1) Tre cariche puntuali $q_1 = q_2 = q_3 = 3\,nC$ si trovano nello spazio libero rispettivamente nei punti $(2,0,0)$, $(-2,0,0)$, $(0,2,0)$ di un sistema di coordinate cartesiane. Si determini il campo elettrico E nel punto $(0,0,2)$.

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \qquad \underline{E}_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\underline{R}-\underline{R}_i)}{|\underline{R}-\underline{R}_i|^3}\right] \left(\frac{V}{m}\right)$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = 3\cdot 10^{-9}\,C$$

$$\underline{R}_1 = 2\hat{x} \qquad \underline{R}_2 = -2\hat{x} \qquad \underline{R}_3 = 2\hat{y} \qquad \underline{R} = 2\hat{z}$$

$$\underline{R}-\underline{R}_1 = 2\hat{z} - 2\hat{x} \qquad \underline{R}-\underline{R}_3 = 2\hat{z} - 2\hat{y}$$

$$\underline{R}-\underline{R}_2 = 2\hat{z} + 2\hat{x}$$

$$|\underline{R}-\underline{R}_1|^3 = \left(\sqrt{4+4}\right)^3 = \left(\sqrt{8}\right)^3$$

$$|\underline{R}-\underline{R}_2|^3 = \left(\sqrt{4+4}\right)^3 = \left(\sqrt{8}\right)^3$$

$$|\underline{R}-\underline{R}_3|^3 = \left(\sqrt{4+4}\right)^3 = \left(\sqrt{8}\right)^3$$

$$\underline{E}_{TOT} = \frac{3\cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2\hat{z}-2\hat{x}}{(\sqrt{8})^3} + \frac{2\hat{z}+2\hat{x}}{(\sqrt{8})^3} + \frac{2\hat{z}-2\hat{y}}{(\sqrt{8})^3}\right] =$$

$$= \frac{3\cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2\hat{z} \cancel{-2\hat{x}} + 2\hat{z} \cancel{+2\hat{x}} + 2\hat{z} - 2\hat{y}}{(\sqrt{8})^3}\right] =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^{-9}}{4\pi \varepsilon_0 (\sqrt{8})^3} \left[6\hat{z} - 2\hat{y} \right] \left(\frac{V}{m} \right)$$

① Quattro cariche ognuna di 10 μC, si trovano nello spazio libero nei punti (-3,0,0), (3,0,0), (0,-3,0) e (0,3,0) di un sistema di coordinate cartesiane. Si determini la forza che agisce su una carica di 20 μC posizionata nel punto (0,0,4). Tutte le distanze sono in metri.

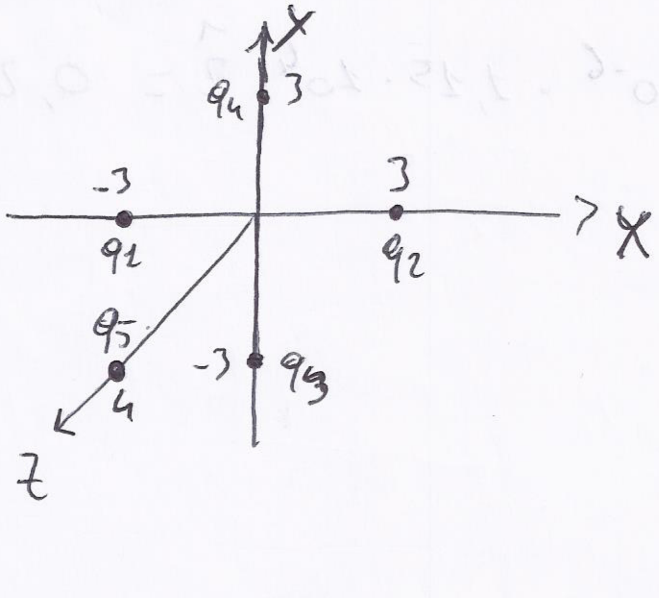
$$\underline{F} = q' \cdot \underline{E}$$

$$E_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i(\underline{R} - \underline{R}_i)}{|\underline{R} - \underline{R}_i|^3} \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 10\mu C$ $\qquad q = 20\mu C$; $\underline{R} = 4\hat{z}$

Vettori che individuano le posizioni delle cariche:

$\underline{R}_1 = -3\hat{x}$; $\quad \underline{R}_2 = 3\hat{x}$; $\quad \underline{R}_3 = -3\hat{y}$; $\quad \underline{R}_4 = 3\hat{y}$;



$\underline{R} - \underline{R}_1 = 4\hat{z} + 3\hat{x}$; $\quad \underline{R} - \underline{R}_2 = 4\hat{z} - 3\hat{x}$; $\quad \underline{R} - \underline{R}_3 = 4\hat{z} + 3\hat{y}$;

$\underline{R} - \underline{R}_4 = 4\hat{z} - 3\hat{y}$;

$$|\underline{R} - \underline{R}_i|^3 = \left(\sqrt{16+9}\right)^3 = (25)^2 = 125$$

$\varepsilon = \varepsilon_0$ = spazio libero

$$\underline{E}_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{(4\hat{z}+3\hat{x})}{125} + \frac{(4\hat{z}-3\hat{x})}{125} + \frac{(4\hat{z}+3\hat{y})}{125} + \frac{(4\hat{z}-3\hat{y})}{125}\right] 10 \cdot 10^{-6} =$$

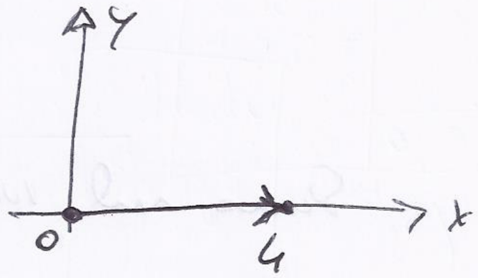
$$= \frac{10 \cdot 10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4\hat{z}+3\hat{x}+4\hat{z}-3\hat{x}+4\hat{z}+3\hat{y}}{125}\right] =$$

$$= \frac{10 \cdot 10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{16\ \hat{z}}{125}\right] = 1{,}15 \cdot 10^4\ \hat{z}\ \left(\frac{V}{m}\right)$$

$$\underline{F} = q\ \underline{E} = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}15 \cdot 10^4\ \hat{z} = 0{,}23\,\hat{z}\ (N)$$

1) Trovare il lavoro compiuto spostando una carica puntiforme $Q = -20\,\mu C$ dall'origine a $(4,0,0)\,m$, nel campo:

$$\underline{E} = \left(\frac{x}{2}\right)\hat{x} + 2x\,\hat{y} \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$



$$dW = -q\,\underline{E}\bullet\underline{d\ell} \qquad \underline{d\ell} = \hat{x}\,dx$$

$$dW = -\left[-20\cdot10^{-6}\left[\left(\frac{x}{2}\right)\hat{x} + 2x\,\hat{y}\right]\right]\hat{x}\,dx =$$

$$= (20\cdot10^{-6})\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$W = \int_0^4 (20\cdot10^{-6})\left(\frac{x}{2}\right)dx = (20\cdot10^{-6})\int_0^4\left(\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{20\cdot10^{-6}}{2}\right)\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^4\right) = (10\cdot10^{-6})\left(\frac{16}{2}\right) =$$

$$= 80\cdot10^{-6}\ J$$

② Data una carica lineare $\rho_\ell = \left(\frac{10^{-9}}{2}\right) \frac{C}{m}$ sull'asse z, trovare V_{AB} sapendo che A si trova in $\left(2, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ e B in $(4, \pi, 5)$

$$V_{AB} = -\int_B^A \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

Dove:

$$\underline{E} = \frac{\rho_\ell}{2\pi \varepsilon_0 r} \hat{i}_r$$

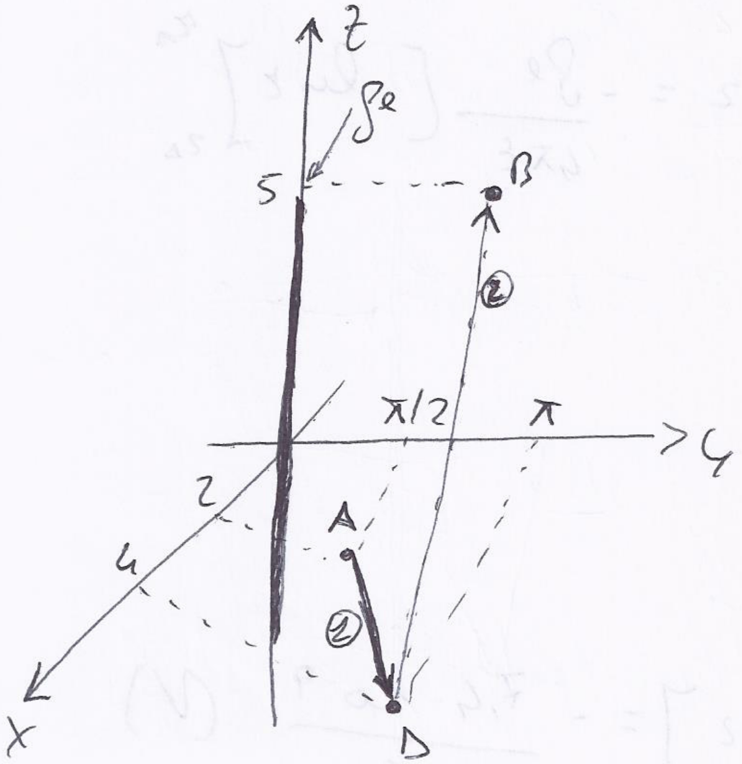
Siamo nel vuoto

Visto che il campo dovuto alla carica lineare è tutto in direzione radiale, il suo prodotto scalare con dl ci darà $\underline{E}_r \, dr$:

$$V_{AB} = -\int_4^2 \underline{E} \, dr = -\int_4^2 \frac{\rho_\ell}{4\pi \varepsilon r} \, dr =$$

$$= -\int_4^2 \frac{10^{-9}}{2(2\pi \varepsilon r)} \, dr = -9 \left[\ln r\right]_4^2 = 6{,}24 \text{ V}$$

Una linea di lunghezza infinita si estende lungo l'asse z con una densità di carica $\rho_e = 3 \cdot 10^{-9}\ \frac{C}{m}$.
Calcolare V_{AB} dove A è $(2, \frac{\pi}{2}, 0)$ m e B è $(4, \pi, 5)$ m.



Il percorso scelto non influenza V_{AB}, questa proprietà è una conseguenza dei vincoli imposti dalla legge di conservazione dell'energia.

$$V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

Il campo elettrico è $\underline{E} = \dfrac{\rho_e}{2\pi\varepsilon r}\,\hat{i}_r$

$$V_{AB} = V_B - V_A = -\underbrace{\int_A^D \underline{E} \cdot d\underline{l}}_{①} - \underbrace{\int_D^B \underline{E} \cdot d\underline{l}}_{②}$$

$$\begin{cases} \text{Per il cammino ①}: d\underline{l} = \hat{i}_r \cdot dr \\ \text{Per il cammino ②}: d\underline{l} = \hat{i}_z \cdot dz \end{cases}$$

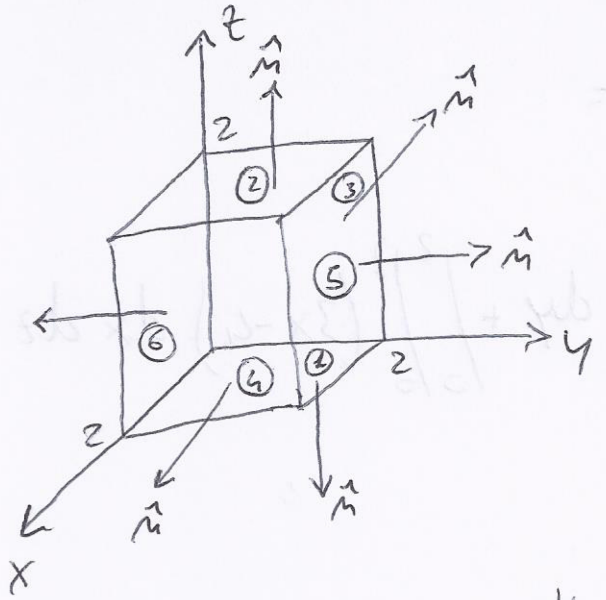
$\underline{E}$ è diretto solo lungo la direzione radiale $\hat{i}_z$, quindi il prodotto scalare, per il cammino ②, tra $\hat{i}_z \cdot \hat{i}_\xi$ è nullo. Il secondo integrale di conseguenza è uguale a 0.

$$V_{AB} = -\int_A^D \underline{E} \cdot d\underline{l} = -\int_{z_A}^{z_D} \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon z}\, dz = -\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon}\Big[\ln z\Big]_{z_A}^{z_D}$$

$$z_A = \left(\sqrt{4+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right) = 2{,}36$$

$$z_D = \left(\sqrt{16+\pi^2}\right) = 5{,}08$$

$$V_{AB} = -\frac{3 \cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon}\Big[0{,}85 + 1{,}62\Big] = -\frac{7{,}4 \cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon} \quad (V)$$



$$\underline{D} = \hat{x}\,2(x+y) + \hat{y}(3x-2y)$$

$$Q = \oiint_S \underline{D}\cdot\hat{n}\,ds$$

$$Q = \int_0^2\int_0^2 \underline{D}\big|_{z=0}\cdot(-\hat{z})\,dx\,dy + \int_0^2\int_0^2 \underline{D}\big|_{z=2}\cdot(\hat{z})\,dx\,dy +$$

$$+ \int_0^2\int_0^2 \underline{D}\big|_{x=0}\cdot(-\hat{x})\,dz\,dy + \int_0^2\int_0^2 \underline{D}\big|_{x=2}\cdot(\hat{x})\,dz\,dy +$$

$$+ \int_0^2\int_0^2 \underline{D}\big|_{y=2}\cdot(\hat{y})\,dx\,dz + \int_0^2\int_0^2 \underline{D}\big|_{y=0}\cdot(-\hat{y})\,dx\,dz =$$

$$= \int_0^2\int_0^2 \left[\hat{x}\,2(x+y) + \cancelto{0}{\hat{y}(3x-2y)}\right]\cdot(-\hat{z})\,dx\,dy +$$

$$+ \int_0^2\int_0^2 \left[\hat{x}\,2(x+y) + \cancelto{0}{\hat{y}(3x-2y)}\right]\cdot(\hat{z})\,dx\,dy +$$

$$+ \int_0^2\int_0^2 \left[\hat{x}\,2y + \hat{y}(-2y)\right]\cdot(-\hat{x})\,dz\,dy + \int_0^2\int_0^2 \left[\hat{x}\,2(2+y) + \hat{y}(6-2y)\right]\cdot(\hat{x})\,dz\,dy +$$

$$+ \int_0^2\int_0^2 \left[\hat{x}\,2(x+2) + \hat{y}(3x-4)\right]\cdot(\hat{y})\,dx\,dz +$$

$$+\int_0^2\int_0^2 [\hat{x}\,2x + \hat{y}\,3x]\cdot(-\hat{y})\,dx\,dz =$$

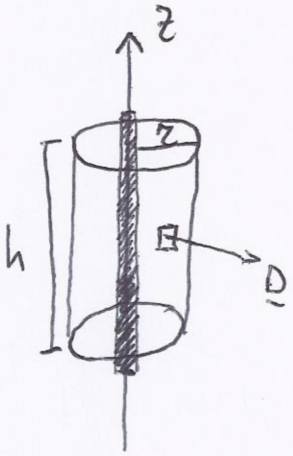
$$=\int_0^2\int_0^2 -2y\,dz\,dy + \int_0^2\int_0^2 (4+2y)\,dz\,dy + \int_0^2\int_0^2 (3x-4)\,dx\,dz +$$

$$+\int_0^2\int_0^2 -3x\,dx\,dz =$$

$$= -\overset{2}{\cancel{4}}\,\frac{y^2}{\cancel{2}}\Big|_0^2 + 2\left(4y + \cancel{2}\,\frac{y^2}{\cancel{2}}\right)\Big|_0^2 + 2\left(3\frac{x^2}{2} - 4x\right)\Big|_0^2 +$$

$$+\overset{3}{\cancel{6}}\,\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^2 = -8 + 24 - 12 - 4 = 0$$

Calcolare il campo $\underline{E}$ nello spazio libero generato da un filo carico infinitamente lungo, caratterizzato da una densità di carica $\rho_e = 10^{-9} \frac{C}{m}$ lungo l'asse z. $h = 50\,cm$, $r = 10\,cm$.



$\underline{D}$ data la simmetria ha solo direzione radiale, $\underline{D} = \hat{r} D_r$

$$\underline{E} = \frac{\underline{D}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$$

$$\oint_S \underline{D} \cdot d\underline{s} = Q \qquad d\underline{s} = \hat{r}\, r\, d\phi\, dz$$

$$Q = \int_l \rho_e\, dl \ (c) = \rho_e h$$

$$\Rightarrow \int_{z=0}^{h} \int_{\phi=0}^{2\pi} \hat{r} D_r \cdot \hat{r}\, r\, d\phi\, dz = \rho_e h$$

$$\int_0^h \int_0^{2\pi} D_r\, r\, d\phi\, dz = D_r \cdot r \cdot h \cdot 2\pi = \rho_e h$$

$$D_r = \frac{\rho_e \cancel{h}}{r \cancel{h}\, 2\pi} = \frac{\rho_e}{r 2\pi} \Rightarrow \underline{E} = \hat{r} \frac{D_r}{\varepsilon_0} = \hat{r}\, 179{,}75 \frac{V}{m}$$

① Si determini la carica totale distribuita lungo l'asse y tra $y=-5$ e $y=5$ sapendo che la densità di carica lineare è $\rho_\ell = 12y^2 \left(\frac{mC}{m}\right)$

$$Q = \int_\ell \rho_\ell \, d\ell$$

$$Q = \int_{-5}^{5} 12y^2 \, dy = 12 \int_{-5}^{5} y^2 \, dy = 12 \left[\frac{y^3}{3} \Big|_{-5}^{5} \right] =$$

$$= 12 \left[\frac{125}{3} + \frac{125}{3} \right] = 1000 \, mC = 1 \, C$$

② Una lastra posta nel piano x-y occupa uno spazio definito dalle coordinate $-7 \le x \le 7$ e $-4 \le y \le 4$. Si calcoli la carica totale presente nella lastra sapendo che la densità di carica superficiale è data da $\rho_s = 2x^2 \left(\mu C/m^2\right)$.

$$Q = \int_s \rho_s \, ds$$

$$Q = \int_{-7}^{7} \int_{-4}^{4} 2x^2 \, dx \, dy = \int_{-4}^{4} dy \int_{-7}^{7} 2x^2 \, dx =$$

$$= 2\left\{\left[4-(-4)\right]\cdot\left[\frac{x^3}{3}\Big|_{-7}^{7}\right]\right\} =$$

$$= 2\left[8\cdot\left(\frac{343}{3}+\frac{343}{3}\right)\right] = 3{,}65\cdot 10^3\,\mu C = 3{,}65\,mC$$

① Due cariche una di 10 μC e una di 20 μC si trovano nello spazio libero nei punti (-5,0,0) e (5,0,0). Calcolare il campo totale nel punto (0,5,0).

$$\underline{E}_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i\,(\underline{R}-\underline{R}_i)}{|\underline{R}-\underline{R}_i|^3}\right]\left(\frac{V}{m}\right)$$

$q_1 = 10\,\mu C = 10\cdot 10^{-6}\ C$

$q_2 = 20\,\mu C = 20\cdot 10^{-6}\ C$

$\underline{R}_1 = -5\hat{x}$; $\quad \underline{R}_2 = 5\hat{x}$; $\quad \underline{R} = 5\hat{y}$;

$\underline{R}-\underline{R}_1 = 5\hat{y} + 5\hat{x}$;

$\underline{R}-\underline{R}_2 = 5\hat{y} - 5\hat{x}$;

$|\underline{R}-\underline{R}_1| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} \Rightarrow |\underline{R}-\underline{R}_1|^3 = (\sqrt{50})^3$

$|\underline{R}-\underline{R}_2| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} \Rightarrow |\underline{R}-\underline{R}_2|^3 = (\sqrt{50})^3$

$\varepsilon = \varepsilon_0$

$$\underline{E}_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{10\cdot 10^{-6}(5\hat{x}+5\hat{y})}{(\sqrt{50})^3} + \frac{20\cdot 10^{-6}(5\hat{y}-5\hat{x})}{(\sqrt{50})^3}\right] =$$

$$= \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{50})^3}\left[10(5\hat{x}+5\hat{y}) + 20(5\hat{y}-5\hat{x})\right] =$$

$$= \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{50})^3}\left[50\hat{x}+50\hat{y}+100\hat{y}-100\hat{x}\right] =$$

$$= \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{50})^3}\left[150\hat{y}-50\hat{x}\right] \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

Supponendo che nel punto $P(0,5,0)$ ci sia una carica di $15\ \mu C$, quanto vale la forza che agisce sulla stessa?

$q_3 = 15\ \mu C = 15\cdot 10^{-6}\ C$

$$\underline{F} = q\,\underline{E}$$

$$\underline{F} = \frac{15\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{50})^3}\left[150\hat{y}-50\hat{x}\right] \quad (N)$$

② Quattro cariche rispettivamente di $10\mu C$, $20\mu C$, $30\mu C$ e $40\mu C$ si trovano nello spazio libero nei punti $(-3,2,0)$, $(3,2,0)$, $(3,-2,0)$ e $(-3,-2,0)$.
Calcolare il campo nell'origine $(0,0,0)$.
Supponendo che nell'origine ci sia una carica di $25\mu C$ si calcoli la forza che agisce su quest'ultima carica.

$q_1 = 10\mu C = 10\cdot 10^{-6}\,C$; $q_2 = 20\mu C = 20\cdot 10^{-6}\,C$;

$q_3 = 30\mu C = 30\cdot 10^{-6}\,C$; $q_4 = 40\mu C = 40\cdot 10^{-6}\,C$;

$\underline{R}_1 = -3\hat{x}+2\hat{y}$; $\underline{R}_2 = 3\hat{x}+2\hat{y}$; $\underline{R}_3 = 3\hat{x}-2\hat{y}$;

$\underline{R}_4 = -3\hat{x}-2\hat{y}$;

$\underline{R}-\underline{R}_1 = 3\hat{x}-2\hat{y}$; $\underline{R}-\underline{R}_2 = -3\hat{x}-2\hat{y}$; $\underline{R}-\underline{R}_3 = -3\hat{x}+2\hat{y}$;

$\underline{R}-\underline{R}_4 = 3\hat{x}+2\hat{y}$;

$|\underline{R}-\underline{R}_1| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow |\underline{R}-\underline{R}_1|^3 = (\sqrt{13})^3$

$|\underline{R}-\underline{R}_2| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow |\underline{R}-\underline{R}_2|^3 = (\sqrt{13})^3$

$|\underline{R}-\underline{R}_3| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow |\underline{R}-\underline{R}_3|^3 = (\sqrt{13})^3$

$$|\underline{R}-\underline{R}_4| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \Rightarrow |\underline{R}-\underline{R}_4|^3 = (\sqrt{13})^3$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon$$

$$\underline{E}_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{10\cdot 10^{-6}(3\hat{x}-2\hat{y})}{(\sqrt{13})^3} + \frac{20\cdot 10^{-6}(-3\hat{x}-2\hat{y})}{(\sqrt{13})^8} + \right.$$

$$\left. + \frac{30\cdot 10^{-6}(-3\hat{x}+2\hat{y})}{(\sqrt{13})^3} + \frac{40\cdot 10^{-6}(3\hat{x}+2\hat{y})}{(\sqrt{13})^2}\right] =$$

$$= \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{13})^3}\left[30\hat{x}-20\hat{y}-60\hat{x}-40\hat{y}-90\hat{x}+60\hat{y}+120\hat{x}+80\hat{y}\right] =$$

$$= \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{13})^3}(80\hat{y}) = \frac{80\cdot 10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{13})^3}\hat{y} \quad \left(\frac{V}{m}\right)$$

$$\underline{F} = q\,\underline{E}$$

$$\underline{F} = q_5 \cdot \underline{E}_{TOT} = \frac{25\cdot 10^{-6}\cdot 80\cdot 10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{13})^3}\hat{y} \quad (N)$$

(3) Una carica $q_1 = 4\mu C$ si trova nel punto $(1,1,0)$ e una carica q_2 nel punto $(0,0,4)$. Quanto deve essere la carica q_2 affinché E nel punto $(0,2,0)$ non abbia componente y?

$$q_1 = 4\mu C \; ; \qquad q_2 = q_2 \cdot 10^{-6}\ C$$

$$\underline{R}_1 = \hat{x} + \hat{y} \qquad \underline{R}_2 = 4\hat{z} \qquad \underline{R} = 2\hat{y}$$

$$\underline{R} - \underline{R}_1 = 2y - \hat{x} - \hat{y} = -\hat{x} + \hat{y}$$

$$\underline{R} - \underline{R}_2 = 2\hat{y} - 4\hat{z}$$

$$|\underline{R} - \underline{R}_1|^3 = \left(\sqrt{1+1}\right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2,82$$

$$|\underline{R} - \underline{R}_2|^3 = \left(\sqrt{4+16}\right)^3 = (\sqrt{20})^3 = 89,44$$

$$E_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{4\cdot 10^{-6}(-\hat{x}+\hat{y})}{2,82} + \frac{q_2 \cdot 10^{-6}\,(2\hat{y}-4\hat{z})}{89,44}\right] =$$

$$= \frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-357\hat{x} + 357\hat{y} + (2,84\cdot 2\cdot q_2)\hat{y} - 4\cdot 2,84\cdot q_2\,\hat{z}}{252}\right]$$

$$357\cancel{\hat{y}} + (2,84\cdot 2\cdot q_2)\cancel{\hat{y}} = 0 \qquad q_2 = -\frac{357}{5,68} = -62,85\mu C$$

① Una lastra quadrata nel piano x-y occupa uno spazio definito dalle coordinate $-3\,m \le x \le 3\,m$ e $-3\,m \le y \le 3\,m$. Si calcoli la carica totale presente nella piastra sapendo che la densità di carica superficiale è data da $\rho_s = 4y^2$ ($\mu C/m^2$).

$$Q = \int_S \rho_s \, ds \quad (C)$$

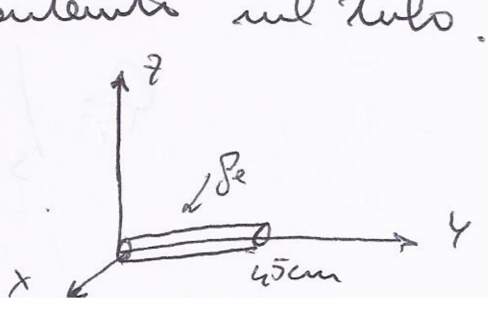
$$Q = \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} 4y^2 \, dx\, dy = 4\left[x\Big|_{-3}^{3} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-3}^{3} \right] =$$

$$= 4\left[6 \cdot \left(\frac{27}{3} + \frac{27}{3}\right)\right] = 4 \cdot \left[6 \cdot \frac{54}{3}\right] = 432\,\mu C =$$

$$= 0{,}432\, mC$$

② Consideriamo un tubo cilindrico caricato e orientato lungo l'asse y, con densità di carica lineare pari a $\rho_\ell = 10y \left(\frac{C}{m}\right)$, dove y è la distanza in metri dalla base del tubo. Il tubo è lungo 45 cm. Calcolare la carica totale Q contenuta nel tubo.

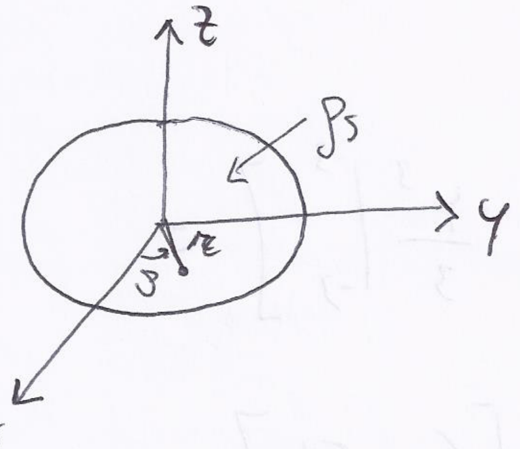
$$Q = \int_\ell \rho_\ell \, d\ell \quad (C)$$



$$Q = \int_0^{0,45} 10y\,dy = 10\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{0,45}\right) = 10\left(\frac{0,45^2}{2}\right) =$$

$$= 10\left(\frac{0,2025}{2}\right) = 1,01\ C$$

(3)



Disco circolare caricato elettricamente, caratterizzato da una densità di carica superficiale avente simmetria azimutale che cresce linearmente con 'r' partendo da 0 al centro fino a $15\left(\frac{C}{m^2}\right)$ per $r = 7$ cm.

Si calcola la carica totale presente nel disco.

- Densità di carica superficiale:

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{ds} \quad \left(\frac{C}{m^2}\right)$$

Δq carica presente in un elemento di superficie Δs.

- Carica totale presente nella superficie

$$Q = \int_S \rho_s \, ds \quad (C)$$

Dato che ρ_s risulta simmetrico rispetto all'angolo azimutale ϕ, la sua espressione dipende solo da r ed è data da:

$$\rho_s = \frac{15\,r}{7 \cdot 10^{-2}} = 2,14 \cdot 10^2\, r \quad \left(\frac{C}{m^2}\right)$$

ds in coordinate polari è $ds = r\, dr\, d\phi$

$\uparrow$ elemento d'area

Angolo ϕ : $0,\ 2\pi$ (rad)

r : $0,\ 7 \times 10^{-2}$ (m)

$$Q = \int_S \rho_s\, ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{7\cdot 10^{-2}} (2,14 \cdot 10^2\, r)\, r\, dr\, d\phi =$$

$$= \left[\phi \Big|_0^{2\pi} \cdot \int_0^{7\cdot 10^{-2}} 2,14 \cdot 10^2\, r^2\, dr \right] =$$

$$= \left[2\pi \cdot 2,14 \cdot 10^2 \quad \frac{r^3}{3} \Big|_0^{7\cdot 10^{-2}} \right] =$$

$$= 2\pi \cdot 2,14 \cdot 10^2 \cdot \frac{(0,07)^3}{3} = 0,1537\ C$$

(4) Si calcoli la carica totale presente su un disco circolare definito da $r \leq a$ e $z=0$, con:

$\rho_s = \rho_{s0} \sin\phi \left(\frac{C}{m^2}\right)$ $\qquad \rho_{s0} =$ costante

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \rho_{s0} \sin\phi \; r \; dr \, d\phi =$$

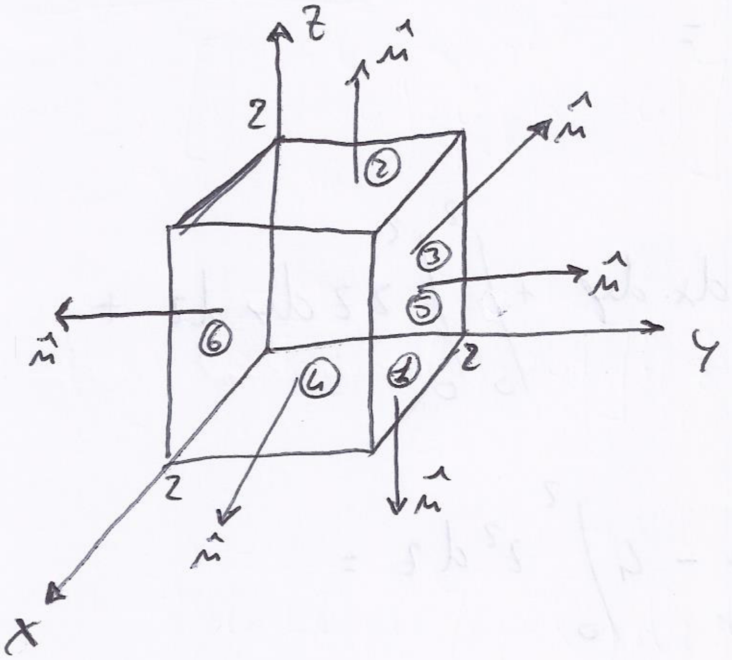
$$= \int_0^{2\pi} \sin\phi \, d\phi \int_0^{a} \rho_{s0} \, r \, dr =$$

$$= \left[-\cos(\phi)\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^{a} \right] \cdot \rho_{s0} =$$

$$= \left[\left(-\cos(2\pi) - (-\cos(0)) \right) \cdot \frac{a^2}{2} \right] \cdot \rho_{s0} =$$

$$= \left[(-1+1) \cdot \frac{a^2}{2} \right] \cdot \rho_{s0} = 0$$

③ Data $\underline{D} = \hat{x}\,xz - \hat{y}\,yz^2 - \hat{z}\,xy$ $\left(\frac{C}{m^2}\right)$ si determini la carica totale Q in un cubo di lato 2 m.



$$Q = \oint\!\!\!\oint_S \underline{D}\cdot\hat{n}\,ds = \int_0^2\!\!\int_0^2 \underline{D}\big|_{z=0}\cdot(-\hat{z})\,dx\,dy + \int_0^2\!\!\int_0^2 \underline{D}\big|_{z=2}\cdot(\hat{z})\,dx\,dy +$$

$$+ \int_0^2\!\!\int_0^2 \underline{D}\big|_{x=0}\cdot(-\hat{x})\,dz\,dy + \int_0^2\!\!\int_0^2 \underline{D}\big|_{x=2}\cdot(\hat{x})\,dz\,dy +$$

$$+ \int_0^2\!\!\int_0^2 \underline{D}\big|_{y=2}\cdot(+\hat{y})\,dx\,dz + \int_0^2\!\!\int_0^2 \underline{D}\big|_{y=0}\cdot(-\hat{y})\,dx\,dz =$$

$$= \int_0^2\!\!\int_0^2 -\hat{z}\,xy\cdot(-\hat{z})\,dx\,dy + \int_0^2\!\!\int_0^2 (\hat{x}\,2x - \hat{y}\,4y - \hat{z}\,xy)\cdot(\hat{z})\,dx\,dy +$$

$$+ \int_0^2\!\!\int_0^2 \cancelto{0}{(-\hat{y}\,yz^2)\cdot(-\hat{x})}\,dz\,dy + \int_0^2\!\!\int_0^2 (\hat{x}\,z2 - \hat{y}\,yz^2 - \hat{z}\,2y)\cdot(\hat{x})\,dz\,dy +$$

$$+\int_0^2\int_0^2 \left(\hat{x}\, xz - \hat{y}\, 2z^2 - \hat{z}\, 2x\right)\cdot\left(+\hat{y}\right)\, dx\, dz \; +$$

$$+\int_0^2\int_0^2 \cancelto{0}{\left(\hat{x}\, xz\right)\cdot\left(-\hat{y}\right)}\, dx\, dz =$$

$$=\int_0^2\int_0^2 xy\, dx\, dy + \int_0^2\int_0^2 (-xy)\, dx\, dy + \int_0^2\int_0^2 2z\, dy\, dz \; +$$

$$+\int_0^2\int_0^2 (-2z^2)\, dy\, dz = 4\int_0^2 z\, dz - 4\int_0^2 z^2\, dz =$$

$$= 4\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 - 4\left(\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 8 - \frac{32}{3} = -2{,}66\ C$$