Antonio Fuduli


# Esercizi
# di
# RICERCA OPERATIVA

Titolo | Esercizi di ricerca operativa
Autore | Antonio Fuduli
ISBN | 9788891179876
Seconda edizione digitale: 2017



Youcanprint Self-Publishing
Via Roma 73 - 73039 Tricase (LE)
info@youcanprint.it
www.youcanprint.it

4 aprile 2017

**Antonio Fuduli** è ricercatore presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università della Calabria. La sua attività di ricerca è prevalentemente nel campo dell'ottimizzazione non lineare, con particolare enfasi all'ottimizzazione non differenziabile e ai problemi di classificazione.

Ha pubblicato lavori su varie riviste scientifiche di carattere internazionale, fra cui *SIAM Journal on Optimization*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, *European Journal of Operational Research*, *Journal of Global Optimization*, *Computational Optimization and Applications* e *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*.

---

Il presente testo è una raccolta di tracce d'esame (Parte I) sottoposte agli studenti dei corsi di Laurea in Informatica (Università della Calabria), Ingegneria Gestionale, Ingegneria Informatica e Ingegneria Meccanica (Università del Salento) nell'ambito dell'insegnamento di "Ricerca Operativa".

Alcuni esercizi (quelli contrassegnati dal simbolo ★) sono svolti per intero, per altri (quelli contrassegnati dal simbolo ■) è riportata la soluzione in appendice (Parte II), mentre di altri ancora è riportata solo la traccia per dare l'opportunità agli studenti, e/o al docente, di risolverli interattivamente in aula durante le lezioni.

**Antonio Fuduli**

# Esercizi
# di
# RICERCA OPERATIVA

# Indice

# Parte I

# ESERCIZI

# Capitolo 1

# Formulazione di Problemi Decisionali

**Esercizio 1.1.** ★ Un risparmiatore vuole investire 50.000 euro nell'acquisto di un certo numero di quote relative a 8 fondi comuni di investimento. Nella seguente tabella, per ciascun fondo, sono riportati la tipologia, il costo di acquisto e il rendimento annuo atteso di una singola quota:

| Fondo | Tipologia | Costo (in euro) | Rendimento |
|---|---|---|---|
| A | obbligazionario | 4,5 | 7% |
| B | obbligazionario | 4 | 8% |
| C | obbligazionario | 2,5 | 6% |
| D | bilanciato | 3 | 6% |
| E | bilanciato | 4,5 | 9% |
| F | bilanciato | 5 | 9% |
| G | azionario | 6 | 10% |
| H | azionario | 5,5 | 12% |

Ad esempio, il fondo A è di tipo obbligazionario, una quota relativa al fondo A costa 4,5 euro e il rendimento annuo atteso di una quota del fondo A è pari al 7% del suo costo (cioè $0,07 \cdot 4,5 = 0,315$).

Formulare il problema come problema di ottimizzazione tenendo conto che:

- l'obiettivo del risparmiatore è quello di massimizzare il rendimento complessivo annuo atteso;
- almeno 15.000 euro devono essere investiti in fondi di investimento di tipo obbligazionario;
- almeno 20.000 euro devono essere investiti in fondi di tipo bilanciato;
- al massimo 5.000 euro possono essere investiti in fondi di tipo azionario.

**Risoluzione.** Per prima cosa definiamo le variabili decisionali, cioè le incognite del nostro problema. Generalmente l'individuazione delle variabili decisionali è strettamente connessa all'obiettivo che il decisore (in tal caso il risparmiatore) si pone.

Poichè si vuole massimizzare il rendimento complessivo annuo, in base ai dati disponibili (rendimento di una singola quota) tale rendimento si ottiene in funzione del numero di quote che il risparmiatore compra, in corrispondenza di ciascun fondo.

Quindi è naturale definire le variabili nel seguente modo: $x_i$ = numero di quote acquistate relativamente al fondo $i$ (con $i = A, \ldots, H$). A questo punto, la funzione obiettivo $z$ che definisce il rendimento complessivo annuo atteso è:

$$z = 0,07 \cdot 4,5x_A + 0,08 \cdot 4x_B + 0,06 \cdot 2,5x_C + \ldots + 0,12 \cdot 5,5x_H.$$

Per quanto riguarda i vincoli, il primo vincolo impone che il risparmiatore non possa investire più di 50.000 euro. Poichè l'investimento in un determinato fondo è dato dal costo di una singola quota moltiplicato il numero di quote acquistate, il primo vincolo è esprimibile nel seguente modo:

$$4,5x_A + 4x_B + 2,5x_C + \ldots, +5,5x_H \leq 50.000.$$

Per quanto riguarda il vincolo in base al quale il risparmiatore deve investire almeno 15.000 euro in fondi obbligazionari, poichè i fondi di tipo obbligazionario sono i fondi A, B e C, tale vincolo si scrive nel seguente modo:

$$4,5x_A + 4x_B + 2,5x_C \geq 15.000.$$

In maniera analoga, possiamo facilmente scrivere i vincoli sull'investimento in fondi bilanciati (almeno 20.000 euro) e in fondi azionari (al massimo 5.000 euro), rispettivamente nel seguente modo:

$$3x_D + 4,5x_E + 5x_F \geq 20.000$$

e

$$6x_G + 5,5x_H \leq 5.000.$$

Infine non bisogna dimenticare i vincoli di positività sulle variabili decisionali (che non avrebbero senso nel caso in cui assumessero valore strettamente negativo).

Facciamo notare invece che non c'è bisogno di aggiungere vincoli sull'interezza delle variabili. Infatti il numero di quote acquistabili non necessariamente deve essere un numero intero. In definitiva, il modello di ottimizzazione che otteniamo è:

$$\begin{cases} \max\limits_x z = & 0,07 \cdot 4,5x_A + 0,08 \cdot 4x_B + 0,06 \cdot 2,5x_C + \ldots + 0,12 \cdot 5,5x_H \\ & 4,5x_A + 4x_B + 2,5x_C + \ldots, +5,5x_H \leq 50.000 \\ & 4,5x_A + 4x_B + 2,5x_C \geq 15.000 \\ & 3x_D + 4,5x_E + 5x_F \geq 20.000 \\ & 6x_G + 5,5x_H \leq 5.000 \\ & x_A, x_B, x_C, \ldots, x_H \geq 0. \end{cases}$$

Infine è bene notare che spesso le formulazioni matematiche dei problemi decisionali non sono univoche. In questo caso ad esempio, indicando con $x'_i$ la somma (espressa in euro) di capitale investita nel fondo $i$ (con $i = A, \ldots, H$), il modello di ottimizzazione diventa:

$$\begin{cases} \max\limits_{x'} z = & 0,07x'_A + 0,08x'_B + 0,06x'_C + \ldots + 0,12x'_H \\ & x'_A + x'_B + x'_C + \ldots, +x'_H \leq 50.000 \\ & x'_A + x'_B + x'_C \geq 15.000 \\ & x'_D + x'_E + x'_F \geq 20.000 \\ & x'_G + x'_H \leq 5.000 \\ & x'_A, x'_B, x'_C, \ldots, x'_H \geq 0. \end{cases}$$

Si vede subito che le due formulazioni sono equivalenti: infatti, indicando con $c_i$ il costo di una singola quota di fondo $i$ (terza colonna della tabella), si ha: $x'_i = c_i x_i$ (con $i = A, \ldots, H$).

**Esercizio 1.2.** ★ Un istituto di ricerca deve decidere il numero di posti da mettere a concorso per l'assunzione di nuovi ricercatori di primo, secondo e terzo livello.

L'istituto prevede di poter spendere annualmente, per la retribuzione dei nuovi ricercatori, una quota massima pari a tre milioni di euro. Il costo annuo di retribuzione di un ricercatore di primo livello è pari a 40.000 euro, di un ricercatore di secondo livello è pari a 30.000 euro e di un ricercatore di terzo livello è pari a 25.000 euro. Per motivi legali, la spesa complessiva annuale da sostenere per assumere i nuovi ricercatori di secondo livello non può superare l'80% della spesa complessiva annuale sostenuta per assumere i nuovi ricercatori di primo livello; inoltre il numero di ricercatori di secondo livello da assumere deve essere almeno il doppio del numero dei nuovi ricercatori di terzo livello. Infine il bando di concorso puó essere emanato solo se, per ogni livello, vengono assunti almeno 6 ricercatori.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di massimizzare il numero complessivo di nuovi ricercatori da assumere.

**Risoluzione.** Per definire le variabili decisionali, facciamo riferimento alla funzione obiettivo: massimizzare il numero complessivo di ricercatori da assumere. Tale numero è dato dalla somma dei ricercatori assunti per ciascun livello. Quindi le variabili decisionali sono: $x_i$ = numero di ricercatori di livello $i$ da assumere (con $i = 1, 2, 3$). Di conseguenza la funzione obiettivo $z$ è:

$$z = x_1 + x_2 + x_3.$$

Passando ora ai vincoli, il primo vincolo richiede che, per la retribuzione dei nuovi ricercatori, si spenda annualmente non più di 3 milioni di euro. Quindi, tenendo conto che un ricercatore di primo livello costa all'istituto ogni anno 40.000 euro, un ricercatore di secondo livello costa 30.000 euro, mentre uno di terzo livello costa 25.000 euro, la somma complessiva annua spesa dall'istituto per la retribuzione dei nuovi ricercatori è pari a:

$$40.000x_1 + 30.000x_2 + 25.000x_3.$$

Quindi il primo vincolo è:

$$40.000x_1 + 30.000x_2 + 25.000x_3 \leq 3.000.000.$$

La scrittura del vincolo che lega la spesa annuale da sostenere per assumere i ricercatori di primo e secondo livello è esprimibile nel seguente modo:

$$30.000x_2 \leq 0,80 \cdot 40.000x_1.$$

I vincoli restanti sono semplici da scrivere e sono:

$$x_2 \geq 2x_3$$

e

$$x_i \geq 6 \quad i = 1,2,3.$$

Precisiamo che in tal caso non ha senso aggiungere i vincoli di positività sulle variabili, visto che essi sono già implicati dai vincoli che impongono che, per ogni livello, devono essere assunti almeno 6 ricercatori.

È importante invece precisare che le variabili decisionali debbano assumere valori interi. Quindi, semplificando alcuni vincoli (in cui si può dividere per 1.000), la formulazione finale è:

$$\begin{cases} \max\limits_{x} z = & x_1 + x_2 + x_3 \\ & 40x_1 + 30x_2 + 25x_3 \leq 3.000 \\ & 30x_2 \leq 0,80 \cdot 40x_1 \\ & x_2 \geq 2x_3 \\ & x_i \geq 6 \quad i = 1,2,3 \\ & x_i \quad \text{int} \quad i = 1,2,3 \end{cases}.$$

**Esercizio 1.3.** ★ Il Ministero della Sanità ha in progetto la costruzione di ospedali ortopedici specializzati, che nel raggio di 200 km siano in grado di servire le seguenti cittá: Latina, Lecce, Matera, Napoli, Potenza, Salerno e Roma.

Nel seguito, per ogni città, sono elencate quelle situate a una distanza inferiore ai 200 km:

- Latina: Latina, Napoli, Roma;
- Lecce: Lecce, Matera;
- Matera: Lecce, Matera, Potenza;
- Napoli: Latina, Napoli, Potenza, Salerno;
- Potenza: Matera, Napoli, Potenza, Salerno;
- Salerno: Napoli, Potenza, Salerno;
- Roma: Latina, Roma.

Ad esempio, se un ospedale venisse costruito a Napoli, esso sarebbe in grado di servire anche le città di Latina, Potenza e Salerno, che si trovano a una distanza da Napoli inferiore a 200 km.

Si vuole decidere in quale delle 7 città costruire gli ospedali, in maniera tale che ogni città abbia almeno un ospedale ad una distanza non superiore a 200 km e tenendo conto che in una stessa città non si può costruire più di un ospedale.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare il numero di ospedali da costruire.

**Risoluzione.** In questo problema decisionale, bisogna decidere dove costruire gli ospedali, scegliendo fra 7 possibili città. Di conseguenza, ci poniamo la seguente domanda. Nella città $i$ sarà costruito un ospedale? La risposta a questa domanda è di tipo binario: o sì o no!! In casi di questo tipo, quindi, le variabili decisionali sono di tipo binario (possono cioè assumere due soli valori: 0 e 1). Nel caso particolare di questo esercizio, esse sono definite nel modo seguente. Indichiamo con $x_i$ (con $i = 1, \ldots, 7$) la variabile decisionale che nel nostro modello assumerà valore 1 se nella città $i$ sarà costruito un ospedale e varrà 0 se nella città $i$ non verrà costruito alcun ospedale.

Per semplicità adottiamo la seguente convenzione: l'indice $i = 1$ corrisponde alla città di Latina, l'indice $i = 2$ corrisponde alla città di Lecce, l'indice $i = 3$ corrisponde alla città di Matera, l'indice $i = 4$ corrisponde alla città di Napoli, l'indice $i = 5$ corrisponde alla città di Potenza, l'indice $i = 6$ corrisponde alla città di Salerno e l'indice $i = 7$ corrisponde alla città di Roma.

Poichè vogliamo minimizzare il numero di ospedali da costruire, la funzione obiettivo è:

$$z = x_1 + x_2 + \ldots + x_7.$$

Infatti, poichè le variabili sono binarie, la funzione obiettivo ad esempio varrà 7 se in ognuna delle 7 città sarà costruito un ospedale, o varrà ad esempio 4 se si costruisce un ospedale in 4 città.

Per quanto riguarda i vincoli, bisogna garantire che ognuna delle 7 città sia servita almeno da un ospedale situato a non più di 200 km di distanza. Ad esempio, perchè un ospedale sia collocato a una distanza inferiore a 200 km rispetto a Latina, esso deve essere collocato o a Latina, o a Napoli o a Roma. Tale vincolo può essere espresso nel seguente modo:

$$x_1 + x_4 + x_7 \geq 1.$$

Il membro di sinistra del precedente vincolo indica il numero di ospedali che vengono costruiti nel raggio di 200 km da Latina.

Analogamente, i vincoli che garantiscono almeno un ospedale nel raggio di 200 km da ciascuna delle altre 6 città sono:

$x_2 + x_3 \geq 1$ (almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Lecce)
$x_2 + x_3 + x_5 \geq 1$ (almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Matera)
$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$ (almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Napoli)
$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$ (almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Potenza)
$x_4 + x_5 + x_6 \geq 1$ (almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Salerno)
$x_1 + x_7 \geq 1$ (almeno un ospedale a distanza inferiore a 200 km da Roma).

Quindi la formulazione finale del problema è:

$$\begin{cases} \min\limits_{x} z = & x_1 + x_2 + \ldots + x_7 \\ & x_1 + x_4 + x_7 \geq 1 \\ & x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_2 + x_3 + x_5 \geq 1 \\ & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ & x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \\ & x_1 + x_7 \geq 1 \\ & x_i \in \{0,1\} \quad i = 1, \ldots, 7 \end{cases}.$$

**Esercizio 1.4.** ★ Un'azienda produttrice di automobili ha a disposizione tre nuovi stabilimenti ($S_1$, $S_2$, $S_3$), il cui costo di attivazione è pari a 9.000, 7.000 e 8.000 euro, rispettivamente. Si deve decidere quali stabilimenti attivare, con l'obiettivo di soddisfare la domanda annuale di 4 punti di vendita ($P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$) pari a 150, 400, 200 e 300 automobili, rispettivamente.

Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari di trasporto (espressi in euro) dagli stabilimenti ai punti di vendita:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_1$ | 20 | 40 | 10 | 30 |
| $S_2$ | 30 | 60 | 50 | 40 |
| $S_3$ | 40 | 50 | 60 | 70 |

Si vuole minimizzare i costi complessivi di attivazione degli stabilimenti e di trasporto delle automobili nei punti di vendita, tenendo conto che la capacità produttiva annuale dei tre stabilimenti è pari a 700, 900 e 800 automobili, rispettivamente.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Risoluzione.** Tenendo conto della funzione obiettivo (minimizzazione dei costi complessivi di trasporto e dei costi complessivi di attivazione degli stabilimenti), per definire le variabili decisionali facciamo le seguenti considerazioni.

I costi di trasporto unitari (cioè quanto costa trasportare un'autovettura) costituiscono una quantità che lega singolarmente ogni stabilimento con ciascun punto di vendita. Quindi un certo numero di variabili decisionali coinvolge due indici (l'indice che indica lo stabilimento e l'indice che indica il punto di vendita). Di conseguenza indichiamo con $x_{ij}$ il numero di automobili che vengono trasportate dallo stabilimento $S_i$ al punto di vendita $P_j$ (con $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4$).

Dovendo invece tener conto dei costi complessivi di attivazione degli stabilimenti, bisogna individuare quali saranno gli stabilimenti da attivare. Quindi il secondo gruppo di variabili decisionali è di tipo binario. Indichiamo con $y_i$ (con $i = 1, 2, 3$) la variabile binaria che varrà 1 se lo stabilimento $S_i$ sarà attivato, mentre varrà 0 in caso contrario.

Possiamo quindi ora formulare la funzione obiettivo nel seguente modo:

$$z = 20x_{11} + 40x_{12} + 10x_{13} + \ldots + 60x_{33} + 70x_{34} + 9.000y_1 + 7.000y_2 + 8.000y_3.$$

Quanto ai vincoli, dobbiamo tener conto della capacità produttiva annuale di ogni singolo stabilimento. Ad esempio, lo stabilimento $S_1$ non può produrre più di 700 autovetture all'anno; tenendo conto che il numero di automobili, che dallo stabilimento $S_1$ (se attivato) vengono trasportate nei quattro punti di vendita, è pari a

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14},$$

il vincolo sulla capacità produttiva annuale dello stabilimento $S_1$ è:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 700.$$

In realtà tale vincolo non è del tutto corretto, perchè, nel caso in cui lo stabilimento $S_1$ non venisse attivato (cioè $y_1 = 0$), le variabili $x_{11}$,$x_{12}$,$x_{13}$ e $x_{14}$ dovrebbero assumere valore nullo (cioè ai 4 punti di vendita non arriva nessuna automobile dallo stabilimento $S_1$). Per tenere conto di questo, il precedente vincolo viene corretto nel seguente modo:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 700y_1.$$

Questo fa sì che, qualora lo stabilimento $S_1$ non venisse attivato (cioè $y_1 = 0$), allora si avrebbe:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 0,$$

e quindi, tenendo conto che le variabili $x_{ij}$ possono assumere (per il loro significato fisico) solo valori positivi o nulli , si avrebbe:

$$x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{14} = 0.$$

Analogamente, i vincoli sulle capacità produttive degli altri due stabilimenti ($S_2$ e $S_3$) sono rispettivamente:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 900y_2$$

e

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 800y_3.$$

Per quanto riguarda i vincoli di domanda dei singoli punti di vendita, basta tener conto che la quantità di autovetture che arriva a ciascun punto di vendita è dato dalla somma delle autovetture che, dagli stabilimenti attivati, arriva in quel punto di vendita. Pertanto i vincoli sui quattro punti di vendita ($P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$) sono rispettivamente:

$$\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 150 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 400 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 200 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 300. \end{array}$$

Quindi, tenendo conto anche dell'interezza delle variabili $x_{ij}$, la formulazione finale del problema è:

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y} z = & 20x_{11} + 40x_{12} + 10x_{13} + \ldots + 60x_{33} + 70x_{34} + 9.000y_1 + 7.000y_2 + 8.000y_3 \\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 700y_1 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 900y_2 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 800y_3 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 150 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 400 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 200 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 300 \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \\ & x_{ij} \quad \text{int} \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \\ & y_i \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3 \end{cases}.$$

**Esercizio 1.5.** ★ Una casa editrice deve effettuare il trasporto di libri da 3 depositi ($D_1$, $D_2$, $D_3$) a 4 librerie ($L_1$, $L_2$, $L_3$, $L_4$). Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari (espressi in euro) di trasporto da ciascun deposito a ciascuna libreria, le quantità di libri disponibili nei depositi e quelle richieste dalle singole librerie:

| | $L_1$ | $L_2$ | $L_3$ | $L_4$ | Disponibilità |
|---|---|---|---|---|---|
| $D_1$ | 0,5 | 0,8 | 1 | 1,5 | 50 |
| $D_2$ | 0,7 | 2 | 0,8 | 0,5 | 100 |
| $D_3$ | 1 | 0,5 | 1,5 | 0,6 | 40 |
| Richieste | 30 | 70 | 45 | 45 | |

Ad esempio, il deposito $D_1$ ha una disponibilità di 50 libri e la libreria $L_3$ ne richiede almeno 45; inoltre trasportare un libro da $D_1$ a $L_4$ costa 1,5 euro.

Poichè i costi di trasporto sono a carico delle librerie, l'obiettivo è quello di minimizzare il massimo fra i costi di trasporto sostenuti da ciascuna libreria e nel contempo soddisfare i vincoli di domanda e di offerta. Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Risoluzione.** Per l'individuazione delle variabili decisionali, partiamo dalla funzione obiettivo richiesta dal problema. Poichè i costi sostenuti da ciascuna libreria dipendono dai costi unitari, che a loro volta dipendono dal deposito da cui ciascun libro proviene, le variabili decisionali sono le seguenti: $x_{ij}$ = numero di libri trasportati dal deposito $D_i$ alla libreria $L_j$, con $i = 1,2,3$ e $j = 1,2,3,4$. Quindi, ad esempio, il costo complessivo di trasporto sostenuto dalla libreria $L_1$ è dato da:

$$0,5x_{11} + 0,7x_{21} + x_{31}.$$

Di conseguenza, la funzione obiettivo è il massimo di 4 quantità, ciascuna delle quali indica il costo di trasporto complessivo sostenuto da una singola libreria; essa è scrivibile nel seguente modo:

$$z = \max \left\{ \begin{array}{l} 0,5x_{11} + 0,7x_{21} + x_{31}; \\ 0,8x_{12} + 2x_{22} + 0,5x_{32}; \\ x_{13} + 0,8x_{23} + 1,5x_{33}; \\ 1,5x_{14} + 0,5x_{24} + 0,6x_{34} \end{array} \right\}.$$

I vincoli di domanda e offerta sono analoghi a quelli dell'esercizio 1.4. Essi sono:

$$\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 100 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 30 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 70 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 45 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 45 \end{array}.$$

Inoltre:

$$\begin{array}{l} x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \\ x_{ij} \quad \text{int} \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4. \end{array}$$

Di conseguenza la formulazione finale è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min\limits_{x} \quad \max \left\{ \begin{array}{l} 0,5x_{11} + 0,7x_{21} + x_{31}; \\ 0,8x_{12} + 2x_{22} + 0,5x_{32}; \\ x_{13} + 0,8x_{23} + 1,5x_{33}; \\ 1,5x_{14} + 0,5x_{24} + 0,6x_{34} \end{array} \right\} \\ \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50 \\ \qquad x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 100 \\ \qquad x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40 \\ \qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 30 \\ \qquad x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 70 \\ \qquad x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 45 \\ \qquad x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 45 \\ \qquad x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \\ \qquad x_{ij} \quad \text{int} \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \end{array} \right. .$$

Tale formulazione è caratterizzata da una funzione obiettivo non lineare (è il massimo puntuale di 4 funzioni lineari). Introducendo una variabile ausiliaria $v$, è possibile ottenere la seguente formulazione lineare equivalente alla precedente:

$$\begin{cases} \min\limits_{x,v} z = & v \\ & v \geq 0,5x_{11} + 0,7x_{21} + x_{31} \\ & v \geq 0,8x_{12} + 2x_{22} + 0,5x_{32} \\ & v \geq x_{13} + 0,8x_{23} + 1,5x_{33} \\ & v \geq 1,5x_{14} + 0,5x_{24} + 0,6x_{34} \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 100 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 30 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 70 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 45 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 45 \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \\ & x_{ij} \quad \text{int} \quad i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4 \end{cases}.$$

**Esercizio 1.6.** ★ Un'azienda manifatturiera che opera nel settore dell'informatica rifornisce di computer quattro negozi ($N_1$, $N_2$, $N_3$, $N_4$), a partire da due diversi magazzini ($M_1$, $M_2$). Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari di trasporto (espressi in euro) dai magazzini ai negozi, i prezzi unitari di vendita (espressi in euro) dei computer in ciascun negozio e la quantità di computer disponibili mensilmente in ciascun magazzino:

| | $N_1$ | $N_2$ | $N_3$ | $N_4$ | Disponibilità |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 8 | 5 | 3 | 6 | 200 |
| $M_2$ | 5 | 9 | 7 | 4 | 300 |
| Prezzo unitario | 800 | 600 | 900 | 700 | |

Ad esempio, trasportare un computer dal magazzino $M_1$ (la cui disponibilità mensile è pari a 200 computer) al negozio $N_3$ costa 3 euro. Nell'ipotesi che tutti i computer che arrivano mensilmente nei negozi vengono venduti e sapendo che i costi di trasporto sono a carico dei negozi, formulare il problema come problema di ottimizzazione con l'obiettivo di massimizzare il minimo fra i profitti mensili conseguiti dai quattro negozi.

**Risoluzione.** Come al solito, per l'individuazione delle variabili decisionali, partiamo dalla funzione obiettivo. Poichè il profitto ottenuto da ciascun negozio dipende dai prezzi unitari di vendita e dai costi unitari di trasporto, e poichè questi ultimi a loro volta dipendono dal magazzino da cui ciascun computer proviene, le variabili decisionali sono le seguenti: $x_{ij}$ = numero di computer trasportati dal magazzino $M_i$ al negozio $N_j$, con $i = 1,2$ e $j = 1,2,3,4$. Quindi, ad esempio, il profitto complessivo ottenuto dal negozio $N_1$ è dato da:

$$(800 - 8)x_{11} + (800 - 5)x_{21}.$$

Di conseguenza, la funzione obiettivo è il minimo di 4 quantità, ciascuna delle quali indica il profitto complessivo ottenuto da un singolo negozio; essa è scrivibile nel seguente modo:

$$z = \min \left\{ \begin{array}{c} (800-8)x_{11} + (800-5)x_{21}; \\ (600-5)x_{12} + (600-9)x_{22}, \\ (900-3)x_{13} + (900-7)x_{23}; \\ (700-6)x_{14} + (700-4)x_{24} \end{array} \right\}.$$

I vincoli riguardano solo le disponibilità di ciascun magazzino. Essi quindi possono essere scritti, rispettivamente, nel seguente modo:

$$\sum_{j=1}^{4} x_{1j} \leq 200$$

e

$$\sum_{j=1}^{4} x_{2j} \leq 300.$$

Quindi la formulazione finale è:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max\limits_{x} \quad \min \left\{ \begin{array}{c} (800-8)x_{11} + (800-5)x_{21}; \\ (600-5)x_{12} + (600-9)x_{22}; \\ (900-3)x_{13} + (900-7)x_{23}; \\ (700-6)x_{14} + (700-4)x_{24} \end{array} \right\}. \\ \qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{4} x_{1j} \leq 200 \\ \qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{4} x_{2j} \leq 300 \\ \qquad x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2 \quad j=1,2,3,4 \\ \qquad x_{ij} \text{ int} \quad i=1,2 \quad j=1,2,3,4 \end{array} \right. .$$

Poichè la funzione obiettivo non è lineare, il modello può essere linearizzato con l'aggiunta di una variabile ausiliaria $v$. La formulazione finale che si ottiene (equivalente alla precedente) è:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \max\limits_{x,v} & z = v \\ & v \leq (800-8)x_{11} + (800-5)x_{21} \\ & v \leq (600-5)x_{12} + (600-9)x_{22} \\ & v \leq (900-3)x_{13} + (900-7)x_{23} \\ & v \leq (700-6)x_{14} + (700-4)x_{24} \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{4} x_{1j} \leq 200 \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{4} x_{2j} \leq 300 \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2 \quad j=1,2,3,4 \\ & x_{ij} \text{ int} \quad i=1,2 \quad j=1,2,3,4 \end{array} \right. .$$

**Esercizio 1.7.** ■ Il Signor Mario Rossi deve decidere la composizione della sua dieta giornaliera (a base di pasta, carne, verdura e formaggio), tenendo conto che ogni giorno deve assumere almeno 70 g di proteine, almeno 50 g di grassi ed almeno 250 g di zuccheri. Nella seguente tabella, sono riportate le quantità (espresse in grammi) di proteine, grassi e zuccheri contenute in 100 g di alimento:

| | Proteine | Grassi | Zuccheri |
|---|---|---|---|
| Pasta | 9,9 | 1,2 | 75,3 |
| Carne | 20,8 | 1,1 | 0 |
| Verdura | 2 | 0,2 | 4 |
| Formaggio | 22 | 26 | 0 |

Ad esempio un etto di pasta contiene 9,9 g di proteine, 1,2 g di grassi e 75,3 g di zuccheri. Sapendo che un chilo di pasta costa 1 euro, un chilo di carne 9 euro, un chilo di verdura 0,80 euro e un chilo di formaggio 12 euro, l'obiettivo è quello di minimizzare la spesa giornaliera di acquisto degli alimenti. Formulare il problema come problema di ottimizzazione, tenendo conto che al Signor Rossi non piace molto la verdura e che quindi è disposto a mangiarne ogni giorno non più di mezzo chilo.

**Esercizio 1.8.** ■ Un'azienda ospedaliera deve riorganizzare i turni del personale paramedico. Ogni infermiere, indipendentemente dalla collocazione all'interno della settimana, lavora 5 giorni consecutivi e poi ha diritto a due giorni di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza del seguente numero minimo di infermieri:

| | Lunedì | Martedì | Mercoledì | Giovedì | Venerdì | Sabato | Domenica |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Numero minimo | 28 | 18 | 20 | 26 | 22 | 13 | 13 |

Ciascun infermiere viene retribuito in base al giorno della settimana in cui lavora. In particolare, il costo che l'ospedale sostiene per retribuire un infermiere è di 50 euro al giorno (per i turni del lunedì, martedì, mercoledì, giovedì e venerdì), di 75 euro al giorno per i turni di sabato e di 85 euro al giorno per i turni di domenica. Ad esempio, un infermiere il cui turno comincia il giovedì, per i suoi 5 giorni lavorativi (dal giovedì al lunedì) riceve una retribuzione pari a euro $310 = 50 \cdot 3 + 75 + 85$.

Obiettivo dell'azienda ospedaliera è quello di minimizzare i costi complessivi settimanali di retribuzione degli infermieri.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Esercizio 1.9.** ■ Un'azienda di abbigliamento deve decidere come utilizzare mensilmente tre diversi impianti (1, 2 e 3), ciascuno dei quali è in grado di produrre giacche e pantaloni. Ogni impianto ha un proprio costo di setup (espresso in euro) e una propria capacità produttiva mensile, secondo le seguenti tabelle:

| Impianto | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Giacche | 500 | 400 | 350 |
| Pantaloni | 450 | 240 | 300 |

| Impianto | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Giacche | 3.000 | 4.000 | 5.000 |
| Pantaloni | 5.000 | 2.000 | 3.000 |

Ad esempio, l'impianto 2, se utilizzato per produrre pantaloni, comporta un costo di setup pari a 240 euro e produce in un mese 2 mila paia di pantaloni. O anche, se per produrre pantaloni si utilizza l'impianto 3, il costo di setup da sostenere è pari a 300 euro, a fronte di una produzione mensile di 3 mila paia di pantaloni.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi di setup e di soddisfare la domanda mensile di giacche e pantaloni, pari a 6 mila e 7 mila unità rispettivamente. Si tenga presente inoltre che una stessa tipologia di prodotto può essere ottenuta contemporaneamente da più di un impianto e che uno stesso impianto può essere utilizzato per produrre sia giacche che pantaloni. Inoltre le capacità produttive di ciascun impianto sono indipendenti dal numero di tipologie di prodotti, per i quali esso viene utilizzato.

**Esercizio 1.10.** ■ Un istituto bancario ha a disposizione 9 nuove filiali dislocate nelle province di Catanzaro, Cosenza, Crotone, Reggio Calabria e Vibo Valentia. Nella seguente tabella, per ogni filiale sono riportati l'allocazione, il costo di attivazione (in migliaia di euro) e una stima del numero di nuovi potenziali clienti che la filiale è in grado di acquisire:

| Filiale | A | B | C | D | E | F | G | H | I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Allocazione | RC | CS | RC | KR | CZ | VV | CZ | VV | RC |
| Costo di attivazione | 50 | 40 | 30 | 25 | 40 | 50 | 60 | 40 | 30 |
| Nuovi potenziali clienti | 300 | 100 | 250 | 200 | 400 | 120 | 100 | 100 | 400 |

Ad esempio, la filiale C è situata in provincia di Reggio Calabria, ha un costo di attivazione pari a 30.000 euro e si stima che possa acquisire 250 nuovi clienti.

Si vuole decidere quali filiali attivare, con l'obiettivo di massimizzare il numero di potenziali nuovi clienti che è possibile acquisire aprendo i nuovi sportelli.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, tenendo conto che

- il budget complessivo messo a disposizione dalla direzione centrale per questa operazione è pari a 200.000 euro;
- almeno due nuove filiali devono essere attivate in provincia di Reggio Calabria;
- almeno una nuova filiale deve essere attivata in provincia di Catanzaro;
- al massimo due nuove filiali possono essere attivate complessivamente fra le province di Cosenza e Vibo Valentia.

**Esercizio 1.11.** ■ Un'azienda automobilistica ha in programma il restyling di un'autovettura; a tale scopo deve provvedere al riattrezzaggio di almeno tre stabilimenti fra sette (A, B, C, D, E, F, G). Ogni stabilimento è caratterizzato da una capacità produttiva annuale e da un tempo di riattrezzaggio (espresso in giorni), secondo la seguente tabella:

| Stabilimento | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tempo di riattrezzaggio | 30 | 40 | 25 | 38 | 29 | 50 | 20 |
| Capacità produttiva annuale | 4.000 | 7.000 | 1.000 | 5.000 | 6.000 | 2.000 | 3.500 |

Ad esempio, lo stabilimento D, dopo del riattrezzaggio che comporta la sua chiusura per 38 giorni, sarà in grado di produrre ogni anno 5.000 autovetture.

Poichè il riattrezzaggio comporta la sospensione (e quindi la mancata retribuzione) degli operai dal lavoro, l'obiettivo dell'azienda è quello di scegliere gli stabilimenti da utilizzare, minimizzando i tempi complessivi di riattrezzaggio e tenendo conto che ogni anno si vogliono produrre almeno 10.000 autovetture. Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Esercizio 1.12.** ■ Un'azienda agricola deve determinare quanti ettari di terreno devono essere dedicati alla produzione di lattuga e pomodori. Si è stimato che, coltivando un ettaro di terreno, si possono produrre annualmente 20 quintali di lattuga e 30 quintali di pomodori. Inoltre la coltivazione di un ettaro di terreno per la produzione di lattuga richiede 18 ore settimanali di lavoro, mentre per la produzione di pomodori son richieste 24 ore settimanali. Per motivi di marketing l'azienda deve produrre annualmente almeno 45 quintali di lattuga e 50 quintali di pomodori. Sapendo che un quintale di lattuga viene venduto a 100 euro e un quintale di pomodori viene venduto a un prezzo di 150 euro, e sapendo che sono disponibili al massimo 100 ore settimanali per la coltivazione di tutto il terreno, formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di massimizzare il ricavo complessivo annuale.

**Esercizio 1.13.** ■ Un'azienda produce tre modelli differenti di cucine: A, B e C. I costi unitari giornalieri di produzione sono di 1.500, 2.500 e 2.000 euro, rispettivamente per i modelli A, B e C; i prezzi unitari di vendita sono pari rispettivamente a 4.000, 7.500 e 5.000 euro. Inoltre ogni giorno l'azienda sostiene dei costi fissi (indipendenti cioè dalla produzione) pari a 150 euro per le spese telefoniche e 125 euro relative alle spese del consumo di energia elettrica. Il legno, utilizzato sotto forma di tavole, è disponibile per la produzione giornaliera delle cucine in una quantità massima pari a 800 $m^2$. La produzione di una cucina di tipo A necessita di 24 $m^2$ di legno, una cucina di tipo B di 27 $m^2$ e una cucina di tipo C di 23 $m^2$ di legno. Inoltre, per esigenze di mercato, l'azienda deve produrre giornalmente almeno 4 cucine di tipo A, 5 cucine di tipo B e 6 cucine di tipo C. La produzione delle cucine avviene passando attraverso tre reparti (taglio, verniciatura, montaggio), secondo la seguente tabella:

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Taglio | 20 min | 30 min | 25 min |
| Verniciatura | 10 min | 15 min | 10 min |
| Montaggio | 8 min | 12 min | 15 min |

Ad esempio, per ottenere una cucina di tipo A, il reparto taglio deve lavorare per 20 minuti, il reparto verniciatura per 10 minuti e il reparto montaggio per 8 minuti. Ogni giorno il reparto taglio può lavorare al massimo per 20 ore, il reparto verniciatura al massimo per 18 ore e il reparto montaggio al massimo per 22 ore. Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di massimizzare il profitto giornaliero complessivo.

**Esercizio 1.14.** Un'azienda manifatturiera, nel rivedere il proprio organico, deve assegnare 5 operai ($O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$, $O_5$) a quattro diversi reparti ($R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$).

Nella seguente tabella sono riportati (in euro) i costi mensili di retribuzione dei 5 operai, in funzione del reparto a cui potrebbero essere assegnati:

| | $R_1$ | $R_2$ | $R_3$ | $R_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $O_1$ | 1.200 | 1.100 | 1.050 | 1.300 |
| $O_2$ | 1.500 | 1.000 | 1.100 | 1.400 |
| $O_3$ | 1.000 | 1.600 | 1.100 | 1.150 |
| $O_4$ | 950 | 1.300 | 1.250 | 800 |
| $O_5$ | 1.100 | 900 | 1.400 | 1.300 |

Ad esempio se l'operaio $O_1$ venisse assegnato al reparto $R_3$, il suo stipendio mensile sarebbe di 1.050 euro.

Si vuole decidere come assegnare gli operai ai reparti, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi mensili di retribuzione e tenendo conto dei seguenti vincoli:

- ogni operaio deve essere assegnato esattamente ad un solo reparto;
- l'operaio $O_2$ può essere assegnato solo ai reparti $R_1$ o $R_4$;
- ai reparti $R_1$, $R_2$ ed $R_3$ si deve assegnare esattamente un solo operaio, mentre al reparto $R_4$ si devono assegnare esattamente due operai.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Esercizio 1.15.** ■ Una ditta informatica deve organizzare il trasporto di computer da 4 magazzini ($M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$) a 4 punti di vendita ($P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$). Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari (espressi in euro) di trasporto da ciascun magazzino a ciascun punto di vendita, le quantità di computer disponibili nei magazzini e quelle richieste dai 4 punti di vendita:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | Offerta |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 9 | 10 | 8 | 6 | 200 |
| $M_2$ | 7 | 3 | 4 | 7 | 100 |
| $M_3$ | 10 | 5 | 9 | 4 | 140 |
| $M_4$ | 6 | 5 | 7 | 12 | 260 |
| Domanda | 120 | 170 | 190 | 200 | |

Ad esempio, il magazzino $M_1$ ha una disponibilità di 200 computer e il punto di vendita $P_3$ ne richiede almeno 190; inoltre trasportare un computer da $M_1$ a $P_3$ costa 8 euro.

Poichè i costi di trasporto sono a carico dei punti di vendita, l'obiettivo è quello di minimizzare il massimo fra i costi di trasporto sostenuti da ciascun punto di vendita e nel contempo soddisfare i vincoli di domanda e di offerta. Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Esercizio 1.16.** ■ Il Signor Bianchi ha un capitale di 80 mila euro da investire in "fondi comuni di investimento". Nella seguente tabella, per ogni tipologia di fondi (obbligazionari, bilanciati, azionari), è riportato il rendimento annuo atteso e la quantità massima che è possibile investire:

| Investimento | Rendimento annuo atteso (%) | Massimo investimento consentito (migliaia di euro) |
|---|---|---|
| Obbligazionari | 2 | 30 |
| Bilanciati | 5 | 30 |
| Azionari | 12 | 20 |

Ad esempio, è consentito un investimento massimo in fondi azionari di 20 mila euro con un rendimento annuo atteso pari al 12% della corrispondente somma investita.

Il Signor Bianchi vuole investire almeno il 50% del capitale in fondi complessivamente obbligazionari e bilanciati. Inoltre l'eventuale eccedenza di liquidità può essere investita in buoni ordinari del tesoro con un rendimento annuo stimato al 4%.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, tenendo conto che l'obiettivo del Signor Bianchi è la massimizzazione del rendimento complessivo annuo atteso.

**Esercizio 1.17.** Un prodotto finito è dato dall'assemblaggio di 3 componenti. Ognuno di questi 3 componenti può essere ottenuto da 4 diverse macchine (A, B, C, D), i cui tempi unitari di lavorazione (espressi in minuti) dipendono dal tipo di componente prodotto, secondo la seguente tabella:

| | Macch.A | Macch.B | Macch.C | Macch.D |
|---|---|---|---|---|
| Compon.1 | 20 | 15 | 12 | 10 |
| Compon.2 | 30 | 7 | 25 | 15 |
| Compon.3 | 22 | 14 | 21 | 16 |

Ad esempio la macchina A impiega 20 minuti per produrre un componente di tipo 1, mentre la macchina B impiega 14 minuti per produrre un componente di tipo 3.

Per motivi tecnici, la macchina A può lavorare al massimo 18 ore al giorno, la macchina B al massimo 20 ore al giorno, la macchina C al massimo 16 ore al giorno e la macchina D al massimo 19 ore al giorno.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di massimizzare il numero di prodotti finiti ottenibili ogni giorno e nell'ipotesi di assenza di tempi di riattrezzaggio sulle macchine. Si tenga conto che gli eventuali componenti prodotti giornalmente in eccesso non vengono usati per l'assemblaggio, ma vengono rivenduti all'esterno.

**Suggerimento.** Il numero di prodotti finiti ottenibile giornalmente è pari al minimo numero fra i 3 tipi di componenti prodotti ogni giorno.

**Esercizio 1.18.** ■ Un'azienda produce, a partire da tre componenti ($c_1$, $c_2$, $c_3$), tre tipi di olio per motori: Super, Premium, Extra. L'azienda vuole determinare il mix ottimale dei tre componenti necessari per la produzione giornaliera dei tre tipi di olio, con l'obiettivo di massimizzare il profitto complessivo giornaliero. Nella seguente tabella, per ciascun componente, sono riportati il costo (in euro) per barile e la quantità massima di barili disponibili ogni giorno:

| Componente | Costo | Quantità massima giornaliera |
|---|---|---|
| $c_1$ | 11 | 10 |
| $c_2$ | 9 | 13 |
| $c_3$ | 10 | 15 |

Ad esempio, il componente $c_2$ è disponibile ogni giorno in una quantità massima pari a 13 barili e ogni barile di componente $c_2$ costa 9 euro.

Per assicurare una giusta miscelazione, ciascun tipo di olio deve soddisfare le seguenti specifiche. L'olio Super deve essere costituito da almeno il 50% di componente $c_1$ e da non più del 30% di componente $c_2$, l'olio Premium da almeno il 40% di componente $c_2$ e da non più del 25% di componente $c_3$, l'olio Extra da almeno il 60% di componente $c_3$ e da non più del 10% di componente $c_1$.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, sapendo che il prezzo di vendita di un barile di olio (Super, Premium, Extra) è pari a 25, 15 e 20 euro, rispettivamente.

**Esercizio 1.19.** ■ Un'azienda produttrice di automobili deve produrre una nuova autovettura che comprende quattro modelli (berlina 3 porte, berlina 5 porte, station-wagon e monovolume), utilizzando due nuovi stabilimenti, da scegliere fra quattro possibilità (A, B, C e D). In particolare, negli stabilimenti A e B si possono produrre solo macchine berline 3 e 5 porte, mentre negli stabilimenti C e D si possono produrre solo vetture station-wagon e monovolume. Nella seguente tabella, per ogni nuovo possibile stabilimento sono riportati la capacità produttiva mensile complessiva e il costo di attivazione (espresso in euro):

| Stabilimento | Capacità produttiva | Costo di attivazione |
|---|---|---|
| A | 300 | 250.000 |
| B | 220 | 200.000 |
| C | 320 | 300.000 |
| D | 200 | 230.000 |

Ad esempio, lo stabilimento A può produrre complessivamente al massimo 300 autovetture al mese ed ha un costo di attivazione pari a 250 mila euro. Per l'attivazione dei due nuovi stabilimenti, l'azienda può spendere al massimo 500 mila euro. Il costo unitario di produzione delle automobili e il loro prezzo di vendita unitario (entrambi espressi in euro) sono riportati nella seguente tabella:

| Modello | Costo unitario | Prezzo di vendita |
|---|---|---|
| Berlina 3 porte | 11.000 | 14.000 |
| Berlina 5 porte | 12.000 | 16.000 |
| Station-wagon | 14.000 | 18.000 |
| Monovolume | 13.000 | 17.000 |

Ad esempio, per produrre una monovolume l'azienda deve spendere 13.000 euro, mentre il prezzo di vendita di una station-wagon è di 18.000 euro. Infine, per motivi di marketing, si devono produrre mensilmente almeno 50 autovetture per ciascun modello. Si deve decidere quali stabilimenti attivare (due in tutto: uno da scegliere fra A e B, e uno da scegliere fra C e D) e quante autovetture produrre mensilmente per ciascun modello, con l'obiettivo di massimizzare il profitto complessivo mensile derivante dalla vendita delle automobili. Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Esercizio 1.20.** ■ In vista delle prossime elezioni, la Regione Calabria deve assegnare 5 comuni (Pizzo, Rende, Gioia Tauro, Amantea, Crotone) a 4 circoscrizioni elettorali ($C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$). In base alle posizioni geografiche dei 5 comuni e ad altri fattori tecnico-organizzativi, si sono stimati i seguenti i costi di assegnamento, espressi in euro:

| | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Pizzo | 7.200 | 5.000 | 3.050 | 8.300 |
| Rende | 4.000 | 7.100 | 5.100 | 6.400 |
| Gioia Tauro | 8.100 | 9.050 | 9.000 | 7.150 |
| Amantea | 8.850 | 5.300 | 3.250 | 4.800 |
| Crotone | 9.000 | 5.500 | 10.000 | 5.200 |

Ad esempio, assegnare il comune di Pizzo alla circoscrizione $C_4$ comporterebbe un costo per la Regione pari a 8.300 euro.

Si vuole decidere come assegnare i 5 comuni alle 4 circoscrizioni, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi di assegnamento e tenendo conto dei seguenti vincoli:

- ogni comune deve essere assegnato esattamente ad una sola circoscrizione;
- il comune di Crotone può essere assegnato solo alle circoscrizioni $C_1$ o $C_3$;
- a ciascuna delle circoscrizioni $C_1$, $C_3$ e $C_4$ si deve assegnare esattamente un solo comune, mentre alla circoscrizione $C_2$ si devono assegnare esattamente due comuni.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Esercizio 1.21.** Un'azienda produttrice di automobili si prepara al lancio sul mercato di una nuova autovettura, che sarà venduta in tre versioni (berlina, monovolume e station-wagon). Per la produzione del veicolo, l'azienda ha a disposizione tre nuovi stabilimenti (A, B e C) la cui capacità produttiva mensile (riferita esclusivamente alla produzione della nuova autovettura) è pari a 1.200, 700 e 800 autovetture, rispettivamente. Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari di produzione, espressi in euro:

| | Stabilimento A | Stabilimento B | Stabilimento C |
|---|---|---|---|
| Berlina | 7.000 | 8.000 | 10.000 |
| Monovolume | 9.000 | 8.500 | 11.000 |
| Station-wagon | 10.500 | 12.000 | 9.500 |

Ad esempio, produrre una monovolume nello stabilimento B costa 8.500 euro.

Da un'indagine di mercato, si prevede che la quantità di nuove autovetture richieste mensilmente sia pari a 600 berline, 700 monovolume e 1.100 station-wagon.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione con l'obiettivo di minimizzare il massimo fra i costi di produzione sostenuti mensilmente dai tre stabilimenti.

**Esercizio 1.22.** ■ Una ditta di catering deve rifornire quotidianamente $n$ mense scolastiche; la mensa $i$ richiede $w_i$ vassoi-pasto al giorno, $i = 1, \ldots, n$, e $d_{ij}$ denota la distanza che intercorre tra le mense $i$ e $j$, per ogni coppia $(i, j)$.

La ditta di catering ha a disposizione $N$ furgoni per predisporre le consegne; ciascun furgone ha una capacitá pari a $W$ (in numero di vassoi-pasto). Per rendere celere la distribuzione, la ditta vuole assegnare ad ogni furgone utilizzato un sottoinsieme di mense da rifornire tale che la distanza tra ogni coppia di mense (servite dallo stesso furgone) non superi una soglia prefissata $D$.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare il numero di furgoni da utilizzare.

**Esercizio 1.23.** ■ La società che gestisce l'aeroporto di Lamezia Terme deve assegnare 4 diversi equipaggi ($E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$) a 4 diversi voli giornalieri di linea (in partenza da Lamezia Terme), le cui destinazioni sono Roma, Milano, Venezia e Palermo, rispettivamente. Ad ogni assegnamento equipaggio-volo è associato un costo (espresso in euro/giorno), determinato in funzione dell'anzianità di servizio di ciascun membro dell'equipaggio e della città di destinazione, secondo la seguente tabella:

| | ROMA | MI | VE | PA |
|---|---|---|---|---|
| $E_1$ | 1.500 | 1.700 | 2.000 | 1.900 |
| $E_2$ | 1.300 | 1.000 | 1.100 | 1.800 |
| $E_3$ | 1.000 | 1.600 | 1.100 | 1.500 |
| $E_4$ | 1.100 | 1.700 | 1.400 | 1.300 |

Ad esempio, assegnare l'equipaggio $E_2$ al volo Lamezia-Palermo, costerebbe alla società ogni giorno 1.800 euro, mentre assegnare l'equipaggio $E_3$ al volo Lamezia-Milano costerebbe giornalmente 1.600 euro.

Si vuole decidere come assegnare gli equipaggi ai voli tenendo conto che ogni equipaggio deve essere assegnato esattamente a un solo volo e a ogni volo si deve assegnare esattamente un solo equipaggio.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare la spesa complessiva giornaliera derivante dall'assegnamento degli equipaggi ai voli.

**Esercizio 1.24.** Una banca vuole incentivare la mobilità dei suoi dipendenti fra le filiali di Reggio Calabria, Cosenza, Catanzaro e Vibo Valentia. Ogni dipendente che si trasferisce da una sede all'altra riceve per il primo anno in busta paga una cifra aggiuntiva mensile in funzione delle città di provenienza e di destinazione, secondo la seguente tabella (i valori sono espressi in euro):

| | RC | CS | CZ | VV |
|---|---|---|---|---|
| RC | 0 | 150 | 400 | 300 |
| CS | 150 | 0 | 250 | 200 |
| CZ | 400 | 250 | 0 | 200 |
| VV | 300 | 200 | 200 | 0 |

Ad esempio, se un impiegato si trasferisce da Catanzaro a Cosenza (o da Cosenza a Catanzaro), riceve per il primo anno in busta paga ogni mese 250 euro in più.

Per quest'operazione la banca è disposta a spendere in totale al massimo 10.000 euro al mese, da distribuire nel corso del primo anno fra i dipendenti che accettano di trasferirsi. Si vuole decidere quanti dipendenti poter trasferire da una città a un'altra, con l'obiettivo di massimizzare il minimo numero di trasferimenti complessivi nelle 4 città e tenendo conto che si vogliono avere almeno 5 trasferimenti da ciascuna città.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Esercizio 1.25.** Un'azienda possiede due centri di distribuzione e tre punti di vendita dislocati sul territorio. Di un prodotto sono disponibili al più 250 unità presso il primo centro di distribuzione e al più 400 presso il secondo.

Alla direzione centrale risulta una richiesta di rifornimento dai tre punti di vendita pari ad almeno 120, 270, 130 unità rispettivamente. Presso tali punti di vendita, ciascuna unità di prodotto viene venduta a 7, 8.50 e 8 euro, rispettivamente.

I costi unitari di trasporto (espressi in euro), legati alla distanza tra i centri di distribuzione e i punti di vendita, sono così riassumibili:

| | Punto di vendita 1 | Punto di vendita 2 | Punto di vendita 3 |
|---|---|---|---|
| Centro di distrib. 1 | 2 | 4 | 1 |
| Centro di distrib. 2 | 3 | 6 | 5 |

L'obiettivo è massimizzare il profitto ipotizzando che sia possibile vendere tutto il quantitativo di prodotto disponibile presso i punti di vendita. Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Esercizio 1.26.** Una fabbrica produce lamiere di zinco in fogli di dimensione pari a 10 metri di lunghezza e un metro di larghezza, i quali sono tagliati per produrre fogli più piccoli, della larghezza sempre di un metro, ma di lunghezza variabile per poter soddisfare i seguenti ordinativi nel corso del mese:

| Lunghezza (m) | Quantitativo richiesto mensilmente |
|---|---|
| 3 | 23 |
| 2,5 | 34 |
| 2 | 28 |
| 4 | 20 |
| 1,5 | 35 |

La macchina che effettua i tagli dei fogli può funzionare secondo 5 modalità differenti in base alle quali si ottengono da un unico foglio le seguenti parti:

| Lunghezza | Taglio 1 | Taglio 2 | Taglio 3 | Taglio 4 | Taglio 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2,5 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| 1,5 | 1 | 2 | 1 | 0 | 2 |

Ad esempio, con la terza modalità di taglio si ottengono due pezzi da 4 metri e uno da 1,5 metri, con uno sfrido di 0,5 metri.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare il numero complessivo di fogli da utilizzare e, nel contempo, soddisfare gli ordinativi mensili.

**Esercizio 1.27.** Un'azienda agricola deve organizzare giornalmente il trasporto di frutta (kiwi, ananas, banane, cocco) dal magazzino al proprio punto di vendita, tramite un furgone la cui capienza massima di trasporto è pari a 8 quintali. La frutta è confezionata in delle cassette, il cui peso unitario è riportato nella seguente tabella:

| Ananas | Kiwi | Banane | Cocco |
|---|---|---|---|
| 10 kg | 11 kg | 12 kg | 15 kg |

Obiettivo dell'azienda è quello di massimizzare il profitto giornaliero complessivo derivante dalla vendita (in cassette) della frutta trasportata al punto di vendita. Nella seguente tabella sono riportati i prezzi di vendita (riferiti a un kg di frutta) e i costi unitari di trasporto (riferiti cioè ad una cassetta di frutta):

| | Ananas | Kiwi | Banane | Cocco |
|---|---|---|---|---|
| Prezzo di vendita (euro/kg) | 1 | 1,5 | 0,5 | 2,5 |
| Costo di trasporto (euro/cassetta) | 0,25 | 0,35 | 0,15 | 0,25 |

Ad esempio, trasportare una cassetta di ananas costa 25 centesimi di euro, mentre il prezzo di vendita di un chilo di banane è pari a 50 centesimi di euro. Formulare il problema come problema di ottimizzazione, tenendo conto che, oltre ai costi di trasporto, sulla determinazione del profitto giornaliero incide anche un costo fisso di gestione giornaliero pari a 25 euro.

**Esercizio 1.28.** Un'industria chimica produce tre tipi di composti (A, B e C) utilizzando giornalmente due impianti di produzione. Nel primo impianto, in un'ora di lavorazione (il cui costo è di 25 euro), si producono 3 kg di composto chimico A, 2 Kg di composto chimico B e 3 kg di composto chimico C. Nel secondo impianto, un'ora di lavorazione ha un costo pari a 35 euro e si producono ogni ora 4 kg di composto chimico A, 4 Kg di composto chimico B e 5 kg di composto chimico C. Dei tre composti chimici è richiesta una produzione giornaliera pari ad almeno 90, 120 e 100 kg rispettivamente. Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi giornalieri di lavorazione.

**Suggerimento.** Variabili decisionali: $x_i$ = ore di lavorazione giornaliere dell'impianto $i$ $(i = 1, 2)$.

**Esercizio 1.29.** Un'azienda leader nel campo dell'elettronica deve organizzare una campagna pubblicitaria per il lancio di un nuovo cellulare. La campagna pubblicitaria è basata sull'uso della TV, della radio e di riviste settimanali: in particolare, trasmettere uno spot pubblicitario in TV nel primo pomeriggio costa 800 euro, trasmettere uno spot pubblicitario in TV in prima serata costa 1.100 euro, trasmettere uno spot pubblicitario alla radio costa all'azienda 300 euro, mentre pubblicare una pagina di pubblicità su una qualsiasi rivista settimanale costa all'azienda 500 euro.

Nella seguente tabella sono riportate le stime del numero di potenziali acquirenti (espressi in migliaia e suddivisi per fascia di età, a partire da 15 anni) raggiungibili da ciascun tipo di messaggio pubblicitario:

| | 15-17 anni | 18-25 anni | 26-40 anni | 41-60 anni | $> 60$ anni |
|---|---|---|---|---|---|
| TV pomeriggio | 200 | 150 | 100 | 120 | 180 |
| TV prima serata | 250 | 140 | 130 | 300 | 350 |
| Radio | 100 | 120 | 120 | 140 | 170 |
| Rivista | 80 | 100 | 110 | 180 | 200 |

Ad esempio, se andasse in onda uno spot pubblicitario in TV nel pomeriggio, si stima che esso sarebbe visto da circa 150.000 persone di età compresa fra i 18 e i 25 anni, mentre un messaggio pubblicitario su una pagina di rivista settimanale raggiungerebbe circa 200.000 persone di età superiore a 60 anni.

L'azienda deve decidere come organizzare la campagna pubblicitaria, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi di pubblicità e tenendo conto dei seguenti vincoli:

- il messaggio pubblicitario deve arrivare, per ciascuna fascia di età, ad almeno due milioni di potenziali acquirenti;
- la quantità di spot trasmessi alla radio non deve superare il 50% degli spot trasmessi in TV;
- la spesa complessiva sostenuta per la pubblicità su riviste non deve superare il 50% della spesa complessiva sostenuta per trasmettere gli spot in TV.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Esercizio 1.30.** Al Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università della Calabria (corso di laurea in Informatica) si vuole organizzare l'orario settimanale relativamente a quattro diversi corsi (Ricerca Operativa, Architettura degli Elaboratori, Programmazione a Oggetti e Matematica per l'Analisi dei dati). Le ore di lezione settimanali da svolgere possono essere distribuite su 6 giorni (dal lunedì al sabato); in particolare, da lunedì a venerdì si possono tenere ogni giorno al massimo 9 ore di lezione, mentre il sabato al massimo 4 ore di lezione. Le ore da svolgere ogni settimana per ciascun corso (Ricerca Operativa, Architettura degli Elaboratori, Programmazione a Oggetti e Matematica per l'Analisi dei dati) sono rispettivamente 11, 6, 10 e 8.

Volendo determinare quante ore di ciascun corso fare al giorno, formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare il numero di giorni settimanali in cui si fa lezione.

Poichè per motivi didattici si vuole fare in modo di non avere molte ore dello stesso corso nello stesso giorno, come cambia la formulazione del problema se, oltre a minimizzare il numero di giorni di lezione, si vuole nel contempo minimizzare il massimo numero di ore giornaliere svolte in corrispondenza di ciascun corso?

**Esercizio 1.31.** In una centrale di polizia si deve provvedere alla riorganizzazione dei turni giornalieri, ciascuno dei quali è composto da 4 ore. Ogni poliziotto deve lavorare giornalmente per due turni alternati: ad esempio, chi inizia a lavorare al primo turno lavorerà anche al terzo, chi inizia a lavorare al secondo turno lavorerà anche al quarto, e così via. Nella seguente tabella, per ogni turno, sono riportati il numero minimo di poliziotti che devono essere presenti in quel turno:

| Turno | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Orario | 0-4 | 4-8 | 8-12 | 12-16 | 16-20 | 20-24 |
| Numero minimo | 30 | 25 | 50 | 40 | 60 | 35 |

Ad esempio, nel turno 4, cioè dalle ore 12 alle ore 16, devono essere in servizio almeno 40 poliziotti.

La retribuzione dei poliziotti è di 14 euro all'ora per i turni diurni (3, 4, 5 e 6) e di 20 euro all'ora per i turni notturni (1 e 2). Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare le spese giornaliere di retribuzione dei poliziotti.

**Esercizio 1.32.** Un'azienda dolciaria produce tre tipi di dolci (A, B e C) a base di mandorle, noci e canditi.

Le quantità di ingredienti (espressi in grammi per un chilo di dolce) sono riportate nella seguente tabella:

| Dolce | mandorle | noci | canditi |
|---|---|---|---|
| A | 200 | 150 | 50 |
| B | 100 | 75 | 0 |
| C | 0 | 125 | 40 |

Ad esempio, per produrre un chilo di dolce A ci vogliono 200 g di mandorle, 150 g di noci e 50 g di canditi. La disponibilità settimanale degli ingredienti è di 14 kg di mandorle, 16 kg di noci e 10 kg di canditi. Le quantità di mandorle, noci e canditi che non sono utilizzate per la produzione dei tre dolci vengono vendute al pubblico a un prezzo pari a 2, 3 e 1 euro/etto, rispettivamente.

I prezzi di vendita al pubblico dei tre dolci (A, B e C) sono pari rispettivamente a 15, 20 e 16 euro/chilo.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, tenendo conto dei vincoli sulle risorse settimanali e con l'obiettivo di massimizzare il ricavo settimanale derivante dalla vendita dei tre tipi di dolce (A, B e C) e degli ingredienti (mandorle, noci e canditi) rimasti inutilizzati nella produzione.

**Esercizio 1.33.** Un'azienda produttrice di divani ha a disposizione 10 nuovi stabilimenti di produzione dislocati in Calabria, Lazio e Campania. Nelle seguenti tabelle, per ogni stabilimento sono riportati l'allocazione, il costo di attivazione (in migliaia di euro) e la capacità produttiva annuale:

| Stabilimento | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Allocazione | Calabria | Lazio | Campania | Campania | Lazio |
| Costo di attivazione | 200 | 400 | 300 | 500 | 200 |
| Capac. prod. annuale | 1.000 | 1.500 | 800 | 1.200 | 900 |

| Stabilimento | F | G | H | I | L |
|---|---|---|---|---|---|
| Allocazione | Lazio | Calabria | Campania | Calabria | Lazio |
| Costo di attivazione | 350 | 400 | 550 | 300 | 300 |
| Capac. prod. annuale | 1.200 | 950 | 1.100 | 1.000 | 1.200 |

Ad esempio, lo stabilimento G è allocato in Calabria, ha un costo di attivazione pari a 400.000 euro e una capacità produttiva pari a 950 divani all'anno.

Si vuole decidere quali stabilimenti attivare, con l'obiettivo di massimizzare la capacità produttiva annuale e tenendo conto che:

- il budget complessivo messo a disposizione dall'azienda per questa operazione è pari a 1.500.000 euro;
- almeno uno stabilimento deve essere attivato in Calabria;
- almeno due stabilimenti devono essere attivati in Lazio;
- almeno uno stabilimento deve essere attivato in Campania.

Inoltre, per motivi tecnici, in Calabria è possibile attivare lo stabilimento A solo se si attiva anche lo stabilimento G.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Esercizio 1.34.** La direzione di un hotel vuole minimizzare le spese giornaliere complessive relative al personale. Nell'intera giornata sono previsti 6 turni, di 4 ore ciascuno; inoltre ciascun dipendente deve lavorare 8 ore consecutive. Per ogni turno è previsto un numero minimo di personale, secondo quanto riportato nella seguente tabella:

| Turno | Orario | Fabbisogno minimo |
|---|---|---|
| 1 | 0-4 | 50 |
| 2 | 4-8 | 70 |
| 3 | 8-12 | 100 |
| 4 | 12-16 | 150 |
| 5 | 16-20 | 120 |
| 6 | 20-24 | 110 |

Ad esempio, nel turno 4, fra le ore 12 e le ore 16 devono essere disponibili almeno 150 unità di personale. La retribuzione dei dipendenti è di 10 euro all'ora per i turni diurni

(3, 4, 5 e 6) e di 15 euro all'ora per i turni notturni (1 e 2). Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare le spese giornaliere di personale.

**Esercizio 1.35.** Un'azienda produttrice di mobili deve pianificare la produzione mensile di tre modelli (A, B e C) di divani. Un divano di tipo A viene venduto a 1.000 euro, un divano di tipo B a 1.500 euro e un divano di tipo C a 2.800 euro. Inoltre il profitto unitario derivante dalla vendita dei modelli è pari ad una percentuale del prezzo di vendita: il 10% per il modello A, il 20% per il modello B e il 7% per il modello C. La produzione dei divani necessita di due tipi di stoffe (1 e 2), secondo la seguente tabella:

| Divani | Stoffa 1 | Stoffa 2 |
|---|---|---|
| A | 2 $m^2$ | 3 $m^2$ |
| B | 3 $m^2$ | 3 $m^2$ |
| C | 4 $m^2$ | 4 $m^2$ |

Ad esempio, per ottenere un divano A ci vogliono 2 metri quadrati di stoffa 1 e 3 metri quadrati di stoffa 2. Mensilmente sono disponibili al massimo 1.000 $m^2$ di stoffa 1 e 800 $m^2$ di stoffa 2. Inoltre la produzione dei divani avviene attraverso tre fasi principali: taglio della stoffa (eseguita dal reparto taglio), montaggio dell'impalcatura (eseguita dal reparto montaggio) e cucitura della stoffa sull'impalcatura (eseguita dal reparto cucitura); ciascuno dei tre reparti può lavorare al massimo 480 ore al mese. I tempi unitari (espressi in minuti) di lavorazione relativi ai 3 reparti sono riportati nella seguente tabella:

| Divani | Taglio | Montaggio impalcatura | Cucitura |
|---|---|---|---|
| A | 20 | 15 | 30 |
| B | 30 | 25 | 20 |
| C | 30 | 35 | 40 |

Ad esempio, per ottenere un divano di tipo A, il taglio della stoffa richiede 20 minuti, la fase di montaggio dell'impalcatura richiede 15 minuti, mentre la fase di cucitura richiede 30 minuti. Infine, per esigenze di mercato, si devono produrre al mese almeno 300 modelli A, almeno 250 modelli B e non più di 400 modelli di tipo C. Formulare il problema come problema di ottimizzazione con l'obiettivo di massimizzare il profitto complessivo mensile derivante dalla vendita dei divani.

**Esercizio 1.36.** Un'azienda produttrice di automobili deve pianificare la produzione giornaliera di tre tipi (A, B e C) di veicoli, il cui prezzo unitario di vendita è rispettivamente di 7.500, 10.000 e 15.500 euro. La produzione di un veicolo di tipo A costa all'azienda 5.000 euro, la produzione di un veicolo di tipo B costa 7.500 euro, mentre la produzione di un veicolo di tipo C costa 12.500 euro. Ogni giorno l'azienda sostiene anche dei costi fissi, pari a 2.000 euro. La produzione di autoveicoli passa attraverso tre reparti (assemblaggio, verniciatura, controllo di qualità) secondo la seguente tabella:

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Assemblaggio | 20 min | 30 min | 20 min |
| Verniciatura | 45 min | 50 min | 60 min |
| Qualità | 30 min | 40 min | 20 min |

Ad esempio, la produzione di un autoveicolo di tipo A comporta 20 minuti di lavoro nel reparto assemblaggio, 45 minuti nel reparto verniciatura e 30 minuti nel reparto qualità. I tre reparti ogni giorno possono lavorare al massimo 20, 22 e 18 ore rispettivamente. Formulare il problema come problema di ottimizzazione con l'obiettivo di massimizzare il profitto complessivo giornaliero derivante dalla vendita dei tre tipi di automobili e tenendo presente che, per motivi di marketing, l'azienda deve produrre ogni giorno almeno 10 autovetture per ogni tipo.

**Esercizio 1.37.** Il Signor Bianchi produce nel proprio terreno mele, pere, arance e mandarini che poi, in parte, vende all'ingrosso al mercato ortofrutticolo. Per il trasporto della frutta fino al mercato utilizza un furgone la cui capacità massima è di 10 quintali. Nella seguente tabella, sono riportati il peso (in chili) di ciascuna cassetta, il prezzo di vendita (euro/chilo) e il costo di produzione (euro/chilo) della frutta:

| | Peso | Prezzo di vendita | Costo |
|---|---|---|---|
| Mele | 14 | 1 | 0,50 |
| Pere | 12 | 1,50 | 0,70 |
| Arance | 10 | 2 | 1 |
| Mandarini | 15 | 1 | 0,30 |

Ad esempio, una cassetta di mele pesa 14 kg, il prezzo di vendita di un chilo di mele è un euro e il costo sostenuto per produrre un chilo di mele è pari a 50 centesimi di euro.

Il Signor Bianchi deve decidere quante cassette di frutta trasportare al mercato con il furgone, con l'obiettivo di massimizzare il profitto complessivo derivante dalla vendita della frutta (che viene venduta solo a cassette) e tenendo conto che, per avere un buon assortimento, devono essere trasportate almeno 8 cassette di mele, almeno 8 cassette di pere, almeno 7 cassette di arance e almeno 6 cassette di mandarini.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione.

**Esercizio 1.38.** Un'azienda manifatturiera dispone di 4 macchine per produrre 4 diversi tipi di componenti, che poi, in fase di assemblaggio, daranno luogo al prodotto finito. È possibile attrezzare ogni macchina in modo che possa produrre qualsiasi tipo di componente; i tempi unitari di produzione (espressi in minuti) sono riportati nella seguente tabella:

| | Comp. 1 | Comp. 2 | Comp. 3 | Comp. 4 |
|---|---|---|---|---|
| Macchina 1 | 30 | 50 | 15 | 25 |
| Macchina 2 | 40 | 25 | 40 | 60 |
| Macchina 3 | 30 | 30 | 50 | 30 |
| Macchina 4 | 10 | 20 | 80 | 30 |

Sapendo che, per ogni tipo di componente, bisogna produrre almeno 20 pezzi, formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare i tempi complessivi di produzione.

Come cambia la formulazione del problema, se si vuole minimizzare il massimo tempo di lavorazione delle macchine?

**Esercizio 1.39.** Un'azienda produttrice di televisori vuole aprire due nuovi punti di vendita, da scegliere fra quattro ($P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$). Ciascun punto di vendita, se attivato, verrebbe rifornito mensilmente da tre diversi magazzini ($M_1$, $M_2$, $M_3$), la cui disponibilità mensile di televisori è pari rispettivamente a 100, 200 e 150 unità. Nella seguente tabella sono riportati i costi unitari (espressi in euro) di trasporto dai tre magazzini ai potenziali punti di vendita, i costi fissi mensili (espressi in euro/mese) che ciascun punto di vendita dovrebbe sostenere e le quantità di televisori che verrebbero richieste ogni mese:

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $M_1$ | 23 | 10 | 12 | 20 |
| $M_2$ | 13 | 15 | 25 | 15 |
| $M_3$ | 30 | 21 | 10 | 16 |
| Costi fissi | 500 | 300 | 200 | 400 |
| Domanda | 100 | 150 | 200 | 220 |

Ad esempio, il punto di vendita $P_4$, se attivato, dovrebbe sostenere un costo fisso mensile pari a 400 euro e richiederebbe esattamente 220 televisori al mese; inoltre trasportare un televisore dal magazzino $M_2$ al punto di vendita $P_3$ costa 25 euro.

Formulare il problema come problema di ottimizzazione, con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi di trasporto e i costi fissi mensili sostenuti dai punti di vendita attivati.

**Esercizio 1.40.** Il Signor Rossi deve decidere che premi prendere con la raccolta punti di un supermercato, avendo a disposizione 9123 punti.

Dopo aver sfogliato il catalogo, decide di prendere - se è possibile - i seguenti premi: due paia di lenzuola, tre set di 6 tazzine da caffè, un ferro da stiro e tre set di asciugamani. I punti richiesti per tali premi, senza contributo in denaro e con contributo in denaro, sono riportati nella seguente tabella:

| | Senza contributo | Con contributo |
|---|---|---|
| Lenzuola | 2100 | 1100 |
| Set di tazzine | 950 | 500 |
| Ferro da stiro | 2450 | 1250 |
| Set asciugamani | 850 | 450 |

I contributi in denaro (espressi in euro), per ogni singolo premio, sono i seguenti:

| | Contributo in denaro |
|---|---|
| Lenzuola | 10 |
| Set di tazzine | 4.5 |
| Ferro da stiro | 12 |
| Set asciugamani | 4 |

Ad esempio, per prendere un set di tazzine senza contributo servono 950 punti, mentre per prendere il ferro da stiro con contributo sono sufficienti 1250 punti, pagando 12 euro.

Il Signor Rossi vuole sapere se i punti che ha a disposizione sono sufficienti per prendere i premi scelti e, in caso positivo, vuole sapere in che modalità conviene ritirarli (con e/o senza contributo), con l'obiettivo di minimizzare il contributo totale in denaro da versare.

# Capitolo 2

# Programmazione Lineare e Dualità

## 2.1 Risoluzione grafica

**Esercizio 2.1.** ★ Risolvere graficamente i seguenti problemi di programmazione lineare:

$$1. \begin{cases} \max\limits_x z = & 2x_1 & +x_2 & \\ & x_1 & +2x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & \leq 2 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} \min\limits_x z = & 2x_1 & +x_2 & \\ & x_1 & +2x_2 & \leq 2 \\ & -x_1 & +2x_2 & \leq 2 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{cases} .$$

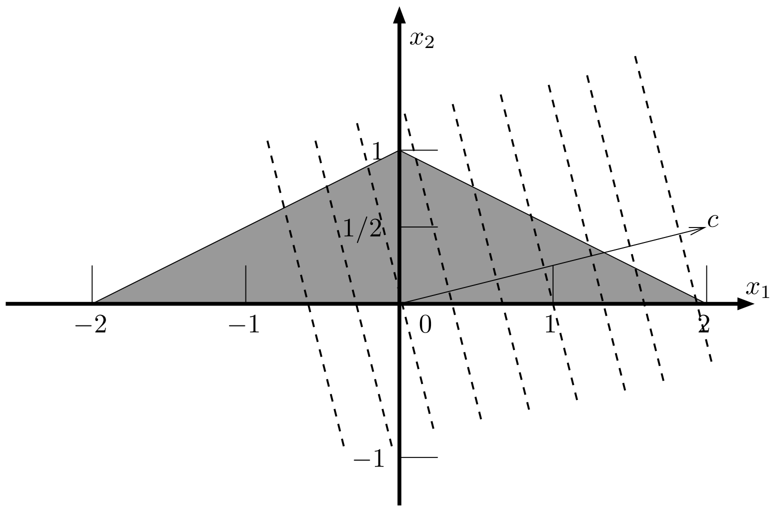


Figura 2.1: Regione ammissibile (esercizio 2.1)

**Risoluzione.** Per prima cosa, disegniamo la regione ammissibile (uguale per entrambi i problemi). Con riferimento alla figura 2.1, i primi due vincoli definiscono due rispettivi semispazi affini, corrispondenti alle rette passanti per i punti $[2 \;\; 0]$ e $[0 \;\; 1]$ (primo vincolo) e per i punti $[-2 \;\; 0]$ e $[0 \;\; 1]$ (secondo vincolo). Tenendo conto inoltre che la variabile $x_2$ è vincolata ad essere maggiore o uguale a zero, la regione ammissibile dei due problemi corrisponde all'area (in grigio) riportata nella figura 2.1.

Quanto alla funzione obiettivo $z$, il suo andamento grafico viene studiato tramite le curve di livello, che sono ortogonali al vettore $c$ dei costi. Nel nostro caso, poichè

$$z = 2x_1 + x_2 = c^T x = [2 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

allora $c^T = [2 \;\; 1]$. Una volta disegnato il vettore $c$ (applicato nell'origine), le curve di livello di $z$ sono crescenti nel verso di $c$ (e ciò è utile per risolvere il problema di massimizzazione) e decrescenti nel verso opposto a quello di $c$ (utile per risolvere il problema di minimizzazione). Quindi la soluzione ottima del problema di massimizzazione è il punto $x^{*T} = [2 \;\; 0]$, con $z^* = 4$, mentre la soluzione ottima del problema di minimizzazione corrisponde al punto $x^{*T} = [-2 \;\; 0]$, con $z^* = -4$.

**Esercizio 2.2.** ★ Risolvere graficamente i seguenti problemi di programmazione lineare:

$$1. \left\{ \begin{array}{rrrl} \max\limits_x z = & -x_1 & +x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 1 \end{array} \right. \qquad 2. \left\{ \begin{array}{rrrl} \min\limits_x z = & -x_1 & +x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 1 \end{array} \right. .$$

**Risoluzione.** Entrambi i problemi hanno la stessa regione ammissibile. Con riferimento alla figura 2.2, i due vincoli del problema definiscono due rispettivi semispazi affini, corrispondenti alle rette passanti per i punti $[1 \;\; 0]$ e $[0 \;\; 1]$ (primo vincolo) e per i punti $[-1 \;\; 0]$ e $[0 \;\; 1]$ (secondo vincolo). Poichè non ci sono altri vincoli, si vede facilmente in figura 2.2 che la regione ammissibile (disegnata in grigio) dei due problemi è illimitata.

Poichè

$$z = -x_1 + x_2 = [-1 \;\; 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

allora $c^T = [-1 \;\; 1]$. Tenendo conto che le curve di livello di $z$ sono ortogonali a $c$, crescenti nel verso di $c$ e decrescenti nel verso opposto a quello di $c$, il problema di massimizzazione ammette infinite soluzioni ottime (la retta che definisce il secondo vincolo è infatti ortogonale a $c$) del tipo:

$$x^*(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{con } k \geq 0 \quad \text{e} \quad z^* = 1.$$

Quanto al problema di minimizzazione, si vede che esso è inferiormente illimitato.

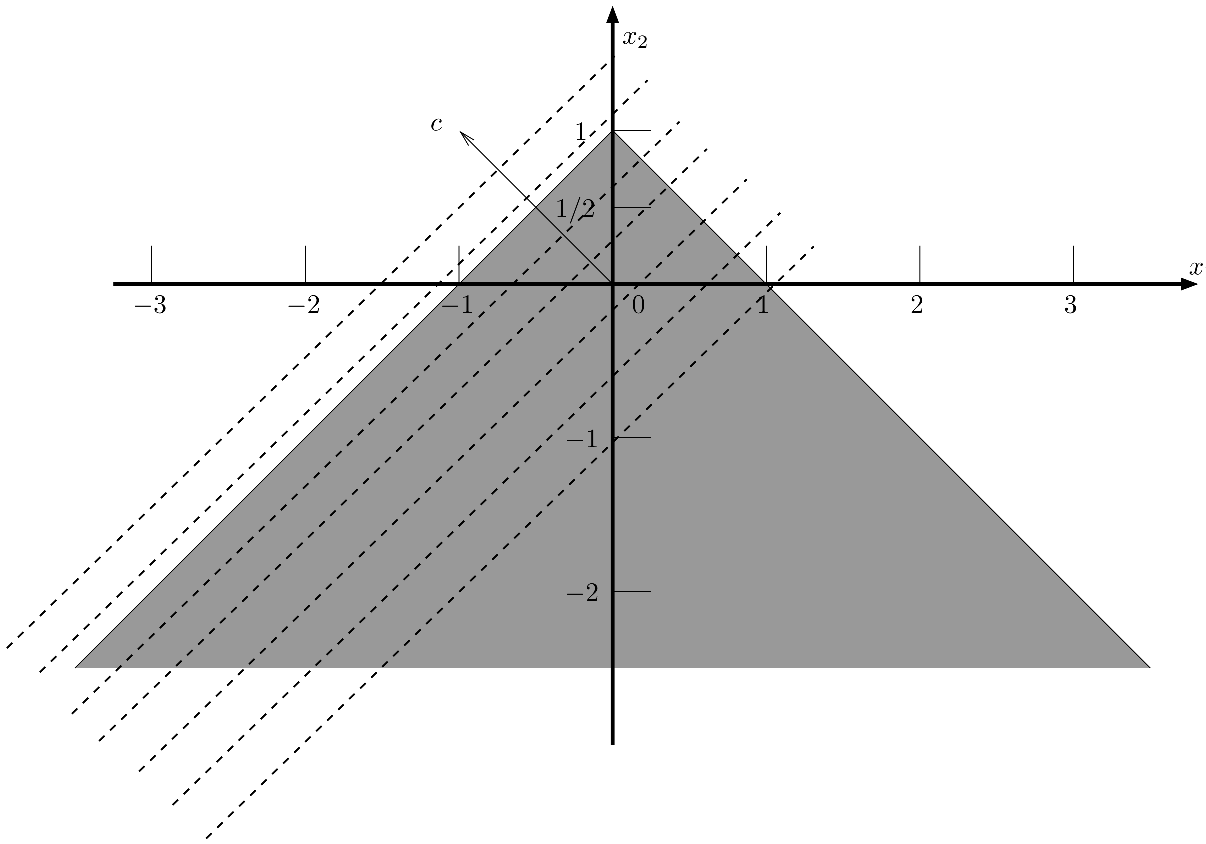


Figura 2.2: Regione ammissibile (esercizio 2.2)

**Esercizio 2.3.** ★ Risolvere graficamente i seguenti problemi di programmazione lineare:

$$1. \begin{cases} \max\limits_x z = & -x_1 & +x_2 & \\ & x_1 & -x_2 & \leq 0 \\ & & x_2 & \leq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} \min\limits_x z = & -x_1 & +x_2 & \\ & x_1 & -x_2 & \leq 0 \\ & & x_2 & \leq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases} .$$

**Risoluzione.** La regione ammissibile di entrambi i problemi è riportata in figura 2.3 (in grigio). Poichè $c^T = [-1 \;\; 1]$, la soluzione ottima del problema di massimizzazione è $x^{*T} = [0 \;\; 1]$ (con $z^* = 1$), mentre il problema di minimizzazione ammette infinite soluzioni ottime del tipo:

$$x^*(k) = k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-k) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (1-k) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con } k \in [0,1] \quad \text{e} \quad z^* = 0.$$

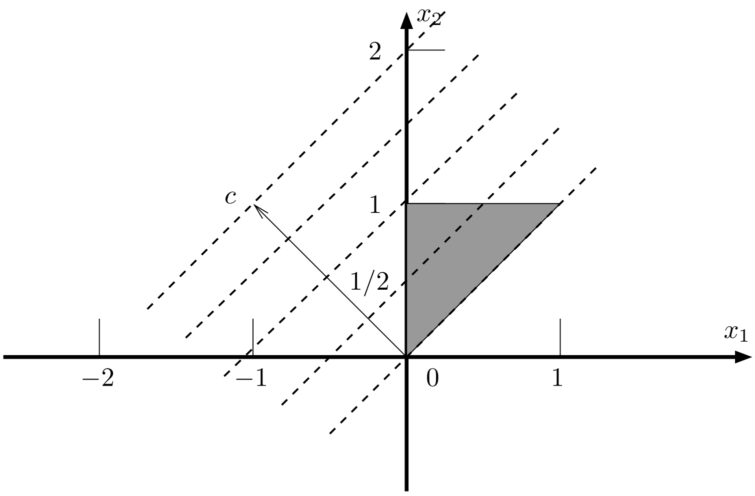


Figura 2.3: Regione ammissibile (esercizio 2.3)

**Esercizio 2.4.** ★ Risolvere graficamente il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \left\{ \begin{array}{llll} \min\limits_{x} z = & 3x_1 & +2x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & -x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & & \geq 2 \end{array} \right. .$$

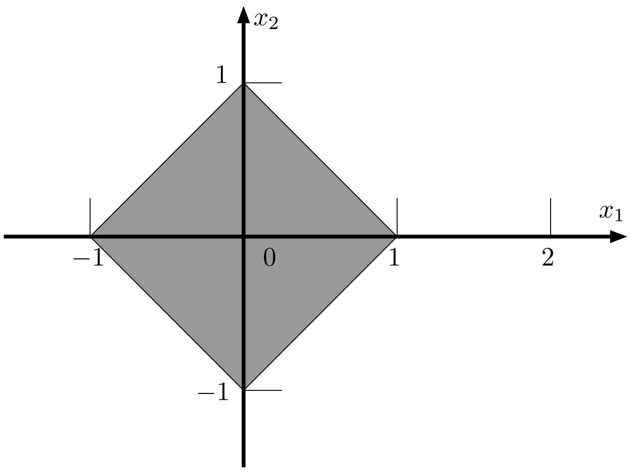


Figura 2.4 (esercizi 2.4 e 4.3)

**Risoluzione.** Si vede facilmente come la regione ammissibile sia vuota. Infatti, osservando la figura 2.4, i primi quattro vincoli del problema definiscono la regione in grigio, la quale risulta incompatibile col vincolo $x_1 \geq 2$. Quindi il problema è inammissibile.

**Esercizio 2.5.** ■ Risolvere graficamente i seguenti problemi di programmazione lineare.

$$
1.\ \begin{cases} \min\limits_x z = & -x_1 & +\frac{5}{2}x_2 & \\ & 2x_1 & -2x_2 & \geq 7 \\ & 2x_1 & & \leq 7 \\ & & -2x_2 & \leq 7 \end{cases}, \qquad 2.\ \begin{cases} \min\limits_x z = & & x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \geq 0 \\ & -8x_1 & +6x_2 & \geq 21 \\ & & 2x_2 & \leq 7 \end{cases};
$$

$$
3.\ \begin{cases} \min\limits_x z = & \frac{3}{2}x_1 & +3x_2 & \\ & -2x_1 & -2x_2 & \geq 3 \\ & 2x_1 & -2x_2 & \leq 7 \\ & -2x_1 & -2x_2 & \leq 7 \\ & 2x_1 & -2x_2 & \geq 3 \end{cases}, \qquad 4.\ \begin{cases} \min\limits_x z = & -\frac{1}{2}x_1 & +x_2 & \\ & 2x_1 & +2x_2 & \leq 3 \\ & 2x_1 & -2x_2 & \leq 3 \\ & -2x_1 & -2x_2 & \leq 3 \end{cases};
$$

$$
5.\ \begin{cases} \min\limits_x z = & 3x_1 & +x_2 & \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & -x_2 & \geq 1 \\ & x_1 & & \leq 0 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{cases}, \qquad 6.\ \begin{cases} \min\limits_x z = & x_1 & +3x_2 & \\ & 6x_1 & -4x_2 & \geq 3 \\ & 6x_1 & +4x_2 & \geq 3 \\ & 6x_1 & -4x_2 & \leq 15 \\ & 6x_1 & +4x_2 & \leq 15 \\ & & 2x_2 & \leq 3 \end{cases}.
$$

**Esercizio 2.6.** ■ Dati i problemi di programmazione lineare dell'esercizio 2.5, risolverli graficamente massimizzando la funzione obiettivo.

## 2.2 La forma standard di un problema di programmazione lineare

**Esercizio 2.7.** ★ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$
P \begin{cases} \max\limits_x z = & -20x_1 & +3x_2 & -4x_3 & +4x_4 & \\ & -3x_1 & +22x_2 & -5x_3 & -12x_4 & \leq 4 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +5x_3 & +15x_4 & = 9 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -6x_4 & \geq 2 \\ & & x_2, & & x_4 & \geq 0 \end{cases},
$$

riscrivere $P$ in forma standard.

**Risoluzione.** Dobbiamo ottenere un problema di minimizzazione equivalente a $P$, in cui tutti i vincoli siano di uguaglianza e tutte le variabili siano vincolate ad essere positive.

Per ottenere un problema di minimizzazione, moltiplichiamo per -1 la funzione obiettivo. Per trasformare il primo e il terzo vincolo in eguaglianze, aggiungiamo una variabile slack $x_5 \geq 0$ al primo vincolo e una variabile di surplus $x_6 \geq 0$ al terzo vincolo. Otteniamo:

$$P' \left\{ \begin{array}{llllllll} -\min\limits_{x} z = & 20x_1 & -3x_2 & +4x_3 & -4x_4 & & & \\ & -3x_1 & +22x_2 & -5x_3 & -12x_4 & +x_5 & & = 4 \\ & 4x_1 & +7x_2 & +5x_3 & +15x_4 & & & = 9 \\ & 2x_1 & +2x_2 & +4x_3 & -6x_4 & & -x_6 & = 2 \\ & & x_2, & & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0 \end{array} \right. .$$

Poichè le variabili $x_1$ e $x_3$ non sono vincolate a essere positive, poniamo $x_1 = x_1^+ - x_1^-$ e $x_3 = x_3^+ - x_3^-$, con $x_1^+, x_1^-, x_3^+, x_3^- \geq 0$. Sostituendo in tutti gli altri vincoli otteniamo il problema in forma standard:

$$P_s \left\{ \begin{array}{llllllllll} -\min\limits_{x} z = & 20x_1^+ & -20x_1^- & -3x_2 & +4x_3^+ & -4x_3^- & -4x_4 & & & \\ & -3x_1^+ & +3x_1^- & +22x_2 & -5x_3^+ & +5x_3^- & -12x_4 & +x_5 & & = 4 \\ & 4x_1^+ & -4x_1^- & +7x_2 & +5x_3^+ & -5x_3^- & +15x_4 & & & = 9 \\ & 2x_1^+ & -2x_1^- & +2x_2 & +4x_3^+ & -4x_3^- & -6x_4 & & -x_6 & = 2 \\ & x_1^+, & x_1^-, & x_2, & x_3^+, & x_3^-, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0 \end{array} \right. .$$

**Esercizio 2.8.** Dati i problemi di programmazione lineare degli esercizi 2.5 e 2.6, riscriverli in forma standard.

## 2.3 Il metodo del Simplesso: soluzioni di base e ottimalità

**Esercizio 2.9.** ★ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare,

$$P \left\{ \begin{array}{llll} \min\limits_{x} z = & -x_1 & -x_2 & \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & x_1 & & \leq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

verificare se al punto $\bar{x}^T = [0 \;\; 1]$ corrisponde una soluzione ammissibile di base per $P$. In caso positivo, verificare se il punto $\bar{x}$ è una soluzione ottima per $P$. Se $\bar{x}$ non è una soluzione ottima per $P$, risolvere $P$ con il metodo del simplesso a partire da $\bar{x}$.

**Risoluzione.** Per valutare l'ammissibilità di $\bar{x}$ basta sostituire le sue componenti in tutti i vincoli di $P$: poichè tutti i vincoli sono soddisfatti, allora $\bar{x}$ è ammissibile.

Per verificare invece che al punto $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base per $P$, dobbiamo riscrivere $P$ in forma standard. Otteniamo:

$$P_s \left\{ \begin{array}{lrrrrrl} \min\limits_x z = & -x_1 & -x_2 & & & & \\ & -x_1 & +x_2 & +x_3 & & & = 2 \\ & x_1 & +x_2 & & -x_4 & & = 1 \\ & x_1 & & & & +x_5 & = 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array} \right. .$$

Da ora e fino al termine dell'esercizio, faremo sempre riferimento alla forma standard $P_s$, con $n = 5$ (numero di variabili) e $m = 3$ (numero di vincoli).

Dal primo, secondo e terzo vincolo di $P_s$, otteniamo rispettivamente la terza, la quarta e la quinta componente di $\bar{x}$:

$$\bar{x}_3 = 2+\bar{x}_1-\bar{x}_2 = 2+0-1 = 1, \quad \bar{x}_4 = \bar{x}_1+\bar{x}_2-1 = 0+1-1 = 0 \quad \text{e } \bar{x}_5 = 1-\bar{x}_1 = 1-0 = 1.$$

Quindi il punto $\bar{x}$ per il problema $P_s$ assume la forma:

$$\bar{x}^T = [0\ 1\ 1\ \ 0\ \ 1].$$

Verifichiamo ora la validità della condizione necessaria perchè $\bar{x}$ possa essere una soluzione di base. Tale condizione afferma che, se a $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base, allora il punto $\bar{x}$ contiene al massimo $m$ componenti non nulle. In tal caso $m = 3$ e le componenti non nulle di $\bar{x}$ sono tre. Quindi la condizione necessaria è verificata. Se al punto $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base, sicuramente tutte e tre le componenti non nulle ($\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ e $\bar{x}_5$) di $\bar{x}$ sono in base. Per verificare se $\bar{x}$ è una soluzione di base, costruiamo la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dal momento che $det(B) = -1 \neq 0$, allora possiamo concludere che al punto $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base, con $\beta = \{2, 3, 5\}$, $\mathcal{N} = \{1, 4\}$,

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e $\bar{z} = -1$.

Per valutare l'ottimalità di $\bar{x}$, calcoliamo il vettore dei costi ridotti fuori base $\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$, con

$$c_N^T = [c_{\mathcal{N}(1)}\ \ c_{\mathcal{N}(2)}] = [c_1\ \ c_4] = [-1\ \ 0], \quad c_B^T = [c_{\beta(1)}\ \ c_{\beta(2)}\ \ c_{\beta(3)}] = [c_2\ \ c_3\ \ c_5] = [-1\ \ 0\ \ 0]$$

e

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poichè

$$\hat{c}_N^T = [\hat{c}_{\mathcal{N}(1)}\ \ \hat{c}_{\mathcal{N}(2)}] = [\hat{c}_1\ \ \hat{c}_4] = [0\ \ \ -1] \ngeq 0,$$

allora $\bar{x}$ non è una soluzione ottima[1] per $P$.

Per risolvere $P$ applicando il simplesso a partire da $\bar{x}$, dobbiamo scrivere la corrispondente tabella $T$ in forma canonica:

$$T = \begin{array}{cc|c} B^{-1}N & I & \bar{x}_B \\ \hline \hat{c}_N^T & 0^T & -\bar{z} \end{array} = \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Per generare una nuova soluzione ammissibile di base, dobbiamo effettuare un'opportuna operazione pivot sulla tabella $T$. L'elemento di pivot viene scelto individuando in $T$ prima la colonna di pivot (che individua la variabile entrante in base) e poi la riga di pivot (che individua la variabile uscente dalla base).

L'unica colonna candidata ad essere colonna di pivot è la quarta, corrispondente alla seconda ($j = 2$) variabile fuori base $\bar{x}_{\mathcal{N}(j)} = \bar{x}_{\mathcal{N}(2)} = \bar{x}_4$. Tale colonna, infatti, è l'unica in corrispondenza della quale il costo ridotto è strettamente negativo ed è pari a

$$\hat{c}_{\mathcal{N}(j)} = \hat{c}_{\mathcal{N}(2)} = \hat{c}_4 = -1.$$

Per individuare la riga di pivot calcoliamo:

$$\bar{\delta}_j = \frac{\bar{x}_{\beta(\bar{\imath})}}{d_{\bar{\imath}}} = \min_{i|d_i>0} \frac{\bar{x}_{\beta(i)}}{d_i},$$

con $d^T = [-1 \;\; 1 \;\; 0]$. In tal caso si ha:

$$\bar{\delta}_2 = \min\{1/1\} = 1/1 = 1.$$

Quindi, poichè $\bar{\imath} = 2$, l'elemento di pivot corrisponde a $T_{\bar{\imath}\mathcal{N}(j)} = T_{24} = 1$. Questo significa che, facendo l'operazione di pivot, entrerà in base la variabile $\bar{x}_{\mathcal{N}(j)} = \bar{x}_{\mathcal{N}(2)} = \bar{x}_4$ e uscirà dalla base la variabile $\bar{x}_{\beta(\bar{\imath})} = \bar{x}_{\beta(2)} = \bar{x}_3$.

Facendo pivot su $T_{24} = 1$ otteniamo:

$$T = \begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array},$$

con $\beta = \{2, 4, 5\}$, $\mathcal{N} = \{1, 3\}$,

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e $\bar{z} = -2$. Il punto corrente è adesso

$$\bar{x}^T = [0 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1].$$

[1] $\bar{x}$ è non degenere.

Poichè $\hat{c}_N^T = [\hat{c}_{\mathcal{N}(1)} \;\; \hat{c}_{\mathcal{N}(2)}] = [\hat{c}_1 \;\; \hat{c}_3] = [-2 \;\; 1] \not\geq 0$, il simplesso continua scegliendo come colonna di pivot la prima colonna di $T$, corrispondente alla prima ($j = 1$) variabile fuori base $\bar{x}_{\mathcal{N}(j)} = \bar{x}_{\mathcal{N}(1)} = \bar{x}_1$. Tale colonna infatti è l'unica in corrispondenza della quale il costo ridotto è strettamente negativo ed è pari a

$$\hat{c}_{\mathcal{N}(j)} = \hat{c}_{\mathcal{N}(1)} = \hat{c}_1 = -2.$$

Per individuare la riga di pivot calcoliamo:

$$\bar{\delta}_1 = \min\{1/1\} = 1/1 = 1.$$

Quindi, poichè $\bar{\imath} = 3$, l'elemento di pivot corrisponde a $T_{\bar{\imath}\mathcal{N}(j)} = T_{31} = 1$. Questo significa che, facendo l'operazione di pivot, entrerà in base la variabile $\bar{x}_{\mathcal{N}(j)} = \bar{x}_{\mathcal{N}(1)} = \bar{x}_1$ e uscirà dalla base la variabile $\bar{x}_{\beta(\bar{\imath})} = \bar{x}_{\beta(3)} = \bar{x}_5$.

Facendo pivot su $T_{31} = 1$, otteniamo la seguente tabella ottima:

$$T^* = \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array},$$

corrispondente a $\beta = \{2, 4, 1\}$, $\mathcal{N} = \{3, 5\}$,

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e $\bar{z} = -4$.

La tabella $T^*$ è ottima poichè $\hat{c}_N^T = [1 \;\; 2] \geq 0$.

Quindi per il problema in forma standard $P_s$, la soluzione ottima è:

$$x^{*T} = [x_1^* \;\; x_2^* \;\; x_3^* \;\; x_4^* \;\; x_5^*] = [1 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 0] \quad \text{con} \quad z^* = -4$$

e quindi per il problema $P$ di partenza:

$$x^{*T} = [x_1^* \;\; x_2^*] = [1 \;\; 3] = \quad \text{con} \quad z^* = -4.$$

**Esercizio 2.10.** ■ Per ciascuno dei seguenti problemi di programmazione lineare, verificare se al punto $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base ammissibile. In caso positivo, verificare se è anche un punto di ottimo e, nel caso in cui $\bar{x}$ non sia un punto di ottimo, applicare il metodo del simplesso a partire da $\bar{x}$, con l'obiettivo di risolvere il corrispondente problema di programmazione lineare.

$$1. \left\{ \begin{array}{lllll} \min\limits_x z = & 6x_1 & -7x_2 & +9x_3 & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +x_3 & \geq 9 \\ & 2x_1 & +2x_2 & -5x_3 & \geq 4 \\ & 7x_1 & +3x_2 & +4x_3 & = 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. , \qquad \bar{x}^T = [1 \; 1 \; 0];$$

2. $$\begin{cases} \max\limits_x z = & 6x_1 & -7x_2 & +9x_3 & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & \leq 8 \\ & x_1 & +x_2 & -5x_3 & \leq 4 \\ & & x_2 & +2x_3 & \leq 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}, \qquad \bar{x}^T = [1 \;\; 0 \;\; 5/2];$$

3. $$\begin{cases} \min\limits_x z = & 6x_1 & -7x_2 & +9x_3 & \\ & 2x_1 & -x_2 & +x_3 & \leq 8 \\ & x_1 & +x_2 & -5x_3 & \leq 4 \\ & & x_2 & +2x_3 & \leq 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}, \qquad \bar{x}^T = [0 \;\; 2 \;\; 0];$$

4. $$\begin{cases} \max\limits_x z = & 7x_1 & -5x_2 & +x_3 & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & \leq 8 \\ & -x_1 & +3x_2 & -6x_3 & \leq 4 \\ & 3x_1 & +4x_2 & +4x_3 & \geq 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}, \qquad \bar{x}^T = [2 \;\; 0 \;\; 1];$$

5. $$\begin{cases} \max\limits_x z = & 5x_1 & -5x_2 & & \\ & x_1 & +x_2 & +x_3 & = 4 \\ & -x_1 & +3x_2 & -6x_3 & \leq -4 \\ & -3x_1 & +4x_2 & +4x_3 & \geq 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}, \qquad \bar{x}^T = [2 \;\; 0 \;\; 2];$$

6. $$\begin{cases} \max\limits_x z = & x_1 & -5x_2 & +4x_3 & \\ & 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 10 \\ & & x_2 & +2x_3 & \leq 5 \\ & 3x_1 & +5x_2 & +x_3 & \geq 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}, \qquad \bar{x}^T = [3 \;\; 0 \;\; 1];$$

7. $$\begin{cases} \min\limits_x z = & x_1 & -5x_2 & +4x_3 & \\ & 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & = 10 \\ & & x_2 & +2x_3 & \leq 5 \\ & 3x_1 & +5x_2 & +x_3 & \geq 10 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}, \qquad \bar{x}^T = [20/3 \;\; 5 \;\; 0];$$

8. $$\begin{cases} \max\limits_x z = & -x_1 & +2x_2 & \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & & x_2 & \geq 1 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}, \qquad \bar{x}^T = [0 \;\; 1];$$

9. $$\begin{cases} \min\limits_x z = & 12x_1 & +20x_2 & \\ & 3x_1 & -4x_2 & \geq 2 \\ & 6x_1 & +2x_2 & \leq 8 \\ & 5x_1 & -7x_2 & = -2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}, \qquad \bar{x}^T = [1 \;\; 1];$$

10. $$\begin{cases} \max\limits_{x} z = & x_1 & +2x_2 & \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 3 \\ & & x_2 & \geq 1 \\ & x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}, \qquad \bar{x}^T = [1 \ \ 1].$$

11. $$\begin{cases} \max\limits_{x} z = & x_1 & -2x_2 & -x_3 & \\ & 4x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 2 \\ & 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & \geq 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}, \qquad \bar{x}^T = [3/7 \ \ 2/7 \ \ 0].$$

## 2.4 Il metodo del Simplesso: l'algoritmo

**Esercizio 2.11.** ★ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \begin{cases} \max\limits_{x} z = & 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & \\ & 3x_1 & +2x_2 & -5x_3 & \leq 4 \\ & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & \leq 2 \\ & x_1, & & x_3 & \geq 0 \end{cases},$$

risolvere $P$ applicando il metodo del simplesso.

**Risoluzione.** Per prima cosa, riscriviamo $P$ in forma standard. Otteniamo[2]:

$$P_s \begin{cases} \min\limits_{x} z = & -2x_1 & -3x_2^+ & +3x_2^- & +4x_3 & & & \\ & 3x_1 & +2x_2^+ & -2x_2^- & -5x_3 & +x_4 & & = 4 \\ & 2x_1 & -x_2^+ & +x_2^- & +4x_3 & & +x_5 & = 2 \\ & x_1, & x_2^+, & x_2^- & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases}.$$

L'applicazione del simplesso al problema $P_s$ è immediata poichè la base $B = I$ è ammissibile per $P_s$. Quindi la prima tabella $T$ in forma canonica che otteniamo è la seguente:

$$T = \begin{array}{cccccc|c} 3 & 2 & -2 & -5 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -2 & -3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

in corrispondenza dell'insieme di indici di base $\beta = \{4, 5\}$, dell'insieme degli indici fuori base $\mathcal{N} = \{1, 2^+, 2^-, 3\}$ e del vettore delle variabili in base

$$\bar{x}_B^T = [\bar{x}_{\beta(1)} \ \ \bar{x}_{\beta(2)}] = [\bar{x}_4 \ \ \bar{x}_5] = [4 \ \ 2].$$

[2]Per semplicità di notazione, da ora in avanti omettiamo nella forma standard $P_s$ di un problema di massimizzazione il segno "-" dinanzi all'operatore "min", ricordandoci poi di cambiare il segno al valore finale della funzione obiettivo.

Poichè

$$\hat{c}_N^T = [\hat{c}_{\mathcal{N}(1)} \;\; \hat{c}_{\mathcal{N}(2)} \;\; \hat{c}_{\mathcal{N}(3)} \;\; \hat{c}_{\mathcal{N}(4)}] = [-2 \quad -3 \;\; 3 \;\; 4] \not\geq 0,$$

l'algoritmo prosegue scegliendo la colonna di pivot e, ove possibile, la riga di pivot allo scopo di individuare un elemento di pivot. Le colonne candidate ad essere colonne di pivot sono la prima e la seconda, quelle cioè corrispondenti a costi ridotti strettamente negativi. Scegliendo ad esempio la prima (quindi in corrispondenza dell'indice $j = 1$), per individuare la riga di pivot calcoliamo:

$$\bar{\delta}_j = \frac{\bar{x}_{\beta(\bar{\imath})}}{d_{\bar{\imath}}} = \min_{i | d_i > 0} \frac{\bar{x}_{\beta(i)}}{d_i},$$

con $d^T = [3, 2]$. In tal caso si ha:

$$\bar{\delta}_1 = \min\{4/3, 2/2\} = 2/2 = 1.$$

Quindi, poichè $\bar{\imath} = 2$, l'elemento di pivot corrisponde a $T_{\bar{\imath}\mathcal{N}(j)} = T_{21} = 2$. Questo significa che, facendo l'operazione di pivot, entrerà in base la variabile $\bar{x}_{\mathcal{N}(j)} = \bar{x}_{\mathcal{N}(1)} = \bar{x}_1$ e uscirà dalla base la variabile $\bar{x}_{\beta(\bar{\imath})} = \bar{x}_{\beta(2)} = \bar{x}_5$. Facciamo notare che, se avessimo scelto come colonna di pivot la seconda, allora l'elemento di pivot sarebbe stato

$$T_{\bar{\imath}\mathcal{N}(j)} = T_{12} = 2,$$

la variabile entrante sarebbe stata la $\bar{x}_2^+$ e quella uscente la $\bar{x}_4$.

Facendo pivot su $T_{21} = 2$, otteniamo la seguente tabella:

$$T = \begin{array}{cccccc|c} 0 & 7/2 & -7/2 & -11 & 1 & -3/2 & 1 \\ 1 & -1/2 & 1/2 & 2 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline 0 & -4 & 4 & 8 & 0 & 1 & 2 \end{array},$$

corrispondente a $\beta = \{4, 1\}$, $\mathcal{N} = \{2^+, 2^-, 3, 5\}$ e a $\bar{x}_B^T = [\bar{x}_{\beta(1)} \;\; \bar{x}_{\beta(2)}] = [\bar{x}_4 \;\; \bar{x}_1] = [1 \;\; 1]$.

Facendo pivot sull'elemento $T_{12} = 7/2$ ($j = 1$ e $\bar{\imath} = 1$), otteniamo la seguente tabella:

$$T = \begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -1 & -22/7 & 2/7 & -3/7 & 2/7 \\ 1 & 0 & 0 & 3/7 & 1/7 & 2/7 & 8/7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -32/7 & 8/7 & -5/7 & 22/7 \end{array},$$

corrispondente a $\beta = \{2^+, 1\}$, $\mathcal{N} = \{2^-, 3, 4, 5\}$ e $\bar{x}_B^T = [\bar{x}_{\beta(1)} \;\; \bar{x}_{\beta(2)}] = [\bar{x}_2^+ \;\; \bar{x}_1] = [2/7 \;\; 8/7]$.

Poichè $\hat{c}_N^T = [0 \quad -32/7 \quad 8/7 \quad 5/7] \not\geq 0$, facendo l'operazione pivot sull'elemento $T_{24} = 3/7$ ($j = 2$ e $\bar{\imath} = 2$), otteniamo la seguente tabella ottima:

$$T^* = \begin{array}{cccccc|c} 22/3 & 1 & -1 & 0 & 4/3 & 5/3 & 26/3 \\ 7/3 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 8/3 \\ \hline 32/3 & 0 & 0 & 0 & 8/3 & 7/3 & 46/3 \end{array},$$

in corrispondenza di $\beta = \{2^+, 3\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2^-, 4, 5\}$ e $\bar{x}_B^T = [\bar{x}_{\beta(1)} \;\; \bar{x}_{\beta(2)}] = [\bar{x}_2^+ \;\; \bar{x}_3] = [26/3 \;\; 8/3]$.

Quindi la soluzione ottima del problema $P_s$ in forma standard è

$$x^{*T} = [x_1^* \;\; x_2^{*+} \;\; x_2^{*-} \;\; x_3^* \;\; x_4^* \;\; x_5^*] = [0 \;\; 26/3 \;\; 0 \;\; 8/3 \;\; 0 \;\; 0] \quad \text{con } z^* = -46/3,$$

mentre la soluzione ottima del problema $P$ di partenza è:

$$x^{*T} = [x_1^* \;\; x_2^* \;\; x_3^*] = [0 \;\; 26/3 \;\; 8/3] \quad \text{con } z^* = 46/3.$$

**Esercizio 2.12.** ■ Risolvere i seguenti problemi di programmazione lineare, applicando il metodo del simplesso.

$$1. \begin{cases} \min\limits_x z = -4x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 \le 3 \\ 6x_1 + 4x_2 - 5x_3 \le 2 \\ x_1, \; x_2, \; x_3 \ge 0 \end{cases}, \quad 2. \begin{cases} \max\limits_x z = 4x_1 - 6x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 \le 7 \\ 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 \le 4 \\ x_1, \; x_2, \; x_3 \ge 0 \end{cases},$$

$$3. \begin{cases} \min\limits_x z = 8x_1 - 6x_2 + x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 7 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 10 \\ x_1, \; x_2, \; x_3 \ge 0 \end{cases}, \quad 4. \begin{cases} \min\limits_x z = x_1 - 6x_2 + x_3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 8 \\ 7x_1 - 10x_2 + 5x_3 \le 9 \\ x_1, \; x_3 \ge 0 \end{cases},$$

$$5. \begin{cases} \min\limits_x z = x_1 - 6x_2 + x_3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 8 \\ 7x_1 + 10x_2 + 5x_3 \le 11 \\ x_2, \; x_3 \ge 0 \end{cases}, \quad 6. \begin{cases} \min\limits_x z = -3x_1 - x_2 + x_3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 13 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 \le 11 \\ x_1, \; x_2 \ge 0 \end{cases},$$

$$7. \begin{cases} \max\limits_x z = -3x_1 + x_2 - x_3 \\ 16x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 3 \\ -5x_1 + 4x_2 - x_3 \le 6 \\ x_2, \; x_3 \ge 0 \end{cases}, \quad 8. \begin{cases} \min\limits_x z = x_1 - x_2 + x_3 \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 \le 3 \\ -15x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 16 \\ x_1, \; x_2 \ge 0 \end{cases},$$

$$9. \begin{cases} \max\limits_x z = 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 4 \\ 5x_1 - 7x_2 - 10x_3 \le 5 \\ x_2, \; x_3 \ge 0 \end{cases}, \quad 10. \begin{cases} \min\limits_x z = 7x_1 + 9x_2 + x_3 \\ 9x_1 - 5x_2 - 3x_3 \le 8 \\ -5x_1 + 2x_2 + 9x_3 \le 15 \\ x_1, \; x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

## 2.5 Il metodo del Simplesso: un esempio di soluzione di base degenere

**Esercizio 2.13.** ★ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lllll} \min\limits_x z = & 2x_1 & +x_2 & & \\ & x_1 & +x_2 & -x_3 & = 1 \\ & -x_1 & +x_2 & & \leq 1 \\ & -2x_1 & +3x_2 & & \leq 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

1. verificare che al punto $\bar{x}^T = [0 \;\; 1 \;\; 0]$ corrisponde una soluzione di base ammissibile per $P$;
2. determinare i coefficienti di costo ridotto relativi a $\bar{x}$ e verificare l'ottimalità o meno di $\bar{x}$.

**Risoluzione.** Per verificare l'ammissibilità del punto $\bar{x}$, basta sostituire ogni sua componente nei vincoli del problema e vedere che essi sono tutti soddisfatti.

Per verificare invece che al punto $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base per $P$, dobbiamo riscrivere $P$ in forma standard. Otteniamo:

$$P_s \left\{ \begin{array}{lllllll} \min\limits_x z = & 2x_1 & +x_2 & & & & \\ & x_1 & +x_2 & -x_3 & & & = 1 \\ & -x_1 & +x_2 & & +x_4 & & = 1 \\ & -2x_1 & +3x_2 & & & +x_5 & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & x_4 & x_5 & \geq 0 \end{array} \right. .$$

Dal secondo e terzo vincolo di $P_s$, otteniamo rispettivamente la quarta e la quinta componente di $\bar{x}$:

$$\bar{x}_4 = 1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1 + 0 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad \bar{x}_5 = 6 + 2\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 = 6 + 0 - 3 = 3.$$

Quindi il punto $\bar{x}$ per il problema $P_s$ assume la forma:

$$\bar{x}^T = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 3].$$

Verifichiamo ora la validità della condizione necessaria perchè $\bar{x}$ possa essere una soluzione di base. Tale condizione dice che se a $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base, allora il punto $\bar{x}$ contiene al massimo $m$ componenti, dove $m$ è il numero di vincoli del problema. In tal caso $m = 3$ e le componenti non nulle di $\bar{x}$ sono due. Quindi la condizione necessaria è verificata. Se al punto $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base, sicuramente le due componenti non nulle ($\bar{x}_2$ e $\bar{x}_5$) di $\bar{x}$ sono in base. Poichè $m = 3$, un'eventuale soluzione di base per $P_s$ deve essere costituita da tre componenti (in tal caso si ha quindi una soluzione di base degenere). La terza componente in base può essere indifferentemente la $\bar{x}_1$, la $\bar{x}_3$ o la $\bar{x}_4$, purchè la corrispondente matrice $B$ di base sia invertibile. Scegliendo ad esempio come terza componente in base la $x_1$, otteniamo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Dal momento che $det(B) = 2 \neq 0$, allora possiamo concludere che al punto $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base, con $\beta = \{2, 5, 1\}$, $\mathcal{N} = \{3, 4\}$ e

$$\bar{x}_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Per valutare l'ottimalità di $\bar{x}$, calcoliamo il vettore dei costi ridotti fuori base[3] $\hat{c}_N^T = c_N^T + c_B^T B^{-1} N$, con

$$c_N^T = [0 \quad 0], \quad c_B^T = [1 \quad 0 \quad 2] \quad \text{e } N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poichè $\hat{c}_N^T = [3/2 \quad 1/2] \geq 0$, allora possiamo concludere che $\bar{x}$ è una soluzione ottima per $P$, con $z^* = 1$.

Facciamo notare che, se avessimo scelto come terza componente in base la $\bar{x}_3$, avremmo ottenuto $\hat{c}_N^T = [3 \quad -1] \ngeq 0$, in corrispondenza di $\beta = \{2, 5, 3\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 4\}$. Ciò conferma che la condizione $\hat{c}_N^T \geq 0$, nel caso di soluzioni di base degeneri, è solo sufficiente per l'ottimalità, ma non è necessaria.

D'altra parte però si può dimostrare che, in corrispondenza di una soluzione di base ottima, esiste almeno una base $B$ tale che $\hat{c}_N^T \geq 0$. Quindi, se in corrispondenza di ogni base corrispondente a $\bar{x}$ avessimo avuto $\hat{c}_N^T \ngeq 0$, allora avremmo potuto concludere che il punto $\bar{x}$ non è una soluzione ottima.

## 2.6 Il metodo del Simplesso: la prima fase

**Esercizio 2.14.** ★ Scrivere il problema artificiale (o di prima fase) corrispondente al seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \begin{cases} \min\limits_x z = & -2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & \\ & -3x_1 & +2x_2 & -5x_3 & = -4 \\ & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & = 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}.$$

[3] Sappiamo che i costi ridotti in base sono tutti uguali a zero.

**Risoluzione.** Per prima cosa moltiplichiamo il primo vincolo di $P$ per -1, in modo da avere tutti i termini noti positivi. Otteniamo quindi:

$$P\begin{cases} \min\limits_{x} z = & -2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & \\ & 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & = 4 \\ & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & = 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}.$$

Aggiungendo una variabile artificiale per vincolo, il problema di prima fase che otteniamo è il seguente:

$$P_\rho\begin{cases} \min\limits_{x,x^a} \rho = & & & & x_1^a & +x_2^a & \\ & 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +x_1^a & & = 4 \\ & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & & x_2^a & = 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_1^a, & x_2^a & \geq 0 \end{cases}.$$

**Esercizio 2.15.** ★ Scrivere il problema artificiale (o di prima fase) corrispondente al seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P\begin{cases} \max\limits_{x} z = & 12x_1 & +3x_2 & -4x_3 & \\ & -3x_1 & +2x_2 & +5x_3 & \geq 4 \\ & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & \leq 2 \\ & 3x_1 & +4x_2 & -3x_3 & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}.$$

**Risoluzione.** Nella costruzione del problema artificiale, si vuole fare in modo di ottenere, in corrispondenza del vettore dei termini noti positivo, una matrice identità $I$ in modo da poter applicare, al problema artificiale stesso, il simplesso scegliendo come base iniziale $B = I$.

Per prima cosa riscriviamo $P$ in forma standard, ottenendo:

$$P_s\begin{cases} \min\limits_{x} z = & -12x_1 & -3x_2 & +4x_3 & & & \\ & -3x_1 & +2x_2 & +5x_3 & -x_4 & & = 4 \\ & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & & +x_5 & = 2 \\ & 3x_1 & +4x_2 & -3x_3 & & & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{cases}.$$

Si può notare che in questo caso non c'è bisogno di utilizzare una variabile artificiale per vincolo. Infatti l'aggiunta della variabile slack $x_5$ genera automaticamente la seconda colonna della matrice $I$.

È sufficiente quindi aggiungere due sole variabili artificiali: una in corrispondenza del primo vincolo e l'altro in corrispondenza del terzo. Quindi il problema artificiale è il seguente:

$$P_\rho\begin{cases} \min\limits_{x,x^a} \rho = & & & & & & x_1^a & +x_2^a & \\ & -3x_1 & +2x_2 & +5x_3 & -x_4 & & +x_1^a & & = 4 \\ & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & & +x_5 & & & = 2 \\ & 3x_1 & +4x_2 & -3x_3 & & & & +x_2^a & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_1^a, & x_2^a & \geq 0 \end{cases}.$$

**Esercizio 2.16.** ★ Scrivere il problema artificiale (o di prima fase) corrispondente al seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$
P\left\{\begin{array}{lrrrl}
\max\limits_{x} z = & x_1 & -3x_2 & +4x_3 & \\
 & 3x_1 & -12x_2 & +15x_3 & \geq 4 \\
 & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & \geq 12 \\
 & -3x_1 & +14x_2 & -3x_3 & \geq 5 \\
 & 2x_1 & +4x_2 & +7x_3 & = 20 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}\right. .
$$

**Risoluzione.** Anzitutto riscriviamo il problema in forma standard:

$$
P_s\left\{\begin{array}{lrrrrrrl}
\min\limits_{x} z = & -x_1 & +3x_2 & -4x_3 & & & & \\
 & 3x_1 & -12x_2 & +15x_3 & -x_4 & & & = 4 \\
 & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & & -x_5 & & = 12 \\
 & -3x_1 & +14x_2 & -3x_3 & & & -x_6 & = 5 \\
 & 2x_1 & +4x_2 & +7x_3 & & & & = 20 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0
\end{array}\right. .
$$

Anche in questo caso non c'è bisogno di mettere una variabile artificiale per vincolo. Infatti per il gruppo di vincoli che in $P$ erano di $\geq$ è sufficiente mettere un'unica variabile artificiale.

Quindi il problema artificiale (nella sua prima forma) è:

$$
P_\rho\left\{\begin{array}{lrrrrrrrrl}
\min\limits_{x,x^a} \rho = & & & & & & & x_1^a & +x_2^a & \\
 & 3x_1 & -12x_2 & +15x_3 & -x_4 & & & +x_1^a & & = 4 \\
 & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & & -x_5 & & +x_1^a & & = 12 \\
 & -3x_1 & +14x_2 & -3x_3 & & & -x_6 & +x_1^a & & = 5 \\
 & 2x_1 & +4x_2 & +7x_3 & & & & & +x_2^a & = 20 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_1^a, & x_2^a & \geq 0
\end{array}\right. .
$$

Il problema artificiale finale (quello cioè contenente la matrice $I$) è ottenibile facilmente da $P_\rho$, effettuando sui vincoli le seguenti operazioni. Lasciamo inalterato il quarto vincolo, mentre dei restanti tre vincoli aventi la stessa variabile artificiale ricopiamo quello col termine noto più alto (cioè il secondo). Gli altri due vincoli (il primo e il terzo) vengono sostituiti dai vincoli ottenuti sottraendo dal secondo vincolo il primo e il terzo vincolo, rispettivamente. Otteniamo così il problema artificiale nella sua forma finale:

$$
P'_\rho\left\{\begin{array}{lrrrrrrrrl}
\min\limits_{x,x^a} \rho = & & & & & & & x_1^a & +x_2^a & \\
 & -x_1 & +11x_2 & -11x_3 & +x_4 & -x_5 & & & & = 8 \\
 & 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & & -x_5 & & +x_1^a & & = 12 \\
 & 5x_1 & -13x_2 & +7x_3 & & -x_5 & +x_6 & & & = 7 \\
 & 2x_1 & +4x_2 & +7x_3 & & & & & +x_2^a & = 20 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_1^a, & x_2^a & \geq 0
\end{array}\right. .
$$

**Esercizio 2.17.** ★ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P\begin{cases} \max\limits_{x} z = & 3x_1 & +4x_2 & -4x_3 & \\ & 2x_1 & -5x_2 & +x_3 & = -3 \\ & 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases},$$

risolvere $P$ applicando il simplesso a due fasi.

**Risoluzione.** Come prima cosa, riscriviamo il problema $P$ in modo da avere entrambi i termini noti positivi. Otteniamo:

$$P'\begin{cases} \max\limits_{x} z = & 3x_1 & +4x_2 & -4x_3 & \\ & -2x_1 & +5x_2 & -x_3 & = 3 \\ & 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}.$$

Trasformiamo $P'$ in forma standard[4]:

$$P_s\begin{cases} \min\limits_{x} z = & -3x_1 & -4x_2 & +4x_3 & \\ & -2x_1 & +5x_2 & -x_3 & = 3 \\ & 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}.$$

Il problema artificiale è il seguente:

$$P_\rho\begin{cases} \min\limits_{x,x^a} \rho = & & & & x_1^a & +x_2^a & \\ & -2x_1 & +5x_2 & -x_3 & +x_1^a & & = 3 \\ & 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & +x_2^a & = 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & x_1^a, & x_2^a & \geq 0 \end{cases}.$$

Per applicare il simplesso al problema $P_\rho$, scriviamo la tabella $M_\rho$ ottenuta ricopiando tutti i coefficienti del problema $P_\rho$:

$$M_\rho = \begin{array}{ccccc|c} -2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

La tabella $M_\rho$ non è una tabella in forma canonica. Dalla sua struttura però si vede facilmente che una base con cui partire per risolvere $P_\rho$ è quella ottenibile in corrispondenza di $\beta = \{1^a, 2^a\}$. Effettuando l'operazione pivot nella tabella $M_\rho$, in corrispondenza dell'elemento $M_{\rho_{14}} = 1$, otteniamo:

$$M_\rho = \begin{array}{ccccc|c} -2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 2 & -5 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{array}.$$

[4] In realtà questo passaggio non è necessario in questa fase, poichè tutti i vincoli di $P'$ erano già vincoli di uguaglianza e il problema artificiale non coinvolge la funzione obiettivo $z$, ma solo i vincoli di $P'$. La trasformazione di $P'$ nella forma standard sarebbe comunque necessaria prima di partire, ove possibile, con la seconda fase.

Ancora la tabella $M_\rho$ non è una tabella in forma canonica. Facendo pivot sull'elemento $M_{\rho 25} = 1$, otteniamo la prima tabella $T_\rho$ in forma canonica:

$$T_\rho = \begin{array}{rrrrr|r} -2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ \hline -1 & -7 & -1 & 0 & 0 & -8 \end{array},$$

corrispondente a $\beta = \{1^a, 2^a\}$.

Applicando il simplesso, potremmo scegliere come colonna di pivot, indifferentemente la prima, la seconda o la terza. Se utilizziamo la regola di Bland, scegliamo come colonna di pivot la prima; quindi facendo pivot su $T_{\rho 21} = 3$, otteniamo:

$$T_\rho = \begin{array}{rrrrr|r} 0 & 19/3 & 1/3 & 1 & 2/3 & 19/3 \\ 1 & 2/3 & 2/3 & 0 & 1/3 & 5/3 \\ \hline 0 & -19/3 & -1/3 & 0 & 1/3 & -19/3 \end{array},$$

corrispondente a $\beta = \{1^a, 1\}$.

Facendo pivot sull'elemento $T_{\rho 12} = 19/3$, otteniamo la seguente tabella (ottima per la prima fase):

$$T_\rho^* = \begin{array}{rrrrr|r} 0 & 1 & 1/19 & 3/19 & 2/19 & 1 \\ 1 & 0 & 12/19 & -2/19 & 5/19 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array},$$

corrispondente a $\beta = \{2, 1\}$.

La soluzione ottima del problema di prima fase $P_\rho$ è:

$$x_\rho^{*T} = [x_1^* \;\; x_2^* \;\; x_3^* \;\; x_1^{*a} \;\; x_2^{*a}] = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0] \quad \text{con} \quad \rho^* = 0.$$

Poichè $\rho^* = 0$, allora il problema $P_s$ è ammissibile (e quindi anche il problema di partenza $P$) e una soluzione ammissibile di base per $P_s$ è quella ottima per il problema $P_\rho$, cioè :

$$\bar{x}^T = [1 \;\; 1 \;\; 0] \quad \text{con} \quad \bar{z} = -7.$$

È possibile ora passare alla seconda fase. A partire dalla tabella $T_\rho^*$, da cui eliminiamo le due colonne corrispondenti alle variabili artificiali e in cui la riga dei costi ridotti è sostituita dai coefficienti di costo del problema $P_s$, otteniamo:

$$M = \begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1/19 & 1 \\ 1 & 0 & 12/19 & 1 \\ \hline -3 & -4 & 4 & 0 \end{array}.$$

La tabella $M$ non è in forma canonica; per ottenere la tabella in forma canonica, facciamo pivot prima sull'elemento $M_{21} = 1$ e poi sull'elemento $M_{12} = 1$. Otteniamo:

$$T = \begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1/19 & 1 \\ 1 & 0 & 12/19 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 116/19 & 7 \end{array}.$$

Poichè l'unico costo ridotto fuori base $\hat{c}_3 = 116/19$ è positivo, possiamo quindi concludere che la soluzione ammissibile determinata nella prima fase è anche una soluzione ottima per $P$. Quindi $x^{*T} = \bar{x}^T = [1 \;\; 1 \;\; 0]$, con $z^* = -\bar{z} = 7$ (il problema di partenza è un problema di massimizzazione).

**Esercizio 2.18.** ★ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \left\{ \begin{array}{lrrrl} \max\limits_{x} z = & -3x_1 & -5x_2 & +4x_3 & \\ & 8x_1 & -4x_2 & +x_3 & = -3 \\ & x_1 & -x_2 & +4x_3 & \leq 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

risolvere $P$ applicando il metodo del simplesso a due fasi.

**Risoluzione.**

Scrivendo $P$ in forma standard si ottiene:

$$P \left\{ \begin{array}{lrrrrl} \min\limits_{x} z = & 3x_1 & +5x_2 & -4x_3 & & \\ & 8x_1 & -4x_2 & +x_3 & & = -3 \\ & x_1 & -x_2 & +4x_3 & +x_4 & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0 \end{array} \right. .$$

Moltiplicando per -1 il primo vincolo (per applicare la prima fase del simplesso, i termini noti del sistema lineare devono essere positivi), il problema artificiale è il seguente:

$$P_\rho \left\{ \begin{array}{lrrrrrl} \min\limits_{x,x^a} \rho = & & & & & x_1^a & \\ & -8x_1 & +4x_2 & -x_3 & & +x_1^a & = 3 \\ & x_1 & -x_2 & +4x_3 & +x_4 & & = 6 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_1^a & \geq 0 \end{array} \right. .$$

Volendo applicare il metodo del simplesso al problema artificiale, si parte con la seguente tabella $M$:

$$M_\rho = \begin{array}{ccccc|c} -8 & 4 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array},$$

che, trasformata in forma canonica con l'operazione pivot sull'elemento $M_{\rho_{15}} = 1$, diventa:

$$T_\rho = \begin{array}{ccccc|c} -8 & 4 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ \hline 8 & -4 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}.$$

Facendo l'operazione pivot sull'elemento $T_{\rho_{12}} = 4$, si ottiene la seguente tabella ottima :

$$T_\rho^* = \begin{array}{ccccc|c} -2 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ -1 & 0 & 15/4 & 1 & 1/4 & 27/4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

Poichè $\rho^* = 0$, allora il problema $P$ è ammissibile e si può procedere con la seconda fase. La prima tabella che si ottiene è:

$$M = \begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & -1/4 & 0 & 3/4 \\ -1 & 0 & 15/4 & 1 & 27/4 \\ \hline 3 & 5 & -4 & 0 & 0 \end{array},$$

che, trasformata in forma canonica, diventa:

$$T = \begin{array}{rrrr|r} -2 & 1 & -1/4 & 0 & 3/4 \\ -1 & 0 & 15/4 & 1 & 27/4 \\ \hline 13 & 0 & -11/4 & 0 & -15/4 \end{array}.$$

Facendo pivot su $T_{23} = 15/4$, si ottiene la seguente tabella ottima:

$$T^* = \begin{array}{rrrr|r} -31/15 & 1 & 0 & 1/15 & 6/5 \\ -4/15 & 0 & 1 & 4/15 & 9/5 \\ \hline 184/15 & 0 & 0 & 11/15 & 6/5 \end{array}.$$

Pertanto la soluzione ottima di $P_s$ è $x^{*T} = [0 \;\; 6/5 \;\; 9/5 \;\; 0]$, con $z^* = -6/5$. Di conseguenza, la soluzione ottima di $P$ è $x^{*T} = [0 \;\; 6/5 \;\; 9/5]$, con $z^* = 6/5$.

**Esercizio 2.19.** ■ Risolvere i seguenti problemi di programmazione lineare, applicando il metodo del simplesso a due fasi.

$$1. \left\{ \begin{array}{lllll} \min\limits_x z = & -x_1 & -x_2 & +x_3 & \\ & 8x_1 & +x_2 & -3x_3 & \geq 3 \\ & -5x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = 16 \\ & & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. , \quad 2. \left\{ \begin{array}{lllll} \max\limits_x z = & -2x_1 & -x_2 & +x_3 & \\ & -6x_1 & +x_2 & -3x_3 & \geq 3 \\ & -5x_1 & +2x_2 & +4x_3 & = 16 \\ & 5x_1 & +10x_2 & -x_3 & \leq 7 \\ & x_1, & & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

$$3. \left\{ \begin{array}{lllll} \max\limits_x z = & -2x_1 & -x_2 & +x_3 & \\ & 3x_1 & +5x_2 & +2x_3 & = 5 \\ & x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = 3 \\ & x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. , \quad 4. \left\{ \begin{array}{lllll} \min\limits_x z = & -2x_1 & -x_2 & +x_3 & \\ & x_1 & +5x_2 & +2x_3 & \geq 5 \\ & x_1 & -x_2 & +2x_3 & \geq 1 \\ & -x_1 & +5x_2 & +7x_3 & = 2 \\ & -7x_1 & +4x_2 & -8x_3 & \leq 2 \\ & x_1, & & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

$$5. \left\{ \begin{array}{lllll} \max\limits_x z = & 8x_1 & -10x_2 & +9x_3 & \\ & x_1 & -5x_2 & +11x_3 & \geq 8 \\ & 9x_1 & +10x_2 & +4x_3 & \geq 3 \\ & 6x_1 & +4x_2 & -7x_3 & \geq 9 \\ & & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. , \quad 6. \left\{ \begin{array}{lllll} \max\limits_x z = & x_1 & +x_2 & +x_3 & \\ & -16x_1 & -5x_2 & +3x_3 & \leq 13 \\ & -5x_1 & +x_2 & +x_3 & = 11 \\ & x_1, & x_2 & & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

$$7. \left\{ \begin{array}{lllll} \min\limits_x z = & 3x_1 & +x_2 & -x_3 & \\ & -7x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = 3 \\ & 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & \leq 6 \\ & 2x_1 & +5x_2 & -x_3 & \geq 7 \\ & & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. , \quad 8. \left\{ \begin{array}{lllll} \min\limits_x z = & 4x_1 & -7x_2 & +7x_3 & \\ & x_1 & +x_2 & -3x_3 & \leq 3 \\ & 5x_1 & -4x_2 & -x_3 & \leq 1 \\ & 2x_1 & & +5x_3 & = 9 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. .$$

## 2.7 Teoria della dualità

**Esercizio 2.20.** ★ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P\left\{\begin{array}{lllllll} \min\limits_{x} z = & 4x_1 & -7x_2 & +4x_3 & +5x_4 & \\ & 6x_1 & +4x_2 & +6x_3 & -3x_4 & \leq 2 \\ & 7x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +4x_4 & \geq 3 \\ & 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & +6x_4 & = 5 \\ & x_1, & & x_3 & & \geq 0 \end{array}\right. ,$$

costruire il duale $D$ di $P$.

**Risoluzione.** Per prima cosa moltiplichiamo per -1 il primo vincolo di $P$; otteniamo:

$$P'\left\{\begin{array}{lllllll} \min\limits_{x} z = & 4x_1 & -7x_2 & +4x_3 & +5x_4 & \\ & -6x_1 & -4x_2 & -6x_3 & +3x_4 & \geq -2 \\ & 7x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +4x_4 & \geq 3 \\ & 3x_1 & -2x_2 & -x_3 & +6x_4 & = 5 \\ & x_1, & & x_3 & & \geq 0 \end{array}\right. .$$

Poichè $P'$ è un problema di minimizzazione, il suo duale $D$ è un problema di massimizzazione.

Poichè $P'$ ha tre vincoli, il suo duale $D$ ha tre variabili ($\pi_1,\ \pi_2,\ \ \pi_3$). In particolare le variabili $\pi_1$ e $\pi_2$ sono vincolate a essere positive, dal momento che corrispondono a vincoli di disuguaglianza in $P'$; viceversa, la variabile $\pi_3$ è libera in segno poichè corrisponde a un vincolo primale di uguaglianza.

Poichè $P'$ ha quattro variabili, il suo duale $D$ ha quattro vincoli. Il secondo e il quarto vincolo di $D$ sono di uguaglianza in quanto corrispondono a variabili primali libere in segno; viceversa il primo e il terzo vincolo di $D$ sono vincoli di disuguaglianza (in particolare sono vincoli di $\leq$, poichè $D$ è un problema di massimizzazione).

I coefficienti di costo della funzione obiettivo di $P'$ diventano i termini noti del sistema di vincoli in $D$ e viceversa.

La matrice dei vincoli di $D$ è ottenuta trasponendo la matrice dei vincoli di $P'$.

Pertanto, il duale $D$ di $P'$ (e quindi di $P$) è :

$$D\left\{\begin{array}{llllll} \max\limits_{\pi} w = & -2\pi_1 & +3\pi_2 & +5\pi_3 & \\ & -6\pi_1 & +7\pi_2 & +3\pi_3 & \leq 4 \\ & -4\pi_1 & +5\pi_2 & -2\pi_3 & = -7 \\ & -6\pi_1 & +5\pi_2 & -\pi_3 & \leq 4 \\ & 3\pi_1 & +4\pi_2 & +6\pi_3 & = 5 \\ & \pi_1, & \pi_2 & & \geq 0 \end{array}\right. .$$

**Esercizio 2.21.** ★ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P\left\{\begin{array}{lrrrrrl} \max\limits_x z = & -x_1 & +7x_2 & -4x_3 & +5x_4 & -x_5 & \\ & 6x_1 & -2x_2 & +5x_3 & -3x_4 & -x_5 & = 3 \\ & 2x_1 & & -x_3 & & & \geq 4 \\ & x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +4x_4 & +3x_5 & \leq 6 \\ & 4x_1 & +x_2 & -3x_3 & +6x_4 & +4x_5 & \geq 2 \\ & & & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}\right. ,$$

costruire il duale $D$ di $P$.

**Risoluzione.** Per prima cosa moltiplichiamo per -1 il secondo e il quarto vincolo di $P$; otteniamo:

$$P'\left\{\begin{array}{lrrrrrl} \max\limits_x z = & -x_1 & +7x_2 & -4x_3 & +5x_4 & -x_5 & \\ & 6x_1 & -2x_2 & +5x_3 & -3x_4 & -x_5 & = 3 \\ & -2x_1 & & +x_3 & & & \leq -4 \\ & x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +4x_4 & +3x_5 & \leq 6 \\ & -4x_1 & -x_2 & +3x_3 & -6x_4 & -4x_5 & \leq -2 \\ & & & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}\right. .$$

Poichè $P'$ è un problema di massimizzazione, il suo duale $D$ è un problema di minimizzazione.

Poichè $P'$ ha quattro vincoli, il suo duale $D$ ha quattro variabili $(\pi_1, \ \pi_2, \ \pi_3, \ \pi_4)$. In particolare le variabili $\pi_2$, $\pi_3$ e $\pi_4$ sono vincolate a essere positive, dal momento che corrispondono a vincoli di disuguaglianza in $P'$; viceversa, la variabile $\pi_1$ è libera in segno poichè corrisponde a un vincolo primale di uguaglianza.

Poichè $P'$ ha cinque variabili, il suo duale $D$ ha cinque vincoli. Il primo e il secondo vincolo di $D$ sono di uguaglianza in quanto corrispondono a variabili primali libere in segno; viceversa il terzo, il quarto e il quinto vincolo di $D$ sono vincoli di disuguaglianza (in particolare sono vincoli di $\geq$, poichè $D$ è un problema di minimizzazione).

I coefficienti di costo della funzione obiettivo di $P'$ diventano i termini noti del sistema di vincoli in $D$ e viceversa.

La matrice dei vincoli di $D$ è ottenuta trasponendo la matrice dei vincoli di $P'$.

Pertanto, il duale $D$ di $P'$ (e quindi di $P$) è :

$$D\left\{\begin{array}{lrrrrl} \min\limits_\pi w = & 3\pi_1 & -4\pi_2 & +6\pi_3 & -2\pi_4 & \\ & 6\pi_1 & -2\pi_2 & +\pi_3 & -4\pi_4 & = -1 \\ & -2\pi_1 & & +5\pi_3 & -\pi_4 & = 7 \\ & 5\pi_1 & +\pi_2 & +5\pi_3 & +3\pi_4 & \geq -4 \\ & -3\pi_1 & & +4\pi_3 & -6\pi_4 & \geq 5 \\ & -\pi_1 & & +3\pi_3 & -4\pi_4 & \geq -1 \\ & & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4 & \geq 0 \end{array}\right. .$$

**Esercizio 2.22.** ★ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \left\{ \begin{array}{llllll} \max\limits_{x} z = & 3x_1 & -4x_2 & +5x_3 & \\ & 5x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 4 \\ & 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & \leq 4 \\ & x_1 & & +x_3 & \leq 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

- scrivere tutte le relazioni di scarto complementare che legano $P$ e il suo duale;
- sapendo che la soluzione ottima di $P$ è $x^{*T} = [7/8 \ \ 0 \ \ 1/8]$, determinare una soluzione ottima del duale $D$ applicando il teorema di complementarietà (complementary slackness).

**Risoluzione.** Il duale $D$ di $P$ è il seguente:

$$D \left\{ \begin{array}{lllll} \min\limits_{\pi} w = & 4\pi_1 & +4\pi_2 & +\pi_3 & \\ & 5\pi_1 & +3\pi_2 & +\pi_3 & \geq 3 \\ & 2\pi_1 & +2\pi_2 & & \geq -4 \\ & -3\pi_1 & +3\pi_2 & +\pi_3 & \geq 5 \\ & & \pi_2, & \pi_3, & \geq 0 \end{array} \right. .$$

Le relazioni di scarto complementare sono:

$$C_1 \left\{ \begin{array}{l} (5\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 - 3)x_1 = 0 \\ (2\pi_1 + 2\pi_2 + 4)x_2 = 0 \\ (-3\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 - 5)x_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad C_2 \left\{ \begin{array}{l} (4 - 5x_1 - 2x_2 + 3x_3)\pi_1 = 0 \\ (4 - 3x_1 - 2x_2 - 3x_3)\pi_2 = 0 \\ (1 - x_1 - x_3)\pi_3 = 0 \end{array} \right. .$$

Per risolvere $D$ applicando il teorema della complementarietà primale-duale a partire da $x^*$, è sufficiente calcolare la soluzione complementare di $x^*$, sostituendo le componenti di $x^*$ nei sistemi $C_1$ e $C_2$. In particolare, poichè la prima e la terza componente di $x^*$ sono non nulle, allora, tenendo conto della prima e della terza uguaglianza in $C_1$, una soluzione ottima $\pi^*$ del duale deve soddisfare il seguente sistema:

$$S \left\{ \begin{array}{l} 5\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 - 3 = 0 \\ -3\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 - 5 = 0 \end{array} \right. ,$$

cioè:

$$S' \left\{ \begin{array}{l} 5\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 = 3 \\ -3\pi_1 + 3\pi_2 + \pi_3 = 5 \end{array} \right. .$$

Inoltre, poichè il secondo vincolo di $P$, in corrispondenza di $x^*$, è soddisfatto per disuguaglianza stretta, allora per la seconda uguaglianza del sistema $C_2$ deve essere $\pi_2^* = 0$. In definitiva, la soluzione ottima del duale si ottiene quindi risolvendo il seguente sistema:

$$S'' \left\{ \begin{array}{l} 5\pi_1 + \pi_3 = 3 \\ -3\pi_1 + \pi_3 = 5 \end{array} \right. ,$$

da cui $\pi_1^* = -1/4$ e $\pi_3^* = 17/4$. Quindi $\pi^{*T} = [-1/4 \ \ 0 \ \ 17/4]$.

È possibile verificare l'uguaglianza dei valori di funzione obiettivo in $x^*$ e $\pi^*$ pari a 13/4. Ciò dipende dal fatto che $\pi^*$ è la soluzione complementare di $x^*$, cioè ottenuta imponendo le relazioni di complementarietà a partire da $x^*$.

**Esercizio 2.23.** ★ Dato il problema $P$ di programmazione lineare dell'esercizio 2.20,

- scrivere tutte le relazioni di scarto complementare che legano $P$ e il suo duale;
- sapendo che la soluzione ottima di $P$ è $x^{*T} = [0 \;\; 3/2 \;\; 0 \;\; 4/3]$, determinare una soluzione ottima del duale $D$ applicando il teorema di complementarietà (complementary slackness).

**Risoluzione.** Le relazioni di scarto complementare sono:

$$C_1 \begin{cases} (6\pi_1 - 7\pi_2 - 3\pi_3 + 4)x_1 = 0 \\ (-4\pi_1 + 5\pi_2 - 2\pi_3 + 7)x_2 = 0 \\ (6\pi_1 - 5\pi_2 + \pi_3 + 4)x_3 = 0 \\ (3\pi_1 + 4\pi_2 + 6\pi_3 - 5)x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad C_2 \begin{cases} (-6x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 2)\pi_1 = 0 \\ (7x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 3)\pi_2 = 0 \\ (3x_1 - 2x_2 - x_3 + 6x_4 - 5)\pi_3 = 0 \end{cases} .$$

Applicando le relazioni di complementarietà $C_1$ e $C_2$, poichè la seconda e la quarta componente di $x^*$ sono non nulle, allora, tenendo conto della seconda e della quarta uguaglianza in $C_1$, una soluzione ottima $\pi^*$ del duale deve soddisfare il seguente sistema:

$$S \begin{cases} -4\pi_1 + 5\pi_2 - 2\pi_3 + 7 = 0 \\ 3\pi_1 + 4\pi_2 + 6\pi_3 - 5 = 0 \end{cases} .$$

Inoltre, poichè il secondo vincolo di $P$, in corrispondenza di $x^*$, è soddisfatto per disuguaglianza stretta, allora per la seconda uguaglianza del sistema $C_2$ deve essere $\pi_2^* = 0$. Quindi la soluzione ottima del duale si ottiene quindi risolvendo il seguente sistema:

$$S' \begin{cases} -4\pi_1 - 2\pi_3 = -7 \\ 3\pi_1 + 6\pi_3 = 5 \end{cases} .$$

da cui $\pi_1^* = 16/9$ e $\pi_3^* = -1/18$. Quindi $\pi^{*T} = [16/9 \;\; 0 \;\; -1/18]$.

**Esercizio 2.24.** ★ Dato il problema $P$ di programmazione lineare dell'esercizio 2.21,

- scrivere tutte le relazioni di scarto complementare che legano $P$ e il suo duale;
- sapendo che la soluzione ottima di $P$ è $x^{*T} = [2 \;\; -24/7 \;\; 0 \;\; 37/7 \;\; 0]$, determinare una soluzione ottima del duale $D$ applicando il teorema di complementarietà (complementary slackness).

**Risoluzione.** Le relazioni di scarto complementare sono:

$$C_1 \begin{cases} (6\pi_1 - 2\pi_2 + \pi_3 - 4\pi_4 + 1)x_1 = 0 \\ (-2\pi_1 + 5\pi_3 - \pi_4 - 7)x_2 = 0 \\ (5\pi_1 + \pi_2 + 5\pi_3 + 3\pi_4 + 4)x_3 = 0 \\ (-3\pi_1 + 4\pi_3 - 6\pi_4 - 5)x_4 = 0 \\ (-\pi_1 + 3\pi_3 - 4\pi_4 + 1)x_5 = 0 \end{cases} \text{e } C_2 \begin{cases} (6x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 - 3)\pi_1 = 0 \\ (2x_1 - x_3 - 4)\pi_2 = 0 \\ (-x_1 - 5x_2 - 5x_3 - 4x_4 - 3x_5 + 6)\pi_3 = 0 \\ (4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 + 4x_5 - 2)\pi_4 = 0 \end{cases} .$$

Poichè la prima, la seconda e la quarta componente di $x^*$ sono non nulle, allora, tenendo conto della prima, della seconda e della quarta uguaglianza in $C_1$, una soluzione ottima $\pi^*$ del duale deve soddisfare il seguente sistema:

$$S \begin{cases} 6\pi_1^* - 2\pi_2^* + \pi_3^* - 4\pi_4^* + 1 = 0 \\ -2\pi_1 + 5\pi_3 - \pi_4 - 7 = 0 \\ -3\pi_1^* + 4\pi_3^* - 6\pi_4^* - 5 = 0 \end{cases} .$$

Inoltre, poichè il quarto vincolo di $P$, in corrispondenza di $x^*$, è soddisfatto per disuguaglianza stretta, allora per la quarta uguaglianza del sistema $C_2$ deve essere $\pi_4^* = 0$. In definitiva, la soluzione ottima del duale si ottiene quindi risolvendo il seguente sistema:

$$S' \begin{cases} 6\pi_1^* - 2\pi_2^* + \pi_3^* = -1 \\ -2\pi_1 + 5\pi_3 = 7 \\ -3\pi_1^* + 4\pi_3^* = 5 \end{cases} ,$$

da cui $\pi_1^* = 3/7$, $\pi_2^* = 18/7$ e $\pi_3^* = 11/7$. Quindi $\pi^{*T} = [3/7 \;\; 18/7 \;\; 11/7 \;\; 0]$.

**Esercizio 2.25.** ★ Dato il problema $P$ dell'esercizio 2.13,

1. costruire il duale $D$ di $P$;
2. a partire dalla soluzione ottima di $P$, determinare una soluzione ottima di $D$ applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness).

**Risoluzione.** Il duale $D$ di $P$ è:

$$D \begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & \pi_1 & -\pi_2 & -6\pi_3 & \\ & \pi_1 & +\pi_2 & +2\pi_3 & \leq 2 \\ & \pi_1 & -\pi_2 & -3\pi_3 & \leq 1 \\ & -\pi_1 & & & \leq 0 \\ & & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases} ,$$

cioè:

$$D \begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & \pi_1 & -\pi_2 & -6\pi_3 & \\ & \pi_1 & +\pi_2 & +2\pi_3 & \leq 2 \\ & \pi_1 & -\pi_2 & -3\pi_3 & \leq 1 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases} .$$

Applichiamo le relazioni di scarto complementare a partire dalla soluzione ottima $x^{*T} = [0 \;\; 1 \;\; 0]$ di $P$. Poichè la seconda componente di $x^*$ è non nulla, in corrispondenza di una soluzione ottima $\pi^*$ di $D$ il secondo vincolo di $D$ è soddisfatto per uguaglianza, cioè:

$$\pi_1^* - \pi_2^* - 3\pi_3^* = 1.$$

Inoltre, poichè il terzo vincolo di $P$, in corrispondenza di $x^*$, è soddisfatto per disuguaglianza stretta, allora $\pi_3^* = 0$; di conseguenza, $\pi_1^*$ e $\pi_2^*$ sono tali che

$$\pi_1^* - \pi_2^* = 1.$$

Il duale ammette quindi infinite soluzioni ottime del tipo:

$$\pi^{*T}(k) = [1 + k \quad k \quad 0] \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Il parametro $k$ non può essere scelto del tutto arbitrariamente: esso infatti deve garantire che $\pi^*(k)$ sia una soluzione ammissibile per $D$. Quindi, poichè $\pi^*(k) \geq 0$, $k$ deve essere tale che

$$0 \leq k \leq 1.$$

Inoltre, poichè il vettore $\pi^*(k)$ deve soddisfare anche il primo vincolo di $D$, si ottiene $k \leq 1/2$. Quindi in definitiva, l'insieme delle soluzioni ottime di $D$ è:

$$\pi^{*T}(k) = [1 + k \quad k \quad 0] \quad \text{con} \quad 0 \leq k \leq 1/2.$$

**Esercizio 2.26.** ■ Dati i problemi di programmazione lineare degli esercizi 2.5 e 2.6, per ciascuno di essi costruirne il duale e, ove possibile, ricavare una soluzione ottima del duale applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness).

**Esercizio 2.27.** ■ Per ciascuno dei problemi di programmazione lineare dell'esercizio 2.19, costruire il duale $D$ e, ove possibile, risolvere $D$ applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness) a partire dalla conoscenza di una soluzione ottima del primale.

**Esercizio 2.28.** ■ Dato il problema $P$ dell'esercizio 2.18,

1. costruire il duale $D$ di $P$;
2. a partire dalla soluzione ottima di $P$, determinare una soluzione ottima di $D$ applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness).

**Esercizio 2.29.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrrl} \max\limits_{x} z = & 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & \\ & 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & = 2 \\ & 7x_1 & -3x_2 & +5x_3 & \leq 8 \\ & x_1, & & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

siano $\hat{x}^T = [1, 0, 0]$ e $\bar{x}^T = [2/3, 0, 2/3]$ due punti ammissibili per $P$. Applicando esclusivamente le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), verificare l'ottimalità o meno dei punti $\hat{x}$ e $\bar{x}$.

## 2.8 Esercizi di ricapitolazione

**Esercizio 2.30.** ★ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \begin{cases} \max\limits_{x} z = & -2x_1 & +3x_2 & \\ & -4x_1 & -3x_2 & \geq 10 \\ & -2x_1 & +4x_2 & \leq 6 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{cases},$$

sia

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

una soluzione di base ammissibile non ottima per $P$ in corrispondenza dell'insieme di indici di base $\beta = \{1^-, 4\}$, con

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

e $b$ il vettore dei termini noti del sistema di vincoli di $P$.

1. Determinare una soluzione ottima per $P$ applicando il metodo del simplesso a partire da $\bar{x}$;

2. costruire il duale $D$ di $P$;

3. applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), risolvere $D$ a partire dalla soluzione ottima di $P$.

**Risoluzione.**

Per applicare il simplesso bisogna riscrivere il problema in forma standard e costruire la tabella $T$ in forma canonica, corrispondente a $\beta$. Ricordiamo che, poichè $x_1$ è libera in segno, essa viene sostituita nella forma standard dalle variabili positive $x_1^+$ e $x_1^-$, ponendo $x_1 = x_1^+ - x_1^-$. La prima tabella in forma canonica è la seguente:

$$T = \begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -3/4 & -1/4 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 11/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -9/2 & -1/2 & 0 & 5 \end{array}.$$

Facendo pivot sull'elemento $T_{23} = 11/2$, si ottiene

$$T = \begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 0 & -2/11 & 3/22 & 29/11 \\ 0 & 0 & 1 & 1/11 & 2/11 & 2/11 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1/11 & 9/11 & 64/11 \end{array}.$$

Infine, facendo pivot sull'elemento $T_{24} = 1/11$, si ottiene la seguente tabella ottima:

$$T^* = \begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 & 1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \end{array},$$

corrispondente a $x^{*T} = [0 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 0]$ e $z^* = 6$ (il problema di partenza è di massimizzazione). Tenendo conto che $x_1 = x_1^+ - x_1^-$, la soluzione ottima del problema di partenza è $x^{*T} = [-3 \;\; 0]$.

Prima di costruire il duale $D$ di $P$, moltiplichiamo per -1 il primo vincolo di $P$, ottenendo:

$$P \begin{cases} \max\limits_{x} z = & -2x_1 & +3x_2 & \\ & 4x_1 & +3x_2 & \leq -10 \\ & -2x_1 & +4x_2 & \leq 6 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{cases},$$

Quindi il duale è:

$$D \begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & -10\pi_1 & +6\pi_2 & \\ & 4\pi_1 & -2\pi_2 & = -2 \\ & 3\pi_1 & +4\pi_2 & \geq 3 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases},$$

Imponendo le relazioni di scarto complementare, si ottiene $\pi^{*T} = [0 \;\; 1]$.

**Esercizio 2.31.** ■ Dati i problemi di programmazione lineare degli esercizi 2.5 e 2.6, risolverli applicando il metodo del simplesso e verificarne la corrispondenza geometrica.

**Esercizio 2.32.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \begin{cases} \max\limits_{x} z = & -2x_1 & +2x_2 & -x_3 & \\ & -x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ & 2x_1 & +x_2 & & \leq 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases}$$

e dati i punti $\hat{x}^T = [2 \;\; 0 \;\; 3]$ e $\bar{x}^T = [1/2 \;\; 3/2 \;\; 0]$ ammissibili per $P$,

1. verificare se $\hat{x}$ e $\bar{x}$ sono soluzioni di base per $P$;
2. utilizzando esclusivamente le relazioni di scarto complementare (complementary slackness) verificare se $\hat{x}$ e $\bar{x}$ sono soluzioni ottime per $P$.

**Esercizio 2.33.** ■ Dati i problemi di programmazione lineare degli esercizi 2.5 e 2.6, per ciascuno di essi costruire il duale e risolvere il duale applicando il metodo del simplesso.

**Esercizio 2.34.** ■ Per ciascuno dei problemi di programmazione lineare dell'esercizio 2.12, costruire il duale $D$ e risolvere $D$ graficamente. Applicare successivamente, ove possibile, le relazioni di scarto complementare (complementary slackness) per ricavare una soluzione ottima dei rispettivi problemi primali.

**Esercizio 2.35.** ■ Per ciascuno dei problemi di programmazione lineare dell'esercizio 2.19, costruire il duale $D$ e risolvere $D$ applicando il metodo del simplesso.

**Esercizio 2.36.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{rrrl} \max\limits_{x} z = & x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & \\ & x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & 2x_1 & +2x_2 & \leq 5 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

sia

$$\bar{x} = \left[ \begin{array}{c} B^{-1}b \\ 0 \end{array} \right]$$

una soluzione ammissibile di base per $P$ in corrispondenza dell'insieme di indici di base $\beta = \{2, 3\}$, con

$$B^{-1} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{array} \right]$$

e $b$ il vettore dei termini noti del sistema di vincoli di $P$.

1. Se $\bar{x}$ non è ottima, determinare una soluzione ottima per $P$ applicando il metodo del simplesso a partire da $\bar{x}$;
2. applicando l'analisi di sensitività, come varia la soluzione ottima di $P$ se il coefficiente di costo corrispondente alla variabile $x_1$ passa da 1 a -1?
3. costruire il duale $D$ di $P$;
4. applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), risolvere $D$ a partire dalla soluzione ottima di $P$ determinata al punto 1.

**Esercizio 2.37.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{rrrl} \min\limits_{x} z = & \frac{1}{2}x_1 & +x_2 & \\ & x_1 & -x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & & x_2 & \leq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

1. Risolvere P applicando il simplesso duale;
2. costruire il duale $D$ di $P$;
3. applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), risolvere $D$ a partire dalla soluzione ottima di $P$ determinata al punto 1;
4. applicando l'analisi di sensitività, come varia la soluzione di $P$ se il termine noto del primo vincolo passa da 2 a 4?

**Esercizio 2.38.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P\left\{\begin{array}{rrrl} \max\limits_{x} z = & -\dfrac{1}{2}x_1 & +x_2 & \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 2 \\ & 2x_1 & +2x_2 & \leq 7 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}\right. ,$$

sia

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

una soluzione di base inammissibile per $P$ in corrispondenza dell'insieme di indici di base $\beta = \{2, 3\}$, con

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

e $b$ il vettore dei termini noti del sistema di vincoli di $P$.

1. Verificare che $\bar{x}$ è una soluzione superottima per $P$ (o D-ammissibile) e determinare una soluzione ottima per $P$ applicando il metodo del simplesso duale a partire da $\bar{x}$;

2. applicando l'analisi di sensitività, come varia la soluzione ottima di $P$ se il coefficiente di costo corrispondente alla variabile $x_2$ passa da 1 a 3?

3. costruire il duale $D$ di $P$;

4. applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), risolvere $D$ a partire dalla soluzione ottima di $P$ determinata al punto 1.

**Esercizio 2.39.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P\left\{\begin{array}{rrrl} \max\limits_{x} z = & -2x_1 & +x_2 & \\ & -2x_1 & +2x_2 & \leq 3 \\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 6 \\ & 2x_1 & & \leq 5 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}\right. ,$$

1. risolvere $P$ applicando il metodo del simplesso;

2. costruire il duale $D$ di $P$;

3. applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), risolvere $D$ a partire dalla soluzione ottima di $P$ determinata al punto 1;

4. applicando l'analisi di sensitività, come varia la funzione obiettivo di $P$ all'ottimo, se il termine noto del primo vincolo di $P$ passa da 3 a 1?

**Esercizio 2.40.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrrl} \max\limits_x z = & 7x_1 & -3x_2 & +4x_3 & \\ & 3x_1 & -5x_2 & +4x_3 & = 6 \\ & 2x_1 & +4x_2 & -5x_3 & \leq 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

1. risolvere $P$, applicando il metodo del simplesso;
2. costruire il duale $D$ di $P$;
3. utilizzando le informazioni ottenute su $P$ al punto 1, risolvere $D$.

**Esercizio 2.41.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrl} \min\limits_x z = & 2x_1 & -3x_2 & \\ & 2x_1 & -4x_2 & \geq 4 \\ & -4x_1 & -8x_2 & \geq 5 \\ & -x_1 & -2x_2 & \leq 7 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

1. costruire il duale $D$ di $P$;
2. sia $\hat{\pi}^T = [1 \ \ 0 \ \ 0]$ una soluzione ammissibile per $D$: applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), verificare che $\hat{\pi}$ non è una soluzione ottima per $D$;
3. verificare che a $\hat{\pi}$ corrisponde una soluzione di base per $D$;
4. risolvere $D$ a partire da $\hat{\pi}$, applicando il metodo del simplesso;
5. a partire dalle informazioni ottenute su $D$, risolvere $P$.

**Esercizio 2.42.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrrl} \min\limits_x z = & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & \\ & 2x_1 & -2x_2 & -x_3 & = -1 \\ & 3x_1 & +x_2 & -x_3 & \geq 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

1. costruire il duale $D$ di $P$;
2. risolvere graficamente $D$;
3. applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), risolvere $P$ a partire dalla soluzione ottima di $D$ determinata al punto 2.

**Esercizio 2.43.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \begin{cases} \min\limits_{x} z = & 3x_1 & +6x_2 & +5x_3 & \\ & 2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & \leq 2 \\ & 2x_1 & +3x_2 & & \geq 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases},$$

1. costruire il duale $D$ di $P$;
2. determinare graficamente una soluzione ottima di $D$;
3. ricavare una soluzione ottima di $P$, a partire dalla soluzione ottima di $D$ applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness).

**Esercizio 2.44.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \begin{cases} \max\limits_{x} z = & -2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \\ & 3x_1 & +6x_2 & +2x_3 & = 5 \\ & 4x_1 & -3x_2 & +x_3 & \geq 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases},$$

sia $\hat{x}^T = [1 \;\; 0 \;\; 1]$ una soluzione ammissibile per $P$.

1. Verificare se a $\hat{x}$ corrisponde una soluzione di base per $P$;
2. in base alle informazioni ricavate al punto 1, risolvere $P$ applicando il metodo del simplesso secondo il seguente schema:
   - se a $\hat{x}$ corrisponde una soluzione di base per $P$, applicare il simplesso a partire da $\hat{x}$;
   - se a $\hat{x}$ non corrisponde una soluzione di base per $P$, determinare una soluzione di base ammissibile $\bar{x}$ per $P$ a partire da $\hat{x}$ e applicare il simplesso a partire da $\bar{x}$;
3. costruire il duale $D$ di $P$;
4. applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), risolvere $D$ a partire dalla soluzione ottima di $P$ determinata al punto 2.

**Esercizio 2.45.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \begin{cases} \max\limits_{x} z = & -2x_1 & +2x_2 & -4x_3 & \\ & -4x_1 & +2x_2 & -5x_3 & \leq 1 \\ & 2x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases},$$

sia

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

una soluzione di base non ottima per $P$ in corrispondenza dell'insieme di indici di base $\beta = \{2, 4\}$, con

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix}$$

e $b$ il vettore dei termini noti del sistema di vincoli di $P$.

1. Verificare se $\bar{x}$ è una soluzione di base P-ammissibile o D-ammissibile per $P$;
2. in base alle informazioni ricavate al punto 1, determinare una soluzione ottima di $P$ applicando il metodo del simplesso secondo il seguente schema:
   - se $\bar{x}$ è P-ammissibile, applicare il simplesso primale a partire da $\bar{x}$;
   - se $\bar{x}$ è D-ammissibile, applicare il simplesso duale a partire da $\bar{x}$;
   - se $\bar{x}$ non è nè P-ammissibile, nè D-ammissibile, applicare il simplesso a due fasi.
3. costruire il duale $D$ di $P$;
4. applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), risolvere $D$ a partire dalla soluzione ottima di $P$ determinata al punto 2.

**Esercizio 2.46.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrl} \max\limits_{x} z = & 4x_1 & +5x_2 & \\ & x_1 & -2x_2 & = -2 \\ & 4x_1 & +2x_2 & \leq 3 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

1. risolvere $P$, applicando il simplesso a due fasi;
2. costruire il duale $D$ di $P$;
3. utilizzando le informazioni ottenute su $P$ al punto 1, risolvere $D$ applicando le relazioni di complementarietà (complementary slackness);
4. come varia la funzione obiettivo all'ottimo, se il termine noto del secondo vincolo di $P$ passa da 3 a 5 e la base ottima determinata al punto 1 si mantiene ancora ammissibile?

**Esercizio 2.47.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrrl} \max\limits_{x} z = & 4x_1 & -3x_2 & +7x_3 & \\ & 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & = 0 \\ & 4x_1 & +3x_2 & -2x_3 & \geq 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

1. risolvere $P$ applicando il metodo del simplesso a due fasi;
2. costruire il duale $D$ di $P$;
3. utilizzando le informazioni ottenute su $P$ al punto 1, risolvere $D$ e verificarne la corrispondenza grafica.

**Esercizio 2.48.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrl} \min\limits_{x} z = & x_1 & -2x_2 & \\ & -2x_1 & -x_2 & = 2 \\ & x_1 & +2x_2 & \leq 2 \\ & & x_2 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

1. determinare graficamente una soluzione ottima $x^*$ di $P$;
2. a partire dalla conoscenza di $x^*$, costruire la tabella ottima in forma canonica che si otterrebbe se si risolvesse $P$ col metodo del simplesso;
3. costruire il duale $D$ di $P$;
4. utilizzando le informazioni ottenute su $P$ al punto 1, risolvere $D$ e verificarne la corrispondenza grafica.

**Esercizio 2.49.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrrl} \max\limits_{x} z = & \frac{1}{2}x_1 & +x_2 & & \\ & -x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq 2 \\ & & 3x_2 & -x_3 & \leq 4 \\ & x_1 & +x_2 & & \leq 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

1. risolvere $P$ applicando il metodo del simplesso;
2. costruire il duale $D$ di $P$;
3. utilizzando le informazioni ottenute su $P$ al punto 1, risolvere $D$.

**Esercizio 2.50.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrrl} \max\limits_{x} z = & -3x_1 & -4x_2 & -6x_3 & \\ & 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & \geq 2 \\ & x_1 & +5x_2 & +4x_3 & \geq 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

1. risolvere $P$ applicando il simplesso duale;

2. costruire il duale $D$ di $P$;
3. applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), risolvere $D$ a partire dalla soluzione ottima di $P$ determinata al punto 1.

**Esercizio 2.51.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrrl} \max\limits_x z = & -4x_1 & +2x_2 & -3x_3 & \\ & -2x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 1 \\ & -x_1 & +4x_2 & +x_3 & \geq 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

sia $\bar{x}^T = [0 \;\; 1/2 \;\; 0]$ un punto inamissibile per $P$.

1. Verificare che al punto $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base superottima per $P$;
2. risolvere $P$ col simplesso duale a partire da $\bar{x}$.

**Esercizio 2.52.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrrl} \max\limits_x z = & -4x_1 & +2x_2 & -3x_3 & \\ & -2x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 1 \\ & -x_1 & +4x_2 & +x_3 & \geq 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right.$$

1. risolvere $P$ applicando il metodo del simplesso;
2. costruire il duale $D$ di $P$;
3. risolvere $D$ a partire dalla soluzione ottima di $P$, applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness);
4. risolvere $D$ applicando il metodo del simplesso;
5. risolvere $D$ graficamente.

**Esercizio 2.53.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \left\{ \begin{array}{lrrrl} \min\limits_x z = & 3x_1 & +7x_2 & -4x_3 & \\ & 4x_1 & -5x_2 & +2x_3 & \leq 3 \\ & 6x_1 & +5x_2 & -6x_3 & = 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

sia $x^{*T} = [11/10 \;\; 7/25 \;\; 0]$ una soluzione ottima per $P$.

1. Costruire il duale $D$ di $P$;

2. risolvere $D$ a partire dalla soluzione ottima di $P$, applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness).

**Esercizio 2.54.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \begin{cases} \max\limits_{x} z = & -x_1 & & -3x_3 & \\ & x_1 & -2x_2 & +x_3 & = -1 \\ & x_1 & +3x_2 & & \leq 2 \\ & & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases},$$

1. costruire il duale $D$ di $P$;
2. risolvere graficamente $D$;
3. risolvere $P$ a partire dalla soluzione ottima di $D$, applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness);
4. detta $x^*$ la soluzione ottima di $P$ ottenuta al punto precedente, costruire la tabella in forma canonica rispetto a $x^*$;
5. come cambia la soluzione di $P$ se si aggiunge il vincolo

$$-5x_1 + 4x_2 + x_3 \leq -2?$$

**Esercizio 2.55.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare

$$P \begin{cases} \max\limits_{x} z = & -2x_1 & +x_2 & +4x_3 & \\ & 8x_1 & -4x_2 & +6x_3 & = 2 \\ & 4x_1 & +5x_2 & -7x_3 & \leq 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \end{cases},$$

sia

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

una soluzione di base ammissibile non ottima per $P$ in corrispondenza dell'insieme di indici di base $\beta = \{3, 4\}$, con

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 \\ 7/6 & 1 \end{bmatrix}$$

e $b$ il vettore dei termini noti del sistema di vincoli di $P$.

1. Determinare una soluzione ottima per $P$ applicando il metodo del simplesso a partire da $\bar{x}$;
2. costruire il duale $D$ di $P$;
3. applicando le relazioni di scarto complementare (complementary slackness), risolvere $D$ a partire dalla soluzione ottima di $P$.

# Capitolo 3

# Programmazione Lineare Intera e Mista

## 3.1 La formulazione ideale

**Esercizio 3.1.** ★ Dato il seguente problema $PLI$ di programmazione lineare intera,

$$PLI \begin{cases} \max\limits_{x} z = & x_1 & +2x_2 & \\ & -3x_1 & +5x_2 & \leq 10 \\ & 7x_1 & +5x_2 & \leq 35 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{cases}$$

verificare graficamente se la regione ammissibile del rilassato continuo di $PLI$ è non vuota e limitata e, in caso positivo, determinare la formulazione ideale di $PLI$.

**Risoluzione.** Il rilassato continuo $PL$ di $PLI$ si ottiene da $PLI$, eliminando i vincoli di interezza sulle variabili decisionali. Otteniamo quindi:

$$PL \begin{cases} \max\limits_{x} z = & x_1 & +2x_2 & \\ & -3x_1 & +5x_2 & \leq 10 \\ & 7x_1 & +5x_2 & \leq 35 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{cases}$$

Dalla figura 3.1 si vede facilmente come la regione ammissibile $X_{PL}$ (in grigio) del problema $PL$ sia non vuota e limitata.

Indicando con $X$ la regione ammissibile di $PLI$, costituita dai soli punti a coordinate intere contenuti in $X_{PL}$ (figura 3.1), la formulazione ideale $F_I$ di $PLI$ si ottiene scrivendo i vincoli che descrivono il poliedro corrispondente alla copertura convessa (figura 3.2) di $X$. I vertici di tale poliedro sono i punti di coordinate $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 3)$ e $(5, 0)$. Pertanto,

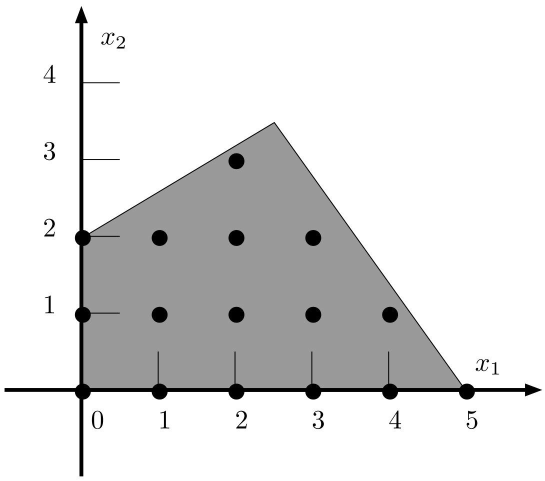


Figura 3.1: Regione ammissibile di $PL$ e $PLI$(esercizio 3.1)

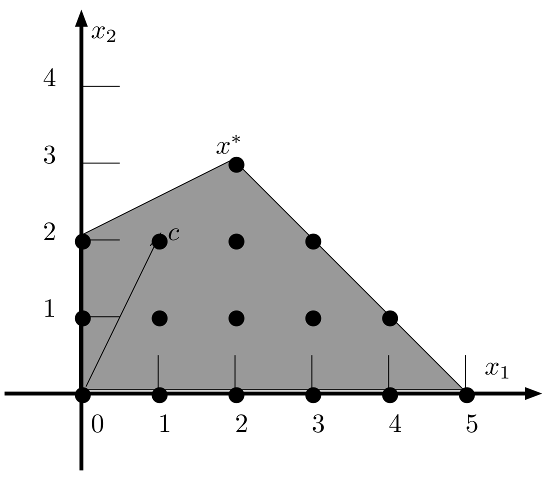


Figura 3.2: Copertura convessa di $X$ (esercizio 3.1)

la formulazione ideale $F_I$ di $PLI$ è la seguente:

$$F_I \left\{ \begin{array}{llll} \max\limits_{x} z = & x_1 & +2x_2 & \\ & -x_1 & +2x_2 & \leq 4 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 5 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{array} \right. ,$$

dove il primo vincolo corrisponde alla retta passante per i punti di coordinate $(0, 2)$ e $(2, 3)$, mentre il secondo vincolo corrisponde alla retta passante per i punti di coordinate $(5, 0)$ e $(2, 3)$.

**Esercizio 3.2.** ■ Si considerino i problemi di programmazione lineare intera, aventi come rilassato continuo i problemi di programmazione lineare dell'esercizio 2.5 e con entrambe le variabili vincolate ad assumere valori interi. Per ciascuno di essi, verificare se la regione ammissibile del rilassato continuo è non vuota e limitata e, in caso positivo, determinare la formulazione ideale.

## 3.2 Risoluzione grafica

**Esercizio 3.3.** ★ Dato il problema $PLI$ di programmazione lineare intera dell'esercizio 3.1, risolvere $PLI$ graficamente.

**Risoluzione.** Nel caso in cui la regione ammissibile $X_{PL}$ del rilassato continuo di $PLI$ sia limitata e contenga punti a coordinate intere, tali punti sono in numero finito e sono tutti e soli i punti che definiscono la regione ammissibile $X$ di $PLI$. Nel nostro caso l'insieme $X$ è costituito da 16 punti; in particolare:

$$\begin{aligned} X = \{&(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), \\ &(2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1), (5,0)\}. \end{aligned}$$

Poichè i punti che definiscono $X$ sono in numero finito, un primo modo di risolvere graficamente il problema $PLI$ potrebbe essere la tecnica di enumerazione totale, consistente nel valutare la funzione obiettivo in ciascuno dei punti ammissibili. Otteniamo la seguente tabella:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | (0,0) | (0,1) | (0,2) | (1,0) | (1,1) | (1,2) | (2,0) | (2,1) |
| $\bar{z}$ | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 | 5 | 2 | 4 |
| $\bar{x}$ | (2,2) | (2,3) | (3,0) | (3,1) | (3,2) | (4,0) | (4,1) | (5,0) |
| $\bar{z}$ | 6 | 8 | 3 | 5 | 7 | 4 | 6 | 5 |

Poichè il problema $PLI$ è un problema di massimizzazione e il valore più alto (pari a 8) di funzione obiettivo si ottiene in corrispondenza del punto di coordinate $(2, 3)$, allora la soluzione ottima di $PLI$ è

$$x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad z^* = 8.$$

Ricordiamo che la tecnica di enumerazione totale non è certamente la tecnica più efficiente per risolvere problemi di programmazione lineare intera, poichè il numero di punti in cui valutare la funzione obiettivo potrebbe essere molto alto.

Un altro modo per risolvere graficamente $PLI$ è il seguente. Costruiamo la formulazione ideale $F_I$ di $PLI$ (esercizio 3.1) e risolviamo graficamente il rilassato continuo della formulazione ideale. La formulazione ideale, infatti, garantisce che la regione ammissibile del corrispondente rilassato continuo abbia tutti i vertici a coordinate intere. Ricordiamo che, quando un problema di programmazione lineare ammette soluzione ottima, almeno una soluzione ottima si attesta su un vertice. Di conseguenza, la risoluzione del rilassato continuo della formulazione ideale fornisce una soluzione ottima anche per $PLI$. Dalla figura 3.2, infatti, otteniamo di nuovo:

$$x^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad z^* = 8.$$

**Esercizio 3.4.** ■ Si considerino i problemi di programmazione lineare intera, aventi come rilassato continuo i problemi di programmazione lineare degli esercizi 2.5 e 2.6, e con entrambe le variabili vincolate ad assumere valori interi. Per ciascuno di essi, verificare se la regione ammissibile del rilassato continuo è non vuota e limitata e, in caso positivo, risolverli graficamente.

**Esercizio 3.5.** ■ Risolvere graficamente i seguenti problemi di programmazione lineare intera:

$$1. \begin{cases} \min\limits_x z = & -x_1 & +x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \geq 0 \\ & & 2x_2 & \leq 3 \\ & 2x_1 & & \leq 5 \\ & x_1, & x_2 & \text{int.} \end{cases}, \qquad 2. \begin{cases} \max\limits_x z = & \frac{1}{2}x_1 & +2x_2 & \\ & -4x_1 & +6x_2 & \leq 5 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 5 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1 & x_2 & \text{int.} \end{cases}.$$

## 3.3 L'algoritmo Branch & Bound

**Esercizio 3.6.** ★ Dato il problema $PLI$ di programmazione lineare intera dell'esercizio 3.1, risolvere $PLI$ applicando l'algoritmo Branch & Bound secondo il seguente schema:

- si risolvano tutti i rilassati continui per via grafica;
- si applichi la strategia di visita dell'albero di Branch & Bound in profondità.

**Risoluzione.** Indichiamo con $\bar{x}$ il miglior punto corrente ammissibile per $PLI$ e con $\bar{z}$ (incombente) il corrispondente valore di funzione obiettivo. Poichè all'inizio non è disponibile alcuna soluzione ammissibile per $PLI$, poniamo $\bar{z} = -\infty$ (il problema è di massimizzazione[1]). Al termine dell'algoritmo, il punto $\bar{x}$ fornirà una soluzione ottima del problema $PLI$.

Per prima cosa, risolviamo il rilassato continuo $PL$ di $PLI$. Osservando la figura 3.3, otteniamo $x_{PL}^{*T} = [5/2 \quad 7/2]$, con valore di funzione obiettivo $z_{PL}^* = 9.5$. Poichè $x_{PL}^*$ non è un punto a coordinate intere, dobbiamo effettuare l'operazione di branching per partizionare la regione ammissibile di $PLI$. Visto che tutte e due le componenti di $x_{PL}^*$ sono non intere, entrambe possono essere scelte come variabile di branching. Scegliendo per esempio $x_1$, poichè $\lfloor x_{1_{PL}}^* \rfloor = \lfloor 5/2 \rfloor = 2$, a partire da $PLI$ otteniamo i due seguenti sottoproblemi:

$$PLI_1 \begin{cases} \max\limits_x z = & x_1 & +2x_2 & \\ & -3x_1 & +5x_2 & \leq 10 \\ & 7x_1 & +5x_2 & \leq 35 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1 & x_2 & \text{int} \end{cases} \quad \text{e} \quad PLI_2 \begin{cases} \max\limits_x z = & x_1 & +2x_2 & \\ & -3x_1 & +5x_2 & \leq 10 \\ & 7x_1 & +5x_2 & \leq 35 \\ & x_1 & & \geq 3 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1 & x_2 & \text{int} \end{cases},$$

generati (figura 3.4) a partire da $PLI$, con l'aggiunta rispettivamente dei vincoli

$$x_1 \leq \lfloor x_{1_{PL}}^* \rfloor \quad \text{e} \quad x_1 \geq \lfloor x_{1_{PL}}^* \rfloor + 1.$$

Con riferimento all'albero di Branch & Bound (figura 3.4), ricordiamo che l'algoritmo termina dopo che tutti i nodi foglia dell'albero sono stati chiusi (applicando i criteri di fathoming), cioè quando tutti i nodi foglia dell'albero "corrente" non generano altri nodi.

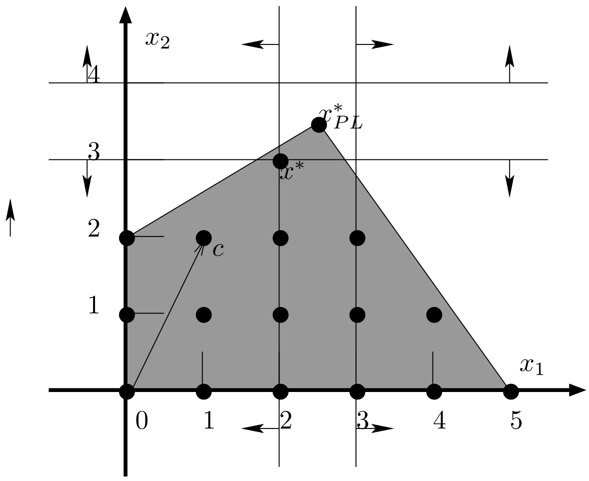


Figura 3.3: Partizione della regione ammissibile di PLI (esercizio 3.6)

Applicando la procedura di visita in profondità dell'albero, esaminiamo il sottoproblema $PLI_1$, iteriamo la procedura e risolviamo graficamente il rilassato continuo $PL_1$ di $PLI_1$. Dalla figura 3.3 otteniamo $x_{PL_1}^{*T} = [2 \quad 16/5]$, con $z_{PL_1}^* = 8.4$. Anche in questo

[1]Nel caso di un problema di minimizzazione, all'inizio si pone $\bar{z} = +\infty$.

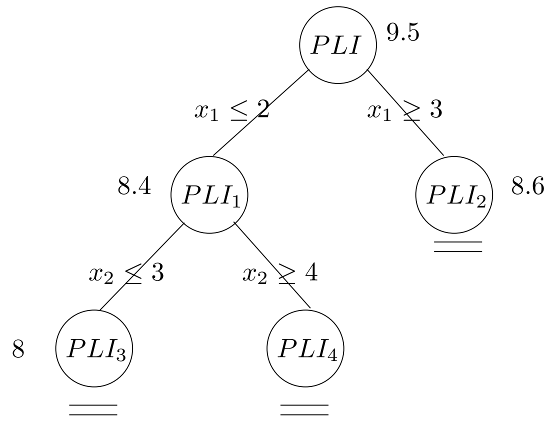


Figura 3.4: Albero di Branch & Bound (esercizio 3.6)

caso il punto $x^*_{PL_1}$ non è un punto a coordinate intere; inoltre non è possibile chiudere il sottoproblema, poichè $z^*_{PL_1} = 8.4 > \bar{z} = -\infty$. Questa volta l'unica variabile candidata a essere variabile di branching è la $x_2$, visto che corrisponde all'unica componente non intera di $x^*_{PL_1}$. Partizioniamo allora la regione ammissibile di $PLI_1$, generando così i seguenti sottoproblemi:

$$PLI_3 \left\{ \begin{array}{llll} \max\limits_x z = & x_1 & +2x_2 & \\ & -3x_1 & +5x_2 & \leq 10 \\ & 7x_1 & +5x_2 & \leq 35 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & & x_2 & \leq 3 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1 & x_2 & \text{int} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad PLI_4 \left\{ \begin{array}{llll} \max\limits_x z = & x_1 & +2x_2 & \\ & -3x_1 & +5x_2 & \leq 10 \\ & 7x_1 & +5x_2 & \leq 35 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & & x_2 & \geq 4 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1 & x_2 & \text{int} \end{array} \right. ,$$

ottenuti (figura 3.4) a partire da $PLI_1$, con l'aggiunta rispettivamente dei vincoli

$$x_2 \leq \lfloor x^*_{2_{PL_1}} \rfloor = 3 \quad \text{e} \quad x_2 \geq \lfloor x^*_{2_{PL_1}} \rfloor + 1 = 4.$$

Notiamo che ogni sottoproblema è facilmente ricostruibile a partire dall'albero di Branch & Bound, risalendo dal corrispondente nodo fino al nodo radice. Osservando la figura 3.4, ad esempio il sottoproblema $PLI_3$ è ottenibile da $PLI$, aggiungendo ai vincoli di $PLI$ i vincoli $x_2 \leq 3$ e $x_1 \leq 2$. Nello stesso modo, il sottoproblema $PLI_4$ è ottenibile da $PLI$, aggiungendo ai vincoli di $PLI$ i vincoli $x_2 \geq 4$ e $x_1 \leq 2$.

Esaminiamo adesso il sottoproblema $PLI_3$ e risolviamo il suo rilassato continuo $PL_3$. Dalla figura 3.3 otteniamo $x^{*T}_{PL_3} = [2 \;\; 3]$, con $z^*_{PL_3} = 8$. Dal momento che il punto $x^*_{PL_3}$ ha coordinate intere, esso è ammissibile per $PLI_3$ e quindi coincide con la sua soluzione ottima; in altri termini si ha $x^*_{PLI_3} = x^*_{PL_3}$, con $z^*_{PLI_3} = z^*_{PL_3}$. Di conseguenza il nodo corrispondente al sottoproblema $PLI_3$ viene chiuso. Inoltre, poichè il punto $x^*_{PL_3}$ è il primo punto ammissibile per $PLI$, allora aggiorniamo $\bar{x}$, ponendo $\bar{x}^T = x^{*T}_{PL_3} = [3 \;\; 2]$ e $\bar{z} = z^*_{PL3} = 8$.

A questo punto dovremmo analizzare il sottoproblema $PLI_4$, ma esso può essere chiuso direttamente in base alla seguente osservazione. I due sottoproblemi $PLI_3$ e $PLI_4$, generati da $PLI_1$, non possono fornire un valore di funzione obiettivo maggiore di $z^*_{PL_1} = 8.4$ (il problema è di massimizzazione); inoltre i coefficienti di costo della funzione obiettivo sono interi. Di conseguenza, nel caso migliore, il più alto valore di funzione obiettivo che è possibile ottenere in corrispondenza di un punto intero, esplorando le regioni ammissibili di $PLI_3$ e $PLI_4$, è pari a $\lfloor z^*_{PL_1} \rfloor = 8$. Poichè tale valore di funzione obiettivo è stato già ottenuto in corrispondenza di $x^*_{PLI_3}$, è inutile analizzare il sottoproblema $PLI_4$.

Quindi, chiuso $PLI_4$, rimane aperto solo il sottoproblema $PLI_2$. Risolvendo il suo rilassato continuo otteniamo $x^{*T}_{PL_2} = [3 \;\; 14/5]$, con $z^*_{PL_2} = 8.6$. Anche se $z^*_{PL_2} = 8.6 > \bar{z}$, in base a considerazioni analoghe a quelle fatte a proposito della chiusura del sottoproblema $PLI_4$, è inutile effettuare l'operazione di branching a partire da $PLI_2$: infatti, pochè $z^*_{PL_2} = 8.6$, esplorando la regione ammissibile di $PLI_2$, nel caso migliore non si potrebbe ottenere una soluzione intera con valore di funzione obiettivo migliore di 8 (che già abbiamo). Quindi anche il sottoproblema $PLI_2$ viene chiuso e poichè non ci sono più sottoproblemi da esaminare, l'algoritmo termina. La soluzione ottima di $PLI$ è $x^{*T} = \bar{x}^T = [3 \;\; 2]$, con $z^* = \bar{z} = 8$.

**Esercizio 3.7.** ★ Dato il seguente problema $PLI$ di programmazione lineare intera

$$PLI \begin{cases} \max\limits_{x} z = & -1.7x_1 & +0.6x_2 & \\ & -5x_1 & -4x_2 & \leq 5 \\ & -5x_1 & +6x_2 & \leq 30 \\ & 5x_1 & +2x_2 & \leq 10 \\ & & x_2 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{cases},$$

risolvere $PLI$ applicando l'algoritmo Branch & Bound secondo il seguente schema:

- si risolvano tutti i rilassati continui per via grafica;
- si applichi la strategia di visita dell'albero di Branch & Bound in profondità.

Come cambia l'esecuzione dell'algoritmo se si applica la strategia di visita dell'albero di Branch & Bound basata sul nodo più promettente?

**Risoluzione.** Come nell'esercizio 3.6, indichiamo con $\bar{x}$ il miglior punto corrente ammissibile per $PLI$ e con $\bar{z}$ (incombente) il corrispondente valore di funzione obiettivo. Poichè all'inizio non è disponibile alcuna soluzione ammissibile per $PLI$, poniamo $\bar{z} = -\infty$ (il problema è di massimizzazione).

Per prima cosa, risolviamo il rilassato continuo $PL$ di $PLI$. Osservando la figura 3.5, otteniamo $x^{*T}_{PL} = [-3 \;\; 5/2]$, con valore di funzione obiettivo $z^*_{PL} = 6.60$. Poichè $x^*_{PL}$ non è un punto a coordinate intere, dobbiamo effettuare l'operazione di branching per partizionare la regione ammissibile di $PLI$. Facendo branching sulla variabile $x_2$ (l'unica possibile), otteniamo i sottoproblemi $PLI_1$ e $PLI_2$, generati dal $PLI$ con l'aggiunta, rispettivamente, dei vincoli:

$$x_2 \leq \lfloor x^*_{2_{PL}} \rfloor = 2 \quad \text{e} \quad x_2 \geq \lfloor x^*_{2_{PL}} \rfloor + 1 = 3.$$

Applicando la strategia di visita in profondità dell'albero (vedi figura 3.6), analizziamo il sottoproblema $PLI_1$, risolvendo il suo rilassato continuo $PL_1$ e ottenendo $x^{*T}_{PL_1} =$

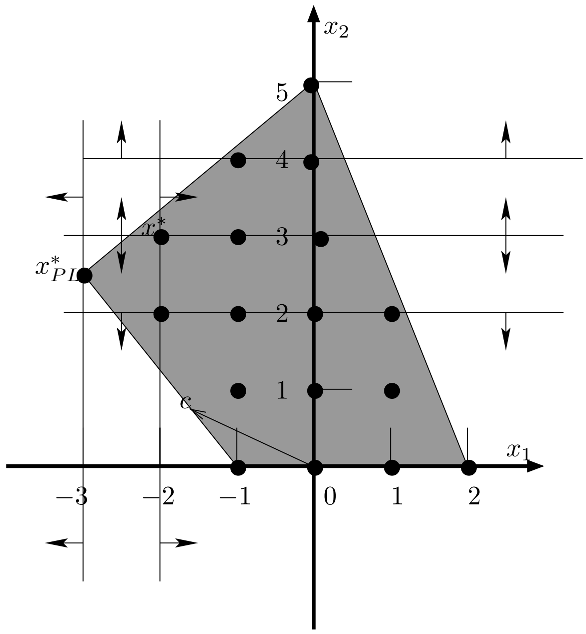


Figura 3.5: Partizione della regione ammissibile di PLI (esercizio 3.7)

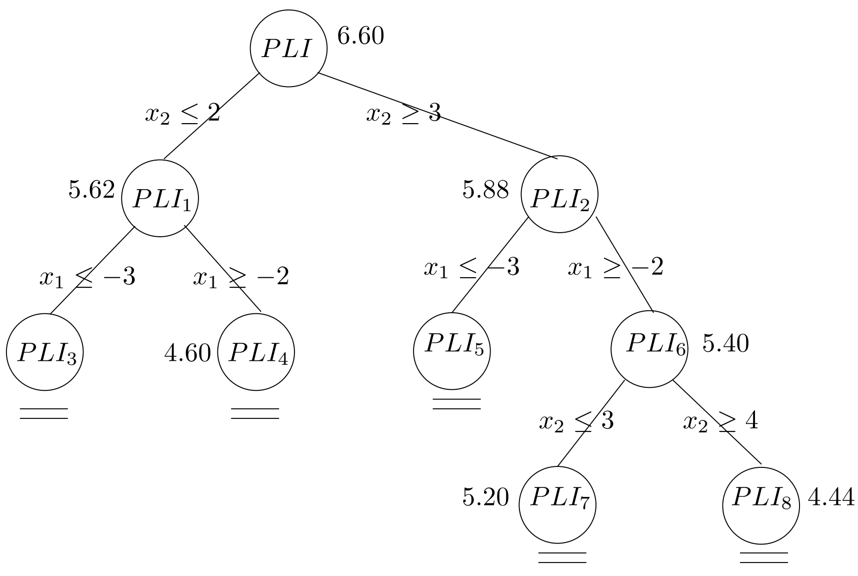


Figura 3.6: Albero di Branch & Bound (esercizio 3.7)

$[-13/5 \ \ 2]$ e $z^*_{PL_1} = 5.62$. Poichè $x^*_{PL_1}$ non è un punto a coordinate intere e poichè $z^*_{PL_1} > \bar{z}$, effettuiamo l'operazione di branching sulla variabile $x_1$, generando i sottoproblemi $PLI_3$ e $PLI_4$, ottenuti con l'aggiunta, rispettivamente, dei vincoli:

$$x_1 \leq \lfloor x^*_{1_{PL_1}} \rfloor = -3 \quad \text{e} \quad x_2 \geq \lfloor x^*_{1_{PL_1}} \rfloor + 1 = -2.$$

Analizzando il rilassato continuo di $PLI_3$, ci accorgiamo che esso è inammissibile e, di conseguenza, anche $PLI_3$ sarà inammissibile, per cui il corrispondente nodo viene chiuso. Applicando la strategia di visita in profondità, risaliamo l'albero di Branch & Bound andando ad esaminare il sottoproblema $PLI_4$ e quindi il suo rilassato continuo $PL_4$. Risolvendo graficamente $PL_4$, otteniamo $x^{*T}_{PL_4} = [-2 \ \ 2]$ e $z^*_{PL_4} = 4.60$.

Dal momento che il punto $x^*_{PL_4}$ ha coordinate intere, esso è ammissibile per $PLI_4$ e quindi coincide con la sua soluzione ottima, cioè $x^*_{PLI_4} = x^*_{PL_4}$ e $z^*_{PLI_4} = z^*_{PL_4}$. Di conseguenza il nodo corrispondente al sottoproblema $PLI_4$ viene chiuso. Inoltre, poichè il punto $x^*_{PL_4}$ è il primo punto ammissibile per $PLI$, allora aggiorniamo $\bar{x}$, ponendo $\bar{x}^T = x^{*T}_{PL_4} = [-2 \ \ 2]$ e $\bar{z} = z^*_{PL_4} = 4.60$.

Ricordando che l'algoritmo termina dopo che tutti i nodi foglia dell'albero "corrente" sono stati chiusi (applicando i criteri di fathoming), l'unico nodo da analizzare (ancora aperto) è quello corrispondente al sottoproblema $PLI_2$, ottenuto da $PLI$ con l'aggiunta del vincolo $x_2 \geq 3$. Risolvendo graficamente il corrispondente rilassato continuo $PL_2$, otteniamo $x^{*T}_{PL_2} = [-12/5 \ \ 3]$ (con $z^*_{PL_2} = 5.88$), che non è una soluzione a coordinate intere. Poichè $z^*_{PL_2} = 5.88 > \bar{z} = 4.6$, effettuiamo l'operazione di branching sulla variabile $x_1$, generando così i sottoproblemi $PLI_5$ e $PLI_6$ con l'aggiunta, rispettivamente, dei vincoli

$$x_1 \leq \lfloor x^*_{1_{PL_2}} \rfloor = -3 \quad \text{e} \quad x_1 \geq \lfloor x^*_{1_{PL_2}} \rfloor + 1 = -2.$$

Analizzando il rilassato continuo $PL_5$ di $PLI_5$, scopriamo che esso (e quindi anche $PLI_5$) è inammissibile, per cui il corrispondente nodo viene chiuso. Analizzando il rilassato continuo $PL_6$ di $PLI_6$, otteniamo $x^{*T}_{PL_6} = [-2 \ \ 10/3]$ e $z^*_{PL_6} = 5.40$. Il punto $x^*_{PL_6}$ non è intero: di conseguenza, visto che $z^*_{PL_6} = 5.4 > \bar{z} = 4.6$, non è possibile chiudere il corrispondente nodo e si deve proseguire facendo branching sull'unica variabile possibile, cioè su $x_2$ (visto che è l'unica componente non intera del punto $x^*_{PL_6}$). Vengono così generati altri due sottoproblemi, $PLI_7$ e $PLI_8$, ottenuti aggiungendo i seguenti rispettivi vincoli:

$$x_2 \leq \lfloor x^*_{2_{PL_6}} \rfloor = 3 \quad \text{e} \quad x_2 \geq \lfloor x^*_{2_{PL6}} \rfloor + 1 = 4.$$

Prima di proseguire ricordiamo che ogni singolo sottoproblema è ricostruibile da $PLI$, osservando l'albero di Branch & Bound (figura 3.6): ad esempio, il problema $PLI_7$ è ottenibile dal problema $PLI$, con l'aggiunta dei vincoli $x_2 \leq 3$, $x_1 \geq -2$ e $x_2 \geq 3$, cioè $x_2 = 3$ e $x_1 \geq 2$.

Risolvendo $PL_7$ scopriamo che la sua soluzione ottima è intera ed è quindi ammissibile per $PLI$, per cui il corrispondente nodo viene chiuso. In particolare si ha $x^{*T}_{PL_7} = [-2 \ \ 3]$, con $z^*_{PL_7} = 5.20$. Poichè $z^*_{PL_7} > \bar{z}$, allora il miglior punto corrente ammissibile per $PLI$ diventa il punto $x^*_{PL_7}$, per cui si pone $\bar{x}^T = x^{*T}_{PL_7} = [-2 \ \ 3]$ e $\bar{z} = z^*_{PL_7} = 5.20$.

Rimane solo da esaminare il sottoproblema $PLI_8$: risolvendo il rilassato continuo otteniamo $x^{*T}_{PL_8} = [-6/5 \ \ 4]$, con $z^*_{PL_8} = 4.44$. Anche se la soluzione ottima di $PL_8$ non è intera, il sottoproblema $PLI_8$ vine comunque chiuso poichè $z^*_{PL_8} = 4.44 < \bar{z} = 5.2$.

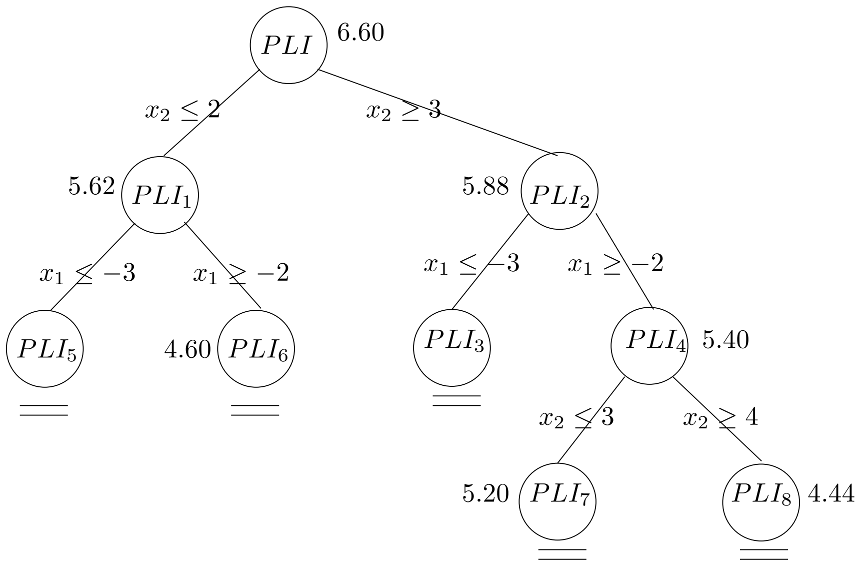


Figura 3.7: Albero di Branch & Bound (esercizio 3.7)

Dal momento che tutti i sottoproblemi sono stati chiusi, l'algoritmo termina. La soluzione ottima di $PLI$ è $x^{*T} = \bar{x}^T = [-2 \ \ 3]$, con $z^* = \bar{z} = 5.2$.

Se volessimo applicare la procedura di visita dell'albero di Branch & Bound in base al nodo più promettente (figura 3.7), i passi dell'algoritmo, in sintesi, sarebbero i seguenti.

All'inizio, non conoscendo alcun punto $\bar{x}$ ammissibile per $PLI$, poniamo $\bar{z} = -\infty$. Risolvendo il problema $PL$ otteniamo $x_{PL}^{*T} = [-3 \ \ 5/2]$, con $z_{PL}^* = 6.60$, e generiamo i sottoproblemi $PLI_1$ e $PLI_2$ (figura 3.7). Adesso, prima di scegliere quale nodo analizzare, calcoliamo i valori di funzione obiettivo dei rispettivi rilassati di $PLI_1$ e $PLI_2$. Otteniamo $z_{PL_1}^* = 5.62$ e $z_{PL_2}^* = 5.88$. Poichè $z_{PL_2}^* > z_{PL_1}^*$ (il problema è di massimizzazione), esploriamo prima la regione ammissibile di $PLI_2$, effettuando l'operazione di branching su $x_1$ e generando da $PLI_2$ i sottoproblemi $PLI_3$ e $PLI_4$ (figura 3.7). Il sottoproblema $PL_3$ è inammissibile (e quindi il nodo corrispondente a $PLI_3$ viene chiuso), mentre $z_{PL_4}^* = 5.40$. Allo stato corrente, gli unici nodi aperti sono quelli corrispondenti ai sottoproblemi $PLI_1$ e $PLI_4$. Poichè $z_{PL_1}^* > z_{PL_4}^*$, analizziamo prima la regione ammissibile di $PLI_1$, facendo branching sulla variabile $x_1$. Vengono così generati da $PLI_1$ i sottoproblemi $PLI_5$ e $PLI_6$: in corrispondenza dei rispettivi rilassati si ha l'inammissibilità di $PL_5$ (e quindi il nodo corrispondente a $PLI_5$ viene chiuso) e $x_{PL_6}^{*T} = [-2 \ \ 2]$, con $z_{PL_6}^* = 4.60$ (anche il nodo corrispondente a $PLI_6$ viene chiuso per interezza della soluzione del rilassato continuo).

Dal momento che il punto $x_{PL_6}^*$ è il primo punto a coordinate intere (ed è quindi ammissibile per $PLI$), aggiorniamo $\bar{x}$ ponendo $\bar{x}^T = x_{PL_6}^{*T} = [-2 \ \ 2]$ e $\bar{z} = z_{PL_6}^* = 4.60$. Rimane da esplorare solo il nodo corrispondente a $PLI_4$, da cui vengono generati $PLI_7$ e $PLI_8$. A questo punto, l'esercizio prosegue in maniera identica a quanto visto nel caso della strategia di visita dell'albero di Branch & Bound in profondità.

Si può notare che, nel caso di questo esercizio, le due strategie di visita dell'albero di Branch & Bound sostanzialmente coincidono (figure 3.6 e 3.7): è cambiato solo l'ordine in cui i vari sottoproblemi sono stati generati ed analizzati.

**Esercizio 3.8.** ■ Si considerino i problemi di programmazione lineare intera, aventi come rilassato continuo i problemi di programmazione lineare degli esercizi 2.5 e 2.6, e con entrambe le variabili vincolate ad assumere valori interi. Per ciascuno di essi, verificare se la regione ammissibile del rilassato continuo è non vuota e limitata e, in caso positivo, risolverli applicando il metodo Branch & Bound e risolvendo tutti i rilassati continui per via grafica. Si metta a confronto la strategia di visita in profondità dell'albero di Branch & Bound con quella basata sul nodo più promettente.

**Esercizio 3.9.** ■ Dato il seguente problema $PLI$ di programmazione lineare intera

$$PLI \left\{ \begin{array}{lrrl} \max\limits_{x} z = & & x_2 & \\ & -x_1 & +3x_2 & \leq 6 \\ & 2x_1 & +4x_2 & \leq 13 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{array} \right. ,$$

risolvere $PLI$ applicando l'algoritmo Branch & Bound secondo il seguente schema:

- si risolvano tutti i rilassati continui per via grafica;
- si applichi la strategia di visita in profondità dell'albero di Branch & Bound;
- ove possibile, preferire come variabile di branching la variabile $x_1$.

Come cambia l'esecuzione dell'algoritmo se, quando possibile, si preferisce come variabile di branching la variabile $x_2$?

**Esercizio 3.10.** ■ Risolvere i seguenti problemi di programmazione lineare intera applicando l'algoritmo Branch & Bound e risolvendo tutti i rilassati continui per via grafica.

$$1. \left\{ \begin{array}{lrrl} \max\limits_{x} z = & 2x_1 & +2x_2 & \\ & & 2x_2 & \leq 5 \\ & 5x_1 & -x_2 & \leq 10 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{array} \right. , \qquad 2. \left\{ \begin{array}{lrrl} \max\limits_{x} z = & x_1 & +2x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \geq 1 \\ & -2x_1 & +3x_2 & \leq 6 \\ & 2x_1 & & \leq 9 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{array} \right. .$$

**Esercizio 3.11.** ■ Dato il seguente problema $PLM$ di programmazione lineare mista

$$PLM \left\{ \begin{array}{lrrl} \max\limits_{x} z = & x_1 & +2x_2 & \\ & -3x_1 & +7x_2 & \leq 14 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 7 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1 & & \text{int} \end{array} \right. ,$$

risolvere $PLM$ applicando l'algoritmo Branch & Bound e risolvendo tutti i rilassati continui per via grafica.

**Esercizio 3.12.** ■ Dati i problemi di programmazione lineare intera dell'esercizio 3.5, risolverli applicando l'algoritmo Branch & Bound e risolvendo tutti i rilassati continui per via grafica.

## 3.4 Il problema dello zaino

**Esercizio 3.13.** ★ Dato il seguente problema dello zaino

$$Z \left\{ \begin{array}{lrrrrrl} \max\limits_{x} z = & 3x_1 & +7x_2 & +5x_3 & +9x_4 & +x_5 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +10x_4 & +x_5 & \leq 37 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \text{int.} \end{array} \right. ,$$

risolvere $Z$ applicando l'algoritmo Branch & Bound. Si utilizzi prima la stategia di visita in profondità e si risolva di nuovo con la strategia del nodo più promettente.

**Risoluzione.** Risolviamo prima il problema usando la visita in profondità dell'albero di Branch & Bound.

Per risolvere tutti i rilassati continui, riscriviamo il problema $Z$ ordinando le variabili in senso non crescente del rapporto $\frac{c_j}{a_j}$, dove $c_j$ è il valore unitario dell'oggetto di tipo $j$ (coefficiente di costo della variabile $x_j$) e $a_j$ è il peso unitario dell'oggetto di tipo $j$ (coefficiente moltiplicativo della variabile $x_j$ nel vincolo). Si ha:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & \frac{5}{2} & \frac{9}{10} & \frac{1}{1} \end{array},$$

cioè:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1.5 & 2.33 & 2.5 & 0.9 & 1 \end{array}.$$

Ordinando le variabili in base al rapporto non crescente $\frac{c_j}{a_j}$ e rinominandole con $y_j$, $j = 1, \dots, 5$, otteniamo:

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_5 & x_4 \end{array}.$$

Il problema $Z$ può essere riscritto nel seguente modo:

$$Z^y \left\{ \begin{array}{lrrrrrl} \max\limits_{y} z = & 5y_1 & +7y_2 & +3y_3 & +y_4 & +9y_5 & \\ & 2y_1 & +3y_2 & +2y_3 & +1y_4 & +10y_5 & \leq 37 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & \geq 0 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & \text{int.} \end{array} \right. .$$

Scrivendo il vincolo di capacità sotto forma di uguaglianza, otteniamo:

$$PLI \begin{cases} \max_y z = & 5y_1 & +7y_2 & +3y_3 & +y_4 & +9y_5 & & \\ & 2y_1 & +3y_2 & +2y_3 & +1y_4 & +10y_5 & +y_6 & = 37 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5, & y_6 & \geq 0 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & & \text{int.} \end{cases}.$$

Per prima cosa risolviamo il rilassato continuo $PL$ di $PLI$. La variabile a cui dare il valore più alto possibile, compatibilmente con i vincoli, è la $y_1$: gli oggetti di tipo 1 infatti sono quelli più convenienti da inserire nello zaino visto che ad essi corrisponde il rapporto $\frac{c_j}{a_j}$ più alto. Tutte le altre variabili sono poste uguali a zero perchè fuori base. La soluzione ottima di $PL$ è:

$$y^{*T}_{PL} = [37/2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } z^*_{PL} = 92.5.$$

Indichiamo con $\bar{y}$ il miglior punto corrente ammissibile per $PLI$ e con $\bar{z}$ (incombente) il corrispondente valore di funzione obiettivo. Diversamente dal Branch & Bound applicato a un generico problema di programmazione lineare intera, nel caso del problema dello zaino è immediatamente disponibile un valore iniziale di $\bar{y}$. Esso è ottenibile arrotondando all'intero inferiore le componenti non intere di $y^*_{PL}$ e "aggiustando" il valore della variabile slack $y_6$ in modo da soddisfare il vincolo di capacità dello zaino. Otteniamo quindi:

$$\bar{y}^T = [18 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1], \quad \text{con } \bar{z} = 90.$$

Al termine dell'algoritmo, il punto $\bar{y}$ fornirà una soluzione ottima del problema $PLI$.

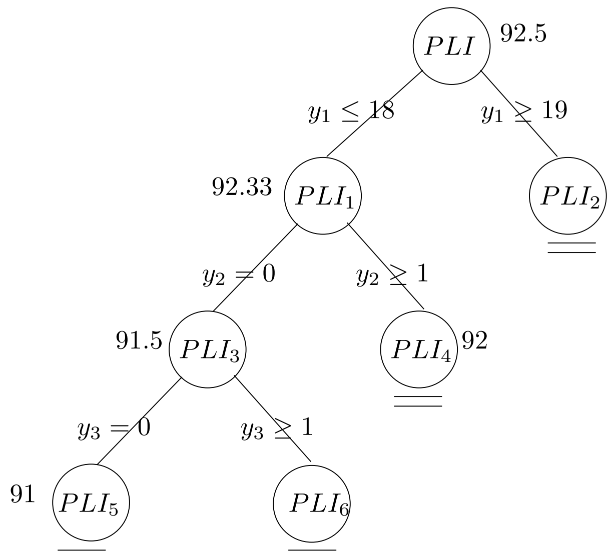


Figura 3.8: Albero di Branch & Bound - visita in profondità (esercizio 3.13)

L'algoritmo procede facendo branching sull'unica componente non intera di $y^*_{PL}$. Vengono generati i vincoli

$$y_1 \leq 18 \quad \text{e} \quad y_1 \geq 19,$$

in corrispondenza dei quali si ottengono rispettivamente i sottoproblemi $PLI_1$ e $PLI_2$ (figura 3.8).

Seguendo la strategia di visita in profondità dell'albero di Branch & Bound, risolviamo adesso il rilassato continuo $PL_1$ di $PLI_1$, contenente il vincolo aggiuntivo $y_1 \leq 18$, e determiniamo $y^*_{PL_1}$. Come al solito, la componente di $y^*_{PL_1}$ più "conveniente" è la prima che, tenendo conto del vincolo di capacità, assumerebbe valore pari a 37/2=18.5 che è il valore più alto possibile compatibilmente con il vincolo di capacità. Tale valore però è inammissibile per il vincolo $y_1 \leq 18$. Di conseguenza, il valore più alto possibile da poter dare alla componente $y_1$ del vettore $y^*_{PL_1}$ è pari a:

$$y_1 = \min\{18, 37/2\} = 18.$$

Così facendo il vincolo di capacità diventa:

$$3y_2 + 2y_3 + 1y_4 + 10y_5 + y_6 = 1.$$

Inseriti nello zaino gli oggetti di tipo 1, quelli più convenienti sono ora gli oggetti di tipo 2, corrispondenti a $y_2$ a cui conviene dare il valore più alto possibile, compatibilmente con i vincoli. Di conseguenza:

$$y_2 = 1/3$$

e

$$y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0.$$

Quindi la soluzione ottima di $PL_1$ è:

$$y^{*T}_{PL_1} = [18 \;\; 1/3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } z^*_{PL_1} = 92.33.$$

Poichè $y^*_{PL_1}$ non è a componenti intere e poichè $z^*_{PL_1} = 92.33 > \bar{z} = 90$ l'algoritmo procede facendo branching su $y_2$ e generando i sottoproblemi $PLI_3$ e $PLI_4$, rispettivamente con l'aggiunta dei vincoli

$$y_2 \leq 0 \quad \text{e} \quad y_2 \geq 1.$$

Risolviamo adesso il rilassato continuo $PL_3$ di $PLI_3$, contenente i vincoli aggiuntivi $y_1 \leq 18$ e $y_2 \leq 0$: quest'ultimo diventa $y_2 = 0$, se si tiene conto dei vincoli di positività del vettore $y$. Ponendo $y_2 = 0$ nel vincolo di capacità, tale vincolo diventa:

$$2y_1 + 2y_3 + 1y_4 + 10y_5 + y_6 = 37.$$

Dando a $y_1$ il valore più alto possibile, otteniamo:

$$y_1 = \min\{18, 37/2\} = 18.$$

Il vincolo di capacità diventa:

$$2y_3 + 1y_4 + 10y_5 + y_6 = 1,$$

da cui $y_3 = 1/2$ e $y_4 = y_5 = y_6 = 0$. Quindi:

$$y^{*T}_{PL_3} = [18 \;\; 0 \;\; 1/2 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } z^*_{PL_3} = 91.5 > \bar{z} = 90.$$

Poichè $y^*_{PL_3}$ non è a componenti intere e poichè $z^*_{PL_3} = 91.5 > \bar{z} = 90$ l'algoritmo procede facendo branching su $y_3$ e generando i sottoproblemi $PLI_5$ e $PLI_6$, rispettivamente con l'aggiunta dei vincoli

$$y_3 \leq 0 \quad \text{e} \quad y_3 \geq 1.$$

Risolviamo adesso il rilassato continuo $PL_5$ di $PLI_5$, contenente i vincoli aggiuntivi $y_1 \leq 18$, $y_2 \leq 0$ e $y_3 \leq 0$, cioè $y_1 \leq 18$, $y_2 = 0$ e $y_3 = 0$. Il vincolo di capacità diventa:

$$2y_1 + y_4 + 10y_5 + y_6 = 37.$$

Dando a $y_1$ il valore più alto possibile, otteniamo:

$$y_1 = \min\{18, 37/2\} = 18.$$

Il vincolo di capacità diventa:

$$y_4 + 10y_5 + y_6 = 1,$$

da cui si deduce che in questo momento la capacità residua dello zaino è pari a 1 (termine noto del vincolo di capacità) e gli oggetti più convenienti da inserire sono quelli di tipo 4 corrispondenti a $y_4$. Otteniamo quindi: $y_4 = 1/1$ e $y_5 = y_6 = 0$. Quindi:

$$y^{*T}_{PL_5} = [18 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } z^*_{PL_5} = 91.$$

La soluzione ottima del rilassato continuo di $PLI_5$ è a componenti intere ed è quindi ammissibile per $PLI$. Di conseguenza il sottoproblema $PLI_5$ viene chiuso e, poichè $z^*_{PL_5} = 91 > \bar{z} = 90$, abbiamo trovato un punto ammissibile per $PLI$ migliore di quello corrente, che quindi viene aggiornato. Otteniamo:

$$\bar{y}^T = y^{*T}_{PL_5} = [18 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } \bar{z} = z^*_{PL_5} = 91.$$

A questo punto bisognerebbe esaminare il problema $PLI_6$, ma ciò sarebbe inutile in quanto i coefficienti di costo della funzione obiettivo di $PLI$ sono interi e di conseguenza, tenuto conto dell'interezza di $y$, il valore ottimo di funzione obiettivo è anch'esso un numero intero. Quindi, avendo ottenuto da $PLI_5$ un valore di funzione obiettivo pari a 91 in corrispondenza di una soluzione intera e poichè $PLI_5$ è stato generato da $PLI_3$ con $z^*_{PL3} = 91.5$, è inutile esplorare $PLI_6$ (ottenuto anch'esso da $PLI_3$), che quindi viene chiuso.

Esaminiamo adesso $PLI_4$, caratterizzato dai vincoli aggiuntivi $y_1 \leq 18$ e $y_2 \geq 1$ e risolviamo il suo rilassato continuo $PL_4$. Trattiamo prima il vincolo $y_2 \geq 1$, ponendolo in forma standard

$$y_2 - s_2 = 1, \quad \text{con} \quad s_2 \geq 0.$$

Sostituendo nel vincolo di capacità otteniamo:

$$2y_1 + 3s_2 + 2y_3 + 1y_4 + 10y_5 + y_6 = 34,$$

da cui

$$y_1 = \min\{18, 34/2\} = 34/2 = 17.$$

Di conseguenza $s_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$, cioè $y_2 = 1$ e $y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 0$. Quindi:

$$y^{*T}_{PL_4} = [17 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } z^*_{PL_4} = 92.$$

La soluzione ottima di $PL_4$ è a componenti intere ed è quindi ammissibile per $PLI$. Di conseguenza il sottoproblema $PLI_4$ viene chiuso e, poichè $z^*_{PL_4} = 92 > \bar{z} = 91$, abbiamo trovato un punto ammissibile per $PLI$ migliore di quello corrente, che quindi viene aggiornato. Otteniamo:

$$\bar{y}^T = y^{*T}_{PL_4} = [17 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } \bar{z} = z^*_{PL_4} = 92.$$

Rimarrebbe da esplorare il sottoproblema $PLI_2$, ma esso viene chiuso per le stesse motivazioni viste nel caso del sottoproblema $PLI_6$. Pertanto la soluzione ottima di $PLI$ è:

$$y^{*T} = \bar{y}^T = [17 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } z^* = \bar{z} = 92.$$

Ripristinando il problema nelle variabili originarie $x_j$, la soluzione ottima del problema $Z$ è:

$$x^{*T} = [0 \;\; 1 \;\; 17 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } z^* = 92.$$

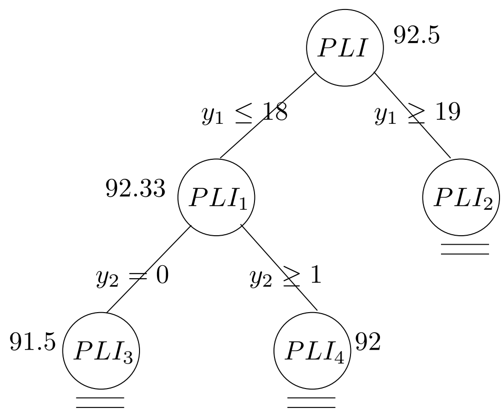


Figura 3.9: Albero di Branch & Bound - visita nodo più promettente (esercizio 3.13)

Volendo risolvere il problema $PLI$ applicando la visita dell'albero di Branch & Bound in base al nodo più promettente, dopo aver esaminato i rilassati continui $PL$ e $PL_1$, si risolve $PL_2$, in presenza del vincolo aggiuntivo $y_1 \ge 19$. Tale vincolo viene trattato riscrivendolo in forma standard nel seguente modo:

$$y_1 - s_1 = 19, \quad \text{con} \quad s_1 \ge 0.$$

Sostituendo nel vincolo di capacità otteniamo:

$$2s_1 + 3y_2 + 2y_3 + 1y_4 + 10y_5 + y_6 = 37 - 38,$$

cioè

$$2s_1 + 3y_2 + 2y_3 + 1y_4 + 10y_5 + y_6 = -1.$$

Poichè la capacità residua dello zaino è negativa (pari a -1), si deduce che $PLI_2$ è inammissibile. Proseguendo, si vede facilmente che l'albero generato è quello in figura 3.9.

**Esercizio 3.14.** ★ Dato il seguente problema dello zaino binario

$$Z \begin{cases} \max\limits_{x} z = & 15x_1 & +17x_2 & +14x_3 & +15x_4 & +18x_5 & \\ & 13x_1 & +9x_2 & +10x_3 & +12x_4 & +8x_5 & \leq 30 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in \{0,1\} \end{cases},$$

risolvere $Z$ applicando l'algoritmo Branch & Bound e usando la stategia di visita in profondità dell'albero.

**Risoluzione.** Per prima cosa, effettuiamo l'ordinamento delle variabili. Otteniamo:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{15}{13} & \frac{17}{9} & \frac{14}{10} & \frac{15}{12} & \frac{18}{8} \end{array},$$

cioè:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1.15 & 1.89 & 1.4 & 1.25 & 2.25 \end{array}.$$

Ordinando le variabili in base al rapporto non crescente $\frac{c_j}{a_j}$ e rinominandole con $y_j$, $j = 1, \dots, 5$, otteniamo:

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_5 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \end{array}.$$

Il problema $Z$ può essere riscritto nel seguente modo:

$$Z^y \begin{cases} \max\limits_{y} z = & 18y_1 & +17y_2 & +14y_3 & +15y_4 & +15y_5 & \\ & 8y_1 & +9y_2 & +10y_3 & +12y_4 & +13y_5 & \leq 30 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & \in \{0,1\} \end{cases}.$$

Scrivendo il vincolo di capacità sotto forma di uguaglianza, otteniamo:

$$PLI \begin{cases} \max\limits_{y} z = & 18y_1 & +17y_2 & +14y_3 & +15y_4 & +15y_5 & & \\ & 8y_1 & +9y_2 & +10y_3 & +12y_4 & +13y_5 & +y_6 & = 30 \\ & & & & & & y_6 & \geq 0 \\ & & & & & & y_6 & \text{int} \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & & \in \{0,1\} \end{cases}.$$

Il rilassato continuo $PL$ di $PLI$ è il seguente:

$$PL \begin{cases} \max\limits_{y} z = & 18y_1 & +17y_2 & +14y_3 & +15y_4 & +15y_5 & & \\ & 8y_1 & +9y_2 & +10y_3 & +12y_4 & +13y_5 & +y_6 & = 30 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5, & y_6 & \geq 0 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & & \leq 1 \end{cases}.$$

Di conseguenza, nel risolvere i rilassati continui del problema dello zaino binario, bisogna sempre tener conto che le variabili originarie del problema $(y_1 \dots, y_5)$ devono assumere valori compresi tra 0 e 1.

Per prima cosa risolviamo il problema $PL$. Ricordando che ogni variabile, nel giusto ordine in base al rapporto $c_j/a_j$, deve assumere il valore più alto possibile compatibilmente con i vincoli, se non ci fosse il vincolo $y_1 \leq 1$ avremmo $y_1 = 30/8 = 15/4$. Invece, a causa della presenza di tale vincolo, si ha:

$$y_1 = \min\{15/4, 1\} = 1.$$

Sostituendo

$$y_1 = 1$$

nel vincolo di capacità otteniamo:

$$9y_2 + 10y_3 + 12y_4 + 13y_5 + y_6 = 30 - 8 = 22,$$

da cui

$$y_2 = \min\{22/9, 1\} = 1.$$

Quindi il vincolo di capacità diventa:

$$10y_3 + 12y_4 + 13y_5 + y_6 = 22 - 9 = 13,$$

da cui

$$y_3 = \min\{13/10, 1\} = 1.$$

Otteniamo quindi:

$$12y_4 + 13y_5 + y_6 = 13 - 10 = 3,$$

da cui

$$y_4 = \min\{3/12, 1\} = 1/4.$$

Di conseguenza, si ha: $y_5 = y_6 = 0$. Quindi la soluzione ottima del rilassato $PL$ è:

$$y_{PL}^{*T} = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1/4 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } z_{PL}^* = 52.75.$$

Indicando con $\bar{y}$ il miglior punto corrente ammissibile per $PLI$ e con $\bar{z}$ (incombente) il corrispondente valore di funzione obiettivo, abbiamo:

$$\bar{y}^T = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 3], \quad \text{con } \bar{z} = 49.$$

A questo punto, visto che la soluzione $y_{PL}^*$ non è binaria, facciamo branching sulla componente $y_4 = 1/4$. Poichè la parte intera inferiore di $1/4$ è zero, i sottoproblemi $PLI_1$ e $PLI_2$ verrebbero generati in corrispondenza, rispettivamente, dei vincoli

$$y_4 \leq 0 \text{ e } y_4 \geq 1.$$

Tenendo conto però della presenza dei vincoli $y_4 \geq 0$ e $y_4 \leq 1$, i sottoproblemi $PLI_1$ e $PLI_2$ (vedi albero di Branch & Bound - figura 3.10) si ottengono con l'aggiunta, rispettivamente, dei vincoli

$$y_4 = 0 \text{ e } y_4 = 1.$$

Effettuando la visità in profondità dell'albero, risolviamo ora il rilassato continuo del problema $PLI_1$. Tenendo conto del vincolo aggiuntivo $y_4 = 0$, il vincolo di capacità diventa:

$$8y_1 + 9y_2 + 10y_3 + 13y_5 + y_6 = 30.$$

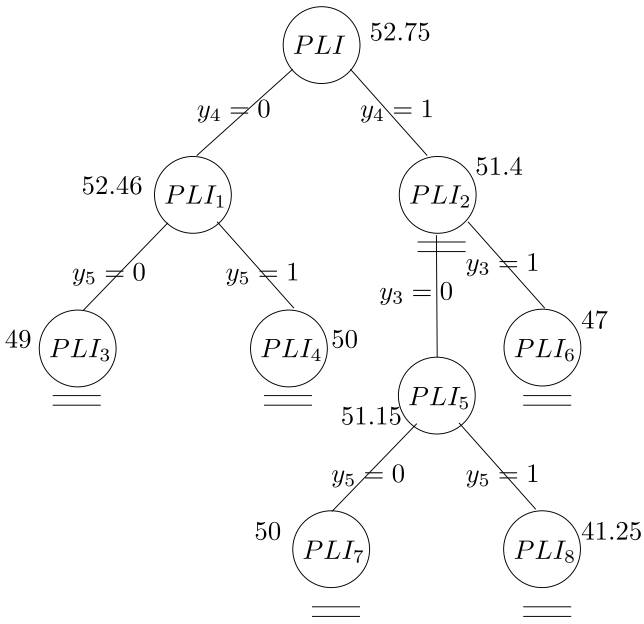


Figura 3.10: Albero di Branch & Bound - visita in profondità (esercizio 3.14)

Quindi la soluzione ottima del rilassato continuo di $PLI_1$ è:

$$y^{*T}_{PL_1} = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 3/13 \;\; 0], \quad \text{con } z^*_{PL_1} = 52.46.$$

Poichè $z^*_{PL_1} = 52.46 > \bar{z} = 49$, facciamo branching sulla variabile $y_5$, ottenendo il sottoproblema $PLI_3$ con l'aggiunta del vincolo $y_5 = 0$ e il sottoproblema $PLI_4$ con l'aggiunta del vincolo $y_5 = 1$ (vedi figura 3.10).

Risolviamo adesso il rilassato continuo di $PLI_3$. Tenendo conto dei vincoli aggiuntivi $y_4 = 0$ e $y_5 = 0$, il vincolo di capacità diventa:

$$8y_1 + 9y_2 + 10y_3 + y_6 = 30,$$

per cui la soluzione ottima di $PL_3$ è:

$$y^{*T}_{PL_3} = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 3], \quad \text{con } z^*_{PL_3} = 49.$$

Il rilassato continuo $PL_3$ fornisce una soluzione ammissibile per $PLI_3$ (e quindi per $PLI$) e di conseguenza viene chiuso. Notiamo però che il valore di $z^*_{PL_3}$ non fornisce alcun miglioramento rispetto a $\bar{z}$ e quindi il punto $\bar{y}$ non cambia.

In base alla strategia di visita in profondità dell'albero, esaminiamo ora il problema $PLI_4$, caratterizzato dai vincoli aggiuntivi $y_4 = 0$ e $y_5 = 1$. Il vincolo di capacità diventa:

$$8y_1 + 9y_2 + 10y_3 + y_6 = 30 - 13 = 17,$$

da cui:

$$y^{*T}_{PL_4} = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0], \quad \text{con } z^*_{PL_3} = 50.$$

Il rilassato continuo di $PLI_4$ viene chiuso in quanto fornisce una soluzione ammissibile per $PLI$. Inoltre, poichè tale soluzione è migliore di $\bar{y}$, il punto $\bar{y}$ viene aggiornato e diventa:

$$\bar{y}^T = y^{*T}_{PL_4} = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0], \quad \text{con } \bar{z} = 50.$$

L'algoritmo prosegue risolvendo $PL_2$. Otteniamo

$$y^{*T}_{PL_2} = [1 \;\; 1 \;\; 1/10 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } z^*_{PL_2} = 51.4.$$

Poichè $z^*_{PL_2} = 51.4 > \bar{z} = 50$, continuiamo facendo branching su $y_3$ (vedi figura 3.10) e generando i sottoproblemi $PLI_5$ e $PLI_6$. La soluzione ottima del rilassato continuo di $PLI_5$ è:

$$y^{*T}_{PL_5} = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1/13 \;\; 0], \quad \text{con } z^*_{PL_2} = 51.15.$$

Poichè $z^*_{PL_2} = 51.15 > \bar{z} = 50$, facciamo branching su $y_5$ e otteniamo $PLI_7$ e $PLI_8$ (vedi figura 3.10). La soluzione ottima di $PL_7$ è:

$$y^{*T}_{PL_7} = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1], \quad \text{con } z^*_{PL_2} = 50.$$

Tale soluzione è ammissibile per $PLI$ (e quindi $PLI_7$ viene chiuso), ma non è migliorativa rispetto a $\bar{y}$ che quindi rimane invariato. Risolvendo $PL_8$ otteniamo:

$$y^{*T}_{PL_8} = [5/8 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0], \quad \text{con } z^*_{PL_8} = 41.25.$$

Dal momento che $z^*_{PL_8} = 41.25 \le \bar{z} = 50$, il sottoproblema $PLI_8$ viene chiuso. Rimane ancora da esaminare il sottoproblema $PLI_6$, la cui soluzione ottima del rilassato continuo è:

$$y^{*T}_{PL_6} = [1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0], \quad \text{con } z^*_{PL_6} = 47.$$

Il rilassato continuo del sottoproblema $PLI_6$ ha fornito una soluzione ammissibile per $PLI$ e quindi viene chiuso. Tale soluzione però è peggiore di $\bar{y}$, che quindi resta invariato. Poichè tutti i sottoproblemi sono stati esaminati e tutti i nodi foglia dell'albero sono stati chiusi, l'algoritmo termina, fornendo come soluzione ottima di $PLI$ il punto

$$y^{*T} = \bar{y} = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0], \quad \text{con } z^* = \bar{z} = 50.$$

Ricordando la corrispondenza fra le variabili $x_i$ e $y_i$, con $i = 1, \ldots, 5$, la soluzione ottima del problema $Z$ è la seguente:

$$x^{*T} = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1], \quad \text{con } z^* = \bar{z} = 50.$$

**Esercizio 3.15.** ■ Applicando l'algoritmo Branch & Bound, risolvere i seguenti problemi dello zaino:

$$1. \left\{ \begin{array}{lrrrrrrl} \max\limits_{x} z = & 3x_1 & +10x_2 & +5x_3 & +9x_4 & +6x_5 & +7x6 & \\ & 9x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +7x_4 & +5x_5 & +2x_6 & \le 51 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \ge 0 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \text{int.} \end{array} \right. ,$$

2. $\begin{cases} \max\limits_x z = & 8x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +7x_4 & +x_5 & \\ & 8x_1 & +9x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +0.5x_5 & \leq 43 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \text{int.} \end{cases}$ ,

3. $\begin{cases} \max\limits_x z = & 10x_1 & +x_2 & +15x_3 & +8x_4 & +x_5 & \\ & 5x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +4x_5 & \leq 32 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \text{int.} \end{cases}$ ,

4. $\begin{cases} \max\limits_x z = & x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +9x_4 & +6x_5 & \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +6x_5 & \leq 49 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \text{int.} \end{cases}$ ,

5. $\begin{cases} \max\limits_x z = & 6x_1 & +20x_2 & +5x_3 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & \leq 22 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \text{int} \end{cases}$ .

Si usi prima la strategia di visita in profondità dell'albero di Branch & Bound, e poi quella basata sul nodo più promettente.

**Esercizio 3.16.** ■ Applicando l'algoritmo Branch & Bound, risolvere i seguenti problemi dello zaino binario:

1. $\begin{cases} \max\limits_x z = & 3x_1 & +10x_2 & +5x_3 & +9x_4 & +6x_5 & +7x6 & \\ & 9x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +7x_4 & +5x_5 & +2x_6 & \leq 14 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in \{0,1\} \end{cases}$ ,

2. $\begin{cases} \max\limits_x z = & 8x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +7x_4 & +x_5 & \\ & 8x_1 & +9x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +0.5x_5 & \leq 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in \{0,1\} \end{cases}$ ,

3. $\begin{cases} \max\limits_x z = & 10x_1 & +x_2 & +15x_3 & +8x_4 & +x_5 & \\ & 5x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +4x_5 & \leq 13 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in \{0,1\} \end{cases}$ ,

4. $\begin{cases} \max\limits_x z = & x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +9x_4 & +6x_5 & \\ & 4x_1 & +7x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +6x_5 & \leq 14 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in \{0,1\} \end{cases}$ .

Si usi prima la strategia di visita in profondità dell'albero di Branch & Bound, e poi quella basata sul nodo più promettente.

**Esercizio 3.17.** ■ Dato il seguente problema $PLM$ di programmazione lineare mista

$$PLM \begin{cases} \max\limits_{x} z = & 4x_1 & +6x_2 & +5x_3 & +6x_4 & +4x_5 & \\ & 2x_1 & +7x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & \leq 53 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \\ & x_1, & & x_3 & & & \text{int} \end{cases},$$

risolvere $PLM$ applicando il metodo Branch & Bound.

**Esercizio 3.18.** ■ Dato il seguente problema $PLM$ di programmazione lineare mista

$$PLM \begin{cases} \max\limits_{x} z = & 7x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +8x_4 & \\ & 2x_1 & +4x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leq 4 \\ & x_1, & & x_3, & x_4 & \in \{0,1\} \\ & 0 & \leq x_2 & \leq 1 & & \end{cases},$$

risolvere $PLM$ applicando l'algoritmo Branch & Bound.

## 3.5 Matrici unimodulari e totalmente unimodulari

**Esercizio 3.19.** ★ Verificare se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1/3 & 5/3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

è unimodulare e/o totalmente unimodulare.

**Risoluzione.** Si vede subito che la matrice $A$ non può essere totalmente unimodulare, poichè è violata la condizione necessaria in base alla quale, se una matrice è totalmente unimodulare, allora tutti suoi elementi devono appartenere all'insieme $\{0, 1, -1\}$. In questo caso solo tre elementi di $A$ (e quindi non tutti) appartengono all'insieme $\{0, 1, -1\}$.

Per vagliare l'unimodularità, applichiamo la definizione. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (con $m \leq n$ e $rg(A) = m$) è unimodulare se ogni sua sottomatrice quadrata $B$ di ordine $m$ non singolare è tale che $det(B) \in \{1, -1\}$.

Nel nostro caso $m = 2$ ed $n = 4$. Le sottomatrici di $A$ quadrate di ordine $m$ (con i rispettivi determinanti) sono le seguenti:

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1/3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(1)}) = -1;$$

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 5/3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(2)}) = 1;$$

$$B^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(3)}) = 0;$$

$$B^{(4)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 5/3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(4)}) = 1;$$

$$B^{(5)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(5)}) = 0;$$

$$B^{(6)} = \begin{bmatrix} 5/3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(6)}) = 0.$$

Poichè tutte le matrici $B^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 6$, sono tali che $det(B^{(i)}) \in \{0, 1, -1\}$, allora possiamo concludere che la matrice $A$ è unimodulare.

**Esercizio 3.20.** ★ Verificare se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è unimodulare e/o totalmente unimodulare.

**Risoluzione.** Notiamo che la matrice A è costituita solo da elementi appartenenti all'insieme $\{0, 1, -1\}$. Quindi la condizione necessaria perchè A sia totalmente unimodulare è verificata.

Applichiamo ora la definizione di totale unimodularità. Una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è totalmente unimodulare se ogni sua sottomatrice quadrata $Q$ non singolare è tale che $det(Q) \in \{1, -1\}$. Dal confronto fra le definizioni di unimodularità e totale unimodularità, è facile vedere che se una matrice è totalmente unimodulare, allora è anche unimodulare e quindi, se una matrice non è unimodulare, non può essere totalmente unimodulare.

Nel nostro caso le sottomatrici quadrate di $A$ possono essere o di ordine 1 (gli elementi di A, per i quali la condizione sul determinante è banalmente verificata visto che appartengono tutti all'insieme $\{0, 1, -1\}$), o di ordine 2. Le sottomatrici quadrate di $A$ di ordine 2 (con i rispettivi determinanti) sono le seguenti:

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(1)}) = 2;$$

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(2)}) = 0;$$

$$B^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(3)}) = -2;$$

$$B^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(4)}) = 0;$$

$$B^{(5)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(5)}) = 0;$$

$$B^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(6)}) = 0.$$

Poichè non tutte le matrici $B^{(i)}$, $i = 1, \dots, 6$, sono tali che $det(B^{(i)}) \in \{0, 1, -1\}$, allora possiamo concludere che la matrice $A$ non è unimodulare ($m = 2$) e, di conseguenza, non è neanche totalmente unimodulare.

**Esercizio 3.21.** ★ Verificare se la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è unimodulare e/o totalmente unimodulare.

**Risoluzione.** Le sottomatrici quadrate di $A$ di ordine 2 (con i rispettivi determinanti) sono le seguenti:

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(1)}) = 1;$$

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(2)}) = 0;$$

$$B^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(3)}) = -1;$$

$$B^{(4)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(4)}) = 0;$$

$$B^{(5)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(5)}) = 0;$$

$$B^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad det(B^{(6)}) = 0.$$

Poichè tutte le matrici $B^{(i)}$, $i = 1, \ldots, 6$, sono tali che $det(B^{(i)}) \in \{0, 1, -1\}$, allora la matrice $A$ è unimodulare ($m = 2$). Inoltre, visto che tutti gli elementi di $A$ (sottomatrici quadrate di ordine 1) appartengono all'insieme $\{0, 1, -1\}$ e quindi la condizione sui rispettivi determinanti è banalmente verificata, di conseguenza la matrice $A$ è anche totalmente unimodulare.

**Esercizio 3.22.** ■ Verificare se le matrici

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

sono unimodulari e/o totalmente unimodulari.

## 3.6 Esercizi di ricapitolazione

**Esercizio 3.23.** ■
Dato il seguente problema $PLI$ di programmazione lineare intera

$$PLI \left\{ \begin{array}{llllllll} \max\limits_{x} z = & 4x_1 & +10x_2 & +7x_3 & +8x_4 & +9x_5 & +x_6 & \\ & 2x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +3x_5 & +x_6 & \leq 21 \\ & & x_2 & & & & & \leq 2 \\ & x_1 & & & & & & \geq 3 \\ & & & & & & x_6 & \geq 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \text{int.} \end{array} \right. ,$$

sia $z^*_{PLI}$ il valore ottimo della funzione obiettivo di $PLI$. Determinare un upper bound su $z^*_{PLI}$, cioè un numero $a$ tale che $a \geq z^*_{PLI}$.

**Esercizio 3.24.** ■ Dato il seguente problema $PLI$ di programmazione lineare intera

$$PLI \left\{ \begin{array}{lrrl} \max\limits_x z = & 2x_1 & +2x_2 & \\ & -x_1 & +5x_2 & \leq 10 \\ & 2x_1 & & \leq 5 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2 & \text{int.} \end{array} \right. ,$$

sia $X$ la regione ammissibile di $PLI$. A partire dalla descrizione grafica di X, formulare il problema $PL$ di programmazione lineare, avente come funzione obiettivo la stessa funzione obiettivo di $PLI$ e come regione ammissibile la copertura convessa di X.

**Esercizio 3.25.** ■ Dato il seguente problema $PLI$ di programmazione lineare intera

$$PLI \left\{ \begin{array}{lrrl} \min\limits_x z = & x_1 & -3x_2 & \\ & 2x_1 & +2x_2 & \leq 3 \\ & -x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & & x_2 & \leq 3 \\ & -2x_1 & & \leq 5 \\ & & x_2 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{array} \right. ,$$

1. risolvere $PLI$ applicando l'algoritmo Branch & Bound e risolvendo tutti i rilassati continui per via grafica;
2. determinare la formulazione ideale di $PLI$.

# Capitolo 4

# Programmazione Lineare Multiobiettivo

## 4.1 Risoluzione grafica: soluzioni ottime, efficienti e debolmente efficienti

**Esercizio 4.1.** ★ Sia $X$ la regione ammissibile dei problemi di programmazione lineare dell'esercizio 2.1 e sia $PLMO$ il seguente problema di programmazione lineare multiobiettivo:

$$PLMO \left\{ \begin{array}{rl} \min\limits_{x} z = & Cx \\ & x \in X \end{array} \right. ,$$

con

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Verificare se $PLMO$ ha soluzione ottima;

2. determinare l'insieme delle soluzioni efficienti per $PLMO$;

3. determinare l'insieme delle soluzioni debolmente efficienti per $PLMO$.

**Risoluzione.** Per prima cosa, costruiamo lo spazio $Z$ dei risultati. Esso è ottenibile come copertura convessa dei trasformati in $Z$ dei punti estremi della regione ammissibile $X$, rappresentata in figura 2.1. Dalla figura 2.1 si evince che i punti estremi di $X$ sono:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

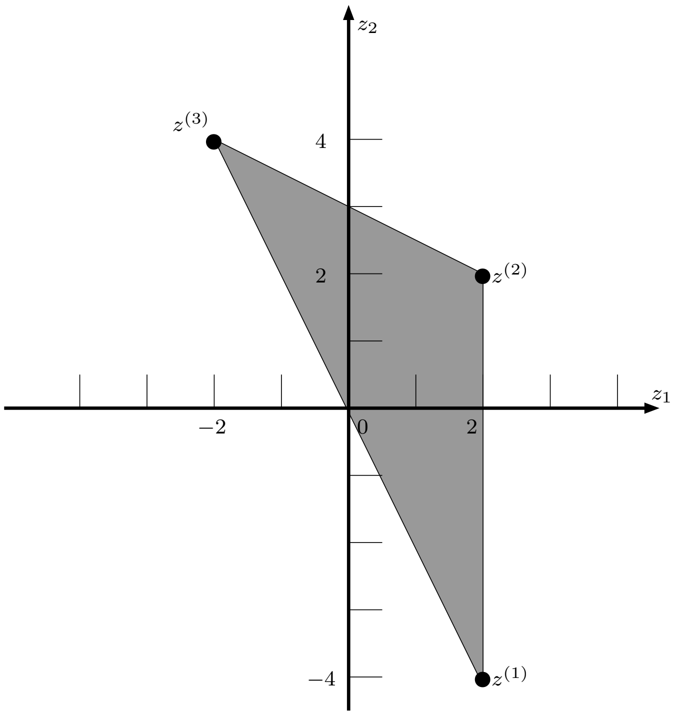


Figura 4.1: Spazio dei risultati (esercizio 4.1)

I trasformati in $Z$ dei punti estremi $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ si ottengono sostituendo le rispettive coordinate nella funzione obiettivo $z = Cx$. Otteniamo:

$$z^{(1)} = Cx^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad z^{(2)} = Cx^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z^{(3)} = Cx^{(3)} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

che costituiscono i punti estremi dell'insieme $Z$. Facendone la copertura convessa, si ottiene lo spazio dei risultati $Z$, rappresentato dalla regione disegnata in grigio in figura 4.1.

Indicando con $z^*$ il punto ideale, le cui componenti corrispondono al valore ottimo di funzione obiettivo dei due problemi di programmazione lineare a singolo obiettivo corrispondenti alla matrice $C$, si ottiene:

$$z^* = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Si vede subito che il problema $PLMO$ non ammette soluzione ottima, poichè $z^* \notin Z$. Osservando la figura 4.1, si vede inoltre che l'insieme delle soluzioni efficienti è costituito dal segmento di estremi $x^{(3)}$ e $x^{(1)}$, che coincide anche con l'insieme delle soluzioni debolmente efficienti. Notiamo infine che le soluzioni ottime dei rispettivi problemi a singolo obiettivo fanno sempre parte dell'insieme delle soluzioni debolmente efficienti.

**Esercizio 4.2.** ★ Sia $X$ la regione ammissibile dei problemi di programmazione lineare dell'esercizio 2.1 e sia $PLMO$ il seguente problema di programmazione lineare multiobiettivo:

$$PLMO \begin{cases} \min\limits_{x} z = & Cx \\ & x \in X \end{cases},$$

con

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Verificare se $PLMO$ ha soluzione ottima;
2. determinare l'insieme delle soluzioni efficienti per $PLMO$;
3. determinare l'insieme delle soluzioni debolmente efficienti per $PLMO$.

**Risoluzione.** A partire dalla regione ammissibile $X$, rappresentata in figura 2.1, costruiamo lo spazio dei risultati calcolando i trasformati dei punti estremi di $X$ e facendone la copertura convessa. Come nell'esercizio 4.1, i punti estremi di $X$ sono:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

I trasformati in $Z$ dei punti estremi $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ sono:

$$z^{(1)} = Cx^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z^{(2)} = Cx^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z^{(3)} = Cx^{(3)} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix},$$

che costituiscono i punti estremi dell'insieme $Z$. Facendone la copertura convessa, si ottiene lo spazio dei risultati $Z$, rappresentato dalla regione disegnata in grigio in figura 4.2.

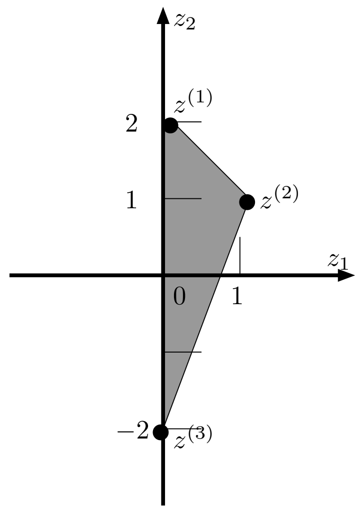


Figura 4.2: Spazio dei risultati (esercizio 4.2)

Dalla figura si vede facilmente che il punto ideale è pari a:

$$z^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Poichè $z^* \in Z$, allora $PLMO$ ammette soluzione ottima in corrispondenza del punto $x^* \in X$ tale che $z^* = Cx^*$. Il punto $x^*$ coincide con la soluzione ottima comune a entrambi i problemi a singolo obiettivo: esso è pertanto pari a

$$x^* = x^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Osservando la figura 4.2, si vede che l'unica soluzione efficiente[1] è il punto $x^* = x^{(3)}$, mentre l'insieme delle soluzioni debolmente efficienti è costituito dal segmento di estremi $x^{(1)}$ e $x^{(3)}$.

**Esercizio 4.3.** ★ Dato il seguente problema $PLMO$ di programmazione lineare multiobiettivo:

$$PLMO \begin{cases} \min\limits_x z = & Cx \\ & \begin{array}{rrl} x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ -x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ -x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ x_1 & -x_2 & \leq 1 \end{array} \end{cases},$$

con

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

1. verificare se $PLMO$ ha soluzione ottima;
2. determinare l'insieme delle soluzioni efficienti per $PLMO$;
3. determinare l'insieme delle soluzioni debolmente efficienti per $PLMO$.

**Risoluzione.** Tenendo conto della regione ammissibile di $PLMO$, rappresentata in grigio nella figura 2.4, lo spazio dei risultati è la regione in grigio rappresentata in figura 4.3. Si vede quindi che l'insieme delle soluzioni efficienti è costituito dal tratto di estremi $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$, mentre l'insieme delle soluzioni debolmente efficienti è costituito da tutte le soluzioni efficienti, con in più il tratto di estremi $x^{(1)}$ e $x^{(4)}$. Infine, poichè $z^{*T} = [-1 \quad -2] \notin Z$, il problema $PLMO$ non ammette soluzione ottima.

**Esercizio 4.4.** ■ Dato il seguente problema $PLMO$ di programmazione lineare multiobiettivo:

$$PLMO \begin{cases} \min\limits_x z = & Cx \\ & \begin{array}{rrl} & x_2 & \leq 2 \\ x_1 & -x_2 & \leq 4 \\ -x_1 & -x_2 & \leq 4 \\ -x_1 & & \leq 3 \end{array} \end{cases},$$

con

$$C = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

[1] Se $PLMO$ ammette soluzione ottima, le sue soluzioni efficienti coincidono con tutte e sole le sue soluzioni ottime.

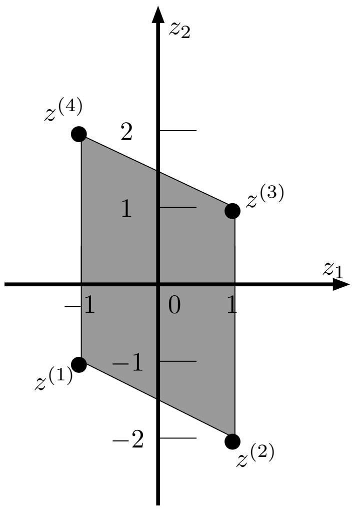


Figura 4.3: Spazio dei risultati (esercizio 4.3)

1. verificare se $PLMO$ ha soluzione ottima;
2. determinare l'insieme delle soluzioni efficienti per $PLMO$;
3. determinare l'insieme delle soluzioni debolmente efficienti per $PLMO$.

**Esercizio 4.5.** ■ Sia $X$ la regione ammissibile dei problemi di programmazione lineare dell'esercizio 2.3 e sia $PLMO$ il seguente problema di programmazione lineare multiobiettivo:

$$PLMO \left\{ \begin{array}{rl} \min\limits_x z = & Cx \\ & x \in X \end{array} \right. ,$$

con

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Verificare se $PLMO$ ha soluzione ottima;
2. determinare l'insieme delle soluzioni efficienti per $PLMO$;
3. determinare l'insieme delle soluzioni debolmente efficienti per $PLMO$.

**Esercizio 4.6.** ■ Sia $X$ la regione ammissibile dei problemi di programmazione lineare dell'esercizio 2.3 e sia $PLMO$ il seguente problema di programmazione lineare multiobiettivo:

$$PLMO \left\{ \begin{array}{rl} \min\limits_x z = & Cx \\ & x \in X \end{array} \right. ,$$

con

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Verificare se $PLMO$ ha soluzione ottima;
2. determinare l'insieme delle soluzioni efficienti per $PLMO$;
3. determinare l'insieme delle soluzioni debolmente efficienti per $PLMO$.

**Esercizio 4.7.** ■ Dato il seguente problema $PLMO$ di programmazione lineare multiobiettivo:

$$PLMO \left\{ \begin{array}{llll} \min\limits_{x} z = & Cx & & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & -x_1 & -x_2 & \leq 1 \\ & x_1 & -x_2 & \leq 1 \end{array} \right. ,$$

con

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Verificare se $PLMO$ ha soluzione ottima;
2. determinare l'insieme delle soluzioni efficienti per $PLMO$;
3. determinare l'insieme delle soluzioni debolmente efficienti per $PLMO$.

## 4.2 Il metodo Goal Programming

**Esercizio 4.8.** ★ Dato il problema $PLMO$ dell'esercizio 4.1, scrivere il modello lineare "Goal Programming", in corrispondenza dei target $T_1 = 20$ e $T_2 = -5$. Come cambia la formulazione del modello se si scelgono come target le coordinate del punto ideale?

**Risoluzione.** Poichè i target rappresentano i valori desiderati dal decisore rispetto agli obiettivi, nel metodo "Goal Programming" si cerca di minimizzare gli scarti fra i target e gli obiettivi. Il problema di ottimizzazione che si cerca di risolvere è quindi il seguente:

$$P \left\{ \begin{array}{ll} \min\limits_{x} & |-x_1 + 2x_2 - T_1| + |2x_1 + 2x_2 - T_2| \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Il problema $P$ non è un lineare a causa della funzione obiettivo. Esso però è trasformabile in un problema di programmazione lineare equivalente, tramite l'aggiunta, per ciascun obiettivo $i$, di due nuove variabili non negative $d_i^+$ (scarto in eccesso) e $d_i^-$ (scarto in difetto), e riscrivendo $P$ nel seguente modo:

$$PL \begin{cases} \min\limits_{x,d^+,d^-} & d_1^+ + d_1^- + d_2^+ + d_2^- \\ & -x_1 + 2x_2 - d_1^+ + d_1^- = T_1 \\ & 2x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = T_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0 \end{cases} .$$

Sostituendo i valori di $T_1$ e $T_2$, otteniamo:

$$PL \begin{cases} \min\limits_{x,d^+,d^-} & d_1^+ + d_1^- + d_2^+ + d_2^- \\ & -x_1 + 2x_2 - d_1^+ + d_1^- = 20 \\ & 2x_1 + 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = -5 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0 \end{cases} .$$

Facciamo notare che, risolvendo con il simplesso il problema $PL$, non può mai succedere che, in corrispondenza di uno stesso obiettivo $i$ si abbia contemporaneamente che i valori ottimi di $d_i^+$ e $d_i^-$ siano diversi da zero.

Nel caso in cui i target coincidono con le coordinate del punto ideale $z^*$, poichè per ogni obiettivo $i$ e per ogni punto ammissibile $x$ si ha $z_i^* \leq c^{(i)T}x$, nella versione non lineare del modello "Goal Programming" il modulo scompare. Si ottiene pertanto il seguente problema di programmazione lineare:

$$PL \begin{cases} \min\limits_{x} & (-x_1 + 2x_2 - z_1^*) + (2x_1 + 2x_2 - z_2^*) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases} ,$$

che, tenendo conto dei valori numerici delle componenti di $z^*$ ottenuti nell'esercizio 4.1, diventa:

$$PL \begin{cases} \min\limits_{x} & (-x_1 + 2x_2 + 2) + (2x_1 + 2x_2 + 4) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases} .$$

Ricordiamo infine che, nel caso in cui i target coincidono con le coordinate del punto ideale, la soluzione ottima del modello $PL$ di "Goal Programming" fornisce una soluzione efficiente del problema $PLMO$.

**Esercizio 4.9.** ■ Dato il problema $PLMO$ dell'esercizio 4.2, scrivere il modello lineare "Goal Programming", in corrispondenza dei target $T_1 = -4$ e $T_2 = 8$. Come cambia la formulazione del modello se si scelgono come target le coordinate del punto ideale?

**Esercizio 4.10.** ■ Dato il problema $PLMO$ dell'esercizio 4.3, scrivere il modello lineare "Goal Programming", in corrispondenza dei target $T_1 = 7$ e $T_2 = 9$. Come cambia la formulazione del modello se si scelgono come target le coordinate del punto ideale?

**Esercizio 4.11.** ■ Sia $X$ la regione ammissibile del problema 2.43 e sia $PLMO$ il seguente problema di programmazione lineare multiobiettivo:

$$PLMO \begin{cases} \min\limits_{x} z = & Cx \\ & x \in X \end{cases},$$

con

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -7 & 8 & -5 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Scrivere il modello lineare "Goal Programming", in corrispondenza dei target $T_1 = -10$, $T_2 = 9$ e $T_3 = 7$.

## 4.3 Il metodo STEM

**Esercizio 4.12.** ★ Dato il problema $PLMO$ dell'esercizio 4.1, scrivere il modello lineare iniziale relativo al metodo "STEM".

**Risoluzione.** Nel metodo di STEM si cerca inizialmente di minimizzare lo scarto massimo degli obiettivi rispetto alle coordinate del punto ideale. In altri termini, si risolve il seguente problema:

$$P \begin{cases} \min\limits_{x} & \max\{-x_1 + 2x_2 - z_1^*, 2x_1 + 2x_2 - z_2^*\} \\ & x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Introducendo una variabile ausiliara $v$, il problema $P$ può essere riscritto equivalentemente come problema di programmazione lineare nella seguente forma:

$$P \begin{cases} \min\limits_{x,v} & v \\ & v \ge -x_1 + 2x_2 - z_1^* \\ & v \ge 2x_1 + 2x_2 - z_2^* \\ & x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 2 \\ & x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Sostituendo i valori di $z_1^*$ e $z_2^*$ determinati nell'esercizio 4.1, otteniamo:

$$P\begin{cases} \min\limits_{x,v} & v \\ & v \geq -x_1 + 2x_2 + 2 \\ & v \geq 2x_1 + 2x_2 + 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

**Esercizio 4.13.** ■ Dato il problema $PLMO$ dell'esercizio 4.2, scrivere il modello lineare iniziale relativo al metodo "STEM".

**Esercizio 4.14.** ■ Dato il problema $PLMO$ dell'esercizio 4.3, scrivere il modello lineare iniziale relativo al metodo "STEM".

# Capitolo 5

# Ottimizzazione su Rete

## 5.1 Il problema del cammino di costo minimo

**Esercizio 5.1.** ★ Sia dato un grafo orientato $G(V, E)$ caratterizzato da 8 nodi ($V = \{s, 1, 2, \ 3, 4, 5, 6, 7\}$) e 13 archi. A ciascun arco è associato un costo secondo le seguenti tabelle:

| Arco | (s,1) | (s,2) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (2,4) | (3,5) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo | 1 | 4 | 2 | 4 | 1 | 4 | 6 |

| Arco | (3,6) | (4,3) | (6,4) | (6,5) | (6,7) | (7,5) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo | 1 | 1 | 5 | 9 | 1 | 2 |

1. Determinare l'albero dei cammini minimi dal nodo s a tutti gli altri nodi, applicando l'algoritmo di Dijkstra;

2. formulare il problema come problema di programmazione lineare e determinarne una soluzione ottima.

**Risoluzione.** Il grafo corrispondente al problema da risolvere è descritto in figura 5.1, in cui a ciascun arco $(i, j) \in E$ è associato il corrispondente costo $c_{ij}$ secondo i valori riportati nelle due tabelle.

Per la risoluzione del problema, applichiamo l'algoritmo di Dijkstra. Indichiamo con $W$ l'insieme dei nodi con etichetta permanente e con $pred$ il vettore di lunghezza pari a $|V|$, avente il seguente significato: $pred(i) = j$ se il nodo $j$ precede $i$ lungo il cammino corrente da $s$ a $i$. Indichiamo inoltre con $\rho(i)$ il costo del cammino corrente dal nodo $s$ al nodo $i$.

Al termine dell'algoritmo, per ciascun nodo $i$, i valori finali $pred(i)$ e $\rho(i)$ indicheranno rispettivamente il nodo che precede $i$ lungo un cammino minimo da $s$ a $i$ e il costo del corrispondente cammino minimo da $s$ a $i$. All'inizio si ha:

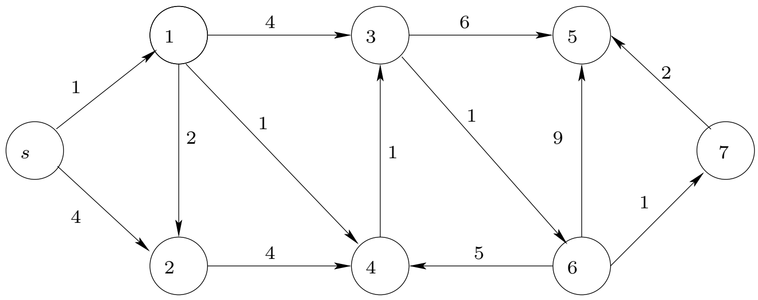


Figura 5.1: Grafo di partenza (esercizi 5.1 e 5.2)

- $W = \emptyset$;
- $\rho(s) = 0 \quad \text{e} \quad \rho(i) = +\infty, \quad \text{per ogni} \quad i \neq s$;
- $pred(i) = s \quad \text{per ogni} \quad i$.

Nell'esecuzione dell'algoritmo, per la descrizione dei valori correnti di $W$ e $\rho$ utilizziamo la seguente tabella, inizializzata nel seguente modo:

| $W$ | $\rho(s)$ | $\rho(1)$ | $\rho(2)$ | $\rho(3)$ | $\rho(4)$ | $\rho(5)$ | $\rho(6)$ | $\rho(7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

Allo stesso modo, per descrivere i valori correnti del vettore *pred*, utilizziamo la seguente tabella, così inizializzata:

| $pred(s)$ | $pred(1)$ | $pred(2)$ | $pred(3)$ | $pred(4)$ | $pred(5)$ | $pred(6)$ | $pred(7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | $s$ | $s$ | $s$ | $s$ | $s$ | $s$ | $s$ |

L'algoritmo procede nel seguente modo. Fra i nodi non appartenenti a $W$, si determina quello con valore di etichetta $\rho$ più basso; in altre parole, si calcola il nodo $v \notin W$ tale che

$$\rho(v) = \min_{i \notin W} \rho(i)$$

e lo si inserisce in $W$ (cioè il nodo $v$ assume etichetta permanente). Poi, a partire da $v$, si aggiornano eventualmente le etichette dei nodi $i$ non appartenenti a $W$ raggiungibili da $v$, tramite l'arco $(v, i)$. In particolare, per ogni nodo $i \notin W$ tale che $(v, i) \in E$, calcoliamo la quantità $\rho(v) + c_{vi}$. Se

$$\rho(v) + c_{vi} < \rho(i),$$

allora si pone

$$\rho(i) = \rho(v) + c_{vi} \quad \text{e} \quad pred(i) = v.$$

La procedura viene iterata fino a quando tutti i nodi non sono etichettati permanentemente, cioè fino a quando $W = V$.

All'inizio la lista $W$ è vuota e il nodo corrispondente al valore minimo di etichetta $\rho$ è il nodo sorgente $s$, che entra in $W$ con etichetta permanente $\rho(s) = 0$.

A partire da $s$ sono raggiungibili i nodi 1 e 2. Poichè

$$\rho(s) + c_{s1} = 0 + 1 = 1 < \rho(1) = +\infty \quad \text{e} \quad \rho(s) + c_{s2} = 0 + 4 = 4 < \rho(2) = +\infty,$$

allora si pone

$$\rho(1) = \rho(s) + c_{s1} = 0 + 1 = 1 \quad \text{e} \quad \rho(2) = \rho(s) + c_{s2} = 0 + 4 = 4.$$

Otteniamo quindi

| $W$ | $\rho(s)$ | $\rho(1)$ | $\rho(2)$ | $\rho(3)$ | $\rho(4)$ | $\rho(5)$ | $\rho(6)$ | $\rho(7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{s\}$ | 0 | 1 | 4 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

.

Iterando la procedura, poichè

$$\min_{i \notin W} \rho(i) = \min\{\rho(1), \rho(2)\} = \min\{1, 4\} = 1 = \rho(1),$$

il nodo 1 entra in W; dal momento che

$$\rho(1) + c_{12} = 1 + 2 = 3 < \rho(2) = 4, \quad \rho(1) + c_{13} = 1 + 4 = 5 < \rho(3) = +\infty$$

e

$$\rho(1) + c_{14} = 1 + 1 = 2 < \rho(4) = +\infty,$$

allora le etichette dei nodi 2, 3 e 4 cambiano e si pone

$$\rho(2) = \rho(1) + c_{12} = 1 + 2 = 3, \quad \rho(3) = \rho(1) + c_{13} = 1 + 4 = 5,$$

e

$$\rho(4) = \rho(1) + c_{14} = 1 + 1 = 2.$$

Di conseguenza, il nodo predecessore dei nodi 2, 3 e 4 diventa adesso il nodo 1. Otteniamo:

| $W$ | $\rho(s)$ | $\rho(1)$ | $\rho(2)$ | $\rho(3)$ | $\rho(4)$ | $\rho(5)$ | $\rho(6)$ | $\rho(7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{s, 1\}$ | 0 | 1 | 3 | 5 | 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |

e

| $pred(s)$ | $pred(1)$ | $pred(2)$ | $pred(3)$ | $pred(4)$ | $pred(5)$ | $pred(6)$ | $pred(7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | $s$ | 1 | 1 | 1 | $s$ | $s$ | $s$ |

Iterando la procedura otteniamo:

| $W$ | $\rho(s)$ | $\rho(1)$ | $\rho(2)$ | $\rho(3)$ | $\rho(4)$ | $\rho(5)$ | $\rho(6)$ | $\rho(7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\{s, 1, 4\}$ | 0 | 1 | 3 | 3 | 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $\{s, 1, 4, 2\}$ | 0 | 1 | 3 | 3 | 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $\{s, 1, 4, 2, 3\}$ | 0 | 1 | 3 | 3 | 2 | 9 | 4 | $+\infty$ |
| $\{s, 1, 4, 2, 3, 6\}$ | 0 | 1 | 3 | 3 | 2 | 9 | 4 | 5 |
| $\{s, 1, 4, 2, 3, 6, 7\}$ | 0 | 1 | 3 | 3 | 2 | 7 | 4 | 5 |
| $\{s, 1, 4, 2, 3, 6, 7, 5\} = V$ | 0 | 1 | 3 | 3 | 2 | 7 | 4 | 5 |

e

| $pred(s)$ | $pred(1)$ | $pred(2)$ | $pred(3)$ | $pred(4)$ | $pred(5)$ | $pred(6)$ | $pred(7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | $s$ | 1 | 4 | 1 | $s$ | $s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | 1 | 4 | 1 | $s$ | $s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | 1 | 4 | 1 | 3 | 3 | $s$ |
| $s$ | $s$ | 1 | 4 | 1 | 3 | 3 | 6 |
| $s$ | $s$ | 1 | 4 | 1 | 7 | 3 | 6 |
| $s$ | $s$ | 1 | 4 | 1 | 7 | 3 | 6 |

Dall'ultima riga della precedente tabella è possibile leggere il nodo che precede ciascun nodo lungo il cammino minimo a partire da $s$. Otteniamo l'albero dei cammini minimi rappresentato in figura 5.2.

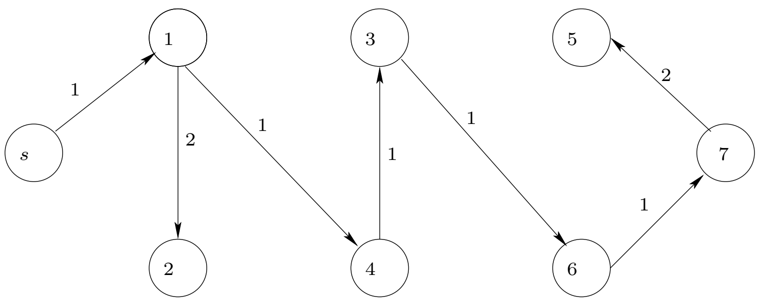


Figura 5.2: Albero dei cammini minimi (esercizio 5.1)

Quanto alla formulazione del problema come problema di programmazione lineare, basta procedere nel seguente modo. Costruiamo per prima cosa la matrice di incidenza $A$ del digrafo, ottenendo:

$$A = \begin{array}{c} \mathrm{s} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indicando con $f_{ij}$ il flusso associato al generico arco $(i, j)$, abbiamo un solo nodo sorgente $s$, con

$$d_s = \sum_{j|(s,j)\in E} f_{sj} - \sum_{j|(j,s)\in E} f_{js} = |V| - 1 = 7, \tag{5.1}$$

mentre tutti gli altri nodi $i \neq s$ sono nodi di destinazione, con

$$d_i = \sum_{j|(i,j)\in E} f_{ij} - \sum_{i|(j,i)\in E} f_{ji} = -1. \tag{5.2}$$

Il problema quindi può essere formulato nel seguente modo:

$$P \begin{cases} \min\limits_{f} z = & c^T f \\ & Af \quad = d \\ & \;\; f \quad \geq 0 \end{cases},$$

con

$$c^T = [1 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 5 \;\; 9 \;\; 1 \;\; 2],$$
$$d^T = [7 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$$

e

$$f^T = [f_{s1} \;\; f_{s2} \;\; f_{12} \;\; f_{13} \;\; f_{14} \;\; f_{24} \;\; f_{35} \;\; f_{36} \;\; f_{43} \;\; f_{64} \;\; f_{65} \;\; f_{67} \;\; f_{75}].$$

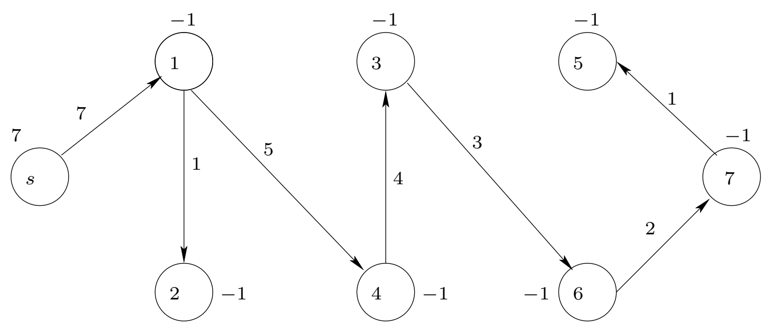


Figura 5.3: Soluzione ottima (esercizio 5.1)

Quanto al calcolo della soluzione ottima $f^*_{ij}$ del problema $P$, indicando con $T$ l'insieme degli archi appartenenti all'albero dei cammini minimi riportato in figura 5.2, sappiamo che

$$f^*_{ij} = 0 \quad \text{per ogni } (i,j) \notin T. \tag{5.3}$$

I valori delle altri componenti della soluzione ottima sono facilmente ricavabili ricordando la (5.3) e imponendo le equazioni (5.1) e (5.2). Otteniamo (vedi figura 5.3):

$$f^*_{s1} = 7; \quad f^*_{12} = 1; \quad f^*_{14} = 5; \quad f^*_{43} = 4; \quad f^*_{36} = 3; \quad f^*_{67} = 2; \quad f^*_{57} = 1.$$

Tale soluzione ottima costituisce una soluzione di base per il problema $P$; ricordiamo infatti che la matrice $A$ di incidenza del digrafo ha rango pari a $|V| - 1$. Il valore ottimo di funzione obiettivo è pari a

$$z^* = 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 25.$$

**Esercizio 5.2.** ★ Sia dato il grafo orientato $G = (V, E)$ rappresentato in figura 5.1, in cui, per ciascun arco $(i,j) \in E$, è riportato il corrispondente costo $c_{ij}$.

1. Applicare l'algoritmo di Dijkstra per determinare un cammino minimo dal nodo $s$ al nodo 6;

2. formulare il problema come problema di programmazione lineare e determinarne una soluzione ottima.

**Risoluzione.** Basta applicare l'algoritmo di Dijkstra, come nell'esercizio 5.1. La differenza, rispetto all'esercizio 5.1, è nel criterio di stopping: l'algoritmo si ferma non appena il nodo terminale (nodo 6) assume etichetta permanente, cioè non appena il nodo 6 entra nell'insieme $W$.

Otteniamo le seguenti tabelle:

| $W$ | $\rho(s)$ | $\rho(1)$ | $\rho(2)$ | $\rho(3)$ | $\rho(4)$ | $\rho(5)$ | $\rho(6)$ | $\rho(7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ | 0 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $\{s\}$ | 0 | 1 | 4 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $\{s,1\}$ | 0 | 1 | 3 | 5 | 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $\{s,1,4\}$ | 0 | 1 | 3 | 3 | 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $\{s,1,4,2\}$ | 0 | 1 | 3 | 3 | 2 | $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $\{s,1,4,2,3\}$ | 0 | 1 | 3 | 3 | 2 | 9 | 4 | $+\infty$ |
| $\{s,1,4,2,3,6\}$ | | | | | | | | |

e

| $pred(s)$ | $pred(1)$ | $pred(2)$ | $pred(3)$ | $pred(4)$ | $pred(5)$ | $pred(6)$ | $pred(7)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | $s$ | $s$ | $s$ | $s$ | $s$ | $s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | 1 | 1 | 1 | $s$ | $s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | 1 | 4 | 1 | $s$ | $s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | 1 | 4 | 1 | $s$ | $s$ | $s$ |
| $s$ | $s$ | 1 | 4 | 1 | 3 | 3 | $s$ |

Dall'ultima riga dei nodi predecessori è facile ricostruire il cammino minimo da $s$ a 6, leggendo a ritroso i nodi predecessori a partire dal nodo 6. Poichè $pred(6) = 3$, $pred(3) = 4$, $pred(4) = 1$ e $pred(1) = s$, il cammino minimo ottenuto è quello riportato in figura 5.4. Il suo costo è pari a $\rho(6) = 4$.

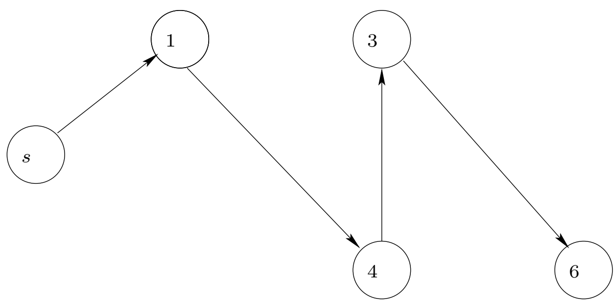


Figura 5.4: Cammino minimo (esercizio 5.2)

Quanto alla formulazione del problema come problema di programmazione lineare, essa è:

$$P \begin{cases} \min\limits_{f} z = & c^T f \\ & Af \quad = d \\ & f \quad \geq 0 \end{cases},$$

con

$$c^T = [1 \;\; 4 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 1 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 5 \;\; 9 \;\; 1 \;\; 2],$$
$$d^T = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 0]$$

e

$$f^T = [f_{s1} \;\; f_{s2} \;\; f_{12} \;\; f_{13} \;\; f_{14} \;\; f_{24} \;\; f_{35} \;\; f_{36} \;\; f_{43} \;\; f_{64} \;\; f_{65} \;\; f_{67} \;\; f_{75}].$$

La soluzione ottima di $P$ si ottiene ponendo a uno il valore dei flussi associati agli archi facenti parte del cammino dal nodo $s$ al nodo 6 e ponendo a zero il valore di flusso di tutti gli altri archi. Otteniamo

$$\begin{cases} f^*_{ij} = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (s,1),(1,4),(4,3),(3,6) \\ f^*_{s1} = f^*_{14} = f^*_{43} = f^*_{36} = 1. \end{cases},$$

con $z^* = \rho(6) = 4$.

**Esercizio 5.3.** ■ Sia dato un grafo orientato $G = (V,E)$, caratterizzato da 8 nodi ($V = \{1,2,3,\ 4,5,6,7,8\}$) e 14 archi. A ciascun arco è associato un costo secondo le seguenti tabelle:

| Arco | (1,2) | (1,3) | (2,3) | (2,4) | (2,6) | (3,4) | (3,5) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 1 | 2 |

| Arco | (4,6) | (4,7) | (5,4) | (6,7) | (6,8) | (7,5) | (7,8) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo | 1 | 4 | 3 | 1 | 7 | 6 | 1 |

1. Determinare l'albero dei cammini minimi dal nodo 1 a tutti gli altri nodi;
2. formulare il problema come problema di programmazione lineare e determinarne una soluzione ottima;
3. volendo determinare un cammino minimo solo dal nodo 1 al nodo 4, come cambia la formulazione del problema e la corrispondente soluzione ottima?

**Esercizio 5.4.** ■ Sia dato un grafo orientato $G = (V,E)$, caratterizzato da 8 nodi ($V = \{1,2,3,\ 4,5,6,7,8\}$) e 13 archi. A ciascun arco è associato un costo secondo le seguenti tabelle:

| Arco | (1,2) | (1,3) | (2,4) | (3,2) | (3,5) | (4,6) | (5,2) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo | 10 | 1 | 1 | 7 | 1 | 1 | 1 |

| Arco | (5,4) | (5,7) | (6,7) | (6,8) | (7,4) | (8,7) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Costo | 4 | 9 | 4 | 1 | 8 | 1 |

1. Determinare un cammino minimo dal nodo 1 al nodo 7;
2. formulare il problema come problema di programmazione lineare e determinarne una soluzione ottima.

**Esercizio 5.5.** ■ Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{e} \quad E = \{(1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}.$$

Sia

$$c^T = [c_{13} = 1 \;\; c_{21} = 1 \;\; c_{23} = 1 \;\; c_{24} = 4 \;\; c_{34} = 1 \;\; c_{35} = 7 \;\; c_{45} = 1 \;\; c_{46} = 6 \;\; c_{56} = 1]$$

il vettore dei costi. Applicando l'algoritmo di Dijkstra, determinare l'albero dei cammini minimi dal nodo 2 a tutti gli altri nodi.

**Esercizio 5.6.** ■ Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato con 6 nodi e 10 archi, e sia $P$ il problema del cammino di costo minimo dal nodo 1 a tutti gli altri nodi. Gli archi e i rispettivi costi sono riportati nella seguente tabella:

| Arco | Costo | Arco | Costo |
|---|---|---|---|
| (1,2) | 1 | (4,3) | 1 |
| (1,3) | 2 | (4,5) | 8 |
| (2,3) | 4 | (4,6) | 1 |
| (2,4) | 1 | (5,2) | 1 |
| (3,5) | 8 | (5,6) | 9 |

Formulare il problema $P$ come problema di programmazione lineare e determinarne il valore ottimo di funzione obiettivo, sapendo che un albero dei cammini minimi dal nodo 1 a tutti gli altri nodi è definito dal seguente insieme $T$ di archi:

$$T = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)\}.$$

**Esercizio 5.7.** ■ Una società di trasporti deve effettuare delle consegne in uno stesso giorno in sette città diverse, tramite sette TIR. Ogni TIR parte dalla sede centrale ed è diretto ad una sola città. Nella seguente tabella, per ogni tratto stradale che collega le varie città, sono riportate la distanza (espressa in km) e la velocità massima consentita (espressa in km/h):

| Tratto stradale | Distanza | Velocità massima |
|---|---|---|
| Sede - città 1 | 160 | 80 |
| Sede - città 2 | 60 | 60 |
| Città 1 - città 2 | 90 | 30 |
| Città 1 - città 3 | 50 | 50 |
| Città 1 - città 5 | 200 | 50 |
| Città 2 - città 4 | 240 | 60 |
| Città 2 - città 7 | 70 | 70 |
| Città 3 - città 4 | 200 | 50 |
| Città 3 - città 5 | 90 | 90 |
| Città 3 - città 6 | 100 | 50 |
| Città 6 - città 5 | 210 | 70 |
| Città 7 - città 4 | 80 | 80 |
| Città 7 - città 6 | 180 | 90 |

La società vuole determinare i percorsi ottimi dalla sede centrale alle sette città, con l'obiettivo di minimizzare i tempi di percorrenza di ciascun TIR e nell'ipotesi che ogni TIR viaggi sempre alla velocità massima consentita.

**Esercizio 5.8.** ■ Dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \left\{ \begin{array}{rl} \min\limits_{f} z = & c^T f \\ & Af \quad = d \\ & \quad f \quad \geq 0 \end{array} \right. ,$$

per ciascuno dei seguenti valori di $A$, $c$ e $d$, determinare una soluzione ottima per $P$.

1. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [1\ 3\ 2\ 2\ 1\ 9\ 4\ 6\ 1\ 1\ 8], \quad d^T = [6\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1\ -1].$$

2. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [1\ \ 1\ \ 5\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 7\ \ 1\ \ 8], \quad d^T = [1\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 0\ \ 0].$$

3. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [1\ \ 7\ \ 2\ \ 4\ \ 10\ \ 3\ \ 9\ \ 1\ \ 2], \quad d^T = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ -1\ \ 0].$$

4. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [6\ \ 1\ \ 4\ \ 8\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 9\ \ 5], \quad d^T = [6\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1].$$

5. $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 4\ \ 1\ \ 7\ \ 1\ \ 6\ \ 1], \quad d^T = [-1\ \ 5\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ -1].$$

6. $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [10\ \ 1\ \ 3\ \ 11\ \ 5\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 10\ \ 7\ \ 1], \quad d^T = [-1\ \ -1\ \ -1\ \ -1\ \ 6\ \ -1\ \ -1].$$

7. $$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [1 \;\; 4 \;\; 1 \;\; 6 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 5 \;\; 1], \quad d^T = [-1 \;\; -1 \;\; 6 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1].$$

8. $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 15 \;\; 2 \;\; 10 \;\; 1 \;\; 12 \;\; 4 \;\; 2], \quad d^T = [-1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; 6 \;\; -1 \;\; -1];$$

9. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [5 \;\; 4 \;\; 1 \;\; 8 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 9 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 5], \quad d^T = [6 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1 \;\; -1].$$

**Esercizio 5.9.** ■ Determinare una soluzione ottima del seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \begin{cases} \min\limits_{f} z = & c^T f \\ & Af \;\; = d \\ & \;\; f \;\; \geq 0 \end{cases},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [2 \ \ 1 \ \ 4 \ \ 1 \ \ 3 \ \ 2 \ \ 9 \ \ 7 \ \ 1 \ \ 3 \ \ 1] \quad d^T = [6 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1].$$

Lasciando invariati $A$ e $c$, come cambia la soluzione ottima di $P$ in corrispondenza del vettore $d^T = [1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \quad -1 \ \ 0]$?

## 5.2 Il problema del massimo flusso

**Esercizio 5.10.** ★ Sia dato il problema del massimo flusso dal nodo $s$ al nodo $t$, riportato in figura 5.5, dove a ogni arco $(i, j)$ sono associati rispettivamente la capacità massima $b_{ij}$ e il valore di flusso corrente $f_{ij}$.

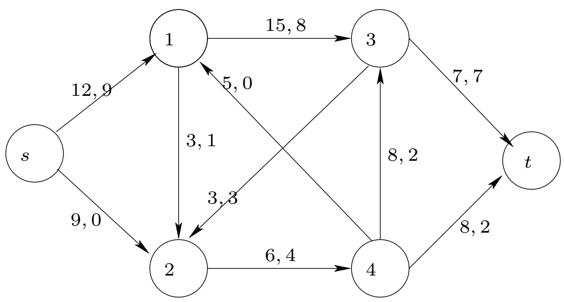


Figura 5.5: Rete iniziale (esercizi 5.10 e 5.11)

1. Formulare il problema come problema di programmazione lineare e determinarne una soluzione ottima applicando l'algoritmo di Ford & Fulkerson;

2. determinare il taglio a capacità minima;

3. verificare la validità del teorema del "massimo flusso & minimo taglio".

**Risoluzione.** Il problema può essere formulato come problema di programmazione lineare nel seguente modo:

$$
P \begin{cases}
\max\limits_{f,v} z = & v \\
& f_{s1} + f_{s2} = v \\
& f_{3t} + f_{4t} = v \\
& f_{12} + f_{13} - f_{s1} - f_{41} = 0 \\
& f_{24} - f_{s2} - f_{12} - f_{32} = 0 \\
& f_{32} + f_{3t} - f_{13} - f_{43} = 0 \\
& f_{41} + f_{43} + f_{4t} - f_{24} = 0 \\
& 0 \leq f_{s1} \leq 12 \\
& 0 \leq f_{s2} \leq 9 \\
& 0 \leq f_{12} \leq 3 \\
& 0 \leq f_{13} \leq 15 \\
& 0 \leq f_{24} \leq 6 \\
& 0 \leq f_{32} \leq 3 \\
& 0 \leq f_{3t} \leq 7 \\
& 0 \leq f_{41} \leq 5 \\
& 0 \leq f_{43} \leq 8 \\
& 0 \leq f_{4t} \leq 8
\end{cases}.
$$

L'algoritmo di Ford & Fulkerson è basato sulla costruzione di cammini incrementali dal nodo $s$ al nodo $t$. Un cammino incrementale è un cammino non orientato da $s$ a $t$ lungo il quale è possibile incrementare il flusso di una certa quantità $\epsilon > 0$. L'algoritmo termina quando, in corrispondenza del flusso corrente, non è più possibile costruire cammini incrementali.

La costruzione di un cammino incrementale avviene contrassegnando ciascun nodo $j$ con una coppia di etichette $[pred(j), incr(j)]$: la prima etichetta indica il nodo predecessore di $j$ lungo il cammino incrementale da $s$ a $j$, la seconda indica il massimo incremento di flusso possibile lungo il cammino incrementale da $s$ a $j$. In particolare, $pred(j) = +i$ se il nodo $i$ ha fornito l'etichetta al nodo $j$ ed è ad esso collegato tramite l'arco $(i, j)$ (arco "in avanti"), mentre $pred(j) = -i$ se il nodo $i$ ha fornito l'etichetta al nodo $j$ ed è ad esso collegato tramite l'arco $(j, i)$ (arco "all'indietro").

All'inizio di ogni iterazione l'unico nodo contrassegnato è il nodo sorgente, con $pred(s) = +s$ e $incr(s) = +\infty$. I nodi contrassegnati vengono inseriti in un'opportuna lista $L$, da cui poi si estrae un nodo che fornirà un'eventuale etichetta ai nodi non contrassegnati ad esso adiacenti. Nella singola iterazione, la procedura di costruzione del cammino incrementale termina quando è stato contrassegnato il nodo $t$: il cammino incrementale è ricavabile a ritroso, leggendo cioè, a partire dal nodo $t$, i vari nodi predecessori fino ad arrivare al nodo sorgente $s$.

L'etichettatura dei nodi avviene nel seguente modo. Indicando con $E$ l'insieme degli archi e con $L$ la lista dei nodi etichettati, si estrae da $L$ un nodo: ad esempio il nodo $i$. A partire da $i$ si etichettano i nodi $j$ non etichettati tali che $(i, j) \in E$ e $f_{ij} < b_{ij}$ e quelli tali che $(j, i) \in E$ e $f_{ji} > 0$. Nel primo caso, le etichette assegnate al nodo $j$ sono: $pred(j) = +i$ e $incr(j) = \min\{incr(i), b_{ij} - f_{ij}\}$; nel secondo caso le etichette assegnate sono: $pred(j) = -i$ e $incr(j) = \min\{incr(i), f_{ji}\}$. I nuovi nodi etichettati vengono inseriti in $L$, da cui poi si estrarrà un ulteriore nodo che propagherà l'etichetta. La procedura viene iterata fino a quando il nodo $t$ non entra in $L$, cioè fino a quando non sia stato etichettato il nodo terminale.

Etichettato il nodo terminale (e quindi dopo aver costruito un cammino incrementale), si aggiorna il flusso lungo tale cammino aumentandolo di $\epsilon = incr(t)$ lungo gli archi "in avanti" del cammino e diminuendolo di $\epsilon = incr(t)$ lungo gli archi "all'indietro" del cammino. In questa maniera il flusso $v$ uscente da $s$ ed entrante in $t$ aumenta complessivamente di $\epsilon$.

In questo caso, volendo costruire un cammino incrementale da $s$ a $t$, otteniamo la seguente tabella:

| Propaga | 1 | 2 | 3 | 4 | $t$ | $L$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | [+s,3] | [+s,9] | | | | {1,2} |
| 1 | | | [+1,3] | | | {2,3} |
| 2 | | | | [+2,2] | | {3,4} |
| 3 | | | | | | {4} |
| 4 | | | | | [+4,2] | {t} |

corrispondente alla figura 5.6.

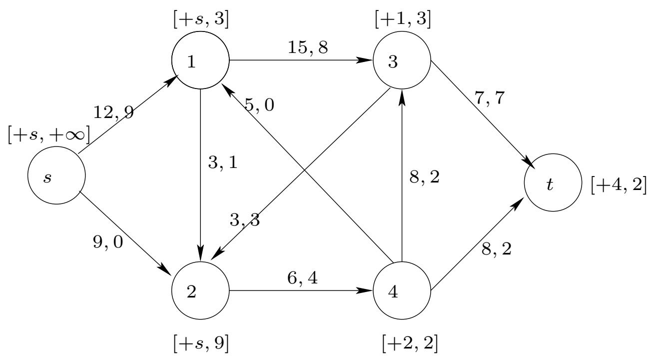


Figura 5.6: Costruzione del primo cammino incrementale (esercizio 5.10)

Ad esempio, a partire da $s$ vengono etichettati i nodi 1 e 2: tali nodi sono etichettabili da $s$ poichè sono ad esso collegati tramite un arco non saturo uscente da $s$. Visto che in entrambi i casi l'arco è uscente da $s$, si ha

$$pred(1) = +s \quad \text{e} \quad incr(1) = \min\{incr(s), b_{s1} - f_{s1}\} = \min\{+\infty, 12 - 9\} = 3$$

e

$$pred(2) = +s \quad \text{e} \quad incr(2) = \min\{incr(s), b_{s2} - f_{s2}\} = \min\{+\infty, 9 - 0\} = 9.$$

A questo punto i nodi 1 e 2 vengono inseriti in $L$. Iterando la procedura ed estraendo da $L$ il nodo 1, a partire dal nodo 1 viene contrassegnato il nodo 3, che entra in $L$, e così via. La costruzione del cammino incrementale termina quando il nodo $t$ entra in $L$. In questo caso il cammino incrementale ottenuto è $s, 2, 4, t$: esso è costituito solo da archi "in avanti". Incrementando il flusso lungo tale cammino di una quantità pari ad

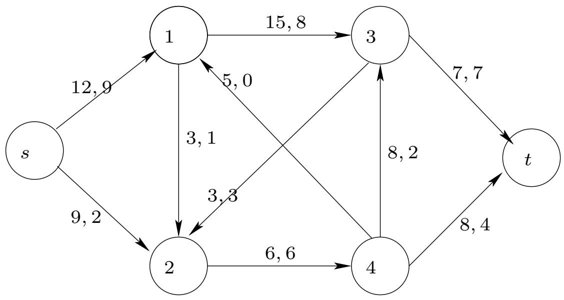


Figura 5.7: Prima iterazione: aggiornamento del flusso lungo il cammino incrementale $s, 2, 4, t$ (esercizio 5.10)

$\epsilon = incr(t) = 2$, otteniamo la distribuzione di flusso riportata in figura 5.7, nella quale si vede facilmente che il flusso $v$ trasferito da $s$ a $t$ è stato incrementato di $\epsilon$, passando da 9 a 11.

A seguito dell'aggiornamento del flusso lungo il cammino incrementale $s, 2, 4, t$, l'arco $(2, 4)$ è diventato saturo.

A questo punto si cancellano tutte le etichette (eccetto quelle del nodo $s$) e si itera la procedura per costruire il nuovo cammino incrementale, ottenendo la seguente tabella, corrispondente al cammino incrementale $s, 1, 3, 4, t$ (figura 5.8):

| Propaga | 1 | 2 | 3 | 4 | $t$ | $L$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | [+s,3] | [+s,7] | | | | {1,2} |
| 1 | | | [+1,3] | | | {2,3} |
| 2 | | | | | | {3} |
| 3 | | | | (-3,2) | | {4} |
| 4 | | | | | [+4,2] | {t} |

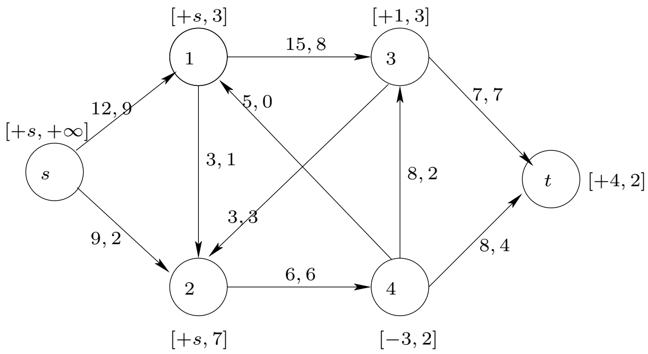


Figura 5.8: Costruzione del secondo cammino incrementale (esercizio 5.10)

Notiamo che il nodo 4 è stato etichettato a partire dal nodo 3 con un arco "all'indietro", cioè a partire dall'arco $(4, 3)$ che è entrante nel nodo 3. Le etichette del nodo 4 sono state così determinate:

$$pred(4) = -3 \quad \text{e} \quad incr(4) = \min\{incr(3), f_{43}\} = \min\{3, 2\} = 2.$$

Il segno "$-$" nell'etichetta $pred(4)$ serve a ricordarci che, nell'aggiornare il flusso lungo il cammino incrementale sull'arco $(4, 3)$ (arco "all'indietro"), esso dovrà essere diminuito di $\epsilon = incr(t) = 2$. Dopo l'aggiornamento del flusso otteniamo la figura 5.9. Ora il flusso $v$ (che stiamo massimizzando), trasferibile da $s$ a $t$, è pari a 13.

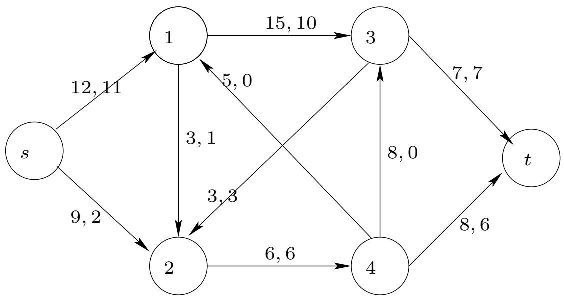


Figura 5.9: Seconda iterazione: aggiornamento del flusso lungo il cammino incrementale $s, 1, 3, 4, t$ (esercizio 5.10)

Iterando la procedura per ottenere un nuovo cammino incrementale, ci accorgiamo che il nodo $t$ non è più etichettabile e quindi non esistono più cammini incrementali. Otteniamo infatti la seguente tabella:

| Propaga | 1 | 2 | 3 | 4 | $t$ | $L$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | [+s,1] | [+s,7] | | | | {1,2} |
| 1 | | | [+1,1] | | | {2,3} |
| 2 | | | | | | {3} |
| 3 | | | | | | $\emptyset$ |

corrispondente alla figura 5.10.

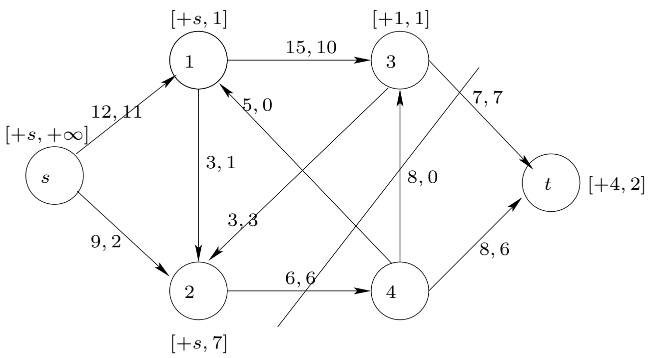


Figura 5.10: Soluzione ottima e taglio a capacità minima (esercizi 5.10 e 5.11)

Visto che non esistono più cammini incrementali, il flusso corrente riportato nelle figure 5.9 e 5.10 è ottimo. La soluzione ottima del problema $P$ del massimo flusso è:

$$f_{s1}^* = 11; \quad f_{s2}^* = 2; \quad f_{12}^* = 1; \quad f_{13}^* = 10; \quad f_{24}^* = 6;$$

$$f_{32}^* = 3; \quad f_{3t}^* = 7; \quad f_{41}^* = 0; \quad f_{43}^* = 0; \quad f_{4t}^* = 6; \quad v^* = 13.$$

Il taglio $(W^*, \bar{W}^*)$ a capacità minima è facilmente ottenibile all'ultima iterazione dell'algoritmo di Ford & Fulkerson. Infatti i nodi etichettati nell'ultima iterazione dell'algoritmo forniscono l'insieme $W^*$. In particolare, si ha

$$W^* = \{s, 1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad \bar{W}^* = \{4, t\}.$$

Quindi il taglio a capacità minima è quello rappresentato in figura 5.10.

Quanto alla verifica della validità del teorema del "massimo flusso & minimo taglio", basta verificare che $v^*$ eguaglia la capacità del minimo taglio e che gli archi "in avanti" lungo il taglio sono saturi, mentre quelli "all'indietro" lungo il taglio sono scarichi. Gli archi "in avanti" del taglio sono quelli per i quali il primo nodo appartiene a $W^*$ e il secondo all'insieme $\bar{W}^*$ (in tal caso sono l'arco $(2, 4)$ e l'arco $(3, t)$), mentre quelli "all'indietro" sono gli archi per i quali il primo nodo appartiene a $\bar{W}^*$ e il secondo all'insieme $W^*$ (in tal caso sono l'arco $(4, 1)$ e l'arco $(4, 3)$). Calcoliamo la capacità del taglio $(W^*, \bar{W}^*)$; essa è data dalla somma delle capacità degli archi passanti per il taglio "in avanti", vale a dire:

$$C(W^*, \bar{W}^*) = \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ i \in W^* \\ j \in \bar{W}^*}} b_{ij} = b_{24} + b_{3t} = 6 + 7 = 13 = v^*.$$

Notiamo anche che

$$f_{3t}^* = b_{3t} = 7 \quad \text{e} \quad f_{24}^* = b_{24} = 6$$

mentre

$$f_{41}^* = 0 \quad \text{e} \quad f_{43}^* = 0.$$

**Esercizio 5.11.** ★ Dato il problema del massimo flusso dell'esercizio 5.10, formularlo come problema di programmazione lineare. Formulare anche il suo duale e determinarne una soluzione ottima.

**Risoluzione.** La formulazione del problema è riportata nella risoluzione dell'esercizio 5.10. Essa è anche scrivibile, in forma compatta, nel seguente modo:

$$P \begin{cases} \max\limits_{f,v} z = & v & & \\ & Af & +dv & = 0 \\ & f & & \leq b \\ & f & & \geq 0 \end{cases},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$f^T = [f_{s1} \;\; f_{s2} \;\; f_{12} \;\; f_{13} \;\; f_{24} \;\; f_{32} \;\; f_{3t} \;\; f_{41} \;\; f_{43} \;\; f_{4t}],$$

$$d^T = [-1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1],$$

e

$$b^T = [12 \;\; 9 \;\; 3 \;\; 15 \;\; 6 \;\; 3 \;\; 7 \;\; 5 \;\; 8 \;\; 8].$$

Il duale $D$ di $P$ è:

$$D \begin{cases} \min\limits_{\pi,\gamma} w = & b^T\gamma \\ & A^T\pi \quad -\gamma \;\; \leq 0 \\ & \pi_s \quad -\pi_t \;\; = 1 \\ & \gamma \;\; \geq 0 \end{cases},$$

corrispondente al problema di determinazione di un taglio a capacità minima. Sappiamo che, dato un qualsiasi taglio $(W, \bar{W})$, indicando con $E$ l'insieme degli archi, una soluzione ammissibile per $D$ è $[\hat{\pi} \;\; \hat{\gamma}]^T$, con

$$\hat{\pi}_i = \begin{cases} 1 & i \in W \\ 0 & \in \bar{W} \end{cases}$$

e

$$\hat{\gamma}_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in E, \quad i \in W, \quad j \in \bar{W} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

A questo punto, per risolvere $D$ basta determinare un taglio a capacità minima $(W^*, \bar{W}^*)$ (ad esempio applicando l'algoritmo di Ford & Fulkerson al problema primale $P$) e applicare le due formule precedenti. A partire dal taglio a capacità minima $(W^*, \bar{W}^*)$, ottenuto nella risoluzione dell'esercizio 5.10 (figura 5.10), otteniamo la seguente soluzione ottima per $D$:

$$\begin{cases} \pi_i^* = 0 \quad \text{per ogni nodo} \quad i \neq s, 1, 2, 3; \\ \pi_s^* = \pi_1^* = \pi_2^* = \pi_3^* = 1; \\ \gamma_{ij}^* = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (3,t), (2,4); \\ \gamma_{3t}^* = \gamma_{24}^* = 1; \\ w^* = 13. \end{cases}$$

**Esercizio 5.12.** ■ Sia dato un grafo orientato $G = (V, E)$, con 6 nodi ($V = \{s, 1, 2, 3, 4, t\}$) e 9 archi, su cui è definito il problema del massimo flusso dal nodo $s$ al nodo $t$. Nella seguente tabella, per ogni arco, sono riportati la capacità massima e il flusso corrente:

| Arco | ($s$,1) | ($s$,2) | (1,3) | (2,1) | (2,3) | (2,4) | (3,4) | (3,$t$) | (4,$t$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Capacità massima | 9 | 10 | 7 | 8 | 4 | 20 | 3 | 2 | 20 |
| Flusso corrente | 3 | 8 | 5 | 2 | 0 | 6 | 3 | 2 | 9 |

1. Determinare il massimo flusso $v$ trasferibile da $s$ a $t$, applicando l'algoritmo di Ford & Fulkerson a partire dal flusso corrente sugli archi;

2. individuare il corrispondente taglio a capacità minima.

**Esercizio 5.13.** ■ Sia dato un grafo orientato $G = (V, E)$ con 6 nodi ($V = \{s, 1, 2, 3, 4, t\}$) e 10 archi, su cui è definito il problema del massimo flusso dal nodo $s$ al nodo $t$. Nella seguente tabella, per ogni arco, sono riportati la capacità massima e il flusso corrente:

| Arco | ($s$,1) | ($s$,2) | (1,3) | (2,1) | (2,3) | (2,4) | (3,4) | (3,$t$) | (4,1) | (4,$t$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Capacità massima | 7 | 23 | 10 | 6 | 9 | 11 | 5 | 20 | 4 | 8 |
| Flusso corrente | 3 | 21 | 10 | 5 | 9 | 7 | 2 | 17 | 2 | 7 |

1. Determinare il massimo flusso $v$ trasferibile da $s$ a $t$, applicando l'algoritmo di Ford & Fulkerson a partire dal flusso corrente sugli archi;

2. individuare il corrispondente taglio a capacità minima.

**Esercizio 5.14.** ■ Sia dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \left\{ \begin{array}{lrrl} \max\limits_{f,v} z = & v & & \\ & Af & +dv & = 0 \\ & f & & \leq b \\ & f & & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$b^T = [6\ \ 5\ \ 1\ \ 8\ \ 3\ \ 6\ \ 4\ \ 2\ \ 2\ \ 7] \quad \text{e} \quad d^T = [-1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1].$$

Risolvere $P$ a partire dalla soluzione ammissibile $[\hat{f}\ \ \hat{v}]^T$, con

$$\hat{f}^T = [4\ \ 4\ \ 1\ \ 3\ \ 0\ \ 5\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 7] \quad \text{e} \quad \hat{v} = 8.$$

Determinare inoltre una soluzione ottima per il duale di $P$.

**Esercizio 5.15.** ■ Sia dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \begin{cases} \max\limits_{f,v} z = & & v & \\ & Af & +dv & = 0 \\ & f & & \leq b \\ & f & & \geq 0 \end{cases},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$b^T = [24 \;\; 8 \;\; 7 \;\; 12 \;\; 20 \;\; 10 \;\; 9 \;\; 4 \;\; 18] \quad \text{e} \quad d^T = [-1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1].$$

Sia $[\hat{f} \;\; \hat{v}]^T$ un flusso ammissibile per $P$, con

$$\hat{f}^T = [15 \;\; 8 \;\; 7 \;\; 8 \;\; 15 \;\; 10 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 13] \quad \text{e} \quad \hat{v} = 23,$$

e sia $(W^*, \bar{W}^*)$ un taglio a capacità minima, con $W^* = \{1, 2, 4\}$ e $\bar{W}^* = \{3, 5, 6\}$. Senza applicare l'algoritmo di Ford & Fulkerson, verificare se $[\hat{f} \;\; \hat{v}]^T$ è un flusso ottimo per $P$, motivandone la risposta.

**Esercizio 5.16.** ■ Sia dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \begin{cases} \min\limits_{\pi,\gamma} z = & & b^T\gamma & \\ & A^T\pi & -\gamma & \leq 0 \\ & \pi_1 & -\pi_6 & = 1 \\ & & \gamma & \geq 0 \end{cases},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$b^T = [20 \;\; 10 \;\; 9 \;\; 6 \;\; 21 \;\; 4 \;\; 7 \;\; 5 \;\; 20].$$

Risolvere $P$, sapendo che una soluzione ammissibile per il duale di $P$ è $[\hat{f} \;\; \hat{v}]^T$, con:

$$\hat{f}^T = [9 \;\; 10 \;\; 9 \;\; 0 \;\; 19 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 4 \;\; 15] \quad \text{e} \quad \hat{v} = 19.$$

**Esercizio 5.17.** ■ Sia dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \left\{ \begin{array}{lllll} \max\limits_{f,v} z = & v & & \\ & Af & +dv & = 0 \\ & f & & \leq b \\ & f & & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$b^T = [7 \;\; 23 \;\; 10 \;\; 6 \;\; 9 \;\; 11 \;\; 5 \;\; 20 \;\; 4 \;\; 8] \quad \text{e} \quad d^T = [-1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1].$$

Sia $[\hat{f} \;\; \hat{v}]^T$ un flusso ammissibile per $P$, con

$$\hat{f}^T = [3 \;\; 21 \;\; 10 \;\; 5 \;\; 9 \;\; 7 \;\; 2 \;\; 17 \;\; 2 \;\; 7] \quad \text{e} \quad \hat{v} = 24,$$

e sia $(W^*, \bar{W}^*)$ un taglio a capacità minima, con $W^* = \{1, 2, 3, 5\}$ e $\bar{W}^* = \{4, 6\}$. Applicando il teorema del "massimo flusso & minimo taglio", verificare se $[\hat{f} \;\; \hat{v}]^T$ è un flusso ottimo per $P$. In caso negativo, risolvere $P$ a partire dalla soluzione ammissibile $[\hat{f} \;\; \hat{v}]^T$, applicando l'algoritmo di Ford & Fulkerson.

**Esercizio 5.18.** ■ Sia dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \left\{ \begin{array}{lllll} \max\limits_{f,v} z = & v & & \\ & Af & +dv & = 0 \\ & f & & \leq b \\ & f & & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$b^T = [9 \;\; 25 \;\; 7 \;\; 20 \;\; 30 \;\; 40 \;\; 10 \;\; 11 \;\; 2] \quad \text{e} \quad d^T = [-1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1].$$

Sia $[\hat{f} \;\; \hat{v}]^T$ un flusso ammissibile per $P$, con

$$\hat{f}^T = [9 \;\; 21 \;\; 2 \;\; 17 \;\; 23 \;\; 28 \;\; 10 \;\; 11 \;\; 2] \quad \text{e} \quad \hat{v} = 30,$$

e sia $(W^*, \bar{W}^*)$ un taglio a capacità minima, con $W^* = \{1, 3, 5\}$ e $\bar{W}^* = \{2, 4, 6\}$. Applicando il teorema del "massimo flusso & minimo taglio", verificare se $[\hat{f} \;\; \hat{v}]^T$ è un flusso ottimo per $P$. In caso negativo, risolvere $P$ a partire dalla soluzione ammissibile $[\hat{f} \;\; \hat{v}]^T$, applicando l'algoritmo di Ford & Fulkerson.

**Esercizio 5.19.** ■ Sia dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \begin{cases} \min\limits_{\pi,\gamma} z = & & b^T\gamma & \\ & A^T\pi & -\gamma & \leq 0 \\ & \pi_1 & -\pi_6 & = 1 \\ & & \gamma & \geq 0 \end{cases},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$b^T = [24 \;\; 5 \;\; 6 \;\; 19 \;\; 6 \;\; 20 \;\; 8 \;\; 9 \;\; 5 \;\; 20].$$

Sapendo che una soluzione ottima di $P$ è $[\pi^* \;\; \gamma^*]^T$, con $\pi^{*T} = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]$, determinare una soluzione ottima $[f^* \;\; v^*]^T$ del duale di $P$.

**Esercizio 5.20.** ■ Sia dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \begin{cases} \max\limits_{f,v} z = & v & & \\ & Af & +dv & = 0 \\ & f & & \leq b \\ & f & & \geq 0 \end{cases},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$b^T = [8 \;\; 7 \;\; 10 \;\; 7 \;\; 9 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 3 \;\; 15] \quad \text{e} \quad d^T = [-1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1].$$

Risolvere $P$ a partire dalla soluzione ammissibile $[\hat{f} \;\; \hat{v}]^T$, con

$$\hat{f}^T = [3 \;\; 7 \;\; 8 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 2 \;\; 5] \quad \text{e} \quad \hat{v} = 10.$$

**Esercizio 5.21.** ■ Le Ferrovie dello Stato vogliono massimizzare il numero giornaliero di treni che collegano Palermo a Bologna. Per ogni collegamento, nella seguente tabella, sono riportati il massimo numero di treni giornalieri che è possibile attivare:

| | | |
|---|---|---|
| Palermo - Reggio Cal.<br>9 | Palermo - Messina<br>10 | Reggio Cal. - Salerno<br>5 |
| Reggio Cal. - Napoli<br>10 | Reggio Cal. - Messina<br>7 | Messina - Napoli<br>6 |
| Salerno - Napoli<br>2 | Salerno - Roma<br>3 | Napoli - Roma<br>3 |
| Napoli - Firenze<br>4 | Roma - Firenze<br>7 | Roma - Reggio Cal.<br>6 |
| Roma - Bologna<br>12 | Firenze - Messina<br>4 | Firenze - Bologna<br>10 |

Risolvere il problema come problema del massimo flusso e individuare le tratte critiche, cioè quelle che non consentono un ulteriore aumento dei treni da Palermo a Bologna.

**Esercizio 5.22.** ■ Sia dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \left\{ \begin{array}{lrrl} \min\limits_{\pi,\gamma} z = & & b^T\gamma & \\ & A^T\pi & -\gamma & \leq 0 \\ & \pi_1 & -\pi_6 & = 1 \\ & & \gamma & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$b^T = [9 \;\; 10 \;\; 7 \;\; 15 \;\; 8 \;\; 6 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 11].$$

Sia $[\hat{\gamma} \;\; \hat{\pi}]^T$ una soluzione ammissibile per $P$, con $\hat{\gamma}^T = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$ e $\hat{\pi}^T = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$.

Verificare se $[\hat{\gamma} \;\; \hat{\pi}]^T$ è una soluzione ottima per $P$, sapendo che una soluzione ottima $[f^* \;\; v^*]^T$ del duale di $P$ é tale che $f^*_{24} = 6$, $f^*_{52} = 0$ e $f^*_{35} = 8$.

**Esercizio 5.23.** ■ Sia dato il seguente problema $P$ di programmazione lineare:

$$P \left\{ \begin{array}{lrrl} \max\limits_{f,v} z = & v & & \\ & Af & +dv & = 0 \\ & f & & \leq b \\ & f & & \geq 0 \end{array} \right. ,$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$b^T = [3 \;\; 2 \;\; 6 \;\; 5 \;\; 1 \;\; 5 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 3] \quad \text{e} \quad d^T = [-1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1].$$

Risolvere $P$ a partire dalla soluzione ammissibile $[\hat{f} \;\; \hat{v}]^T$, con

$$\hat{f}^T = [2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0] \quad \text{e} \quad \hat{v} = 3.$$

Determinare inoltre una soluzione ottima per il duale di $P$.

## 5.3 Il problema di flusso a costo minimo senza vincoli di capacità

**Esercizio 5.24.** ★ Sia dato il problema $P$ di flusso a costo minimo (senza vincoli di capacità sugli archi), definito sul grafo orientato $G = (V, E)$ riportato in figura 5.11.a, dove a ogni nodo $i \in V$ è associata la divergenza $d_i$ e a ciascun arco $(i, j) \in E$ è associato un costo unitario $c_{ij}$.

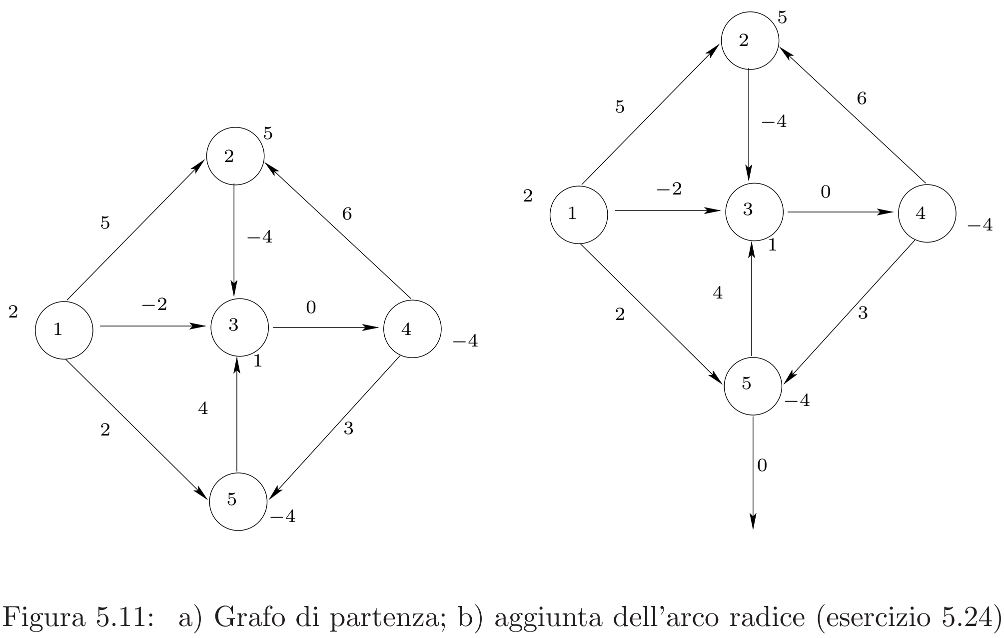


Figura 5.11: a) Grafo di partenza; b) aggiunta dell'arco radice (esercizio 5.24)

1. Formulare $P$ come problema di programmazione lineare;

2. risolvere $P$, applicando il simplesso su rete a partire dall'insieme degli indici di base $\beta = \{(1,5),(2,3),(3,4),(4,5),(5)\}$.

**Risoluzione.** Quanto alla formulazione del problema, essa è:

$$P\left\{\begin{array}{ll} \min\limits_{f} z = & 5f_{12} - 2f_{13} + 2f_{15} - 4f_{23} + 6f_{42} + 3f_{45} + 4f_{53} \\ & f_{12} + f_{13} + f_{15} = 2 \\ & f_{23} - f_{12} - f_{42} = 5 \\ & f_{34} - f_{13} - f_{23} - f_{53} = 1 \\ & f_{42} + f_{45} - f_{34} = -4 \\ & f_{53} - f_{15} - f_{45} = -4 \\ & f_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in E \end{array}\right. .$$

Applichiamo adesso il simplesso su rete. Come prima cosa, aggiungiamo l'arco radice ("root arc" - uscente dal nodo 5 ed avente costo unitario $c_5 = 0$), ottenendo così il grafo descritto in figura 5.11.b, caratterizzato da una matrice di incidenza a rango pieno (pari cioè al numero di nodi).

Per determinare il valore corrente di flusso sul grafo, basta ricordare che all'insieme $\beta$ corrisponde la soluzione di base associata al "rooted spanning tree" descritto in figura 5.12.a.

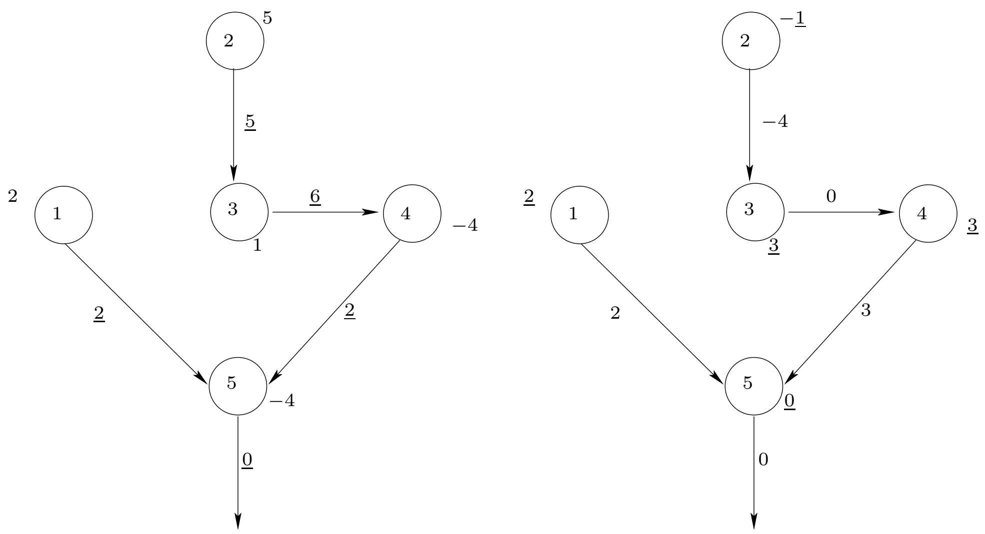

Figura 5.12: Prima iterazione: a) "rooted spanning tree"; b) calcolo delle variabili duali (esercizio 5.24)

Circa i valori numerici riportati in corrispondenza di ciascun grafo (e quindi in corrispondenza di ciascun albero) utilizzeremo la seguente convenzione: se il valore numerico è sottolineato, allora esso è il valore numerico di una variabile; se il valore numerico non è sottolineato, allora esso è un dato.

Nel caso della figura 5.12.a, i valori numerici riportati in corrispondenza di ciascun arco indicano il flusso corrente $\bar{f}$ che circola sull'albero. Tali valori sono facilmente ottenibili imponendo, in corrispondenza di ciascun nodo $i \in V$, il seguente vincolo:

$$\sum_{j|(i,j)\in E} \bar{f}_{ij} - \sum_{j|(j,i)\in E} \bar{f}_{ji} = d_i,$$

e ricordando che, poichè a un "rooted spanning tree" corrisponde una soluzione di base, tutti gli archi che non fanno parte dell'albero hanno flusso corrente nullo.

Per valutare l'ottimalità della soluzione calcoliamo i coefficienti di costo ridotto in corrispondenza delle variabili fuori base, cioè in corrispondenza dell'insieme di indici

$$\mathcal{N} = \{(1,2),(1,3),(4,2),(5,3)\}.$$

A tale scopo, determiniamo il vettore delle variabili duali $\bar{\pi}$, applicando la seguente formula:

$$\bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j = c_{ij}, \quad (i,j) \in \beta.$$

Otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_5 = c_{15} = 2 \\ \bar{\pi}_2 - \bar{\pi}_3 = c_{23} = -4 \\ \bar{\pi}_3 - \bar{\pi}_4 = c_{34} = 0 \\ \bar{\pi}_4 - \bar{\pi}_5 = c_{45} = 3 \\ \bar{\pi}_5 = c_5 = 0 \end{cases},$$

da cui

$$\bar{\pi}_1 = 2; \bar{\pi}_2 = -1; \bar{\pi}_3 = 3; \bar{\pi}_4 = 3; \bar{\pi}_5 = 0.$$

I valori delle variabili duali sono quindi facilmente ottenibili, lavorando direttamente sull'albero (figura 5.12.b).

Determiniamo adesso il vettore dei costi ridotti $\hat{c}_N^T$: esso ha tante componenti quanti sono gli elementi dell'insieme $\mathcal{N}$, cioè tante componenti quanti sono gli archi che non fanno parte del "rooted spanning tree". Se $\hat{c}_N^T \geq 0$, allora il flusso corrente è ottimo. Applicando la formula

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - \bar{\pi}_i + \bar{\pi}_j, \quad (i,j) \in \mathcal{N},$$

otteniamo

$$\begin{cases} \hat{c}_{12} = c_{12} - \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 = 5 - 2 - 1 = 2 \\ \hat{c}_{13} = c_{13} - \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_3 = -2 - 2 + 3 = -1 \\ \hat{c}_{42} = c_{42} - \bar{\pi}_4 + \bar{\pi}_2 = 6 - 3 - 1 = 2 \\ \hat{c}_{53} = c_{53} - \bar{\pi}_5 + \bar{\pi}_3 = 4 - 0 + 3 = 7 \end{cases}.$$

Poichè $\hat{c}_N^T \ngeq 0$, allora l'algoritmo prosegue facendo entrare in base, ove possibile[1], un arco $(i,j) \in \mathcal{N}$ tale che $\hat{c}_{ij} < 0$. Il tal caso, visto che $\hat{c}_{13} < 0$, l'arco $(1,3)$ è candidato a entrare in base. Esso viene quindi aggiunto al "rooted spanning tree", formando così un ciclo.

Assegnando al ciclo il verso concorde a quello dell'arco $(1,3)$ (figura 5.13.a), determiniamo il massimo valore $\Delta$ di incremento di flusso che è possibile assegnare all'arco $(1,3)$,

[1] Il problema potrebbe anche essere illimitato.

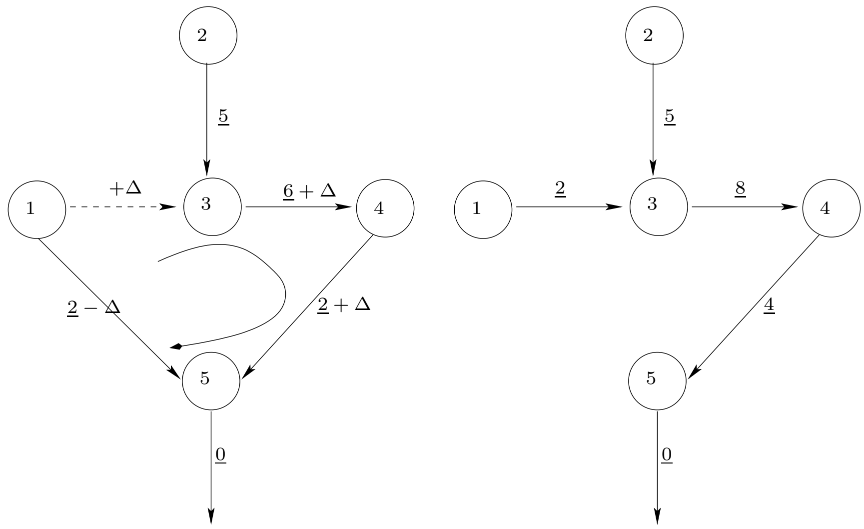


Figura 5.13: Prima iterazione: a) determinazione del ciclo; b) aggiornamento del flusso e determinazione del nuovo “rooted spanning tree” (esercizio 5.24)

compatibilmente con i vincoli di continuità del flusso sui nodi lungo il ciclo. In particolare, indicando con $E_C^+$ ed $E_C^-$ gli insiemi degli archi del ciclo, rispettivamente concordi e discordi col verso del ciclo stesso, notiamo che, se lungo l'arco $(1,3)$ il flusso passa da 0 a $\Delta$, sugli altri archi appartenenti a $E_C^+$ esso deve aumentare di $\Delta$, mentre sugli archi appartenenti a $E_C^-$ esso deve diminuire di $\Delta$. Nel nostro caso si ha:

$$E_C^+ = \{(1,3),(3,4),(4,5)\} \quad \text{e} \quad E_C^- = \{(1,5)\}.$$

Si vuole che $\Delta$ assuma il più alto valore positivo possibile[2], compatibilmente con i vincoli di positività del flusso. La formula per il calcolo di $\Delta$ è infatti:

$$\Delta = \min_{(i,j)\in E_C^-} \bar{f}_{ij} = \bar{f}_{15} = 2.$$

Aggiornando il flusso lungo il ciclo otteniamo i valori riportati nella figura 5.13.b.

Notiamo che se non ci fossero stati archi in $E_C^-$, allora l'algoritmo si sarebbe arrestato dichiarando il problema $P$ illimitato ($\Delta = +\infty$ e $z = -\infty$).

Con l'aggiornamento del flusso lungo il ciclo, il valore di flusso lungo l'arco $(1,5)$ è passato da 2 a 0. Infatti l'arco $(1,5)$ è l'arco il cui si è realizzato il “minimo” nel calcolo di $\Delta$: esso quindi esce dalla base. La nuova base $\beta$ è ora individuata dagli archi che formano il “rooted spanning tree” raffigurato in figura 5.13.b. In altre parole si ha:

$$\beta = \{(1,3),(2,3),(3,4),(4,5),(5)\}$$

e

$$\mathcal{N} = \{(1,2),(1,5),(4,2),(5,3)\}.$$

Per valutare l'ottimalità del flusso corrente $\bar{f}$, determiniamo il vettore $\hat{c}^T$, calcolando prima le variabili duali, i cui valori sono riportati in figura 5.14.

[2] $\Delta$ gioca lo stesso ruolo giocato da $\bar{\delta}_j$ nel simplesso tabellare.

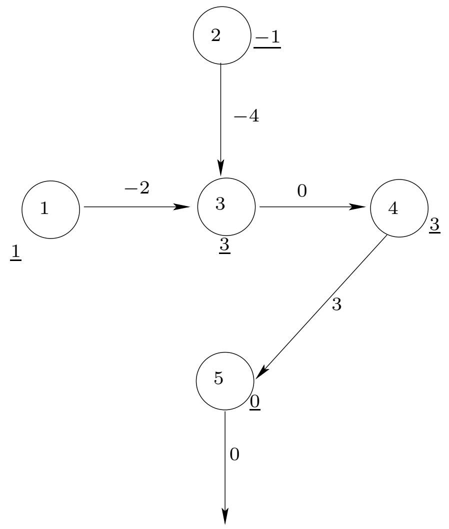


Figura 5.14: Seconda iterazione: calcolo delle variabili duali (esercizio 5.24)

Calcoliamo adesso i costi ridotti in corrispondenza degli indici fuori base (archi non appartenenti al "rooted spanning tree"). Otteniamo:

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{c}_{12} = c_{12} - \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_2 = 5 - 1 - 1 = 3 \\ \hat{c}_{15} = c_{15} - \bar{\pi}_1 + \bar{\pi}_5 = 2 - 1 + 0 = 1 \\ \hat{c}_{42} = c_{42} - \bar{\pi}_4 + \bar{\pi}_2 = 6 - 3 - 1 = 2 \\ \hat{c}_{53} = c_{53} - \bar{\pi}_5 + \bar{\pi}_3 = 4 - 0 + 3 = 7 \end{array}\right. .$$

Poichè $\hat{c}_N^T \geq 0$, allora la soluzione corrente è ottima. Essa è:

$$f_{ij}^* = 0 \quad (i,j) \in \mathcal{N}$$

e

$$f_{13}^* = 2; f_{23}^* = 5; f_{34}^* = 8; f_{45}* = 4.$$

Il valore ottimo di funzione obiettivo è $z^* = -12$.

**Esercizio 5.25.** ■ Sia dato il problema $P$ di flusso a costo minimo (senza vincoli di capacità sugli archi), definito sul grafo orientato $G = (V, E)$ riportato in figura 5.15, dove a ogni nodo $i \in V$ è associata la divergenza $d_i$ e a ciascun arco $(i,j) \in E$ è associato un costo unitario $c_{ij}$.

1. Formulare $P$ come problema di programmazione lineare;

2. dato il seguente insieme di indici di base:

$$\beta = \{(1,2), (3,2), (3,4), (4,5), (5)\},$$

verificare se ad esso corrisponde una soluzione di base ammissibile per $P$ e, in caso positivo, verificare se tale soluzione è anche ottima;

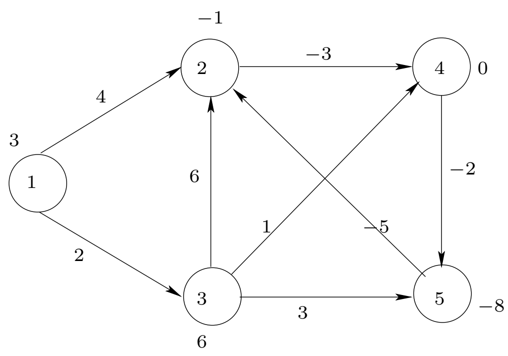


Figura 5.15: Grafo di partenza (esercizio 5.25)

3. applicando il simplesso su rete, risolvere $P$ a partire dal seguente insieme di indici di base:

$$\beta = \{(1,3),(3,2),(2,4),(4,5),(5)\}.$$

**Esercizio 5.26.** ■ Sia dato il problema $P$ di flusso a costo minimo (senza vincoli di capacità sugli archi), definito sul grafo orientato $G = (V, E)$ riportato in figura 5.16, dove a ogni nodo $i \in V$ è associata la divergenza $d_i$ e a ciascun arco $(i, j) \in E$ è associato un costo unitario $c_{ij}$.

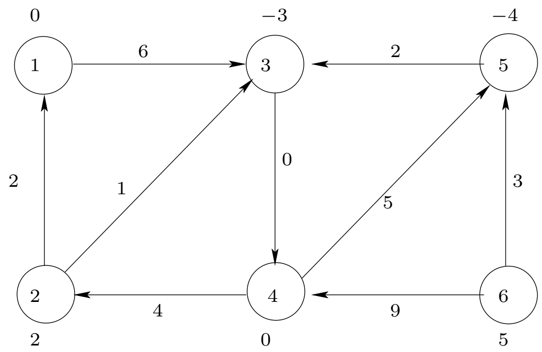


Figura 5.16: Grafo di partenza (esercizio 5.26)

Applicando il simplesso su rete, risolvere $P$ a partire dal seguente insieme di indici di base:

$$\beta = \{(1,3),(2,1,(4,2),(6,4),(6,5),(6)\}.$$

**Esercizio 5.27.** ■ Sia dato il problema $P$ di flusso a costo minimo (senza vincoli di capacità sugli archi), definito sul grafo orientato $G = (V, E)$ riportato in figura 5.17, dove a ogni nodo $i \in V$ è associata la divergenza $d_i$ e a ciascun arco $(i, j) \in E$ è associato un costo unitario $c_{ij}$.

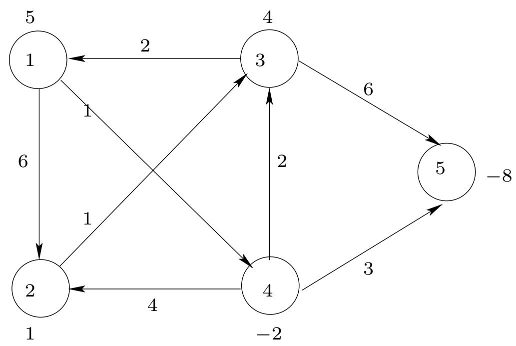


Figura 5.17: Grafo di partenza (esercizio 5.27)

Applicando il simplesso su rete, risolvere $P$ a partire dal seguente insieme di indici di base:

$$\beta = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5), (4, 2), (5)\}.$$

## 5.4 Il problema di flusso a costo minimo con vincoli di capacità

**Esercizio 5.28.** ★ Sia dato il problema $P$ di flusso a costo minimo definito sul grafo orientato $G = (V, E)$ riportato in figura 5.18. Ad ogni nodo $i \in V$ è associata la divergenza $d_i$ e a ciascun arco $(i, j) \in E$ è associata la tripla $(l_{ij}, u_{ij}, c_{ij})$, dove $l_{ij}$ e $u_{ij}$ indicano rispettivamente la capacità minima e massima dell'arco $(i, j)$, mentre $c_{ij}$ indica il costo unitario associato all'arco $(i, j)$.

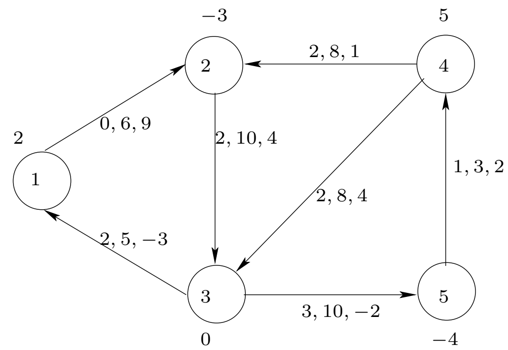


Figura 5.18: Grafo di partenza (esercizio 5.28)

1. Formulare $P$ come problema di programmazione lineare;
2. risolvere $P$, applicando il simplesso su rete a partire dall'insieme di indici di base

$$\beta = \{(1,2),(2,3),(3,5),(4,2),(5)\}$$

   e dai seguenti insiemi di indici fuori base

$$\mathcal{N}_L = \{(3,1),(4,3)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_U = \{(5,4)\}.$$

**Risoluzione.** Quanto alla formulazione del problema, essa è:

$$P \left\{ \begin{array}{ll} \min\limits_{f} z = & 9f_{12} + 4f_{23} - 3f_{31} - 2f_{35} + f_{42} + 4f_{43} + 2f_{54} \\ & f_{12} - f_{31} = 2 \\ & f_{23} - f_{12} - f_{42} = -3 \\ & f_{31} + f_{35} - f_{23} - f_{43} = 0 \\ & f_{42} + f_{43} - f_{54} = 5 \\ & f_{54} - f_{35} = -4 \\ & 0 \le f_{12} \le 6 \\ & 2 \le f_{23} \le 10 \\ & 2 \le f_{31} \le 5 \\ & 3 \le f_{35} \le 10 \\ & 2 \le f_{42} \le 8 \\ & 2 \le f_{43} \le 8 \\ & 1 \le f_{54} \le 3 \end{array} \right. .$$

Applichiamo adesso il simplesso su rete per la risoluzione di $P$. Conoscendo l'insieme di indici $\beta$, costruiamo il "rooted spanning tree" riportato in figura 5.19.a, in cui compaiono anche gli archi $(i,j)$ fuori base con flusso (diverso da zero) attestato al corrispondente valore di lower bound o di upper bound. Tali archi sono facilmente distinguibili da quelli in base, in quanto sono rappresentati come archi "staccati" dai nodi.

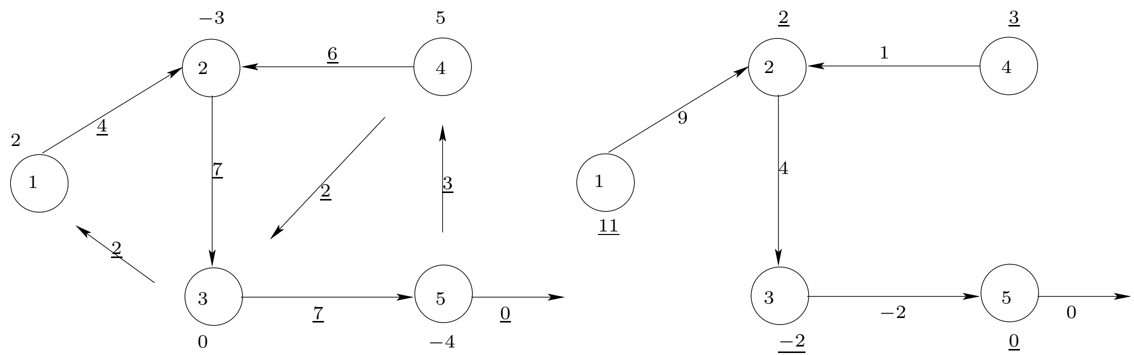


Figura 5.19: Prima iterazione: a) "rooted spanning tree"; b) calcolo delle variabili duali (esercizio 5.28)

Il flusso $\bar{f}$ corrente sugli archi (figura 5.19.a) è facilmente calcolabile: basta porre $\bar{f}_{ij} = l_{ij}$ per ogni $(i,j) \in \mathcal{N}_L$ e $\bar{f}_{ij} = u_{ij}$ per ogni $(i,j) \in \mathcal{N}_U$. Dopo di che i valori di flusso degli archi in base (appartenenti cioè al “rooted spanning tree”) sono ottenibili imponendo, in corrispondenza di ciascun nodo $i \in V$, il seguente vincolo:

$$\sum_{j|(i,j)\in E} \bar{f}_{ij} - \sum_{j|(j,i)\in E} \bar{f}_{ji} = d_i.$$

Allo stesso modo di quanto è stato fatto nell'esercizio 5.24 (in cui sono assenti i vincoli di capacità sugli archi), per valutare l'ottimalità del flusso corrente $\bar{f}$, determiniamo le variabili duali tramite l'applicazione della seguente formula:

$$\bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j = c_{ij}, \quad (i,j) \in \beta.$$

Otteniamo i valori riportati in figura 5.19.b, in corrispondenza di ciascun nodo.

Note le variabili duali, calcoliamo i coefficienti di costo ridotto fuori base applicando la formula

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - \bar{\pi}_i + \bar{\pi}_j, \quad (i,j) \in \mathcal{N}.$$

Otteniamo

$$\begin{cases} \hat{c}_{31} = c_{31} - \bar{\pi}_3 + \bar{\pi}_1 = -3 + 2 + 11 = 10 \\ \hat{c}_{43} = c_{43} - \bar{\pi}_4 + \bar{\pi}_3 = 4 - 3 - 2 = -1 \\ \hat{c}_{54} = c_{54} - \bar{\pi}_5 + \bar{\pi}_4 = 2 - 0 + 3 = 5 \end{cases} .$$

Ricordiamo che il criterio di ottimalità, nel caso del simplesso su rete con vincoli di capacità, è il seguente. Se $\hat{c}_{ij} \geq 0$ per ogni $(i,j) \in \mathcal{N}_L$ e se $\hat{c}_{ij} \leq 0$ per ogni $(i,j) \in \mathcal{N}_U$, allora il flusso corrente $\bar{f}$ è ottimo. Nel nostro caso quindi il criterio di ottimalità è violato dagli archi $(4,3)$ e $(5,4)$, i quali quindi sono entrambi candidati a entrare in base. Scegliendo per esempio di far entrare in base l'arco $(4,3)$, se aggiunto al “rooted spanning tree”, esso formerà un ciclo con alcuni archi dell'albero (figura 5.20.a).

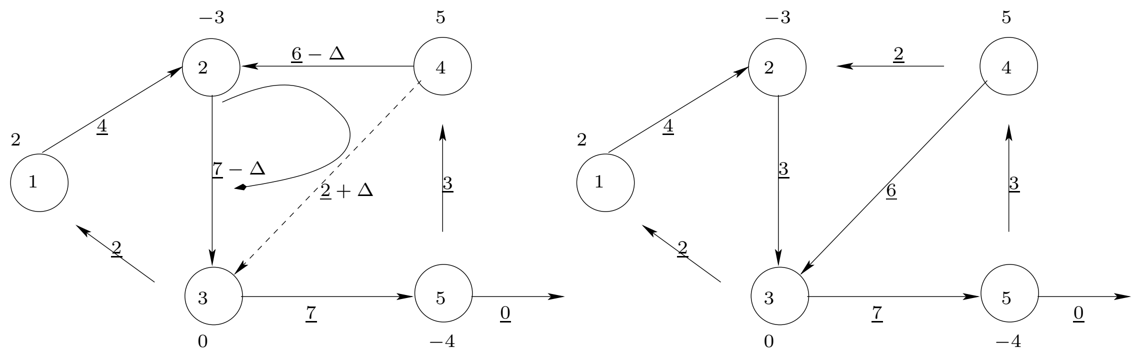


Figura 5.20: Prima iterazione: a) determinazione del ciclo; b) aggiornamento del flusso e determinazione del nuovo “rooted spanning tree” (esercizio 5.28)

Circa il verso da assegnare al ciclo, la regola da utilizzare è la seguente: se l'arco entrante in base appartiene a $\mathcal{N}_L$, si assegna al ciclo il verso concorde a quello dell'arco entrante; viceversa, se l'arco entrante in base appartiene a $\mathcal{N}_U$, si assegna al ciclo il verso discorde a quello dell'arco entrante. Dopo di che, lungo gli archi del ciclo, si aggiorna il flusso aumentandolo di $\Delta$ lungo gli archi concordi col verso del ciclo e diminuendolo della stessa quantità lungo gli archi discordi col verso del ciclo. La quantità $\Delta$ viene calcolata uguale al valore più alto possibile compatibilmente con i vincoli di capacità minima e massima sugli archi del ciclo. In altre parole, si determina il valore più alto possibile di $\Delta$ tale che

$$\begin{cases} 2+\Delta \leq 8 \\ 7-\Delta \geq 2 \\ 6-\Delta \geq 2 \end{cases},$$

da cui $\Delta = 4$. Il valore di $\Delta = 4$ è stato ottenuto in corrispondenza della disuguaglianza $6 - \Delta \geq 2$, relativa al flusso sull'arco $(4,2)$ che quindi esce dalla base: il suo flusso si attesta al corrispondente valore di "lower bound", pari a 2. Aggiornando il flusso sul ciclo, infatti, otteniamo i valori riportati in figura 5.20.b, in cui è raffigurato il nuovo "rooted spanning tree", corrispondente a:

$$\beta = \{(1,2),(2,3),(3,5),(4,3),(5)\}.$$

Gli archi fuori base corrispondono ai seguenti insiemi di indici:

$$\mathcal{N}_L = \{(3,1),(4,2)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_U = \{(5,4)\}.$$

Per valutare l'ottimalità della soluzione corrente, calcoliamo le variabili duali (figura 5.21.a).

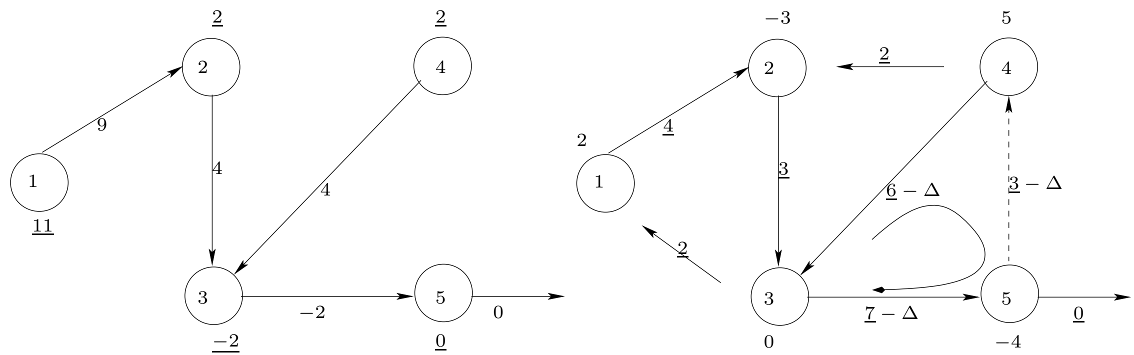


Figura 5.21: Seconda iterazione: a) calcolo delle variabili duali; b) determinazione del ciclo (esercizio 5.28)

Calcolando i coefficienti di costo ridotto fuori base, otteniamo:

$$\begin{cases} \hat{c}_{31} = c_{31} - \bar{\pi}_3 + \bar{\pi}_1 = -3 + 2 + 11 = 10 \\ \hat{c}_{42} = c_{42} - \bar{\pi}_4 + \bar{\pi}_2 = 1 - 2 + 2 = 1 \\ \hat{c}_{54} = c_{54} - \bar{\pi}_5 + \bar{\pi}_4 = 2 - 0 + 2 = 4 \end{cases}.$$

L'arco $(5,4)$ viola il criterio di ottimalità ed è quindi l'arco candidato a entrare in base: esso, inserito nel "rooted spanning tree", forma il ciclo riportato in figura 5.21.b. Poichè l'arco $(5,4) \in \mathcal{N}_U$, il flusso ad esso associato può solo diminuire, passando da 3 a $3-\Delta$:

di conseguenza il ciclo assume verso discorde con quello dell'arco $(5, 4)$. Per calcolare $\Delta$, imponiamo le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{cases} 3 - \Delta \geq 1 \\ 7 - \Delta \geq 3 \\ 6 - \Delta \geq 2 \end{cases},$$

da cui $\Delta = 2$ in corrispondenza dell'arco $(5, 4)$, il quale quindi rimane fuori base passando da $\mathcal{N}_U$ a $\mathcal{N}_L$.

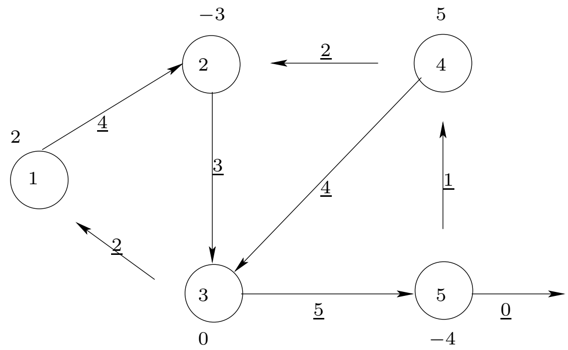


Figura 5.22: Seconda iterazione: aggiornamento del flusso (esercizio 5.28)

Di conseguenza si ha:

$$\beta = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 3), (5)\},$$

$$\mathcal{N}_L = \{(3, 1), (4, 2), (5, 4)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_U = \emptyset.$$

Aggiornando i flussi sugli archi del ciclo, otteniamo la figura 5.22.

Non essendo cambiato l'insieme $\beta$, il "rooted spanning tree" non cambia e così anche le variabili duali e i costi ridotti. Adesso, poichè $\hat{c}_{ij} \geq 0$ per ogni $(i, j) \in \mathcal{N}_L$, tenendo conto che $\mathcal{N}_U = \emptyset$, la soluzione corrente riportata in figura 5.22 è ottima. Il valore ottimo di funzione obiettivo è $z^* = 52$.

**Esercizio 5.29.** ■ Sia dato il problema $P$ di flusso a costo minimo definito sul grafo orientato $G = (V, E)$ riportato in figura 5.23. Ad ogni nodo $i \in V$ è associata la divergenza $d_i$ e a ciascun arco $(i, j) \in E$ è associata la tripla $(l_{ij}, u_{ij}, c_{ij})$, dove $l_{ij}$ e $u_{ij}$ indicano rispettivamente la capacità minima e massima dell'arco $(i, j)$, mentre $c_{ij}$ indica il costo unitario associato all'arco $(i, j)$.

1. Formulare $P$ come problema di programmazione lineare;

2. verificare se agli insiemi di indici

$$\beta = \{(1, 2), (1, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 6), (6)\},$$

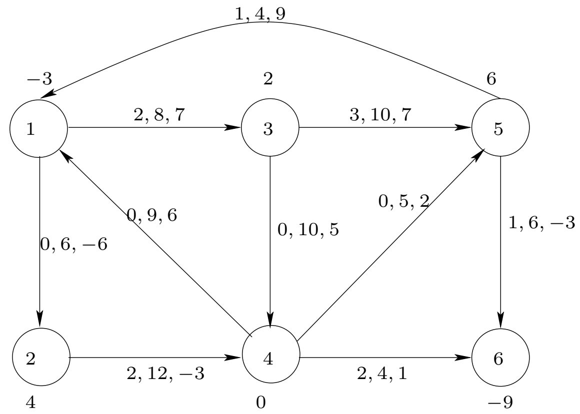


Figura 5.23: Grafo di partenza (esercizio 5.29)

$$\mathcal{N}_L = \{(2,4),(4,5),(5,1),(5,6)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_U = \{(4,1)\},$$

corrisponde una soluzione di base ammissibile per $P$. In caso positivo, verificare se la corrispondente soluzione è ottima;

3. risolvere $P$, applicando il simplesso su rete a partire dall'insieme di indici di base

$$\beta = \{(2,4),(3,4),(4,1),(4,5),(4,6),(6)\}$$

e dai seguenti insiemi di indici fuori base

$$\mathcal{N}_L = \{(1,2),(1,3),(3,5)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_U = \{(5,1),(5,6)\}.$$

**Esercizio 5.30.** ■ Sia dato il problema $P$ di flusso a costo minimo definito sul grafo orientato $G = (V, E)$ riportato in figura 5.24. Ad ogni nodo $i \in V$ è associata la divergenza $d_i$ e a ciascun arco $(i,j) \in E$ è associata la tripla $(l_{ij}, u_{ij}, c_{ij})$, dove $l_{ij}$ e $u_{ij}$ indicano rispettivamente la capacità minima e massima dell'arco $(i,j)$, mentre $c_{ij}$ indica il costo unitario associato all'arco $(i,j)$.

1. Formulare $P$ come problema di programmazione lineare;

2. risolvere $P$, applicando il simplesso su rete a partire dall'insieme di indici di base

$$\beta = \{(1,3),(2,4),(3,5),(6,4),(6,5),(6)\}$$

e dai seguenti insiemi di indici fuori base

$$\mathcal{N}_L = \{(1,2),(2,3),(2,6),(4,5),(5,1),(6,3)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_U = \{(4,3)\}.$$

**Esercizio 5.31.** ■ Sia dato il problema $P$ di flusso a costo minimo definito sul grafo orientato $G = (V, E)$ riportato in figura 5.25. Ad ogni nodo $i \in V$ è associata la

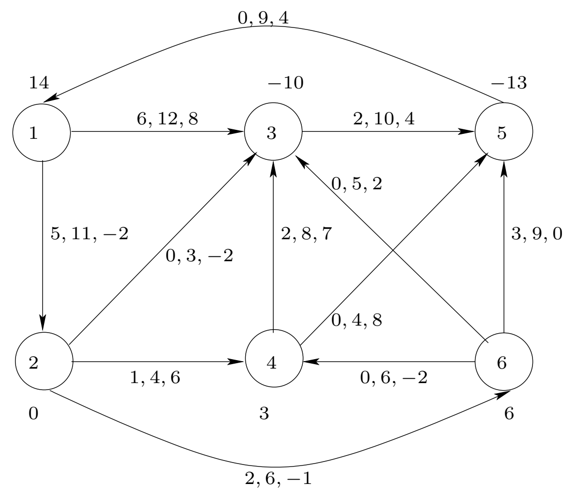


Figura 5.24: Grafo di partenza (esercizio 5.30)

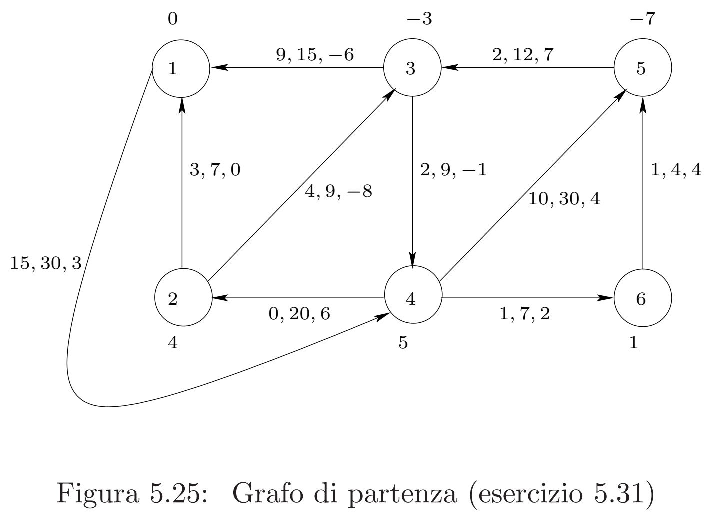


Figura 5.25: Grafo di partenza (esercizio 5.31)

divergenza $d_i$ e a ciascun arco $(i, j) \in E$ è associata la tripla $(l_{ij}, u_{ij}, c_{ij})$, dove $l_{ij}$ e $u_{ij}$ indicano rispettivamente la capacità minima e massima dell'arco $(i, j)$, mentre $c_{ij}$ indica il costo unitario associato all'arco $(i, j)$.

1. Formulare $P$ come problema di programmazione lineare;

2. risolvere $P$, applicando il simplesso su rete a partire dal seguente insieme di indici di base

$$\beta = \{(1, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 5), (4, 6), (6)\}$$

e dai seguenti insiemi di indici fuori base

$$\mathcal{N}_L = \emptyset \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_U = \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (5, 3), (6, 5)\}.$$

**Esercizio 5.32.** ■ Sia dato il problema $P$ di flusso a costo minimo definito sul grafo orientato $G = (V, E)$ riportato in figura 5.26. Ad ogni nodo $i \in V$ è associata la divergenza $d_i$ e a ciascun arco $(i, j) \in E$ è associata la tripla $(l_{ij}, u_{ij}, c_{ij})$, dove $l_{ij}$ e $u_{ij}$ indicano rispettivamente la capacità minima e massima dell'arco $(i, j)$, mentre $c_{ij}$ indica il costo unitario associato all'arco $(i, j)$.

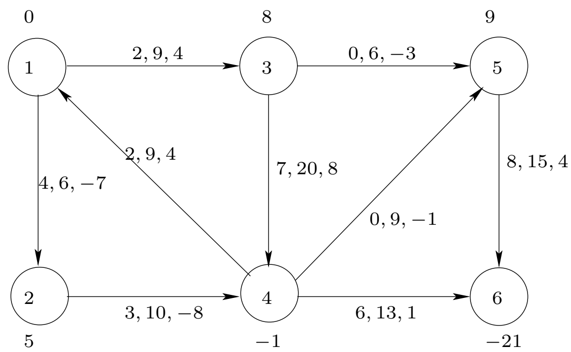


Figura 5.26: Grafo di partenza (esercizi 5.32 e 5.33)

Sia $\bar{f}$ un flusso ammissibile per $P$, tale che:

$$\bar{f}_{12} = 5; \bar{f}_{13} = 2; \bar{f}_{24} = 10; \bar{f}_{34} = 10; \bar{f}_{35} = 0;$$
$$\bar{f}_{41} = 7; \bar{f}_{45} = 3; \bar{f}_{46} = 9; \bar{f}_{56} = 12.$$

Verificare se a $\bar{f}$ corrisponde una soluzione di base per $P$.

**Esercizio 5.33.** ■ Sia dato il problema $P$ di flusso a costo minimo definito sul grafo orientato $G = (V, E)$ riportato in figura 5.26. Ad ogni nodo $i \in V$ è associata la divergenza $d_i$ e a ciascun arco $(i, j) \in E$ è associata la tripla $(l_{ij}, u_{ij}, c_{ij})$, dove $l_{ij}$ e $u_{ij}$ indicano rispettivamente la capacità minima e massima dell'arco $(i, j)$, mentre $c_{ij}$ indica il costo unitario associato all'arco $(i, j)$. Sia $\bar{f}$ una soluzione di base ammissibile per $P$, tale che:

$$\bar{f}_{12} = 5; \bar{f}_{13} = 2; \bar{f}_{24} = 10; \bar{f}_{34} = 7; \bar{f}_{35} = 3;$$
$$\bar{f}_{41} = 7; \bar{f}_{45} = 0; \bar{f}_{46} = 9; \bar{f}_{56} = 12.$$

Verificare se $\bar{f}$ è una soluzione ottima per $P$ e determinare il corrispondente valore di funzione obiettivo.

## 5.5 Il problema dei trasporti

**Esercizio 5.34.** ★ Risolvere il problema dei trasporti, caratterizzato dai seguenti dati:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad a^T = [7 \;\; 8 \;\; 6] \qquad \text{e} \qquad b^T = [2 \;\; 4 \;\; 8 \;\; 7],$$

dove $C$ è la matrice dei costi unitari di trasporto dai nodi di origine ai nodi di destinazione, $a$ è il vettore delle quantità offerte dai nodi di origine e $b$ è il vettore delle quantità richieste dai nodi di destinazione.

Per la determinazione di una soluzione iniziale ammissibile di base, si usi il metodo dell'angolo di nord-ovest.

**Risoluzione.** Notiamo anzitutto che la condizione necessaria e sufficiente perchè il problema abbia soluzione ottima è verificata: infatti $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 21$. Calcoliamo adesso una soluzione ammissibile di base, utilizzando il metodo dell'angolo di nord-ovest. Tale metodo consiste nel mettere in base le variabili che, nella matrice $C$, corrispondono alle posizioni più alte (nord) e più a sinistra (ovest), assegnando ad esse il valore minimo fra l'offerta e la domanda residue. In altre parole, se $f_{ij}$ è la variabile entrante in base, allora si pone

$$\bar{f}_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$$

e si aggiornano $a_i$ e $b_j$ nel seguente modo:

$$a_i := a_i - \bar{f}ij \quad \text{e} \quad b_j := b_j - \bar{f}_{ij}.$$

Così facendo o $a_i$ (offerta residua del nodo di origine $i$) o $b_j$ (domanda residua del nodo di destinazione $j$) si annullano, indicando che il corrispondente vincolo (di origine o di destinazione) è stato soddisfatto e quindi può essere successivamente ignorato.

In particolare, orliamo la matrice $C$, aggiungendo la colonna $a$ e la riga $b^T$ date dalla traccia. Otteniamo:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 4 & 8 & 7 & \end{array}.$$

Osservando la tabella $C_{ab}$, la prima variabile a entrare in base, quella più in alto e più a sinistra, è la $f_{11}$ che assume valore pari a:

$$\bar{f}_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{7, 2\} = 2.$$

Di conseguenza $a_1 := a_1 - \bar{f}_{11} = 5$ e $b_1 := b_1 - \bar{f}_{11} = 0$. Poichè $b_1 = 0$, il primo vincolo di destinazione è stato soddisfatto e quindi viene ignorato nella scelta delle nuove variabili entranti in base. La tabella $C_{ab}$ diventa:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & 6 & 3 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 4 & 8 & 7 & \end{array},$$

dove il pedice nel riquadro accanto al coefficiente di costo $c_{11} = 2$ indica il valore numerico della corrispondente variabile di base $\bar{f}_{11} = 2$ . Ignorando la prima colonna di $C_{ab}$, caratterizzata da $b_1 = 0$, la successiva variabile più in alto e più a sinistra è la $f_{12}$ che assume valore pari a:

$$\bar{f}_{12} = \min\{a_1, b_2\} = \min\{5, 4\} = 4.$$

Di conseguenza $a_1 := a_1 - \bar{f}_{12} = 1$ e $b_2 := b_2 - \bar{f}_{12} = 0$. Otteniamo:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & \boxed{6_4} & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 7 & \end{array}.$$

Procedendo in maniera analoga otteniamo:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & \boxed{6_4} & \boxed{3_1} & 10 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 7 & \end{array}.$$

Ignorando il primo vincolo di origine, che è stato soddisfatto (infatti $a_1 = 0$) e i primi due vincoli di destinazione ($b_1 = b_2 = 0$), la successiva variabile entrante in base, quella più in alto e più a sinistra, è la $f_{23}$. Otteniamo:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & \boxed{6_4} & \boxed{3_1} & 10 & 0 \\ 3 & 1 & \boxed{4_7} & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7 & \end{array}.$$

Continuando si ha:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & \boxed{6_4} & \boxed{3_1} & 10 & 0 \\ 3 & 1 & \boxed{4_7} & \boxed{5_1} & 0 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 & \end{array}$$

e infine:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & \boxed{6_4} & \boxed{3_1} & 10 & 0 \\ 3 & 1 & \boxed{4_7} & \boxed{5_1} & 0 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}.$$

Dall'ultima tabella notiamo che l'ultima variabile entrata in base è la $f_{34}$ con valore 6: tale valore ha soddisfatto contemporaneamente il terzo vincolo di origine ($a_3 = 0$) e il quarto vincolo di destinazione ($b_4 = 0$). Poichè tutti i vincoli sono stati soddisfatti ($a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$), abbiamo ottenuto una soluzione ammissibile di base in cui i valori delle variabili di base corrispondono ai pedici presenti negli elementi con riquadro dell'ultima tabella $C_{ab}$. In altre parole, le variabili inizialmente in base hanno i seguenti valori:

$$\bar{f}_{11} = 2, \quad \bar{f}_{12} = 4, \quad \bar{f}_{13} = 1, \quad \bar{f}_{23} = 7, \quad \bar{f}_{24} = 1 \quad \text{e} \quad \bar{f}_{34} = 6,$$

con

$$\bar{z} = c_{11}\bar{f}_{11} + c_{12}\bar{f}_{12} + c_{13}\bar{f}_{13} + c_{23}\bar{f}_{23} + c_{24}f_{24} + c_{34}f_{34} = 4 + 24 + 3 + 28 + 5 + 6 = 70.$$

Tutte le altre variabili sono fuori base e hanno quindi valore zero.

Calcoliamo adesso le variabili duali, utili per determinare i coefficienti di costo ridotto fuori base. Indichiamo con $u_i$, $i = 1, \ldots, 3$, la variabile duale associata all'$i$-esimo vincolo di origine e con $v_j$, $j = 1, \ldots, 4$, la variabile duale associata al $j$-esimo vincolo di destinazione. Analogamente al simplesso su rete applicato al problema di flusso a costo minimo, indicando con $\beta$ l'insieme delle coppie di indici corrispondenti alle variabili in base, il calcolo delle variabili duali si effettua imponendo

$$c_{ij} = u_i - v_j, \quad (i, j) \in \beta$$

e

$$v_4 = 0.$$

Quindi, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} c_{11} = u_1 - v_1 \\ c_{12} = u_1 - v_2 \\ c_{13} = u_1 - v_3 \\ c_{23} = u_2 - v_3 \\ c_{24} = u_2 - v_4 \\ c_{34} = u_3 - v_4 \\ v_4 = 0 \end{cases},$$

otteniamo $\bar{u}_1 = 4$, $\bar{u}_2 = 5$, $\bar{u}_3 = 1$, $\bar{v}_1 = 2$, $\bar{v}_2 = -2$, $\bar{v}_3 = 1$ e $\bar{v}_4 = 0$. Calcoliamo adesso i coefficienti di costo ridotto fuori base. Otteniamo:

$$\begin{cases} \hat{c}_{14} = c_{14} - \bar{u}_1 + \bar{v}_4 = 10 - 4 + 0 = 6 \\ \hat{c}_{21} = c_{21} - \bar{u}_2 + \bar{v}_1 = 3 - 5 + 2 = 0 \\ \hat{c}_{22} = c_{22} - \bar{u}_2 + \bar{v}_2 = 1 - 5 - 2 = -6 \\ \hat{c}_{31} = c_{31} - \bar{u}_3 + \bar{v}_1 = 4 - 1 + 2 = 6 \\ \hat{c}_{32} = c_{32} - \bar{u}_3 + \bar{v}_2 = 2 - 1 - 2 = -1 \\ \hat{c}_{33} = c_{33} - \bar{u}_3 + \bar{v}_3 = 9 - 1 - 1 = 7 \end{cases}.$$

Le variabili candidate a entrare in base sono quindi $f_{22}$ e $f_{32}$, poichè $\hat{c}_{22}$ e $\hat{c}_{32}$ sono negativi. Scegliendo di far entrare in base la variabile $f_{22}$, vediamo che, analogamente a quanto succede su grafo nel problema di flusso a costo minimo, essa forma, nella matrice $C$, un ciclo con le variabili di base $f_{12}$, $f_{13}$ e $f_{23}$ (vedi figura 5.27), ottenuto unendo, con tratti orizzontali e verticali, i corrispondenti elementi della matrice. Se la variabile $f_{22}$

$$\begin{array}{ccc} f_{12}^{-} & -- & f_{13}^{+} \\ | & & | \\ \boxed{f_{22}^{+}} & -- & f_{23}^{-} \end{array}$$

Figura 5.27: La variabile $f_{22}$ entra in base (esercizio 5.34)

(attualmente fuori base e quindi a valore 0) entra in base, essa assumerà in generale[3] un valore positivo pari a $\Delta$. Tale variabile compare nel secondo vincolo di origine e nel secondo vincolo di destinazione. Quindi, dovendo mantenere l'ammissibilità, ne consegue che, se il valore di $f_{22}$ aumenta di $\Delta$, i valori delle variabili $f_{12}$ e $f_{23}$ devono diminuire di $\Delta$. Di conseguenza, poichè $f_{12}$ e $f_{23}$ compaiono rispettivamente nel primo vincolo di origine e nel terzo vincolo di destinazione, per mantenere l'ammissibilità della nuova soluzione di base il valore della variabile $f_{13}$ dovrà essere incrementato di $\Delta$. Da qui, i segni $+$ e $-$ presenti in figura 5.27: essi indicano se una data variabile del ciclo deve essere incrementata (segno $+$) o decrementata (segno $-$) di $\Delta$. Tali incrementi e decrementi sono fra di loro alternati e coinvolgono solo le variabili corrispondenti agli spigoli del ciclo, iniziando dalla variabile entrante in base che deve essere incrementata (segno $+$). Tenendo conto di tutto ciò e del fatto che, nel simplesso, la variabile entrante in base deve assumere il più alto valore possibile compatibilmente con i vincoli, si ottiene

$$\Delta = \min\{\bar{f}_{12}, \bar{f}_{23}\} = \min\{4, 7\} = 4 = \bar{f}_{12}.$$

Aumentando (segno $+$ nel ciclo) o diminuendo (segno $-$ nel ciclo) di $\Delta$ i valori delle variabili corrispondenti agli spigoli del ciclo, si ottengono i seguenti valori:

$$\bar{f}_{12} = 0, \quad \bar{f}_{13} = 5, \quad \bar{f}_{22} = 4 \quad \text{e} \quad \bar{f}_{23} = 3.$$

Come si vede, la variabile $f_{12}$ ha assunto valore zero e corrisponde quindi alla variabile uscente dalla base. In corrispondenza di essa, infatti, è stato ottenuto il valore di $\Delta$. Tenendo conto che i valori di tutte le altre variabili non corrispondenti agli spigoli del ciclo rimangono invariati, la nuova soluzione di base è riportata nella matrice $C_f$:

$$C_f = \begin{bmatrix} \boxed{2_2} & 6 & \boxed{3_5} & 10 \\ 3 & \boxed{1_4} & \boxed{4_3} & \boxed{5_1} \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} \end{bmatrix}.$$

[3] A meno che non si tratti di una soluzione degenere.

Ricalcolando le variabili duali in corrispondenza della nuova soluzione di base, si ottiene: $\bar{u}_1 = 4$, $\bar{u}_2 = 5$, $\bar{u}_3 = 1$, $\bar{v}_1 = 2$, $\bar{v}_2 = 4$, $\bar{v}_3 = 1$ e $\bar{v}_4 = 0$, da cui:

$$\begin{cases} \hat{c}_{14} = c_{14} - \bar{u}_1 + \bar{v}_4 = 10 - 4 + 0 = 6 \\ \hat{c}_{12} = c_{12} - \bar{u}_1 + \bar{v}_2 = 6 - 4 + 4 = 6 \\ \hat{c}_{14} = c_{14} - \bar{u}_1 + \bar{v}_4 = 10 - 4 + 0 = 6 \\ \hat{c}_{21} = c_{21} - \bar{u}_2 + \bar{v}_1 = 3 - 5 + 2 = 0 \\ \hat{c}_{31} = c_{31} - \bar{u}_3 + \bar{v}_1 = 4 - 1 + 2 = 5 \\ \hat{c}_{32} = c_{32} - \bar{u}_3 + \bar{v}_2 = 2 - 1 + 4 = 5 \\ \hat{c}_{33} = c_{33} - \bar{u}_3 + \bar{v}_3 = 9 - 1 + 1 = 9 \end{cases}.$$

Poichè tutti i costi ridotti fuori base sono non negativi, l'ultima soluzione di base ottenuta è ottima. Il suo valore di funzione obiettivo è pari a:

$$z^* = c_{11}\bar{f}_{11} + c_{13}\bar{f}_{13} + c_{22}\bar{f}_{22} + c_{23}\bar{f}_{23} + c_{24}\bar{f}_{24} + c_{34}\bar{f}_{34} = 4 + 15 + 4 + 12 + 5 + 6 = 46.$$

**Esercizio 5.35.** ★ Dato il problema dei trasporti riportato nell'esercizio 5.34, determinare una soluzione ammissibile iniziale, applicando il metodo dei minimi della matrice.

**Risoluzione.** Partiamo dalla tabella iniziale

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 4 & 8 & 7 & \end{array}.$$

Il metodo dei minimi della matrice consiste nel mettere di volta in volta in base la variabile a cui corrisponde il costo più piccolo di trasporto. Osservando la tabella $C_{ab}$ si ha:

$$\min_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3,4}} \{c_{ij}\} = 1 = c_{22} = c_{34}.$$

Poichè il minimo costo si ottiene in corrispondenza di $c_{22} = c_{34} = 1$, possiamo scegliere di far entrare in base o la variabile $f_{22}$ o la variabile $f_{34}$. Scegliendo la variabile $f_{22}$, otteniamo:

$$\bar{f}_{22} = \min\{a_2, b_2\} = \min\{8, 4\} = 4.$$

Di conseguenza $a_2 := a_2 - \bar{f}_{22} = 4$ e $b_2 := b_2 - \bar{f}_{22} = 0$. Poichè $b_2 = 0$, il secondo vincolo di destinazione è stato soddisfatto e quindi viene ignorato nella scelta delle nuove variabili entranti in base. La tabella $C_{ab}$ diventa:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & \boxed{1_4} & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 0 & 8 & 7 & \end{array}.$$

Ignorando la seconda colonna di $C_{ab}$ caratterizzata da $b_2 = 0$, il più piccolo coefficiente di costo si ha in corrispondenza di $c_{34} = 1$. Entra quindi in base la variabile $f_{34}$ con valore 6. Quindi:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & \boxed{1_4} & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 2 & 0 & 8 & 1 & \end{array}.$$

Ignorando adesso la seconda colonna e la terza riga di $C_{ab}$, si ottiene:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & 6 & 3 & 10 & 5 \\ 3 & \boxed{1_4} & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 1 & \end{array}.$$

Continuando si ha:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & 6 & \boxed{3_5} & 10 & 0 \\ 3 & \boxed{1_4} & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & \end{array},$$

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & 6 & \boxed{3_5} & 10 & 0 \\ 3 & \boxed{1_4} & \boxed{4_3} & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

e infine:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & 6 & \boxed{3_5} & 10 & 0 \\ 3 & \boxed{1_4} & \boxed{4_3} & \boxed{5_1} & 0 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array},$$

a cui corrispondono i seguenti valori:

$$\bar{f}_{11} = 2, \quad \bar{f}_{13} = 5, \quad \bar{f}_{22} = 4, \quad \bar{f}_{23} = 3, \quad \bar{f}_{24} = 1 \quad \text{e} \quad \bar{f}_{34} = 6,$$

con $\bar{z} = 46$. Tale soluzione di base coincide con quella ottima ottenuta nell'esercizio 5.34.

**Esercizio 5.36.** ★ Dato il problema dei trasporti riportato nell'esercizio 5.34, determinare una soluzione ammissibile iniziale, applicando il metodo di Vogel.

**Risoluzione.** Il metodo di Vogel, nella scelta della variabile da far entrare in base, individua la riga o la colonna in cui è massima la differenza fra i due più piccoli coefficienti di costo. Individuata tale riga o colonna, entra in base la variabile con il coefficiente di costo più basso su quella riga o colonna. Anche questo, come il metodo dell'angolo di nord-ovest o dei minimi della matrice, è un metodo basato sul soddisfacimento di un vincolo per volta. Se durante la procedura, a mano a mano che si ignorano i vincoli (poichè già soddisfatti), si ottengono colonne o righe con un solo elemento, la loro scelta ha la precedenza sulle altre.

Orliamo la matrice $C$ con i valori che esprimono le differenze, per ciascuna riga e per ciascuna colonna, fra i due più piccoli coefficienti di costo. Otteniamo:

$$C_{diff} = \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 & \end{array}.$$

La massima differenza è pari a 4, in corrispondenza della quarta colonna di $C_{diff}$. Quindi entra in base la variabile che, nella quarta colonna, ha il coefficiente di costo più basso, cioè la variabile $f_{34}$, con valore pari a

$$f_{34} = \min\{a_3, b_4\} = \min\{6, 7\} = 7.$$

Orlando la matrice $C$ con le offerte e le domande residue, otteniamo:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 2 & 4 & 8 & 1 & \end{array}.$$

Continuando si ha:

$$C_{diff} = \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & - \\ \hline 1 & 5 & 1 & 5 & \end{array},$$

dove la massima differenza, pari a 5, si ha in corrispondenza della seconda e quarta colonna. Scegliendo la seconda colonna, entra in base la variabile $f_{22}$, ottenendo:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & \boxed{1_4} & 4 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 2 & 0 & 8 & 1 & \end{array}.$$

Continuando si ha:

$$C_{diff} = \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & - \\ \hline 1 & - & 1 & 5 & \end{array},$$

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & \boxed{1_4} & 4 & \boxed{5_1} & 3 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 2 & 0 & 8 & 0 & \end{array},$$

$$C_{diff} = \begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & - \\ \hline 1 & - & 1 & - & \end{array}.$$

A parità di scelta, facciamo entrare in base la variabile $f_{11}$, ottenendo:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & 6 & 3 & 10 & 5 \\ 3 & \boxed{1_4} & 4 & \boxed{5_1} & 3 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 0 & \end{array}.$$

Dando precedenza alla prima riga contenente un solo elemento, entra in base $f_{13}$. Otteniamo:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & 6 & \boxed{3_5} & 10 & 0 \\ 3 & \boxed{1_4} & 4 & \boxed{5_1} & 3 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & \end{array}$$

e infine:

$$C_{ab} = \begin{array}{cccc|c} \boxed{2_2} & 6 & \boxed{3_5} & 10 & 0 \\ 3 & \boxed{1_4} & \boxed{4_3} & \boxed{5_1} & 0 \\ 4 & 2 & 9 & \boxed{1_6} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}.$$

Poichè le offerte e le domande residue sono nulle, tutti i vincoli sono stati soddisfatti. La soluzione di base ottenuta coincide con quella ottima dell'esercizio 5.34.

**Esercizio 5.37.** ★ Sia dato il problema dei trasporti, caratterizzato dai seguenti dati:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 10 \\ 1 & 7 & 11 \\ 2 & -9 & 12 \end{bmatrix}, \quad a^T = [4 \ \ 5 \ \ 1] \quad \text{e} \quad b^T = [4 \ \ 3 \ \ 3],$$

dove $C$ è la matrice dei costi unitari di trasporto dai nodi di origine ai nodi di destinazione, $a$ è il vettore delle quantità offerte dai nodi di origine e $b$ è il vettore delle quantità richieste dai nodi di destinazione.

Determinazione una soluzione iniziale ammissibile di base, usando il metodo dell'angolo di nord-ovest.

**Risoluzione.** Orliamo la matrice $C$, aggiungendo la colonna $a$ e la riga $b^T$ date dalla traccia. Otteniamo:

$$C_{ab} = \begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 7 & 11 & 5 \\ 2 & -9 & 12 & 1 \\ \hline 4 & 3 & 3 & \end{array}.$$

Col metodo dell'angolo di nord-ovest entra in base per prima la variabile $f_{11}$ che assume valore pari a 4. In tal caso, sebbene siano contemporaneamente ed effettivamente soddisfatti il primo vincolo di origine e il primo vincolo di destinazione, poichè nel problema dei trasporti i metodi usati per la determinazione di una soluzione ammissibile di base iniziale sono basati sul soddisfacimento di un vincolo per volta[4], scegliamo di considerare soddisfatto, ad esempio, solo il primo vincolo di origine. Otteniamo:

$$C_{ab} = \begin{array}{ccc|c} \boxed{6_4} & 4 & 10 & 0 \\ 1 & 7 & 11 & 5 \\ 2 & -9 & 12 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 3 & \end{array}$$

e successivamente:

$$C_{ab} = \begin{array}{ccc|c} \boxed{6_4} & 4 & 10 & 0 \\ \boxed{1_0} & 7 & 11 & 5 \\ 2 & -9 & 12 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 3 & \end{array},$$

da cui si vede che sta per essere generata una soluzione di base degenere. Continuando si ottiene:

$$C_{ab} = \begin{array}{ccc|c} \boxed{6_4} & 4 & 10 & 0 \\ \boxed{1_0} & \boxed{7_3} & 11 & 2 \\ 2 & -9 & 12 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 3 & \end{array},$$

$$C_{ab} = \begin{array}{ccc|c} \boxed{6_4} & 4 & 10 & 0 \\ \boxed{1_0} & \boxed{7_3} & \boxed{11_2} & 0 \\ 2 & -9 & 12 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \end{array},$$

e infine:

$$C_{ab} = \begin{array}{ccc|c} \boxed{6_4} & 4 & 10 & 0 \\ \boxed{1_0} & \boxed{7_3} & \boxed{11_2} & 0 \\ 2 & -9 & \boxed{12_1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \end{array}.$$

Poichè tutte le offerte e tutte le domande residue sono nulle, i vincoli sono stati tutti soddisfatti. Dal momento che $\bar{f}_{21} = 0$, la soluzione di base ottenuta è degenere. Il valore corrispondente di funzione obiettivo è pari a $\bar{z} = 79$.

**Esercizio 5.38.** ■ A partire dalla soluzione ammissibile di base ottenuta nell'esercizio 5.37 col metodo dell'angolo di nord-ovest, risolvere il problema.

**Esercizio 5.39.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.37, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo dei minimi della matrice.

[4]Si considerano soddisfatti contemporaneamente soltanto il vincolo di origine e quello di destinazione corrispondenti all'ultima variabile entrante in base.

**Esercizio 5.40.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.37, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo di Vogel.

**Esercizio 5.41.** ★ Risolvere il problema dei trasporti, caratterizzato dai seguenti dati:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 & 9 & 16 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 1 & 3 & 15 & 5 \end{bmatrix}, \quad a^T = [50 \;\; 20 \;\; 22] \qquad \text{e} \qquad b^T = [9 \;\; 10 \;\; 20 \;\; 41 \;\; 12],$$

dove $C$ è la matrice dei costi unitari di trasporto dai nodi di origine ai nodi di destinazione, $a$ è il vettore delle quantità offerte dai nodi di origine e $b$ è il vettore delle quantità richieste dai nodi di destinazione.

Per la determinazione di una soluzione iniziale ammissibile di base, si usi il metodo dell'angolo di nord-ovest.

**Risoluzione.** La condizione necessaria e sufficiente perchè il problema abbia soluzione ottima è verificata: infatti $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j = 92$. Calcoliamo adesso una soluzione ammissibile di base, utilizzando il metodo dell'angolo di nord-ovest. Partendo dalla tabella iniziale

$$C_{ab} = \begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 7 & 9 & 16 & 50 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 20 \\ 8 & 1 & 3 & 15 & 5 & 22 \\ \hline 9 & 10 & 20 & 41 & 12 & \end{array},$$

otteniamo:

$$C_{ab} = \begin{array}{ccccc|c} \boxed{2_9} & 4 & 7 & 9 & 16 & 41 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 20 \\ 8 & 1 & 3 & 15 & 5 & 22 \\ \hline 0 & 10 & 20 & 41 & 12 & \end{array},$$

$$C_{ab} = \begin{array}{ccccc|c} \boxed{2_9} & \boxed{4_{10}} & 7 & 9 & 16 & 31 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 20 \\ 8 & 1 & 3 & 15 & 5 & 22 \\ \hline 0 & 0 & 20 & 41 & 12 & \end{array},$$

$$C_{ab} = \begin{array}{ccccc|c} \boxed{2_9} & \boxed{4_{10}} & \boxed{7_{20}} & 9 & 16 & 11 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 20 \\ 8 & 1 & 3 & 15 & 5 & 22 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 41 & 12 & \end{array},$$

$$C_{ab} = \begin{array}{ccccc|c} \boxed{2_9} & \boxed{4_{10}} & \boxed{7_{20}} & \boxed{9_{11}} & 16 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 4 & 20 \\ 8 & 1 & 3 & 15 & 5 & 22 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 30 & 12 & \end{array},$$

$$C_{ab} = \begin{array}{ccccc|c} \boxed{2_9} & \boxed{4_{10}} & \boxed{7_{20}} & \boxed{9_{11}} & 16 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & \boxed{1_{20}} & 4 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 15 & 5 & 22 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 10 & 12 & \end{array},$$

$$C_{ab} = \begin{array}{ccccc|c} \boxed{2_9} & \boxed{4_{10}} & \boxed{7_{20}} & \boxed{9_{11}} & 16 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & \boxed{1_{20}} & 4 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & \boxed{15_{10}} & 5 & 12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & \end{array},$$

$$C_{ab} = \begin{array}{ccccc|c} \boxed{2_9} & \boxed{4_{10}} & \boxed{7_{20}} & \boxed{9_{11}} & 16 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & \boxed{1_{20}} & 4 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & \boxed{15_{10}} & \boxed{5_{12}} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}.$$

I valori delle variabili inizialmente in base sono quindi:

$$\bar{f}_{11} = 9, \quad \bar{f}_{12} = 10, \quad \bar{f}_{13} = 20, \quad \bar{f}_{14} = 11, \quad \bar{f}_{24} = 20, \quad \bar{f}_{34} = 10 \quad \text{e} \quad \bar{f}_{35} = 12.$$

con $\bar{z} = 527$.

Calcolando le variabili duali a partire da $\bar{v}_5 = 0$, otteniamo $\bar{u}_1 = -1$, $\bar{u}_2 = -9$, $\bar{u}_3 = 5$, $\bar{v}_1 = -3$, $\bar{v}_2 = -5$, $\bar{v}_3 = -8$ e $\bar{v}_4 = -10$, da cui:

$$\begin{cases} \hat{c}_{14} = c_{14} - \bar{u}_1 + \bar{v}_4 = 16 + 1 + 0 = 17 \\ \hat{c}_{21} = c_{21} - \bar{u}_2 + \bar{v}_1 = 3 + 9 - 3 = 9 \\ \hat{c}_{22} = c_{22} - \bar{u}_2 + \bar{v}_2 = 6 + 9 - 5 = 10 \\ \hat{c}_{23} = c_{23} - \bar{u}_2 + \bar{v}_3 = 2 + 9 - 8 = 3 \\ \hat{c}_{25} = c_{25} - \bar{u}_2 + \bar{v}_5 = 4 + 9 + 0 = 13 \\ \hat{c}_{31} = c_{31} - \bar{u}_3 + \bar{v}_1 = 8 - 5 - 3 = 0 \\ \hat{c}_{32} = c_{32} - \bar{u}_3 + \bar{v}_2 = 1 - 5 - 5 = -9 \\ \hat{c}_{33} = c_{33} - \bar{u}_3 + \bar{v}_3 = 3 - 5 - 8 = -10 \end{cases}.$$

Le variabili candidate a entrare in base sono $f_{32}$ e $f_{33}$. Scegliendo $f_{32}$ otteniamo il ciclo rappresentato in figura 5.28, da cui

$$\bar{f}_{32} = \Delta = \min\{\bar{f}_{12}, \bar{f}_{34}\} = 10 = \bar{f}_{12} = \bar{f}_{34}.$$

Poichè il minimo nel calcolo di $\Delta$ si realizza in corrispondenza di due diverse variabili di

$$\begin{array}{ccc} f_{12}^- & - - f_{13} - - & f_{14}^+ \\ | & & | \\ | & & f_{24} \\ | & & | \\ \boxed{f_{32}^+} & - - - - - - & f_{34}^- \end{array}$$

Figura 5.28: La variabile $f_{32}$ entra in base (esercizio 5.41)

base, ne consegue che sta per essere generata una soluzione di base degenere. Infatti sia la variabile $f_{12}$ che la variabile $f_{34}$ sono candidate a uscire dalla base. Scegliendo di far uscire dalla base la variabile $f_{12}$, si ottiene la seguente soluzione di base:

$$C_f = \begin{bmatrix} \boxed{2_9} & 4 & \boxed{7_{20}} & \boxed{9_{21}} & 16 \\ 3 & 6 & 2 & \boxed{1_{20}} & 4 \\ 8 & \boxed{1_{10}} & 3 & \boxed{15_0} & \boxed{5_{12}} \end{bmatrix}.$$

Calcolando le variabili duali, otteniamo $\bar{u}_1 = -1$, $\bar{u}_2 = -9$, $\bar{u}_3 = 5$, $\bar{v}_1 = -3$, $\bar{v}_2 = 4$, $\bar{v}_3 = -8$, $\bar{v}_4 = -10$ e $\bar{v}_5 = 0$, da cui:

$$\begin{cases} \hat{c}_{12} = c_{12} - \bar{u}_1 + \bar{v}_2 = 4 + 1 + 4 = 9 \\ \hat{c}_{14} = c_{14} - \bar{u}_1 + \bar{v}_4 = 16 + 1 + 0 = 17 \\ \hat{c}_{21} = c_{21} - \bar{u}_2 + \bar{v}_1 = 3 + 9 - 3 = 9 \\ \hat{c}_{22} = c_{22} - \bar{u}_2 + \bar{v}_2 = 6 + 9 - 4 = 11 \\ \hat{c}_{23} = c_{23} - \bar{u}_2 + \bar{v}_3 = 2 + 9 - 8 = 3 \\ \hat{c}_{25} = c_{25} - \bar{u}_2 + \bar{v}_5 = 4 + 9 + 0 = 13 \\ \hat{c}_{31} = c_{31} - \bar{u}_3 + \bar{v}_1 = 8 - 5 - 3 = 0 \\ \hat{c}_{33} = c_{33} - \bar{u}_3 + \bar{v}_3 = 3 - 5 - 8 = -10 \end{cases}.$$

Poichè $\hat{c}_{33} < 0$ entra in base la variabile $f_{33}$ e si ottiene il ciclo riportato in figura 5.29,

$$\begin{array}{ccc} f_{13}^{-} & -- & f_{14}^{+} \\ | & & | \\ | & & f_{24} \\ | & & | \\ \boxed{f_{33}^{+}} & -- & f_{34}^{-} \end{array}$$

Figura 5.29: La variabile $f_{33}$ entra in base (esercizio 5.41)

da cui

$$\bar{f}_{33} = \Delta = \min\{\bar{f}_{13}, \bar{f}_{34}\} = 0 = \bar{f}_{34}.$$

Dato che $\Delta = 0$, i valori di flusso non cambiano, ma cambiano solo gli indici di base poichè entra in base $f_{33}$ ed esce $f_{34}$. Otteniamo infatti:

$$C_f = \begin{bmatrix} \boxed{2_9} & 4 & \boxed{7_{20}} & \boxed{9_{21}} & 16 \\ 3 & 6 & 2 & \boxed{1_{20}} & 4 \\ 8 & \boxed{1_{10}} & \boxed{3_0} & 15 & \boxed{5_{12}} \end{bmatrix}.$$

Calcolando le variabili duali, otteniamo $\bar{u}_1 = 9$, $\bar{u}_2 = 1$, $\bar{u}_3 = 5$, $\bar{v}_1 = 7$, $\bar{v}_2 = 4$, $\bar{v}_3 = 2$, $\bar{v}_4 = 0$ e $\bar{v}_5 = 0$, da cui:

$$\begin{cases} \hat{c}_{12} = c_{12} - \bar{u}_1 + \bar{v}_2 = 4 - 9 + 4 = -1 \\ \hat{c}_{15} = c_{15} - \bar{u}_1 + \bar{v}_4 = 16 - 9 + 0 = 7 \\ \hat{c}_{21} = c_{21} - \bar{u}_2 + \bar{v}_1 = 3 - 1 + 7 = 9 \\ \hat{c}_{22} = c_{22} - \bar{u}_2 + \bar{v}_2 = 6 - 1 + 4 = 9 \\ \hat{c}_{23} = c_{23} - \bar{u}_2 + \bar{v}_3 = 2 - 1 + 2 = 3 \\ \hat{c}_{25} = c_{25} - \bar{u}_2 + \bar{v}_5 = 4 - 1 + 0 = 4 \\ \hat{c}_{31} = c_{31} - \bar{u}_3 + \bar{v}_1 = 8 - 5 + 7 = 10 \\ \hat{c}_{34} = c_{34} - \bar{u}_3 + \bar{v}_4 = 15 - 5 + 0 = 10 \end{cases}.$$

Entra in base $f_{12}$ e si ottiene il ciclo riportato in figura 5.30. La variabile $f_{12}$ assume valore

$$\begin{array}{ccc} \boxed{f_{12}^+} & -- & f_{13}^- \\ | & & | \\ | & & | \\ f_{32}^- & -- & f_{33}^+ \end{array}$$

Figura 5.30: La variabile $f_{12}$ entra in base (esercizio 5.41)

pari a

$$\bar{f}_{12} = \Delta = \min\{\bar{f}_{13}, \bar{f}_{32}\} = 10 = \bar{f}_{32}.$$

Pertanto esce la variabile $f_{32}$ e si ottiene

$$C_f = \begin{bmatrix} \boxed{2_9} & \boxed{4_{10}} & \boxed{7_{10}} & \boxed{9_{21}} & 16 \\ 3 & 6 & 2 & \boxed{1_{20}} & 4 \\ 8 & 1 & \boxed{3_{10}} & 15 & \boxed{5_{12}} \end{bmatrix}.$$

Le variabili duali assumono i seguenti valori: $\bar{u}_1 = 9$, $\bar{u}_2 = 1$, $\bar{u}_3 = 5$, $\bar{v}_1 = 7$, $\bar{v}_2 = 5$, $\bar{v}_3 = 2$, $v_4 = 0$ e $v_5 = 0$. Pertanto i coefficienti di costo ridotto fuori base sono:

$$\begin{cases} \hat{c}_{14} = c_{14} - \bar{u}_1 + \bar{v}_4 = 16 - 9 + 0 = 7 \\ \hat{c}_{21} = c_{21} - \bar{u}_2 + \bar{v}_1 = 3 - 1 + 7 = 9 \\ \hat{c}_{22} = c_{22} - \bar{u}_2 + \bar{v}_2 = 6 - 1 + 5 = 10 \\ \hat{c}_{23} = c_{23} - \bar{u}_2 + \bar{v}_3 = 2 - 1 + 2 = 3 \\ \hat{c}_{25} = c_{25} - \bar{u}_2 + \bar{v}_5 = 4 - 1 + 0 = 3 \\ \hat{c}_{31} = c_{31} - \bar{u}_3 + \bar{v}_1 = 8 - 5 + 7 = 10 \\ \hat{c}_{32} = c_{32} - \bar{u}_3 + \bar{v}_2 = 1 - 5 + 5 = 1 \\ \hat{c}_{34} = c_{34} - \bar{u}_3 + \bar{v}_4 = 15 - 5 + 0 = 10 \end{cases}.$$

Poichè i costi ridotti fuori base sono tutti non negativi, l'ultima soluzione di base ottenuta è ottima e $z^* = 427$.

**Esercizio 5.42.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.41, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo dei minimi della matrice.

**Esercizio 5.43.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.41, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo di Vogel.

**Esercizio 5.44.** ■ Risolvere il problema dei trasporti, caratterizzato dai seguenti dati:

$$C = \begin{bmatrix} 9 & -12 & 13 & 8 & 15 & 19 \\ 15 & 20 & 12 & 16 & 19 & 10 \\ 17 & -16 & 13 & 14 & 1 & 18 \\ 19 & 4 & 2 & 21 & 16 & 1; \end{bmatrix}, \quad a^T = [15\ 6\ 11\ 20] \qquad \text{e} \qquad b^T = [9\ 10\ 3\ 19\ 2\ 9],$$

dove $C$ è la matrice dei costi unitari di trasporto dai nodi di origine ai nodi di destinazione, $a$ è il vettore delle quantità offerte dai nodi di origine e $b$ è il vettore delle quantità richieste dai nodi di destinazione.

Per la determinazione di una soluzione iniziale ammissibile di base, si usi il metodo dell'angolo di nord-ovest.

**Esercizio 5.45.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.44, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo dei minimi della matrice.

**Esercizio 5.46.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.44, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo di Vogel.

**Esercizio 5.47.** ■ Risolvere il problema dei trasporti, caratterizzato dai seguenti dati:

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 & 12 & 9 \\ 8 & 6 & 12 & 1 & 4 \\ 10 & 15 & 8 & 9 & 17 \\ 7 & 5 & 1 & 20 & 23 \end{bmatrix}, \quad a^T = [7\ \ 17\ \ 13\ \ 31] \qquad \text{e} \qquad b^T = [15\ \ 23\ \ 10\ \ 8\ \ 12],$$

dove $C$ è la matrice dei costi unitari di trasporto dai nodi di origine ai nodi di destinazione, $a$ è il vettore delle quantità offerte dai nodi di origine e $b$ è il vettore delle quantità richieste dai nodi di destinazione.

Per la determinazione di una soluzione iniziale ammissibile di base, si usi il metodo dell'angolo di nord-ovest.

**Esercizio 5.48.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.47, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo dei minimi della matrice.

**Esercizio 5.49.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.47, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo di Vogel.

**Esercizio 5.50.** ■ Risolvere il problema dei trasporti, caratterizzato dai seguenti dati:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 & 10 \\ 8 & 6 & 2 & 4 \\ 11 & -15 & 8 & 9 \\ 10 & 15 & 18 & 21 \\ 17 & 5 & 1 & 20 \\ 21 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad a^T = [5 \;\; 31 \;\; 7 \;\; 21 \;\; 22 \;\; 30] \quad \text{e} \quad b^T = [33 \;\; 28 \;\; 20 \;\; 35],$$

dove $C$ è la matrice dei costi unitari di trasporto dai nodi di origine ai nodi di destinazione, $a$ è il vettore delle quantità offerte dai nodi di origine e $b$ è il vettore delle quantità richieste dai nodi di destinazione.

Per la determinazione di una soluzione iniziale ammissibile di base, si usi il metodo dell'angolo di nord-ovest.

**Esercizio 5.51.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.50, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo dei minimi della matrice.

**Esercizio 5.52.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.50, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo di Vogel.

**Esercizio 5.53.** ■ Risolvere il problema dei trasporti, caratterizzato dai seguenti dati:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 9 & 1 \\ 5 & 12 & 9 & -3 \\ 11 & 17 & -1 & 20 \\ 7 & 5 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 11 & 4; \end{bmatrix}, \quad a^T = [30 \;\; 12 \;\; 51 \;\; 17 \;\; 8 \;\; 23] \quad \text{e} \quad b^T = [48 \;\; 25 \;\; 14 \;\; 22],$$

dove $C$ è la matrice dei costi unitari di trasporto dai nodi di origine ai nodi di destinazione, $a$ è il vettore delle quantità offerte dai nodi di origine e $b$ è il vettore delle quantità richieste dai nodi di destinazione.

Per la determinazione di una soluzione iniziale ammissibile di base, si usi il metodo dell'angolo di nord-ovest.

**Suggerimento.** Notiamo che $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} a_i = 141 > \sum_{j=1}^{4} b_j = 109$: questo significa che la condizione necessaria e sufficiente per l'ottimalità non è soddisfatta. In tal caso si può operare nel seguente modo. Se la quantità complessiva offerta dai nodi di origine eccede la quantità totale richiesta dai nodi di destinazione, si può immaginare che l'eccedenza offerta vada a finire in un nodo di destinazione fittizio la cui domanda sia pari a $\sum_{i=1}^{6} a_i - \sum_{j=1}^{4} b_j = 32$. I costi unitari di trasporto dai nodi di origine al nodo di destinazione fittizio vengono posti uguali a zero. Così facendo le variabili decisionali ottime che coinvolgono il nodo fittizio e che hanno valore non nullo, esprimeranno la quantità di merce che rimarrà in eccesso nei corrispondenti nodi di origine e che quindi non viene spedita.

In base a quanto detto, i dati effettivi sui cui risolvere il problema diventano i seguenti:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 9 & 1 & 0 \\ 5 & 12 & 9 & -3 & 0 \\ 11 & 17 & -1 & 20 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 8 & 0 \\ 5 & 3 & 11 & 4 & 0; \end{bmatrix}, \quad a^T = [30\ 12\ 51\ 17\ 8\ 23] \quad \text{e} \quad b^T = [48\ 25\ 14\ 22\ 32].$$

**Esercizio 5.54.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.53, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo dei minimi della matrice.

**Esercizio 5.55.** Risolvere il problema dei trasporti dell'esercizio 5.53, determinando una soluzione di base iniziale con il metodo di Vogel.

# Capitolo 6

# Problemi di Vehicle Routing

## 6.1 Il problema del commesso viaggiatore asimmetrico: l'algoritmo di patching

**Esercizio 6.1.** ★ Dato un grafo orientato completo $G = (V, E)$, si vuole risolvere il problema del commesso viaggiatore asimmetrico sul sottoinsieme di nodi $V' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. La matrice $C_{\min}$ dei costi dei cammini minimi da ciascun nodo a ciascun nodo di $V'$ è la seguente:

$$C_{\min} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 4 & 10 & 6 & 7 & 7 & 4 \\ 9 & 0 & 10 & 6 & 9 & 5 & 4 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 1 & 10 & 6 & 7 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 7 & 0 & 9 & 8 & 9 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 9 & 5 & 0 & 10 & 6 & 6 & 3 \\ 8 & 3 & 5 & 4 & 8 & 0 & 7 & 5 & 8 \\ 5 & 5 & 7 & 7 & 6 & 8 & 0 & 3 & 6 \\ 6 & 3 & 9 & 5 & 12 & 8 & 7 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 8 & 8 & 6 & 9 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il corrispondente problema dell'assegnamento (rilassato del problema), le variabili pari a 1 sono $x_{02}$, $x_{23}$, $x_{30}$, $x_{15}$, $x_{54}$, $x_{48}$, $x_{86}$, $x_{67}$, $x_{71}$.

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo di patching a partire dalla soluzione ottima del problema dell'assegnamento;

2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Risoluzione.** Indicando con $C$ l'insieme dei sottocicli forniti dalla soluzione ottima del problema dell'assegnamento, si ha:

$$C = \{C_1, C_2\},$$

con

$$C_1 = \{0, 2, 3, 0\} \quad \text{e} \quad C_2 = \{1, 5, 4, 8, 6, 7, 1\}.$$

Indicando con $p$ la cardinalità dell'insieme $C$, poichè $p > 1$, la soluzione fornita dal problema dell'assegnamento non è una soluzione ottima per il problema del commesso viaggiatore.

L'algoritmo di patching effettua, ad ogni iterazione, un merge (col minimo incremento di costo) fra i due sottocicli appartenenti all'insieme $C$, caratterizzati dal maggior numero di nodi. Poichè in tal caso i sottocicli appartenenti a $C$ sono solo due, è ovvio che il merge verrà effettuato fra gli unici sottocicli possibili, cioè fra $C_1$ e $C_2$.

Il merge fra i due sottocicli viene effettuato tramite uno scambio fra due coppie di archi. Le varie combinazioni, con il relativo incremento di costo, sono riportate nella seguente tabella:

| Archi eliminati | | Archi inseriti | | Incremento di costo |
|---|---|---|---|---|
| (0,2) | (1,5) | (0,5) | (1,2) | 8 |
| (0,2) | (5,4) | (0,4) | (5,2) | 4 |
| (0,2) | (4,8) | (0,8) | (4,2) | 7 |
| (0,2) | (8,6) | (0,6) | (8,2) | 9 |
| (0,2) | (6,7) | (0,7) | (6,2) | 8 |
| (0,2) | (7,1) | (0,1) | (7,2) | 10 |
| (2,3) | (1,5) | (2,5) | (1,3) | 6 |
| (2,3) | (5,4) | (2,4) | (5,3) | 5 |
| (2,3) | (4,8) | (2,8) | (4,3) | 5 |
| (2,3) | (8,6) | (2,6) | (8,3) | 11 |
| (2,3) | (6,7) | (2,7) | (6,3) | 8 |
| (2,3) | (7,1) | (2,1) | (7,3) | 5 |
| (3,0) | (1,5) | (3,5) | (1,0) | 8 |
| (3,0) | (5,4) | (3,4) | (5,0) | 5 |
| (3,0) | (4,8) | (3,8) | (4,0) | 7 |
| (3,0) | (8,6) | (3,6) | (8,0) | 7 |
| (3,0) | (6,7) | (3,7) | (6,0) | 8 |
| (3,0) | (7,1) | (3,1) | (7,0) | 7 |

Si può vedere come il minimo incremento di costo è pari a 4 (seconda riga della tabella). Il merge fra $C_1$ e $C_2$ viene quindi effettuato eliminando gli archi $(0, 2)$ e $(5, 4)$ e inserendo gli archi $(0, 4)$ e $(5, 2)$. A questo punto, l'insieme $C$ sarà pari a:

$$C = \{C_1\},$$

con

$$C_1 = \{0, 4, 8, 6, 7, 1, 5, 2, 3, 0\}.$$

Poichè $p = 1$, l'algoritmo termina fornendo come ciclo hamiltoniano $C_H$ il ciclo $C_1$, in corrispondenza del quale si ottiene la seguente soluzione $\bar{x}$ ammissibile (riportiamo solo le componenti diverse da zero) per il problema del commesso viaggiatore asimmetrico:

$$\bar{x}_{04} = \bar{x}_{23} = \bar{x}_{30} = \bar{x}_{15} = \bar{x}_{52} = \bar{x}_{48} = \bar{x}_{86} = \bar{x}_{67} = \bar{x}_{71} = 1,$$

con valore di funzione obiettivo pari a $\bar{z} = 37$. Quanto alla stima dell'errore commesso, basta calcolare il valore ottimo $z^*_{AS}$ di funzione obiettivo ottenuto in corrispondenza della soluzione ottima del problema dell'assegnamento. In tal caso $z^*_{AS} = 33$: tale valore costituisce un lower bound per il valore ottimo di funzione obiettivo del problema del commesso viaggiatore asimmetrico. Quindi

$$errore \leq \frac{\bar{z} - z^*_{AS}}{z^*_{AS}} = \frac{37 - 33}{33} = 12,12\%.$$

È utile fare un'ultima considerazione. Se nel fare il merge fra i due unici sottocicli forniti dalla soluzione ottima del problema dell'assegnamento (problema rilassato), avessimo trovato una possiilità di scambio di coppie di archi con incremento di costo nullo, questo scambio avrebbe portato alla determinazione di una soluzione ottima del problema del commesso viaggiatore e l'algoritmo si sarebbe subito arrestato.

**Esercizio 6.2.** ■ Dato un grafo orientato completo $G = (V, E)$, si vuole risolvere il problema del commesso viaggiatore asimmetrico sul sottoinsieme di nodi $V' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. La matrice $C_{\min}$ dei costi dei cammini minimi da ciascun nodo a ciascun nodo di $V'$ è la seguente:

$$C_{\min} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 & 11 & 8 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 10 & 11 & 10 & 6 & 7 & 4 \\ 7 & 7 & 0 & 7 & 4 & 8 & 9 & 8 \\ 11 & 9 & 9 & 0 & 8 & 10 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 8 & 3 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 11 & 4 & 11 & 8 & 0 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 7 & 7 & 4 & 8 & 0 & 6 \\ 10 & 8 & 9 & 9 & 6 & 10 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il corrispondente problema dell'assegnamento (rilassato del problema), le variabili pari a 1 sono $x_{01}$, $x_{10}$, $x_{24}$, $x_{43}$, $x_{37}$, $x_{76}$, $x_{65}$, $x_{52}$.

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo di patching a partire dalla soluzione ottima del problema dell'assegnamento;

2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Esercizio 6.3.** ■ Dato un grafo orientato completo $G = (V, E)$, si vuole risolvere il problema del commesso viaggiatore asimmetrico sul sottoinsieme di nodi $V' =$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. La matrice $C_{\min}$ dei costi dei cammini minimi da ciascun nodo a ciascun nodo di $V'$ è la seguente:

$$C_{\min} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 10 & 11 & 7 & 5 & 5 & 8 \\ 9 & 0 & 12 & 10 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 1 & 0 & 10 & 6 & 4 & 4 & 7 \\ 9 & 8 & 11 & 0 & 5 & 6 & 7 & 10 \\ 7 & 3 & 6 & 4 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 11 & 6 & 5 & 8 & 4 & 0 & 6 & 9 \\ 14 & 10 & 9 & 12 & 8 & 4 & 0 & 12 \\ 12 & 12 & 14 & 15 & 11 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il corrispondente problema dell'assegnamento (rilassato del problema), le variabili pari a 1 sono $x_{34}$, $x_{43}$, $x_{07}$, $x_{76}$, $x_{65}$, $x_{52}$, $x_{21}$, $x_{10}$.

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo di patching a partire dalla soluzione ottima del problema dell'assegnamento;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

## 6.2 Il problema del commesso viaggiatore simmetrico: l'algoritmo Nearest Neighbour

**Esercizio 6.4.** ★ Dato un grafo non orientato completo $G = (V, E)$, si vuole risolvere il problema del commesso viaggiatore simmetrico sul sottoinsieme di nodi $V' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. La matrice $C_{\min}$ (simmetrica) dei costi dei cammini minimi da ciascun nodo a ciascun nodo di $V'$ è la seguente:

$$C_{\min} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 9 & 4 & 5 \\ & 0 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ & & 0 & 5 & 1 & 6 \\ & & & 0 & 5 & 10 \\ & & & & 0 & 5 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo Nearest Neighbour;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Risoluzione.** L'algoritmo costruisce un ciclo hamiltoniano $C_H$ partendo dal nodo $h = 0$ (o da qualsiasi altro nodo) e aggiungendo in $C_H$ il nodo $k \notin C_H$ più "vicino" al nodo $h$. Dopo aver inserito in $C_H$ il nodo $k$, si itera la procedura ponendo $h = k$, fino a quando non siano stati inseriti in $C_H$ tutti i nodi di $V'$. Alla fine, aggiungendo in $C_H$ il nodo 0 (cioè il nodo di partenza), l'insieme $C_H$ formerà un ciclo hamiltoniano, che costituisce una soluzione ammissibile per il problema del commesso viaggiatore simmetrico.

All'inizio si ha $h = 0$ e quindi:

$$C_H = \{0\}.$$

Leggendo la matrice dei costi $C_{\min}$, si vede che il nodo $k$ tale che

$$c_{hk} = \min_{\substack{j \in V' \\ j \notin C_H}} c_{hj}$$

è il nodo 4. Quindi si ha:

$$C_H = \{0, 4\}.$$

Adesso $h = 4$; i nodi non appartenenti a $C_H$ più "vicini" al nodo 4 sono il nodo 1 e il nodo 2. Scegliendo il nodo 1 otteniamo:

$$C_H = \{0, 4, 1\}.$$

Iterando la procedura otteniamo:

$$C_H = \{0, 4, 1, 2, 3, 5\}.$$

Poichè $C_H = V'$, l'algoritmo termina aggiungendo in $C_H$ il nodo 0 di partenza, e fornendo come ciclo hamiltoniano il seguente insieme ordinato di nodi:

$$C_H = \{0, 4, 1, 2, 3, 5, 0\},$$

con valore di funzione obiettivo pari a $\bar{z} = 27$.

Per determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima, determiniamo un "minimum rooted spanning tree", scegliendo come nodo radice $r$ un qualsiasi nodo. Scegliendo ad esempio $r = 0$, basta calcolare l'albero minimo ricoprente sull'insieme dei nodi $V' \setminus \{0\}$ e poi collegare all'albero il nodo radice $r = 0$, tramite l'aggiunta dei due archi a costo minimo incidenti su $r$. Otteniamo il "minimum rooted spanning tree" rappresentato in figura 6.1, con valore ottimo $z^*_{MST-r}$ di funzione obiettivo pari a 21.

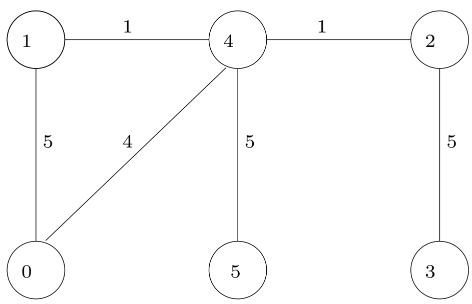


Figura 6.1: Minimum rooted spanning tree, con $r = 0$ (esercizi 6.4, 6.7 e 6.10)

Poichè, per ogni nodo radice $r$, il problema del calcolo di un "minimum rooted spanning tree" costituisce un problema rilassato per il problema del commesso viaggiatore simmetrico, la quantità $z^*_{MST-r} = 21$ costituisce un lower bound per il valore ottimo di funzione obiettivo del problema del commesso viaggiatore simmetrico. Di conseguenza si ha:

$$errore \leq \frac{\bar{z} - z^*_{MST-r}}{z^*_{MST-r}} = \frac{27-21}{21} = 28.57\%.$$

**Esercizio 6.5.** ■ Dato un grafo non orientato completo $G = (V, E)$, si vuole risolvere il problema del commesso viaggiatore simmetrico sul sottoinsieme di nodi $V' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. La matrice $C_{\min}$ (simmetrica) dei costi dei cammini minimi da ciascun nodo a ciascun nodo di $V'$ è la seguente:

$$C_{\min} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 & 5 & 4 & 6 \\ & 0 & 8 & 7 & 6 & 7 \\ & & 0 & 10 & 5 & 7 \\ & & & 0 & 5 & 5 \\ & & & & 0 & 5 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo Nearest Neighbour;

2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Esercizio 6.6.** ■ Dato un grafo non orientato completo $G = (V, E)$, si vuole risolvere il problema del commesso viaggiatore simmetrico sul sottoinsieme di nodi $V' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La matrice $C_{\min}$ (simmetrica) dei costi dei cammini minimi da ciascun nodo a ciascun nodo di $V'$ è la seguente:

$$C_{\min} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 7 & 8 & 7 & 5 \\ & 0 & 4 & 4 & 5 & 5 & 8 \\ & & 0 & 2 & 6 & 2 & 5 \\ & & & 0 & 5 & 1 & 4 \\ & & & & 0 & 6 & 9 \\ & & & & & 0 & 5 \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo Nearest Neighbour;

2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

## 6.3 Il problema del commesso viaggiatore simmetrico: l'algoritmo dell'albero

**Esercizio 6.7.** ★ Sia dato il problema del commesso viaggiatore simmetrico dell'esercizio 6.4.

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo dell'albero;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Risoluzione.** L'algoritmo dell'albero determina un albero minimo ricoprente e costruisce un multigrafo euleriano, raddoppiando tutti i rami dell'albero minimo ricoprente. Dopo di che, basta individuare sul multigrafo euleriano un ciclo euleriano $C_E$, a partire dal quale si estrae un ciclo hamiltoniano, prendendo i nodi del ciclo euleriano nello stesso ordine in cui compaiono nel ciclo euleriano, ma senza ripetizione.

Nel caso di questo esercizio, un albero minimo ricoprente è quello rappresentato in figura 6.2.

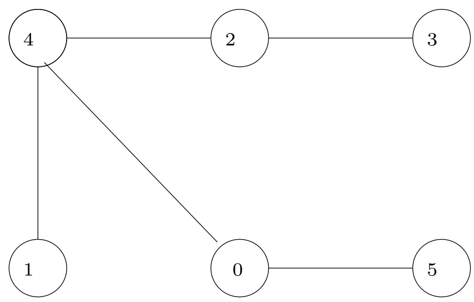


Figura 6.2: Minimum spanning tree (esercizi 6.7 e 6.10)

Duplicando tutti i suoi archi, otteniamo il multigrafo euleriano rappresentato in figura 6.3.

Un possibile ciclo euleriano è il seguente:

$$C_E = \{0, 5, 0, 4, 2, 3, 2, 4, 1, 4, 0\},$$

a cui corrisponde il ciclo hamiltoniano

$$C_H = \{0, 5, 4, 2, 3, 1, 0\},$$

avente funzione obiettivo pari a $\bar{z} = 27$. Di conseguenza, tenendo conto del lower bound $z^*_{MST-r}$ calcolato nell'esercizio 6.4, otteniamo:

$$errore \leq \frac{\bar{z} - z^*_{MST-r}}{z^*_{MST-r}} = \frac{27 - 21}{21} = 28.57\%.$$

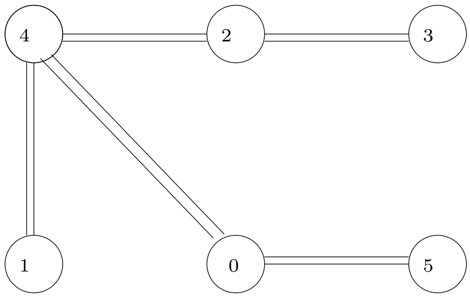


Figura 6.3: Multigrafo euleriano (esercizio 6.7)

**Esercizio 6.8.** ■ Sia dato il problema del commesso viaggiatore simmetrico dell'esercizio 6.5.

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo dell'albero;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Esercizio 6.9.** ■ Sia dato il problema del commesso viaggiatore simmetrico dell'esercizio 6.6.

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo dell'albero;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

## 6.4 Il problema del commesso viaggiatore simmetrico: l'algoritmo di Christofides

**Esercizio 6.10.** ★ Sia dato il problema del commesso viaggiatore simmetrico dell'esercizio 6.4.

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo di Christofides;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Risoluzione.** L'algoritmo di Christofides è analogo all'algoritmo dell'albero: l'unica differenza consiste nel fatto che il grafo euleriano viene costruito a partire dall'albero minimo ricoprente, con l'ausilio di un problema di matching perfetto a costo minimo. In particolare, si risolve un problema di matching perfetto su un grafo completo, i cui nodi sono costituiti esclusivamente dai nodi dell'albero aventi grado dispari[1]. Dopo di che, il grafo euleriano viene costruito aggiungendo all'albero gli archi ottenuti come soluzione ottima del problema di matching.

Nel nostro caso, un albero minimo ricoprente è lo stesso ottenuto nell'esercizio 6.7 (vedi figura 6.2). Indicando con $V_D$ l'insieme dei nodi di grado dispari dell'albero, si ha

$$V_D = \{1, 3, 4, 5\}.$$

I possibili matching sui nodi di $V_D$ sono:

$$M_1 = \{(1,4),(3,5)\}, \quad M_2 = \{(1,5),(3,4)\}, \quad \text{e } M_3 = \{(1,3),(4,5)\},$$

aventi tutti e tre funzione obiettivo pari a 11. Quindi ognuno dei tre matching $M_1$, $M_2$ e $M_3$ costituiscono un matching ottimo. Scegliendo ad esempio il matching $M_1$, aggiungiamo gli archi di $M_1$ all'albero, ottenendo il grafo euleriano rappresentato in figura 6.4.

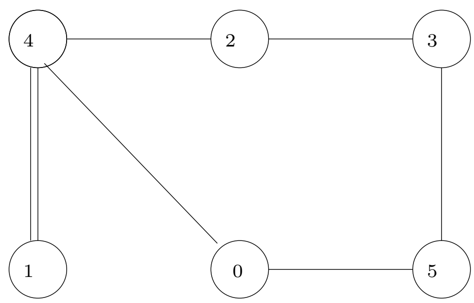


Figura 6.4: Multigrafo euleriano (esercizio 6.10)

Un possibile ciclo euleriano è il seguente:

$$C_E = \{0, 4, 1, 4, 2, 3, 5, 0\},$$

a cui corrisponde il ciclo hamiltoniano

$$C_H = \{0, 4, 1, 2, 3, 5, 0\},$$

avente funzione obiettivo $\bar{z}$ pari a 27. Di conseguenza, tenendo conto del lower bound $z^*_{MST-r}$ calcolato nell'esercizio 6.4, otteniamo:

$$errore \leq \frac{\bar{z} - z^*_{MST-r}}{z^*_{MST-r}} = \frac{27 - 21}{21} = 28.57\%.$$

**Esercizio 6.11.** ■ Sia dato il problema del commesso viaggiatore simmetrico dell'esercizio 6.5.

[1]Dato un grafo non orientato, il numero di nodi di grado dispari è sempre un numero pari.

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo di Christofides;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Esercizio 6.12.** ■ Sia dato il problema del commesso viaggiatore simmetrico dell'esercizio 6.6.

1. Determinare una soluzione ammissibile del problema, applicando l'algoritmo di Christofides;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

## 6.5 Il problema del postino cinese diretto

**Esercizio 6.13.** ★ Dato il grafo orientato $G = (V, E)$ rappresentato in figura 6.5, indichiamo con $E_{T_i}$, $i \in V$, l'insieme degli archi che costituiscono l'albero dei cammini minimi dal nodo $i$ a tutti gli altri nodi del grafo.

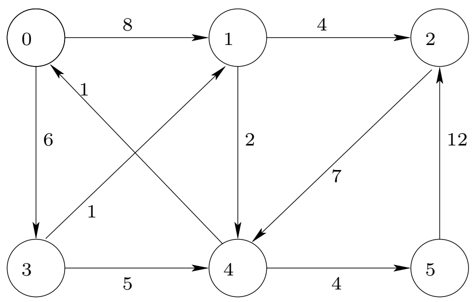


Figura 6.5: Grafo di partenza (esercizio 6.13)

Risolvere il problema del postino cinese sul grafo $G$, sapendo che

$$E_{T_0} = \{(0,3), (1,2), (1,4), (3,1), (4,5)\},$$
$$E_{T_1} = \{(0,3), (1,2), (1,4), (4,0), (4,5)\},$$
$$E_{T_2} = \{(0,3), (2,4), (4,0), (3,1), (4,5)\},$$
$$E_{T_3} = \{(1,2), (4,0), (1,4), (3,1), (4,5)\},$$
$$E_{T_4} = \{(0,3), (1,2), (4,0), (3,1), (4,5)\},$$
$$E_{T_5} = \{(0,3), (2,4), (4,0), (3,1), (5,2)\}.$$

**Risoluzione.** Per prima cosa individuiamo i nodi asimmetrici del grafo, cioè i nodi con semigrado entrante[2] diverso da quello uscente[3]. Se non esistesse nessun nodo asimmetrico, il grafo sarebbe euleriano e il problema del postino cinese sarebbe automaticamente risolto.

Indichiamo con $V^+$ l'insieme dei nodi asimmetrici con semigrado entrante maggiore di quello uscente e con $V^-$ l'insieme dei nodi asimmetrici con semigrado uscente maggiore di quello entrante. Abbiamo $V^+ = \{2, 4\}$ e $V^- = \{0, 3\}$. Per ogni nodo $i \in V^+$ indichiamo con $o_i$ la differenza fra il semigrado entrante e quello uscente; in maniera speculare, per ogni nodo $j \in V^-$ indichiamo con $d_j$ la differenza fra il semigrado uscente e quello entrante. Risolviamo il problema dei trasporti PT così definito:

$$PT \begin{cases} z^*_{PT} = \min\limits_x \quad \sum\limits_{i\in V^+} \sum\limits_{j \in V^-} \bar{c}_{ij} x_{ij} \\ \qquad\qquad\quad \sum\limits_{j\in V^-} x_{ij} = o_i \quad i \in V^+ \\ \qquad\qquad\quad \sum\limits_{i\in V^+} x_{ij} = d_j \quad j \in V^- \\ \qquad\qquad\quad x_{i,j} \geq 0 \quad i \in V^+ \quad j \in V^- \end{cases},$$

dove $\bar{c}_{ij}$ è il costo di un cammino minimo dal nodo $i$ al nodo $j$, con $i \in V^+$ e $j \in V^-$.

Dalla lettura degli insiemi $E_{T_i}$, $i \in V^+$, otteniamo $\bar{c}_{20} = 8$, $\bar{c}_{23} = 14$, $\bar{c}_{40} = 1$ e $\bar{c}_{43} = 7$. Otteniamo il seguente problema dei trasporti:

$$PT \begin{cases} z^*_{PT} = \min\limits_x \quad 8x_{20} + 14x_{23} + x_{40} + 7x_{43} \\ \qquad\qquad\quad x_{20} + x_{23} = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_{40} + x_{43} = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_{20} + x_{40} = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_{23} + x_{43} = 1 \\ \qquad\qquad\quad x_{20}, x_{23}, x_{40}, x_{43} \geq 0 \end{cases},$$

che ammette due soluzioni ammissibili $\tilde{x}$ e $\hat{x}$ intere:

$$\tilde{x}_{20} = 1,\ \tilde{x}_{23} = 0,\ \tilde{x}_{40} = 0,\ \tilde{x}_{43} = 1, \quad \text{con } \tilde{z} = 15$$

e

$$\hat{x}_{20} = 0,\ \hat{x}_{23} = 1,\ \hat{x}_{40} = 1,\ \hat{x}_{43} = 0, \quad \text{con } \hat{z} = 15.$$

Poichè i valori di funzioni obiettivo coincidono, entrambi i punti $\tilde{x}$ e $\hat{x}$ sono ottimi, per cui $z^*_{PT} = \tilde{z} = \hat{z} = 15$.

A questo punto, per costruire il multigrafo euleriano a costo minimo, è sufficiente aggiungere al grafo di partenza gli archi $(r, s)$ facenti parte di un cammino minimo da $i$ a $j$ corrispondente alle variabili $x_{ij}$ diverse da zero nella soluzione ottima di $PT$: tali archi $(r, s)$, facenti parte di un cammino minimo da $i$ a $j$, vanno inseriti nel grafo per un numero di volte pari al valore ottimo di $x_{ij}$ fornito dal problema dei trasporti.

Nel nostro caso, scegliendo come soluzione ottima del problema dei trasporti il punto $\tilde{x}$, aggiungiamo al grafo di partenza per 1 volta ($\tilde{x}_{20} = 1$) gli archi di un cammino minimo

[2]Il semigrado entrante di un nodo è il numero di archi entranti nel nodo.

[3]Il semigrado uscente di un nodo è il numero di archi uscenti dal nodo.

dal nodo 2 al nodo 0: tali archi sono leggibili dall'insieme $E_{T_2}$ e sono gli archi $(2,4)$ e $(4,0)$. In modo analogo aggiungiamo per 1 volta ($\tilde{x}_{43} = 1$) gli archi di un cammino minimo dal nodo 4 al nodo 3: tali archi sono leggibili dall'insieme $E_{T_4}$ e sono gli archi $(4,0)$ e $(0,3)$. Otteniamo così il multigrafo euleriano rappresentato in figura 6.6.

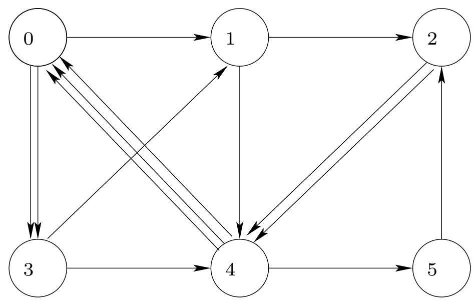


Figura 6.6: Multigrafo euleriano (esercizio 6.13)

Un ciclo euleriano (soluzione ottima del problema del postino cinese) è il seguente:

$$C_E^* = \{0, 3, 4, 0, 3, 1, 4, 0, 1, 2, 4, 5, 2, 4, 0\}.$$

Il suo costo $z^*$ è pari alla somma dei costi di tutti gli archi di partenza presenti nel grafo $G$ (figura 6.5), a cui si aggiunge $z_{PT}^*$. Otteniamo:

$$z^* = 50 + 15 = 65.$$

Dalla soluzione ottima si vede che, per poter visitare tutti gli archi del grafo di partenza, è necessario passare tre volte sull'arco $(4,0)$, due volte sull'arco $(0,3)$ e due volte sull'arco $(2,4)$.

**Esercizio 6.14.** ■ Dato il grafo orientato $G = (V, E)$ rappresentato in figura 6.7, indichiamo con $E_{T_i}$, $i \in V$, l'insieme degli archi che costituiscono l'albero dei cammini minimi dal nodo $i$ a tutti gli altri nodi del grafo.

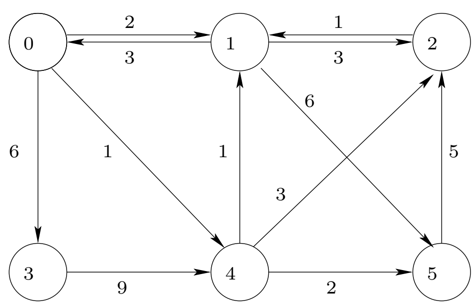


Figura 6.7: Grafo di partenza (esercizio 6.14)

Risolvere il problema del postino cinese sul grafo $G$, sapendo che

$$E_{T_0} = \{(0,1),(0,3),(0,4),(4,2),(4,5)\},$$
$$E_{T_1} = \{(0,3),(0,4),(1,0),(1,2),(1,5)\},$$
$$E_{T_2} = \{(1,0),(0,3),(0,4),(2,1),(1,5)\},$$
$$E_{T_3} = \{(1,0),(4,2),(3,4),(4,1),(4,5)\},$$
$$E_{T_4} = \{(1,0),(0,3),(4,1),(4,2),(4,5)\},$$
$$E_{T_5} = \{(1,0),(0,3),(0,4),(2,1),(5,2)\}.$$

Formulare il problema dei trasporti utilizzato per la risoluzione.

**Esercizio 6.15.** ■ Dato il grafo orientato $G = (V, E)$ rappresentato in figura 6.8, indichiamo con $E_{T_i}$, $i \in V$, l'insieme degli archi che costituiscono l'albero dei cammini minimi dal nodo $i$ a tutti gli altri nodi del grafo.

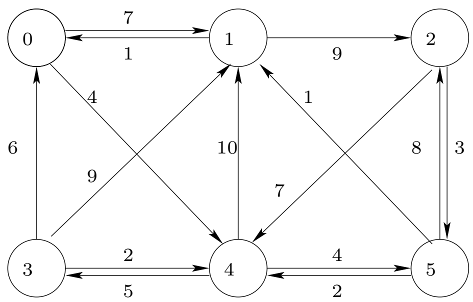


Figura 6.8: Grafo di partenza (esercizio 6.15)

Risolvere il problema del postino cinese sul grafo $G$, sapendo che

$$E_{T_0} = \{(0,1),(0,4),(1,2),(4,3),(4,5)\},$$
$$E_{T_1} = \{(0,4),(1,0),(1,2),(4,3),(4,5)\},$$
$$E_{T_2} = \{(1,0),(2,5),(4,3),(5,1),(5,4)\},$$
$$E_{T_3} = \{(3,0),(3,4),(4,5),(5,1),(5,2)\},$$
$$E_{T_4} = \{(1,0),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2)\},$$
$$E_{T_5} = \{(1,0),(4,3),(5,1),(5,2),(5,4)\}.$$

Formulare il problema dei trasporti utilizzato per la risoluzione.

# Capitolo 7

# Problemi di Scheduling

## 7.1 Singola macchina: minimizzare la massima lateness

**Esercizio 7.1.** ★ Siano dati 9 job da processare su una singola macchina. Ad ogni job $j$ sono associati un tempo di processamento $p_j$ e una data di scadenza (due date) $d_j$, secondo la seguente tabella:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 2 | 3 | 1 | 2 | 6 | 2 | 4 | 3 | 5 |
| $d_j$ | 5 | 6 | 2 | 13 | 4 | 7 | 10 | 12 | 3 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la massima lateness $L_{\max}$;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Risoluzione.** La regola da utilizzare in questo caso è molto semplice: basta processare i job in ordine non decrescente rispetto alle due date (regola EDD - Earliest Due Date). Quindi la sequenza ottima $\pi^*$ è la seguente:

$$\pi^* = \{3, 9, 5, 1, 2, 6, 7, 8, 4\}.$$

Quanto al calcolo del valore ottimo di funzione obiettivo, indicando con $c_j(\pi^*)$ il tempo di completamento del generico job $j$ in corrispondenza della sequenza ottima $\pi^*$, esso è pari a

$$L^*_{\max} = \max_{1 \leq j \leq 9} L_j(\pi^*),$$

dove $L_j(\pi^*) = c_j(\pi^*) - d_j$ è la lateness (ritardo) del job $j$ rispetto alla propria due date $d_j$.

Per ogni job $j$, determiniamo quindi i valori dei tempi di completamento $c_j(\pi^*)$ sul diagramma temporale. A tale scopo, costruiamo la figura 7.1, nella quale a ogni job corrisponde un rettangolo di lunghezza pari al tempo di processamento.

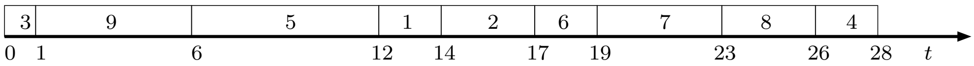


Figura 7.1: Scheduling ottimo (esercizio 7.1)

In corrispondenza della sequenza ottima $\pi^*$, a partire dall'istante zero, corrispondente all'istante di inizio del processamento del primo job (job 3), si ottiene:

$$c_1(\pi^*) = 14;\ c_2(\pi^*) = 17;\ c_3(\pi^*) = 1;\ c_4(\pi^*) = 28;\ c_5(\pi^*) = 12;$$

$$c_6(\pi^*) = 19;\ c_7(\pi^*) = 23;\ c_8(\pi^*) = 26;\ c_9(\pi^*) = 6.$$

Di conseguenza:

$$\begin{array}{l}
L_1(\pi^*) = c_1(\pi^*) - d_1 = 14 - 5 = 9;\\
L_2(\pi^*) = c_2(\pi^*) - d_2 = 17 - 6 = 11;\\
L_3(\pi^*) = c_3(\pi^*) - d_3 = 1 - 2 = -1;\\
L_4(\pi^*) = c_4(\pi^*) - d_4 = 28 - 13 = 15;\\
L_5(\pi^*) = c_5(\pi^*) - d_5 = 12 - 4 = 8;\\
L_6(\pi^*) = c_6(\pi^*) - d_6 = 19 - 7 = 12;\\
L_7(\pi^*) = c_7(\pi^*) - d_7 = 23 - 10 = 13;\\
L_8(\pi^*) = c_8(\pi^*) - d_8 = 26 - 12 = 14;\\
L_9(\pi^*) = c_9(\pi^*) - d_9 = 6 - 3 = 3.
\end{array}$$

Osservando i valori di $L_j(\pi^*)$, con $j = 1, \ldots, 9$, otteniamo

$$L^*_{\max} = \max_{1\le j\le 9} L_j(\pi^*) = L_4(\pi^*) = 15.$$

Notiamo che il processamento di ogni job è completato in ritardo rispetto alla corrispondente due date, ad eccezione del job 3 (lateness negativa), il cui processamento termina in anticipo di una unità di tempo rispetto alla due date.

**Esercizio 7.2.** ★ Siano dati 8 job da processare su una singola macchina. Ad ogni job $j$ sono associati un tempo di processamento $p_j$ e una data di scadenza (due date) $d_j$, secondo la seguente tabella:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 1 | 4 | 3 | 7 | 6 | 2 | 5 | 2 |
| $d_j$ | 4 | 3 | 14 | 15 | 11 | 12 | 5 | 9 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la massima lateness $L_{\max}$ e tenendo conto dei seguenti vincoli di precedenza fra i job:
   - il job 5 deve essere processato prima dei job 2 e 6;
   - il job 6 deve essere processato prima dei job 3 e 4;
   - i job 4 e 7 devono essere processati prima del job 8;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Risoluzione.** La regola per determinare la sequenza ottima è la seguente: fra i job senza successori, si mette in coda quello con la massima due date (iterando poi la procedura).

Indichiamo con $Q$ l'insieme dei job senza successori, cioè suscettibili di essere processati per ultimo. Alla prima iterazione abbiamo

$$Q = \{1, 2, 3, 8\} \quad \text{e} \quad \max\{d_1, d_2, d_3, d_8\} = \max\{4, 3, 14, 9\} = 14 = d_3.$$

Fra i job appartenenti all'insieme $Q$, quello con la massima due date è il job 3: esso quindi viene messo in coda nella sequenza ottima, ottenendo

$$\pi^* = \{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, 3\}.$$

Iteriamo la procedura, ignorando l'esistenza del job allocato (cioè del job 3). Aggiornando $Q$, otteniamo

$$Q = \{1, 2, 8\} \quad \text{e} \quad \max\{d_1, d_2, d_8\} = \max\{4, 3, 9\} = 9 = d_8.$$

Poichè fra i job appartenenti a $Q$, quello con la massima due date è il job 8, esso viene messo in coda nella sequenza ottima, subito prima del job 3. Otteniamo quindi

$$\pi^* = \{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, 8, 3\}.$$

L'allocazione del job 8 libera dai vincoli di precedenza i job 4 e 7, che quindi entrano in $Q$. Si ha:

$$Q = \{1, 2, 4, 7\} \quad \text{e} \quad \max\{d_1, d_2, d_4, d_7\} = \max\{4, 3, 15, 5\} = 15 = d_4.$$

Quindi

$$\pi^* = \{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, 4, 8, 3\}.$$

L'avvenuta allocazione dei job 3 e 4 libera dai vincoli di precedenza il job 6 che entra in Q. Otteniamo

$$Q = \{1, 2, 7, 6\} \quad \text{e} \quad \max\{d_1, d_2, d_7, d_6\} = \max\{4, 3, 5, 12\} = 12 = d_6.$$

Di conseguenza

$$\pi^* = \{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, 6, 4, 8, 3\}.$$

Aggiornando $Q$ otteniamo

$$Q = \{1, 2, 7\} \quad \text{e} \quad \max\{d_1, d_2, d_7\} = \max\{4, 3, 5\} = 5 = d_7.$$

Quindi
$$\pi^* = \{\cdot, \cdot, \cdot, 7, 6, 4, 8, 3\}.$$
Proseguendo si ha
$$Q = \{1, 2\} \quad \text{e} \quad \max\{d_1, d_2\} = \max\{4, 3\} = 4 = d_1.$$
Allora
$$\pi^* = \{\cdot, \cdot, 1, 7, 6, 4, 8, 3\}.$$
Adesso l'insieme $Q$ contiene solo il job 2, che viene quindi inserito nella sequenza, subito prima del job 1; di conseguenza
$$\pi^* = \{\cdot, 2, 1, 7, 6, 4, 8, 3\}.$$
Infine, l'allocazione del job 2 libera dai vincoli di precedenza l'unico job rimasto, cioè il job 5. Allora la sequenza ottima finale è
$$\pi^* = \{5, 2, 1, 7, 6, 4, 8, 3\}.$$
Per il calcolo del valore ottimo $L^*_{\max}$ di funzione obiettivo, basta seguire la stessa procedura utilizzata nell'esercizio 7.1, calcolando, per ogni singolo job $j$, la lateness $L_j(\pi^*)$. A tale scopo, determiniamo i tempi di completamento $c_j(\pi^*)$:
$$c_1(\pi^*) = 11;\ c_2(\pi^*) = 10;\ c_3(\pi^*) = 30;\ c_4(\pi^*) = 25;\ c_5(\pi^*) = 6;$$
$$c_6(\pi^*) = 18;\ c_7(\pi^*) = 16;\ c_8(\pi^*) = 27.$$
Quindi
$$\begin{aligned}
L_1(\pi^*) &= c_1(\pi^*) - d_1 = 11 - 4 = 7;\\
L_2(\pi^*) &= c_2(\pi^*) - d_2 = 10 - 3 = 7;\\
L_3(\pi^*) &= c_3(\pi^*) - d_3 = 30 - 14 = 16;\\
L_4(\pi^*) &= c_4(\pi^*) - d_4 = 25 - 15 = 10;\\
L_5(\pi^*) &= c_5(\pi^*) - d_5 = 6 - 11 = -5;\\
L_6(\pi^*) &= c_6(\pi^*) - d_6 = 18 - 12 = 6;\\
L_7(\pi^*) &= c_7(\pi^*) - d_7 = 16 - 5 = 11;\\
L_8(\pi^*) &= c_8(\pi^*) - d_8 = 27 - 9 = 18.
\end{aligned}$$
Di conseguenza $L^*_{\max} = \max\limits_{1 \le j \le 8} L_j(\pi^*) = L_8(\pi^*) = 18$.

È facile vedere che la regola utilizzata coincide, quando non ci sono vincoli di precedenza fra i job, con la regola EDD, vista nell'esercizio 7.1.

**Esercizio 7.3.** ■ Siano dati 8 job da processare su una singola macchina. Ad ogni job $j$ sono associati un tempo di processamento $p_j$ e una data di scadenza (due date) $d_j$, secondo la seguente tabella:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 3 | 6 | 2 | 7 | 4 | 1 | 5 | 3 |
| $d_j$ | 6 | 3 | 5 | 9 | 11 | 12 | 15 | 4 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la massima lateness $L_{\max}$ e tenendo conto dei seguenti vincoli di precedenza fra i job:
   - il job 6 deve essere processato prima dei job 2 e 5;
   - il job 5 deve essere processato prima dei job 3 e 4;
   - i job 4 e 8 devono essere processati prima del job 7;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.4.** ■ Siano dati 8 job da processare su una singola macchina. Ad ogni job $j$ sono associati un tempo di processamento $p_j$ e una data di scadenza (due date) $d_j$, secondo la seguente tabella:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 2 | 4 | 3 | 6 | 7 | 1 | 3 | 5 |
| $d_j$ | 4 | 2 | 2 | 1 | 3 | 6 | 7 | 5 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la massima lateness $L_{\max}$ e tenendo conto dei seguenti vincoli di precedenza fra i job:
   - il job 3 deve essere processato prima del job 2;
   - il job 7 deve essere processato prima dei job 8 e 4;
   - il job 2 deve essere processato prima del job 5;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.5.** Siano dati 8 job da processare su una singola macchina. Ad ogni job $j$ sono associati un tempo di processamento $p_j$ e una data di scadenza (due date) $d_j$, secondo la seguente tabella:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 4 | 6 | 1 | 2 | 3 | 2 | 5 | 3 |
| $d_j$ | 5 | 14 | 12 | 3 | 5 | 7 | 10 | 2 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la massima lateness $L_{\max}$ e tenendo conto dei seguenti vincoli di precedenza fra i job:
   - il job 2 deve essere processato prima del job 3;
   - il job 1 deve essere processato prima dei job 4 e 3;
   - il job 8 deve essere processato prima del job 1;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo;
3. come varia la funzione obiettivo all'ottimo se si ignorano i vincoli di precedenza e si pone $d_2 = 22$?

**Esercizio 7.6.** ■ Dati gli esercizi 7.3 e 7.4, risolverli ignorando i vincoli di precedenza fra i job.

## 7.2 Singola macchina: minimizzare la somma dei tempi di completamento

**Esercizio 7.7.** ★ Siano dati 6 job da processare su una singola macchina. Ad ogni job $j$ è associato un tempo di processamento $p_j$ secondo la seguente tabella:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 2 | 1 | 4 | 6 | 9 | 7 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la somma dei tempi di completamento;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Risoluzione.** La risoluzione di questo problema è molto semplice: in base alla regola SPT (Shortest Processing Time), basta processare i job secondo l'ordine non decrescente dei tempi di processamento. Quindi

$$\pi^* = \{2, 1, 3, 4, 6, 5\}.$$

Poichè il valore ottimo di funzione obiettivo è pari a

$$z^* = \sum_{j=1}^{6} c_j(\pi^*),$$

calcoliamo, a partire dall'istante 0, i tempi di completamento dei singoli job, processati secondo la sequenza $\pi^*$. Otteniamo

$$c_2(\pi^*) = 0 + p_2 = 0 + 1 = 1; \quad c_1(\pi^*) = c_2(\pi^*) + p_1 = 1 + 2 = 3;$$

$$c_3(\pi^*) = c_1(\pi^*) + p_3 = 3 + 4 = 7; \quad c_4(\pi^*) = c_3(\pi^*) + p_4 = 7 + 6 = 13;$$

$$c_6(\pi^*) = c_4(\pi^*) + p_6 = 13 + 7 = 20; \quad c_5(\pi^*) = c_6(\pi^*) + p_5 = 20 + 9 = 29.$$

Di conseguenza

$$z^* = \sum_{j=1}^{6} c_j(\pi^*) = 73.$$

**Esercizio 7.8.** ★ Siano dati 6 job da processare su una singola macchina. Ad ogni job $j$ è associato un peso $w_j$ e un tempo di processamento $p_j$ secondo la seguente tabella:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 2 | 4 | 1 | 7 | 6 | 3 |
| $w_j$ | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 6 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la somma pesata dei tempi di completamento;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Risoluzione.** La regola che si utilizza consiste nel processare i job secondo l'ordine non decrescente del rapporto $p_j/w_j$. Poichè

$$p_1/w_1 = 2/2 = 1; \quad p_2/w_2 = 4/1 = 4; \quad p_3/w_3 = 1/4;$$

$$p_4/w_4 = 7/1 = 7; \quad p_5/w_5 = 6/2 = 3; \quad p_6/w_6 = 3/6 = 1/2,$$

allora

$$\pi^* = \{3, 6, 1, 5, 2, 4\}.$$

Per calcolare il valore ottimo di funzione obiettivo

$$z^* = \sum_{j=1}^{6} w_j c_j(\pi^*),$$

calcoliamo i singoli tempi di completamento. Otteniamo:

$$c_3(\pi^*) = 0 + p_3 = 0 + 1 = 1; \quad c_6(\pi^*) = c_3(\pi^*) + p_6 = 1 + 3 = 4;$$

$$c_1(\pi^*) = c_6(\pi^*) + p_1 = 4 + 2 = 6; \quad c_5(\pi^*) = c_6(\pi^*) + p_5 = 6 + 6 = 12;$$

$$c_2(\pi^*) = c_5(\pi^*) + p_2 = 12 + 4 = 16; \quad c_4(\pi^*) = c_5(\pi^*) + p_4 = 16 + 7 = 23.$$

Di conseguenza

$$z^* = \sum_{j=1}^{6} w_j c_j(\pi^*) = 103.$$

Notiamo infine che, nel caso in cui tutti i pesi $w_j$ sono pari a 1, la regola usata coincide con la regola SPT vista nell'esercizio 7.7.

**Esercizio 7.9.** ★ Siano dati 6 job da processare su una singola macchina. Nella seguente tabella, per ogni job $j$, sono riportati i tempi di processamento $p_j$ e i tempi di rilascio $r_j$:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 5 | 3 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| $r_j$ | 10 | 1 | 2 | 12 | 4 | 3 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la somma dei tempi di completamento e nell'ipotesi che sia consentita la preemption;

2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Risoluzione.** La regola usata in questo caso è un'estensione della SPT.

In particolare, nella sequenza ottima, si pone in prima posizione il job col tempo di rilascio minimo[1] e lo si processa fino ad arrivare a nuovi eventuali tempi di rilascio. A partire poi dai successivi tempi di rilascio, vengono processati i job col tempo di processamento (residuo) minimo. Ricordiamo che è consentita la preemption: cioè è possibile interrompere il processamento di un job, per riprenderlo in seguito.

Nello svolgimento dell'esercizio, indichiamo con $p_j$ il tempo di processamento residuo del generico job $j$. Ovviamente, nella fase di inizializzazione, i tempi di processamento residui di tutti i job coincidono con i tempi di processamento effettivi, riportati in tabella.

Con riferimento alla figura 7.2, all'istante 0 nessun job può essere processato, poichè il minimo tempo di rilascio è pari a 1, in corrispondenza del job 2. Quindi a partire dall'istante 1 il job 2 comincia a essere processato per una sola unità di tempo, cioè fino a quando non si arriva al prossimo istante di rilascio, cioè all'istante 2: nel frattempo il tempo di processamento residuo del job 2 passa da 3 a 2.

[1] A parità di tempo di rilascio, si sceglie il job col tempo di processamento più basso.

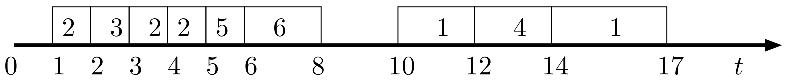


Figura 7.2: Scheduling ottimo (esercizio 7.9)

All'istante 2, possono essere processati o il job 2 con $p_2 = 2$, o il job 3 (il cui tempo di rilascio è proprio l'istante 2) con $p_3 = 1$. Quindi, a partire dall'istante 2, fra i job 2 e 3 viene processato per primo quello con tempo di processamento residuo più basso, il job 3, che viene processato per una unità di tempo, fino al successivo istante di rilascio (istante 3). Notiamo che adesso il tempo di processamento residuo $p_3$ del job 3 è pari a zero: cioè il job 3 è stato processato per intero.

All'istante 3 viene rilasciato il job 6: quindi possono essere processati o il job 2, con $p_2 = 2$, o il job 6 con $p_6 = 2$. Poichè i tempi di processamento residui sono uguali, è possibile scegliere indifferentemente uno dei due job: ad esempio il job 2, che viene processato per una unità di tempo, fino all'istante 4 in cui viene rilasciato il job 5. Così facendo il tempo di processamento residuo $p_2$ del job 2 passa da 2 a 1.

All'istante 4 possono essere processati o il job 2 con $p_2 = 1$, o il job 6 con $p_6 = 2$, o il job 5 con $p_5 = 1$. Anche in tal caso possiamo scegliere indifferentemente o il job 2 o il job 5, visto che il minimo tempo residuo di processamento si realizza in corrispondenza di entrambi i job: scegliamo ad esempio il job 2, che viene processato per intero fino all'istante 5.

All'istante 5 possono essere processati o il job 5 con $p_5 = 1$, o il job 6 con $p_6 = 2$: poichè il tempo di processamento residuo minimo è quello corrispondente al job 5, tale job viene processato per intero fino all'istante 6, in cui inizia il processamento dell'unico job possibile, cioè il job 6.

All'istante 10 viene rilasciato il job 1 con $p_1 = 5$, che viene processato per due unità di tempo fino al successivo istante di rilascio, cioè fino all'istante 12. Il tempo di processamento residuo $p_1$ del job 1 adesso è pari a 3.

All'istante 12 viene rilasciato il job 4 con $p_4 = 2$. Poichè $p_4 = 2 < p_1 = 3$, inizia il processamento del job 4 per intero, fino all'istante 14.

Infine all'istante 14 viene ripreso il processamento del job 1 per tre unità di tempo, fino all'istante 17. Poichè tutti i job sono stati processati per intero, la procedura si ferma.

Dalla figura 7.2 notiamo che la macchina rimane inattiva dall'istante 0 all'istante 1 e dall'istante 8 all'istante 10.

Per calcolare il valore ottimo $z^*$ di funzione obiettivo, determiniamo dalla figura 7.2 i tempi di completamento $c_j$ dei vari job. Otteniamo:

$$c_1 = 17; \quad c_2 = 5; \quad c_3 = 3;$$

$$c_4 = 14; \quad c_5 = 6; \quad c_6 = 8.$$

Di conseguenza

$$z^* = \sum_{i=1}^{6} c_j = 53.$$

**Esercizio 7.10.** ■ Siano dati 6 job da processare su una singola macchina. Ad ogni job $j$ è associato un peso $w_j$ e un tempo di processamento $p_j$ secondo la seguente tabella:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 4 | 9 | 5 | 6 | 5 | 2 |
| $w_j$ | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 5 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la somma pesata dei tempi di completamento;

2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.11.** ■ Siano dati 6 job da processare su una singola macchina. Nella seguente tabella, per ogni job $j$, sono riportati i tempi di processamento $p_j$ e i tempi di rilascio $r_j$:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 4 | 1 | 5 | 6 | 5 | 2 |
| $r_j$ | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 5 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la somma dei tempi di completamento e nell'ipotesi che sia consentita la preemption;

2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.12.** ■ Siano dati 6 job da processare su una singola macchina. Nella seguente tabella, per ogni job $j$, sono riportati i tempi di processamento $p_j$ e i tempi di rilascio $r_j$:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 7 | 1 | 4 | 6 | 5 | 2 |
| $r_j$ | 0 | 3 | 2 | 1 | 3 | 5 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la somma dei tempi di completamento e nell'ipotesi che sia consentita la preemption;

2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.13.** ■ Ad un'azienda produttrice di materiale edile (che si occupa anche del trasporto della merce) giungono contemporaneamente sei ordini da sei ditte diverse. Ogni ordine, in ragione della sua entità e della distanza da coprire per la consegna, necessita di un certo tempo (espresso in giorni) per essere evaso. Inoltre, per ciascuna delle sei ditte, è nota la penalità (espressa in migliaia di euro al giorno) che l'azienda deve pagare per ogni giorno non necessario in cui la ditta attende l'espletamento dell'ordine.

I dati sono riportati nella seguente tabella:

| Ditta | Tempo necessario per l'evasione dell'ordine | Penalità |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 4 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 2 | 2 |
| 4 | 7 | 5 |
| 5 | 5 | 3 |
| 6 | 6 | 1 |

Ad esempio, poichè il tempo necessario per l'evasione dell'ordine della ditta 4 è pari a 7 giorni, se tale ordine fosse evaso dopo dieci giorni dall'arrivo della richiesta in azienda, quest'ultima sarebbe costretta a pagare una penale di 15.000 euro.

Supponendo che sia possibile evadere un ordine alla volta, si determini la schedulazione ottima degli ordini, con l'obiettivo di minimizzare la penalità complessiva pagata dall'azienda. Calcolare inoltre l'entità di tale penalità.

**Esercizio 7.14.** ■ Siano dati 6 job da processare su una singola macchina. Nella seguente tabella, per ogni job $j$, sono riportati i tempi di processamento $p_j$ e i tempi di rilascio $r_j$:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 4 | 2 | 1 | 6 | 6 | 2 |
| $r_j$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 6 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulla macchina, con l'obiettivo di minimizzare la somma dei tempi di completamento e nell'ipotesi che sia consentita la preemption;

2. calcolare inoltre il valore ottimo di funzione obiettivo.

## 7.3 Macchine parallele e identiche: minimizzare la somma dei tempi di completamento

**Esercizio 7.15.** ★ Siano dati 10 job e 4 macchine parallele e identiche. Ad ogni job $j$ è associato un tempo di processamento $p_j$ secondo la seguente tabella:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 4 | 7 | 5 | 6 | 4 | 9 | 8 | 1 | 3 | 11 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulle macchine, con l'obiettivo di minimizzare la somma dei tempi di completamento;
2. calcolare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Risoluzione.** Visto che bisogna minimizzare la somma dei tempi di completamento, la regola di processamento dei job è simile alla SPT, vista nel caso di una singola macchina.

La regola è la seguente: si assegna il job con tempo di processamento più basso alla macchina al momento più "scarica" (vedi figura 7.3).

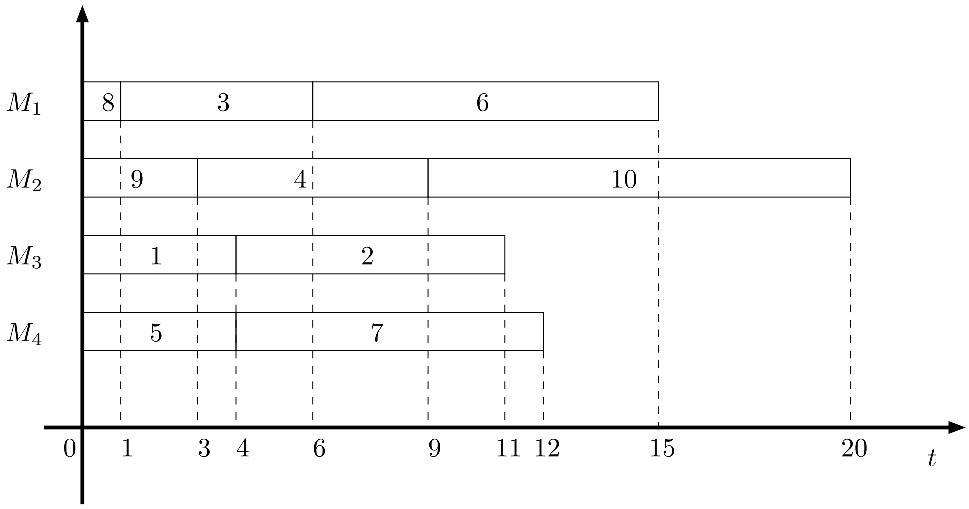


Figura 7.3: Scheduling ottimo (esercizio 7.15)

Il job col tempo di processamento più basso è il job 8, con $p_8 = 1$. Esso viene quindi assegnato, per primo, indifferentemente ad una delle quattro macchine (ad esempio la prima). Il secondo job col tempo di processamento più basso è il job 9, che può essere assegnato indifferentemente o alla seconda o alla terza o alla quarta macchina, che sono quelle al momento completamente "scariche". Assegnamolo per esempio alla macchina 2 (vedi figura 7.3).

Così facendo, allocando i job sulle macchine in base al valore non decrescente del tempo di processamento (ricordiamo che non è consentita la preemption), otteniamo lo scheduling ottimo rappresentato in figura 7.3.

Quanto al calcolo del valore ottimo di funzione obiettivo, determiniamo i tempi di completamento dei singoli job, a partire dalla figura 7.3. Otteniamo

$$c_1 = 4; \quad c_2 = 11; \quad c_3 = 6;$$

$$c_4 = 9; \quad c_5 = 4; \quad c_6 = 15;$$

$$c_7 = 12; \quad c_8 = 1; \quad c_9 = 3; \quad c_{10} = 20.$$

Di conseguenza

$$z^* = \sum_{i=1}^{10} c_j = 85$$

.

**Esercizio 7.16.** ■ Siano dati 10 job e 4 macchine parallele e identiche. Ad ogni job $j$ è associato un tempo di processamento $p_j$ secondo la seguente tabella:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 4 | 9 | 5 | 6 | 5 | 2 | 8 | 4 | 3 | 7 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulle macchine, con l'obiettivo di minimizzare la somma dei tempi di completamento;

2. calcolare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.17.** ■ Siano dati 10 job e 4 macchine parallele e identiche. Ad ogni job $j$ è associato un tempo di processamento $p_j$ secondo la seguente tabella:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 4 | 1 | 4 | 6 | 9 | 2 | 8 | 2 | 3 | 6 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulle macchine, con l'obiettivo di minimizzare la somma dei tempi di completamento;

2. calcolare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.18.** ■ L'ufficio centrale delle Poste chiude alle ore 18:00 e alla chiusura tutti gli utenti ancora dentro vengono serviti.

Alle ore 18:00 del 7 gennaio 2004 ci sono nell'ufficio postale ancora 8 persone da servire (Alessandra, Carlo, Domenico, Francesco, Giuseppe, Lucia, Mario e Stefania), con tre sportelli (N.1, N.2, N.3) contemporaneamente attivi e abilitati a svolgere ogni tipo di operazione. Per ciascun tipo di operazione si sono stimati i seguenti tempi unitari (espressi in minuti):

| Operazione | Tempo unitario |
|---|---|
| Riscossione pensione o stipendio | 6 |
| Pagamento bollettino postale | 1 |
| Invio telegramma | 4 |
| Cambio di assegno | 3,5 |
| Invio vaglia postale | 2,5 |
| Spedizione raccomandata | 2 |
| Spedizione assicurata | 2 |

Inoltre la seguente tabella descrive le operazioni che ciascuna delle 8 persone deve effettuare allo sportello:

| | Operazioni da effettuare |
|---|---|
| Alessandra | un telegramma e 3 bollettini postali |
| Carlo | 2 raccomandate e un' assicurata |
| Domenico | un vaglia postale e 4 bollettini postali |
| Francesco | cambio di un assegno e 2 telegrammi |
| Giuseppe | 2 assicurate e una raccomandata |
| Lucia | 5 bollettini postali |
| Mario | riscossione pensione e 2 bollettini postali |
| Stefania | riscossione stipendio e cambio di 2 assegni |

Ad esempio, Stefania, dovendo riscuotere lo stipendio e cambiare 2 assegni, rimane allo sportello 13 minuti.

Tenendo presente che ogni persona deve essere servita senza interruzione da un unico sportello e tenendo conto che ogni persona lascia l'ufficio postale non appena ha terminato le proprie operazioni allo sportello,

1. in che ordine e da quale sportello ogni persona deve essere servita in modo da minimizzare il tempo medio di permanenza nell'ufficio postale?

2. Calcolare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.19.** ■ Siano dati 10 job e 4 macchine parellele e identiche. I job sono caratterizzati dai seguenti tempi di processamento $p_j$ sulle macchine:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 3 | 6 | 5 | 1 | 2 | 4 | 1 | 7 | 3 | 5 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo dei job sulle macchine, con l'obiettivo di minimizzare la somma dei tempi di completamento;
2. calcolare il valore ottimo di funzione obiettivo.

## 7.4 Macchine parallele e identiche: minimizzare il makespan

**Esercizio 7.20.** ★ Siano dati 5 job, caratterizzati dai seguenti tempi di processamento $p_j$:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 4 | 1 | 5 | 3 | 8 |

1. Risolvere il problema di scheduling su 3 macchine parallele e identiche (con possibilità di preemption sui job), con l'obiettivo di minimizzare il massimo tempo di completamento $c_{\max}$ (makespan);
2. determinare i singoli tempi di completamento dei job.

**Risoluzione.** Indicando con $n$ il numero di job e con $m$ il numero di macchine, calcoliamo il valore ottimo del makespan (valore ottimo di funzione obiettivo). Otteniamo

$$c^*_{\max} = \max\left\{ \max_{0\le j\le n} p_j, \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j}{m} \right\} = \max\left\{ \max_{0\le j\le 5} p_j, \frac{\sum_{j=1}^{5} p_j}{3} \right\} = \max\{8, 21/3\} \max\{8, 7\} = 8.$$

Immaginando di processare i job su una singola macchina (in qualsiasi ordine e senza interruzioni), otteniamo un sequenziamento del tipo riportato in figura 7.4.

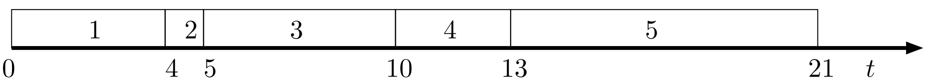


Figura 7.4: Sequenziamento dei job su singola macchina (esercizio 7.20)

"Suddividiamo" adesso il sequenziamento riportato in figura 7.4, partendo da sinistra, in intervalli di ampiezza pari a $c^*_{\max} = 8$, e assegniamo il primo intervallo alla prima macchina, il secondo intervallo alla seconda macchina, e così via. Otteniamo in tal modo lo scheduling ottimo riportato in figura 7.5.

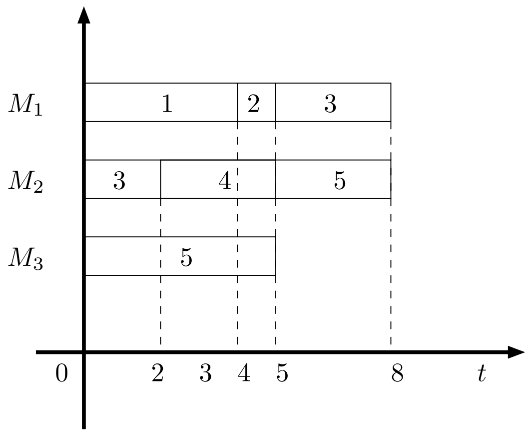


Figura 7.5: Scheduling ottimo (esercizio 7.20)

Dalla figura 7.5 è possibile calcolare i tempi di completamento dei job. Essi sono:

$$c_1 = 4; \quad c_2 = 5; \quad c_3 = 8; \quad c_4 = 5; \quad c_5 = 8.$$

**Esercizio 7.21.** ★ Siano dati 6 job, caratterizzati dai seguenti tempi di processamento $p_j$:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 3 | 4 | 3 | 2 | 4 | 4 |

1. Risolvere il problema di scheduling su 4 macchine parallele e identiche (con possibilità di preemption sui job), con l'obiettivo di minimizzare il massimo tempo di completamento $c_{\max}$ (makespan);

2. determinare i singoli tempi di completamento dei job.

**Risoluzione.** Utilizzando la formula vista nell'esercizio 7.20 calcoliamo, con $n = 6$ ed $m = 4$, il valore ottimo di funzione obiettivo $c^*_{\max}$. Otteniamo:

$$c^*_{\max} = \max\{4, 20/4\} = 5.$$

Immaginando di processare i job su una singola macchina (in qualsiasi ordine e senza interruzioni) otteniamo un sequenziamento del tipo riportato in figura 7.6.

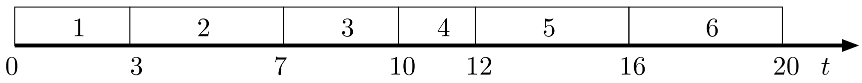


Figura 7.6: Sequenziamento dei job su singola macchina (esercizio 7.21)

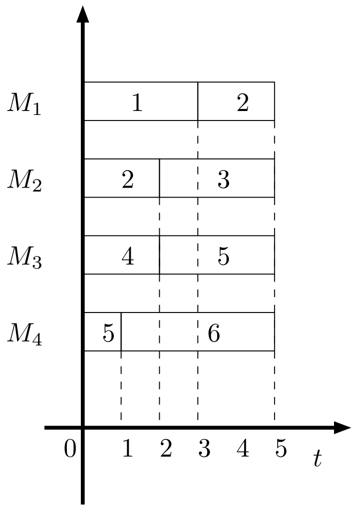


Figura 7.7: Scheduling ottimo (esercizio 7.21)

Come nell'esercizio 7.20, "suddividiamo" il sequenziamento riportato in figura 7.6, partendo da sinistra, in intervalli di ampiezza pari a $c^*_{\max} = 5$, e assegniamo il primo intervallo alla prima macchina, il secondo intervallo alla seconda macchina, e così via. Otteniamo in tal modo lo scheduling ottimo riportato in figura 7.7.

Dalla figura 7.7 è possibile calcolare i tempi di completamento dei job. Essi sono:

$$c_1 = 3; \quad c_2 = 5; \quad c_3 = 5; \quad c_4 = 2; \quad c_5 = 5; \quad c_6 = 5.$$

**Esercizio 7.22.** ■ Siano dati 5 job, caratterizzati dai seguenti tempi di processamento $p_j$:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 4 | 1 | 5 | 8 | 3 |

1. Risolvere il problema di scheduling su 3 macchine parallele e identiche (con possibilità di preemption sui job), con l'obiettivo di minimizzare il massimo tempo di completamento $c_{\max}$ (makespan);

2. determinare i tempi di completamento dei singoli job.

**Esercizio 7.23.** ■ Siano dati 5 job, caratterizzati dai seguenti tempi di processamento $p_j$:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 4 | 2 | 9 | 8 | 1 |

1. Risolvere il problema di scheduling su 3 macchine parallele e identiche (con possibilità di preemption sui job), con l'obiettivo di minimizzare il massimo tempo di completamento $c_{\max}$ (makespan);

2. determinare i tempi di completamento dei singoli job.

**Esercizio 7.24.** ■ Siano dati 6 job, caratterizzati dai seguenti tempi di processamento $p_j$:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 5 | 11 | 2 | 3 | 5 | 4 |

1. Risolvere il problema di scheduling su 3 macchine parallele e identiche (con possibilità di preemption sui job), con l'obiettivo di minimizzare il massimo tempo di completamento $c_{\max}$ (makespan);

2. determinare i tempi di completamento dei singoli job.

**Esercizio 7.25.** ■ Siano dati 6 job, caratterizzati dai seguenti tempi di processamento $p_j$:

| Job | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_j$ | 6 | 7 | 3 | 5 | 2 | 13 |

1. Risolvere il problema di scheduling su 3 macchine parallele e identiche (con possibilità di preemption sui job), con l'obiettivo di minimizzare il massimo tempo di completamento $c_{\max}$ (makespan);

2. determinare i tempi di completamento dei singoli job.

## 7.5 Flow shop su due macchine: minimizzare il makespan

**Esercizio 7.26.** ★ Siano dati 6 job caratterizzati dai seguenti tempi di processamento su 2 macchine diverse:

| Job | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Macchina 1 | $p_{1j}$ | 4 | 2 | 5 | 6 | 5 | 9 |
| Macchina 2 | $p_{2j}$ | 7 | 3 | 8 | 2 | 1 | 3 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo del problema di flow shop, con l'obiettivo di minimizzare il makespan $c_{\max}$ (massimo tempo di completamento) e nell'ipotesi che ciascun job debba essere processato prima dalla macchina 1 e poi dalla macchina 2;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Risoluzione.** Indichiamo con $p_{ij}$ il tempo di processamento del job $j$ sulla macchina $i$, con $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3, 4, 5$ (valori riportati in tabella).

Per determinare lo scheduling ottimo, si calcola il minimo fra tutti i tempi di processamento. Se tale minimo è ottenuto in corrispondenza della prima macchina, allora il corrispondente job è messo in testa alla sequenza ottima; se invece tale minimo si raggiunge in corrispondenza della seconda macchina, allora il corrispondente job viene messo in coda alla sequenza. Dopodichè si itera la procedura fino alla'allocazione di tutti i job.

Calcoliamo quindi il minimo valore di tutti i tempi di processamento: esso è pari a $p_{25} = 1$, in corrispondenza cioè della macchina 2 e del job 5. Poichè tale minimo è raggiunto in corrispondenza della seconda macchina, il job 5 viene messo in coda alla sequenza[2]. Abbiamo quindi

$$\pi^* = \{\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot, 5\}.$$

Ripetiamo la procedura, ignorando il job 5 che è stato già allocato. Il minimo dei tempi di processamento è

$$p_{12} = p_{24} = 2.$$

Poichè tale minimo è raggiunto dal job 2 in corrispondenza della macchina 1, e dal job 4 in corrispondenza della seconda macchina, allora il job 2 viene messo in testa alla sequenza e il job 4 in coda subito prima del job 5. Quindi

$$\pi^* = \{2, \cdot, \cdot, \cdot, 4, 5\}.$$

Continuando si ha che il minimo fra i tempi di processamento è $p_{26} = 3$. Quindi il job 6 viene inserito in coda subito prima del job 4, cioè

$$\pi^* = \{2, \cdot, \cdot, 6, 4, 5\}.$$

[2]Se tale minimo fosse stato raggiunto in corrispondenza della prima macchina, il job 5 sarebbe stato messo in testa alla sequenza.

Rimangono da sistemare i job 1 e 3. Calcolando il minimo dei tempi di processamento relativi ai job 1 e 3, otteniamo che tale minimo è pari a $p_{11} = 4$. Di conseguenza, il job 1 viene messo in testa alla sequenza, che ora diventa

$$\pi^* = \{2, 1, \cdot, 6, 4, 5\}.$$

Rimane da inserire solo il job 3 che viene messo nell'unica posizione rimasta vuota, cioè in terza posizione. Quindi la sequenza ottima finale è

$$\pi^* = \{2, 1, 3, 6, 4, 5\}.$$

Il calcolo del valore ottimo $c^*_{\max}$ di funzione obiettivo è ricostruibile dalla figura 7.8, tenendo conto che tutti i job devono seguire l'ordine stabilito dalla sequenza ottima $\pi^*$, sia sulla prima che sulla seconda macchina. Inoltre essi devono essere processati prima dalla macchina 1 e poi dalla macchina 2 e mai contemporaneamente da entrambe le macchine.

Dalla figura 7.8 si evince che $c^*_{\max} = c_5 = 32$.

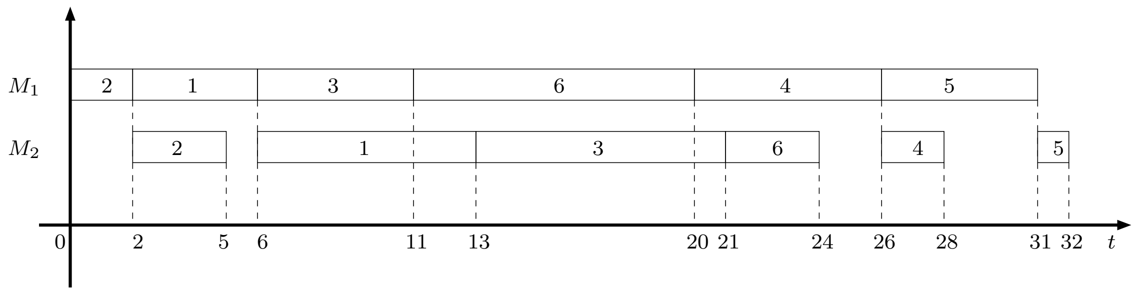


Figura 7.8: Scheduling ottimo (esercizio 7.26)

**Esercizio 7.27.** ■ Siano dati 6 job caratterizzati dai seguenti tempi di processamento su 2 macchine diverse:

| Job | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Macchina 1 | $p_{1j}$ | 4 | 1 | 5 | 6 | 5 | 2 |
| Macchina 2 | $p_{2j}$ | 3 | 4 | 1 | 2 | 5 | 3 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo del problema di flow shop, con l'obiettivo di minimizzare il makespan $c_{\max}$ (massimo tempo di completamento) e nell'ipotesi che ciascun job debba essere processato prima dalla macchina 1 e poi dalla macchina 2;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.28.** ■ Siano dati 6 job caratterizzati dai seguenti tempi di processamento su 2 macchine diverse:

| Job | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Macchina 1 | $p_{1j}$ | 6 | 1 | 3 | 7 | 3 | 6 |
| Macchina 2 | $p_{2j}$ | 2 | 5 | 1 | 4 | 1 | 3 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo del problema di flow shop, con l'obiettivo di minimizzare il makespan $c_{\max}$ (massimo tempo di completamento) e nell'ipotesi che ciascun job debba essere processato prima dalla macchina 1 e poi dalla macchina 2;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.29.** ■ Siano dati 6 job caratterizzati dai seguenti tempi di processamento su 2 macchine diverse:

| Job | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Macchina 1 | $p_{1j}$ | 3 | 6 | 5 | 1 | 5 | 2 |
| Macchina 2 | $p_{2j}$ | 7 | 2 | 1 | 4 | 3 | 8 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo del problema di flow shop, con l'obiettivo di minimizzare il makespan $c_{\max}$ (massimo tempo di completamento) e nell'ipotesi che ciascun job debba essere processato prima dalla macchina 1 e poi dalla macchina 2;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.30.** ■ Siano dati 6 job caratterizzati dai seguenti tempi di processamento su 2 macchine diverse:

| Job | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Macchina 1 | $p_{1j}$ | 1 | 7 | 4 | 5 | 2 | 3 |
| Macchina 2 | $p_{2j}$ | 3 | 6 | 2 | 4 | 5 | 1 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo del problema di flow shop, con l'obiettivo di minimizzare il makespan $c_{\max}$ (massimo tempo di completamento) e nell'ipotesi che ciascun job debba essere processato prima dalla macchina 1 e poi dalla macchina 2;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.31.** ■ Un reparto ospedaliero del tipo "day hospital" opera due tipi distinti di intervento: visite specialistiche, eseguite da un'unica equipe, ed esami TAC presso l'unica unità TAC disponibile. In particolare, i pazienti, inviati per la prima volta in day hospital dal medico di base, devono prima sottoporsi a visita specialistica e poi ad esame TAC. Si supponga che in un dato giorno siano prenotati, per la prima volta in day hospital, i seguenti pazienti, caratterizzati dai seguenti tempi (espressi in minuti e legati, evidentemente, alla particolare visita specialistica ed al particolare esame TAC):

| Paziente | Visita | TAC |
|---|---|---|
| Davide | 30 | 40 |
| Giovanna | 20 | 15 |
| Roberto | 25 | 20 |
| Antonio | 30 | 35 |
| Maria | 40 | 35 |
| Federico | 30 | 40 |
| Barbara | 15 | 30 |

Programmare le attività in modo da minimizzare il tempo di completamento di tutto il programma giornaliero. Nell'ipotesi che tutti i pazienti siano presenti all'inizio delle operazioni ed abbandonino l'ospedale appena completati i propri accertamenti, valutare il tempo medio trascorso da ciascun paziente in ospedale.

## 7.6 Job shop su due macchine: minimizzare il makespan

**Esercizio 7.32.** ★ Siano dati 7 job caratterizzati dai seguenti tempi di processamento su 2 macchine diverse:

| Job | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Macchina 1 | $p_{1j}$ | 2 | 3 | 1 | 4 | 2 | 3 | 5 |
| Macchina 2 | $p_{2j}$ | 5 | 4 | 6 | 1 | 4 | 2 | 1 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo del problema di job shop, con l'obiettivo di minimizzare il makespan $c_{\max}$ (massimo tempo di completamento) e sapendo che
   - i job 1,2,3 e 4 devono essere processati prima dalla macchina 1 e poi dalla macchina 2;
   - i job 5,6 e 7 devono essere processati prima dalla macchina 2 e poi dalla macchina 1;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Risoluzione.** Indichiamo con $J_{12}$ l'insieme dei job che devono essere processati prima dalla macchina 1 e poi dalla macchina 2, e con $J_{21}$ l'insieme dei job che devono essere processati prima dalla macchina 2 e poi dalla macchina 1. In tal caso abbiamo:

$$J_{12} = \{1, 2, 3, 4\} \quad \text{e} \quad J_{21} = \{5, 6, 7\}.$$

Lo scheduling ottimo è facilmente ottenibile risolvendo separatamente due problemi di flow shop: il primo relativamente all'insieme $J_{12}$ e il secondo relativamente all'insieme $J_{21}$.

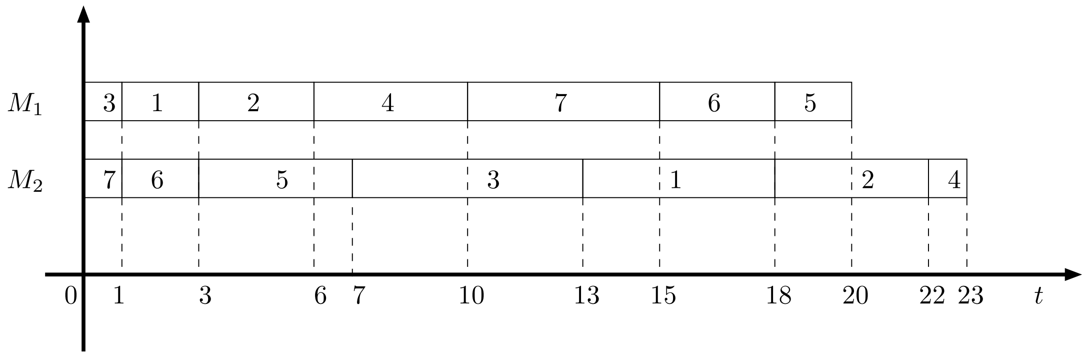


Figura 7.9: Scheduling ottimo (esercizio 7.32)

In particolare, risolvendo il problema di flow shop sull'insieme $J_{12}$, otteniamo la sequenza $\pi^*_{12} = \{3, 1, 2, 4\}$; viceversa, risolvendo il problema di flow shop sull'insieme $J_{21}$, otteniamo la sequenza $\pi^*_{21} = \{7, 6, 5\}$.

A questo punto, lo scheduling ottimo del problema di job shop si ottiene processando sulla macchina 1 prima i job dell'insieme $J_{12}$, secondo l'ordine definito dalla sequenza $\pi^*_{12}$, e poi quelli dell'insieme $J_{21}$ secondo l'ordine definito dalla sequenza $\pi^*_{21}$.

Viceversa, sulla macchina 2 vengono processati prima i job dell'insieme $J_{21}$, secondo l'ordine definito dalla sequenza $\pi^*_{21}$, e poi quelli dell'insieme $J_{12}$ secondo l'ordine definito dalla sequenza $\pi^*_{12}$. Otteniamo così la soluzione ottima riportata in figura 7.9, con $c^*_{\max} = 23$.

**Esercizio 7.33.** ■ Siano dati 8 job caratterizzati dai seguenti tempi di processamento su 2 macchine diverse:

| Job | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Macchina 1 | $p_{1j}$ | 3 | 1 | 6 | 2 | 3 | 2 | 5 | 1 |
| Macchina 2 | $p_{2j}$ | 1 | 4 | 2 | 5 | 6 | 1 | 4 | 3 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo del problema di job shop, con l'obiettivo di minimizzare il makespan $c_{\max}$ (massimo tempo di completamento) e sapendo che
   - i job 1,2,3 e 4 devono essere processati prima dalla macchina 1 e poi dalla macchina 2;
   - i job 5,6,7 e 8 devono essere processati prima dalla macchina 2 e poi dalla macchina 1;

2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

**Esercizio 7.34.** ■ Siano dati 6 job caratterizzati dai seguenti tempi di processamento su 2 macchine diverse:

| Job | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Macchina 1 | $p_{1j}$ | 2 | 4 | 5 | 4 | 2 | 1 |
| Macchina 2 | $p_{2j}$ | 1 | 3 | 2 | 1 | 5 | 6 |

1. Determinare un sequenziamento ottimo del problema di job shop, con l'obiettivo di minimizzare il makespan $c_{\max}$ (massimo tempo di completamento) e sapendo che
   - i job 1, 2 e 3 devono essere processati prima dalla macchina 1 e poi dalla macchina 2;
   - i job 4,5 e 6 devono essere processati prima dalla macchina 2 e poi dalla macchina 1;
2. determinare il valore ottimo di funzione obiettivo.

# Capitolo 8

# Il Problema di Set Covering

## 8.1 L'algoritmo di Chvátal

**Esercizio 8.1.** ★ Dati gli insiemi $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sia $SC$ il seguente problema di set covering:

$$SC \begin{cases} \min\limits_{x} z = & c^T x \\ & Ax \geq e \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad j \in J \end{cases},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [22 \quad 30 \quad 7 \quad 9 \quad 12 \quad 18] \quad \text{e} \quad e^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1].$$

1. Determinare una soluzione ammissibile per $SC$ applicando l'algoritmo di Chvátal;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Risoluzione.** L'algoritmo di Chvátal parte con la soluzione inammissibile $\bar{x} = 0$ e procede calcolando, a ogni iterazione e per ogni sottoinsieme $P_j \subseteq I$, con $j \in J$, il costo unitario di copertura espresso dalla seguente formula:

$$v_j = \frac{c_j}{\sum\limits_{i \in I} a_{ij}}.$$

Infine, una volta calcolato

$$v_k = \min_{j \in J} v_j,$$

si pone $\bar{x}_k = 1$ e si itera la procedura lasciando in $I$ gli elementi ancora da ricoprire e aggiornando l'insieme $J$ corrispondente ai sottoinsiemi $P_j$ ancora disponibili.

Inizialmente quindi si pone $\bar{x}^T = [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]$. Alla prima interazione abbiamo:

$$v_1 = 22/3, \quad v_2 = 30/3, \quad v_3 = 7/3,$$

$$v_4 = 9/2, \quad v_5 = 12/2, \quad v_6 = 18/2.$$

Poichè il minimo di questi rapporti si raggiunge in corrispondenza di $v_3$, il sottoinsieme $P_3$ sembrerebbe quello più conveniente, per cui si pone:

$$\bar{x}_3 = 1; \quad I = \{1, 4, 5, 7\}; \quad J = \{1, 2, 4, 5, 6\}.$$

Alla seconda interazione abbiamo:

$$v_1 = 22/3, \quad v_2 = 30/2, \quad v_4 = 9/0,$$

$$v_5 = 12/2, \quad v_6 = 18/2.$$

Il minimo di questi rapporti si raggiunge in corrispondenza di $v_5$, per cui si pone:

$$\bar{x}_5 = 1; \quad I = \{1, 4\}; \quad J = \{1, 2, 4, 6\}.$$

Alla terza interazione abbiamo:

$$v_1 = 22/2, \quad v_2 = 30/1, \quad v_4 = 9/0, \quad v_6 = 18/1.$$

Il minimo si ha in corrispondenza di $v_1$, per cui si pone:

$$\bar{x}_1 = 1; \quad I = \emptyset; \quad J = \{2, 4, 6\}.$$

Poichè l'insieme $I$ è vuoto, vuol dire che tutti i suoi elementi sono stati ricoperti, per cui l'algoritmo si arresta fornendo per $SC$ la seguente soluzione ammissibile:

$$\bar{x}^T = [1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0] \quad \text{con} \quad \bar{z} = 22 + 7 + 12 = 41.$$

Volendo calcolare un upper bound sull'errore commesso, basta calcolare la quantità

$$H(d) = \sum_{j=1}^{d} \frac{1}{j},$$

dove $d$ è la cardinalità dell'insieme più grande fra i sottoinsiemi $P_j$, con $j \in J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. In tal caso $d = 3$, per cui $H(d) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$. Dalla teoria sappiamo che:

$$\mathit{errore} \leq H(d) - 1 = \frac{11}{6} - 1 = \frac{5}{6} = 83,33\%.$$

Ricordiamo infine che la scelta $\bar{x}_3 = 1$ era comunque una scelta obbligata dell'algoritmo, in quanto l'elemento 2 può essere ricoperto solo dal sottoinsieme $P_3$. Questa operazione ridurrebbe la dimensione dell'istanza, in quanto porterebbe alla cancellazione di una colonna (quella corrispondente alla variabile $x_3$) e di una riga (quella corrispondente all'elemento 2).

**Esercizio 8.2.** ■ Dati gli insiemi $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, sia $SC$ il seguente problema di set covering:

$$SC \begin{cases} \min\limits_{x} z = & c^T x \\ & Ax \geq e \\ & x_j \in \{0,1\} \quad j \in J \end{cases},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [47 \ \ 27 \ \ 30 \ \ 20 \ \ 40 \ \ 45 \ \ 60 \ \ 60 \ \ 22] \quad \text{e} \quad e^T = [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1].$$

1. Determinare una soluzione ammissibile per $SC$ applicando l'algoritmo di Chvátal;

2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Esercizio 8.3.** ■ Dati gli insiemi $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, sia $SC$ il seguente problema di set covering:

$$SC \begin{cases} \min\limits_{x} z = & c^T x \\ & Ax \geq e \\ & x_j \in \{0,1\} \quad j \in J \end{cases},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [7 \ \ 9 \ \ 15 \ \ 2 \ \ 5 \ \ 7 \ \ 20] \quad \text{e} \quad e^T = [1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1].$$

1. Determinare una soluzione ammissibile per $SC$ applicando l'algoritmo di Chvátal;

2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Esercizio 8.4.** ■ Dati gli insiemi $I = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ e $J = \{1,2,3,4,5,6\}$, sia $SC$ il seguente problema di set covering:

$$SC \begin{cases} \min\limits_{x} z = & c^T x \\ & Ax \geq e \\ & x_j \in \{0,1\} \quad j \in J \end{cases},$$

con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$c^T = [9 \;\; 15 \;\; 7 \;\; 4 \;\; 21 \;\; 10] \quad \text{e} \quad e^T = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1].$$

1. Determinare una soluzione ammissibile per $SC$ applicando l'algoritmo di Chvátal;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

## 8.2 L'algoritmo di aggiustamento dei moltiplicatori

**Esercizio 8.5.** ★ Sia dato il problema di set covering definito nell'esercizio 8.1.

1. Determinare una soluzione ammissibile per $SC$ applicando l'algoritmo di aggiustamento dei moltiplicatori;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima;
3. confrontare la soluzione ottenuta con quella fornita dall'algoritmo di Chvátal nell'esercizio 8.1.

**Risoluzione.** L'algoritmo viene inizializzato ponendo $\bar{\lambda} = 0$. Di conseguenza, indicando con $A_j$, con $j \in J$, la colonna $j$-esima della matrice $A$, poichè i costi ridotti $\hat{c}_j$ sono calcolabili come $\hat{c}_j = c_j - A_j^T \bar{\lambda}$, otteniamo $\hat{c} = c$. Ricordiamo inoltre che, fissato $\bar{\lambda}$, una soluzione ottima $\bar{x}$ del rilassato lagrangiano è cosí calcolabile:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se } \hat{c}_j \leq 0 \\ 0 & \text{se } \hat{c}_j > 0. \end{cases}$$

Indicando con $z^*_{RL}(\bar{\lambda})$ il valore ottimo di funzione obiettivo del rilassato lagrangiano, poichè ogni elemento del vettore $\hat{c}$ è strettamente positivo, si ottiene $\bar{x} = 0$ e di conseguenza, poichè $\bar{\lambda} = 0$, si ha $z^*_{RL}(\bar{\lambda}) = 0$. La soluzione $\bar{x} = 0$ non è ammissibile, perchè tutti i vincoli del problema sono violati.

Indicando con $h$ l'indice corrispondente ad un qualsiasi vincolo violato, iniziamo la prima iterazione dell'algoritmo. In particolare, scegliendo $h = 1$ e indicando con $J_h$ l'insieme dei sottoinsiemi di $I$ che possono ricoprire l'elemento $h$, abbiamo:

$$J_1 = \{1, 6\},$$

da cui

$$\bar{\delta} = \min\{\hat{c}_1, \hat{c}_6\} = \min\{\hat{2}2, \hat{1}8\} = 18 = \hat{c}_6.$$

A questo punto, il moltiplicatore $\bar{\lambda}_h = \bar{\lambda}_1$ assume valore pari a $\bar{\delta}$ (tutti gli altri rimangono invariati), per cui:

$$\bar{\lambda}^T = [18 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0].$$

L'aggiornamento dei costi ridotti è facilmente ottenibile con la seguente formula:

$$\hat{c}_j := \begin{cases} \hat{c}_j - \bar{\delta} & \text{se } j \in J_h \\ \hat{c}_j & \text{se } j \notin J_h. \end{cases}$$

Di conseguenza otteniamo:

$$\hat{c}_1 = 22 - 18 = 4; \quad \hat{c}_2 = 30; \quad \hat{c}_3 = 7;$$

$$\hat{c}_4 = 9; \quad \hat{c}_5 = 12; \quad \hat{c}_6 = 18 - 18 = 0.$$

Tenendo conto dei nuovi costi ridotti, la soluzione corrente diventa:

$$\bar{x}^T = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1],$$

con $z^*_{RL}(\bar{\lambda}) := z^*_{RL}(\bar{\lambda}) + \bar{\delta} = 0 + 18$.

La soluzione $\bar{x}$ non è ancora ammissibile. Scegliamo, fra i vincoli violati, il vincolo 2 e poniamo quindi $h = 2$. Otteniamo:

$$J_2 = \{3\},$$

da cui

$$\bar{\delta} = \min\{\hat{c}_3\} = \hat{c}_3 = 7.$$

Di conseguenza

$$\bar{\lambda}^T = [18 \;\; 7 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0].$$

I nuovi costi ridotti sono:

$$\hat{c}_1 = 4; \quad \hat{c}_2 = 30; \quad \hat{c}_3 = 7 - 7 = 0;$$

$$\hat{c}_4 = 9; \quad \hat{c}_5 = 12; \quad \hat{c}_6 = 0.$$

Tenendo conto dei nuovi costi ridotti, la soluzione corrente diventa:

$$\bar{x}^T = [0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1],$$

con $z^*_{RL}(\bar{\lambda}) = 18 + 7 = 25$. Poichè neanche questa volta $\bar{x}$ è ammissibile, passiamo alla terza iterazione.

Scegliamo, fra i vincoli violati, il vincolo 4 e poniamo quindi $h = 4$. Otteniamo:

$$J_4 = \{1, 2\},$$

da cui

$$\bar{\delta} = \min\{\hat{c}_1, \hat{c}_2\} = \min\{4, 30\} = 4.$$

Di conseguenza

$$\bar{\lambda}^T = [18 \;\; 7 \;\; 0 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0].$$

I nuovi costi ridotti sono:

$$\hat{c}_1 = 4 - 4 = 0; \quad \hat{c}_2 = 30 - 4 = 26; \quad \hat{c}_3 = 0;$$

$$\hat{c}_4 = 9; \quad \hat{c}_5 = 12; \quad \hat{c}_6 = 0.$$

Tenendo conto dei nuovi costi ridotti, la soluzione corrente diventa:

$$\bar{x}^T = [1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1],$$

con $z^*_{RL}(\bar{\lambda}) = 25 + 4 = 29$. Questa volta il punto $\bar{x}$ è ammissibile per $SC$ e quindi l'algoritmo termina, fornendo come soluzione ammissibile il punto

$$\bar{x}^T = [1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1] \quad \text{con} \quad \bar{z} = 22 + 7 + 18 = 47.$$

Un upper bound sull'errore commesso è fornito dalla seguente formula:

$$errore \leq \frac{\bar{z} - z^*_{RL}(\bar{\lambda})}{z^*_{RL}(\bar{\lambda})} = \frac{47 - 29}{29} = 62,07\%.$$

Notiamo che, nel caso di questo esercizio, la soluzione fornita dall'algoritmo di Chvátal (esercizio 8.1, in cui si aveva $\bar{z} = 41$) è migliore di quella ottenuta con l'algoritmo di aggiustamento dei moltiplicatori; dall'altro lato però quest'ultimo ha fornito un lower bound che potrebbe essere utile a raffinare la stima dell'errore in corrispondenza della soluzione fornita dall'algoritmo di Chvátal. Otteniamo:

$$errore \leq \frac{\bar{z} - z^*_{RL}(\bar{\lambda})}{z^*_{RL}(\bar{\lambda})} = \frac{41 - 29}{29} = 41,38\%.$$

Tale stima è più accurata rispetto a quella determinata nell'esercizio 8.1.

**Esercizio 8.6.** ■ Sia dato il problema di set covering definito nell'esercizio 8.2.

1. Determinare una soluzione ammissibile per $SC$ applicando l'algoritmo di aggiustamento dei moltiplicatori;

2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Esercizio 8.7.** ■ Sia dato il problema di set covering definito nell'esercizio 8.3.

1. Determinare una soluzione ammissibile per $SC$ applicando l'algoritmo di aggiustamento dei moltiplicatori;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

**Esercizio 8.8.** ■ Sia dato il problema di set covering definito nell'esercizio 8.4.

1. Determinare una soluzione ammissibile per $SC$ applicando l'algoritmo di aggiustamento dei moltiplicatori;
2. determinare un upper bound sull'errore commesso rispetto al calcolo di una soluzione ottima.

# Parte II

# SOLUZIONI

# Appendice 1

# Formulazione di Problemi Decisionali

- **1.7**

  - Variabili decisionali:
    $x_p$ = etti di pasta consumati giornalmente; $x_c$ = etti di carne consumati giornalmente; $x_v$ = etti di verdura consumati giornalmente; $x_f$ = etti di formaggio consumati giornalmente;
  - funzione obiettivo:

$$\min_x z = 0,1x_p + 0,9x_c + 0,08x_v + 1,2x_f;$$

  - vincoli:

$$\begin{array}{l} 9,9x_p + 20,8x_c + 2x_v + 22x_f \geq 70 \\ 1,2x_p + 1,1x_c + 0,2x_v + 26x_f \geq 50 \\ 75,3x_p + 4x_v \geq 250 \\ x_v \leq 5 \\ x_p, x_c, x_v, x_f \geq 0 \end{array}$$

- **1.8**

  - Variabili decisionali:
    $x_i$ = numero di infermieri che iniziano a lavorare nel giorno $i$ (con $i = 1, \ldots, 7$). Adottiamo la seguente convenzione: l'indice $i = 1$ corrisponde al lunedì, l'indice $i = 2$ corrisponde al martedì, ..., l'indice $i = 7$ corrisponde alla domenica;
  - funzione obiettivo:

$$\min_x z = 5 \cdot 50x_1 + (4 \cdot 50 + 75)x_2 + (3 \cdot 50 + 75 + 85)x_3 + \ldots + (4 \cdot 50 + 85)x_7;$$

- vincoli:

$$\begin{array}{l} x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 28 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geq 18 \\ x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geq 20 \\ x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 26 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 22 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 13 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 7 \\ x_i \text{ int} \quad i = 1, \ldots, 7 \end{array}$$

- **1.9**
  - Variabili decisionali:
    $x_{ij} \in \{0,1\}$, col seguente significato: $x_{ij} = 1$, se l'impianto $i$ è utilizzato per produrre la tipologia $j$ di prodotto (con $i = 1,2,3$ e $j = g,p$); $x_{ij} = 0$ altrimenti. Adottiamo la seguente convenzione: l'indice $j = g$ corrisponde alla tipologia "giacche", mentre l'indice $j = p$ corrisponde alla tipologia "pantaloni";
  - funzione obiettivo:

$$\min_x z = 500x_{1g} + 400x_{2g} + 350x_{3g} + 450x_{1p} + 240x_{2p} + 300x_{3p};$$

  - vincoli:

$$\begin{array}{l} 3.000x_{1g} + 4.000x_{2g} + 5.000x_{3g} \geq 6.000 \\ 5.000x_{1p} + 2.000x_{2p} + 3.000x_{3p} \geq 7.000 \\ x_{ij} \in \{0,1\} \quad i = 1,2,3 \quad j = g,p \end{array}$$

- **1.10**
  - Variabili decisionali:
    $x_i \in \{0,1\}$, col seguente significato: $x_i = 1$, se la filiale $i$ viene attivata (con $i = A, \ldots, I$); $x_i = 0$ altrimenti;
  - funzione obiettivo:

$$\max_x z = 300x_A + 100x_B + \ldots + 400x_I;$$

  - vincoli:

$$\begin{array}{l} 50x_A + 40x_B + \ldots + 30x_I \leq 200 \\ x_A + x_C + x_I \geq 2 \\ x_E + x_G \geq 1 \\ x_B + x_F + x_H \leq 2 \\ x_i \in \{0,1\} \quad i = A, \ldots, I \end{array}$$

- **1.11**
  - Variabili decisionali:
    $x_i \in \{0,1\}$, col seguente significato: $x_i = 1$, se lo stabilimento $i$ viene riattrezzato (con $i = A, \ldots, G$); $x_i = 0$ altrimenti;

- funzione obiettivo:

$$\min_x z = 30x_A + 40x_B + \ldots + 20x_G;$$

- vincoli:

$$\begin{array}{l} x_A + x_B + \ldots + x_G \geq 3 \\ 4.000x_A + 7.000x_B + \ldots + 3.500x_G \geq 10.000 \\ x_i \in \{0,1\} \quad i = A, \ldots, G \end{array}$$

- **1.12**
  - Variabili decisionali:
    $x_l$ = numero di ettari di terreno dedicati annualmente alla produzione di lattuga;
    $x_p$ = numero di ettari di terreno dedicati annualmente alla produzione di pomodoro;
  - funzione obiettivo:

$$\max_x z = 100 \cdot 20x_l + 150 \cdot 30x_p;$$

  - vincoli:

$$\begin{array}{l} 20x_l \geq 45 \\ 30x_p \geq 50 \\ 18x_l + 24x_p \leq 100 \\ x_l, x_p \geq 0 \end{array}$$

- **1.13**
  - Variabili decisionali:
    $x_i$ = numero di cucine di tipo $i$ prodotte giornalmente (con $i = A, B, C$);
  - funzione obiettivo:

$$\max_x z = (4.000 - 1.500)x_A + (7.500 - 2.500)x_B + (5.000 - 2.000)x_C - 150 - 125;$$

  - vincoli:

$$\begin{array}{l} 24x_A + 27x_B + 23x_C \leq 800 \\ x_A \geq 4 \\ x_B \geq 5 \\ x_C \geq 6 \\ 20x_A + 30x_B + 25x_C \leq 20 \cdot 60 \\ 10x_A + 15x_B + 10x_C \leq 18 \cdot 60 \\ 8x_A + 12x_B + 15x_C \leq 22 \cdot 60 \\ x_A, x_B, x_C \text{ int} \end{array}$$

- **1.15**
  - Variabili decisionali:
    $x_{ij}$ = quantità di computer trasportati dal magazzino $M_i$ al punto di vendita $P_j$ (con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2, 3, 4$);

– funzione obiettivo:

$$\min_x \max \left\{ \begin{array}{c} 9x_{11} + 7x_{21} + 10x_{31} + 6x_{41}; \\ 10x_{12} + 3x_{22} + 5x_{32} + 5x_{42}; \\ 8x_{13} + 4x_{23} + 9x_{33} + 7x_{43}; \\ 6x_{14} + 7x_{24} + 4x_{34} + 12x_{44} \end{array} \right\}$$

– vincoli:

$$\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 200 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 100 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 140 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 260 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 120 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 170 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{44} \geq 190 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \geq 200 \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \quad j = 1,2,3,4 \\ x_{ij} \text{ int} \quad i = 1,2,3,4 \quad j = 1,2,3,4 \end{array}$$

Poichè la funzione obiettivo non è lineare, il modello può essere linearizzato con l'aggiunta di una variabile ausiliaria $v$. Il modello finale che si ottiene è il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min\limits_{x,v} & z = v \\ & v \geq 9x_{11} + 7x_{21} + 10x_{31} + 6x_{41} \\ & v \geq 10x_{12} + 3x_{22} + 5x_{32} + 5x_{42} \\ & v \geq 8x_{13} + 4x_{23} + 9x_{33} + 7x_{43} \\ & v \geq 6x_{14} + 7x_{24} + 4x_{34} + 12x_{44} \\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 200 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 100 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 140 \\ & x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 260 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 120 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 170 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{44} \geq 190 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \geq 200 \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2,3,4 \quad j = 1,2,3,4 \\ & x_{ij} \text{ int} \quad i = 1,2,3,4 \quad j = 1,2,3,4 \end{array} \right.$$

- **1.16**

  – Variabili decisionali:
  $x_o$ = somma (in euro) investita in fondi obbligazionari; $x_b$ = somma (in euro) investita in fondi bilanciati; $x_a$ = somma (in euro) investita in fondi azionari;

  – funzione obiettivo:

$$\max_x z = 0,02x_o + 0,5x_b + 0,12x_a + 0,04(80.000 - x_0 - x_b - x_a);$$

– vincoli:

$$\begin{array}{l} x_o + x_b + x_a \leq 80.000 \\ x_o \leq 30.000 \\ x_b \leq 30.000 \\ x_a \leq 20.000 \\ x_o + x_b \geq 0,50(x_o + x_b + x_a) \\ x_o, x_b, x_a \geq 0 \end{array}$$

- **1.18**

– Variabili decisionali: $x_{ij}$ = barili di componente $i$ necessari per ottenere un barile di olio $j$, con $i = 1, 2, 3$ e $j = S, P, E$ .

– funzione obiettivo:

$$\begin{aligned} \max_x z = \; & 25(x_{1S} + x_{2S} + x_{3S}) + 15(x_{1P} + x_{2P} + x_{3P}) + 20(x_{1E} + x_{2E} + x_{3E}) \\ & -11(x_{1S} + x_{1P} + x_{1E}) - 9(x_{2S} + x_{2P} + x_{2E}) - 10(x_{3S} + x_{3P} + x_{3E}) \end{aligned}$$

– vincoli:

$$\begin{array}{l} x_{1S} + x_{1P} + x_{1E} \leq 10 \\ x_{2S} + x_{2P} + x_{2E} \leq 13 \\ x_{3S} + x_{3P} + x_{3E} \leq 15 \\ x_{1S} \geq 0,50(x_{1S} + x_{2S} + x_{3S}) \\ x_{2S} \leq 0,30(x_{1S} + x_{2S} + x_{3S}) \\ x_{2P} \geq 0,40(x_{1P} + x_{2P} + x_{3P}) \\ x_{3P} \leq 0,25(x_{1P} + x_{2P} + x_{3P}) \\ x_{3E} \geq 0,60(x_{1E} + x_{2E} + x_{3E}) \\ x_{1E} \leq 0,10(x_{1E} + x_{2E} + x_{3E}) \\ x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad j = S, P, E \end{array}$$

- **1.19**

– Variabili decisionali:

  * $x_{ij}$ = quantità di autovetture di tipo $j$ prodotte mensilmente nello stabilimento $i$, con $i = A, B, C, D$ e $j = 1, 2, 3, 4$. Adottiamo la seguente convenzione: l'indice $j = 1$ corrisponde al modello "berlina 3 porte", l'indice $j = 2$ corrisponde al modello "berlina 5 porte", l'indice $j = 3$ corrisponde al modello "station-wagon", l'indice $j = 4$ corrisponde al modello "monovolume";
  * $y_i \in \{0, 1\}$ $(i = A, B, C, D)$, col seguente significato: $y_i = 1$ se lo stabilimento $i$ è attivato, $y_i = 0$ altrimenti;

– funzione obiettivo:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} z \; & = (14.000 - 11.000)(x_{A1} + x_{B1}) + (16.000 - 12.000)(x_{A2} + x_{B2}) \\ & +(18.000 - 14.000)(x_{C3} + x_{D3}) + (17.000 - 13.000)(x_{C4} + x_{D4}) \end{aligned}$$

- vincoli:

$$
\begin{array}{l}
y_A + y_B = 1 \\
y_C + y_D = 1 \\
250y_A + 200y_B + 300y_C + 230y_D \le 500 \\
x_{A1} + x_{A2} \le 300y_A \\
x_{B1} + x_{B2} \le 220y_B \\
x_{C3} + x_{C4} \le 320y_C \\
x_{D3} + x_{D4} \le 200y_D \\
x_{A1} + x_{B1} \ge 50 \\
x_{A2} + x_{B2} \ge 50 \\
x_{C3} + x_{D3} \ge 50 \\
x_{C4} + x_{D4} \ge 50 \\
x_{ij} \ge 0 \quad i = A, B, C, D \quad j = 1, 2, 3, 4 \\
x_{ij} \text{ int} \quad i = A, B, C, D \quad j = 1, 2, 3, 4 \\
y_i \in \{0, 1\} \quad i = A, B, C, D
\end{array}
$$

- **1.20**
  - Variabili decisionali: $x_{ij} \in \{0, 1\}$, col seguente significato: $x_{ij} = 1$, se il comune $i$ è assegnato alla circoscrizione $C_j$, con $i = 1, \dots, 5$ e $j = 1, \dots, 4$; $x_{ij} = 0$ altrimenti. Per semplicità, adottiamo la seguente convenzione: l'indice 1 corrisponde al comune di Pizzo, l'indice 2 al comune di Rende, ..., l'indice 5 corrisponde al comune di Crotone;
  - funzione obiettivo:

$$
\min_x z = 7.200x_{11} + 5.000x_{12} + \ldots + 10.000x_{53} + 5.200x_{54};
$$

  - vincoli:

$$
\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, 5 \\
x_{51} + x_{53} = 1 \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 3, 4 \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{5} x_{i2} = 2 \\
x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 4
\end{array}
$$

- **1.22**
  - Variabili decisionali: $y_k \in \{0, 1\}$ $(k = 1, \dots, N)$, col seguente significato: $y_k = 1$ se si usa il furgone $k$, $y_k = 0$ altrimenti; $x_{ik} \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, N)$, col seguente significato: $x_{ik} = 1$ se la mensa $i$ è assegnata al furgone $k$; $x_{ik} = 0$ altrimenti;
  - funzione obiettivo:

$$
\min_{y,x} z = \sum_{k=1}^{N} y_k;
$$

– vincoli:

$$\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{n} x_{ik} w_i \le W y_k \quad k = 1, \dots, N \\
(x_{ik} + x_{jk} - 1) d_{ij} \le D \text{ per ogni } k = 1, \dots, N \text{ e per ogni coppia di mense } (i, j) \\
\sum_{k=1}^{N} x_{ik} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\
y_k \in \{0, 1\} \quad k = 1, \dots, N \\
x_{ik} \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, N.
\end{array}$$

- **1.23**

– Variabili decisionali: $x_{ij} \in \{0, 1\}$, col seguente significato: $x_{ij} = 1$ se l'equipaggio $E_i$ è assegnato al volo $j$, con $i = 1, 2, 3, 4$ e $j = 1, 2, 3, 4$; $x_{ij} = 0$ altrimenti. Per semplicità, adottiamo la seguente convenzione: l'indice $j = 1$ corrisponde al volo per Roma, l'indice $j = 2$ al volo per Milano, l'indice $j = 3$ corrisponde al volo per Venezia e l'indice $j = 4$ corrisponde al volo per Palermo;

– funzione obiettivo:

$$\min_x z = 1.500 x_{11} + 1.700 x_{12} + \dots + 1.400 x_{43} + 1.300 x_{44};$$

– vincoli:

$$\begin{array}{l}
\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, 3, 4 \\
\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, 3, 4 \\
x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2, 3, 4.
\end{array}$$

# Appendice 2

# Programmazione Lineare e Dualità

- **2.5**

  1. $x^{*T} = [7/2 \quad -7/2]$ con $z^* = -49/4$; 2. $x^{*T} = [-3/2 \quad 3/2]$ con $z^* = 3/2$; 3. $x^{*T} = [0 \quad -7/2]$ con $z^* = -21/2$; 4. $x^{*T} = [0 \quad -3/2]$ con $z^* = -3/2$ ; 5. problema inammissibile; 6. $x^{*T} = [3/2, \quad -3/2]$ con $z^* = -3$.

- **2.6**

  1. $x^{*T} = [7/2 \;\; 0]$ con $z^* = -7/2$; 2. $x^* = k[-7/2 \;\; 7/2] + (1-k)[0 \;\; 7/2]$ con $k \in [0, 1]$ e $z^* = 7/2$; 3. $x^{*T} = [0 \quad -3/2]$ con $z^* = -9/2$; 4. problema illimitato; 5. problema inammissibile; 6. $x^{*T} = [3/2 \;\; 3/2]$ con $z^* = 6$.

- **2.10**

  1. $\bar{x}$ è di base, ma non è ammissibile; 2. $x^* = \bar{x}$ con $z^* = 57/2$; 3. $\bar{x}$ è ammissibile, ma non di base; 4. $x^* = \bar{x}$ con $z^* = 15$; 5. $x^* = \bar{x}$ con $z^* = 10$; 6. $\bar{x}$ è ammissibile, ma non di base; 7. $x^* = \bar{x}$ con $z^* = -55/3$; 8. problema illimitato; 9. $\bar{x}$ è di base, ma non è ammissibile; 10. problema illimitato; 11. $x^{*T} = [1/2 \;\; 0 \;\; 0]$ con $z^* = 1/2$.

- **2.12**

  1. $x^{*T} = [0 \quad 1/2 \quad 0]$ con $z^* = -3/2$; 2. $x^{*T} = [4/9 \quad 0 \quad 0]$ con $z^* = 16/9$; 3. $x^{*T} = [0 \;\; 7/4 \;\; 0]$ con $z^* = -21/2$; 4. $x^{*T} = [0 \;\; 2 \;\; 0]$ con $z^* = -12$; 5. problema illimitato; 6. $x^{*T} = [0 \quad 46 \quad -57]$ con $z^* = -103$; 7. $x^{*T} = [-6/5 \quad 0 \quad 0]$ con $z^* = 18/5$; 8. problema illimitato; 9. problema illimitato; 10. $x^{*T} = [0 \;\; 0 \quad -8/3]$ con $z^* = -8/3$.

- **2.19**

  1. Problema illimitato; 2. problema inammissibile; 3. $x^{*T} = [1 \;\; 0 \;\; 1]$ con $z^* = -1$; 4. problema illimitato; 5. problema illimitato; 6. problema illimitato; 7. $x^{*T} = [6/41 \;\; 55/41 \;\; 0]$ con $z^* = 73/41$; 8. $x^{*T} = [0 \;\; 42/5 \;\; 9/5]$ con $z^* = -231/5$.

- **2.26**

  Esercizio 2.5:

1. $$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & 7\pi_1 & -7\pi_2 & -7\pi_3 & \\ & 2\pi_1 & -2\pi_2 & & = -1 \\ & -2\pi_1 & & +2\pi_3 & = 5/2 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases}, \quad \pi^{*T} = [0 \;\; 1/2 \;\; 5/4];$$

2. $$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & & 21\pi_2 & -7\pi_3 & \\ & \pi_1 & -8\pi_2 & & = 0 \\ & \pi_1 & +6\pi_2 & -2\pi_3 & = 1 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases}, \quad \pi^{*T} = [4/7 \;\; 1/14 \;\; 0];$$

3. $$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & 3\pi_1 & -7\pi_2 & -7\pi_3 & +3\pi_4 & \\ & -2\pi_1 & -2\pi_2 & +2\pi_3 & +2\pi_4 & = 3/2 \\ & -2\pi_1 & +2\pi_2 & +2\pi_3 & -2\pi_4 & = 3 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4 & \geq 0 \end{cases}, \quad \pi^{*T} = [0 \;\; 3/8 \;\; 9/8 \;\; 0];$$

4. $$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -3\pi_1 & -3\pi_2 & -3\pi_3 & \\ & -2\pi_1 & -2\pi_2 & +2\pi_3 & = -1/2 \\ & -2\pi_1 & +2\pi_2 & +2\pi_3 & = 1 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases}, \quad \pi^{*T} = [0 \;\; 3/8 \;\; 1/8];$$

5. $$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -\pi_1 & +\pi_2 & & \\ & \pi_1 & +\pi_2 & -\pi_3 & = 3 \\ & -\pi_1 & -\pi_2 & & \leq 1 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases}, \quad \text{problema illimitato;}$$

6. $$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & 3\pi_1 & +3\pi_2 & -15\pi_3 & -15\pi_4 & -3\pi_5 & \\ & 6\pi_1 & +6\pi_2 & -6\pi_3 & -6\pi_4 & & = 1 \\ & -4\pi_1 & +4\pi_2 & +4\pi_3 & -4\pi_4 & -2\pi_5 & = 3 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4, & \pi_5 & \geq 0 \end{cases}, \quad \pi^{*T} = [0 \;\; 11/24 \;\; 7/24 \;\; 0 \;\; 0].$$

Esercizio 2.6:

1. $$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & -7\pi_1 & +7\pi_2 & +7\pi_3 & \\ & -2\pi_1 & +2\pi_2 & & = -1 \\ & 2\pi_1 & & -2\pi_3 & = 5/2 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases}, \quad \pi^{*T} = [5/4 \;\; 3/4 \;\; 0];$$

2. $$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & & -21\pi_2 & +7\pi_3 & \\ & -\pi_1 & +8\pi_2 & & = 0 \\ & -\pi_1 & -6\pi_2 & +2\pi_3 & = 1 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases}, \quad \pi^{*T} = [0 \;\; 0 \;\; 1/2];$$

3. $$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & -3\pi_1 & +7\pi_2 & +7\pi_3 & -3\pi_4 & \\ & 2\pi_1 & +2\pi_2 & -2\pi_3 & -2\pi_4 & = 3/2 \\ & 2\pi_1 & -2\pi_2 & -2\pi_3 & +2\pi_4 & = 3 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4 & \geq 0 \end{cases}, \quad \pi^{*T} = [9/8 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 3/8];$$

4. $\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & 3\pi_1 & +3\pi_2 & +3\pi_3 & \\ & 2\pi_1 & +2\pi_2 & -2\pi_3 & = -1/2 \\ & 2\pi_1 & -2\pi_2 & -2\pi_3 & = 1 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases}$, problema inammissibile;

5. $\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & \pi_1 & -\pi_2 & & \\ & -\pi_1 & -\pi_2 & +\pi_3 & = 3 \\ & \pi_1 & +\pi_2 & & \geq 1 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases}$, problema illimitato;

6. $\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & -3\pi_1 & -3\pi_2 & +15\pi_3 & +15\pi_4 & +3\pi_5 & \\ & -6\pi_1 & -6\pi_2 & +6\pi_3 & +6\pi_4 & & = 1 \\ & 4\pi_1 & -4\pi_2 & -4\pi_3 & +4\pi_4 & +2\pi_5 & = 3 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3, & \pi_4, & \pi_5 & \geq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} \pi^{*T} = [\frac{7}{24} - \frac{k}{4} \;\; 0 \;\; 0 \;\; \frac{11}{24} - \frac{k}{4} \;\; k], \\ \text{con } 0 \leq k \leq 7/6; \end{cases}$

- **2.27**

1. $\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & 3\pi_1 & +16\pi_2 & \\ & 8\pi_1 & -5\pi_2 & = -1 \\ & \pi_1 & -2\pi_2 & \leq -1 \\ & -3\pi_1 & +4\pi_2 & \leq 1 \\ & \pi_1 & & \geq 0 \end{cases}$, problema inammissibile;

2. $\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & -3\pi_1 & +16\pi_2 & +7\pi_3 & \\ & 6\pi_1 & -5\pi_2 & +5\pi_3 & \geq -2 \\ & -\pi_1 & +2\pi_2 & +10\pi_3 & = -1 \\ & 3\pi_1 & +4\pi_2 & -\pi_3 & \geq 1 \\ & \pi_1, & & \pi_3 & \geq 0 \end{cases}$, problema illimitato;

3. $\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & 5\pi_1 & +3\pi_2 & +2\pi_3 & \\ & 3\pi_1 & +\pi_2 & +\pi_3 & \geq -2 \\ & 5\pi_1 & +3\pi_2 & +2\pi_3 & \geq -1 \\ & 2\pi_1 & +2\pi_2 & +\pi_3 & \geq 1 \end{cases}$, $\pi^{*T} = [-\frac{5}{4} - \frac{k}{4} \;\; \frac{7}{4} - \frac{k}{4} \;\; k]$, con $k \in \mathbb{R}$;

4. $\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & 5\pi_1 & +\pi_2 & +2\pi_3 & -2\pi_4 & \\ & \pi_1 & +\pi_2 & -\pi_3 & +7\pi_4 & \leq -2 \\ & 5\pi_1 & -\pi_2 & +5\pi_3 & -4\pi_4 & = -1 \\ & 2\pi_1 & +2\pi_2 & +7\pi_3 & +8\pi_4 & \leq 1 \\ & \pi_1, & \pi_2, & & \pi_4 & \geq 0 \end{cases}$, problema inammissibile;

5. $\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & -8\pi_1 & -3\pi_2 & -9\pi_3 & \\ & -\pi_1 & -9\pi_2 & -6\pi_3 & = 8 \\ & 5\pi_1 & -10\pi_2 & -4\pi_3 & \geq -10 \\ & -11\pi_1 & -4\pi_2 & +7\pi_3 & \geq 9 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases}$, problema inammissibile;

6. $$\begin{cases} \min_{\pi} w = & 13\pi_1 & +11\pi_2 & \\ & -16\pi_1 & -5\pi_2 & \geq 1 \\ & -5\pi_1 & +\pi_2 & \geq 1 \\ & 3\pi_1 & +\pi_2 & = 1 \\ & \pi_1 & & \geq 0 \end{cases}, \quad \text{problema inammissibile;}$$

7. $$\begin{cases} \max_{\pi} w = & 3\pi_1 & -6\pi_2 & +7\pi_3 & \\ & -7\pi_1 & -2\pi_2 & +2\pi_3 & = 3 \\ & 3\pi_1 & +\pi_2 & +5\pi_3 & \leq 1 \\ & 2\pi_1 & +3\pi_2 & -\pi_3 & \leq -1 \\ & & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases}, \quad \pi^{*T} = [-13/41 \quad 0 \quad 16/41];$$

8. $$\begin{cases} \max_{\pi} w = & -3\pi_1 & -\pi_2 & +9\pi_3 & \\ & -\pi_1 & -5\pi_2 & +2\pi_3 & \leq 4 \\ & -\pi_1 & +4\pi_2 & & \leq -7 \\ & 3\pi_1 & +\pi_2 & +5\pi_3 & \leq 7 \\ & \pi_1, & \pi_2 & & \geq 0 \end{cases}, \quad \pi^{*T} = [7 \quad 0 \quad -14/5].$$

- **2.28**

1. $$\begin{cases} \min_{\pi} w = & -3\pi_1 & +6\pi_2 & \\ & 8\pi_1 & +\pi_2 & \geq -3 \\ & -4\pi_1 & -\pi_2 & \geq -5 \\ & \pi_1 & +4\pi_2 & \geq 4 \\ & & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

2. $\pi^{*T} = [16/15 \quad 11/15]$.

- **2.29**

Nessuno dei due punti è ottimo.

- **2.31**

Vedi soluzione degli esercizi 2.5 e 2.6.

- **2.32**

$\hat{x}$ è una soluzione di base non ottima; $\bar{x}$ non è una soluzione di base, ma è ottima.

- **2.33**

Vedi soluzione dell'esercizio 2.26.

- **2.34**

Vedi soluzione dell'esercizio 2.12. Inoltre, i problemi duali (con rispettive soluzioni) sono i seguenti:

1. $\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -3\pi_1 & -2\pi_2 & \\ & -3\pi_1 & -6\pi_2 & \leq -4 \\ & 5\pi_1 & -4\pi_2 & \leq -3 \\ & -4\pi_1 & +5\pi_2 & \leq 7 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases}$ , $\pi^{*T} = [0 \;\; 3/4]$;

2. $\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & 7\pi_1 & +4\pi_2 & \\ & 3\pi_1 & +9\pi_2 & \geq 4 \\ & 4\pi_1 & -3\pi_2 & \geq -6 \\ & -5\pi_1 & +5\pi_2 & \geq 1 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases}$ , $\pi^{*T} = [0 \;\; 4/9]$;

3. $\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -7\pi_1 & -10\pi_2 & \\ & -\pi_1 & -2\pi_2 & \leq 8 \\ & -4\pi_1 & +\pi_2 & \leq -6 \\ & -8\pi_1 & -5\pi_2 & \leq 1 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases}$ , $\pi^{*T} = [3/2 \;\; 0]$;

4. $\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -8\pi_1 & -9\pi_2 & \\ & -6\pi_1 & -7\pi_2 & \leq 1 \\ & -4\pi_1 & +10\pi_2 & = -6 \\ & -3\pi_1 & -5\pi_2 & \leq 1 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases}$ , $\pi^{*T} = [3/2 \;\; 0]$;

5. $\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -8\pi_1 & -11\pi_2 & \\ & -6\pi_1 & -7\pi_2 & = 1 \\ & -4\pi_1 & -10\pi_2 & \leq -6 \\ & -3\pi_1 & -5\pi_2 & \leq 1 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases}$ , problema inammissibile;

6. $\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -13\pi_1 & -11\pi_2 & \\ & 6\pi_1 & -5\pi_2 & \leq -3 \\ & -4\pi_1 & +\pi_2 & \leq -1 \\ & -3\pi_1 & +\pi_2 & = 1 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases}$ , $\pi^{*T} = [2 \;\; 7]$;

7. $\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & 3\pi_1 & +6\pi_2 & \\ & 16\pi_1 & -5\pi_2 & = -3 \\ & 4\pi_1 & +4\pi_2 & \geq 1 \\ & 3\pi_1 & -\pi_2 & \geq -1 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases}$ , $\pi^{*T} = [0 \;\; 3/5]$;

8. $\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -3\pi_1 & -16\pi_2 & \\ & -6\pi_1 & +15\pi_2 & \leq 1 \\ & -\pi_1 & +2\pi_2 & \leq -1 \\ & 3\pi_1 & -4\pi_2 & = 1 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases}$ , problema inammissibile;

9. $$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & 4\pi_1 & +5\pi_2 & \\ & 8\pi_1 & +5\pi_2 & = 3 \\ & -3\pi_1 & -7\pi_2 & \geq 5 \\ & 2\pi_1 & -10\pi_2 & \geq -2 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases}, \quad \text{problema inammissibile;}$$

10. $$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -8\pi_1 & -15\pi_2 & \\ & -9\pi_1 & +5\pi_2 & \leq 7 \\ & 5\pi_1 & -2\pi_2 & \leq 9 \\ & 3\pi_1 & -9\pi_2 & = 1 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases}, \quad \pi^{*T} = [1/3 \quad 0].$$

- **2.35**

  Vedi soluzione dell'esercizio 2.27.

- **2.36**

  1. $x^{*T} = [7/4 \quad 3/4]$ con $z^* = 17/8$;
  2. $x^{*T} = [0 \quad 5/2]$ con $z^* = 5/4$;
  3. $$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & \pi_1 & +5\pi_2 & \\ & \pi_1 & +2\pi_2 & \geq 1 \\ & -\pi_1 & +2\pi_2 & \geq 1/2 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$
  4. $\pi^{*T} = [1/4 \quad 3/8]$.

- **2.37**

  1. $x^{*T} = [2 \quad 0]$ con $z^* = 1$;
  2. $$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & 2\pi_1 & +2\pi_2 & -2\pi_3 & \\ & \pi_1 & +\pi_2 & & \leq 1/2 \\ & -\pi_1 & +\pi_2 & -\pi_3 & \leq 1 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases};$$
  3. $\pi^{*T} = [k \quad \frac{1}{2} - k \quad 0]$ con $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$;
  4. $x^{*T} = [4 \quad 0]$ con $z^* = 2$.

- **2.38**

  1. $\hat{c}^T = [3/2 \quad 1/2] \geq 0$; $x^{*T} = [3/4 \quad 11/4]$ con $z^* = 19/8$;
  2. $x^{*T} = [3/4 \quad 11/4]$ con $z^* = 63/8$;

3.

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & 2\pi_1 & +7\pi_2 & \\ & -\pi_1 & +2\pi_2 & \geq -1/2 \\ & \pi_1 & +2\pi_2 & \geq 1 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

4. $\pi^{*T} = [3/4 \;\; 1/8]$.

- **2.39**

1. $x^{*T} = [0 \;\; 3/2]$ con $z^* = 3/2$;
2.

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & 3\pi_1 & +6\pi_2 & +5\pi_3 & \\ & -2\pi_1 & +2\pi_2 & +2\pi_3 & \geq -2 \\ & 2\pi_1 & +3\pi_2 & & \geq 1 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases};$$

3. $\pi^{*T} = [1/2 \;\; 0 \;\; 0]$;
4. $z^* = 1/2$.

- **2.40**

1. Problema illimitato;
2.

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & 6\pi_1 & +4\pi_2 & \\ & 3\pi_1 & +2\pi_2 & \geq 7 \\ & -5\pi_1 & +4\pi_2 & \geq -3 \\ & 4\pi_1 & -5\pi_2 & \geq 4 \\ & & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

3. problema inammissibile.

- **2.41**

1.

$$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & 4\pi_1 & +5\pi_2 & -7\pi_3 & \\ & 2\pi_1 & -4\pi_2 & +\pi_3 & = 2 \\ & -4\pi_1 & -8\pi_2 & +2\pi_3 & \leq -3 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases};$$

2. infatti la soluzione complementare $\hat{x}^T = [2 \;\; 0]$ non è ammissibile per $(P)$;
3. poichè $det(B) = 2$, allora al punto $\hat{\pi}$ corrisponde una soluzione di base;
4. problema illimitato;
5. problema inammissibile.

- **2.42**

1.

$$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -\pi_1 & +\pi_2 & \\ & 2\pi_1 & +3\pi_2 & \leq 3 \\ & -2\pi_1 & +\pi_2 & \leq 4 \\ & -\pi_1 & -\pi_2 & \leq 2 \\ & & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

2. $\pi^{*T} = [-9/8 \quad 7/4]$ con $w^* = 23/8$;
3. $x^{*T} = [1/8 \quad 5/8 \quad 0]$.

- **2.43**

1.

$$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -2\pi_1 & +\pi_2 & \\ & -2\pi_1 & +2\pi_2 & \leq 3 \\ & 2\pi_1 & +3\pi_2 & \leq 6 \\ & 2\pi_1 & & \leq 5 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

2. $\pi^{*T} = [0 \quad 3/2]$ con $w^* = 3/2$;
3. $x^{*T} = [1/2 \quad 0 \quad 0]$.

- **2.44**

1. Al punto $\hat{x}$ non corrisponde una soluzione di base;
2. $\bar{x} = [0 \quad 0 \quad 5/2]$ oppure $\bar{x} = [5/3 \quad 0 \quad 0]$;
3. $x^{*T} = [7/11 \quad 17/33 \quad 0]$ con $z^* = -8/33$
4.

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & 5\pi_1 & -\pi_2 & \\ & 3\pi_1 & -4\pi_2 & \geq -2 \\ & 6\pi_1 & +3\pi_2 & \geq 2 \\ & 2\pi_1 & -\pi_2 & \geq -4 \\ & & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

5. $\pi^{*T} = [2/33 \quad 6/11]$.

- **2.45**

1. $\bar{x}$ è D-ammissibile;
2. $x^{*T} = [1 \quad 0 \quad 0]$ con $z^* = -2$;
3.

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & \pi_1 & +2\pi_2 & \\ & -4\pi_1 & +2\pi_2 & \geq -2 \\ & 2\pi_1 & -3\pi_2 & \geq 2 \\ & -5\pi_1 & +3\pi_2 & \geq -4 \\ & \pi_1 & & \geq 0 \end{cases};$$

4. $\pi^{*T} = [0 \quad -1]$.

- **2.46**

1. $x^{*T} = [1/5 \;\; 11/10]$ con $z^* = 63/10$;
2. 

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & -2\pi_1 & +3\pi_2 & \\ & \pi_1 & +4\pi_2 & \geq 4 \\ & -2\pi_1 & +2\pi_2 & \geq 5 \\ & & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

3. $\pi^{*T} = [-6/5 \;\; 13/10]$;
4. $z^* = 89/10$.

- **2.47**

1. Problema illimitato;
2. 

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & & -4\pi_2 & \\ & 2\pi_1 & -4\pi_2 & \geq 4 \\ & -3\pi_1 & -3\pi_2 & \geq -3 \\ & \pi_1 & +2\pi_2 & \geq 7 \\ & & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

3. problema inammissibile.

- **2.48**

1. $x^{*T} = [-2 \;\; 2]$ con $z^* = -6$;
2. 

$$T^* = \begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 1/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5/3 & 6 \end{array};$$

3. 

$$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & 2\pi_1 & -2\pi_2 & \\ & -2\pi_1 & -\pi_2 & = 1 \\ & -\pi_1 & -2\pi_2 & \leq -2 \\ & & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

4. $\pi^{*T} = [-4/3 \;\; 5/3]$.

- **2.49**

1. $x^{*T} = [2/3 \;\; 4/3 \;\; 0]$ con $z^* = 5/3$;

2.

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & 2\pi_1 & +4\pi_2 & +2\pi_3 & \\ & -\pi_1 & & +\pi_3 & \geq 1/2 \\ & 2\pi_1 & +3\pi_2 & +\pi_3 & \geq 1 \\ & \pi_1 & -\pi_2 & & \geq 0 \\ & \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \geq 0 \end{cases};$$

3. $\pi^{*T}(k) = [k - \frac{1}{2} \;\; \frac{2}{3} - k \;\; k]$, con $\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{2}{3}$.

- **2.50**

1. $x^{*T} = [0 \;\; 3/5 \;\; 0]$ con $z^* = -12/5$;
2.

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & -2\pi_1 & -3\pi_2 & \\ & -2\pi_1 & -\pi_2 & \geq -3 \\ & -4\pi_1 & -5\pi_2 & \geq -4 \\ & \pi_1 & -4\pi_2 & \geq -6 \\ & \pi_1, & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

3. $\pi^{*T} = [0 \;\; 4/5]$.

- **2.51**

1. Poichè $det(B) = -2 \neq 0$, allora al punto $\bar{x}$ corrisponde una soluzione di base; inoltre poichè $\hat{c}^T = [2 \;\; 4] \geq 0$, $\bar{x}$ è superottima;
2. $x^{*T} = [1/3 \;\; 5/6 \;\; 0]$ con $z^* = 1/3$.

- **2.52**

1. Vedi soluzione dell'esercizio 2.51;
2.

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & \pi_1 & -3\pi_2 & \\ & -2\pi_1 & +\pi_2 & \geq -4 \\ & 2\pi_1 & -4\pi_2 & \geq 2 \\ & \pi_1 & -\pi_2 & \geq -3 \\ & & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

3. $\pi^{*T} = [7/3 \;\; 2/3]$.

- **2.53**

1.

$$\begin{cases} \max\limits_{\pi} w = & -3\pi_1 & +8\pi_2 & \\ & -4\pi_1 & +6\pi_2 & \leq 3 \\ & 5\pi_1 & +5\pi_2 & \leq 7 \\ & -2\pi_1 & -6\pi_2 & \leq -4 \\ & \pi_1 & & \geq 0 \end{cases};$$

2. $\pi^{*T} = [27/50 \;\; 43/50]$ con $w^* = 263/50$.

- **2.54**

1.

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & -\pi_1 & +2\pi_2 & \\ & \pi_1 & +\pi_2 & = -1 \\ & -2\pi_1 & +3\pi_2 & \geq 0 \\ & \pi_1 & & \geq -3 \\ & & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

2. $\pi^{*T} = [-1 \;\; 0]$ con $w^* = 1$;

3. $x^{*T} = [-1 \;\; 0 \;\; 0]$;

4.

$$T^* = \begin{array}{rrrrr|r} -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array};$$

5. problema inammissibile.

- **2.55**

1. $x^{*T} = [0 \;\; 19 \;\; 13]$ con $z^* = 71$;

2.

$$\begin{cases} \min\limits_{\pi} w = & 2\pi_1 & +4\pi_2 & \\ & 8\pi_1 & +4\pi_2 & \geq -2 \\ & -4\pi_1 & +5\pi_2 & \geq 1 \\ & 6\pi_1 & -7\pi_2 & \geq 4 \\ & & \pi_2 & \geq 0 \end{cases};$$

3. $\pi^{*T} = [27/2 \;\; 11]$.

# Appendice 3

# Programmazione Lineare Intera e Mista

- **3.2**

  Esercizio 2.5:

  1. $\left\{\begin{array}{lrrl} \min\limits_{x} z = & -x_1 & +\frac{5}{2}x_2 & \\ & x_1 & -x_2 & \geq 4 \\ & x_1 & & \leq 3 \\ & & -x_2 & \leq 3 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{array}\right.$ ;

  2. $\left\{\begin{array}{lrrl} \min\limits_{x} z = & & x_2 & \\ & -x_1 & +x_2 & \geq 4 \\ & x_1 & +x_2 & \geq 0 \\ & & x_2 & \leq 3 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{array}\right.$ ;

  3. $\left\{\begin{array}{lrrl} \min\limits_{x} z = & \frac{3}{2}x_1 & +3x_2 & \\ & x_1 & & = 0 \\ & & -x_2 & \geq 2 \\ & & -x_2 & \leq 3 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{array}\right.$ ;

  4. la regione ammissibile del rilassato continuo è illimitata;

  5. la regione ammissibile del rilassato continuo è vuota;

  6. $\left\{\begin{array}{lrrl} \min\limits_{x} z = & x_1 & +3x_2 & \\ & & x_2 & = 0 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & x_1 & & \geq 1 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{array}\right.$ .

- **3.4**

  Esercizio 2.5: 1. $x^{*T} = [3 \quad -3]$ con $z^* = -21/2$; 2. $x^{*T} = [-2 \quad 2]$, con $z^* = 2$; 3. $x^{*T} = [0 \quad -3]$ con $z^* = -9$; 4. la regione ammissibile del rilassato continuo è illimitata; 5. la regione ammissibile del rilassato continuo è vuota; 6. $x^{*T} = [1, \quad 0]$ con $z^* = 1$.

Esercizio 2.6: 1. $x^{*T} = [3 \ \ -1]$ con $z^* = -11/2$; 2. $x^{*(1)T} = [-3 \ \ 3]$, $x^{*(2)T} = [-2 \ \ 3]$, $x^{*(3)T} = [-1 \ \ 3]$, con $z^* = 3$; 3. $x^{*T} = [0 \ \ -2]$ con $z^* = -6$; 4. la regione ammissibile del rilassato continuo è illimitata; 5. la regione ammissibile del rilassato continuo è vuota; 6. $x^{*T} = [2, \ \ 0]$ con $z^* = 2$.

- **3.5**

  1. $x^{*T} = [2 \ \ -2]$ con $z^* = -4$; 2. $x^{*T} = [3 \ \ 2]$ con $z^* = 11/2$.

- **3.8**

  Vedi soluzione dell'esercizio 3.4.

- **3.9**

  $x^{*T} = [0 \ \ 2]$ con $z^* = 2$.

- **3.10**

  1. $x^{*T} = [2 \ \ 2]$ con $z^* = 8$; 2. $x^{*T} = [4 \ \ 4]$ con $z^* = 12$.

- **3.11**

  $x^{*T} = [4 \ \ 3]$ con $z^* = 10$.

- **3.12**

  Vedi soluzione dell'esercizio 3.5.

- **3.15**

  1. $x^{*T} = [0 \ \ 25 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]$ con $z^* = 250$; 2. $x^{*T} = [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 21 \ \ 2]$ con $z^* = 149$;

  3. $x^{*T} = [0 \ \ 0 \ \ 10 \ \ 1 \ \ 0]$ con $z^* = 158$; 4. $x^{*T} = [0 \ \ 0 \ \ 2 \ \ 15 \ \ 0]$ con $z^* = 145$;

  5. $x^{*T} = [0 \ \ 7 \ \ 0]$ con $z^* = 140$.

- **3.16**

  1. $x^{*T} = [0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1]$ con $z^* = 28$; 2. $x^{*T} = [1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0]$ con $z^* = 20$;

  3. $x^{*T} = [1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 0]$ con $z^* = 33$; 4. $x^{*T} = [0 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1]$ con $z^* = 20$.

- **3.17**

  $x^{*T} = [0 \ \ 0 \ \ 26 \ \ 1/3 \ \ 0]$ con $z^* = 132$.

- **3.18**

  $x^{*T} = [1 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 1]$ con $z^* = 15$.

- **3.22**

  $A^{(1)}$ non è totalmente unimodulare, ma è unimodulare; $A^{(2)}$ non è totalmente unimodulare, ma è unimodulare; $A^{(3)}$ è totalmente unimodulare e, di conseguenza, è anche unimodulare.

- **3.23**

  $a = 60, 5$.

- **3.24**

$$PL \left\{ \begin{array}{lrrl} \max\limits_{x} z = & 2x_1 & +2x_2 & \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & & x_2 & \leq 2 \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{array} \right. .$$

- **3.25**

  1. $x^{*T} = [-2 \;\; 3]$ con $z^* = -11$;
  2. $$\left\{ \begin{array}{lrrl} \min\limits_{x} z = & x_1 & -3x_2 & \\ & -x_1 & & \geq 1 \\ & -x_1 & & \leq 2 \\ & -x_1 & +x_2 & \geq 2 \\ & x_1 & +x_2 & \leq 1 \\ & x_1, & x_2 & \text{int} \end{array} \right. .$$

## Appendice 4

# Programmazione Lineare Multiobiettivo

- **4.4**
  - $x^{*T} = [6 \;\; 2]$;
  - soluzioni efficienti: $x^{*T} = [6 \;\; 2]$;
  - soluzioni debolmente efficienti: segmento di estremi $\bar{x}$ e $\tilde{x}$, con $\bar{x}^T = [-3 \;\; 2]$ e $\tilde{x} = x^*$.
- **4.5**
  - $x^{*T} = [0 \;\; 1]$;
  - soluzioni efficienti: $x^{*T} = [0 \;\; 1]$;
  - soluzioni debolmente efficienti: segmento di estremi $\bar{x}$ e $\tilde{x}$, con $\bar{x}^T = [1 \;\; 1]$ e $\tilde{x} = x^*$.
- **4.6**
  - Il problema non ammette soluzione ottima;
  - soluzioni efficienti: segmento di estremi $\bar{x}$ e $\tilde{x}$, con $\bar{x}^T = [0 \;\; 1]$ e $\tilde{x} = [1 \;\; 1]$.;
  - soluzioni debolmente efficienti: segmento di estremi $\bar{x}$ e $\tilde{x}$, con $\bar{x}^T = [0 \;\; 1]$ e $\tilde{x} = [1 \;\; 1]$.
- **4.7**
  - Il problema non ammette soluzione ottima;
  - soluzioni efficienti: segmento di estremi $\bar{x}$ e $\tilde{x}$, con $\bar{x}^T = [0 \;\; 1]$ e $\tilde{x} = [1 \;\; 0]$;
  - soluzioni debolmente efficienti: segmento di estremi $\bar{x}$ e $\tilde{x}$, con $\bar{x}^T = [0 \;\; 1]$ e $\tilde{x} = [1 \;\; 0]$, e segmento di estremi $\tilde{x}$ e $\hat{x}$, con $\hat{x}^T = [0 \;\; -1]$.

- **4.9**

$$
-\begin{cases}
\min\limits_{x,d^+,d^-} & d_1^+ + d_1^- + d_2^+ + d_2^- \\
& x_2 - d_1^+ + d_1^- = -4 \\
& -x_1 + x_2 - d_2^+ + d_2^- = 8 \\
& x_1 + 2x_2 \le 2 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 2 \\
& x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \ge 0
\end{cases} ;
$$

$$
-\begin{cases}
\min\limits_{x} & x_2 + (-x_1 + x_2 + 2) \\
& x_1 + 2x_2 \le 2 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 2 \\
& x_2 \ge 0
\end{cases} .
$$

- **4.10**

$$
-\begin{cases}
\min\limits_{x,d^+,d^-} & d_1^+ + d_1^- + d_2^+ + d_2^- \\
& x_1 + x_2 - d_1^+ + d_1^- = 7 \\
& x_1 - 2x_2 - d_2^+ + d_2^- = 9 \\
& x_1 + x_2 \le 1 \\
& -x_1 + x_2 \le 1 \\
& -x_1 - x_2 \le 1 \\
& x_1 - x_2 \le 1 \\
& d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \ge 0
\end{cases} ;
$$

$$
-\begin{cases}
\min\limits_{x} & (x_1 + x_2 + 1) + (x_1 - 2x_2 + 2) \\
& x_1 + x_2 \le 1 \\
& -x_1 + x_2 \le 1 \\
& -x_1 - x_2 \le 1 \\
& x_1 - x_2 \le 1
\end{cases} .
$$

- **4.11**
$$
\begin{cases}
\min\limits_{x,d^+,d^-} & d_1^+ + d_1^- + d_2^+ + d_2^- + d_3^+ + d_3^- \\
& x_1 - 2x_2 + 4x_3 - d_1^+ + d_1^- = -10 \\
& -7x_1 + 8x_2 - 5x_3 - d_2^+ + d_2^- = 9 \\
& 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - d_3^+ + d_3^- = 7 \\
& 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \le 2 \\
& 2x_1 + 3x_2 \ge 1 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0 \\
& d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^- \ge 0
\end{cases} .
$$

- **4.13**
$$
\begin{cases}
\min\limits_{x,v} & v \\
& v \ge x_2 \\
& v \ge -x_1 + x_2 + 2 \\
& x_1 + 2x_2 \le 2 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 2 \\
& x_2 \ge 0
\end{cases} .
$$

$$\bullet\ \textbf{4.14}\ \left\{\begin{array}{ll}\min\limits_{x,v} & v \\ & v \geq x_1 + x_2 + 1 \\ & v \geq x_1 - 2x_2 + 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & -x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1 - x_2 \leq 1 \end{array}\right. .$$

# Appendice 5

# Ottimizzazione su Rete

- **5.3**

1. $T = \{(1,2),(2,3),(2,6),(3,4),(3,5),(6,7),(7,8)\};$

2. $$\begin{cases} \min\limits_f z = & f_{12} + 3f_{13} + f_{23} + \ldots + 6f_{75} + f_{78} \\ & f_{12} + f_{13} = 7 \\ & f_{23} + f_{24} + f_{26} - f_{12} = -1 \\ & f_{34} + f_{35} - f_{13} - f_{23} = -1 \\ & f_{46} + f_{47} - f_{24} - f_{34} - f_{54} = -1 \\ & f_{54} - f_{35} - f_{75} = -1 \\ & f_{67} + f_{68} - f_{26} - f_{46} = -1 \\ & f_{75} + f_{78} - f_{47} - f_{67} = -1 \\ & -f_{68} - f_{78} = -1 \\ & f \geq 0 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} f^*_{ij} = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \notin T; \\ f^*_{12} = 7; f^*_{23} = 3; f^*_{26} = 3; f^*_{34} = 1; f^*_{35} = 1; f^*_{67} = 2; f^*_{78} = 1; \\ z^* = 22. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \min\limits_f z = & f_{12} + 3f_{13} + f_{23} + \ldots + 6f_{75} + f_{78} \\ & f_{12} + f_{13} = 1 \\ & f_{23} + f_{24} + f_{26} - f_{12} = 0 \\ & f_{34} + f_{35} - f_{13} - f_{23} = 0 \\ & f_{46} + f_{47} - f_{24} - f_{34} - f_{54} = -1 \\ & f_{54} - f_{35} - f_{75} = 0 \\ & f_{67} + f_{68} - f_{26} - f_{46} = 0 \\ & f_{75} + f_{78} - f_{47} - f_{67} = 0 \\ & -f_{68} - f_{78} = 0 \\ & f \geq 0 \end{cases}$$

   $$\begin{cases} f^*_{ij} = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (1,2),(2,3),(3,4); \\ f^*_{12} = f^*_{23} = f^*_{34} = 1; \\ z^* = 3. \end{cases}$$

- **5.4**

  1. $1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 7$;

  2. $$\begin{cases} \min\limits_{f} z = & 10f_{12} + f_{13} + f_{24} + \ldots + 8f_{74} + f_{87} \\ & f_{12} + f_{13} = 1 \\ & f_{24} - f_{32} - f_{52} = 0 \\ & f_{32} + f_{35} - f_{13} = 0 \\ & f_{46} - f_{24} - f_{54} - f_{74} = 0 \\ & f_{52} + f_{54} + f_{57} - f_{35} = 0 \\ & f_{67} + f_{68} - f_{46} = 0 \\ & f_{74} - f_{57} - f_{67} - f_{87} = -1 \\ & f_{87} - f_{68} = 0 \\ & f \geq 0 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} f^*_{ij} = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (1,3), (3,5), (5,2), (2,4), (4,6), (6,8), (8,7); \\ f^*_{13} = f^*_{35} = f^*_{52} = f^*_{24} = f^*_{46} = f^*_{68} = f^*_{87} = 1; \\ z^* = 7. \end{cases}$$

- **5.5**

  $T = \{(2,1), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$

- **5.6**

  $$\begin{cases} \min\limits_{f} z = & f_{12} + 2f_{13} + 4f_{23} + \ldots + f_{52} + 9f_{56} \\ & f_{12} + f_{13} = 5 \\ & f_{23} + f_{24} - f_{12} - f_{52} = -1 \\ & f_{35} - f_{13} - f_{23} - f_{43} = -1 \\ & f_{46} + f_{43} - f_{45} - f_{24} = -1 \\ & f_{52} + f_{56} - f_{35} - f_{45} = -1 \\ & -f_{46} - f_{56} = -1 \\ & f \geq 0 \end{cases} ; \; z^* = 18.$$

- **5.7**

  - TIR n.1: sede, città 1;
  - TIR n.2: sede, città 2;
  - TIR n.3: sede, città 1, città 3;
  - TIR n.4: sede, città 2, città 7, città 4;
  - TIR n. 5: sede, città 1, città 3, città 5;
  - TIR n.6: sede, città 2, città 7, città 6;
  - TIR n.7: sede, città 2, città 7;
  - $z^* = 19$.

- **5.8**

  1. $$\begin{cases} f^*_{ij} = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (1,2), (1,3), (2,4), (2,5), (5,6), (6,7); \\ f^*_{12} = 5; f^*_{13} = 1; f^*_{24} = 1; f^*_{25} = 3; f^*_{56} = 2; f^*_{67} = 1; \\ z^* = 16; \end{cases}$$

2. $\begin{cases} f_{ij}^* = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (1,2),(2,3),(3,4); \\ f_{12}^* = f_{23}^* = f_{34}^* = 1; \\ z^* = 4; \end{cases}$

3. $\begin{cases} f_{ij}^* = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (1,2),(2,5); \\ f_{12}^* = f_{25}^* = 1; \\ z^* = 5; \end{cases}$

4. $\begin{cases} f_{ij}^* = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (1,3),(3,5),(5,2),(5,4),(4,6),(4,7); \\ f_{13}^* = 6; f_{35}^* = 5; f_{52}^* = 1; f_{54}^* = 3; f_{46}^* = 1; f_{47}^* = 1; \\ z^* = 17; \end{cases}$

5. $\begin{cases} f_{ij}^* = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (2,1),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6); \\ f_{21}^* = 1; f_{24}^* = 4; f_{34}^* = 3; f_{45}^* = 2; f_{56}^* = 1; \\ z^* = 11; \end{cases}$

6. $\begin{cases} f_{ij}^* = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (2,1),(3,2),(5,3),(5,4),(4,6),(6,7); \\ f_{21}^* = 1; f_{32}^* = 2; f_{53}^* = 3; f_{54}^* = 3; f_{46}^* = 2; f_{67}^* = 1; \\ z^* = 18 \end{cases}$

7. $\begin{cases} f_{ij}^* = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (2,1),(3,2),(3,5),(5,4),(5,6),(6,7); \\ f_{21}^* = 1; f_{32}^* = 2; f_{35}^* = 4; f_{54}^* = 1; f_{56}^* = 2; f_{67}^* = 1; \\ z^* = 13; \end{cases}$

8. $\begin{cases} f_{ij}^* = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (2,1),(3,2),(5,3),(5,4),(4,6),(5,7); \\ f_{21}^* = 1; f_{32}^* = 2; f_{53}^* = 3; f_{54}^* = 2; f_{46}^* = 1; f_{57}^* = 1; \\ z^* = 46; \end{cases}$

9. $\begin{cases} f_{ij}^* = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (1,2),(1,3),(3,5),(5,4),(4,6),(4,7); \\ f_{12}^* = 1; f_{13}^* = 5; f_{35}^* = 4; f_{54}^* = 3; f_{46}^* = 1; f_{47}^* = 1; \\ z^* = 41. \end{cases}$

- **5.9**

1. $\begin{cases} f_{ij}^* = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (1,2),(1,3),(2,4),(3,5),(5,6),(6,7) \\ f_{12}^* = 2; f_{13}^* = 4; f_{24}^* = 1; f_{35}^* = 3; f_{56}^* = 2; f_{67}^* = 1; \\ z^* = 18; \end{cases}$

2. $\begin{cases} f_{ij}^* = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (1,3),(3,5),(5,6) \\ f_{13}^* = f_{35}^* = f_{56}^* = 1; \\ z^* = 4. \end{cases}$

- **5.12**

$$\begin{cases} f_{s1}^* = 5; f_{s2}^* = 10; f_{13}^* = 5; f_{21}^* = 0; f_{23}^* = 0; \\ f_{24}^* = 10; f_{34}^* = 3; f_{3t}^* = 2; f_{4t}^* = 13; v^* = 15; \\ W^* = \{s,1,3\}; \bar{W}^* = \{2,4,t\}. \end{cases}$$

- **5.13**

$$\begin{cases} f_{s1}^* = 5; f_{s2}^* = 22; f_{13}^* = 10; f_{21}^* = 5; f_{23}^* = 9; f_{24}^* = 8; \\ f_{34}^* = 0; f_{3t}^* = 19; f_{41} = 0; f_{4t}^* = 8; v^* = 27; \\ W^* = \{s,1,2,4\}; \bar{W}^* = \{3,t\}. \end{cases}$$

- **5.14**
  - $\begin{cases} f^*_{12} = 5; f^*_{13} = 4; f^*_{23} = 1; f^*_{24} = 4; f^*_{34} = 0; f^*_{35} = 5; \\ f^*_{45} = 2; f^*_{46} = 2; f^*_{52} = 0; f_{56} = 7; v^* = 9; \end{cases}$
  - $\begin{cases} \pi^*_i = 1 \quad \text{per ogni nodo} \quad i \neq 6; \\ \pi^*_6 = 0; \\ \gamma^*_{ij} = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (4,6), (5,6); \\ \gamma^*_{46} = \gamma^*_{56} = 1; \\ w^* = 9. \end{cases}.$

- **5.15**

  Il flusso $[\hat{f} \quad \hat{v}]^T$ non è ottimo perchè l'arco $(5,4)$ non è scarico: è quindi violato il teorema del "massimo flusso & minimo taglio".

- **5.16**

  $\begin{cases} \pi^*_i = 1 \quad \text{per ogni nodo} \quad i \neq 3, 5, 6; \\ \pi^*_3 = \pi^*_5 = \pi^*_6 = 0; \\ \gamma^*_{ij} = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (1,3), (2,3); (4,6) \\ \gamma^*_{13} = \gamma^*_{23} = \gamma^*_{46} = 1; \\ w^* = 23. \end{cases}.$

- **5.17**
  - Il flusso $[\hat{f} \quad \hat{v}]^T$ non è ottimo perchè l'arco $(4,5)$ non è scarico e l'arco $(5,6)$ non è saturo: è quindi violato il teorema del "massimo flusso & minimo taglio".
  - $\begin{cases} f^*_{12} = 5; f^*_{13} = 22; f^*_{24} = 10; f^*_{32} = 5; f^*_{34} = 9; f^*_{35} = 8; \\ f^*_{45} = 0; f^*_{46} = 19; f_{52} = 0; f^*_{56} = 8; v^* = 27. \end{cases}$

- **5.18**
  - Il flusso $[\hat{f} \quad \hat{v}]^T$ non è ottimo perchè l'arco $(2,3)$ non è scarico: è quindi violato il teorema del "massimo flusso & minimo taglio".
  - $\begin{cases} f^*_{12} = 9; f^*_{13} = 23; f^*_{23} = 0; f^*_{24} = 19; f^*_{35} = 23; \\ f^*_{46} = 30; f_{52} = 10; f^*_{54} = 11; f^*_{56} = 2; v^* = 32. \end{cases}$

- **5.19**

  $\begin{cases} f^*_{12} = 23; f^*_{13} = 5; f^*_{23} = 6; f^*_{24} = 17; f^*_{34} = 0; f^*_{35} = 11; \\ f^*_{45} = 8; f^*_{46} = 9; f_{52} = 0; f^*_{56} = 19; v^* = 28. \end{cases}$

- **5.20**

  $\begin{cases} f^*_{12} = 8; f^*_{13} = 7; f^*_{24} = 8; f^*_{32} = 0; f^*_{35} = 7; \\ f^*_{45} = 3; f^*_{46} = 5; f^*_{52} = 0; f_{56} = 10; v^* = 15; \\ W^* = \{1\}; \bar{W}^* = \{2,3,4,5,6\}. \end{cases}$

- **5.21**
  - Numero ottimo (per tratta) di treni giornalieri, che massimizza i collegamenti da Palermo a Bologna:

| | | |
|---|---|---|
| Palermo - Reggio Cal.<br>9 | Palermo - Messina<br>1 | Reggio Cal. - Salerno<br>3 |
| Reggio Cal. - Napoli<br>6 | Reggio Cal. - Messina<br>0 | Messina - Napoli<br>1 |
| Salerno - Napoli<br>0 | Salerno - Roma<br>3 | Napoli - Roma<br>3 |
| Napoli - Firenze<br>4 | Roma - Firenze<br>0 | Roma - Reggio Cal.<br>0 |
| Roma - Bologna<br>6 | Firenze - Messina<br>0 | Firenze - Bologna<br>4 |

– numero complessivo di treni giornalieri che collegano Palermo a Bologna: 10;

– tratte critiche: Salerno - Roma; Napoli - Roma; Napoli - Firenze.

- **5.22**

Il punto $[\hat{\gamma} \;\; \hat{\pi}]^T$ non è una soluzione ottima poichè l'arco $(2,4)$ non è saturo: è quindi violato il teorema del "massimo flusso & minimo taglio".

- **5.23**

– $\begin{cases} f^*_{12} = 3; f^*_{13} = 1; f^*_{23} = 0; f^*_{24} = 3; f^*_{35} = 1; \\ f^*_{46} = 3; f^*_{52} = 0; f^*_{54} = 0; f_{56} = 1; v^* = 4; \end{cases}$

– $\begin{cases} \pi^*_i = 0 \quad \text{per ogni nodo} \quad i \neq 1,3; \\ \pi^*_1 = \pi^*_3 = 1; \\ \gamma^*_{ij} = 0 \quad \text{per ogni arco} \quad (i,j) \neq (1,2),(3,5); \\ \gamma^*_{12} = \gamma^*_{35} = 1; \\ w^* = 4. \end{cases}$ .

- **5.25**

1. $$\begin{cases} \min\limits_{f} z = & 4f_{12} + 2f_{13} - 3f_{24} + 6f_{32} + f_{34} + 3f_{35} - 2f_{45} - 5f_{52} \\ & f_{12} + f_{13} = 3 \\ & f_{24} - f_{12} - f_{32} - f_{52} = -1 \\ & f_{32} + f_{34} + f_{35} - f_{13} = 6 \\ & f_{45} - f_{24} - f_{34} = 0 \\ & f_{52} - f_{35} - f_{45} = -8 \\ & f_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in E \end{cases} \qquad ;$$
2. la soluzione di base è inammissibile;
3. problema illimitato.

- **5.26**

$\begin{cases} f^*_{13} = 0; f^*_{21} = 0; f^*_{23} = 2; f^*_{34} = 0; f^*_{42} = 0; \\ f^*_{45} = 0; f^*_{53} = 1; f^*_{64} = 0; f^*_{65} = 5; z^* = 19 \end{cases}$

- **5.27**

$$\left\{\begin{array}{l} f^*_{12}=0; f^*_{14}=5; f^*_{23}=1; f^*_{31}=0; f^*_{35}=5; \\ f^*_{42}=0; f^*_{43}=0; f^*_{45}=3; z^*=45 \end{array}\right.$$

- **5.29**

1. $$P\left\{\begin{array}{ll} \min\limits_{f} z = & -6f_{12}+7f_{13}-3f_{24}+5f_{34}+7f_{35}+6f_{41}+2f_{45}+f_{46}+9f_{51}-3f_{56} \\ & f_{12}+f_{13}-f_{41}-f_{51}=-3 \\ & f_{24}-f_{12}=4 \\ & f_{34}+f_{35}-f_{13}=2 \\ & f_{41}+f_{45}+f_{46}-f_{24}-f_{34}=0 \\ & f_{51}+f_{56}-f_{35}-f_{45}=6 \\ & -f_{46}-f_{56}=-9 \\ & 0\le f_{12}\le 6 \\ & 2\le f_{13}\le 8 \\ & 2\le f_{24}\le 12 \\ & 0\le f_{34}\le 10 \\ & 3\le f_{35}\le 10 \\ & 0\le f_{41}\le 9 \\ & 0\le f_{45}\le 5 \\ & 2\le f_{46}\le 4 \\ & 1\le f_{51}\le 4 \\ & 1\le f_{56}\le 6 \end{array}\right. ;$$

2. la soluzione è di base, ma è inammissibile;

3. $$\left\{\begin{array}{l} f^*_{12}=6; f^*_{13}=2; f^*_{24}=10; f^*_{34}=1; f^*_{35}=3; f^*_{41}=8; \\ f^*_{45}=0; f^*_{46}=3; f^*_{51}=3; f^*_{56}=6; z^*=34. \end{array}\right.$$

- **5.30**

1. $$P\left\{\begin{array}{ll} \min\limits_{f} z = & -2f_{12}+8f_{13}-2f_{23}+6f_{24}-f_{26}+4f_{35}+7f_{43}+8f_{45}+4f_{51}+2f_{63}-2f_{64} \\ & f_{13}+f_{12}-f_{51}=14 \\ & f_{23}+f_{24}+f_{26}-f_{12}=0 \\ & f_{35}-f_{13}-f_{23}-f_{43}-f_{63}=-10 \\ & f_{43}+f_{45}-f_{24}-f_{64}=3 \\ & f_{51}-f_{35}-f_{45}-f_{65}=-13 \\ & f_{63}+f_{64}+f_{65}-f_{26}=6 \\ & 5 \le f_{12} \le 11 \\ & 6 \le f_{13} \le 12 \\ & 0 \le f_{23} \le 3 \\ & 1 \le f_{24} \le 4 \\ & 2 \le f_{26} \le 6 \\ & 2 \le f_{35} \le 10 \\ & 2 \le f_{43} \le 8 \\ & 0 \le f_{45} \le 4 \\ & 0 \le f_{51} \le 9 \\ & 0 \le f_{63} \le 5 \\ & 0 \le f_{64} \le 6 \\ & 3 \le f_{65} \le 9 \end{array}\right. ;$$
2. $$\left\{\begin{array}{l} f^*_{12}=8; f^*_{13}=6; f^*_{23}=3; f^*_{24}=1; f^*_{26}=4; f^*_{35}=2; f^*_{43}=2; \\ f^*_{45}=2; f^*_{51}=0; f^*_{63}=1; f^*_{64}=0; f^*_{65}=9; z^*=68. \end{array}\right.$$

- **5.31**

1. $$P\left\{\begin{array}{ll} \min\limits_{f} z = & 3f_{14}-8f_{23}-6f_{31}-f_{34}+6f_{42}+4f_{45}+2f_{46}+7f_{53}+4f_{65} \\ & f_{14}-f_{21}-f_{31}=0 \\ & f_{21}+f_{23}-f_{42}=4 \\ & f_{31}+f_{34}-f_{23}-f_{53}=-3 \\ & f_{42}+f_{45}+f_{46}-f_{14}-f_{34}=5 \\ & f_{53}-f_{45}-f_{65}=-7 \\ & f_{65}-f_{46}=1 \\ & 15 \le f_{14} \le 30 \\ & 3 \le f_{21} \le 7 \\ & 4 \le f_{23} \le 9 \\ & 9 \le f_{31} \le 15 \\ & 2 \le f_{34} \le 9 \\ & 0 \le f_{42} \le 20 \\ & 10 \le f_{45} \le 30 \\ & 1 \le f_{46} \le 7 \\ & 2 \le f_{53} \le 12 \\ & 1 \le f_{65} \le 4 \end{array}\right. ;$$
2. $$\left\{\begin{array}{l} f^*_{14}=15; f^*_{21}=3; f^*_{23}=9; f^*_{31}=12; f^*_{34}=2; f^*_{42}=8; \\ f^*_{45}=13; f^*_{46}=1; f^*_{53}=8; f^*_{65}=2; z^*=65. \end{array}\right.$$

- **5.32**

  Al flusso ammissibile $\bar{f}$ non corrisponde una soluzione di base.

- **5.33**

  Il flusso $\bar{f}$ è una soluzione ottima per $P$, con $\bar{z} = z^* = 25$.

- **5.38**

$$C_{f^*} = \begin{bmatrix} 6 & \boxed{4_2} & \boxed{10_2} \\ \boxed{1_4} & 7 & \boxed{11_1} \\ 2 & \boxed{-9_1} & 12 \end{bmatrix}; \qquad z^* = 34.$$

- **5.44**

$$C_{f^*} = \begin{bmatrix} 9 & -12 & 13 & \boxed{8_{15}} & 15 & 19 \\ \boxed{15_2} & 20 & 12 & \boxed{16_4} & 19 & 10 \\ 17 & \boxed{-16_{10}} & 13 & 14 & \boxed{1_1} & 18 \\ \boxed{19_7} & 4 & \boxed{2_3} & 21 & \boxed{16_1} & \boxed{1_9} \end{bmatrix}; \qquad z^* = 219.$$

- **5.47**

$$C_{f^*} = \begin{bmatrix} \boxed{-2_7} & 5 & 7 & 12 & 9 \\ 8 & 6 & 12 & \boxed{1_5} & \boxed{4_{12}} \\ \boxed{10_8} & 15 & \boxed{8_2} & \boxed{9_3} & 17 \\ 7 & \boxed{5_{23}} & \boxed{1_8} & 20 & 23 \end{bmatrix}; \qquad z^* = 285.$$

- **5.50**

$$C_{f^*} = \begin{bmatrix} \boxed{2_5} & -5 & 7 & 10 \\ \boxed{8_7} & 6 & 2 & \boxed{4_{24}} \\ 11 & \boxed{-15_7} & 8 & 9 \\ \boxed{10_{21}} & 15 & 18 & 21 \\ 17 & \boxed{5_2} & \boxed{1_{20}} & 20 \\ 21 & \boxed{3_{19}} & 7 & \boxed{9_{11}} \end{bmatrix}; \qquad z^* = 453.$$

- **5.53**

$$C_{f^*} = \begin{bmatrix} \boxed{8_1} & 7 & 4 & 2 & \boxed{0_{29}} \\ 6 & \boxed{3_{12}} & 9 & 1 & 0 \\ \boxed{5_{29}} & 12 & 9 & \boxed{-3_{22}} & 0 \\ 11 & 17 & \boxed{-1_{14}} & 20 & \boxed{0_3} \\ \boxed{7_8} & 5 & 1 & 8 & 0 \\ \boxed{5_{10}} & \boxed{3_{13}} & 11 & 4 & 0; \end{bmatrix}; \qquad z^* = 254.$$

# Appendice 6

# Problemi di Vehicle Routing

- **6.2**
  1. $C_H = \{0, 7, 6, 5, 2, 4, 3, 1, 0\}$, con $\bar{z} = 35$;
  2. $errore \leq 9,37\%$.
- **6.3**
  1. $C_H = \{0, 7, 6, 5, 2, 1, 4, 3, 0\}$, con $\bar{z} = 46$;
  2. $errore \leq 2,22\%$.
- **6.5**
  1. Possibile soluzione: $C_H = \{0, 4, 2, 5, 3, 1, 0\}$, con $\bar{z} = 35$;
  2. con $r = 0$: $errore \leq 16,67\%$ (soluzione ottima).
- **6.6**
  1. Possibile soluzione: $C_H = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 4, 0\}$, con $\bar{z} = 33$;
  2. con $r = 0$: $errore \leq 32\%$.
- **6.8**
  1. Possibile soluzione: $C_H = \{0, 2, 3, 5, 4, 1, 0\}$, con $\bar{z} = 38$;
  2. con $r = 0$: $errore \leq 26,66\%$.
- **6.9**
  1. Possibile soluzione: $C_H = \{0, 6, 1, 4, 2, 3, 5, 0\}$, con $\bar{z} = 34$;
  2. con $r = 0$: $errore \leq 36\%$.
- **6.11**
  1. Possibile soluzione: $C_H = \{0, 2, 4, 1, 5, 3, 0\}$, con $\bar{z} = 33$;
  2. con $r = 0$: $errore \leq 10\%$.

- **6.12**

  1. Possibile soluzione: $C_H = \{0, 1, 4, 2, 3, 5, 6, 0\}$, con $\bar{z} = 28$;
  2. con $r = 0$: $errore \leq 12\%$.

- **6.14**

  1. Possibile soluzione ottima: $C_E^* = \{0, 4, 1, 0, 3, 4, 5, 2, 1, 5, 2, 1, 0, 4, 2, 1, 2, 1, 0, 1, 0\}$, con $z^* = 60$;
  2. $$PT \begin{cases} z^*_{PT} = \min\limits_x & 4x_{20} + 5x_{24} + 9x_{50} + 10x_{54} \\ & x_{20} + x_{24} = 2 \\ & x_{50} + x_{54} = 1 \\ & x_{20} + x_{50} = 2 \\ & x_{24} + x_{54} = 1 \\ & x_{20}, x_{24}, x_{50}, x_{54} \geq 0 \end{cases} .$$

- **6.15**

  1. Possibile soluzione ottima: $C_E^* = \{0, 1, 0, 4, 3, 0, 4, 3, 4, 3, 1, 0, 4, 5, 4, 1, 2, 5, 2, 4, 5, 1, 0\}$, con $z^* = 102$;
  2. $$PT \begin{cases} z^*_{PT} = \min\limits_x & 10x_{13} + 9x_{15} + 5x_{43} + 4x_{45} \\ & x_{13} + x_{15} = 2 \\ & x_{43} + x_{45} = 1 \\ & x_{13} + x_{43} = 2 \\ & x_{15} + x_{45} = 1 \\ & x_{13}, x_{15}, x_{43}, x_{45} \geq 0 \end{cases} .$$

# Appendice 7

# Problemi di Scheduling

- **7.3**

  1. $\pi^* = \{6, 2, 8, 5, 3, 1, 4, 7\}$;
  2. $L^*_{\max} = 17$.

- **7.4**

  1. $\pi^* = \{7, 4, 3, 2, 5, 1, 8, 6\}$;
  2. $L^*_{\max} = 25$.

- **7.6**

  Esercizio 7.3:

  1. $\pi^* = \{2, 8, 3, 1, 4, 5, 6, 7\}$;
  2. $L^*_{\max} = 16$.

  Esercizio 7.4:

  1. $\pi^* = \{4, 2, 3, 5, 1, 8, 6, 7\}$;
  2. $L^*_{\max} = 24$.

- **7.10**

  1. $\pi^* = \{6, 3, 1, 5, 2, 4\}$;
  2. $z^* = 198$.

- **7.11**

  1. Il job 1 è processato dall'istante 2 all'istante 3 e dall'istante 4 all'istante 7; il job 2 è processato dall'istante 3 all'istante 4; il job 3 è processato dall'istante 9 all'istante 14; il job 4 è processato dall'istante 1 all'istante 2 e dall'istante 14 all'istante 19; il job 5 è processato dall'istante 19 all'istante 24; il job 6 è processato dall'istante 7 all'istante 9;
  2. $z^* = 77$.

- **7.12**

  1. Il job 1 è processato dall'istante 0 all'istante 2; il job 2 è processato dall'istante 3 all'istante 4; il job 3 è processato dall'istante 2 all'istante 3 e dall'istante 4 all'istante 7; il job 4 è processato dall'istante 19 all'istante 25; il job 5 è processato dall'istante 14 all'istante 19; il job 6 è processato dall'istante 7 all'istante 9;
  2. $z^* = 78$.

- **7.13**

  1. $\pi^* = \{3, 4, 5, 1, 2, 6\}$;
  2. la penalità complessiva pagata dall'azienda è pari a 140.000 euro.

- **7.14**

  1. Il job 1 è processato dall'istante 5 all'istante 6 e dall'istante 8 all'istante 11; il job 2 è processato dall'istante 3 all'istante 5; il job 3 è processato dall'istante 2 all'istante 3; il job 4 è processato dall'istante 1 all'istante 2 e dall'istante 11 all'istante 16; il job 5 è processato dall'istante 16 all'istante 22; il job 6 è processato dall'istante 6 all'istante 8;
  2. $z^* = 65$.

- **7.16**

  1. Macchina 1: $\pi^* = \{6, 3, 7\}$; macchina 2: $\pi^* = \{9, 5, 2\}$; macchina 3: $\pi^* = \{1, 4\}$; macchina 4: $\pi^* = \{8, 10\}$;
  2. $z^* = 81$.

- **7.17**

  1. Macchina 1: $\pi^* = \{2, 1, 7\}$; macchina 2: $\pi^* = \{6, 3, 5\}$; macchina 3: $\pi^* = \{8, 4\}$; macchina 4: $\pi^* = \{9, 10\}$;
  2. $z^* = 64$.

- **7.18**

  1. Sportello 1: $\pi^* = \{$Lucia, Domenico, Francesco$\}$; sportello 2: $\pi^* = \{$Carlo, Alessandra, Stefania$\}$ sportello 3: $\pi^* = \{$Giuseppe, Mario$\}$;
  2. tempo medio di permanenza: 13,06 minuti.

- **7.19**

  1. Macchina 1: $\pi^* = \{4, 9, 2\}$; macchina 2: $\pi^* = \{7, 6, 8\}$; macchina 3: $\pi^* = \{5, 3\}$; macchina 4: $\pi^* = \{1, 10\}$;
  2. $z^* = 53$.

- **7.22**

  1. Il job 1 è processato sulla macchina 1 dall'istante 0 all'istante 4; il job 2 è processato sulla macchina 1 dall'istante 4 all'istante 5; il job 3 è processato sulla macchina 2 dall'istante 0 all'istante 2 e sulla macchina 1 dall'istante 5 all'istante 8; il job 4 è processato sulla macchina 3 dall'istante 0 all'istante 2 e sulla macchina 2 dall'istante 2 all'istante 8; il job 5 è processato sulla macchina 3 dall'istante 2 all'istante 5;
  2. $c_1 = 4; c_2 = 5; c_3 = 8; c_4 = 8; c_5 = 5.$

- **7.23**

  1. Il job 1 è processato sulla macchina 1 dall'istante 0 all'istante 4; il job 2 è processato sulla macchina 1 dall'istante 4 all'istante 6; il job 3 è processato sulla macchina 2 dall'istante 0 all'istante 6 e sulla macchina 1 dall'istante 6 all'istante 9; il job 4 è processato sulla macchina 3 dall'istante 0 all'istante 5 e sulla macchina 2 dall'istante 6 all'istante 9; il job 5 è processato sulla macchina 3 dall'istante 5 all'istante 6;
  2. $c_1 = 4; c_2 = 6; c_3 = 9; c_4 = 9; c_5 = 6.$

- **7.24**

  1. Il job 1 è processato sulla macchina 1 dall'istante 0 all'istante 5; il job 2 è processato sulla macchina 2 dall'istante 0 all'istante 5 e sulla macchina 1 dall'istante 5 all'istante 11; il job 3 è processato sulla macchina 2 dall'istante 5 all'istante 7; il job 4 è processato sulla macchina 2 dall'istante 7 all'istante 10; il job 5 è processato sulla macchina 3 dall'istante 0 all'istante 4 e sulla macchina 2 dall'istante 10 all'istante 11; il job 6 è processato sulla macchina 3 dall'istante 4 all'istante 8;
  2. $c_1 = 5; c_2 = 11; c_3 = 7; c_4 = 10; c_5 = 11; c_6 = 8.$

- **7.25**

  1. Il job 1 è processato sulla macchina 1 dall'istante 0 all'istante 6; il job 2 è processato sulla macchina 1 dall'istante 6 all'istante 13; il job 3 è processato sulla macchina 2 dall'istante 0 all'istante 3; il job 4 è processato sulla macchina 2 dall'istante 3 all'istante 8; il job 5 è processato sulla macchina 2 dall'istante 8 all'istante 10; il job 6 è processato sulla macchina 3 dall'istante 0 all'istante 10 e sulla macchina 2 dall'istante 10 all'istante 13;
  2. $c_1 = 6; c_2 = 13; c_3 = 3; c_4 = 8; c_5 = 10; c_6 = 13.$

- **7.27**

  1. $\pi^* = \{2, 6, 5, 1, 4, 3\}$;
  2. $c^*_{\max} = 24.$

- **7.28**

  1. $\pi^* = \{2, 4, 6, 1, 5, 3\}$;

2. $c^*_{\max} = 27$.

- **7.29**

1. $\pi^* = \{4, 6, 1, 5, 2, 3\}$;
2. $c^*_{\max} = 26$.

- **7.30**

1. $\pi^* = \{1, 5, 2, 4, 3, 6\}$;
2. $c^*_{\max} = 23$.

- **7.31**

1. $\pi^* = \{7, 1, 4, 6, 5, 3, 2\}$;
2. $c^*_{\max} = 230$.

- **7.33**

1. Il job 1 è processato sulla macchina 1 dall'istante 9 all'istante 12 e sulla macchina 2 dall'istante 25 all'istante 26; il job 2 è processato sulla macchina 1 dall'istante 0 all'istante 1 e sulla macchina 2 dall'istante 14 all'istante 18; il job 3 è processato sulla macchina 1 dall'istante 3 all'istante 9 e sulla macchina 2 dall'istante 23 all'istante 25; il job 4 è processato sulla macchina 1 dall'istante 1 all'istante 3 e sulla macchina 2 dall'istante 18 all'istante 23; il job 5 è processato sulla macchina 2 dall'istante 5 all'istante 11 e sulla macchina 1 dall'istante 19 all'istante 22; il job 6 è processato sulla macchina 2 dall'istante 0 all'istante 1 e sulla macchina 1 dall'istante 12 all'istante 14; il job 7 è processato sulla macchina 2 dall'istante 1 all'istante 5 e sulla macchina 1 dall'istante 14 all'istante 19; il job 8 è processato sulla macchina 2 dall'istante 11 all'istante 14 e sulla macchina 1 dall'istante 22 all'istante 23;
2. $c^*_{\max} = 26$.

- **7.34**

1. Il job 1 è processato sulla macchina 1 dall'istante 9 all'istante 11 e sulla macchina 2 dall'istante 17 all'istante 18; il job 2 è processato sulla macchina 1 dall'istante 0 all'istante 4 e sulla macchina 2 dall'istante 12 all'istante 15; il job 3 è processato sulla macchina 1 dall'istante 4 all'istante 9 e sulla macchina 2 dall'istante 15 all'istante 17; il job 4 è processato sulla macchina 2 dall'istante 0 all'istante 1 e sulla macchina 1 dall'istante 11 all'istante 15; il job 5 è processato sulla macchina 2 dall'istante 1 all'istante 6 e sulla macchina 1 dall'istante 15 all'istante 17; il job 6 è processato sulla macchina 2 dall'istante 6 all'istante 12 e sulla macchina 1 dall'istante 17 all'istante 18;
2. $c^*_{\max} = 18$.

# Appendice 8

# Il Problema di Set Covering

- **8.2**
  1. $\bar{x}^T = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$, con $\bar{z} = 109$;
  2. $errore \leq 128,33\%$.
- **8.3**
  1. $\bar{x}^T = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0]$, con $\bar{z} = 14$;
  2. $errore \leq 108,33\%$.
- **8.4**
  1. $\bar{x}^T = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1]$, con $\bar{z} = 23$;
  2. $errore \leq 108,33\%$.
- **8.6**
  1. $\bar{x}^T = [1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$, con $\bar{z} = 164$;
  2. $errore \leq 121,62\%$.
- **8.7**
  1. $\bar{x}^T = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 0]$, con $\bar{z} = 14$;
  2. $errore \leq 0\%$ (soluzione ottima).
- **8.8**
  1. $\bar{x}^T = [1\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1]$, con $\bar{z} = 30$;
  2. $errore \leq 57,89\%$.