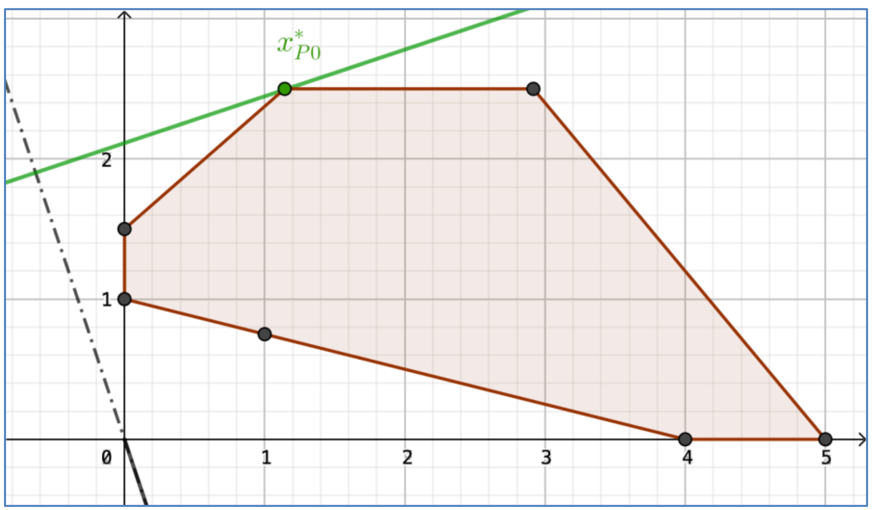
Esempio di branch and bound con visita in profondità

Esempio 2

$$
\begin{array}{llcc}
\min & x_1 - 3x_2 & & \\
 & 6x_1 + 5x_2 & \leq & 30 \\
 & -7x_1 + 8x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 + 4x_2 & \geq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & x & \geq & 0 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2 & &
\end{array}
$$

Algoritmo B&B con visita in profondità



Soluzione di P_0, rilassato lineare di S_0

Inizializzazione

$Q = \{S_0\}$, $L = -\infty$, $U = +\infty$, $\bar{x} = \perp$

$-\infty < z^*_{PLI} < +\infty$

Soluzione di P_0

$x^*_{P0} = \left(\frac{8}{7}, \frac{5}{2}\right)^T$ intersezione iperpiani 2 e 4

$z^*_{P0} = -\frac{89}{14} \approx -6.35 = L_0$

$L_0 < z^*_{PLI} < +\infty$ aggiornamento intervallo di incertezza

Si esegue il test: $U \leq L_0$?

Test non verificato e x^*_{P0} non intero.

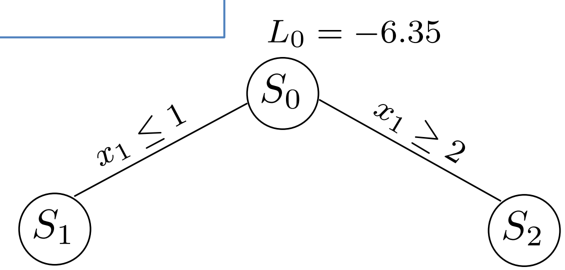
Si esegue il branching.

Branching su x_1 $\quad \alpha = \frac{8}{7}$

$S_1 = S_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 \leq 1\}$

$S_2 = S_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 \geq 2\}$

$Q = \{S_1, S_2\}$



Esempio 2 - Soluzione di S_1

$$
\begin{array}{lrcl}
\min & x_1 - 3x_2 & & \\
 & 6x_1 + \ 5x_2 & \leq & 30 \\
 & -7x_1 + 8x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 + 4x_2 & \geq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & \mathbf{x_1} & \leq & \mathbf{1} \\
 & x & \geq & 0 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2 & &
\end{array}
$$

Estraiamo S_1 da Q

$Q = \{S_2\}$, $U = +\infty$, $\bar{x} = \perp$ $L_0 < z^*_{PLI} < +\infty$

Soluzione di P_1

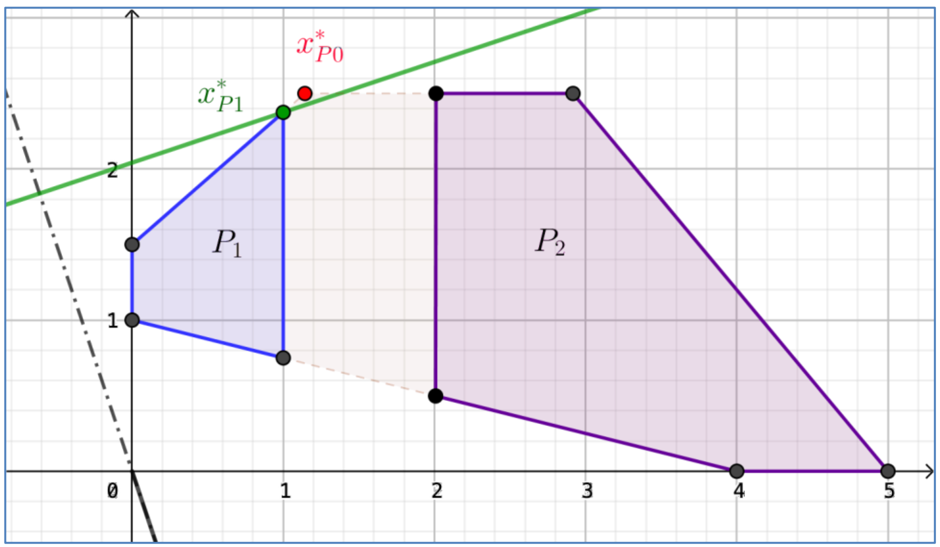
$x^*_{P1} = \left(1, \frac{19}{8}\right)^T$ intersezione iperpiani 2 e $x_1 = 1$

$z^*_{P1} = -\frac{49}{8} \approx -6.125 = L_1$

Si esegue il test:$U \leq L_1$?

Test non verificato e x^*_{P1} non intero.

Si esegue il branching.



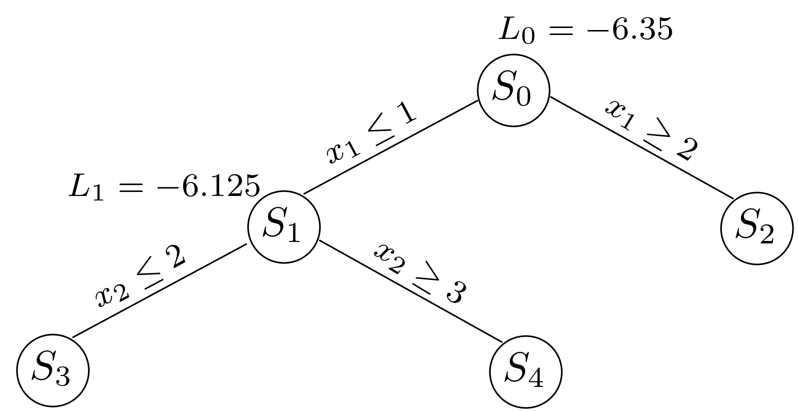
Soluzione di P_1, rilassato lineare di S_1

Branching su x_2 $\alpha = \frac{19}{8}$

$S_3 = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 |\ x_2 \leq 2\}$

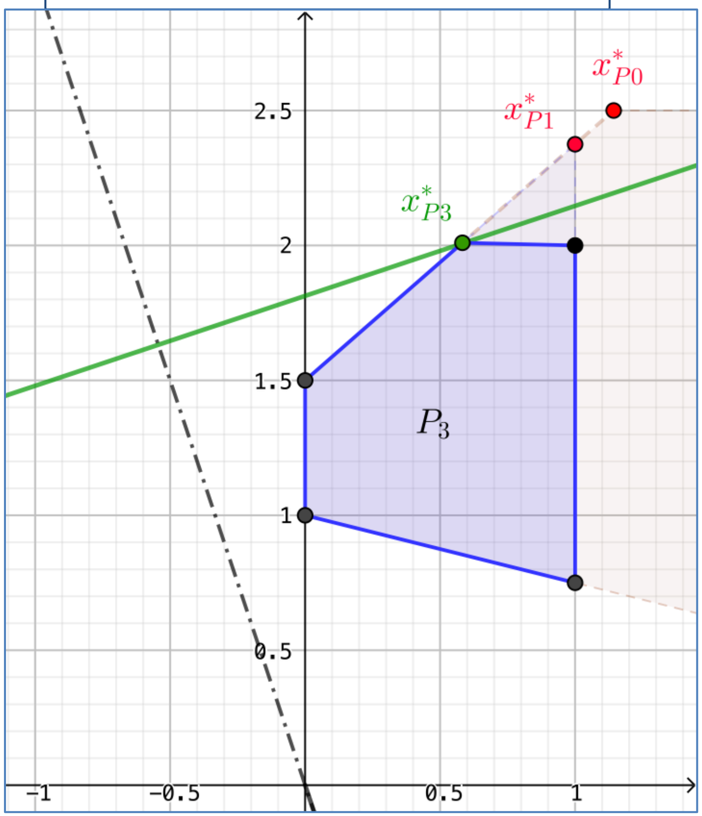
$S_4 = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 |\ x_2 \geq 3\}$

$Q = \{S_3, S_4, S_2\}$



Esempio 2 - Soluzione di S_3

$$\begin{array}{llcl}
min & x_1 - 3x_2 & & \\
 & 6x_1 + \ \ 5x_2 & \leq & 30 \\
 & -7x_1 + 8x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 + 4x_2 & \geq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & \leq & 1 \\
 & \boldsymbol{x_2} & \leq & \mathbf{2} \\
 & x & \geq & 0 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2 & &
\end{array}$$



Soluzione di P_3, rilassato lineare di S_3

Estraiamo S_3 da Q

$Q = \{S_4, S_2\}$, $\quad U = +\infty$, $\quad \bar{x} = \perp \quad L_0 < z^*_{PLI} < +\infty$

Soluzione di P_3

$x^*_{P3} = \left(\frac{4}{7}, 2\right)^T$ intersezione iperpiani 2 e $x_2 = 2$

$z^*_{P3} = -\dfrac{38}{7} \approx -5.42 = L_3$

Si esegue il test: $U \leq L_3$?

Test non verificato e x^*_{P3} non intero.

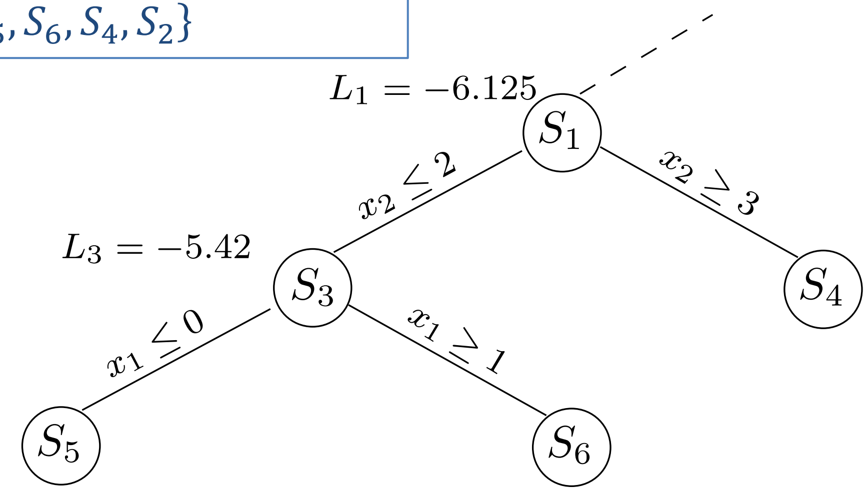
Si esegue il branching.

Branching su $x_1 \quad \alpha = \frac{4}{7}$

$S_5 = S_3 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 \leq 0\}$

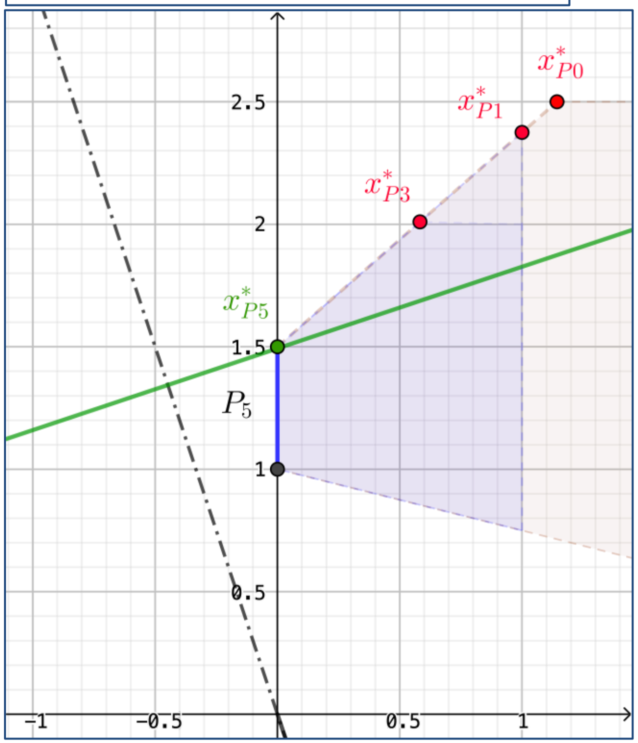
$S_6 = S_3 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 |\ x_1 \geq 1\}$

$Q = \{S_5, S_6, S_4, S_2\}$



Esempio 2 - Soluzione di S_5

$$
\begin{array}{llcc}
min & x_1 - 3x_2 & & \\
 & 6x_1 + \ 5x_2 & \leq & 30 \\
 & -7x_1 + 8x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 + 4x_2 & \geq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & \leq & 1 \\
 & x_2 & \leq & 2 \\
 & \boldsymbol{x_1} & \leq & \mathbf{0} \\
 & x & \geq & 0 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2 & &
\end{array}
$$



Soluzione di P_5, rilassato lineare di S_5

Estraiamo S_5 da Q

$Q = \{S_6, S_4, S_2\}, \ U = +\infty, \ \bar{x} = \perp \quad L_0 < z^*_{PLI} < +\infty$

Soluzione di P_5

$x^*_{P5} = \left(0, \frac{3}{2}\right)^T$ intersezione iperpiani 2 e $x_1 = 0$

$z^*_{P5} = -\frac{9}{2} = -4.5 = L_5$

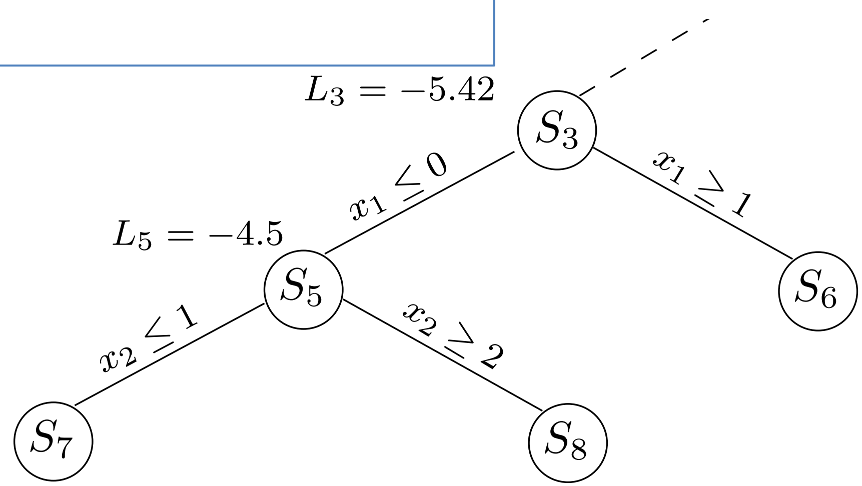
Si esegue il test: $U \leq L_5$?
Test non verificato e x^*_{P5} non intero.
Si esegue il branching.

Branching su $x_2 \quad \alpha = \frac{3}{2}$

$S_7 = S_5 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 | \ x_2 \leq 1\}$

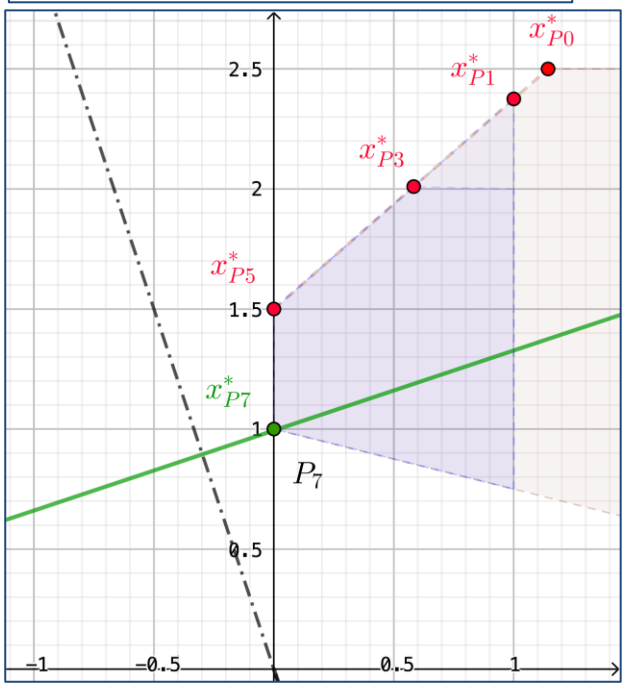
$S_8 = S_5 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 | \ x_2 \geq 2\}$

$Q = \{S_7, S_8, S_6, S_4, S_2\}$



Esempio 2 - Soluzione di S_7

$$
\begin{array}{llcl}
min & x_1 - 3x_2 & & \\
 & 6x_1 + \ 5x_2 & \leq & 30 \\
 & -7x_1 + 8x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 + 4x_2 & \geq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & \leq & 1 \\
 & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & \leq & 0 \\
 & \boldsymbol{x_2} & \leq & \mathbf{1} \\
 & x & \geq & 0 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2 & &
\end{array}
$$



Soluzione di P_7, rilassato lineare di S_7

Estraiamo S_7 da Q

$Q = \{S_8, S_6, S_4, S_2\}$, $U = +\infty$, $\bar{x} = \perp$ $\quad L_0 < z^*_{PLI} < +\infty$

Soluzione di P_7

La regione ammissibile le rilassato lineare di S_7 è costituita dal solo punto di coordinate (0,1).

$x^*_{P7} = (0,1\,)^T$ intersezione iperpiani 3 e $x_2 = 1$

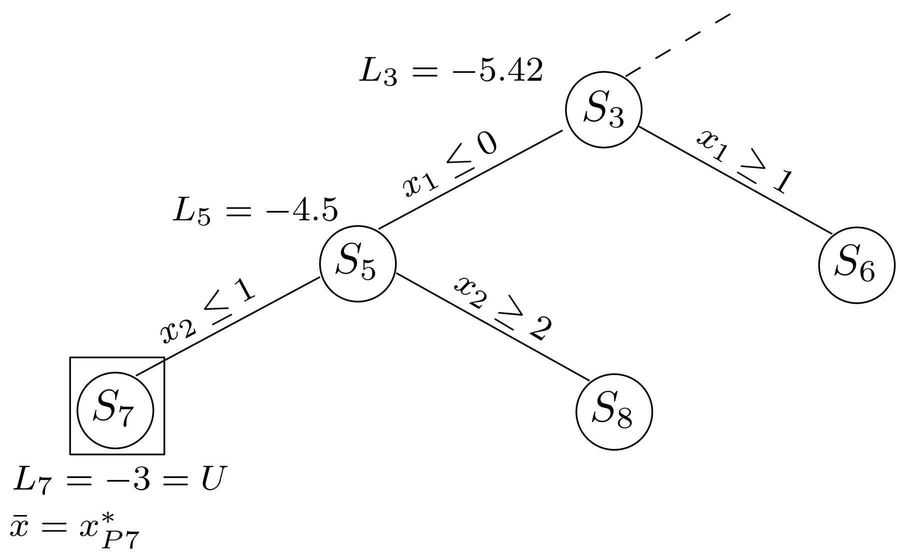
$z^*_{P7} = -3 = L_7$

Si esegue il test:$U \leq L_7$. Il test non è verificato, e x^*_{P7} è intero.

Si chiude S_7 e si aggiorna l'ottimo corrente

$U = L_7 = -3$, $\bar{x} = (0,1\,)^T$ $\quad L_0 < z^*_{PLI} \leq U$

Si esegue il test: $U \leq L_0$? Il test non è verificato. Si procede con la soluzione di un altro sottoproblema. $Q = \{S_8, S_6, S_4, S_2\}$



Esempio 2 - Soluzione di S_8

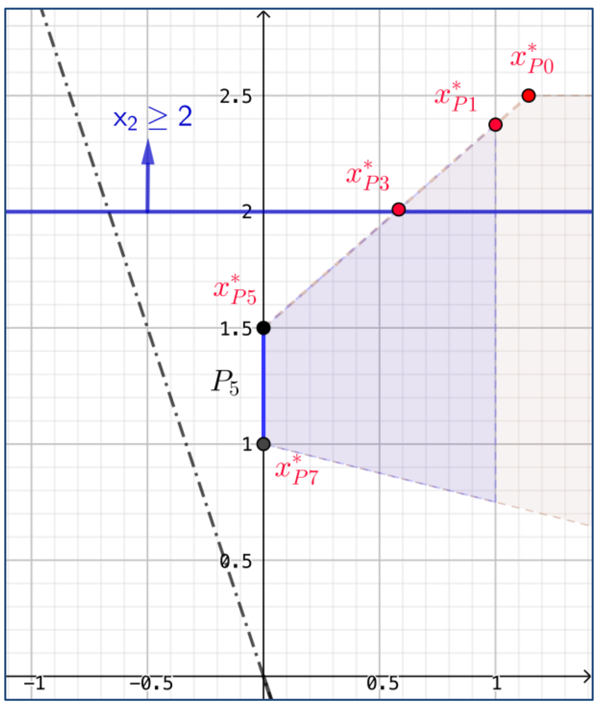
$$
\begin{array}{llcl}
min & x_1 - 3x_2 & & \\
 & 6x_1 + \; 5x_2 & \leq & 30 \\
 & -7x_1 + 8x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 + 4x_2 & \geq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & \leq & 1 \\
 & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & \leq & 0 \\
 & \boldsymbol{x_2} & \geq & \mathbf{2} \\
 & x & \geq & 0 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2 & &
\end{array}
$$

Estraiamo S_8 da Q

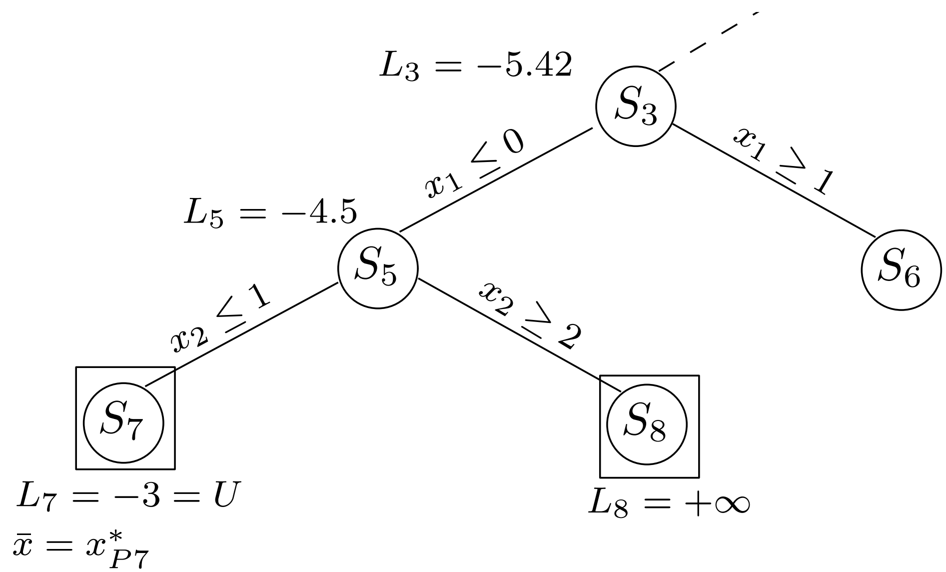
$Q = \{S_6, S_4, S_2\}$, $U = -3$, $\bar{x} = (0,1)^T$, $L_0 < z^*_{PLI} \leq U$

Soluzione di P_8

La regione ammissibile di $P_8 = P_5 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 2\}$, rilassato lineare di S_8, è vuota. S_8 è inammissibile ($L_8 = +\infty$) e può essere chiuso.

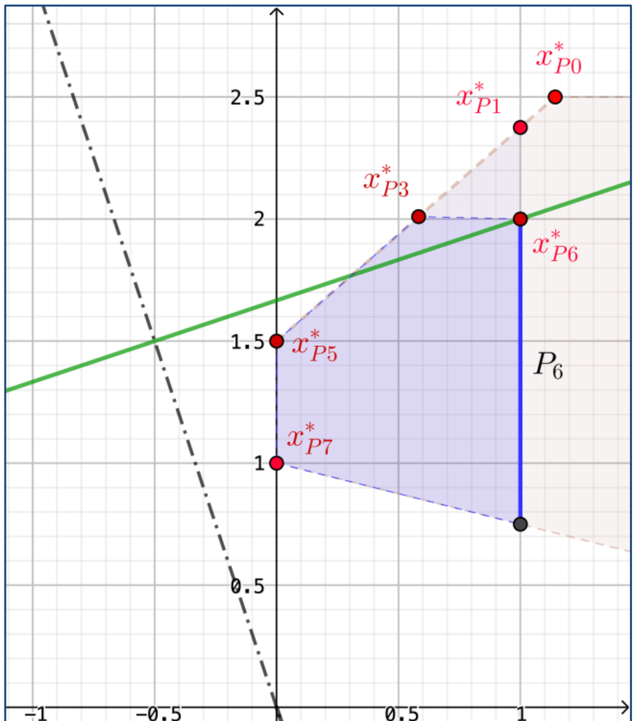


S_8 è inammissibile



Esempio 2 - Soluzione di S_6

$$
\begin{array}{llcl}
min & x_1 - 3x_2 & & \\
 & 6x_1 + \ 5x_2 & \leq & 30 \\
 & -7x_1 + 8x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 + 4x_2 & \geq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & \leq & 1 \\
 & x_2 & \leq & 2 \\
 & \boldsymbol{x_1} & \geq & \mathbf{1} \\
 & x & \geq & 0 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2 & &
\end{array}
$$



Soluzione di P_6, rilassato lineare di S_6

Estraiamo S_6 da Q

$Q = \{ S_4, S_2\}$, $U = -3$, $\bar{x} = (0{,}1)^T$, $L_0 < z^*_{PLI} \leq U$

Soluzione di P_6

La regione ammissibile di $P_6 = P_3 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 1\}$, rilassato lineare di S_6, è costituita da tutti i punti di P_3, con ascissa $x_1 = 1$.

$x^*_{P6} = (1{,}2)^T$ intersezione iperpiani $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$

$z^*_{P6} = -5 = L_6$.

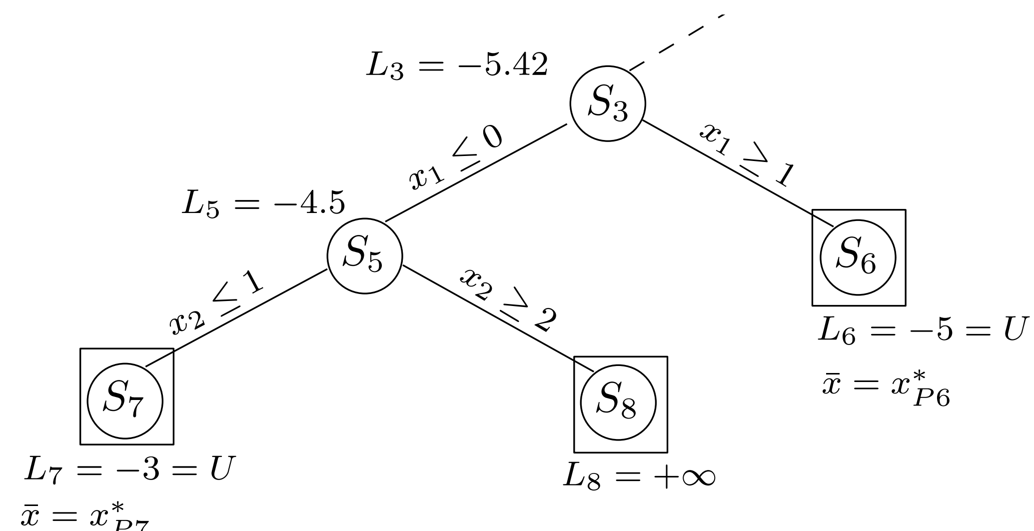
Si esegue il test:$U \leq L_6$?

Test non verificato ma x^*_{P6} intero.

Si chiude S_6 e si aggiorna l'ottimo corrente.

$\bar{x} = (1{,}2)^T$, $U = -5$.

Si esegue il test:$U \leq L_0$? Il test non è verificato. Si procede con la soluzione di un altro sottoproblema.



Esempio 2 - Soluzione di S_4

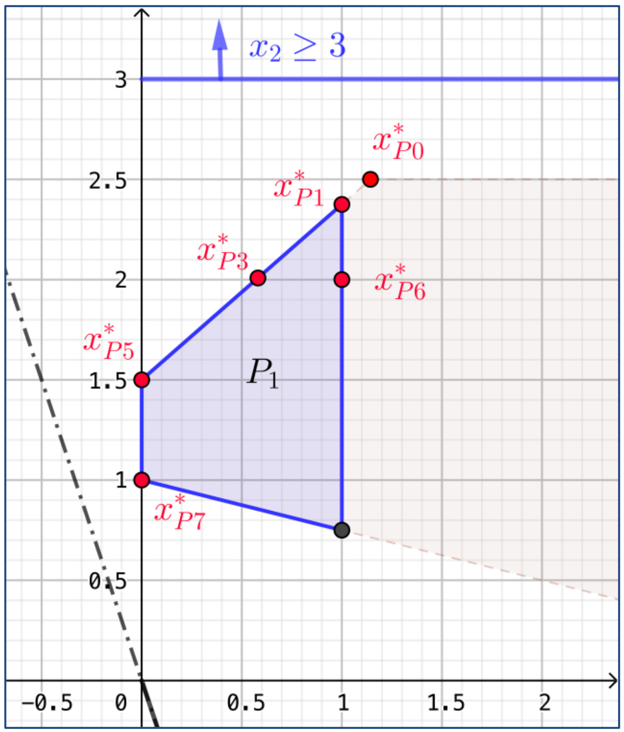
$$
\begin{array}{llcl}
min & x_1 - 3x_2 & & \\
 & 6x_1 + \ 5x_2 & \leq & 30 \\
 & -7x_1 + 8x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 + 4x_2 & \geq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & \leq & 1 \\
 & \boldsymbol{x_2} & \geq & \mathbf{3} \\
 & x & \geq & 0 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2 & &
\end{array}
$$

Estraiamo S_4 da Q

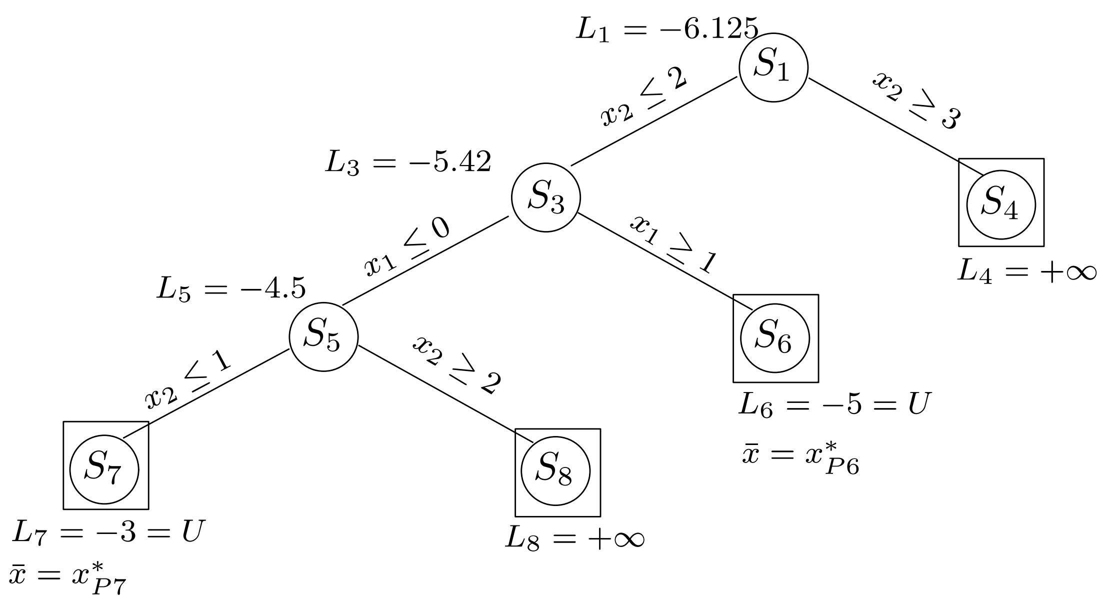
$Q = \{S_2\},\ U = -5\ \ ,\ \ \bar{x} = (1,2\,)^T\ \ ,\ \ L_0 < z^*_{PLI} \leq U$

Soluzione di P_4

La regione ammissibile di $P_4 = \mathrm{P}_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2\ |x_2 \geq 3\}$, rilassato lineare di S_4, è vuota. S_4 è inammissibile ($L_4 = +\infty$) e può essere chiuso.



P_4, è inammissibile



Esempio 2 - Soluzione di S_2

$$
\begin{array}{llll}
\min & x_1 - 3x_2 & & \\
 & 6x_1 + \ 5x_2 & \leq & 30 \\
 & -7x_1 + 8x_2 & \leq & 12 \\
 & x_1 + 4x_2 & \geq & 4 \\
 & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & \color{red}{x_1} & \color{red}{\geq} & \color{red}{2} \\
 & x & \geq & 0 \\
 & x \in \mathbb{Z}^2 & &
\end{array}
$$

Estraiamo S_2 da Q

$Q = \{\emptyset\},\ U = -5 \ \ ,\ \ \bar{x} = (1{,}2\ )^T \ \ ,\ \ L_0 < z^*_{PLI} \leq U$

Soluzione di P_2

$x^*_{P2} = \left(2, \frac{5}{2}\right)^T$ intersezione iperpiani 4 e $x_1 = 2$

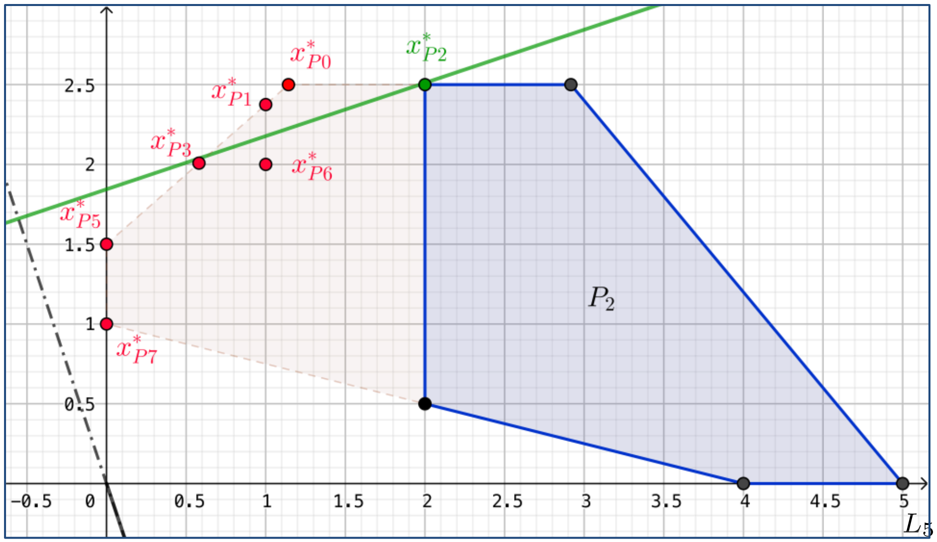
$z^*_{P2} = -5.5 = L_2$

Si esegue il test: $U - L_2 < 1?$

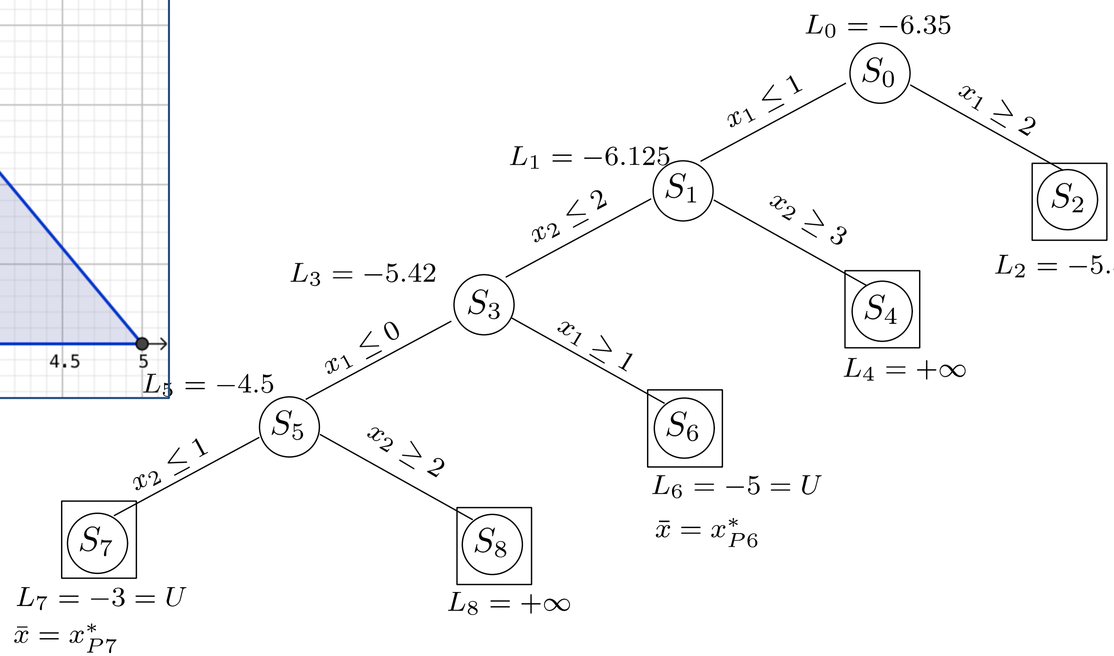
Test verificato. Si chiude S_2 . $Q = \{\emptyset\}$. l'algoritmo si arresta fornendo come soluzione ottima

$x^* = \bar{x} = (1{,}2\ )^T$

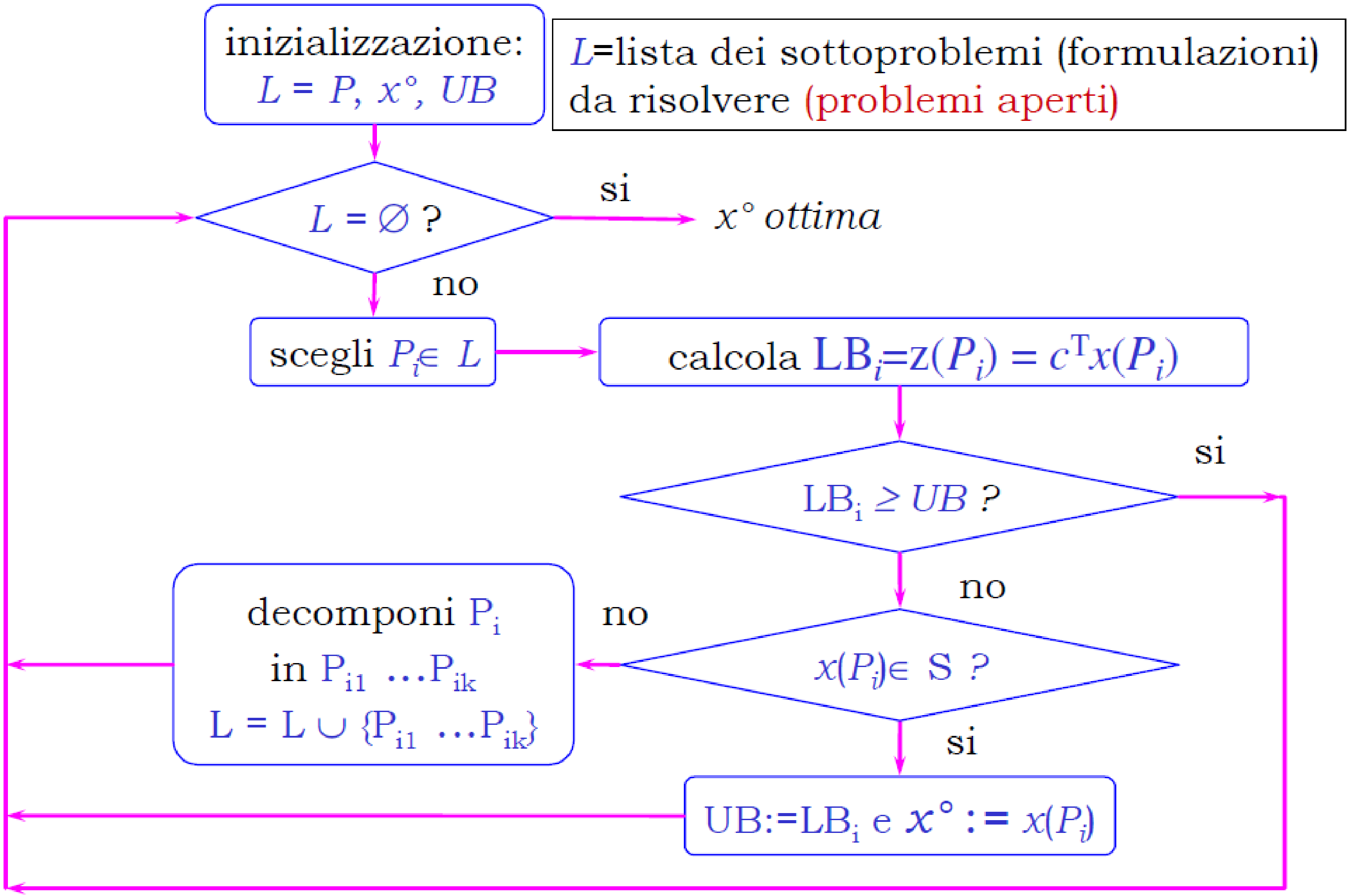
$z^*_{PLI} = U = -5$



Soluzione di P_2, rilassato lineare di S_2



B&B



inizializzazione:
L = P, x°, UB
L=lista dei sottoproblemi (formulazioni) da risolvere (problemi aperti)
L = ∅ ?
si
x° ottima
no
scegli $P_i \in L$
calcola $LB_i = z(P_i) = c^T x(P_i)$
$LB_i \geq UB$?
si
no
$x(P_i) \in S$?
no
si
decomponi P_i
in $P_{i1} \ldots P_{ik}$
$L = L \cup \{P_{i1} \ldots P_{ik}\}$
$UB := LB_i$ e $x° := x(P_i)$