Corso di Laboratorio di Ricerca Operativa

(A.A. 2021-2022)

Prova scritta d'esame del 12/01/2022

Esercizio 1

Tommaso vuole custodire 12 tra i suoi oggetti più preziosi in una cassetta di sicurezza in banca. La sua banca di fiducia gli comunica che, al momento, è disponibile una sola cassetta di volume V. Ciascun oggetto ha un volume v_i ed un valore p_i. Tommaso pensando che la cassetta non sia sufficiente ad accogliere tutti i suoi preziosi decide preventivamente che:

- al più uno tra gli oggetti 2,3 e 4 può essere inserito nella cassetta;
- almeno uno tra i preziosi 4,8 e 11 deve essere inserito;
- l'oggetto 6 può essere inserito solo se viene inserito anche il 10;
- se l'oggetto 10 viene inserito, allora deve essere inserito uno tra i preziosi 3 e 8.

Aiuta Tommaso a selezionare quali preziosi custodire in banca rispettando il vincolo di capacità e le condizioni sopra elencate, in modo da massimizzare il valore complessivo degli oggetti inseriti nella cassetta di sicurezza.

Esercizio 2

Sia dato il seguente problema di programmazione lineare:

$$PL \begin{cases} \max\limits_{x} z = & x_1 & +2x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & -2x_1 & +x_2 & \geq -9 \\ & x_1 & +3x_2 & \leq \frac{15}{2} \\ & x_1 & x_2 & \geq 0 \end{cases},$$

- Risolvere graficamente il problema (disegnare la regione ammissibile, le rette di livello della funzione obiettivo, individuare graficamente il punto di ottimo e determinare analiticamente il suo valore);
- Scrivere il problema duale;
- Utilizzando la teoria della dualità, determinare una soluzione ottima del problema duale.

Esercizio 3

Si consideri il problema di PLI il cui rilassato è il problema di PL dell'Esercizio 2 e sia assegnata la soluzione ammissibile intera $\hat{x} = (4,0)^T$.

1. Determinare l'intervallo $[L, U]$ in cui ricade il valore ottimo Z^*_{PLI};
2. Utilizzando per il problema rilassato al passo iniziale il risultato ottenuto nell'esercizio 2, dire se si può concludere che 'e stata già determinata la soluzione ottima, o scrivere i due problemi generati dal metodo del Branch and Bound separando rispetto alla variabile x_1;
3. Indicare geometricamente (anche sulla stessa figura) le regioni ammissibili e le soluzioni ottime dei rilassati dei due problemi;
4. Completare la risoluzione del problema adottando una strategia di visita in ampiezza.

Esercizio 4

Sono assegnati una rete ed una distribuzione di flusso f.

1. Verificare che f è ammissibile e determinare la quantità di flusso V_0 trasferita da S a T mediante f.
2. Considerata la sezione $W = \{S, 1, 2, 3, 4\}$, $\bar{W} = \{5, T\}$, scrivere l'espressione del flusso netto $V(W, \bar{W})$ e della capacità $c(W, \bar{W})$. Determinare, inoltre, il valore del flusso netto e della capacità. A cosa equivale il flusso netto?

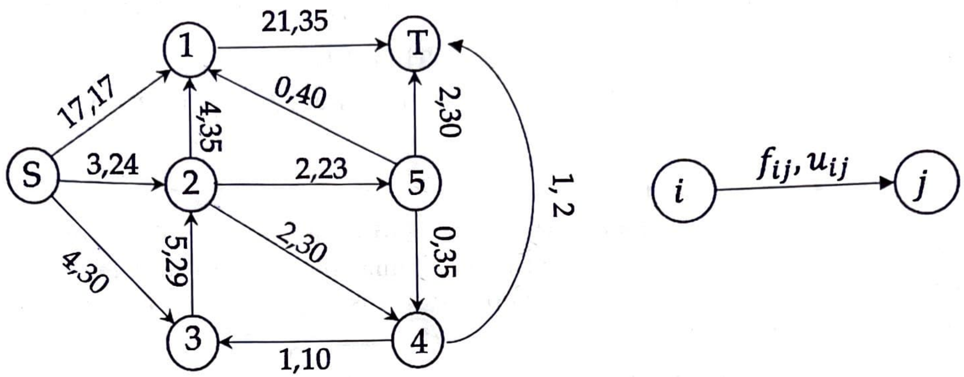


Figura 1: La rete di flusso dell'esercizio 4.

3. Determinare quale dei seguenti è un cammino aumentante rispetto ad f ed eseguire la corrispondente aumentazione di flusso.

$$P_1 \ : \ S \rightarrow 2 \rightarrow 1 \leftarrow 5 \rightarrow T$$
$$P_2 \ : \ S \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow T$$

4. Determinare, mediante l'algoritmo di Ford-Fulkerson, il valore del flusso massimo che è possibile trasferire da S a T a partire dalla distribuzione di flusso determinata al punto precedente. Determinare il taglio di capacità minima e verificare le condizioni di ottimalità per il problema del massimo flusso (terzo enunciato del Teorema di Ford and Fulkerson).

ESAME 12/01/2022 ①

ESERCIZIO 1

$$x_i \begin{cases} 1 & \text{SE IL PREZIOSO } i \text{ VIENE INSERITO} \\ 0 & \text{0 ALTRIMENTI} \end{cases}$$

$$\max \sum_{i=1}^{12} p_i x_i$$

$$\sum_{i=1}^{12} v_i x_i \leq V$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \leq 1$$

$$x_4 + x_8 + x_{11} \geq 1$$

$$x_6 \leq x_{10}$$

$$x_3 + x_8 = x_{10}$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

ESERCIZIO 2 (PUNTI 6)

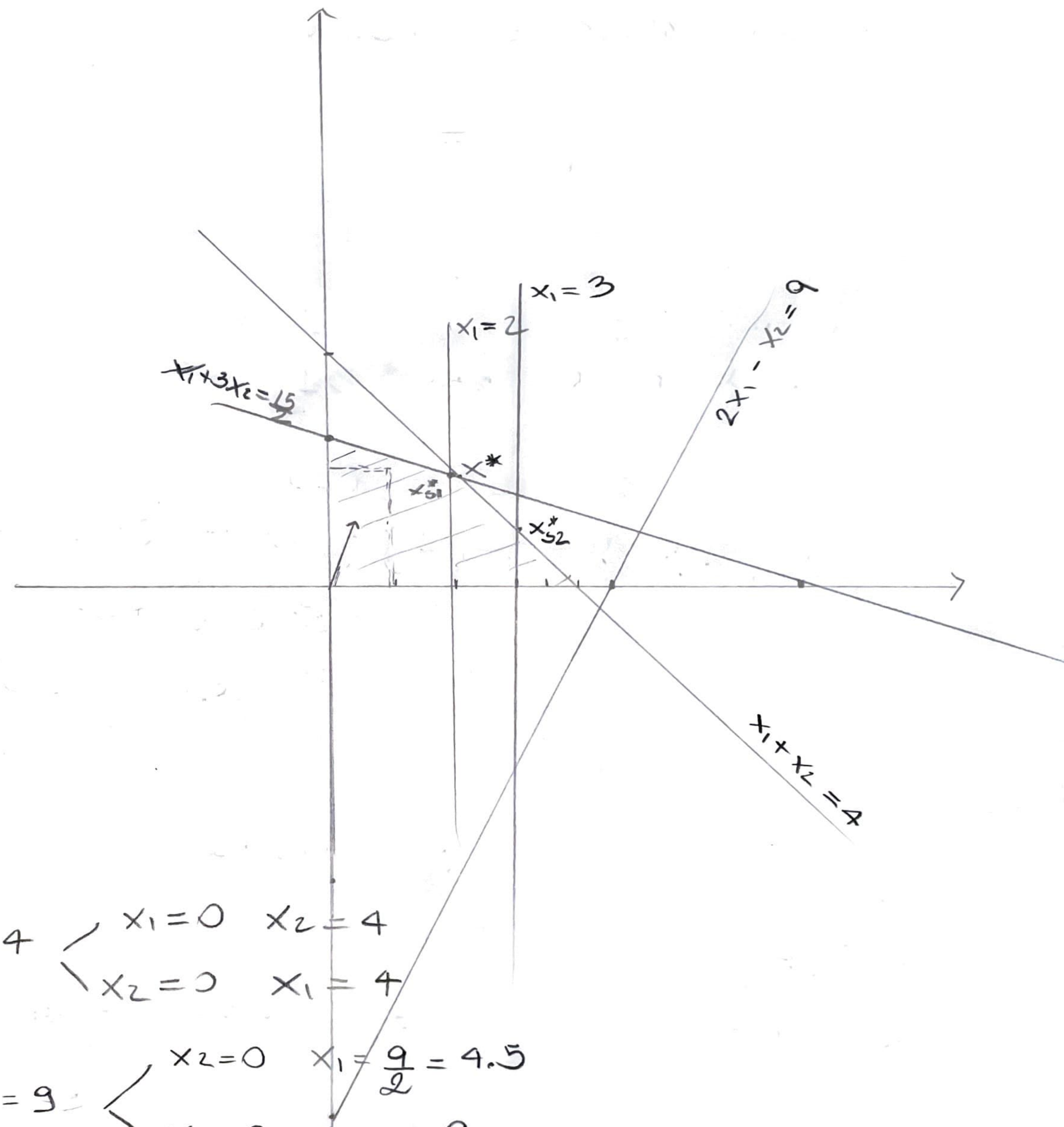
max $x_1 + 2x_2$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_2 - 2x_1 \geq -9 \quad (2x_1 - x_2 \leq 9)$

$x_1 + 3x_2 \leq \frac{15}{2}$

$x_1, x_2 \geq 0$



$x_1 + x_2 = 4 \quad \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = 4 \\ x_2 = 0 & x_1 = 4 \end{cases}$

$+2x_1 - x_2 = 9 \quad \begin{cases} x_2 = 0 & x_1 = \frac{9}{2} = 4.5 \\ x_1 = 0 & x_2 = -9 \end{cases}$

$x_1 + 3x_2 = \frac{15}{2} \quad \begin{cases} x_1 = 0 & x_2 = \frac{15}{6} = 2.5 \\ x_2 = 0 & x_1 = 7.5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + 3x_2 = \frac{15}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4 - x_2 \\ 4 - x_2 + 3x_2 = \frac{15}{2} \end{cases}$$

$4 + 2x_2 = \frac{15}{2}$ $\quad 2x_2 = \frac{15}{2} - 4$ $\quad 2x_2 = \frac{15-8}{2} = \frac{7}{2}$

$x_2 = \frac{7}{4} = 1.75$ $\quad x_1 = 4 - \frac{7}{4} = \frac{16-7}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$

$x^* = (2.25 \quad 1.75) = \left(\frac{9}{4} \quad \frac{7}{4}\right)$

2 –

$$\min 4y_1 + 9y_2 + \frac{15}{2}y_3$$
$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1$$
$$y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

3 –

$$\begin{cases} x_1(y_1 + 2y_2 + y_3 - 1) = 0; \; x_1 > 0 \Rightarrow y_1 + 2y_2 + y_3 - 1 = 0 \\ x_2(y_1 - y_2 + 3y_3 - 2) = 0; \; x_2 > 0 \Rightarrow y_1 - y_2 + 3y_3 = 2 \end{cases}$$

$$y_1(x_1 + x_2 - 4) = 0 \Rightarrow y_1\left(\frac{9}{4} + \frac{7}{4} - \frac{16}{4}\right) = 0$$
$$\frac{16}{4} - \frac{16}{4} = 0 \Rightarrow y_1?$$
$$y_2(2x_1 - x_2 - 9) = 0 \Rightarrow y_2 \underbrace{\left(\frac{18}{4} - \frac{7}{4} - \frac{36}{4}\right)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow y_2 = 0$$
$$y_3\left(x_1 + 3x_2 - \frac{15}{2}\right) = 0 \Rightarrow y_3\left(\frac{9}{4} + \frac{21}{4} - \frac{30}{4}\right) = 0$$
$$\frac{30}{4} - \frac{30}{4} = 0 \Rightarrow y_3?$$

$$\begin{cases} y_1 + y_3 = 1 \\ y_1 + 3y_3 = 2 \end{cases} \quad y_1 = 1 - y_3$$

$1 - y_3 + 3y_3 = 2$ $\quad 2y_3 = 1$ $\quad y_3 = \frac{1}{2}$

$y_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad y^* = \left(\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right)$

ESISTE UNA SOLUZIONE CHE INSIEME A x^* SODDISFA LE RELAZIONI DI COMPLEMENTARIETÀ $\Rightarrow y^*$ È OTTIMA PER D

ESERCIZIO 3

1- AVENDO RISOLTO IL PROBLEMA RILASSATO DISPONGO DI

$$U_0 = \frac{9}{4} + \frac{14}{4} = \frac{23}{4}$$

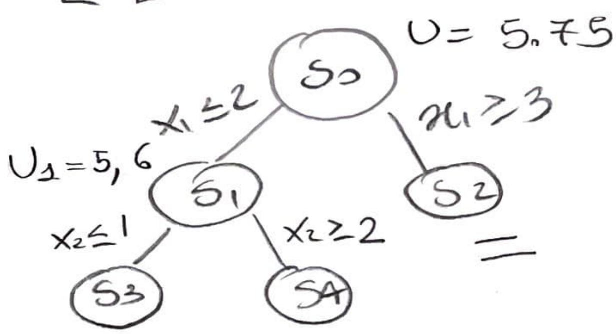
$$-\infty < z^*_{PLI} \leq U_0 = \frac{23}{4} = 5.75$$

CONOSCO ANCHE UN LOWER BOUND SU z^*_{PLI} IN QUANTO DISPONGO DI UNA SOLUZIONE INTERA $\hat{x} = (4, 0)$ DI VALORE $x_1 + 2x_2 = 4 \Rightarrow$

$$L = 4 \leq z^*_{PLI} \leq 5,75 = U_0 \qquad Q = \{S_0\}$$

2) $U_0 \leq L$? NO E LA SOLUZIONE DEL RILASSATO NON È INTERA E QUINDI BISOGNA SEPARARE, LO FACCIAMO RISPETTO A x_1

$$x_1 \leq \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor = 2 \qquad x_1 \geq 2+1 = 3$$



$Q = \{S_1, S_2\}$

CALCOLO DI x^*_{S1} $\quad Q = \{S_2\}$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = \frac{15}{2} \\ x_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 + 3x_2 = \frac{15}{2}$$

$$4 + 6x_2 = 15 \Rightarrow 6x_2 = 11 \quad x_2 = \frac{11}{6} = 1.83$$

$$U_1 = 2 + \frac{11}{3} = \frac{6+11}{3} = \frac{17}{3} = 5.\overline{6}$$

/ $U_1 \leq L$ NO E x^*_{S1} NON INTERO ESEGUO IL BRANCHING SU x_2

$Q = \{S_2, S_3, S_4\}$ ESTRAGGO S_2

CALCOLO DI x^*_{S2} $\quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \quad x_2 = 4 - 3 = 1$

$U = x_1 + 2x_2 = 3 + 2 = 5 \qquad U_2 < L$? MA LA SOLUZIONE È INTERA $\Rightarrow$ AGGIORNO L'OTTIMO CORRENTE $\hat{x} = (3, 1)$ $U_S = L = 5$ E CHIUDO S_2

POICHÈ HO AGGIORNATO L'OTTIMO CORRENTE TESTO IL CRITERIO DI ARRESTO $U_0 \leq L$? OSSIA $5,75 \leq 5$ NO MA POSSO COMUNQUE CHIUDERE IN QUANTO LA MIGLIORE SOLUZIONE INTERA CHE POSSO OTTENERE È A