$

e di conseguenza:

$$\frac{n_3}{n_2} = \frac{C_{13}}{A_{31} + C_{31}} \frac{A_{21} + C_{21}}{C_{12}}$$

Il rapporto tra i flussi delle linee può quindi essere scritto come:

$$\frac{F_{31}}{F_{21}} = \frac{C_{13}}{C_{12}} \left(\frac{1 + C_{21}/A_{21}}{1 + C_{31}/A_{31}} \right)$$

Questo rapporto è sensibile alla densità degli elettroni perché dipende dal tasso di eccitazioni e de-eccitazioni collisionali. Esaminiamo i casi limite:

- **low density.** In questo regime la de-eccitazione collisionale è trascurabile se confrontata con la de-eccitazione spontanea e possiamo considerare $C_{21} \ll A_{21}$, $C_{31} \ll A_{31}$ e scrivere:

$$\frac{F_{31}}{F_{21}} = \frac{C_{13}}{C_{12}} = \frac{\Omega_{13}}{\Omega_{12}} = \frac{\Omega_{31}}{\Omega_{21}}$$

quindi questo rapporto di righe si basa su costanti atomiche: ogni eccitazione collisionale è seguita da una linea di emissione e il rapporto tra le righe è fissato dal rapporto tra le forze di collisione.

- **high density.** In questo caso dominano le collisioni quindi $C_{21}/A_{21} \gg 1$, $C_{31}/A_{31} \gg 1$ così che:

$$\frac{F_{31}}{F_{21}} = \frac{C_{13}}{C_{12}} \left(\frac{C_{21}/A_{21}}{C_{31}/A_{31}} \right) = \frac{A_{31} g_3}{A_{21} g_2}$$

7.5 Departure coefficients

Per quantificare quanto lontano un sistema si trova rispetto all'equilibrio termodinamico introduciamo il departure coefficient $b_n = n_n/n_n^B$, che restituisce il rapporto tra la popolazione reale del livello n e la popolazione derivata dall'equazione di Boltzmann:

$$\frac{n_2/n_2^B}{n_1/n_1^B} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{1 + A_{21}/(q_{21}n_e)}$$

7.6 Linee di struttura fine nell'IR

Transizioni di struttura fine che avvengono tra la struttura fine dei ground terms dell'atomo sono un importante mezzo diagnostico per le condizioni fisiche del mezzo interstellare. Le piccole energie coinvolte implicano che le righe corrispondenti si trovino nell'infrarosso. Esempi della struttura dei livelli e di linee di transizione per CII, OI e OIII sono riportate in Fig. 12. Queste linee sono proibite in quanto $\Delta l = 0$ e a basse temperature i livelli superiori

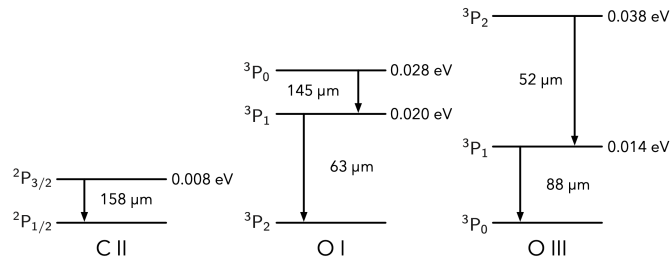


Figura 12: Esempi di fine-structure transitions, le energie sono date in eV al di sopra del ground level

non possono essere popolati da transizioni radiative. Le eccitazioni collisionali sono quindi il principale processo di popolazione. I rapporti di linee delle fine-structure possono quindi essere un buon strumento di diagnostica per la densità.

8 Righe di assorbimento

8.1 Profondità ottica

Cominciamo con l'analizzare il trasporto della radiazione attraverso della materia non inerte. Questo dipende sia dalle condizioni fisiche del mezzo nel quale la radiazione si propaga, sia dalle interazioni atomiche con il campo di radiazione. Una quantità cruciale è lo **spessore ottico** del mezzo, solitamente specificato per le linee che ci interessano.

Definiamo la **profondità ottica** τ_ν dipendente dalla frequenza in modo che la probabilità di trasmissione della radiazione attraverso un mezzo decresca esponenzialmente con $e^{-\tau_\nu}$. L'intensità della radiazione è ridotta rispetto al suo valore iniziale:

$$I_\nu = I_{\nu,0} e^{-\tau_\nu}$$

e analogamente per la densità di flusso:

$$F_\nu = F_{\nu,0} e^{-\tau_\nu}$$

La profondità ottica dipende dal **coefficiente di assorbimento lineare** κ_ν :

$$\tau_\nu = \int \kappa_\nu ds$$

dove l'integrazione è nell'estensione del materiale che produce l'assorbimento lungo la linea di vista.

Considerando la cross section atomica radiativa possiamo scrivere il coefficiente di assorbimento lineare come una funzione della densità numerica degli assorbitori n come:

$$\kappa_\nu = n\sigma_\nu$$

Un mezzo è **otticamente sottile** se $\tau \ll 1$ e **otticamente spesso** se $\tau > 1$. Nel mezzo interstellare di bassa densità il gas è generalmente otticamente sottile, eccetto per frequenze che corrispondono a forti linee di risonanza come per esempio Ly α . Nelle corone stellari il plasma è otticamente sottile per la maggior parte delle frequenze. A densità maggiori, come nelle atmosfere stellari, il gas diventa otticamente spesso.

8.1.1 Densità di colonna

La profondità ottica può essere espressa in termino della **densità di colonna** N che è il numero di atomi assorbitori lungo una colonna attraverso il mezzo avente una cross section di 1 cm^2 :

$$N(\text{cm}^{-2}) = \int n ds$$

La profondità ottica può essere riscritta, partendo dalla sua definizione, come:

$$\tau_\nu = \int \kappa_\nu ds = \int n \sigma_\nu ds = \sigma_\nu \int n ds$$

e di conseguenza

$$\tau_\nu = N \sigma_\nu$$

dove σ_ν è la atomic absorption cross section alla frequenza ν , la quale può essere scritta come

$$\sigma_\nu = \frac{\pi e^2}{m_e c} f \phi(\nu)$$

dove introduciamo la funzione del **profilo di linea normalizzato** $\phi(\nu)$, che descrive l'allargamento in frequenza di σ_ν e dipende dal meccanismo di allargamento. Questo profilo di linea è normalizzato:

$$\int \phi(\nu) d\nu = 1$$

in modo che, integrando σ_ν sulla frequenza otteniamo il coefficiente di assorbimento totale per atomo per una specifica riga spettrale. La presenza di un profilo di riga significa che la transizione non è puramente monocromatica e la riga ha un allargamento significativo in frequenza.

Dalla definizione di τ_ν , possiamo scrivere il coefficiente di assorbimento lineare in termini dell'intensità I_ν (o del flusso monocromatico F_ν):

$$\kappa_\nu = \frac{1}{s} \ln \left(\frac{I_{\nu,0}}{I_\nu} \right) = \frac{1}{s} \ln \left(\frac{F_{\nu,0}}{F_\nu} \right)$$

assumendo κ_ν omogeneo lungo un percorso s lungo la linea di vista. Possiamo quindi derivare κ_ν a diverse frequenze dal profilo di riga osservato.

8.2 Allargamento delle righe

Assorbimenti ed emissioni da righe spettrali isolate coprono un range finito di frequenza. Questo accade perchè sulle righe agiscono dei meccanismi di allargamento. L'analisi dei profili delle righe porta delle informazioni importanti sui meccanismi fisici responsabili dell'allargamento delle righe.

Le righe spettrali possono essere anche allargate dalla rotazione stellare.

Consideriamo tre diversi meccanismi per l'allargamento delle righe: **allargamento naturale**, **allargamento Doppler** e **allargamento collisionale**.

8.2.1 Allargamento naturale

Gli stati atomici eccitati hanno un tempo di vita medio finito a causa delle emissioni spontanee: $\Delta t = 1/A_{21}$. Il principio di indeterminazione di Heisenberg indica che $\Delta E \Delta t \sim \hbar$. Dal momento che la distribuzione di energia ΔE di un livello atomico può essere scritto in termini di distribuzione della frequenza dato che $\Delta E = h\Delta\nu$: la larghezza naturale della riga (FWHM) diventa $\Delta\nu_N = 1/(\Delta t 2\pi) = A_{21}/2\pi$.

L'allargamento naturale della riga è il risultato della larghezza finita dell'energia dei livelli atomici di energia.

Nel caso di allargamento naturale il profilo della riga centrato a frequenza ν_0 è descritto da una **funzione Lorentziana**. Il profilo normalizzato è:

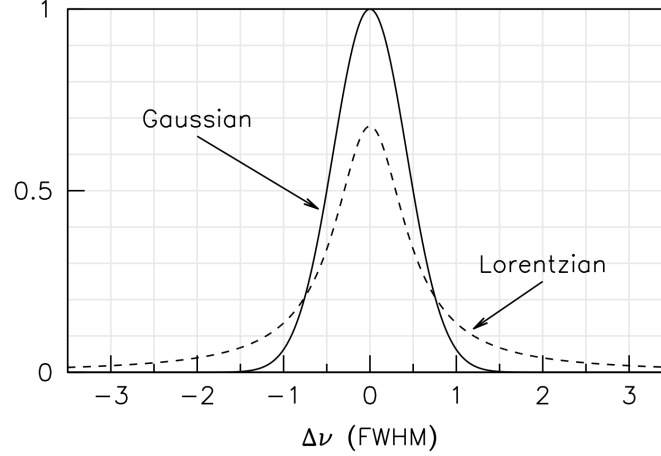


Figura 13: Confronto tra profilo di riga Lorentziano e Gaussiano con la stessa FWHM. La gaussiana domina nel core mentre la lorentziana domina ai lati

$$\ell(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma/4\pi)^2}$$

dove $\gamma = A_{21}$ è la **damping constant** e ν_0 è la frequenza del centro della riga.

Per livelli non metastabili A_{21} è dell'ordine di 10^{-8} s^{-1} quindi l'allargamento naturale per righe nell'ottico è $\Delta\lambda \simeq 10^{-4} \text{ \AA}$. Chiaramente, l'allargamento naturale non è responsabile dell'allargamento delle righe osservato nella maggior parte dei casi di interesse astrofisico.

8.2.2 Allargamento Doppler

Il moto di un atomo a velocità v lungo la linea di vista a causa del moto termico determina uno spostamento Doppler nella riga di assorbimento o di emissione relativa dato da, nel caso non relativistico:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

Consideriamo una distribuzione di velocità Maxwelliana per la probabilità che la velocità lungo la linea di vista dell'atomo sia compresa tra v e $v + dv$:

$$\frac{dn(v)}{n_{tot}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}v_0} e^{-v^2/v_0^2} dv$$

dove $v_0 = (2kT/m_A)^{1/2}$ è la velocità più probabile per un nucleo atomico di massa m_A . Calcolando la frazione $dn(\nu)/n_{tot}$ di atomi che emettono nel range di frequenza $(\nu, \nu + d\nu)$ otteniamo il **profilo di riga Gaussiano normalizzato** di larghezza $\Delta\nu_D$ e centrato sulla frequenza ν_0 :

$$g(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2\right]$$

La larghezza Doppler è tale che $\Delta\nu_D/\nu_0 = \Delta\lambda_D/\lambda_0 = v_0/c$ e $\text{FWHM} = 2\sqrt{\ln 2}\Delta\nu_D$ in unità di frequenza. Più in generale la larghezza Doppler è definita da:

$$\frac{\Delta\nu_D}{\nu_0} = \frac{b}{c}$$

dove il parametro b è in unità di velocità ed è dato da:

$$b = (2kT/m_A + \xi^2)^{1/2}$$

che include una componente ξ non termica nella velocità chiamata "microturbolenza".

A lunghezze d'onda dell'ottico le larghezze Doppler di atomi che si muovono a 1 km s^{-1} sono $\Delta\lambda \simeq 0.02 \text{ \AA}$, circa due ordini di magnitudine maggiore rispetto all'allargamento naturale.

8.2.3 Allargamento collisionale

L'allargamento collisionale o di pressione di ha a causa delle interazioni di un atomo che emette o assorbe radiazione con altri atomi e elettroni in un plasma. Il profilo di riga risultante è Lorentziano e l'allargamento aumenta con l'aumentare della densità delle particelle. Esso è anche collegato alle larghezze delle diverse righe atmosferiche di stelle con diverse classi di luminosità. Per le basse densità del mezzo interstellare l'allargamento collisionale può essere trascurato.

8.2.4 Voigt profile

Quando consideriamo diversi meccanismi di allargamento delle righe il profilo Gaussiano domina nelle regioni centrali mentre il profilo Lorentziano domina nelle regioni esterne della riga. Il profilo combinato è il **Voigt profile**:

$$\phi(\nu) = \frac{H(\alpha, x)}{\Delta\nu_D \pi^{1/2}}$$

che è proporzionale alla funzione di allargamento della riga:

$$H(\alpha, x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{(x-y)^2 + \alpha^2} dy$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Delta\nu_N}{\Delta\nu_D} = \frac{\gamma}{(2\pi\nu_d)} \\ x &= \frac{(\nu - \nu_0)}{\Delta\nu_D} \\ y &= \frac{v}{c} \frac{\nu_0}{\Delta\nu_D} \end{aligned}$$

Per rappresentare le due componenti principali consideriamo i casi asintotici:

- $\alpha \ll 1$: la larghezza Doppler $\Delta\nu_D \gg$ la larghezza Lorentziana $\Delta\nu_N$ ovvero nel core della riga
- $x \gg 1$: la regione di frequenza in cui il profilo Lorentziano è dominante

Considerando questi limiti si ha che la funzione di allargamento risulta:

$$H(\alpha, x) \rightarrow e^{-x^2} + \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}x^2}$$

Il primo termine (Gaussiano) domina al centro della riga (valori piccoli per x) mentre il secondo termine (Lorentziano) domina ai lati (valori grandi per x). In Fig. 14 si vedono i casi limite con la linea tratteggiata mentre la linea continua indica il Voigt profile.

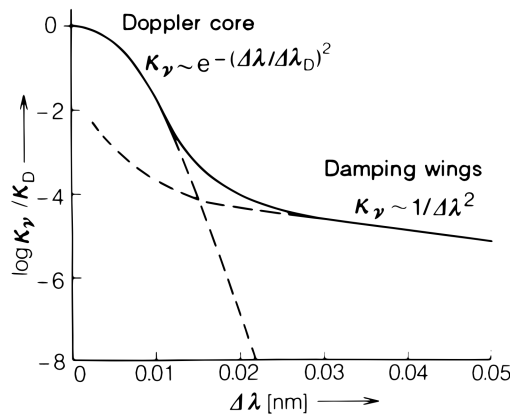


Figura 14: Coefficiente di assorbimento della riga in funzione della distanza dal centro e normalizzato al valore centrale

8.3 Larghezza equivalente

La larghezza equivalente W di una riga di assorbimento è definita come l'intensità assorbita (o flusso) normalizzata all'intensità del continuo (o del flusso).

Considerando la densità di flusso F_ν , possiamo scrivere in termini di frequenza:

$$W_\nu = \frac{1}{F_0} \int_{line} (F_0 - F_\nu) d\nu$$

Abbiamo utilizzato il continuo del flusso come una costante F_0 ma possiamo generalizzare questa equazione per tenere conto della sua variazione lungo il profilo della riga, considerando la densità del continuo del flusso $F_{c,\nu}$.

Ricordando che $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$ possiamo scrivere:

$$W_\lambda = W_\nu \frac{\lambda^2}{c}$$

La larghezza equivalente corrisponde alla larghezza di una riga rettangolare avente la stessa area della riga spettrale di interesse e di estensione da zero alla densità del continuo del flusso.

Dal punto di vista osservativo la larghezza equivalente è misurata in unità di lunghezza d'onda e ha il vantaggio di non dipendere dalla risoluzione spettrale. Definisce la "forza" di una riga e permette di determinare la temperatura e la pressione dalla dipendenza di W da queste quantità.

8.4 Curva di crescita

La curva di crescita descrive la variazione della larghezza equivalente con la densità numerica degli atomi assorbenti lungo la linea di vista (densità di colonna). La crescita lineare si può applicare solamente nel caso in cui $\tau_\nu \ll 1$ ma dobbiamo considerare anche i casi per linee di assorbimento più forti.

Curve di W_λ in funzione di Nf o, più tipicamente, W_λ/λ vs $Nf\lambda$, possono essere compute per diverse righe, il risultato si può vedere in Fig. 15 Possiamo identificare tre diversi regimi:

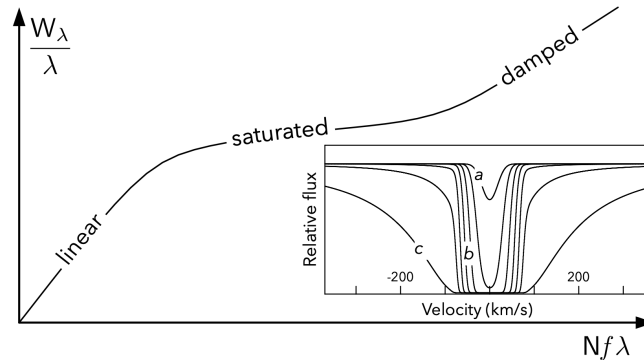


Figura 15: I tre regimi della curva di crescita

- **porzione lineare:** per piccole densità di colonna (caso otticamente sottile) la riga spettrale diventa più profonda e si allarga in modo direttamente proporzionale al numero di assorbitori. La curva di crescita è una linea retta con $W_\lambda \propto N$:

$$N(\text{cm}^{-2}) = \frac{1.13 \cdot 10^{20}}{f} \frac{W_\lambda}{\lambda^2}$$

dove W_λ e λ sono espressi in Å. Questa porzione della curva è molto utile per la derivazione delle densità di colonna di diversi elementi se le deboli linee spettrali possono essere misurate in modo affidabile.

- **porzione saturata:** a densità di colonna maggiori il core della riga è otticamente spesso e W_λ aumenta con Nf molto lentamente, $W_\lambda \propto \sqrt{\ln N}$. Questa porzione della curva è sensibile alla larghezza Doppler $\Delta\nu_D$.
- **porzione smorzata** (caso otticamente spesso): a densità di colonna molto grandi l'assorbimento ha luogo nelle regioni Lorentziane. Si ha $W_\lambda \propto N^{1/2}$ e questa parte della curva dipende anche dalla costante di smorzamento ω o, equivalentemente, dall'ampiezza naturale della riga.

Le analisi della curva di crescita sono utilizzate per misurare le abbondanze di elementi chimici nelle atmosfere stellari e nel mezzo interstellare nelle galassie. A questo proposito si utilizzano righe dello stesso elemento che variano nel range della forza dell'oscillatore f .

Nel mezzo interstellare e nel mezzo intergalattico solamente poche righe sono abbastanza forti da raggiungere la porzione smorzata della curva di crescita ma nelle atmosfere stellari si trovano spesso forti righe.

8.5 Abbondanze chimiche nel gas interstellare

Il grande numero di righe di assorbimento, principalmente nell'UV, prodotte da ioni e molecoli nel mezzo interstellare lungo la linea di vista di stelle brillanti sono una potente tecnica per misurare le abbondanze chimiche di questi ioni. La stessa tecnica permette di ricavare le abbondanze chimiche del mezzo intergalattico quando si usano quasar come fonte dal background.

Le abbondanze possono essere ricavate dalle larghezze equivalenti e dalle analisi della curva di crescita, o alternativamente si possono usare i profili di riga se sono completamente risolti, usando il fatto che la densità di colonna degli atomi che assorbono ad una determinata frequenza all'interno della riga sono proporzionali alla profondità ottica alla stessa frequenza.

Dall'equazione:

$$N(\nu) = \frac{m_e c}{\pi e^2} \frac{\tau_\nu}{f \phi(\nu)}$$

integrando sulla frequenza si ha il numero totale di atomi assorbitori per una specifica riga.

9 Il mezzo interstellare freddo

9.1 Componenti del mezzo interstellare

Il mezzo interstellare (ISM) può essere diviso in diverse componenti sulla base della sua temperatura:

- **mezzo neutro freddo** - $T < 50$ K, $n > 1 - 10 \text{ cm}^{-3}$. Si rivela con righe molto strette di H I nel radio (21 cm) nello spettro di fonti molto brillanti. A densità maggiori, come quelle delle nubi molecolari, l'idrogeno atomico diminuisce la sua importanza a favore dell'H₂.
- **mezzo neutro tiepido** - $T > 200$ K. Rivelato come righe di emissione larghe dell'H I.
- **mezzo ionizzato tiepido** - $T \approx 10^4$ K. Rivelato con emissioni $H\alpha$ diffuse all'esterno di regioni H II/regioni di formazione stellare.
- **mezzo caldo ionizzato** - $T \approx 10^6$ K. Rivelato con assorbimenti dell'O VI nell'UV ed emissioni diffuse nell'X.

9.2 Trasporto radiativo: funzione sorgente

Includiamo i processi di emissione con i processi di assorbimento nell'equazione che governa il trasporto di radiazione attraverso la materia e scriviamo:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\kappa_\nu I_\nu + j_\nu$$

dove κ_ν e j_ν sono i coefficienti di assorbimento ed emissione rispettivamente. L'unità di misura di j_ν è $\text{erg cm}^{-3} \text{s}^{-1} \text{ster}^{-1} \text{Hz}^{-1}$. Possiamo riscriverla come:

$$\frac{dI_\nu}{\kappa_\nu ds} = \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu$$

che rappresenta l'equazione del trasporto radiativo dove definiamo la funzione sorgente

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{\kappa_\nu}$$

La soluzione formale si ottiene moltiplicando entrambi i membri per e^{τ_ν} :

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_{\nu,0} e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(\tau'_\nu) e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu$$

I due termini rappresentano rispettivamente l'intensità iniziale $I_{\nu,0} = I_\nu(\tau_\nu = 0)$ ridotta di un fattore $e^{-\tau_\nu}$ e la funzione sorgente integrata, ridotta per l'assorbimento.

Considerando una funzione sorgente spazialmente costante la soluzione dell'equazione del trasporto diventa:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_{\nu,0}e^{-\tau_\nu} + S_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}) = S_\nu + (I_{\nu,0} - S_\nu)e^{-\tau_\nu}$$

Questa equazione mostra che se $\tau_\nu \rightarrow \infty$ come in un mezzo molto opaco (nube otticamente spessa), si ha $I_\nu \rightarrow S_\nu$. In generale dobbiamo considerare sia i contributi discreti (righe) che il continuo (continuo spettrale) ai coefficienti di assorbimento e di emissione.

9.3 Temperatura di brillantezza

Per una sorgente che emette radiazione la temperatura di brillantezza è definita come la temperatura T_b del corpo nero che restituisce l'intensità osservata ad una certa frequenza:

$$I_\nu = B_\nu(T_b)$$

Viene spesso utilizzata a lunghezze d'onda del radio ($\lambda > 1$ cm: limite Rayleigh-Jeans) dove l'intensità della radiazione di corpo nero può essere approssimata da:

$$B_\nu(T) \simeq \frac{2\nu^2}{c^2} kT$$

dunque $B_\nu(T)$ è proporzionale a T . Questo può essere usato per definire la temperatura di brillantezza:

$$T_\nu = \frac{c^2}{2\nu^2 k} I_\nu$$

L'equazione del trasporto per emissione termica nel limite Rayleigh-Jeans espressa in termini della temperatura è:

$$\frac{dT_b}{d\tau_\nu} = -T_b + T$$

con soluzione:

$$T_b = T_{b,0}e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu})$$

dove T è la temperatura termodinamica del gas (costante). Per $\tau \rightarrow \infty$, $T_b = T$ quindi possiamo misurare la temperatura del gas direttamente dall'intensità osservata nel radio.

9.4 Equazione cinetica nel regime di Rayleigh-Jeans

Precedentemente abbiamo scritto l'equazione per l'equilibrio statistico per un sistema a due livelli come:

$$n_1\rho(\nu_{12})B_{12} + n_1C_{12} = n_2\rho(\nu_{12})B_{12} + n_2A_{21} + n_2C_{21}$$

e abbiamo trascurato la radiazione incidente ($\rho = 0$). Rimuoviamo ora questa approssimazione e limitiamo l'analisi al regime di Rayleigh-Jeans (basse energie, grandi lunghezze d'onda) concentrandoci quindi nel radio dove i processi radiativi del gas freddo sono concentrati. Consideriamo quindi:

$$\rho_\nu = \frac{4\pi}{c} I_\nu$$

e

$$I_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2} kT_b$$

Il rapporto tra le popolazioni dei livelli può essere scritto come:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \frac{A_{21}(kT_b/h\nu) + C_{21}e^{-h\nu/kT_K}}{A_{21}(1 + kT_b/h\nu) + C_{21}}$$

utilizzando la relazione tra i coefficienti di Einstein e tra i coefficienti collisionali.

Introduciamo la **temperatura cinetica** T_K :

$$C_{12} = C_{21} \frac{g_2}{g_1} e^{-h\nu/kT_K}$$

ovvero la temperatura che appare nella distribuzione di velocità Maxwelliana delle particelle che impattano e che quindi descrive la loro energia cinetica $1/2mv^2$.

Definiamo inoltre la **temperatura di eccitazione** (o temperatura di spin) dall'equazione di Boltzmann:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{-h\nu/kT_{ex}}$$

Usando l'approssimazione $e^{-x} \simeq 1 - x$ e svolgendo un po' di conti troviamo:

$$T_{ex} = T_K \frac{T_b + T_0 \frac{C_{21}}{A_{21}}}{T_K + T_0 \frac{C_{21}}{A_{21}}}$$

dove definiamo

$$T_0 = \frac{h\nu}{k} \quad \text{è una costante}$$

Possiamo considerare due casi estremi:

- processi radiativi dominano sulle collisioni (a basse densità), $A_{21} \gg C_{21}$:

$$T_{ex} \rightarrow T_b$$

- collisioni dominano (densità maggiori), $A_{21} \ll C_{21}$:

$$T_{ex} \rightarrow T_K$$

In generale a densità intermedie tra questi due estremi la temperatura di eccitazione T_{ex} è una media pesata tra la temperatura di brillanza T_b e la temperatura cinetica T_K .

9.5 La riga H I a 21 cm

Il ground level $1^2S_{1/2}$ dell'atomo di idrogeno è diviso in due livelli iperfini dovuti all'interazione tra il momento angolare degli elettroni e quello dei protoni.

La differenza di energia tra i due livelli iperfini ($6 \cdot 10^{-6}$ eV) corrisponde ad una lunghezza d'onda di 21.1 cm e una frequenza di 1420 MHz.

La popolazione relativa dei due livelli è controllata dalla eccitazione collisionale e da processi di de-eccitazione a causa del piccolo valore di probabilità di A_{1-0} . Per densità $N_H > 1 \text{ cm}^{-3}$ dominano sempre le collisioni, con un tempo medio tra le collisioni di 400 yr e perciò $T_{ex} \rightarrow T_K$. Per transizioni H I 21 cm la temperatura di eccitazione è chiamata la temperatura di spin e perciò:

$$T_s = T_K$$

Si ha quindi:

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{g_1}{g_0} e^{-h\nu_{1-0}/kT_s} = \frac{g_1}{g_0} e^{-T_0/T_s}$$

con

$$T_0 = \frac{h\nu_{1-0}}{k} = 0.0682 \text{ K}$$

Perciò per $T_s \gg T_0$, $n_1/n_0 = g_1/g_0 = 3$ restituisce la popolazione relativa in equilibrio collisionale. La densità dell'atomo di idrogeno è perciò $n_H = 4n_0$ (gli atomi sono tutti nel ground state, in livelli iperfini o in 1).

9.5.1 Densità di colonna

Possiamo esprimere la densità di colonna dell'idrogeno come una funzione della profondità ottica e della temperatura di spin:

$$N(H) = 1.822 \cdot 10^{18} \int_{-\infty}^{+\infty} T_s \tau(v) dv \text{ cm}^{-2}$$

Invertendo questa equazione e considerando una nube di H I con una T_s spazialmente costante e un profilo di velocità gaussiano possiamo ottenere una espressione per la profondità ottica della nube di gas:

$$\tau = 5.49 \cdot 10^{-19} \frac{N(H)}{T_s \Delta v}$$

Perciò per $T_s > 50 \text{ K}$ e $\Delta v > 10 \text{ km/s}$, la nube di H I diventa otticamente spessa per $N(H) > 10^{21} \text{ cm}^{-2}$.

9.5.2 Emissione ed assorbimento

Se consideriamo una nube di gas di temperatura costante di fronte ad una sorgente e guardiamo alla soluzione dell'equazione del trasporto ($T = T_s$ temperatura di eccitazione):

$$T_b = T_{b,0}e^{-\tau_\nu} + T_s(1 - e^{-\tau_\nu})$$

se non si ha una sorgente dallo sfondo $T_{b,0} = 0$ e osserviamo una pura linea di emissione (no continuo). Per $\tau_\nu \ll 1$ e quindi $T_b = T_s\tau_\nu$ che, sostituendolo nell'equazione per la densità di colonna $N(H)$ si ottiene:

$$N(H) = 1.822 \cdot 10^{18} \int_{-\infty}^{+\infty} T_b dv$$

per cui $N(H)$ si deriva dall'intensità della riga a 21 cm T_B , indipendente da T_s , che non è facile da misurare (un valore classico per le nubi di HI interstellare è $T_s = 125$ K).

Se il continuo del background non è nullo possiamo sottrarre $T_{b,0}$ in entrambi i membri e otteniamo:

$$\Delta T_b = T_b - T_{b,0} = (T_s - T_{b,0})(1 - e^{-\tau_\nu})$$

ciò significa che osserviamo una riga di assorbimento ($\Delta T_b < 0$) quando $T_s < T_{b,0}$ ovvero quando la temperatura della nube di gas è minore della temperatura della radiazione di background.

La riga a 21 cm è una delle righe singole più importanti in astronomia. È di fondamentale importanza nello studio della struttura e della dinamica delle galassie. Tra le sue applicazioni si hanno:

- studio della rotazione differenziale della Via Lattea
- studi cinematici di galassie esterne (curve di rotazione) che portano alla computazione della massa totale e allo studio degli aloni di materia oscura e l'uso della relazione di Tully-Fisher $L \sim V^4$ per la determinazione della distanza
- determinazione della massa di HI nelle galassie. Se la riga è otticamente sottile:

$$M_{HI} = 0.39 \cdot 10^2 D^2 \theta^2 \int T_b dv$$

se la distanza D è in Mpc e la misura del raggio del radio telescopio θ è in arcosecondi.

9.6 La molecola H₂

L'idrogeno molecolare è molto abbondante nel ISM freddo ma è anche difficilmente osservabile se non dallo spazio. Questo perchè questa molecola, come le altre molecole diatomiche omounucleari non ha un momento di dipolo elettrico permanente e le transizioni rotazionali sono proibite. Sono consentite le transizioni rotazionali di quadrupolo ma sono anche molto deboli.

Le transizioni molecolari elettroniche (salti tra livelli roto-vibrazionali di diversi stati elettronici eccitati) con energie molto elevate sono consentite e osservate nel lontano UV a $\lambda < 1150$ Å.

9.7 La molecola di CN

Mentre la riga dell'idrogeno a 21 cm è un esempio di ciò che accade quando dominano i processi collisionali, per la molecola di CN vale l'opposto. Infatti per tale molecola si ha $C_{21} \ll A_{21}$ e quindi $T_{ex} \simeq_b$ e i processi radiativi dominano.

La temperatura di eccitazione può essere ottenuta dal rapporto tra righe per righe nell'UV viste in assorbimento in stelle brillanti dal momento che le loro forze relative dipendono dalle popolazioni relative dei livelli $J = 0, 1$. Si misura un valore di circa. Si è misurato un valore di circa $T_{ex} = 2.8 \pm 0.1$ K che è pari al valore della temperatura di brillantezza a 2.64 mm. Questo restituisce una misura della radiazione cosmica di fondo a questa lunghezza d'onda.

9.8 Caratteristiche spettrali della polvere e molecolari

Ci sono delle caratteristiche aggiuntive nello spettro del mezzo interstellare generate da grani di polvere e molecole.

Visibile: bande interstellari diffuse - Ci sono centinaia di assorbimenti negli spettri nel visibile e nel nIR di stelle che appartengono al mezzo interstellare. Le larghezze tipiche sono 1-20 Å. Si ipotizza che siano dovute all'assorbimento da parte di grandi molecole piuttosto che da polveri.

Infrarosso - Nell'IR sono prominenti le caratteristiche della polvere. Le più forti sono dovute ai silicati. Fonti di radiazione circondate da nubi molecolari dense mostrano assorbimenti identificati con ghiaccio sulla superficie di grani di polvere ed appartenenti a diverse molecole.

PAHs - Idrocarburi policiclici aromatici sono composti organici di grandi dimensioni che si trovano ovunque nel mezzo interstellare. Producono forti bande di emissione nell'ordine del μm originate dall'assorbimento di fotoni UV che eccitano le molecole e sono seguiti da de-eccitazione spontanea.

Continuo termico nel IR - La polvere riscaldata a temperature dell'ordine di 100 K emettono uno spettro di corpo nero con un picco attorno a $30 \mu\text{m}$

10 Processi continui

Devono essere presi in considerazione anche i processi continui per descrivere la produzione del continuo. Questi processi sono le transizioni **bound-free** (che includono fotoionizzazione e ricombinazione radiativa) e **free-free** (Bremsstrahlung). Gli stati liberi non sono quantizzati e ciò porta a continue emissioni o assorbimenti di radiazione.

10.1 Transizioni bound-free

Considerando uno stato di energia legato j di uno ione A le transizioni bound-free sono rappresentate come:

$$E_j + h\nu \longleftrightarrow A^+ + e^- + \epsilon$$

dove $\epsilon = 1/2mv^2$ è l'energia cinetica dell'elettrone non legato rilasciato dallo ione. Se χ è il potenziale di ionizzazione allora l'energia $h\nu$ del fotone che ionizza lo ione è:

$$h\nu = \chi - E_j + \epsilon$$

La cross section del processo complementare di fotoionizzazione a_ν (assorbimento di radiazione) e ricombinazione radiativa (emissione di radiazione) σ_ν sono correlati dalla **relazione di Milne** (analogia alla relazione tra i coefficienti di Einstein per le transizioni bound-bound):

$$\frac{\sigma_\nu(\text{rec})}{a_\nu(\text{abs})} = \frac{(h\nu)^2}{(m_e c v)^2} \frac{g_i}{g_{i+1}}$$

dove i si riferisce ad uno specifico stato di ionizzazione e v è la velocità dell'elettrone. Questo è molto utile perchè le cross section della ricombinazione può essere derivato dalle cross section della fotoionizzazione che sono più facilmente misurabili sperimentalmente.

10.2 Transizioni free-free

Le transizioni free-free si hanno quando gli elettroni acquistano o perdono una certa quantità di energia $\Delta\epsilon$ muovendosi in presenza del campo elettrico di uno ione. L'energia del fotone assorbito o emesso rispettivamente è $h\nu = \Delta$. L'interazione tra ioni ed elettroni è più forte per velocità relative più basse (l'interazione ha durata maggiore) e perciò per una distribuzione termica di velocità, a basse temperature di hanno coefficienti di radiazione maggiori.

Per una tipica temperatura di una nebulosa pari a 10^4 K l'emissione free-free è significativa solamente nel radio e nell'infrarosso e, in questi regimi domina sull'emissione bound-free.

11 Atmosfere e venti stellari

Analizziamo alcuni processi che comportano la formazione di righe di assorbimento o di emissione negli spettri stellari. La loro dipendenza dalle condizioni fisiche permette di capire la fisica che sta dietro la classificazione spettrale delle stelle e come le temperature e densità delle fotosfere possono essere derivate.

11.1 Proprietà osservative di base

La luminosità di una stella è collegata alla temperatura effettiva T_{eff} di un corpo nero che emette la stessa quantità di energia per unità di tempo e di area. Secondo la legge di Stephan-Boltzmann la potenza del corpo nero (energia emessa per unità di tempo) per unità di area è σT_{eff}^4 e perciò la luminosità bolometrica di una stella di raggio R può essere espressa dall'equazione:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

Per una stella di L e R note tale equazione definisce la **temperatura effettiva** della stella T_{eff} . La **temperatura di colore** si ottiene dal rapporto del flusso tra due diverse regioni spettrali.

Il continuo stellare non può essere descritto esattamente da uno spettro di corpo nero a causa della presenza di **line blanketing** causato dalle transizioni radiative che hanno luogo nelle atmosfere stellari che redistribuiscono la radiazione di piccola lunghezza d'onda a λ maggiori.

11.1.1 Classificazione spettrale

La classificazione degli spettri stellari utilizzando T_{eff} e pressione si basa sulle analisi di forza relativa delle righe e loro forme. La sequenza spettrale di Harvard (contenente i tipi spettrali OBAFGKM) può essere descritta in termini del potenziale di ionizzazione dei diversi ioni le cui righe spettrali vengono utilizzate nella classificazione. Le classi di luminosità della classificazione di Morgan-Keenan si definiscono sulla base della larghezza delle righe, con le nane (classe V) che hanno righe più larghe rispetto alle giganti (classe III) e alle supergiganti (classe I).

Le variazioni nell'intensità delle righe nel range dell'ottica sono principalmente dovute a variazioni della temperatura superficiale e, in misura minore, a variazioni di pressione e metallicità e portano alla classificazione spettrale delle stelle.

L'analisi delle righe dei vari elementi producono delle curve come quelle riportate in Fig.16. Le righe di assorbimento

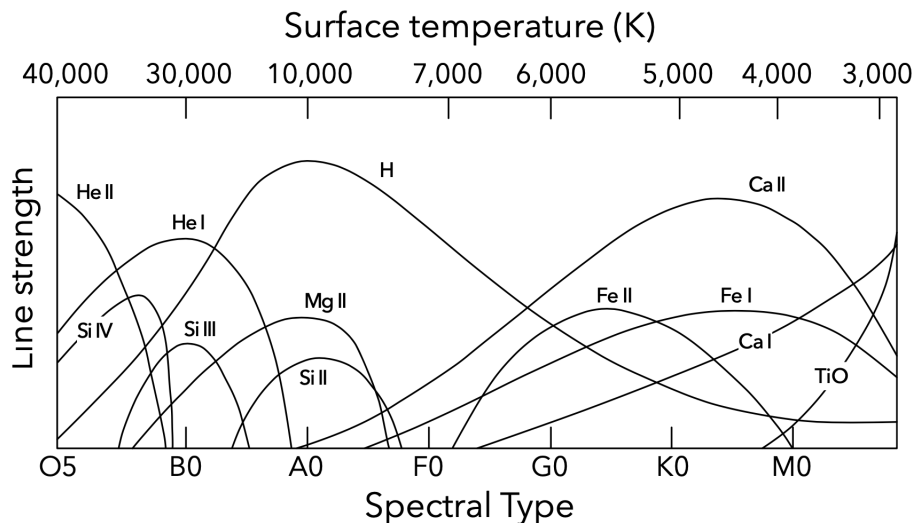


Figura 16: Schema della forza delle righe in funzione della temperatura superficiale e del tipo spettrale

mento prodotte da diversi elementi raggiungono la loro massima forza a temperature diverse, in base al loro livello di eccitazione e alle proprietà di ionizzazione. Per esempio, le righe di ricombinazione di He I e He II appaiono solamente in spettri di stelle con temperature superficiali elevate, attorno ai 30,000 K e oltre. Questa correlazione con i tipi spettrali restituisce una spiegazione fisica della classificazione degli spettri stellari.

Questi calcoli, basati sulle equazioni di Boltzmann e Saha ci permettono di ottenere la forza relativa di diverse righe, in particolare delle righe dei metalli relativamente alle righe dell'idrogeno. Questi rapporti sono molto sensibili alla temperatura.

11.2 Effetto del campo magnetico: effetto Zeeman

La degenerazione elettronica degli stati $2J + 1$ di atomi hydrogen-like con differenti valori di M_J è interrotta dall'interazione degli atomi con un campo elettrico o magnetico esterno.

Questo da origine all'effetto **Stark** e all'effetto **Zeeman**.

Considerando LS coupling, la presenza di un campo magnetico rimuove la degenerazione elettronica e, nel caso di $S = 0$ i livelli energetici sono splittati in $2J + 1$ sottolivelli uniformemente spaziati, con spaziatura:

$$\Delta E_B \propto \frac{e}{m_e} B$$

Le righe di transizione tra i livelli energetici splittati devono soddisfare le regole di selezione di dipolo ($\Delta M_J = 0, \pm 1$) e nel caso più semplice (effetto Zeeman normale) la riga spettrale risulta splittata in tre diverse componenti, con la componente centrale avente la stessa lunghezza d'onda del caso imperturbato. Quando $S \neq 0$ la spaziatura non è più uniforme e il numero di componenti varia (effetto Zeeman anormale). Dallo splittamento della riga si ricava l'intensità del campo magnetico. Un esempio di spettro stellare affetto da effetto Zeemann è riportato in Fig. 17; le componenti sono indicate con le lettere σ ($\Delta M_J = \pm 1$) e π ($\Delta M_J = 0$).

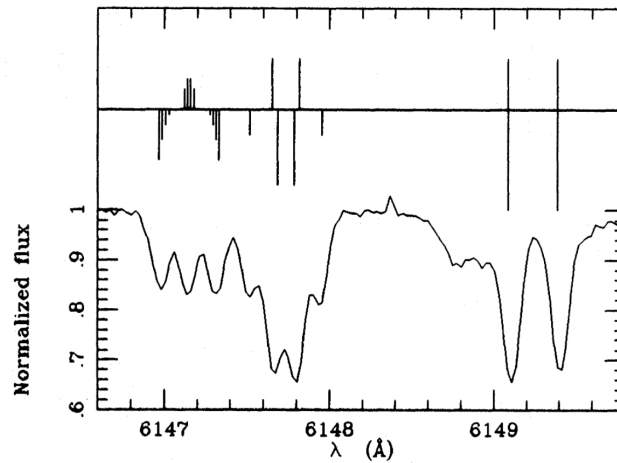


Figura 17: Zeeman splitting nello spettro di una stella per le righe Cr II $\lambda 6147.2$, Fe II $\lambda 6147.7$ e Fe II $\lambda 6149.2$. Le barre nella parte superiore indicano quali componenti sono σ (sotto la riga orizzontale) e quali sono π (sopra la riga orizzontale).