Esercizio 1

E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare $\mathcal{P}$

$$(\mathcal{P})\quad \begin{cases} \max & -x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \;,\; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

D. 1 Analizzare le proprietà dei punti $x_A = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)^\top$ e $x_B = (1,3)^\top$, $x_C = (0,0)^\top$ stabilendo per ciascuno di essi se si tratti di soluzione ammissibile, di base, ottima per $\mathcal{P}$.

R.

La forma standard di $\mathcal{P}$ è

$$(\mathcal{P}_{FS})\quad \begin{cases} -\min & x_1 - 3x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x_2 + x_5 = 4 \\ & x_1 \;,\; x_2 \;,\; x_3 \;,\; x_4 \;,\; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Avremo perciò:

- $(x_A)_{FS} = \left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)^\top$ risulta essere soluzione non ammissibile. Poiché A_1, A_2, A_5 sono linearmente indipendenti, $(x_A)_{FS}$ risulta essere soluzione di base non ammissibile. Poiché, infine, $(x_A)_{FS}$ non è ammissibile, non può essere soluzione ottima.
- $(x_B)_{FS} = (1,3,3,0,1)^\top$ è una soluzione ammissibile. Poiché A_1, A_2, A_3, A_5 sono linearmente dipendenti, $(x_A)_{FS}$ non di base. Per verificarne l'ottimalità, è necessario ricorrere al teorema degli scarti complementari. Ricaviamo il problema duale $\mathcal{D}$ di $\mathcal{P}_{FS}$ o di $\mathcal{P}$, (duale simmetrico). Scrivendo, ad esempio, il duale di $\mathcal{P}_{FS}$

$$(\mathcal{D}_{FS})\quad \begin{cases} -\max & 7y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ & y_1 - y_2 \leq 1 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \leq -3 \\ & y_1 \;,\; y_2 \;,\; y_3 \leq 0 \end{cases}$$

ed imponendo il soddisfacimento per uguaglianza dei vincoli $(\mathcal{D}_{FS})$ corrispondenti a componenti non nulle del vettore $(x_B)_{FS}$, cioè il primo, secondo, terzo e quinto vincolo, troviamo $y_1 = 0$, $y_3 = 0$, $y_2 = -1$, $y_2 = -3$: sistema incompatibile e perciò $(x_B)_{FS}$ non può essere soluzione ottima.

Osservazione

Se in $(\mathcal{D}_{FS})$ si effettua il cambio di variabili $y_1 = -z_1, y_2 = -z_2, y_3 = -z_3$ con $y_1, y_2, y_3 \geq 0$ si ha

$$(\mathcal{D}'_{FS})\quad \begin{cases} -\max & -7z_1 - 2z_2 - 4z_3 \\ & -z_1 + z_2 \leq 1 \\ & -z_1 - z_2 - z_3 \leq -3 \\ & -z_1 \;,\; -z_2 \;,\; -z_3 \leq 0 \end{cases}$$

da cui, sfruttando la relazione $\max c^\top x = -\min -c^\top x$ e cambiando il segno di tutti i vincoli, otteniamo il duale simmetrico

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} \min & 7z_1 & + & 2z_2 & + & 4z_3 & & \\ & +z_1 & - & z_2 & & & \geq & -1 \\ & z_1 & + & z_2 & + & z_3 & \geq & 3 \\ & z_1 & , & z_2 & , & z_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

- $(x_C)_{FS} = (0,0,7,2,4)^\top$ è una soluzione ammissibile. Poiché A_3, A_4, A_5 sono linearmente indipendenti, $(x_C)_{FS}$ è di base. La verifica dell'ottimalità può essere fatta sia calcolando i costi ridotti rispetto alla base $\mathcal{B} = \{3,4,5\}$, sia usando il Teorema degli scarti complementari. Nel primo caso si ha

  $$\hat{c}_N^\top = [\hat{c}_1, \hat{c}_2] = c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N$$

  Osservando che $c_B^\top = [c_3, c_4, c_5] = [0,0,0]$, si ha $\hat{c}_N^\top = c_N^\top = [c_1, c_2] = [1, -3]$. Perciò $(x_C)_{FS}$ non è soluzione ottima.

  Applicando invece il Teorema degli scarti complementari, è necessario imporre il soddisfacimento per uguaglianza del terzo, quarto e quinto vincolo di $(\mathcal{D}_{FS})$. La soluzione complementare ad $(x_C)_{FS}$ è pertanto $y^\top = [0,0,0]$. Poiché $y \notin \Omega(\mathcal{D})$, $(x_C)_{FS}$ non è soluzione ottima.

D. 2 Nel caso nessuno dei punti assegnati risulti essere soluzione ottima, determinare la soluzione ottima di $\mathcal{P}$ applicando l'Algoritmo del Simplesso e stabilire se la soluzione ottima è unica o no, motivando la risposta.
R.
Usando $x = (x_C)_{FS}$ come punto iniziale per l'Algoritmo del Simplesso, si ha
Iterazione 1

$$\mathcal{B} = \{3,4,5\} \quad \mathcal{N} = \{1,2\} \quad x_B = [x_3, x_4, x_5]^\top = [7,2,4]^\top \quad z = c_B^\top x_B = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = B \quad B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_N^\top = [\hat{c}_1, \hat{c}_2] = c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N = [1, -3]$$

Condizione di ottimalità non verificata. Portando in base la variabile x_2 si ha

$$d = B^{-1}A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{\delta} = \min\left\{ \frac{x_{B(1)}}{d_1}, \frac{x_{B(2)}}{d_2}, \frac{x_{B(3)}}{d_3} \right\} = \min\left\{ \frac{7}{1}, \frac{2}{1}, \frac{4}{1} \right\} = 2$$

Il valore di $\bar{\delta}$ è raggiunto in corrispondenza della componente $x_{B(2)} = x_4$ di x_B, che quindi portandosi a zero, lascerà la base. La nuova soluzione ammissibile di base sarà

$$x'_B = \begin{pmatrix} x'_3 \\ x'_4 \\ x'_5 \end{pmatrix} = x_B - \bar{\delta} d = \begin{pmatrix} x_{B(1)} - \bar{\delta} d_1 \\ x_{B(2)} - \bar{\delta} d_2 \\ x_{B(3)} - \bar{\delta} d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - 2 \\ x_4 - 2 \\ x_5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad x'_N = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

cui corrisponde un valore di funzione obiettivo $z' = z + \hat{c}_2 \bar{\delta} = 0 - 3 \times 2 = -6$
Iterazione 2

$$\mathcal{B} = \{3,2,5\} \quad \mathcal{N} = \{1,4\} \quad x_B = [x_3, x_2, x_5]^\top = [5,2,2]^\top \quad z = c_B^\top x_B = -6$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_N^\top = [\hat{c}_1, \hat{c}_4] = c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N = [-2, 3]$$

Condizione di ottimalità non verificata.Portando in base la variabile x_1 si ha

$$d = B^{-1}A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{\delta} = \min\left\{ \frac{x_{B(1)}}{d_1}, \frac{x_{B(3)}}{d_3} \right\} = \min\left\{ \frac{5}{2}, \frac{2}{1} \right\} = 2$$

Il valore di $\bar{\delta}$ è raggiunto in corrispondenza della componente $x_{B(3)} = x_5$ di x_B, che quindi portandosi a zero, lascerà la base. La nuova soluzione ammissibile di base sarà

$$x'_B = \begin{pmatrix} x'_3 \\ x'_2 \\ x'_5 \end{pmatrix} = x_B - \bar{\delta} d = \begin{pmatrix} x_{B(1)} - \bar{\delta} d_1 \\ x_{B(2)} - \bar{\delta} d_2 \\ x_{B(3)} - \bar{\delta} d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 - 4 \\ x_2 + 2 \\ x_5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x'_N = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\delta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cui corrisponde un valore di funzione obiettivo $z' = z + \hat{c}_1 \bar{\delta} = -6 - 2 \times 2 = -10$

Iterazione 3

$$\mathcal{B} = \{3, 2, 1\} \quad \mathcal{N} = \{5, 4\} \quad x_B = [x_3, x_2, x_1]^\top = [1, 4, 2]^\top \quad z = c_B^\top x_B = -10$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_N^\top = [\hat{c}_5, \hat{c}_4] = c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N = [2, 1] \geq 0$$

Condizione di ottimalità verificata.L'algoritmo si arresta fornendo come soluzione ottima

$$x^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*]^\top = [2, 4, 1, 0, 0]^\top \quad \mathcal{B}^* = \{3, 2, 1\}$$

$$z^* = c^\top x^* = -10 \qquad (z^* = 10 \text{ per il problema di massimo})$$

$$\hat{c}_j > 0 \quad \forall j \in \mathcal{N} \longrightarrow \quad \text{la soluzione ottima è unica}$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (B^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

D.3 Determinare la soluzione ottima del duale $\mathcal{D}$ di $\mathcal{P}$ usando la teoria della dualità.
R.
Applicando il Teorema di Dualità Forte troviamo

$$(y^*)^\top = [y_1^*, y_2^*, y_3^*] = c_B^\top (B^*)^{-1} = [c_3, c_2, c_1] (B^*)^{-1} = [0, -3, 1] (B^*)^{-1} = [0, -1, -2]$$

$$w^* = b^\top y^* = -10 = c^\top x^*.$$

Allo stesso risultato si perviene applicando il Teorema degli scarti complementari. In tal caso basta imporre che il primo, secondo e terzo vincolo di $(\mathcal{D}_{FS})$ siano soddisfatti per uguaglianza.

Esercizio 2

E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare $\mathcal{P}$

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \min & -12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 24 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

D.1 Stabilire se i punti $x_A = (4, 4, 8)^\top$ e $x_B = (4, 0, 0)^\top$ sono vertici di $\Omega(P)$.
R.
Poiché vale:

- *x vertice di $\Omega(P) \longleftrightarrow x_{FS}$ è un vertice di $\Omega(P_{FS})$*
- *x_{FS} è un vertice di $\Omega(P_{FS}) \longleftrightarrow x_{FS}$ è soluzione ammissibile di base per $Ax = b, x \geq 0$*

possiamo rispondere alla domanda stabilendo se i punti assegnati sono soluzioni ammissibili di base per il problema in forma standard $\mathcal{P}_{FS}$

$$
(\mathcal{P}_{FS}) \quad \begin{cases} \min & -12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ & -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ & 3x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 24 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}
$$

Avremo perciò:

- $(x_A)_{FS} = (4, 4, 8, 2, 16)^\top$ risulta essere soluzione ammissibile non di base, visto che A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sono 5 vettori di $\mathbb{R}^3$ e sono, perciò, linearmente dipendenti. Pertanto $(x_A)_{FS}$ non è vertice di $\Omega(P_{FS})$ e x_A non è vertice di $\Omega(P)$.
- $(x_B)_{FS} = (4, 0, 0, 14, 12)^\top$ è una soluzione ammissibile. Poiché A_1, A_4, A_5 sono linearmente indipendenti, $(x_A)_{FS}$ è soluzione di base e perciò x_A è un vertice di $\Omega(P)$.

D.2 Risolvere il problema P applicando l'Algoritmo del Simplesso scegliendo come punto iniziale il più appropriato tra a x_A o x_B. Specificare se la soluzione ottima è unica.
R.
Usando necessariamente $(x_B)_{FS}$ come punto iniziale per l'Algoritmo del Simplesso, si ha:
Iterazione 1

$$
\mathcal{B} = \{1, 4, 5\}, \quad \mathcal{N} = \{2, 3\} \quad x_B = [x_1, x_4, x_5]^\top = [4, 14, 12]^\top \quad z = c_B^\top x_B = -48
$$

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
\hat{c}_N^\top = [\hat{c}_2, \hat{c}_3] = c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N = [20, -10]
$$

Condizione di ottimalità non verificata. Portando in base la variabile x_3 si ha

$$
d = B^{-1} A_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \bar{\delta} = \left\{ \frac{x_{B(3)}}{d_3} \right\} = \left\{ \frac{12}{2} \right\} = 6
$$

Il valore di $\bar{\delta}$ è raggiunto in corrispondenza della componente $x_{B(3)} = x_5$ di x_B, che quindi portandosi a zero, lascerà la base. La nuova soluzione ammissibile di base sarà

$$
x'_B = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_4 \\ x'_5 \end{pmatrix} = x_B - \bar{\delta} d = \begin{pmatrix} x_{B(1)} - \bar{\delta} d_1 \\ x_{B(2)} - \bar{\delta} d_2 \\ x_{B(3)} - \bar{\delta} d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 6 \\ x_4 + 12 \\ x_5 - 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x'_N = \begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}
$$

cui corrisponde un valore di funzione obiettivo $z' = z + \hat{c}_3 \bar{\delta} = -48 - 10 \times 6 = -108$

Iterazione 2

$$
\mathcal{B} = \{1, 4, 3\}, \quad \mathcal{N} = \{2, 5\} \quad x_B = [x_1, x_4, x_3]^\top = [10, 26, 6]^\top \quad z = c_B^\top x_B = -108
$$

$$
B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 2 & 1 \\ -5/2 & 1/2 \end{pmatrix}
$$

$$
\hat{c}_N^\top = [\hat{c}_2, \hat{c}_5] = c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N = [-5, 5]
$$

Condizione di ottimalità non verificata. Portando in base la variabile x_2 si ha

$$
d = B^{-1} A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 2 \\ -5/2 \end{pmatrix} \qquad \bar{\delta} = \left\{ \frac{x_{B(2)}}{d_2} \right\} = \left\{ \frac{26}{2} \right\} = 13
$$

Il valore di $\bar{\delta}$ è raggiunto in corrispondenza della componente $x_{B(2)} = x_4$ di x_B, che quindi portandosi a zero, lascerà la base. La nuova soluzione ammissibile di base sarà

$$x'_B = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_4 \\ x'_3 \end{pmatrix} = x_B - \bar{\delta} d = \begin{pmatrix} x_{B(1)} - \bar{\delta} d_1 \\ x_{B(2)} - \bar{\delta} d_2 \\ x_{B(3)} - \bar{\delta} d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 13/2 \\ x_4 - 26 \\ x_5 + 65/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33/2 \\ 0 \\ 77/2 \end{pmatrix} \qquad x'_N = \begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\delta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cui corrisponde un valore di funzione obiettivo $z' = z + \hat{c}_2 \bar{\delta} = -108 - 5 \times 13 = -173$

Iterazione 3

$$\mathcal{B} = \{1, 2, 3\}, \quad \mathcal{N} = \{4, 5\} \quad x_B = [x_1, x_2, x_3]^\top = [33/2, 13, 77/2]^\top \quad z = c_B^\top x_B = -173$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -11/4 & 5/4 & 7/4 \end{pmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 5/4 & 7/4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_N^\top = [\hat{c}_4, \hat{c}_5] = c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N = [5/2, 15/2]$$

Condizione di ottimalità verificata.L'algoritmo si arresta fornendo come soluzione ottima

$$x^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*]^\top = [33/2, 13, 77/2, 0, 0]^\top \quad \mathcal{B}^* = \{1, 2, 3\}$$

$$z^* = c^\top x^* = -173$$

$$\hat{c}_j > 0 \ \ \forall j \in \mathcal{N} \longrightarrow \ \ \text{la soluzione ottima è unica}$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (B^*)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/4 & 3/4 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -11/4 & 5/4 & 7/4 \end{pmatrix}$$

D.3 Formulare il problema duale D e determinarne la soluzione ottima applicando la teoria della dualità.
R.
Facendo riferimento a $\mathcal{P}_{FS}$, il problema duale D è

$$(\mathcal{D}_{FS}) \quad \begin{cases} \max & 4y_1 & + & 6y_2 & + & 24y_3 & & \\ & y_1 & - & 2y_2 & + & 3y_3 & \leq & -12 \\ & 2y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & \leq & -4 \\ & -y_1 & & & - & y_3 & \leq & 2 \\ & & & y_2 & , & y_3 & \leq & 0 \end{cases}$$

Applicando il Teorema di Dualità Forte troviamo

$$(y^*)^\top = [y_1^*, y_2^*, y_3^*] = c_B^\top (B^*)^{-1} = [c_1, c_2, c_3] (B^*)^{-1} = [-12, -4, 2] (B^*)^{-1} = \left[\frac{11}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{15}{2}\right]$$

$$w^* = b^\top y^* = -173 = c^\top x^*.$$

Allo stesso risultato si perviene applicando il Teorema degli scarti complementari. In tal caso basta imporre che il primo, secondo e terzo vincolo di $(\mathcal{D}_{FS})$ siano soddisfatti per uguaglianza.

Esercizio 3

E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare $\mathcal{P}$

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \max & 3x_1 & + & 9x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & + & 3x_2 & \leq & 15 \\ & 4x_1 & - & 15x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

D.1 Stabilire se i punti $x_A = (6,3)^\top$, $x_B = (0,1)^\top$ e $x_C = (0,5)^\top$ sono vertici di $\Omega(P)$
R.
Dopo aver ricondotto $\mathcal{P}$ alla forma standard $\mathcal{P}_{FS}$

$$(\mathcal{P}_{FS}) \begin{cases} -\min & -3x_1 & - & 9x_2 & & & & & & & & \\ & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 1 \\ & x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & & & = & 15 \\ & 4x_1 & - & 15x_2 & & & & & + & x_5 & = & 6 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

ricaviamo

- $(x_A)_{FS} = (6,3,4,0,27)^\top$ è una soluzione ammissibile non di base; perciò x_A non è un vertice di $\Omega(P)$.
- $(x_B)_{FS} = (0,1,0,12,21)^\top$ è una soluzione ammissibile di base; perciò x_B è un vertice di $\Omega(P)$.
-
- $(x_C)_{FS} = (0,5,-4,0,9)^\top$ è una soluzione non ammissibile di base; perciò x_C non è un vertice di $\Omega(P)$.

D.2 E' possibile stabilire quale (o quali) tra i punti assegnati non possono essere soluzione ottima di $\mathcal{P}$?
R.
Per esclusione x_C non può essere soluzione ottima perché non ammissibile. Osservando che nei due punti rimanenti la funzione obiettivo vale $z(x_A) = -45$, $z(x_B) = -9$, possiamo escludere che x_B possa essere soluzione ottima. Pertanto, se $\mathcal{P}$ non è inferiormente illimitato, $z^* \leq z(x_A)$

D.2 Stabilire se l'insieme di indici $\mathcal{B} = \{3,2,1\}$ forma una base ed, in caso di risposta positiva, stabilire se tale base è ottima. Se $\mathcal{B}$ non è una base ottima, risolvere $\mathcal{P}$.
R.
Le colonne A_3, A_2, A_1 sono linearmente indipendenti, perciò $\mathcal{B}$ è una base. Si ha

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & 4 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 11/27 & 4/27 \\ 0 & 4/27 & -1/27 \\ 0 & 5/9 & 5/9 \end{pmatrix} \quad x_B = B^{-1}b = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$z = c_B^\top x_B = -45$$

perciò $\mathcal{B}$ è anche una base ammissibile (non degenere). Per stabilirne l'ottimalità, calcoliamo i costi ridotti

$$\mathcal{N} = \{4,5\} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{pmatrix} 11/27 & 4/27 \\ 4/27 & -1/27 \\ 5/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$\hat{c}_N^\top = [\hat{c}_4, \hat{c}_5] = [c_4, c_5] - [c_2, c_2, c_1]\, B^{-1}N = [3, 0]$$

Poiché $\hat{c}_N^\top \geq 0$, la base $\mathcal{B}$ è ottima e la soluzione ottima di base è $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*)^\top = (9,2,8,0,0)^\top$ con $z^* = -45$ (per il problema di minimo). La soluzione ottima è non degenere. Si osserva che per la variabile fuori base x_5 si ha $\hat{c}_5 = 0$. Perciò la soluzione ottima di $\mathcal{P}$ non è unica, ma esso presenta soluzioni ottime multiple. Portando in base x_5 e facendo uscire dalla base x_3 si ottiene un'altra soluzione ottima di base $(x^*)' = (3,4,0,0,54)^\top$. Grazie alla convessità sono ottime tutte le soluzioni che sono esprimibili come combinazione convessa di x^* e $(x^*)'$.

D.3 Formulare il problema Duale $\mathcal{D}$ e risolverlo applicando la teoria della dualità.
R.
Possiamo ricavare il duale simmetrico di $\mathcal{P}$

$$(\mathcal{D})\begin{cases} \min & y_1 & + & 15y_2 & + & 6y_3 & & \\ & -y_1 & + & y_2 & + & 4y_3 & \geq & 3 \\ & y_1 & + & 3y_2 & - & 15y_3 & \geq & 9 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0 \end{cases}$$

ed applicare il Teorema di Complementarietà, imponendo il soddisfacimento per uguaglianza dei vincoli di $\mathcal{D}$ corrispondenti a componenti non nulle del vettore x^* o $(x^*)'$. In entrambi i casi si trova $y^* = (0,3,0)^\top$. Si osserva che $y^* \in \mathbb{R}^3$ soddisfa per ugualianza quattro vincoli $\mathcal{D}$ (i due vincoli e due vincoli di segno). Essa è pertanto degenere.

D.4 Alla luce dei risultati ottenuti, cosa si può dire di $(x_A)_{FS}$?
R.
Poiché $z((x_A)_{FS}) = z(x^*) = z((x^*)') = -49$, poiché la funzione obiettivo $z(x) = c^\top x$ è una funzione affine (concava e convessa) e poiché $(x_A)_{FS}, x^*, (x^*)' \in \Omega(P_{FS})$ che è una regione convessa, si ha che:

- $(x_A)_{FS}$ è soluzione ottima non di base di $\mathcal{P}_{FS}$;
- $(x_A)_{FS}$ deve potersi scrivere come combinazione convessa propria di x^* e $(x^*)'$

$$(x_A)_{FS} = \lambda x^* + (1-\lambda)(x^*)' \qquad 0 < \lambda < 1$$

In effetti sostituendo nell'espressione precedente i valori determinati di $(x_A)_{FS}$, x^* e $(x^*)'$ si trova $\lambda = 1/2$, cioè $(x_A)_{FS}$ è il punto medio dello spigolo di $\Omega(P_{FS})$ che congiunge x^* e $(x^*)'$.

Esercizio 4

E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare $\mathcal{P}$

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

la cui regione ammissibile è il poliedro $\Omega(P)$ mostrato in Figura 1 dove, oltre ai vertici A, B, C, D sono evidenziati i punti ammissibili R, S, T

D.1 Dopo aver ricondotto $\mathcal{P}$ alla sua forma standard, si considerino i seguenti punti in $\mathbb{R}^5$:

$$x^{(1)} = (0,0,12,6,4)^\top,\ x^{(2)} = (6,0,6,0,-2)^\top,\ x^{(3)} = (4,4,0,6,8)^\top$$
$$x^{(4)} = (2,2,6,6,6)^\top,\ x^{(5)} = (8,2,0,0,0)^\top, x^{(6)} = (6,2,2,2,2)^\top$$

Associare ciascuno dei punti $x^{(i)},\ i = 1,\dots,6$ ad uno ed uno solo dei punti A, B, C, D, R, S, T evidenziati in Figura 1.
R.
La forma standard $\mathcal{P}_{FS}$ è il seguente problema di PL

$$(\mathcal{P}_{FS})\begin{cases} -\min & -3x_1 & - & x_2 & & & & & & & & \\ & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 12 \\ & x_1 & - & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 6 \\ & x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 4 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

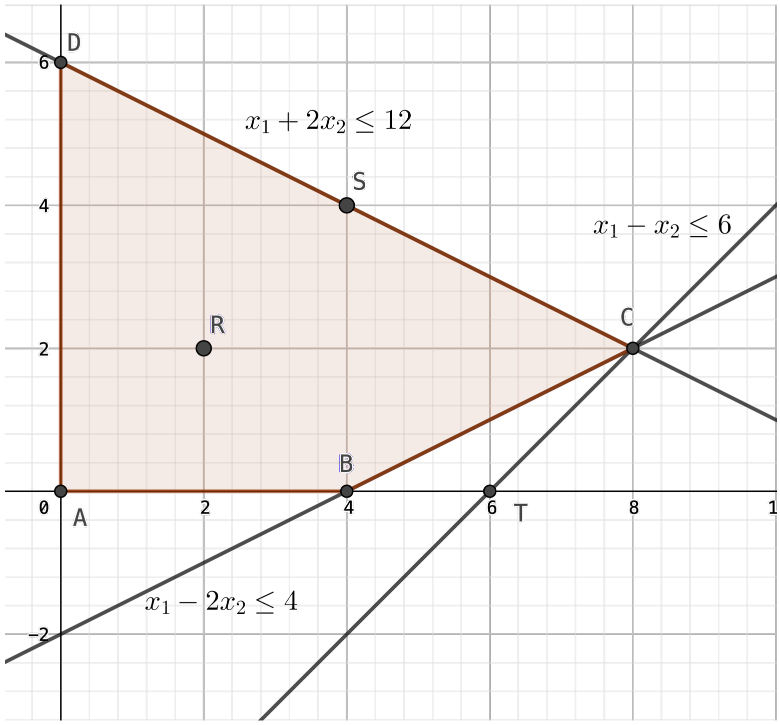

Figura 1: $\Omega(P)$ dell'Esercizio 4.

Sostituendo le coordinate dei punti $x^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 6$ nel sistema di equazioni $Ax = b$ di $\mathcal{P}_{FS}$, troviamo che $Ax^{(i)} = b$, $i = 1, \ldots, 6$. Considerando le prime due componenti dei punti $x^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 6$, si verifica facilmente che:

- $x^{(1)}$ corrisponde ad A;
- $x^{(2)}$ corrisponde a T;
- $x^{(3)}$ corrisponde a S;
- $x^{(4)}$ corrisponde a R;
- $x^{(5)}$ corrisponde a C;
- $x^{(6)} = (6, 2, 2, 2, 2)^\top \in \Omega(P_{FS})$, ma non ha una'immagine tra i punti assegnati.

D.2 Stabilire quali tra i punti $x^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 6$ sono soluzioni di base e quali soluzioni ammissibili di base, evidenziando le rispettive variabili di base. **R.**
Dalle risposte date al punto precedente si ha che:

- $x^{(1)}$ e $x^{(5)}$ sono soluzioni ammissibili di base, perché corrispondono ai vertici A e C di $\Omega(P)$. Per $x^{(1)}$ si ha che le variabili di base sono x_3, x_4, x_5, cioè l'insieme di indici di base è $\mathcal{B}^{(1)} = \{3, 4, 5\}$. Per quanto riguarda $x^{(5)}$, notiamo che essa è una soluzione ammissibile di base degenere. Infatti, nel vertice C sono attivi 3 vincoli di P e pertanto a $x^{(5)}$ corrispondono tre diverse basi $\mathcal{B}_1^{(1)} = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{B}_2^{(1)} = \{1, 2, 4\}$, $\mathcal{B}_3^{(1)} = \{1, 2, 5\}$;
- $x^{(2)}$ è una soluzione di base non ammissibile;
- $x^{(3)}$, $x^{(4)}$, $x^{(6)}$ sono soluzioni ammissibili non di base

D.3 Di seguito è riportata la forma canonica di $\mathcal{P}_{FS}$ rispetto ad una data base $\mathcal{B}$.

$$
\left\{
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
-6 + \min & -{}^5\!/\!_2 x_1 & & & + & {}^1\!/\!_2 x_3 & & & & & & \\
 & {}^1\!/\!_2 x_1 & + & x_2 & + & {}^1\!/\!_2 x_3 & & & & & = & 6 \\
 & {}^3\!/\!_2 x_1 & & & + & {}^1\!/\!_2 x_3 & + & x_4 & & & = & 12 \\
 & 2x_1 & & & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 16 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
\right.
$$

D.3.a Determinare la base $\mathcal{B}$ e la soluzione ammissibile di base associata alla forma canonica, specificando le variabili di base. Stabilire, inoltre, a quale dei vertici di $\Omega(P)$ in Figura 1 tale soluzione ammissibile di base corrisponde.

R.

La forma canonica è scritta rispetto alla base $\mathcal{B} = \{2, 4, 5\}$. La soluzione ammissibile di base associata è $x_B = (x_2, x_4, x_5)^\top = (6, 12, 16)^\top$, cui corrisponde una valore di funzione obiettivo $z = c_B^\top x_B = -6$. La soluzione ammissibile di base corrisponde al vertice D.

D.3.b Stabilire se la soluzione ammissibile di base individuata al punto precedente è ottima

R.

La soluzione non è otttima, poiché la variabile fuori base x_1, $1 \in \mathcal{N}$ ha costo ridotto $\hat{c_1} = -5/2 < 0$.

D.3.c In caso di risposta negativa al quesito precedente determinare la variabile entrante in base con il valore che essa assumerà e la variabile uscente dalla base. Con riferimento alla Figura 11, quale sarà il nuovo punto individuato dall'Algoritmo del Simplesso a seguito di questa operazione di cambio di base?

R.

La variabile entrante in base sarà x_1 (unica variabile con costo ridotto negativo). La variabile uscente sarà la variabile che determinerà il valore $\bar{\delta}$

$$\bar{\delta} = \min_{1 \le i \le 3} \left\{ \frac{x_{B(i)}}{d_i} \mid d_i > 0 \right\}$$

Il vettore $d = B^{-1}A_1$ è il vettore dei coefficienti della variabile entrante in base (x_1) nella forma canonica: $d = (1/2, 3/2, 2)^\top$. Quindi

$$\bar{\delta} = \min \left\{ \frac{x_2}{d_1}, \frac{x_4}{d_2}, \frac{x_5}{d_3} \right\} = \min \{12, 8, 8\} = 8$$

Il valore di $\bar{\delta}$ si raggiunge in corrispondenza di x_4 e di x_5: c'è indeterminazione nella scelta della variabile uscente dalla base; perciò la prossima soluzione ammissibile di base sarà degenere. Effettuando il cambio di base si ha

$$x'_B = \begin{pmatrix} x'_2 \\ x'_4 \\ x'_5 \end{pmatrix} = x_B - \bar{\delta} d = \begin{pmatrix} x_{B(1)} - \bar{\delta} d_1 \\ x_{B(2)} - \bar{\delta} d_2 \\ x_{B(3)} - \bar{\delta} d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - 8 \times 1/2 \\ x_4 - 8 \times 3/2 \\ x_5 - 8 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 4 \\ 12 - 12 \\ 16 - 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x'_N = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\delta} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cui corrisponde un valore di funzione obiettivo $z' = z + \hat{c}_1 \bar{\delta} = -6 - \dfrac{5}{2} \times 8 = -26$

La nuova soluzione ammissibile di base sarà, pertanto, $x' = (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)^\top = (8, 2, 0, 0, 0)^\top$ con base $\mathcal{B}' = \{2, 1, 5\}$ che corrisponde al punto C di Figura 1.

D.3.c Risolvere P a partire da $x = x'$ determinata al punto precedente

R.

Calcolando i costi ridotti relativi alla soluzione x si trova che $c_N^\top \ge 0$ e che quindi $x^* = x = (8, 2, 0, 0, 0)^\top$ è la soluzione ottima di P con $z^* = -26$. La soluzione ottima è unica, ma degenere.

D.4 Formulare il duale D e risolverlo applicando la Teoria della Dualità

R.

Facendo riferimento a $\mathcal{P}_{FS}$, il problema duale D è

$$(\mathcal{D}_{FS}) \quad \left\{ \begin{array}{rrcrcrcr} -\max & 12y_1 & + & 6y_2 & + & 4y_3 & & \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \le & -3 \\ & 2y_1 & - & y_2 & - & y_3 & \le & -1 \\ & y_1 & & & & & \le & 0 \\ & & & y_2 & & & \le & 0 \\ & & & & & y_3 & \le & 0 \end{array} \right.$$

Applicando il Teorema degli Scarti Complementari, si impone il soddisfacimento dei vincoli di $\mathcal{D}_{FS}$ corispondenti a componenti non nulle di x^*. Si ha quindi

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = -3 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 = -1 \end{cases}$$

che è un sistema di due equazioni di rango 2 in tre incognite. Il sistema ammette quindi un grado di libertà e perciò D ha soluzioni ottime multiple. Scegliendo $y_3 = k \in \mathbb{R}$ come grado di libertà, le infinite soluzioni del sistema si possono scrivere come

$$y(k) = (y_1(k), y_2(k), y_3(k))^\top = \left(-\frac{4}{3} + \frac{k}{3}, -\frac{5}{3} - \frac{4k}{3}, k\right)^\top$$

Sostituendo $y(k)$ nei vincoli 3, 4, 5 di $\mathcal{D}_{FS}$, si ha che $y(k) \in \Omega(\mathcal{D}_{FS})$ per $-5/4 \le k \le 0$. Le infinite soluzioni ottime di $\mathcal{D}_{FS}$ si possono, perciò, scrivere come

$$y^* = \lambda y^{(1)} + (1-\lambda) y^{(2)}, \quad 0 \le \lambda \le 1$$

dove $y^{(1)} = y(k=0) = (-4/3, -5/3, 0)^\top$ e $y^{(2)} = y(k=-5/4) = (-7/4, 0, -5/4)^\top$

Esercizio 5

E' assegnato il seguente problema di PL $\mathcal{P}$

$$\begin{array}{llllllll} \min & z(x) = & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \\ & & 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 = & 6 \\ & & x_1 & + & x_2 & & \le & 5 \\ & & x_1 & & & - & x_3 \ge & 1 \\ & & x_1 & , x_2 & , x_3 & \ge 0 & & \end{array}$$

1. Determinare la soluzione ottima di $\mathcal{P}$ a partire dalla base $\mathcal{B} = \{2,4,1\}$.
2. Determinare la soluzione ottima del problema duale $\mathcal{D}$
3. Specificare se le soluzioni ottime di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{D}$ sono uniche e o degeneri.

Soluzione
$x^* = (3,0,0,2,2)^\top, y^* = (1/2, 0, 0)^\top, z^* = w^* = 3.$

Esercizio 6

E' assegnato il seguente problema di PL $\mathcal{P}$

$$\begin{array}{llllllll} \min & z(x) = & 3x_1 & + & x_2 & & & \\ & & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 \ge & 1 \\ & & 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 = & 1 \\ & & -3x_1 & + & 2x_2 & & \ge & -5 \\ & & x_1 & , & x_2 & , & x_3 \ge 0 & \end{array}$$

1. Risolvere $\mathcal{P}$ con l'Algoritmo del Simplesso a partire dalla base $\mathcal{B} = \{2,1,5\}$.
2. Determinare la soluzione ottima del problema duale $\mathcal{D}$

3. Specificare se le soluzioni ottime di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{D}$ sono uniche e o degeneri.

Soluzione
$x^* = (0, 1, 0, 0, 7)^\top, z^* = 1$ soluzione ottima degenere. Il Duale ammette infinite soluzioni ottime, delle quali una sola di base che ha coordinate $y^* = (1/2, 1/2, 0)^\top$,.

Esercizio 7

E' assegnato il problema primale $\mathcal{P}$ ed il punto $\bar{y} = (\frac{7}{4}, \frac{1}{4})^\top$ nello spazio delle variabili duali.

$$
\begin{array}{rccccccc}
\max z(x) = & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 8 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

1. Verificare che $\bar{y}$ è una soluzione ammissibile di base per il problema duale $\mathcal{D}$.
2. Determinare la soluzione ottima di $\mathcal{D}$ applicando l'Algoritmo del Simplesso a partire da $\bar{y}$.
3. Determinare la soluzione ottima di $\mathcal{P}$ servendosi della teoria della dualità.
4. Mediante la rappresentazione grafica del problema $\mathcal{D}$ verificare la correttezza delle risposte date ai punti precedenti e giustificare le seguenti affermazioni:
   (a) Per ogni scelta dei termini noti dei vincoli di $\mathcal{P}$, la variabile di surplus associata al terzo vincolo duale è sempre non nulla.
   (b) Se si sceglie il coefficiente di costo della variabile y_1 in $\mathcal{D}$ pari a -1 e quello della variabile y_2 pari a 0, allora la regione ammissibile del problema $\mathcal{P}$ è vuota.

Soluzione
$y^* = \bar{y}, w^* = \frac{31}{2}$. $x^* = (7, 1/2, 0, 0, 0)^\top$.

Esercizio 8

Per il seguente problema di Programmazione Lineare $\mathcal{P}$

$$
\begin{array}{lrcrcrl}
\min & x_1 & - & 2x_2 & & & \\
 & 2x_1 & & & + & 3x_3 = & 1 \\
 & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 = & 5 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 \geq & 0
\end{array}
$$

è nota una base ammissibile $\mathcal{B} = 1, 2$

1. Risolvere il problema $\mathcal{P}$ applicando l'Algoritmo del Simplesso.
2. Scrivere il problema duale di $\mathcal{P}$ e risolverlo mediante la teoria della dualità.
3. Dopo aver rappresentato la ragione ammissibile di $\mathcal{D}$ su di un piano cartesiano, verificare la verità o falsità delle seguenti affermazioni, motivando la risposta:

(a) La variabile *Primale* x_1 è sempre nulla, per ogni scelta dei coefficienti di costo della funzione obiettivo *Duale*;

(b) La variabile *Primale* x_1 è sempre nulla, per ogni scelta del termine noto del primo vincolo *Duale*;

(c) Il problema *Duale* ammette sempre ottimo finito, per ogni scelta dei coefficienti di costo della funzione obiettivo;

4. Determinare graficamente, infine, la soluzione ottima di $\mathcal{D}$ e, tramite il Teorema di Complementarietà, di $\mathcal{P}$ quando il termine noto del primo vincolo del problema duale assume il valore -9.

Soluzione
$x^* = [0, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}]^\top$, $z^* = -\frac{16}{3}$. 3.a) Vero; 3.b) Falso; 3.c) Falso; 4) $y^* = [-3, -1]^\top, w^* = -8$.

Esercizio 9

Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare $\mathcal{P}$

$$\begin{array}{lccccccccc}
\max & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 20 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 30 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

1. Stabilire se il punto $x = (0, 12, 2, 6)^\top$

   a) è soluzione ammissibile per $\mathcal{P}$;
   b) è soluzione di base per $\mathcal{P}$;
   c) è soluzione ottima per $\mathcal{P}$;

2. Se x **non** risulta essere una soluzione di base, determinare una soluzione ottima di base per $\mathcal{P}$:

   a) senza far ricorso all'algoritmo del simplesso.
   b) applicando l'algoritmo del simplesso a $\mathcal{P}$ e confrontando la soluzione ottenuta con quella ricavata al punto (2.a).

3. Scrivere il problema duale di $\mathcal{P}$, rappresentarlo graficamente e risolverlo mediante la teoria della dualità. Cosa è evidente dalla rappresentazione grafica del problema duale e cosa ciò comporta sul primale?

Soluzione
$\bar{x}$ è una soluzione ottima non di base. Quindi $\mathcal{P}$ ammette ottimi multipli, tra i quali $x_A = [0, 10, 0, 10, 0, 0]^\top$ e $x_B = [0, 15, 5, 0, 0, 0]^\top$ sono punti di ottimo di base.

Esercizio 10

(Senza svolgimento e senza soluzione)
E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare $\mathcal{P}$

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{lrcrcr}
\max & 3x_1 & + & 6x_2 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 6 \\
 & -3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array} \right.$$

1. Stabilire se i punti di seguito elencati sono soluzioni ammissibili di base

$$x^{(1)} = (0,2)^\top \quad x^{(2)} = (0,6)^\top, \quad x^{(3)} = (4,4)^\top$$

2. Risolvere il problema applicando l'Algoritmo del Simplesso.
3. Stabilire se x^* è degenere, unica, oppure se $\mathcal{P}$ presenta ottimi multipli. Nell'ultimo caso determinare tutte le soluzioni ottime di $\mathcal{P}$.
4. Formulare il problema duale e risolverlo applicando la teoria della dualità, specificando se y^* è degenere, unica, oppure se per il duale esistono soluzioni ottime multiple.
5. Verificare le risposte date ai quesiti precedenti mediante la rappresentazione grafica del problema primale.