Laboratorio di Ricerca Operativa 2022-2023

FORMA STANDARD DI UN PROBLEMA DI PL

SOLUZIONI AMMISSIBILI DI BASE PER UN PROBLEMA DI PL

La forma Standard

$$P_{FS} \quad \begin{array}{lrcl} \min & c^T x & & \\ & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

$x, c \in \mathbb{R}^n$
$b \in \mathbb{R}^m$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ insieme dei punti che soddisfano l'insieme di m equazioni

$$\Omega(P_{FS}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} = X \cap \mathbb{R}^n_+ \subset X$$

IPOTESI di lavoro

1) rank(A)=m (le equazioni sono tutte linearmente indipendenti)

2) m<n (il sistema è sottodeterminato)

La forma standard e le ipotesi (1) $rank\ (A) = m$, (2) $m < n$

Le ipotesi (1) e (2) fanno si che il problema P_{FS} sia ben posto. Ricordando che

$$\forall\ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad rank(A) \leq \min(m, n)$$

1. $n = m$: la matrice A è quadrata
   a) $rank(A) = m$: il sistema $Ax = b$ ammette una sola soluzione x^*; se $x^* \geq 0$ essa è la soluzione ottima di P; altrimenti P è inammissibile
   b) $rank(A) < m$:
      - ✓ sistema incompatibile $\Longrightarrow \quad X = \emptyset \ \Longrightarrow \Omega(P_{FS}) = \emptyset$
      - ✓ almeno una equazione ridondante e può essere eliminata: $m_1 = m - 1$. Ci si riconduce al caso $rank(A) = m_1$, $m_1 < n$.

2. $m > n$ il sistema è sovradeterminato (più equazioni che incognite)
   a) Esistono equazioni ridondanti che possono essere eliminate, ed eventualmente ci si riconduce al caso $m = n$.
   b) Il sistema è incompatibile $\Longrightarrow \quad X = \emptyset \ \Longrightarrow \Omega(P_{FS}) = \emptyset$

3. $m < n$: il sistema è sottodeterminato
   a) $rank(A) = m$: il sistema ammette infinite soluzioni che dipendono da $n - m$ parametri $\quad |X| = \infty^{n-m}$

   b) $rank(A) < m$
      - ✓ sistema incompatibile $\Longrightarrow \quad X = \emptyset \ \Longrightarrow \Omega(P_{FS}) = \emptyset$
      - ✓ almeno una equazione ridondante e può essere eliminata: $m_1 = m - 1$. Ci si riconduce al caso $rank(A) = m_1$, $m_1 < n$.

Riduzione alla forma standard

$$x, c \in \mathbb{R}^q$$

$$P \quad \begin{cases} \min(\max\quad) & c^T x \\ & a_i^T x \le b_i & i = 1,..,h_1 \\ & a_i^T x \ge b_i & i = h_1+1,..,h_1+h_2 \\ & a_i^T x = b_i & i = h_1+h_2+1,..,h_1+h_2+h_3 \\ & x_j \ge 0 & j = 1,..,q_1 \end{cases}$$

Nella forma standard, P ha:

- ✓ vincoli di eguaglianza e vincoli di segno sulle variabili;
- ✓ funzione obiettivo di minimo

$$a_i^T x \le b_i \quad \Rightarrow a_i^T x + x_{q+i} = b_i \quad \Longrightarrow \quad x_{q+i} = b_i - a_i^T x \ge 0 \qquad i = 1,..,h_1$$

Variabile di Slack

$$a_i^T x \ge b_i \quad \Rightarrow a_i^T x - x_{q+i} = b_i \quad \Longrightarrow \quad x_{q+i} = a_i^T x - b_i \ge 0 \quad i = h_1+1,..,h_1+h_2$$

Variabile di Surplus

$$\max c^T x = -\min -c^T x$$

variabile x_j non vincolata in segno $\quad x_j = x_j^+ - x_j^- \quad , x_j^+, x_j^- \ge 0$

Osservazioni

1. Nel problema in forma standard, si avrà un numero di variabili pari a

$$n \quad = \quad q \quad + \ (h_1 \ + \ h_2) \ + \ 2 * (q - \ q_1)$$

variabili in P_{FS} = variabili di P + variabili ausiliarie + 2*variabili libere in segno

2. Tranne che le variabili di P, tutte le altre usate per la trasformazione non compaiono nella funzione obiettivo di P_{FS} , ovvero il loro coefficiente di costo è nullo. Con un piccolo abuso di notazione (cioè usando lo stesso simbolo *c* sia in P che in P_{FS}) possiamo dire che in P_{FS}

$$c \in \mathbb{R}^n \qquad c^T = (c_1, c_2, \dots, c_q, 0, \ 0, \dots, \ 0)$$

3. A seguito della trasformazione, il numero di vincoli di eguaglianza in P_{FS} è

$$m = h_1 + h_2 + h_3$$

$$\boxed{P_{FS} \begin{cases} \min & c^T x & & \\ & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x, c \in \mathbb{R}^n, \qquad b \in \mathbb{R}^m \\ A \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{array}}$$

P_{FS} è equivalente a P: risolvendo P_{FS} è possibile risolvere P

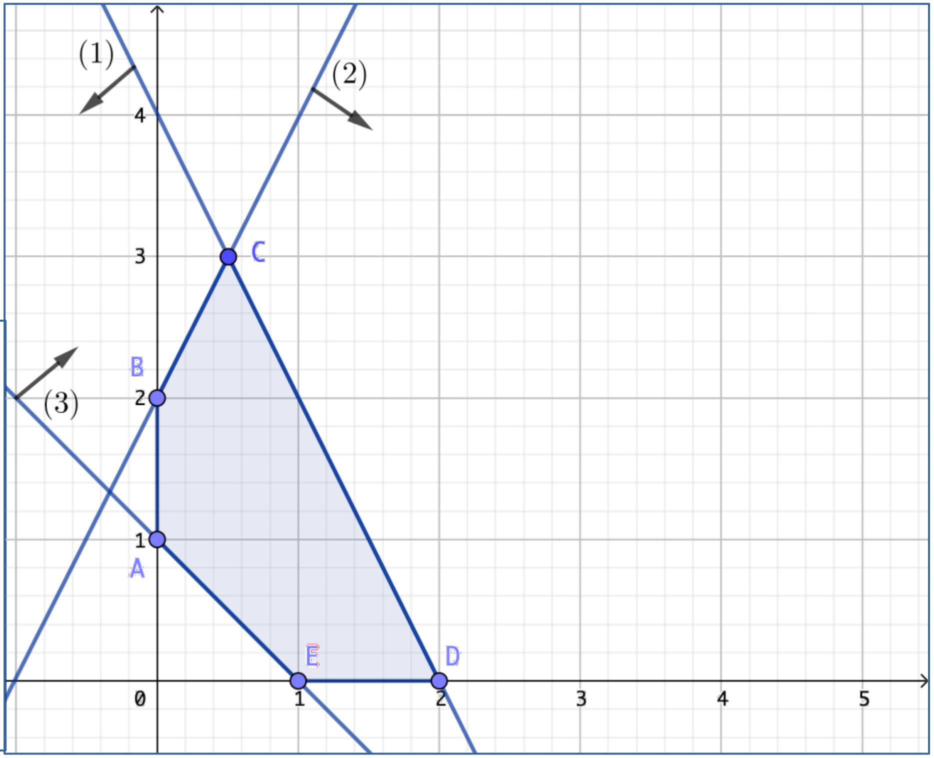
Trasformazione in FS

$$P\begin{cases} \max & x_1 + 2x_2 & & \\ & 2x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 + x_2 & \geq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$q = 2,$$
$$h_1 = 2,\ h_2 = 1,\ h_3 = 0$$

Vertici di $\Omega(P)$

1. $A \equiv (0,1)$
2. $B \equiv (0,2)$
3. $C \equiv \left(\frac{1}{2}, 3\right)$
4. $D \equiv (2,0)$
5. $E \equiv (1,0)$

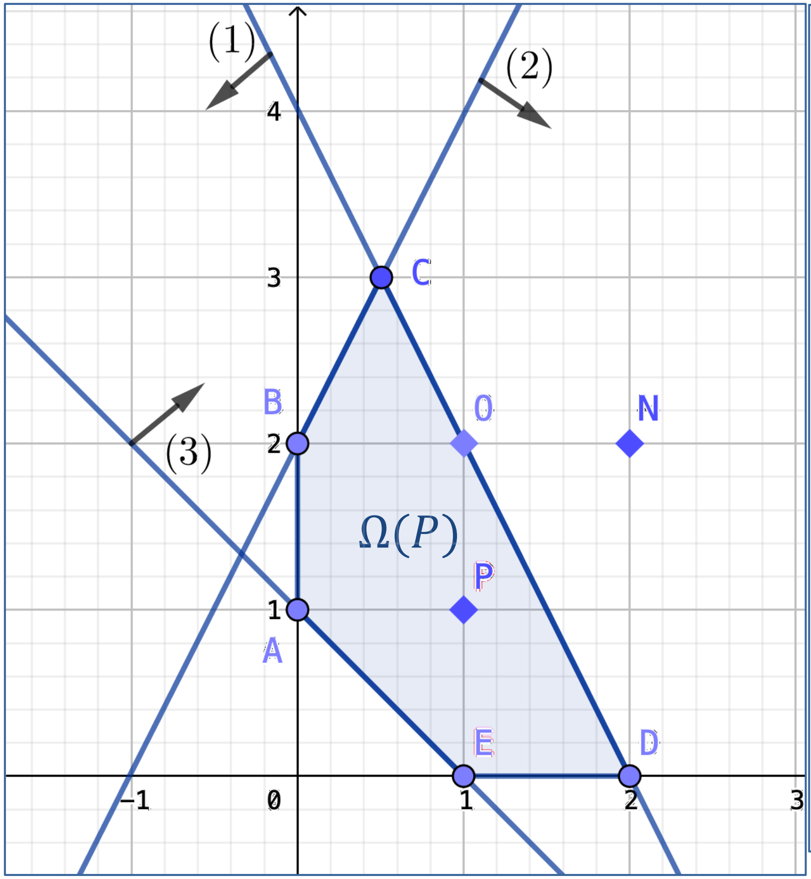


$$P_{FS}\begin{cases} -min & -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ & -2x_1 + x_2 + x_4 & = & 2 \\ & x_1 + x_2 - x_5 & = & 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$m = h_1 + h_2 + h_3 = 3$$
$$n = q + h_1 + h_2 = 5$$

Il significato delle variabili di slack/surplus nel passaggio da P a P_{FS}

$$P_{FS}\begin{cases} -min & -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$



$P = (1,1), \quad O = (1,2), \quad N = (2,2)$

Rispetto a P:

a) P è un punto interno (nessun vincolo attivo)

b) O è un punto che sta sulla frontiera (il vincolo 1 è attivo)

c) N è un punto non ammissibile

Rispetto a P_{FS} ?

a) $(P)_{FS} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (1, 1, 1, 3, 1)^T$

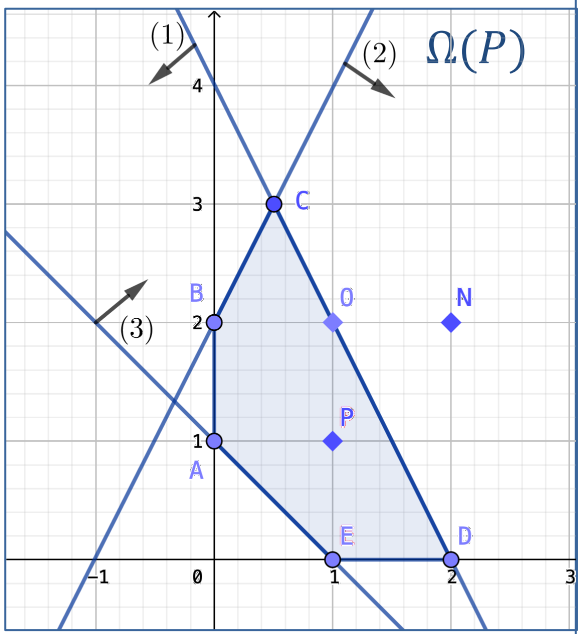
b) $(O)_{FS} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (1, 2, 0, 2, 2)^T$

c) $(N)_{FS} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (2, 2, -2, 4, 3)^T$

Il significato delle variabili di slack/surplus nel passaggio da P a P_{FS}

$$P_{FS}\begin{cases} -\min & -x_1 & - & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 \ , \ x_5 \geq 0$$



$(P)_{FS} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (1, 1, 1, 3, 1)^T$

$(O)_{FS} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (1, 2, 0, 2, 2)^T$

$(N)_{FS} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (2, 2, -2, 4, 3)^T$

$\forall\, \bar{x} \in \Omega(P)$

1. il vincolo i è soddisfatto ed attivo in $\bar{x}$ se e solo se la corrispondente variabile di slack/surplus in P_{FS} è nulla (O)

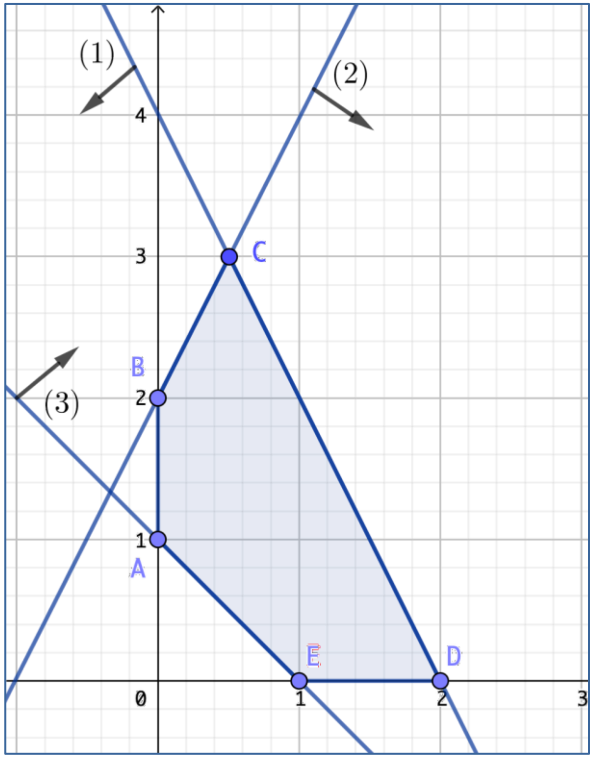
2. il vincolo i è soddisfatto ma non attivo in $\bar{x}$ se e solo se la corrispondente variabile di slack/surplus è >0 (in P nessun vincolo è attivo, in O i vincoli 2 e 3 non sono attivi).

$\forall\, \bar{x} \notin \Omega(P)$

1. il vincolo i è violato da $\bar{x}$ se e solo se la variabile di slack/surplus del vincolo i è <0 (N)

Cosa succede ai vertici di $\Omega(P)$ in P_{FS}

$$P_{FS}\begin{cases} -min & -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$



$A = (0,1)$, $B = (0,2), C = (1/2, 3), D = (2,0)$, $E = (1,0)$

1. $(A)_{FS} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (0, 1, 3, 1, 0)^T$
2. $(B)_{FS} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (0, 2, 2, 0, 1)^T$
3. $(C)_{FS} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (\frac{1}{2}, 3, 0, 0, \frac{5}{2})^T$
4. $(D)_{FS} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (2, 0, 0, 6, 1)^T$
5. $(E)_{FS} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (1, 0, 2, 4, 0)^T$

Coordinate dei vertici di $\Omega(P)$ nello spazio $\mathbb{R}^5$ in cui P_{FS} è definito

I vertici di $\Omega(P_{FS})$

1) $\Omega(P_{FS}) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ è chiaramente un Poliedro

2) $\bar{x} \in Q$ è un vertice del poliedro Q definito in $\mathbb{R}^q$ se in $\bar{x}$ sono attivi «q» vincoli linearmente indipendenti $\bar{x}$

Nel caso di $\Omega(P_{FS})$

a) $q = n$

b) numero totale di vincoli = $m + n$

- m equazioni linearmente indipendenti (ipotesi 1!)
- n diseguaglianze (vincoli di segno sulle variabili)

Vale, perciò, la (2): $\bar{x} \in \Omega(P_{FS})$ è un suo vertice se in $\bar{x}$ sono attivi n vincoli lin. ind. scelti tra gli $n + m$ vincoli che definiscono $\Omega(P_{FS})$. Ma P_{FS} ha esattamente m vincoli di uguaglianza (sempre attivi in un punto ammissibile!). Perciò:

Caratterizzazione geometrica
$\bar{x} \in \Omega(P_{FS})$ è un suo vertice se in $\bar{x}$ sono attivi $n - m$ vincoli di segno.

Determinazione dei vertici di $\Omega(P_{FS})$ dell' Esempio (n=5, m=3, n-m=2)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

1) $x^{(1)} = (0,0,4,2,-1)^T \notin \Omega(P_{FS})$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

2) $x^{(2)} = (0,4,0,-2,3)^T \notin \Omega(P_{FS})$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

3) $x^{(3)} = (0,2,2,0,1)^T \in \Omega(P_{FS})$ V

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

4) $x^{(4)} = (0,1,3,1,0)^T \in \Omega(P_{FS})$ V

Determinazione dei vertici di $\Omega(P_{FS})$ dell' Esempio (n=5, m=3, n-m=2)

imponendo $x_2 = 0\ e\ x_3 = 0$ 5) $x^{(5)} = (2,0,0,6,1)^T \in \Omega(P_{FS})$ V

imponendo $x_2 = 0\ e\ x_4 = 0$ 6) $x^{(6)} = (-1,0,6,0,-2)^T \notin \Omega(P_{FS})$

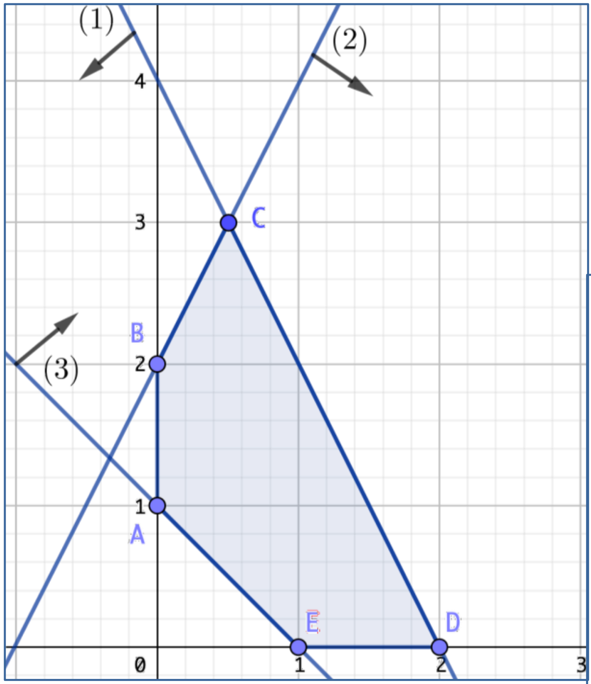
imponendo $x_2 = 0\ e\ x_5 = 0$ 7) $x^{(7)} = (1,0,2,4,0)^T \in \Omega(P_{FS})$ V

imponendo $x_3 = 0\ e\ x_4 = 0$ 8) $x^{(8)} = (\frac{1}{2},3,0,0,\frac{5}{2})^T \in \Omega(P_{FS})$ V

imponendo $x_3 = 0\ e\ x_5 = 0$ 9) $x^{(9)} = (3,-2,0,10,0)^T \notin \Omega(P_{FS})$

imponendo $x_4 = 0\ e\ x_5 = 0$ 10) $x^{(10)} = (-\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{10}{3},0,0)^T \notin \Omega(P_{FS})$

Corrispondenza tra i vertici di $\Omega(P)$ ed i vertici di $\Omega(P_{FS})$



Vertici di $\Omega(P)$ $A = (0,1)$, $B = (0,2), C = (1/2,3), D = (2,0)$, $E = (1,0)$

Vertici di $\Omega(P)$ in FS

$$(A)_{FS} = (0, 1, 3, 1, 0)^T$$

$$(B)_{FS} = (0, 2, 2, 0, 1)^T$$

$$(C)_{FS} = (\tfrac{1}{2}, 3, 0, 0, \tfrac{5}{2})^T$$

$$(D)_{FS} = (2, 0, 0, 6, 1)^T$$

$$(E)_{FS} = (1, 0, 2, 4, 0)^T$$

Vertici di $\Omega(P_{FS})$

$$x^{(4)} = (0,1,3,1,0)^T$$

$$x^{(3)} = (0,2,2,0,1)^T$$

$$x^{(8)} = (\frac{1}{2}, 3,0,0, \frac{5}{2})^T$$

$$x^{(5)} = (2,0,0,6,1)^T$$

$$x^{(7)} = (1,0,2,4,0)^T$$

- I punti $\Omega(P)$ vengono trasformati in punti di $\Omega(P_{FS})$
- I punti non ammissibili di P vengono trasformati in punti non ammissibili per P_{FS}
- I vertici di $\Omega(P)$ vengono trasformati in vertici di $\Omega(P_{FS})$

Le soluzioni di base del sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $x \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^m$

Risolvere il sistema $Ax = b$

significa determinare n scalari $x_1, x_2, \dots, x_n$ tali che

$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b$ $A_j \in \mathbb{R}^m$ è la $j-ma$ colonna di A

Ma $rank(A) = m$ $\Longrightarrow$ esistono in A m colonne linearmente indipendenti. Per semplicità supponiamo che tali colonne siano le prime m colonne $\Longrightarrow$

$$A_1x_1 + \cdots + A_mx_m = b - A_{m+1}x_{m+1} + \cdots + A_nx_n$$

$B = [A_1 | \dots | A_m]$ $N = [A_{m+1} | \dots | A_n]$ $B \in \mathbb{R}^{m\times m}, N \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$

$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$ $x_N = \begin{bmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $x_B \in \mathbb{R}^m,$ $x_N \in \mathbb{R}^{(n-m)}$

$$Bx_B = b - Nx_N \quad \xRightarrow{B\ non\ singolare}$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

tutte le soluzioni del sistema $Ax = b$ in funzione degli $n-m$ parametri x_N $(\infty^{n-m}\ soluzioni)$

Le soluzioni di base del sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $x \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^m$

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$ soluzione di base del sistema di equazioni

Non degenere, se le componenti di x_B sono tutte non nulle.

Degenere, se $k \geq 1$ componenti di x_B sono nulle. k è detto livello di degenericità.

Soluzione ammissibile di base del sistema di equazioni e disequazioni se $x_B = B^{-1}b \geq 0$

Perché «soluzione di base»

La matrice B è una «base» di $\mathbb{R}^m$. Ogni vettore $b \in \mathbb{R}^m$ ammette una sola rappresentazione come combinazione lineare delle colonne di B (i coefficienti della combinazione lineare sono unici per ogni vettore b). x_B sono i coefficienti che consentono di esprimere b nella base B.

Caratterizzazione delle soluzioni di base

Teorema: Caratterizzazione completa delle s.b. (ammissibili e non ammissibili):

Sia $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $x \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^m, rank(A) = m < n$
$x \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione di base per il sistema di equazioni $\Longleftrightarrow$ le componenti non nulle di x corrispondono a colonne di A linearmente indipendenti.

Dim
1) $(\Longrightarrow)$ segue dalla definizione

2) $(\Longleftarrow)$
Senza perdere generalità, le componenti non nulle di x siano le prime $p \leq n$. Scriviamo x come $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$.Poiché per ipotesi le colonne di A corrispondenti alle componenti non nulle di x sono linearmente indipendenti, allora $p \leq m$.

a) $p = m$. Stop x è soluzione di base non degenere.

b) $p < m$. Ricordando che $rank(A) = m$, esisteranno altre $m - p$ colonne di A (ad esempio $A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_m$ che unite alle prime p colonne formano una matrice B non singolare. Ma le componenti del vettore x in corrispondenza di $A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_m$ sono nulle. Allora x è soluzione di base degenere.

Caratterizzazione delle soluzioni di base

Teorema: Caratterizzazione completa delle s.a.b. (ammissibili e non ammissibili):

Sia $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $x \in \mathbb{R}^n$ $b \in \mathbb{R}^m, rank(A) = m < n$
$x \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione di base per il sistema di equazioni $\Longleftrightarrow$ le componenti non nulle di x corrispondono a colonne di A linearmente indipendenti.

Quante sono le soluzioni ammissibili di base di un problema di PL?

Le sottomatrici $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ che è possibile estrarre dalla matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sono esattamente $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

Numero di soluzioni ammissibili di base <= $\binom{n}{m}$