

---

# Complementi ed Esercizi di Ricerca Operativa

## Sussidi Didattici

---

M. FLAVIA MONACO  
MARCELLO SAMMARRA

$$\begin{array}{rcl} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 10 \end{array} \right] & \xrightarrow{\quad} & \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 12 \end{array} \right] \\ \hat{C}_3 < 0 & \uparrow & x^* = [3, 2, 1, 0, 0]^T \\ & \leftarrow & z^* = -12 \end{array}$$

UNICAL-DIMES

A.A. 2017 - 2018

---



# Prefazione

Il presente volume è una raccolta di esercizi di Ricerca Operativa. Nella quasi totalità si tratta di originali temi di Esame proposti agli studenti negli ultimi dieci anni.

La risoluzione di un esercizio numerico di qualsiasi disciplina scientifica (a maggior ragione di una disciplina come la Ricerca Operativa, ricca come è di algoritmi) non deve essere un procedimento meccanico fine a se stesso, bensì deve essere un *completamento* della teoria e, come tale, fungere da guida e da ausilio per una più profonda e semplice comprensione della materia. Per tali ragioni, ove strettamente necessario, saranno richiamati brevemente gli apetti teorici.

Il volume è pensato per un corso base di Ricerca Operativa (circa 60 ore) e copre, essenzialmente, quattro argomenti: gli aspetti geometrici della Programmazione Lineare (Capitolo 1); la Programmazione Lineare e la Dualità (Capitolo 2); i problemi di Flusso su Rete (Capitolo 3); infine, in maniera marginale, la Programmazione Lineare a Numeri Interi (Capitolo 4).

Ogni capitolo è composto da tre tipologie di esercizi: esercizi completamente svolti e discussi, con tutti i passaggi matematici e logici che portano alla risoluzione del problema; esercizi per i quali sono riportate solo le soluzioni, individuati da un asterisco \*; altri, infine, individuati da un quadratino nero ■, per i quali non è riportata la soluzione. Questi ultimi sono stati pensati per invogliare gli studenti a confrontarsi tra di loro e prepararli, gradualmente, ad affrontare i problemi che si troveranno nella loro esperienza professionale.

Come ogni prima stesura, il testo non è esente da errori. Preghiamo chiunque ne individuasse a volerlo segnalare: le generazioni future, e gli autori, saranno riconoscenti.

M.F. Monaco

M. Sammarra

Elenco Edizioni:  
Prima Stesura: Dicembre 2016  
Prima Revisione: Novembre 2017

# Elenco delle figure

1.1	Il Politopo $P$ dell'Esercizio 1.1.1.	2
1.2	Un esempio di proiezione di un poliedro in forma standard.	4
1.3	Un esempio di proiezione di un poliedro non in forma standard.	4
1.4	Soluzione grafica del problema (1.1): $k_1 < k_2 < k^*$	11
1.5	Soluzione grafica del problema (1.3)	12
1.6	Soluzione grafica del problema (1.4): $k_1 < k_2 < k_3$ .	13
2.1	Esercizio 2.1.3 - Rappresentazione del problema duale	28
2.2	Esercizio 2.1.4 - Rappresentazione del problema duale	32
2.3	Esercizio 2.1.4 - Introduzione del vincolo duale $y_1 \leq 7$	33
2.4	Esercizio 2.1.4 - Introduzione del vincolo duale $y_1 \leq 3$	34
3.1	Il grafo dell'Esercizio 3.2.1	53
3.2	Il grafo dell'Esercizio 3.2.2	54
3.3	Il grafo dell'Esercizio 3.2.3	54
3.4	Il grafo dell'Esercizio 3.2.4	55
3.5	Il grafo dell'Esercizio 3.2.5	56
3.6	Il grafo dell'Esercizio 3.4.1	68
3.7	Il grafo dell'Esercizio 3.4.2	69
3.8	Il grafo dell'Esercizio 3.4.3	69
4.1	La rete di flusso dell'esercizio 4.1	72
4.2	La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della seconda iterazione	73
4.3	La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della terza iterazione	74
4.4	La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della quarta iterazione	74
4.5	La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della quinta iterazione	75
4.6	Il grafo dell'Esercizio 4.2.1	76
4.7	Il grafo dell'Esercizio 4.2.2	77
4.8	Il grafo dell'Esercizio 4.2.3	77

5.1	Regione ammissibile di PL0 e soluzione ottima . . . . .	80
5.2	Regione ammissibile di PL1 e soluzione ottima . . . . .	80
5.3	Regione ammissibile di PL3 e soluzione ottima . . . . .	81
5.4	Regione ammissibile di PL5 e soluzione ottima . . . . .	81
5.5	Regione ammissibile di PL6 e soluzione ottima . . . . .	82
5.6	Regione ammissibile di PL2 e soluzione ottima . . . . .	82
5.7	Albero dei Sottoproblemi dell'Esercizio 5.1.1 . . . . .	83
5.8	Regione ammissibile di PL0 e soluzione ottima . . . . .	84
5.9	Regione ammissibile di PL1 e soluzione ottima . . . . .	84
5.10	Regione ammissibile di PL3 e soluzione ottima . . . . .	85
5.11	Albero di Branch&Bound dell'Esercizio 5.2.3. . . . .	87

# Indice

<b>1 Soluzioni di base - Risoluzione grafica di problemi di PL</b>	<b>1</b>
1.1 Esercizi Svolti . . . . .	1
1.2 Esercizi non svolti . . . . .	14
<b>2 Algoritmo del Simplex e Dualità</b>	<b>15</b>
2.1 Esercizi Svolti . . . . .	15
2.2 Esercizi non svolti . . . . .	41
<b>3 Flusso di Costo Minimo</b>	<b>45</b>
3.1 Flusso di Costo Minimo su reti non capacitate - Esercizi svolti . . . . .	45
3.2 Flusso di Costo Minimo su reti non capacitate - Esercizi non svolti . . . . .	53
3.3 Flusso di Costo Minimo su reti capacitate - Esercizi svolti . . . . .	57
3.4 Flusso di Costo Minimo su reti capacitate - Esercizi non svolti . . . . .	68
<b>4 Il Problema del Massimo Flusso</b>	<b>71</b>
4.1 Esercizi Svolti . . . . .	72
4.2 Esercizi non svolti . . . . .	76
<b>5 Programmazione Lineare Intera</b>	<b>79</b>
5.1 Esercizi svolti . . . . .	79
5.2 Esercizi non svolti . . . . .	85



## Indice

1 Soluzioni di base - Risoluzione grafica di problemi di PL 1	
1.1 Esercizi Svolti . . . . .	1
1.2 Esercizi non svolti . . . . .	14

# Capitolo 1

## Soluzioni di base - Risoluzione grafica di problemi di PL

### 1.1 Esercizi Svolti

ESERCIZIO 1.1.1. Sono assegnati il poliedro

$$P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 \leq 4, x_2 \leq 1, -x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

ed i punti  $x_A = (0, 1)$ ,  $x_B = (1, 1)$ ,  $x_C = (2, \frac{1}{2})$ ,  $x_D = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$ ,  $x_E = (2, 2)$ ,  $x_H = (2, 1)$ .

1. Stabilire la natura dei punti  $x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_H$  e determinare i vertici di  $P$ .

*Soluzione* – E' facile verificare che  $x_A, x_B, x_C, x_H$  soddisfano il sistema di disequazioni e quindi sono punti di  $P$ , mentre  $x_D, x_E \notin P$ . In particolare, rappresentando  $P$  su di un piano cartesiano, si può osservare che (Figura 1.1):

- (a)  $P$  è un *politopo* ossia un poliedro *limitato* (insieme convesso *chiuso* e *limitato*);
- (b) I vertici di  $P$  sono i punti di coordinate:  $x_A = (0, 1)$ ,  $x_F = (0, 0)$ ,  $x_H = (2, 1)$ ,  $x_G = (4, 0)$
- (c)  $x_A$  e  $x_H$  sono *vertici* di  $P$ ,  $x_B$  è un punto che giace sulla *frontiera* di  $P$ ,  $x_C$  è un punto *interno*;

OSSERVAZIONE 1.1.1. *Tutti i poliedri, se non vuoti, ammettono sempre almeno un punto interno ed un punto di frontiera. I poliedri che rappresentano la regione ammissibile di un problema di Programmazione Lineare, se non vuoti, hanno inoltre sempre almeno un vertice (Teorema Fondamentale della PL)*

□

OSSERVAZIONE 1.1.2. Un punto in  $\mathbb{R}^q$  è individuato dall'intersezione di  $q$  iperpiani linearmente indipendenti. Se  $P = \{x \in \mathbb{R}^q \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$  è un poliedro in  $R^q$  e  $A \in \mathbb{R}^{h \times q}$  allora ogni vertice di  $P$  può essere ottenuto intersecando  $q$  iperpiani relativi ai  $h+q$  semispazi che definiscono  $P$ . Se il punto di intersezione di tali iperpiani esiste e soddisfa le rimanenti diseguaglianze di  $P$  allora esso è un vertice; altrimenti o è esterno a  $P$  oppure semplicemente non esiste. Questo caso si verifica se gli iperpiani sono linearmente dipendenti.

□

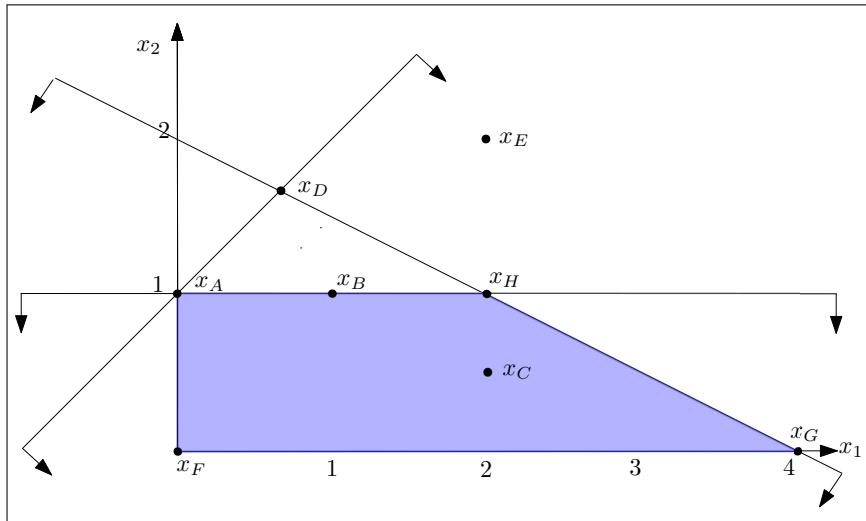


Figura 1.1: Il Politopo  $P$  dell'Esercizio 1.1.1.

Alla luce dell'osservazione precedente nel nostro caso ( $q = 2$ ) intersecando, ad esempio, gli iperpiani relativi al primo e al secondo semispazio si ha:

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$x_2 = 1$$

ossia  $x = (x_1, x_2) = (2, 1)$ . Poiché  $x \in P$ , esso è un vertice ( $x = x_H$ ). Lo stesso dicasi intersecando gli iperpiani  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  (si ottiene in tal caso  $x_F$ ) e l'iperpiano relativo al primo semispazio con  $x_2 = 0$  ( $x_G$ ).

Intersecando gli iperpiani relativi al primo ed al terzo semispazio

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$-x_1 + x_2 = 1$$

troviamo  $x = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}) = x_D \notin P$  quindi  $x = x_D$  non è un vertice. Intersecando, invece, il secondo semispazio con il  $x_2 = 0$  troviamo un sistema incompatibile ( $x_2 = 1, x_2 = 0$ ) quindi l'intersezione non esiste. In effetti i due iperpiani sono linearmente dipendenti (sono paralleli!)

Intersecando gli iperpiani relativi al secondo ed al terzo semispazio

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

si ha  $x = (0, 1) = x_A$  che è un vertice. Lo stesso vertice si può ottenere, alternativamente, intersecando sia l'iperpiano relativo al secondo semispazio con  $x_1 = 0$ , sia intersecando quello relativo al terzo vincolo con  $x_1 \geq 0$ . Il vertice  $x_A$  è un vertice *speciale*: esso soddisfa come uguaglianza un numero di vincoli (3) superiore a quelli necessari (2) e tali vincoli sono a due a due linearmente indipendenti. Un tale vertice è detto *degenero*.

◊

2. Definire il Poliedro  $P_{FS}$  (forma standard di  $P$ ) e ripetere il punto 1.

*Soluzione* – Il poliedro  $P_{FS}$  si ottiene da  $P$  trasformando le  $h$  diseguaglianze che lo definiscono (senza quindi considerare i vincoli di segno sulle variabili) in eguaglianze, aggiungendo al primo membro di ciascun vincolo  $a_i^\top x \leq b_i$ ,  $i = 1, \dots, h$  una quantità non negativa (*variabile di slack*) pari allo scarto tra secondo membro e primo membro

$$x_{q+i} = b_i - a_i^\top x \quad i = 1, \dots, h$$

Avremo quindi

$$P_{FS} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_2 + x_4 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + x_5 & = & 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array} \right\}$$

OSSERVAZIONE 1.1.3. Il poliedro  $P_{FS}$  è definito in uno spazio di dimensione superiore ( $\mathbb{R}^{h+q}$ ) rispetto alla dimensione dello spazio in cui è definito  $P$  ( $\mathbb{R}^q$ ). Tuttavia esiste una forte correlazione tra i due poliedri. Posto, per comodità,  $x^S$  pari al vettore delle variabili di slack, vale la seguente

**Proposizione 1.1.1.**  $x \in P \longleftrightarrow \exists x^S \in \mathbb{R}^h$  tale che  $(x, x^S) \in P_{FS}$

La proposizione 1.1.1 afferma, sostanzialmente, che  $P$  è la proiezione di  $P_{FS}$  nello spazio delle variabili  $x$  e che i vertici di  $P$  e quelli di  $P_{FS}$  sono in corrispondenza uno-a-uno (si veda la figura (1.2)). Quest'ultima proprietà non vale in generale, ossia quando  $P$  è la proiezione di un poliedro  $Q \neq P_{FS}$  (si veda figura (1.3)).

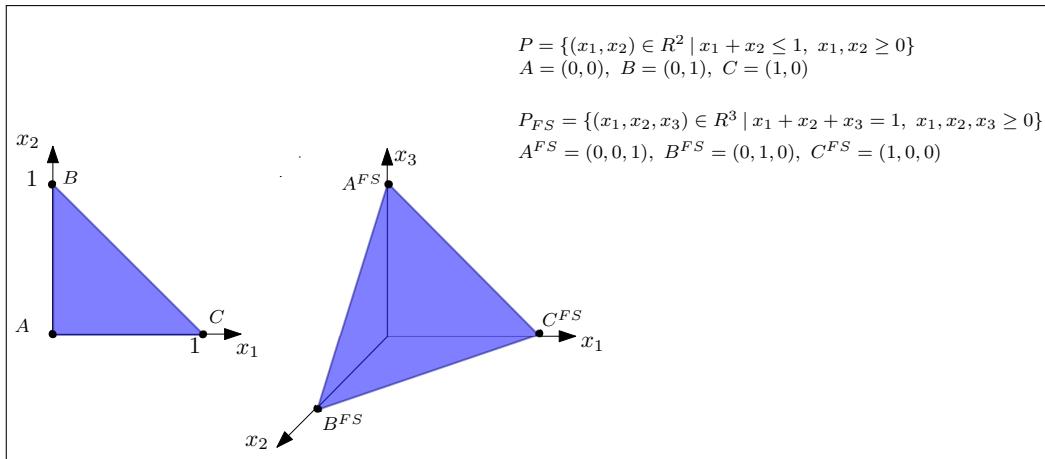


Figura 1.2: Un esempio di proiezione di un poliedro in forma standard.

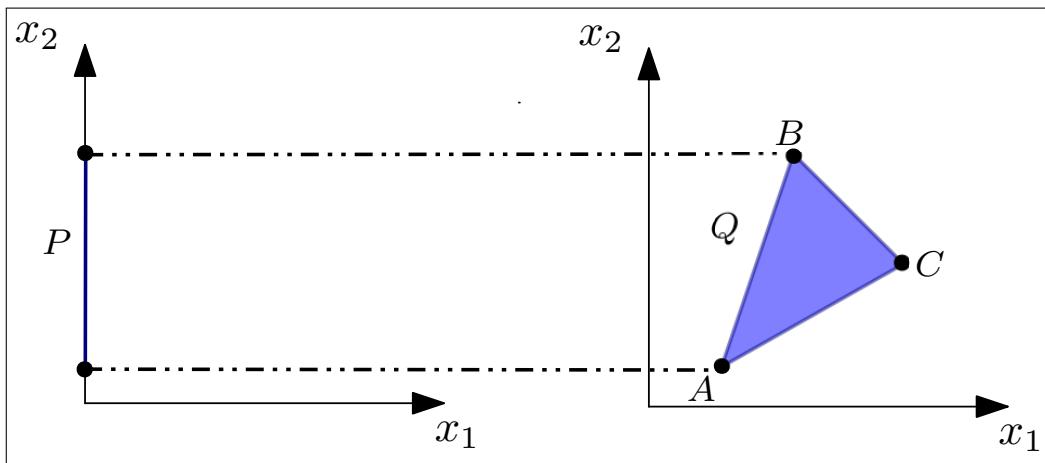


Figura 1.3: Un esempio di proiezione di un poliedro non in forma standard.

□

Grazie alla definizione delle variabili di slack, i corrispondenti dei punti assegnati nello spazio in cui è definito  $P_{FS}$  sono:  $x_A^{FS} = (0, 1, 2, 0, 0)$ ,  $x_B^{FS} = (1, 1, 1, 0, 1)$ ,  $x_C^{FS} = (2, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ,  $x_D^{FS} = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3}, 0)$ ,  $x_E^{FS} = (2, 2, -2, -1, 1)$ ,  $x_H^{FS} = (2, 1, 0, 0, 2)$ .

Ne deriva che:

- (a) Se un punto  $x \notin P$  allora in  $x^{FS}$  vi saranno tante variabili di slack *negative* quanti sono i vincoli di  $P$  violati da  $x$  ( $x_4 < 0$  in  $x_D^{FS}$  e  $x_3, x_4 < 0$  in  $x_E^{FS}$ )
- (b) Se un punto  $x$  è interno a  $P$  allora tutte le variabili di slack saranno strettamente positive ( $x_3, x_4, x_5 > 0$ ) in  $x_C^{FS}$ .
- (c) Se un punto  $x$  sta sul bordo di  $P$  vi sarà *esattamente* una variabile di slack nulla in  $x^{FS}$  e precisamente sarà nulla la variabile di slack relativa al vincolo che definisce il bordo di  $P$  su cui  $x$  giace ( $x_4 = 0$  in  $x_B^{FS}$  e  $x_4$  è la variabile di slack relativa al secondo vincolo di  $P$ ).

Per le proprietà precedenti vale anche il viceversa, cioè se  $x^{FS}$  presenta una variabile di slack negativa allora  $x \notin P$ ; se tutte le variabili di slack sono strettamente positive allora  $x$  è un punto interno di  $P$ ; se esiste *almeno* una variabile di slack nulla allora  $x$  sta su uno dei bordi di  $P$ .

Un discorso a parte meritano i vertici di  $P_{FS}$ . Al punto (1) dell'esercitazione è stato evidenziato che un vertice di un poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^q$  soddisfa come uguaglianze  $q$  vincoli di  $P$  linearmente indipendenti, giustificando l'asserzione con il fatto che per identificare un punto in  $\mathbb{R}^q$  servono  $q$  iperpiani. Consideriamo quindi un poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}^q$  descritto da  $h$  disequazioni ed  $q$  vincoli di segno sulle variabili. Poniamo  $n = h + q$  e consideriamo la sua forma standard  $P_{FS} \subseteq \mathbb{R}^n$ , descritto da  $m = h$  equazioni e  $n$  vincoli di segno sulle variabili. Un vertice  $x$  di  $P_{FS}$  dovrà quindi soddisfare all'uguaglianza  $n$  vincoli linearmente indipendenti. Ma di questi  $n$  vincoli  $m$  sono già equazioni (per definizione di forma standard), i rimanenti  $n - m$  vincoli soddisfatti per uguaglianza saranno vincoli di segno sulle variabili di  $P_{FS}$ . Pertanto un vertice di  $P_{FS}$  è caratterizzato dall'avere  $n - m =$  componenti nulle, mentre le restanti  $m$  potranno assumere qualsiasi valore (eventualmente nullo!) compatibilmente con i vincoli di  $P_{FS}$ .

OSSERVAZIONE 1.1.4. In  $P$  un vertice non degenero,  $x_H$ , soddisfa all'uguaglianza  $q = 2$  vincoli linearmente indipendenti (il primo ed il secondo); in  $P_{FS}$   $x_H^{FS}$  presenta due variabili nulle (le variabili di slack  $x_3$  ed  $x_4$  relative, rispettivamente, al primo ed al secondo vincolo);

□

OSSERVAZIONE 1.1.5. Per calcolare i vertici di  $P_{FS}$  si possono porre a zero nel sistema di equazioni  $n - m$  variabili. In tale modo il sistema si riduce ad un sistema di  $m$  equazioni in  $m$  incognite. Sulla risolubilità di questo sistema ridotto di equazioni valgono le considerazioni fatte precedentemente: se la soluzione esiste e soddisfa i vincoli di segno,

essa è un vertice; se esiste ma non soddisfa i vincoli di segno non è un vertice; se non esiste, il sistema è incompatibile.

□

OSSERVAZIONE 1.1.6. Sia  $a_i^\top x \leq b_i$  un vincolo di  $P$ , sia  $a_i^\top x = b_i$  l'iperpiano di associato a tale vincolo e  $a_i^\top x + x_{q+i} = b_i$  in vincolo in forma standard. Allora l'equazione dell'iperpiano  $a_i^\top x = b_i$  nello spazio di  $P_{FS}$  è  $x_{q+i} = 0$ .

□

Alla luce di quanto detto ponendo  $x_1 = x_2 = 0$  si ottiene  $x_F^{FS} = (0, 0, 4, 1, 1)$ ; ponendo  $x_3 = x_4 = 0$  si ottiene  $x_H^{FS} = (2, 1, 0, 0, 1)$ ; ponendo  $x_2 = x_3 = 0$  si ottiene  $x_G^{FS} = (4, 0, 0, 1, 5)$ . Considerando invece  $x_1 = x_4 = 0$  si ottiene il punto  $x_D^{FS}$  che essendo non ammissibile non può essere un vertice.

Infine ponendo  $x_1 = x_4 = 0, x_1 = x_5 = 0, x_4 = x_5 = 0$  si ottiene sempre lo stesso vertice  $x_A^{FS} = (0, 1, 2, 0, 0)$ . Pertanto come  $x_A$  era un vertice degenere per  $P$ ,  $x_A^{FS}$  è un vertice degenere per  $P_{FS}$

◊

ESERCIZIO 1.1.2. Determinare le soluzioni ammissibili di base del problema

$$\begin{array}{lll} \min & c^\top x \\ \text{con} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

*Soluzione* – Dato un sistema di equazioni  $Ax = b$ , con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m < n$ , si assuma che  $A$  abbia rango massimo, cioè pari a  $m$ . Sia  $A_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  una sottomatrice quadrata non singolare di  $A$  e sia  $\mathcal{B} \subset \{1, \dots, n\}$  l'insieme degli indici delle colonne di  $A$  che compongono  $A_B$ . Sia  $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$  l'insieme dei restanti indici e  $A_N$  la sottomatrice di  $A$  formata dalle colonne con indici in  $\mathcal{N}$ . Sotto queste ipotesi il sistema di equazioni  $Ax = b$  può essere scritto come

$$A_B x_B + A_N x_N = b$$

dove  $x_B$  ed  $x_N$  sono sottovettori di  $x$  le cui componenti hanno indici rispettivamente in  $\mathcal{B}$  ed  $\mathcal{N}$ .  $A_B$  viene chiamata matrice di base (o semplicemente base) di  $A$ ,  $x_B$  vettore

delle variabili di base,  $\mathcal{B}$  insieme degli indici di base;  $x_N$  è detto vettore delle variabili *fuori base*,  $\mathcal{N}$  insieme degli indici non di base e  $A_N$  matrice non di base. Poiché  $A_B$  è non singolare, il precedente sistema può essere risolto per  $x_B$

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_N x_N \quad (1.2)$$

L'espressione (1.2), per una fissata base  $A_B$ , rappresenta *tutte* le soluzioni del sistema  $Ax = b$  al variare degli  $n - m$  parametri  $x_N$ . La particolare soluzione che si ottiene ponendo  $x_N = 0_{n-m}$  viene detta *soluzione di base del sistema*  $Ax = b$ . Se in corrispondenza di  $x_N = 0$  si ha  $x_B \geq 0$ , il vettore  $x^\top = [x_B^\top, x_N^\top]^\top$  viene detto *soluzione ammissibile di base del problema* (1.1) e se  $x_B > 0$  la soluzione ammissibile di base è *non degenera*.

OSSERVAZIONE 1.1.7. *E' evidente che*

1. *Un vertice non degnere di  $P_{FS}$  è caratterizzato dall'avere un numero di componenti nulle pari alla differenza tra il numero di variabili ed il numero di equazioni.*
2. *Una soluzione ammissibile di base non degenere del problema (1.1) presenta un numero di componenti nulle pari alla differenza tra il numero di variabili ed il numero di equazioni.*

L'osservazione precedente mette in luce una stretta correlazione tra i vertici di  $P_{FS}$  e le soluzioni ammissibili di base di un problema di PL in forma standard. Vale infatti il seguente risultato

**Proposizione 1.1.2.**  *$x$  è una soluzione ammissibile di base per  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$  se e solo se  $x$  è un vertice di  $P_{FS}$*

Pertanto per calcolare i vertici di  $P_{FS}$  si possono calcolare le soluzioni ammissibili di base di  $Ax = b$ ,  $x \geq 0$ .

Le sottomatrici quadrate di ordine  $3 \times 3$  estraibili da  $A$  (in tutto pari a  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ ) e quindi le possibili basi, sono le seguenti

$$\mathcal{B}_1 = \{3, 4, 5\} \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A_B^{-1} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{1, 4, 5\}, A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{1, 2, 5\}, A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_4 = \{1, 2, 4\}, A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_5 = \{2, 4, 5\}, A_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_6 = \{2, 3, 5\}, A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_7 = \{1, 2, 3\}, A_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_8 = \{2, 3, 4\}, A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_9 = \{1, 3, 4\}, A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{10} = \{1, 3, 5\}, A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \det(A_B) = 0 \longrightarrow A_B \text{ non è una base}$$

In definitiva tra le 10 matrici di dimensioni  $3 \times 3$  che è possibile estrarre da  $A$ : 9 rappresentano basi di  $A$  ed una ( $\mathcal{B}_{10} = \{1, 3, 5\}$ ) una non base. Delle 9 basi: tre sono non ammissibili ( $\mathcal{B}_4 = \{1, 2, 4\}, \mathcal{B}_5 = \{2, 4, 5\}, \mathcal{B}_9 = \{1, 3, 4\}$ ). Delle 6 basi ammissibili si ha la seguente associazione con i vertici di  $P_{FS}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 = \{3, 4, 5\} &\longrightarrow x = [0, 0, 4, 1, 1] \longrightarrow \text{vertice } x_A^{FS} \\ \mathcal{B}_2 = \{1, 4, 5\} &\longrightarrow x = [4, 0, 0, 1, 5] \longrightarrow \text{vertice } x_G^{FS} \\ \mathcal{B}_3 = \{1, 2, 5\} &\longrightarrow x = [2, 1, 0, 0, 2] \longrightarrow \text{vertice } x_H^{FS} \\ \mathcal{B}_6 = \{2, 3, 5\} &\longrightarrow x = [0, 1, 2, 0, 0] \longrightarrow \text{vertice } x_A^{FS} \\ \mathcal{B}_7 = \{1, 2, 3\} &\longrightarrow x = [0, 1, 2, 0, 0] \longrightarrow \text{vertice } x_A^{FS} \\ \mathcal{B}_8 = \{2, 3, 4\} &\longrightarrow x = [0, 1, 2, 0, 0] \longrightarrow \text{vertice } x_A^{FS} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 1.1.8. Comunque prendiamo una coppia di insiemi di indici  $\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_{k+1}, k = 1, \dots, 8$ , comprese quindi anche quelle che danno luogo a basi non ammissibili, esse differiscono per un solo indice. Le basi che soddisfano tale proprietà vengono definite adiacenti. Anche le sole basi ammissibili  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8$  sono adiacenti e generano vertici di  $P_{FS}$  che giacciono sullo stesso spigolo di  $P_{FS}$ , ovvero vertici che sono sullo stesso spigolo di  $P$ , ovvero vertici adiacenti.

□

OSSERVAZIONE 1.1.9. Le basi ammissibili  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8$  soddisfano tutte la Proposizione (1.1.2). Possiamo osservare che nel caso non degenero la corrispondenza tra basi ammissibili e vertici è biunivoca: ad una base ammissibile corrisponde un vertice ed uno solo, ad un vertice corrisponde una base ammissibile ed una sola. Nel caso degenero invece la corrispon-

denza è solo univoca: una base individua un vertice ed uno solo, ma non vale più il viceversa (come dimostra il vertice degenero  $x_A$ ).

□

◊

**ESERCIZIO 1.1.3.** Determinare la soluzione ottima del problema (1.1) dell'Esercizio 1.1.2.

*Soluzione* – I vertici di  $P$  e di  $P_{FS}$  sono in corrispondenza uno-a-uno e che a questi ultimi corrispondono le soluzioni di base di  $Ax = b, x \geq 0$ . Per risolvere il problema (1.1) si potrebbe pensare, pertanto, di calcolare la funzione obiettivo in ciascuna soluzione ammissibile di base e prendere la soluzione ammissibile di base cui corrisponde il valore minimo di funzione obiettivo. Il numero di soluzioni ammissibili di base, benché finito, cresce esponenzialmente al crescere della dimensione del problema (il numero di basi ammissibili è limitato superiormente dal coefficiente binomiale tra  $n$  ed  $m$ ). Anche se un oracolo ci fornisse tutte le soluzioni ammissibili di base di un problema di PL, il solo calcolo della funzione obiettivo in ciascuna di esse sarebbe computazionalmente inefficiente.

Allo stato delle nostre conoscenze, per risolvere (1.1) definito su  $P_{FS}$  si può pensare di risolvere il problema equivalente definito su  $P$  e questo possiamo risolverlo graficamente. Basta infatti osservare che:

1. La funzione obiettivo  $z(x_1, x_2) = -x_1 - 3x_2$  può essere rappresentata nel piano per *curve di livello*. Una curva di livello di livello di una funzione  $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è definita come l'insieme dei punti in cui la funzione assume lo stesso valore

$$L(k) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid z(x) = k, \quad k \in \mathbb{R}\}$$

Se  $z$  è lineare, come nel nostro caso, allora  $z(x) = k$  è una retta, e quindi  $L(k)$ , al variare di  $k$ , descrive una famiglia di rette parallele.

2. Il gradiente di una funzione in un punto è una direzione di *crescita* della funzione in quel punto (informazione locale). Nel caso di funzioni lineari, il gradiente è costante e quindi indica una direzione *globale* di crescita della funzione. Esso è il vettore dei coefficienti di costo della funzione obiettivo.
3. Il gradiente di una funzione in un punto è sempre ortogonale al piano tangente alla funzione in quel punto. Chiaramente nel caso di funzioni lineari il gradiente è ortogonale alla funzione stessa in ogni punto e, quindi, ortogonale ad ogni retta di livello.

Pertanto per determinare graficamente il vertice ottimo basta tracciare il gradiente della funzione obiettivo ed un fascio di rette ortogonali al gradiente. Spostandoci nella direzione del gradiente la funzione obiettivo cresce; la retta di livello corrispondente al più grande valore di  $k$ ,  $z(x) = k_{\max}$ , che ha almeno un punto di tangenza con la regione ammissibile rappresenta il valore massimo della funzione obiettivo nella regione data. Viceversa se ci spostiamo nella direzione opposta a quella del gradiente la funzione obiettivo decresce; la retta di livello corrispondente al più piccolo valore di  $k$ ,  $z(x) = k_{\min}$ , che ha almeno un punto di tangenza con la regione ammissibile rappresenta il valore minimo della funzione obiettivo nella regione data. Il punto (o i punti) di tangenza rappresenta la soluzione ottima del problema: esso è un punto di massimo nel primo caso, di minimo nel secondo caso.

Nel nostro esempio (figura 1.4), quindi il vertice ottimo è  $x_H$  in cui la funzione obiettivo vale  $z^* = z(x_H) = -5 = k^*$

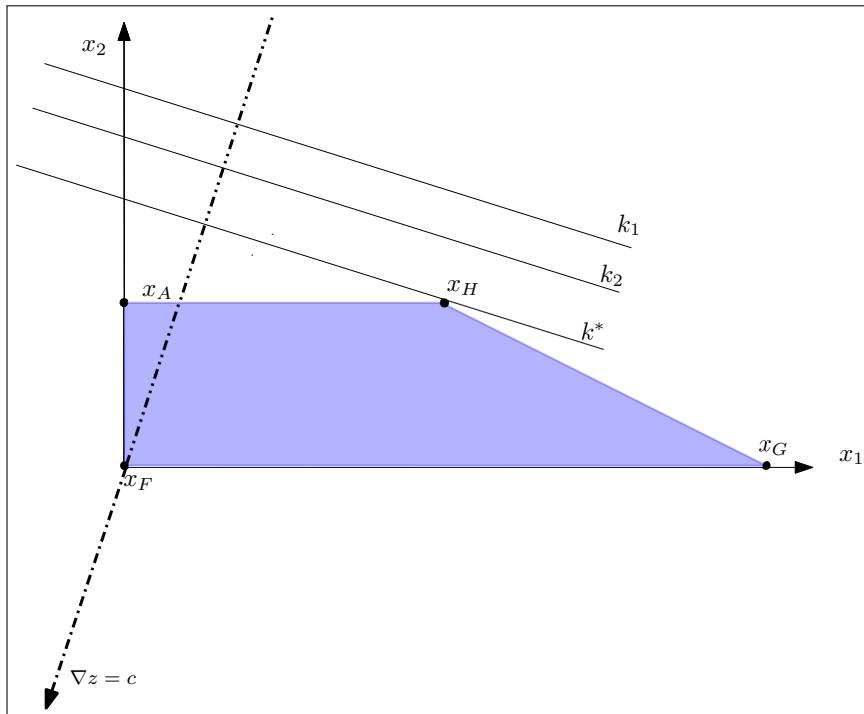


Figura 1.4: Soluzione grafica del problema (1.1):  $k_1 < k_2 < k^*$



ESERCIZIO 1.1.4. Risolvere graficamente il problema

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{con} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

*Soluzione* – Il problema (1.3) ha per regione ammissibile il poliedro  $P$  e la risoluzione è mostrata in figura (1.5). Notiamo, questa volta, che la curva di livello cui corrisponde

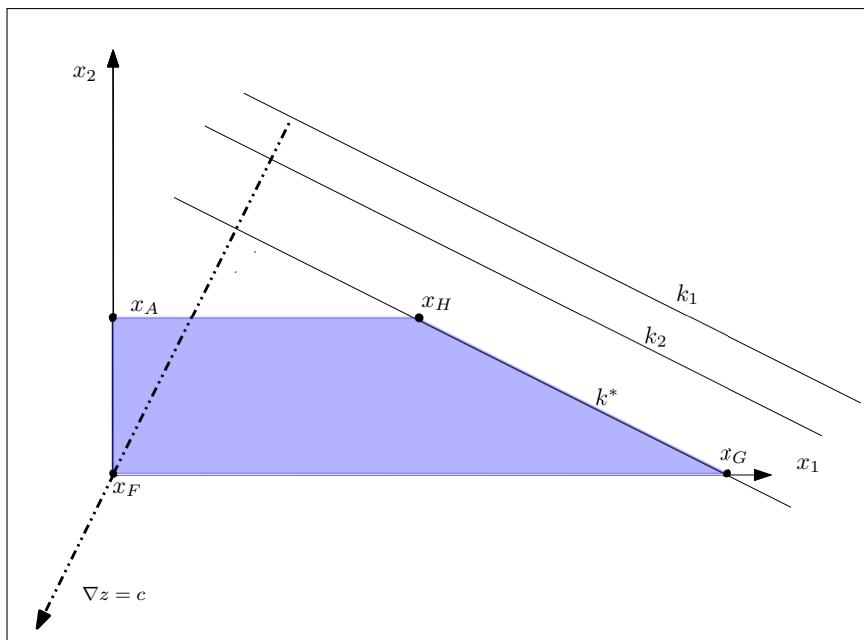


Figura 1.5: Soluzione grafica del problema (1.3)

la soluzione ottima, ha *infiniti* punti di tangenza con la regione ammissibile. Pertanto il problema (1.5) ha infinite soluzioni ottime, delle quali due sono vertici (in accordo con il teorema fondamentale della PL). Ciò accade sempre quando la funzione obiettivo ed uno dei vincoli sono paralleli. In effetti si puo notare che  $c^T = [-2, -4, 0, 0, 0] = -2a_1^T = -2[1, 2, 0, 0, 0]$

◊

ESERCIZIO 1.1.5. Risolvere graficamente il problema

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{con} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

*Soluzione* – La regione ammissibile, il gradiente e le curve di livello della funzione obiettivo sono mostrati in figura (1.6). Osserviamo che la regione ammissibile questa volta è illimitata nella direzione dell'antigradiente. Pertanto il problema non ammette soluzione ottima.

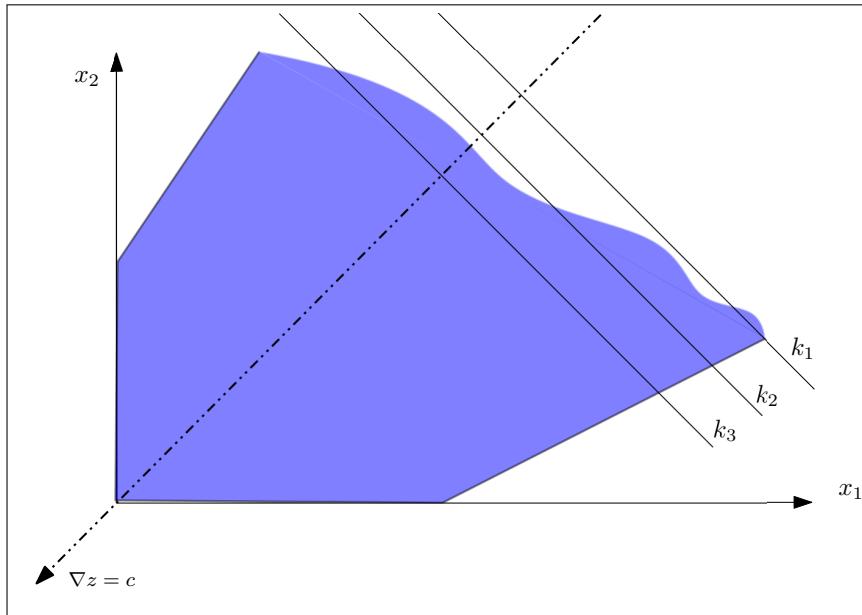


Figura 1.6: Soluzione grafica del problema (1.4):  $k_1 < k_2 < k_3$ .

OSSERVAZIONE 1.1.10. *L'illimitatezza della regione ammissibile è una condizione necessaria ma non sufficiente a garantire l'illimitatezza della funzione obiettivo. Ad esempio se sulla stessa regione ammissibile si vuole minimizzare la funzione  $z(x_1, x_2) = x_2$ , allora esistono infinite soluzioni ottime. Così come se volessimo massimizzare  $z(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$  la soluzione esiste ed è finita. Perciò l'illimitatezza di un problema dipende non solo dall'illimitatezza della regione ammissibile, ma dalla funzione obiettivo e dall'obiettivo che stiamo perseguiendo*

◊

ESERCIZIO 1.1.6. Risolvere graficamente il problema

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ Ax & \geq b \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \end{bmatrix} \\ x & \geq 0 \end{array} \quad (1.5)$$

*Soluzione* – Si vede banalmente che i vincoli sono *opposti* rispetto a quelli del problema (1.4) e pertanto sono incompatibili, cioè l'intersezione dei relativi semispazi è vuota. Quindi il problema (1.5) non ammette soluzione ottima perché inammissibile.

◊

OSSERVAZIONE 1.1.11. Riassumendo: per un problema di PL vale una sola delle seguenti proprietà

1. ammette soluzione ottima unica (problema 1.1), oppure
2. ammette infinite soluzioni ottime, delle quali almeno una corrisponde ad un vertice (problema 1.5), oppure
3. non ammette soluzione ottima. In questo caso il problema può essere illimitato (problema 1.4) oppure inammissibile (problema 1.5)

In ogni caso, se non vuoto, l'insieme delle soluzioni ottime di un problema di PL è un insieme convesso.

□

## 1.2 Esercizi non svolti

ESERCIZIO 1.2.1 ■ E' assegnato il poliedro

$$P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 \leq 4, x_1 - x_2 \leq 1, -2x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

1. Determinare i vertici di  $P$  e quelli di  $P_{FS}$ .
2. Determinare graficamente il minimo della funzione  $z(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$  su  $P$

## Indice

Algoritmo del Simplex e Dualità 15

2.1 Esercizi Svolti . . . . . 15

2.2 Esercizi non svolti . . . . . 41

# Capitolo 2

## Algoritmo del Simplex e Dualità

### 2.1 Esercizi Svolti

ESERCIZIO 2.1.1. E' assegnato il seguente problema di PL  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \min z(x) = & x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 - x_3 \geq 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Determinare la soluzione ottima di  $\mathcal{P}$ .
2. Determinare la soluzione ottima del problema duale  $\mathcal{D}$
3. Studiare la sensibilità della soluzione ottima di  $\mathcal{P}$  a seguito di variazioni dei termini noti del primo e secondo vincolo e dei coefficienti di costo di  $x_1$  e  $x_3$  di  $\mathcal{P}$

Soluzione – Il problema in forma standard è il seguente  $P_{FS}$

$$\begin{aligned} \min z(x) = & x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ & x_1 - x_3 - x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Non avendo a disposizione una base ammissibile iniziale per  $P_{FS}$ , ricorriamo al Metodo a Due Fasi.

### Prima Fase

Costruiamo il problema artificiale, notando che il numero minimo di variabili artificiali da usare è due: una per il primo vincolo ed una per il terzo. Quindi il problema artificiale è il seguente

$$\begin{aligned} \min \rho = & \alpha_1 + \alpha_2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 & + \alpha_1 = 6 \\ x_1 + x_2 & + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 & - x_5 + \alpha_2 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_1, \alpha_2 & \geq 0 \end{aligned}$$

Il tableau del problema artificiale, in forma canonica rispetto alla base  $\beta = \{\alpha_1, x_4, \alpha_2\}$  risulta

$$\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -3 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \end{array}$$

*Iterazione 1* - Applichiamo l'Algoritmo del Simplex. Pivot sull'elemento (3, 1): la variabile  $x_1$  entra in base, esce la variabile  $\alpha_2$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & -4 \end{array}$$

*Iterazione 2* - Entra in base la variabile  $x_2$ , esce la variabile  $\alpha_1$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Stop. La soluzione del problema artificiale è ottima e  $\rho^* = 0$ . Pertanto  $P_{FS}$  è ammissibile ed una base ammissibile è proprio la base ottima del problema artificiale  $\beta = \{x_2, x_4, x_1\}$ . Si noti che la base è degenera.

### Seconda Fase

Il tableau di  $P_{FS}$ , in forma canonica rispetto alla base  $\beta = \{x_2, x_4, x_1\}$  risulta

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & -5 \end{array}$$

La soluzione non è ottima.

*Iterazione 1* - Entra in base la variabile  $x_5$ , esce la variabile  $x_2$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1/2 & -3/2 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 1/2 & 7/2 & 0 & 0 & -3 \end{array}$$

Stop. Soluzione Ottima  $x_{FS}^* = (3, 0, 0, 2, 2)^\top$ ,  $z^* = 3$

La soluzione ottima del problema duale si può ottenere applicando il Teorema di Complementarietà. Scriviamo il duale del problema in forma standard

$$\begin{aligned}
\max w(y) = & \quad 6y_1 + 5y_2 + y_3 \\
& 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 1 \\
& y_1 + y_2 \leq 1 \\
& -3y_1 - y_3 \leq 2 \\
& y_2 \leq 0 \\
& -y_3 \leq 0
\end{aligned}$$

Poiché in  $P_{FS}$  si ha  $x_1^*, x_4^*, x_5^* \geq 0$ , allora in  $D$  il primo, il quarto ed il quinto vincolo devono essere soddisfatti all'uguaglianza (devono averre slack nulla, ovvero essere attivi)

$$\begin{aligned}
2y_1 + y_2 + 2y_3 &= 1 \\
y_2 &= 0 \\
y_3 &= 0
\end{aligned}$$

Ricaviamo quindi  $y_1^* = 1/2$ ,  $y_2^* = y_3^* = 0$ ,  $w^* = 3 = z^*$ .

### Per i più volenterosi

Studiamo, infine, la sensibilità della soluzione ottima di  $P$  a variazioni sul termine noto del primo e del secondo vincolo e sui coefficienti di costo delle variabili  $x_1$  e  $x_3$ .

La matrice di base ottima e la sua inversa sono

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le variazioni sui termini noti possono inficiare l'ammissibilità della base ottima. Quindi, per studiare la sensibilità della base ottima a variazioni delle componenti  $b_1$  e  $b_2$  del vettore  $b$ , basta imporre che, a seguito delle variazioni, la base  $B^*$  sia ancora ammmissible, e cioè

$$(B^*)^{-1} \begin{bmatrix} 6 + \Delta_1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (B^*)^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 + \Delta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

Pertanto, nel primo caso, avremo

$$\begin{aligned} 2 + \Delta_1/2 &\geq 0 \\ 2 - \Delta_1/2 &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad -4 \leq \Delta_1 \leq 4 \\ 3 + \Delta_1/2 &\geq 0 \end{aligned}$$

mentre, a seguito di variazioni su  $b_2$ , la base resterà ammissibile se

$$\begin{aligned} 2 &\geq 0 \\ 2 + \Delta_2 &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_2 \geq -2 \\ 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le variazioni sui coefficienti di costo, bisogna distinguere i due casi:

1. *Variazione di un  $c_j$  relativo ad una variabile non di base*

Se il coefficiente  $c_j$  assume il valore  $c_j + \Delta$ , i coefficienti di costo ridotti diventano

$$\hat{c}_N^\top(\Delta) = (c_N^\top + \Delta \mathbf{e}_j^\top) - c_B^\top (B^*)^{-1} N$$

essendo  $\mathbf{e}_j$  un vettore unitario (con 1 in posizione  $j$ ). Pertanto

$$\hat{c}_N^\top(\Delta) = \underbrace{c_N^\top - c_B^\top (B^*)^{-1} N}_{\hat{c}_N^\top} + \Delta \mathbf{e}_j^\top$$

Imponendo che a seguito della variazione la base  $B^*$  sia ancora ottima, avremo

$$\begin{aligned} \hat{c}_N^\top(\Delta) &= \underbrace{c_N^\top - c_B^\top (B^*)^{-1} N}_{\hat{c}_N^\top} + \Delta \mathbf{e}_j^\top \geq 0 \quad \Rightarrow \\ \hat{c}_N^\top + \Delta \mathbf{e}_j^\top &\geq 0 \Rightarrow \\ \hat{c}_j + \Delta &\geq 0 \end{aligned}$$

Quindi nel nostro caso si ha

$$\hat{c}_3 + \Delta \geq 0 \Rightarrow 7/2 + \Delta \geq 0$$

ovvero la base  $B^*$  rimane ottima se  $\Delta \geq -7/2$ .

2. *Variazione di un  $c_j$  relativo ad una variabile di base*

In questo caso si ha

$$\hat{c}_N^\top(\Delta) = c_N^\top - (c_B^\top + \Delta e_j^\top)(B^*)^{-1} N = \underbrace{c_N^\top - c_B^\top(B^*)^{-1} N}_{\hat{c}_N^\top} - \Delta e_j^\top(B^*)^{-1} N \geq 0 \Rightarrow \\ \hat{c}_N^\top \geq \Delta e_j^\top(B^*)^{-1} N$$

Nel nostro caso avremo

$$[\hat{c}_2, \hat{c}_3] = [1/2, 7/2] \geq [0, 0, \Delta] \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ovvero

$$[1/2, 7/2] \geq \left[ \frac{\Delta}{2}, -\frac{3\Delta}{2} \right] \Rightarrow -\frac{7}{3} \leq \Delta \leq 1$$

◊

ESERCIZIO 2.1.2. E' assegnato il seguente problema di PL  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \min z(x) = & 3x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & -3x_1 + 2x_2 \geq -5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Risolvere  $\mathcal{P}$  con l'Algoritmo del Simplesso.
2. Determinare la soluzione ottima del problema duale di  $\mathcal{P}$  Risolvere P usando il metodo del simplesso

*Soluzione* – Il problema in forma standard, dopo aver cambiato di segno al terzo vincolo, è il seguente  $P_{FS}$

$$\begin{aligned}
\min z(x) = & \quad 3x_1 + x_2 \\
& 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\
& 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Nel problema  $P_{FS}$  non è immediatamente disponibile una base ammissibile con cui fare partire l'algoritmo del Simplex. Ricorriamo al Metodo a Due Fasi.

### Prima Fase

Costruiamo il problema artificiale, notando che il numero minimo di variabili artificiali da usare è due: una per il primo vincolo ed una per il secondo vincolo. Quindi il problema artificiale è il seguente

$$\begin{aligned}
\min \rho = & \quad \alpha_1 + \alpha_2 \\
& 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \alpha_1 = 1 \\
& 3x_1 + x_2 + x_3 + \alpha_2 = 1 \\
& 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Il tableau del problema artificiale, in forma canonica rispetto alla base  $\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, x_5\}$  risulta

$$\begin{array}{ccccccc|c}
2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
\hline
-5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2
\end{array}$$

*Iterazione 1* - Entra in base la variabile  $x_1$ , esce la variabile  $\alpha_2$

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 1/3 & -5/3 & -1 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\
1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\
0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\
\hline
0 & -1/3 & 5/3 & 1 & 0 & 0 & 5/3 & -1/3
\end{array}$$

*Iterazione 2* - Entra in base la variabile  $x_2$ , esce la variabile  $\alpha_1$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 1 & -5 & -3 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -9 & 1 & 9 & -7 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Stop. La soluzione del problema artificiale è ottima e  $\rho^* = 0$ . Pertanto  $P_{FS}$  è ammissibile ed una base ammissibile è proprio la base ottima del problema artificiale  $\beta = \{x_2, x_1, x_5\}$ . Si noti che la base è degenere.

### Seconda Fase

Il tableau di  $P_{FS}$ , in forma canonica rispetto alla base  $\beta = \{x_2, x_1, x_5\}$  risulta

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -5 & -3 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -9 & 1 & & 7 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & & -1 \end{array}$$

La soluzione non è ottima.

*Iterazione 1* - Entra in base la variabile  $x_3$ , esce la variabile  $x_1$  (Iterazione degenere)

$$\begin{array}{ccccc|c} 5/2 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -1 & 1 & 7 \\ \hline 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1 \end{array}$$

Stop. Soluzione Ottima  $x_{PFS}^* = (0, 1, 0, 0, 7)^\top$ ,  $z^* = 1$

La soluzione del duale si può ottenere applicando le relazioni di complementarietà. Scriviamo il duale del problema in forma standard

$$\begin{aligned}
\max w(y) = & \quad y_1 + y_2 + 5y_3 \\
& 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 3 \\
& y_1 + y_2 - 2y_3 \leq 1 \\
& -y_1 + y_2 \leq 0 \\
& -y_1 \leq 0 \\
& y_3 \leq 0
\end{aligned}$$

Poiché in  $P_{FS}$  si ha  $x_2^*, x_5^* \geq 0$ , allora in D il secondo ed il quinto vincolo devono essere soddisfatti all'uguaglianza

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 - 2y_3 &= 1 \\
y_3 &= 0
\end{aligned}$$

ovvero  $y_1 + y_2 = 1$ . Posto, ad esempio,  $y_2 = k \in \mathbb{R}$ , si ha che le soluzioni del precedente sistema di 2 equazioni in tre incognite, sono gli  $\infty^1$  punti del tipo  $y(k) = (y_1, y_2, y_3)^\top = (1 - k, k, 0)^\top$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Vediamo per quali valori di  $k$  il vettore  $y(k)$  è ammissibile per D

$$\begin{aligned}
2(1 - k) + 3k &\leq 3 \Rightarrow k \leq 1 \\
(1 - k) + k &\leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 \\
-(1 - k) + k &\leq 0 \Rightarrow k \leq 1/2 \\
-(1 - k) &\leq 0 \Rightarrow k \leq 1
\end{aligned}$$

Ricaviamo, quindi che per ogni valore di  $k \leq 1/2$  la soluzione  $y(k)$ , complementare a  $x_{FS}^*$ , è ammissibile per D e quindi anche ottima.

OSSERVAZIONE 2.1.1. E' facile verificare quanto segue:

1. la degenericità della soluzione ottima in  $\mathcal{P}$  ( $D$ ) implica che  $D$  ( $\mathcal{P}$ ) presenta ottimi multipli.

Questo avviene perché la relazione che lega la variabile di base nulla in  $\mathcal{P}$  ( $D$ ) con lo scarto del corrispondente vincolo in  $D$  ( $\mathcal{P}$ ) è soddisfatta indipendentemente dal valore dello scarto. Nel nostro esempio la relazione tra  $x_2^*$  e lo scarto del secondo vincolo duale è automaticamente soddisfatta. Ne segue che delle tre equazioni necessarie per determinare  $y^*$  dalle relazioni di complementarietà ne riusciamo ad impostare solo due. Il risultante sistema è sottodimensionato ed ammette  $\infty^l$  soluzioni, essendo  $l$  il grado di degenericità della soluzione ottima del primale.

2. Tranne casi patologici, è generalmente vero anche il viceversa: se  $\mathcal{P}$  ( $\mathcal{D}$ ) ha infinite soluzioni ottime allora  $\mathcal{D}$  ( $\mathcal{P}$ ) presenta soluzione ottima degenere.
3. Nel caso di infinite soluzioni ottime almeno una di esse deve essere di base (Teorema Fondamentale della PL) e quindi l'intervallo di variabilità di  $k$  (o degli  $l$  parametri in generale) deve avere un estremo limitato. Nel nostro esempio la soluzione di base si ottiene per  $k = 1/2$

◊

ESERCIZIO 2.1.3. E' assegnato il problema primale  $\mathcal{P}$  ed il punto  $\bar{y} = (3, \frac{3}{2})$  nello spazio delle variabili duali.

$$\begin{aligned} \max z(x) = & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Verificare che  $\bar{y}$  è una soluzione ammissibile non di base per il problema duale  $\mathcal{D}$ .
2. Determinare una soluzione  $\hat{y}$  ammissibile di base per  $\mathcal{D}$  a partire da  $\bar{y}$ .
3. Con le informazioni ricavate ai punti precedenti determinare le soluzioni ottime di  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{D}$ .
4. Servendosi della rappresentazione grafica del problema  $\mathcal{D}$  verificare la correttezza delle risposte date ai punti precedenti e giustificare le seguenti affermazioni:
  - (a) Per ogni scelta dei termini noti dei vincoli di  $\mathcal{P}$ , la variabile di surplus associata al terzo vincolo duale è sempre non nulla.
  - (b) Se si sceglie il coefficiente di costo della variabile  $y_1$  in  $\mathcal{D}$  pari a -1 e quello della variabile  $y_2$  pari a 0, allora la regione ammissibile del problema  $\mathcal{P}$  è vuota.

*Soluzione* – Il problema duale e il problema duale in forma standard sono, rispettivamente,

$$\begin{aligned}
\min w(y) = & \quad 8y_1 + 6y_2 \\
& y_1 + y_2 \geq 2 \\
\mathcal{D} \quad & 2y_1 - 2y_2 \geq 3 \\
& 3y_1 + 2y_2 \geq 5 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min w(y) = & \quad 8y_1 + 6y_2 \\
& y_1 + y_2 - y_3 = 2 \\
\mathcal{D}_{FS} \quad & 2y_1 - 2y_2 - y_4 = 3 \\
& 3y_1 + 2y_2 - y_5 = 5 \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
\end{aligned}$$

Si ha quindi che le coordinate di  $\bar{y}$  in forma standard sono

$$\bar{y}_{FS} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = \left(3, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0, 7\right)^\top$$

Ne segue che  $\bar{y}_{FS}$  è **una soluzione ammissibile** (variabili di surplus non negative) **non di base** (le colonne della matrice  $A$  associate alle componenti non nulle di  $\bar{y}_{FS}$  sono sicuramente linearmente dipendenti).

Per determinare una soluzione di base per il problema Duale a partire da  $\bar{y}_{FS}$  si procede come nella dimostrazione del Teorema Fondamentale della PL. Poiché  $A_1, A_2, A_3, A_5$  sono linearmente dipendenti, esisteranno gli scalari  $d_1, d_2, d_3, d_5$ , non tutti nulli, tali che

$$d_1A_1 + d_2A_2 + d_3A_3 + d_5A_5 = 0$$

ovvero

$$\left\{ \begin{array}{lcl} d_1 + d_2 - d_3 & = & 0 \\ 2d_1 - 2d_2 & = & 0 \\ 3d_1 + 2d_2 - d_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

le cui  $\infty^1$  soluzioni sono  $d_1 = d_2 = k, d_3 = 2k, d_5 = 5k$  con  $k \in \mathbb{R}$ . Posto ad esempio  $k = 1$ , se si impone la non negatività del vettore  $\bar{y}_{FS} - \varepsilon d$  (essendo  $d = [d_1, d_2, d_3, 0, d_5]^\top$ )

si trovano, al variare di  $\varepsilon$ , tutti i punti ammissibili per  $\mathcal{D}$  che stanno sul segmento passante per  $\bar{y}_{FS}$ , parallelo a  $d$ , ed avente per estremi i punti  $\bar{y}_{FS} - \varepsilon_{\min}d$  e  $\bar{y}_{FS} - \varepsilon_{\max}d$ .

$$\bar{y}_{FS} - \varepsilon d \geq 0 \implies \begin{cases} 3 - \varepsilon \geq 0 \\ \frac{3}{2} - \varepsilon \geq 0 \\ \frac{5}{2} - 2\varepsilon \geq 0 \\ 7 - 5\varepsilon \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \varepsilon \leq 3 \\ \varepsilon \leq \frac{3}{2} \\ \varepsilon \leq \frac{5}{4} \\ \varepsilon \leq \frac{7}{5} \end{cases} \implies \varepsilon \leq \frac{5}{4}$$

Ne risulta che comunque si scelga  $-\infty \leq \varepsilon \leq \frac{5}{4}$ , il punto  $\hat{y}_{FS} = \bar{y}_{FS} - \varepsilon d$  è ammissibile per  $\mathcal{D}_{FS}$ .<sup>1</sup> Scegliendo  $\varepsilon = \varepsilon_{\max} = \frac{5}{4}$ , si ottiene  $\bar{y}_{FS} - \frac{5}{4}d = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{3}{4}\right)^T$ . A questo punto bisogna controllare che  $A_1, A_2$  e  $A_5$  siano linearmente indipendenti. Poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

il punto  $\hat{y}_{FS} = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{3}{4}\right)^T$  è una soluzione ammissibile di base per  $\mathcal{D}$  in cui la funzione duale vale  $w(\hat{y}) = \frac{31}{2}$ .

Il punto  $\hat{y}_{FS}$  può essere utilizzato come punto iniziale per applicare l'algoritmo del Simplex al problema  $\mathcal{D}_{FS}$ . Il Tableau iniziale  $T^0$  per  $\mathcal{D}_{FS}$  è il seguente

$T^0$	1	1	-1	0	0	2
2	-2	0	-1	0		
3	2	0	0	-1		
8	6	0	0	0		
						0

Per portare il  $T^0$  in forma canonica rispetto alla base  $\beta = \{1, 2, 5\}$  basta calcolare l'inversa della matrice di base

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

---

<sup>1</sup>Poiché la regione ammssibile dei problemi di PL è sempre un poliedro  $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$ , almeno uno tra  $\varepsilon_{\min}$  e  $\varepsilon_{\max}$  ha sempre valore finito.

e pre-moltiplicare  $T^0$  per la matrice

$$Q = \left( \begin{array}{cc|c} B^{-1} & 0 \\ -c_B^\top B^{-1} & 1 \end{array} \right)$$

Si ottiene

$$QT^0 = T^1$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ \hline 0 & 0 & 7 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{31}{2} \end{array}$$

Poiché in  $T^1$  l'ultima riga, che rappresenta i costi ridotti rispetto alla base  $B$ , è non negativa, la soluzione  $y^* = \hat{y}_{FS}$  è ottima con  $w^* = \frac{31}{2}$ .

La soluzione ottima del problema primale la si può calcolare utilizzando le relazioni di complementarietà

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 > 0 &\implies x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ \hat{y}_2 > 0 &\implies x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ \hat{y}_5 > 0 &\implies x_3 = 0 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo  $x_1 = 7$  e  $x_2 = \frac{1}{2}$ . Pertanto la soluzione ottima di base per il problema primale è rappresentata dal vettore  $x^* = \left(7, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)^\top$ , con  $z^* = \frac{31}{2}$ .

Per rispondere ai quesiti del punto (4), facciamo riferimento alla rappresentazione grafica del problema Duale (si veda figura 2.1).

- a) Poiché la variazione del vettore dei termini noti  $b$  modifica la regione ammissibile di  $P$  ma non quella di  $D$ , e poiché il terzo vincolo duale è sempre *non attivo* in qualsiasi soluzione ammissibile del duale stesso, si avrà sempre  $3y_1 + 2y_3 - 5 > 0$ .
- b) Se  $\nabla w = [-1, 0]^\top$  allora  $D$  è illimitato, di conseguenza deve essere  $\Omega(P) = \emptyset$

◇

ESERCIZIO 2.1.4. E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare  $\mathcal{P}$

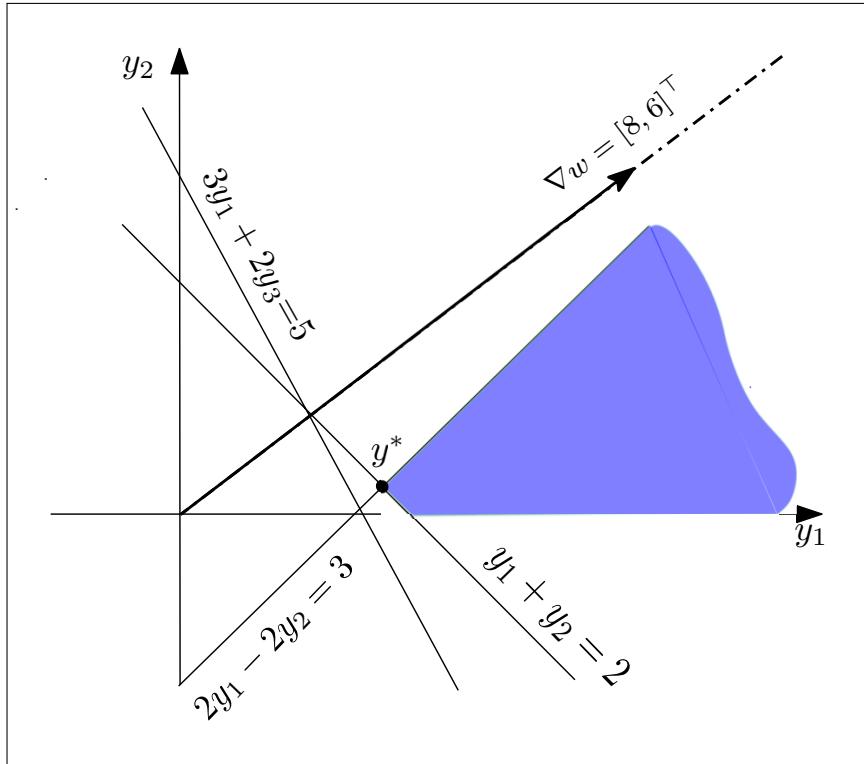


Figura 2.1: Esercizio 2.1.3 - Rappresentazione del problema duale .

$$\begin{aligned}
 \min z(x) = & \quad 6x_1 + 6x_2 - 12x_3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 2 \\
 & 3x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

1. Analizzare i seguenti punti  $x^A = (1, 4, 0)^\top$ ,  $x^B = (0, 0, 0)$  e stabilire se si tratta di soluzioni ammissibili, di base, ottime.
2. Qualora nessuno tra  $x^A$  e  $x^B$  risulti essere soluzione ottima, risolvere  $\mathcal{P}$ .
3. Determinare la soluzione ottima del problema duale  $\mathcal{D}$  di  $\mathcal{P}$ , applicando la teoria della dualità.
4. Rappresentare graficamente il problema duale e verificare la correttezza delle risposte date ai punti 2 e 3.
5. Si consideri, infine, di introdurre in  $\mathcal{P}$  una nuova variabile  $x_t$  con coefficiente unitario nel primo vincolo e nullo nel secondo. Come si modificano, se si modi-

ficano, le soluzioni ottime di  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{D}$  nel caso in cui il coefficiente di costo di  $x_t$  è pari a 7? Come invece nel caso è 3?

*Soluzione* – Il problema P in forma standard è il seguente

$$\begin{aligned} \min z(x) = & \quad 6x_1 + 6x_2 - 12x_3 \\ \mathcal{P}_{FS} \quad & -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \\ & -3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

e le componenti di  $x_A$  e  $x_B$  nello spazio delle variabili di  $\mathcal{P}_{FS}$  sono

$$(x^A)_{FS} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top = [1, 4, 0, 4, 0]$$

$$(x^B)_{FS} = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top = [0, 0, 0, -2, 1]$$

Ne risulta che  $(x^A)_{FS}$  è una soluzione ammissibile non di base; viceversa  $(x^B)_{FS}$  è una soluzione di base non ammissibile. Riguardo all'ottimalità dei due punti assegnati,  $(x^B)_{FS}$  non può essere ottimo, essendo non ammissibile; per verificare l'ottimalità di  $(x^A)_{FS}$  bisogna far ricorso al teorema degli scarti complementari, poiché  $(x^A)_{FS}$  non è una soluzione di base.

Ricavando il duale della forma standard di  $\mathcal{P}$ , si ha

$$\begin{aligned} \max w(y) = & \quad 2y_1 + y_2 \\ \mathcal{D}_{FS} \quad & -2y_1 - 3y_2 \leq 6 \\ & 2y_1 + y_2 \leq 6 \\ & -3y_1 + 3y_2 \leq -12 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Imponendo le relazioni di complementarietà otteniamo

$$\begin{aligned} x_1^A > 0 \implies & -2y_1 - 3y_2 = 6 \\ x_2^A > 0 \implies & 2y_1 + y_2 = 6 \\ x_4^A > 0 \implies & y_1 = 0 \end{aligned}$$

Il sistema è chiaramente incompatibile, quindi  $(x^A)_{FS}$  non può essere soluzione ottima. Per determinare la soluzione ottima di  $\mathcal{P}$  utilizziamo il metodo a due fasi<sup>2</sup>.

### Prima fase

Costruiamo il problema artificiale, notando che è sufficiente utilizzare una sola variabile artificiale nel primo vincolo. Quindi il problema artificiale è il seguente

$$\begin{array}{llllllllll} \min & \rho = & \alpha \\ & -2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & + \alpha & = 2 \\ & -3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & + x_5 & = 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & \alpha \geq 0 & & & \end{array}$$

Il tableau del problema artificiale, in forma canonica rispetto alla base  $\beta = \{\alpha, x_5\}$  risulta

$$\begin{array}{ccccccc|c} -2 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

Con un'operazione di pivot in posizione (1,2), la variabile  $x_2$  entrerà in base e la variabile artificiale uscirà dalla base

$$\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Poiché  $\rho^* = 0$  allora  $\mathcal{P}_{FS}$  è ammissibile.

### Seconda Fase

La base ottima del problema artificiale  $\beta = \{x_1, x_5\}$  è una base ammissibile per  $\mathcal{P}_{FS}$  ed il tableau in forma canonica rispetto a tale base risulta

$$\begin{array}{ccccccc|c} -1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \hline 12 & 0 & -6 & 3 & 0 & -6 \end{array}$$

---

<sup>2</sup>In maniera alternativa si può costruire una soluzione ammissibile di base a partire da  $x_{FS}^A$

Portando in base la variabile  $x_3$  nel secondo vincolo, otteniamo

$$\begin{array}{ccccc|c} -\frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline 9 & 0 & 0 & \frac{15}{4} & \frac{3}{2} & -6 \end{array}$$

Siamo all'ottimo:  $x^* = [0, 1, 0, 0, 0]^\top$ ;  $c^\top x^* = 6$ .

Per calcolare la soluzione ottima di  $\mathcal{D}_{FS}$  utilizziamo di nuovo le relazioni di complementarietà:

$$x_2^* > 0 \implies 2y_1 + y_2 = 6$$

Osserviamo che essendo la soluzione ottima di  $\mathcal{P}$  degenere il sistema che ricaviamo dalle relazioni di complementarietà risulta essere sottodeterminato (il numero di incognite è maggiore del numero di equazioni) e pertanto ammette infinite soluzioni.

Nel nostro esempio la soluzione dell'equazione

$$2y_1 + y_2 = 6$$

è costituita dall'insieme di punti del tipo  $y_1 = 3 - \frac{k}{2}$ ,  $y_2 = k$  con  $k \in \mathbb{R}$ . Vediamo per quali valori di  $k$  il generico punto  $y(k)$  è ammissibile per  $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} -6 + k - 3k &\leq 6 \Rightarrow k \geq -6 \\ -6 + k + k &\leq 6 \Rightarrow 6 \leq 6 \\ -6 + k + 3k &\leq -12 \Rightarrow k \leq -\frac{3}{2} \\ -6 + k &\leq 0 \Rightarrow k \leq 6 \\ k &\leq 0 \Rightarrow k \leq 0 \end{aligned}$$

Risulta quindi che il punto  $y(k)$ , complementare ad  $x^*$ , è ammissibile per  $\mathcal{D}$  se  $-6 \leq k \leq -\frac{3}{2}$  e per tali valori esso è soluzione ottima di  $\mathcal{D}$ . Il problema duale  $\mathcal{D}$  ammette infinite soluzioni ottime. In particolare i punti

$$\begin{aligned} y\left(-\frac{3}{2}\right) &= \left[\frac{15}{4}, -\frac{3}{2}\right]^\top \\ y(-6) &= [6, -6]^\top \end{aligned}$$

sono soluzioni ottime di base. Infatti come si può verificare dalla figura 2.2 essi corrispondono, rispettivamente, ai vertici  $A$  e  $B$  di  $\Omega(\mathcal{D})$ .

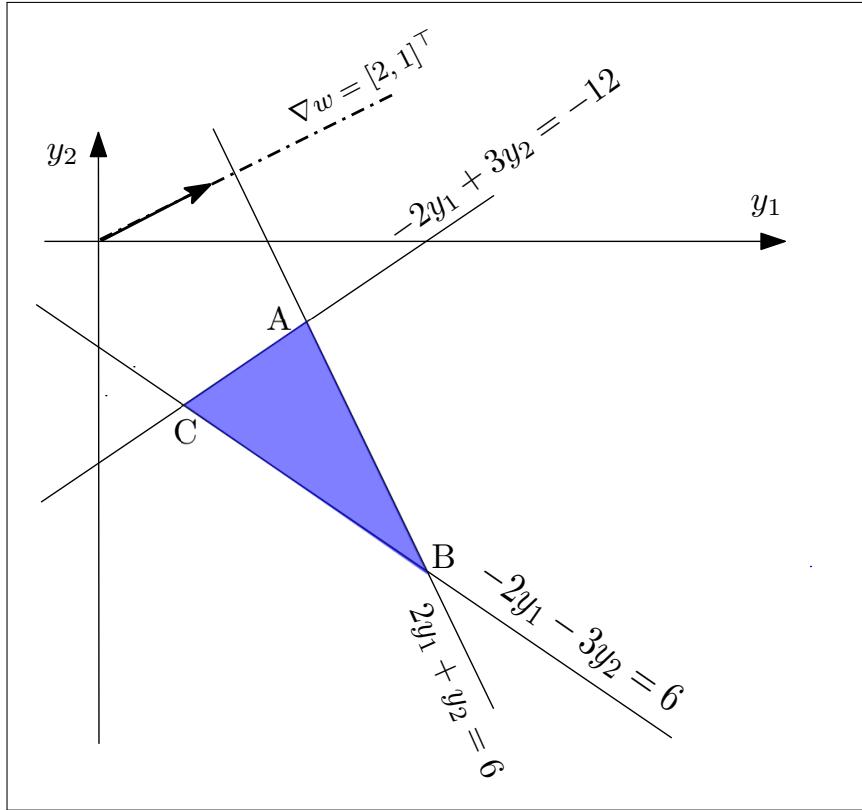


Figura 2.2: Esercizio 2.1.4 - Rappresentazione del problema duale .

Infine, l'analisi di sensibilità sulle soluzioni ottime di  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{D}$  (punto 5 dell'esercizio), è possibile effettuarla graficamente sul problema  $\mathcal{D}$ , ricordando che l'introduzione di una nuova variabile in  $\mathcal{P}$  corrisponde all'introduzione di un nuovo vincolo in  $\mathcal{D}$ . Poiché questa nuova variabile comparirà solo nel primo vincolo primale con coefficiente unitario, nel duale avremo un nuovo vincolo del tipo  $y_1 \leq c$ , con  $c = 7$  e  $c = 3$ . Nel primo caso, rappresentato in figura 2.3, non si ha alcun effetto: la regione ammissibile del Duale non cambia, e pertanto non cambieranno le soluzioni ottime di  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{P}$ . Il vincolo  $y_1 \leq 7$  non sarà mai attivo e pertanto la nuova variabile introdotta in  $\mathcal{P}$  avrà sempre valore nullo in qualsiasi soluzione ottima.

Quando invece in  $\mathcal{D}$  introduciamo il vincolo  $y_1 \leq 3$ , la regione ammissibile duale cambia (vedi figura 2.4): tutte le infinite soluzioni ottime diventano inammissibili, ed il nuovo vertice ottimo è  $y^* = [3, -2]^\top$ , in cui sono attivi il vincolo  $y_1 \leq 3$  ed il terzo vincolo.

Applicando le relazioni di complementarietà a  $\mathcal{P}_{FS}$  e  $\mathcal{D}_{FS}$ , dopo aver aggiunto nel primo la nuova variabile variabile  $x_t$  e nel duale il corrispondente vincolo avremo:

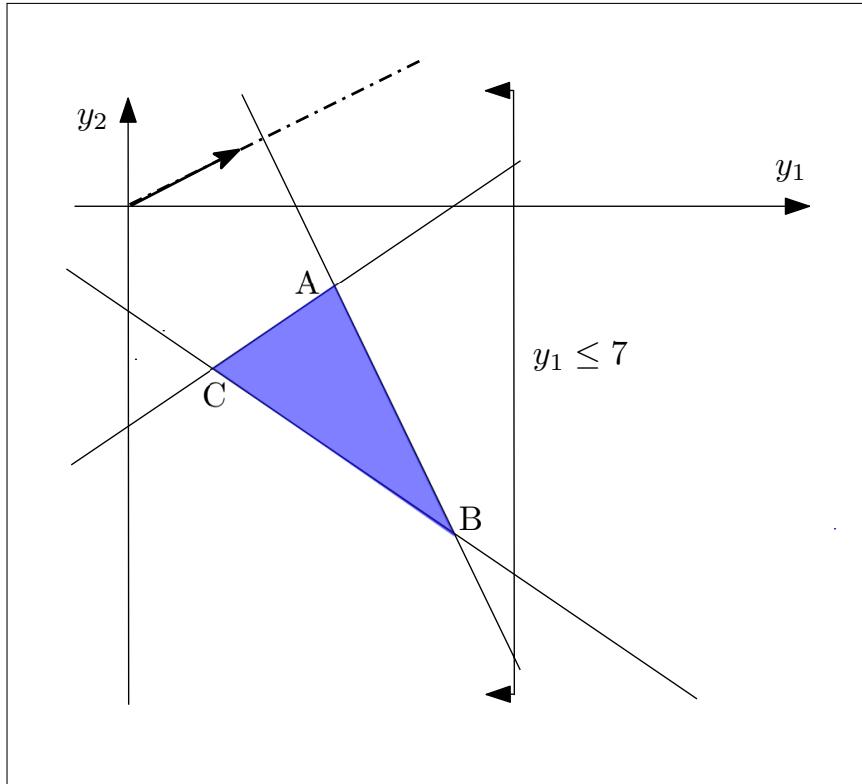


Figura 2.3: Esercizio 2.1.4 - Introduzione del vincolo duale  $y_1 \leq 7$ .

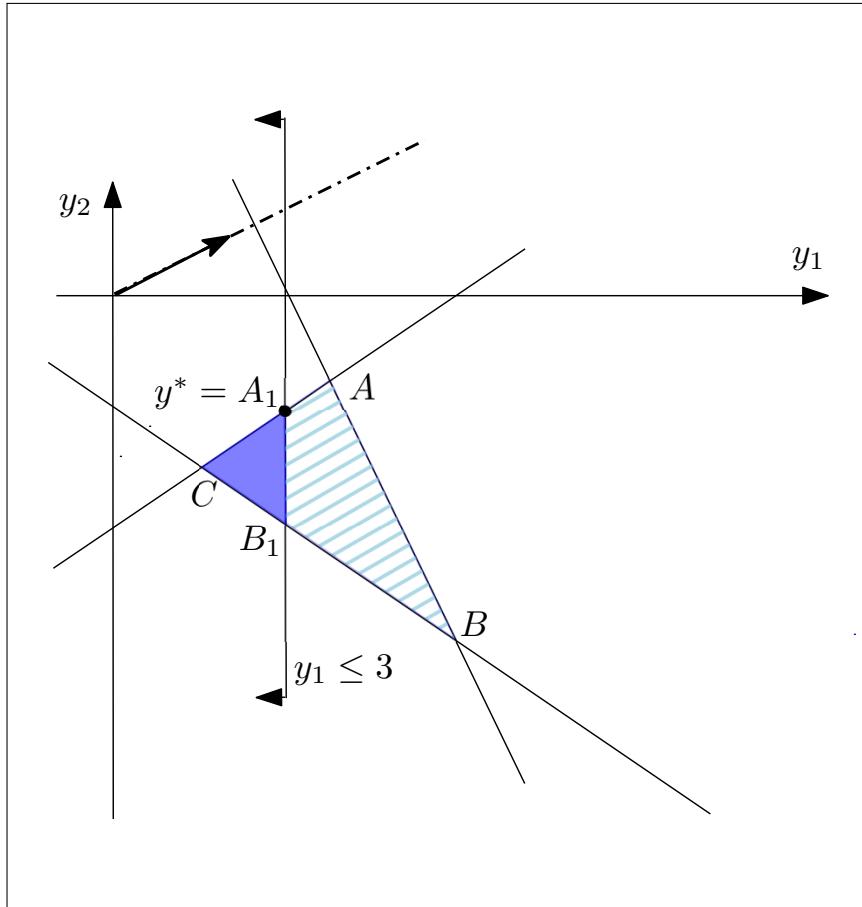
$$\begin{aligned}
 c_1 - A_1^\top y > 0 &\implies x_1 = 0 \\
 c_2 - A_2^\top y > 0 &\implies x_2 = 0 \\
 y_1 > 0 &\implies x_4 = 0 \\
 y_2 < 0 &\implies x_5 = 0
 \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
 -2x_3 + x_t &= 2 \\
 3x_3 &= 1
 \end{aligned}$$

cioè  $x^* = [0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{8}{3}]^\top$

◇

Figura 2.4: Esercizio 2.1.4 - Introduzione del vincolo duale  $y_1 \leq 3$ .

ESERCIZIO 2.1.5. Risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 = 1 \\
 & x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\
 & -2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

*Soluzione* – Per risolvere  $\mathcal{P}$  applichiamo il metodo a due fasi.

### Prima Fase

Introducendo le variabili artificiali  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , il tableau iniziale per il problema artificiale, rispetto alla base  $\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  è il seguente

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

Portando in base la variabile  $x_1$  nel primo vincolo, la variabile  $\alpha_1$  uscirà dalla base (pivot in posizione (1,1)). Successivamente si porta in base la variabile  $x_3$  nel secondo vincolo, facendo uscire dalla base la variabile  $\alpha_2$  (pivot in posizione (2,3)). Si perviene quindi al seguente tableau  $T^*$  in forma canonica rispetto alla base  $\beta = \{x_1, x_3, \alpha_3\}$

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

Dall'ultimo tableau troviamo che  $\rho^* = 0$ , il che garantisce che la regione ammissibile di  $\mathcal{P}$  è non vuota, ma  $\alpha_3$  è in base con valore nullo. Il problema artificiale presenta, pertanto, soluzione ottima degenere. Per fare uscire la variabile  $\alpha_3$  dalla base, bisogna effettuare un'ulteriore operazione di pivot sulla riga  $h = 3$ , scegliendo di fare entrare in base una delle variabili originarie attualmente fuori base ( $x_2$  oppure  $x_4$ ), anche se i rispettivi elementi di pivot  $T_{32}^*$  o  $T_{34}^*$  sono negativi (l'importante è che non siano nulli!). Tale operazione di pivot viene chiamata scambio degenere. Ad esempio operando il pivot in posizione (3,4), si perviene al seguente tableau

$$\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

### Seconda Fase

La base ottima del problema artificiale, essendo  $\rho^* = 0$ , è una base ammissibile per  $\mathcal{P}$ . Pertanto per la seconda fase il tableau iniziale rispetto alla base  $\beta = \{x_1, x_3, x_4\}$  è il seguente

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -10 & 0 & 0 & -7 \end{array}$$

Portando in base la variabile  $x_2$  al posto della variabile  $x_4$  si perviene alla soluzione ottima

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & -7 \end{array}$$

◊

ESERCIZIO 2.1.6. Risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 + x_2 + 3x_3 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

*Soluzione* – Per risolvere  $\mathcal{P}$  applichiamo il metodo a due fasi.

### Prima Fase

Introducendo le variabili artificiali  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , il tableau iniziale per il problema artificiale, rispetto alla base  $\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  è il seguente

$$\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

Portando in base la variabile  $x_1$  nel primo vincolo, la variabile  $\alpha_1$  uscirà dalla base (pivot in posizione (1,1)). Il tableau in forma canonica rispetto alla base  $\beta = \{x_1, \alpha_2, \alpha_3\}$  sarà

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ \hline 0 & -3 & 4 & 2 & 0 & 0 & -3 \end{array}$$

Alla seconda iterazione,  $x_2$  sarà la variabile entrante, mentre c'è indeterminazione nella scelta della variabile uscente. Applicando scrupolosamente la regola di Bland bisogna effettuare l'operazione di pivot in posizione (1,2). Pertanto la variabile  $x_1$  uscirà dalla base. Il tableau rispetto alla base  $x_2, \alpha_2, \alpha_3$  sarà

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 6 & 0 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dall'ultimo tableau ricaviamo che la regione ammissibile di  $\mathcal{P}$  è non vuota ( $\rho^* = 0$ ), ma  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  sono in base con valore nullo. Per portare fuori base tali variabili occorre effettuare due scambi degeneri. Ad esempio portando in base  $x_1$  al posto di  $\alpha_2$  (pivot in (2,1)) si ottiene

$$\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}$$

Volendo fare uscire dalla base la variabile artificiale  $\alpha_3$  bisognerebbe fare entrare in base l'unica variabile originaria che attualmente è fuori base. Ma ciò è impossibile poiché  $T_{33} = 0$ . Si osservi però che la terza riga, in corrispondenza delle variabili originarie è interamente nulla. Questo è indice che una delle equazioni di  $\mathcal{P}$  dipende

linearmente dalle altre, è ridondante nella descrizione della regione ammissibile di  $\mathcal{P}$  e può essere eliminata.

OSSERVAZIONE 2.1.2. Nell'ultimo tableau generato, la condizione di ottimalità non è verificata. Questo non deve preoccuparci: siamo in presenza di soluzioni degeneri ed una base con costi ridotti tutti non negativi per il problema artificiale è già stata determinata (penultimo tableau). In casi come questi in cui nel tableau del problema artificiale si trova una riga tutta nulla in corrispondenza delle variabili originarie del problema, è possibile fermarsi anche se la condizione di ottimalità non è verificata.

### Seconda Fase

Eliminando la terza riga e le ultime tre colonne dal tableau ottimo del problema artificiale, si ottiene il tableau di partenza per la seconda fase, in forma canonica rispetto alla base  $\beta = \{x_2, x_1\}$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{13}{3} & -1 \end{array}$$

Portando in base la variabile  $x_3$  al posto della variabile  $x_1$  si perviene alla soluzione ottima

$$\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{5} & 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ \hline \frac{13}{5} & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

◊

ESERCIZIO 2.1.7. E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \min \quad & 15x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 5x_5 \\ & x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ & 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Determinare quali tra i seguenti punti  $x_A = (0, 0, 0, 3, 10)^\top$ ,  $x_B = (1, 0, 0, 2, 5)^\top$  sono vertici della regione ammissibile del problema  $\mathcal{P}$ .
2. Calcolare il valore della funzione obiettivo in  $x_A$ , in  $x_B$  ed in un generico punto  $\bar{x}$  che sta sul segmento di estremi  $x_A$  ed  $x_B$ .
3. Determinare la soluzione ottima di  $\mathcal{P}$ .
4. Determinare la soluzione ottima del problema duale  $\mathcal{D}$  di  $\mathcal{P}$ , applicando la teoria della dualità.
5. Dopo aver riportato su di un piano cartesiano la regione ammissibile e la funzione obiettivo del problema duale, dimostrare che la variabile  $x_5$  assume sempre valore nullo in qualsiasi soluzione ottima di  $P$ .

*Soluzione* –  $x_A$  è un vertice di  $\Omega(P)$  se e solo se  $x_A$  è una soluzione ammissibile di base per  $P$ . Si verifica facilmente che  $x_A$  è ammissibile ed inoltre  $[A_4, A_5]$  sono linearmente indipendenti. Di conseguenza  $x_A$  è un vertice. Per  $x_B$  troviamo, invece, che esso è ammissibile ma non di base, poiché  $[A_1, A_4, A_5]$  sono linearmente dipendenti. Quindi  $x_B$  non è un vertice di  $\Omega(P)$ .

$z(x_A) = c^\top x_A = 50$ ,  $z(x_B) = c^\top x_B = 40$ . Un qualsiasi punto appartenente al segmento di estremi  $x_A$  ed  $x_B$  può essere scritto come combinazione convessa di  $x_A$  ed  $x_B$ :  $\bar{x} = \lambda x_A + (1 - \lambda)x_B$   $0 \leq \lambda \leq 1$ . Si avrà perciò:  $z(\bar{x}) = c^\top \bar{x} = \lambda c^\top x_A + (1 - \lambda)c^\top x_B = 50\lambda + 40(1 - \lambda) = 40 + 10\lambda$ .

Poiché  $x_A$  è una soluzione ammissibile di base, possiamo risolvere  $P$  a partire da  $x_A$ . Si ha:

$$\beta = \{4, 5\} \quad A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad c_B^\top = [0, 5] \quad c_N^\top = [15, 9, 4]$$

da cui ricaviamo

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} \quad A_B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-c_B^\top A_B^{-1}b = -50 \quad \hat{c}_N^\top = c_N^\top - c_B^\top A_B^{-1}A_N = [\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3] = [-10, 4, 24]$$

Pertanto il Tableau in forma canonica rispetto alla base  $\beta = \{4, 5\}$  è

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -4 & 0 & 1 & 10 \\ \hline -10 & 4 & 24 & 0 & 0 & -50 \end{array}$$

La soluzione non è ottima, poiché  $\hat{c}_1 < 0$ . Si porta in base la variabile  $x_1$  e la variabile  $x_5$  esce dalla base (Pivot in (2,1))

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 2 \\ \hline 0 & 6 & 16 & 0 & 2 & -30 \end{array}$$

Stop. La soluzione ottima è  $x^* = [2, 0, 0, 1, 0]^\top$   $c^\top x^* = 30$ .

Il duale di P (duale della forma standard) è

$$\begin{aligned} \max w(\lambda_1, \lambda_2) = & 3\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ & \lambda_1 + 3\lambda_2 \leq 15 \quad (1) \\ & -\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq 9 \quad (2) \\ & -\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 4 \quad (3) \\ & \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0 \quad (4) \\ & \lambda_2 \leq 5 \quad (5) \end{aligned}$$

Applicando il teorema di complementarietà troviamo

$$\begin{aligned} x_1^* > 0 & \implies \lambda_1 + 3\lambda_2 = 15 \\ x_4^* > 0 & \implies \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{ovvero } \lambda_1^* = 6 \quad \lambda_2^* = 3 \quad w(\lambda_1^*, \lambda_2^*) = b^\top \lambda^* = 30$$

Dopo avere rappresentato la regione ammissibile del problema duale si può osservare che in qualunque punto ammissibile di D, il vincolo corrispondente ad  $x_5$  è sempre non attivo, cioè la variabile di slack associata a tale vincolo è sempre non nulla. Pertanto la relazione di complementarietà  $(5 - \lambda_2^*)x_5^* = 0$  è verificata solo per  $x_5^* = 0$  (qualunque sia il vettore  $b$ ).

◊

## 2.2 Esercizi non svolti

ESERCIZIO 2.2.1 \* Ripetere l'esercizio 2.1.4 considerando il Duale Simmetrico di  $\mathcal{P}$ .

*Soluzione* – Suggerimento: si può passare da  $\mathcal{D}_{FS}$  al duale simmetrico operando il cambio di variabile  $y_2 = -\bar{y}_2$ .

◊

ESERCIZIO 2.2.2 \* Sono dati il problema di PL  $\mathcal{P}$  ed i punti  $x_A = (0, 0, 2, 1)^\top$ ,  $x_B = (0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2})^\top$ .

$$\begin{array}{llllll} \min & 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 = 1 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 \geq -1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

1. Analizzare le proprietà di  $x_A$  ed  $x_B$  in termini di ammissibilità ed ottimalità.
2. Risolvere  $\mathcal{P}$ , qualora nessuno tra  $x_A$  ed  $x_B$  dovesse risultare soluzione ottima di base.
3. Formulare il duale  $\mathcal{D}$  di  $\mathcal{P}$  e risolverlo applicando la teoria della Dualità.
4. Servendosi della rappresentazione grafica, cosa si può dire della soluzione ottima di  $\mathcal{D}$ ?

*Soluzione* – La soluzione ottima di  $\mathcal{P}$  è  $x^* = [0, \frac{1}{3}, 0, 0\frac{4}{3}]^\top$ ,  $z^* = 2$

◊

ESERCIZIO 2.2.3 \* Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare  $\mathcal{P}$

$$\begin{array}{llllll} \max & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 \leq 20 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 \leq 30 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

1. Stabilire se il punto  $x = (0, 12, 2, 6)^\top$

a) è soluzione ammissibile per  $\mathcal{P}$ ;

- b) è soluzione di base per  $\mathcal{P}$ ;
- c) è soluzione ottima per  $\mathcal{P}$ ;
2. Se  $x$  **non** risulta essere una soluzione di base, determinare una soluzione ottima di base per  $\mathcal{P}$ :
- senza far ricorso all'algoritmo del simplex.
  - applicando l'algoritmo del simplex a  $\mathcal{P}$  e confrontando la soluzione ottenuta con quella ricavata al punto (2.a).
3. Scrivere il problema duale di  $\mathcal{P}$ , rappresentarlo graficamente e risolverlo mediante la teoria della dualità. Cosa è evidente dalla rappresentazione grafica del problema duale e cosa ciò comporta sul primale?

*Soluzione* –  $\bar{x}$  è una soluzione ottima non di base. Quindi  $\mathcal{P}$  ammette ottimi multipli, tra i quali  $x_A = [0, 10, 0, 10, 0, 0]^\top$  e  $x_B = [0, 15, 5, 0, 0, 0]^\top$  sono punti di ottimo di base.

◊

**ESERCIZIO 2.2.4** ■ Con riferimento al seguente problema ( $\mathcal{P}$ ) di Programmazione Lineare

$$(\mathcal{P}) \left\{ \begin{array}{l} \max z(x) = 3x_1 - 3x_2 - 20x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 \leq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 3x_4 \leq 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right.$$

- Analizzare le proprietà del punto  $\bar{x}^\top = (0, \frac{1}{6}, 0, 0)$ , stabilendo se si tratti di una soluzione ammissibile di base ottima per  $(\mathcal{P})$ .
- Se il punto dato non è soluzione ammissibile di base, determinarne una a partire da  $\bar{x}$ .
- Risolvere  $\mathcal{P}$ , applicando eventualmente il metodo del simplex a partire dalla soluzione di base individuata al punto 1 o al punto 2.
- Formulare il problema duale  $\mathcal{D}$  di  $\mathcal{P}$ , e risolverlo usando la teoria della dualità.
- Analizzare graficamente come cambiano le soluzioni ottime di  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{P}$  quando in  $\mathcal{P}$  il termine noto del primo vincolo è nullo

**ESERCIZIO 2.2.5** ■ Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
\min \quad & -2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 0 \\
& x_1 + x_2 \leq 5 \\
& x_2 \leq b_3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Dopo aver posto  $b_3 = 2$  nel terzo vincolo, si consideri il punto  $\bar{x} = [1, 1]^\top$

1. Stabilire se  $\bar{x}$  è una soluzione ammissibile di base;
2. In caso di risposta negativa al quesito precedente, determinare una soluzione ammissibile di base per  $\mathcal{P}$  a partire da  $\bar{x}$  applicando il Teorema Fondamentale della PL (Suggerimento: nel caso si abbia  $\epsilon_{\min} \leq \epsilon \leq \epsilon_{\max}$  si scelga  $\epsilon$  in modo tale che la variabile di slack associata al terzo vincolo sia non nulla)
3. Risolvere  $\mathcal{P}$  a partire dalla base individuata nei punti precedenti.
4. Costruire il Duale  $\mathcal{D}$  di  $\mathcal{P}$  e determinarne la soluzione ottima.
5. Determinare, anche solo graficamente, il valore di  $b_3$  tale che la base ottima di  $\mathcal{P}$  sia degenere. Per tale valore di  $b_3$  cosa succede alla soluzione ottima del problema duale?

**ESERCIZIO 2.2.6** ■ Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 - 6x_2 - 6x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 1 \\
& x_1 - 3x_2 - 3x_3 \leq -3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

1. Assegnato il punto  $\bar{x} = (0, \frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ , stabilire se  $\bar{x}$  è un vertice della regione ammissibile di  $\mathcal{P}$  e calcolare il valore di funzione obiettivo in  $\bar{x}$
2. Determinare la soluzione ottima del problema  $\mathcal{P}$  applicando l'algoritmo del Simplex.
3. Alla luce dei risultati ottenuti ai punti 1 e 2, cosa si può dire riguardo all'ottimalità di  $\bar{x}$ ?

4. Determinare la soluzione ottima del problema duale  $\mathcal{D}$  di  $\mathcal{P}$ , applicando la teoria della dualità. Rappresentare, inoltre, graficamente il problema duale e verificare la correttezza delle risposte date.
5. Si consideri, infine, di modificare in  $\mathcal{P}$  il coefficiente di costo della variabile  $x_2$ . Come si modificano, se si modificano, le soluzioni ottime di  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{D}$  nel caso in cui  $c_2 = -7$ ? Come invece nel caso  $c_2 = -5$ ?

ESERCIZIO 2.2.7 ■ E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare  $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ & 2x_1 + 3x_3 = 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Risolvere il problema  $\mathcal{P}$  applicando l'Algoritmo del Simplex a due Fasi.
2. Scrivere il problema duale di  $\mathcal{P}$  e risolverlo mediante la teoria della dualità.
3. Dopo aver rappresentato la ragione ammissibile di  $\mathcal{D}$  su di un piano cartesiano, verificare la verità o falsità delle seguenti affermazioni, motivando la risposta:
  - (a) La variabile *Primale*  $x_1$  è sempre nulla, per ogni scelta dei coefficienti di costo della funzione obiettivo *Duale*;
  - (b) La variabile *Primale*  $x_1$  è sempre nulla, per ogni scelta del termine noto del primo vincolo *Duale*;
  - (c) Il problema *Duale* ammette sempre ottimo finito, per ogni scelta dei coefficienti di costo della funzione obiettivo;
4. Determinare graficamente, infine, la soluzione ottima di  $\mathcal{D}$  e, tramite il Teorema di Complementarietà, di  $\mathcal{P}$  quando il termine noto del primo vincolo del problema duale assume il valore  $-9$ .

*Soluzione* – La soluzione ottima di  $\mathcal{P}$  è  $x^* = [0, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}]^\top$ ,  $z^* = -\frac{16}{3}$ . 3.a) Vero; 3.b) Falso; 3.c) Falso; 4)  $y^* = [-3, -1]^\top$ ,  $w^* = -8$



# Capitolo 3

## Flusso di Costo Minimo

### Avvertenza

Le pagine di questo capitolo sono tratte da dispense scritte precedentemente, delle quali il file sorgente è andati perso. Troverete, pertanto, una notazione leggermente diversa da quella che viene utilizzato a lezione. Di seguito la tabella di corrispondenza:

Grandezza	Corso 2016	Corso 2005
Divergenze dei nodi	$b_i$	$b_i$
Capacità inferiori sugli archi	$l_{ij}$	$l_{ij}$
Capacità superiori sugli archi	$u_{ij}$	$u_{ij}$
Variabili di flusso	$f_{ij}$	$x_{ij}$
Variabili duali	$\lambda_i$	$\pi_i$
Coefficienti di costo ridotti	$\hat{c}_{ij}$	$r_{ij}$
Incremento di flusso alla generica iterazione	$\Delta$	$\vartheta$

### 3.1 Flusso di Costo Minimo su reti non capacitate - Esercizi svolti

# Corso di Tecniche di Ottimizzazione

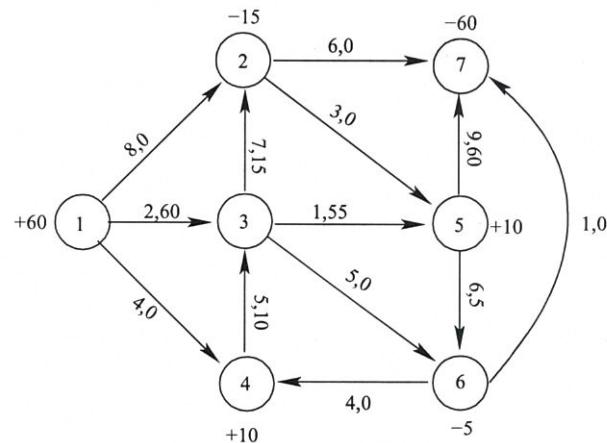
ESERCITAZIONE DEL 19/05/2005

M. Flavia Monaco      Marcello Sammarra

17 giugno 2005

## 1 Esercizio 1 - Flusso di costo minimo non capacitato

Si risolva il problema di flusso di costo minimo sulla rete di seguito riportata. L'etichetta su ciascun nodo rappresenta la divergenza del nodo; la coppia di numeri su ciascun arco rappresentano, nell'ordine, il costo unitario ed il flusso corrente su quell'arco.



## Soluzione

La distribuzione di flusso iniziale è ammissibile (perché soddisfa i vincoli di continuità) ed inoltre è di base.

Ad essa corrisponde lo spanning tree  $T$ , con radice nel nodo 1, di Figura 1. Calcoliamo i potenziali ai nodi

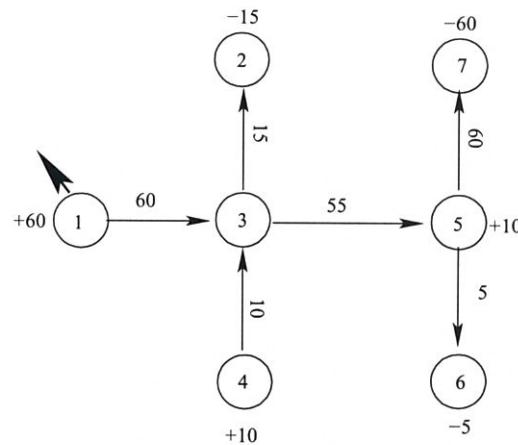


Figura 1: Spanning tree iniziale

(variabili duali), partendo dalla radice di  $T$ , risolvendo il seguente sistema:

$$\pi_1 = 0$$

$$\pi_i - \pi_j = c_{ij} \quad \forall (i, j) \in T$$

Si ottiene:  $\pi_1 = 0$ ,  $\pi_2 = -9$ ,  $\pi_3 = -2$ ,  $\pi_4 = 3$ ,  $\pi_5 = -3$ ,  $\pi_6 = -9$ ,  $\pi_7 = -12$ .

Noti i valori delle variabili duali, è possibile calcolare i coefficienti di costo ridotto (slack dei vincoli duali) come

$$r_{ij} = c_{ij} - (\pi_i - \pi_j) \quad \forall (i, j)$$

$$r_{12} = -1, r_{13} = 0, r_{14} = 7, r_{25} = 9, r_{27} = 3, r_{32} = 0, r_{35} = 0, r_{36} = -2, r_{43} = 0, r_{56} = 0, r_{57} = 0, r_{67} = -2.$$

---

<sup>1</sup>In realtà occorrerebbe calcolare solo  $r_{ij}$   $\forall (i, j) \notin T$ , cioè solo per le variabili non di base. Tuttavia, calcolare i coefficienti di costo ridotto per le variabili di base risulta essere un valido strumento per verificare la correttezza delle variabili duali precedentemente calcolate.

La soluzione non è ottima. Scegliamo di portare in base la variabile  $x_{36}$ . A seguito di tale operazione si viene a formare il ciclo:

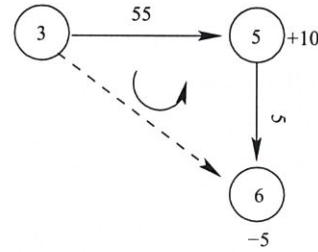


Figura 2: Ciclo alla prima iterazione

Scelto come verso di percorrenza del ciclo quello concorde all'orientamento dell'arco entrante in base (in questo caso l'arco  $(3,6)$ ), restano definiti gli insiemi  $C^+$  e  $C^-$  che rappresentano, rispettivamente, gli archi con orientamento concorde al verso di percorrenza del ciclo e gli archi con orientamento opposto. Quindi avremo  $C^+ = \{(3, 6)\}$ ,  $C^- = \{(3, 5), (3, 6)\}$ . Il massimo incremento che la variabile  $x_{36}$  può subire è dato da:

$$\theta = \min_{(h,k) \in C^-} \{x_{hk}\} = \min \{x_{35}, x_{36}\} = x_{56} = 5$$

La variabile  $x_{56}$  esce dalla base e la nuova soluzione ammissibile, mostrata in figura 3, sarà data da:

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} + \theta & \forall (i,j) \in C^+ \\ x'_{ij} = x_{ij} - \theta & \forall (i,j) \in C^- \\ x'_{ij} = x_{ij} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

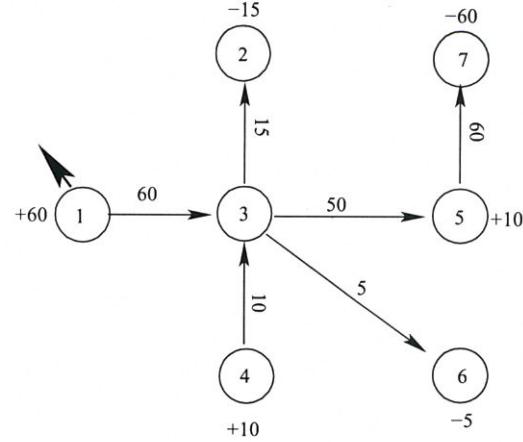


Figura 3: Soluzione alla seconda iterazione.

*Seconda Iterazione*

$$\pi_1 = 0, \pi_2 = -9, \pi_3 = -2, \pi_4 = 3, \pi_5 = -3, \pi_6 = -7, \pi_7 = -12.$$

$$r_{12} = -1, r_{13} = 0, r_{14} = 7, r_{25} = 9, r_{27} = 3, r_{32} = 0, r_{35} = 0, r_{36} = 0, r_{43} = 0, r_{56} = 2, r_{57} = 0, r_{67} = -4.$$

La soluzione non è ottima; portiamo in base la variabile  $x_{67}$ .

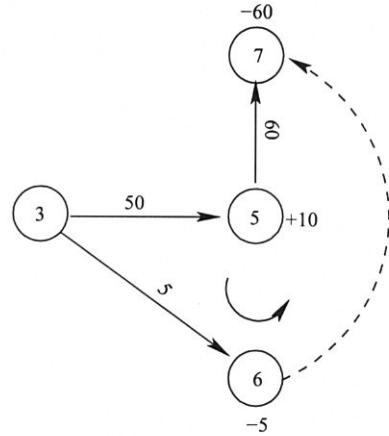


Figura 4: Ciclo alla seconda iterazione.

$C^+ = \{(6, 7), (3, 6)\}, C^- = \{(3, 5), (5, 7)\}, \theta = \min \{x_{35}, x_{57}\} = x_{35} = 50$ . La soluzione è mostrata in Figura 5.

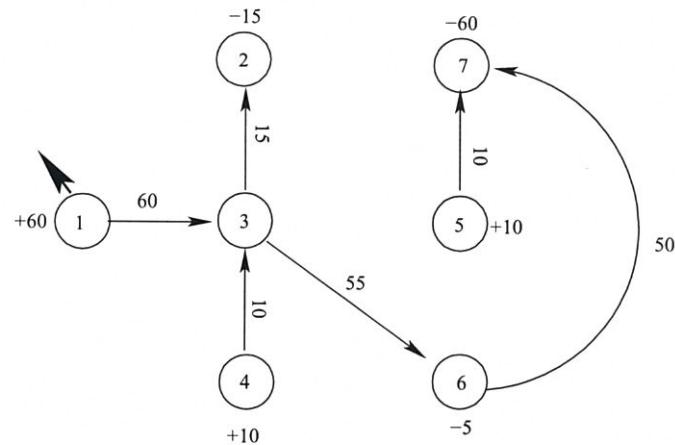


Figura 5: Soluzione alla terza iterazione.

*Terza Iterazione*

$$\pi_1 = 0, \pi_2 = -9, \pi_3 = -2, \pi_4 = 3, \pi_5 = 1, \pi_6 = -7, \pi_7 = -8.$$

$$r_{12} = -1, r_{13} = 0, r_{14} = 7, r_{25} = 13, r_{27} = 7, r_{32} = 0, r_{35} = 5, r_{36} = 0, r_{43} = 0, r_{56} = -2, r_{57} = 0, r_{67} = 0.$$

La soluzione non è ottima; portiamo in base la variabile  $x_{56}$

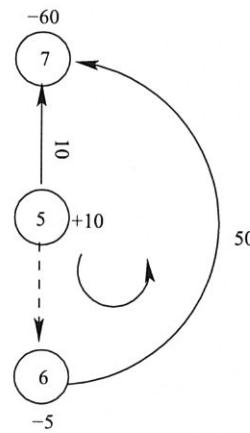


Figura 6: Ciclo alla terza iterazione.

$C^+ = \{(6, 7), (5, 6)\}, C^- = \{(5, 7)\}, \theta = x_{57} = 10$ . La soluzione si modifica come in Figura 7.

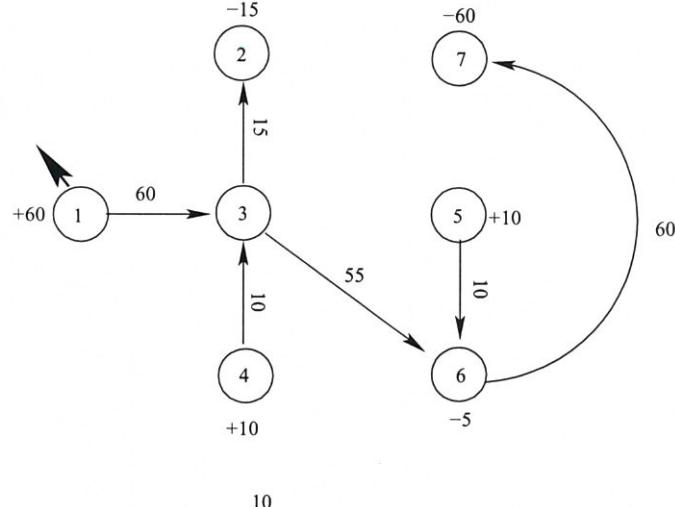


Figura 7: Soluzione alla quarta iterazione.

*Quarta Iterazione*

$$\pi_1 = 0, \pi_2 = -9, \pi_3 = -2, \pi_4 = 3, \pi_5 = -1, \pi_6 = -7, \pi_7 = -8.$$

$$r_{12} = -1, r_{13} = 0, r_{14} = 7, r_{25} = 11, r_{27} = 7, r_{32} = 0, r_{35} = 2, r_{36} = 0, r_{43} = 0, r_{56} = 0, r_{57} = 2, r_{67} = 0.$$

La soluzione non è ottima; portiamo in base la variabile  $x_{12}$ .

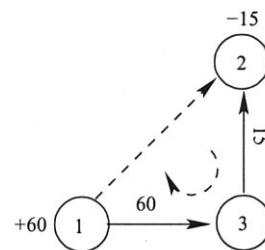


Figura 8: Ciclo alla quarta iterazione.

$$C^+ = \{(1, 2)\}, C^- = \{(2, 3), (1, 3)\}, \theta = \min \{x_{23}, x_{13}\} = x_{23} = 15. \text{ La soluzione si modifica come in figura 9.}$$

*Quinta Iterazione*

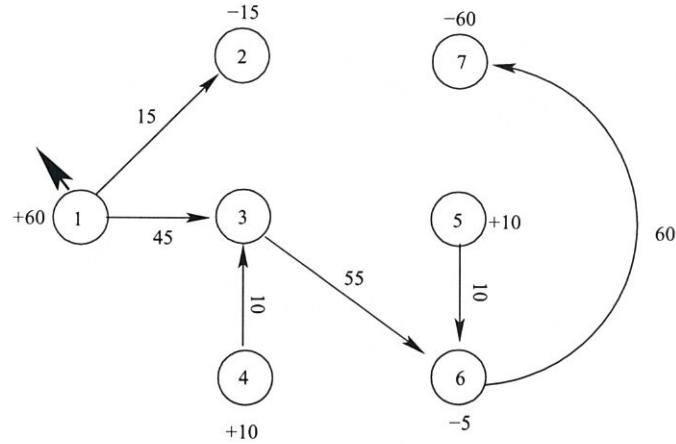


Figura 9: Soluzione alla quinta iterazione.

$$\pi_1 = 0, \pi_2 = -8, \pi_3 = -2, \pi_4 = 3, \pi_5 = -1, \pi_6 = -7, \pi_7 = -8.$$

$$r_{12} = 0, r_{13} = 0, r_{14} = 7, r_{25} = 10, r_{27} = 6, r_{32} = 1, r_{35} = 2, r_{36} = 0, r_{43} = 0, r_{56} = 0, r_{57} = 2, r_{67} = 0.$$

La soluzione è ottima ed il costo di tale soluzione è  $c^* = 655$ .

## 3.2 Flusso di Costo Minimo su reti non capacitate - Esercizi non svolti

ESERCIZIO 3.2.1 \* E' assegnata la rete di flusso di seguito riportata, dove le etichette sui nodi rappresentano le divergenze (si assuma che un nodo non etichettato abbia divergenza nulla) mentre le etichette sugli archi sono costi unitari di flusso. Si consideri

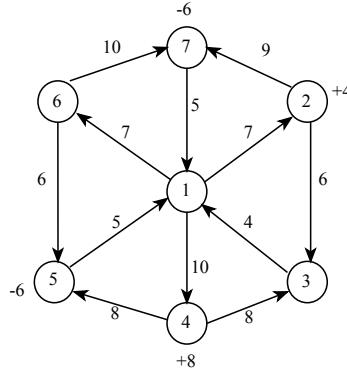


Figura 3.1: Il grafo dell'Esercizio 3.2.1

il seguente insieme di archi  $T = \{(1, 6), (2, 3), (3, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 7)\}$

1. Verificare che  $T$  forma una base ammissibile per il problema assegnato e calcolare la corrispondente distribuzione di flusso.
2. Determinare la distribuzione di flusso a costo minimo a partire dalla soluzione determinata al punto precedente.

*Soluzione – Soluzione ottima degenere. Base ottima:*

$$T^* = \{(6, 7), (2, 7), (1, 2), (3, 1), (4, 3), (4, 5)\}. z^* = 140$$

◊

ESERCIZIO 3.2.2 \* Nella rete di flusso di seguito rappresentata l'etichetta su ciascun arco indica il costo unitario di flusso, mentre l'etichetta su ciascun nodo rappresenta la sua divergenza. Determinare la distribuzione di flusso di costo minimo a partire dalla base  $T = \{(1, 4), (6, 1), (6, 2), (2, 3), (7, 2), (7, 5)\}$ .

*Soluzione – Soluzione ottima non unica. Una base ottima è:*

$$T^* = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (6, 1), (7, 2), (7, 5)\}. z^* = 1115$$

◊

ESERCIZIO 3.2.3 \* Si consideri la rete di flusso di seguito riportata, dove le etichette sui nodi rappresentano le divergenze (si assuma che un nodo non etichettato abbia divergenza nulla) mentre le etichette sugli archi sono costi unitari di flusso.

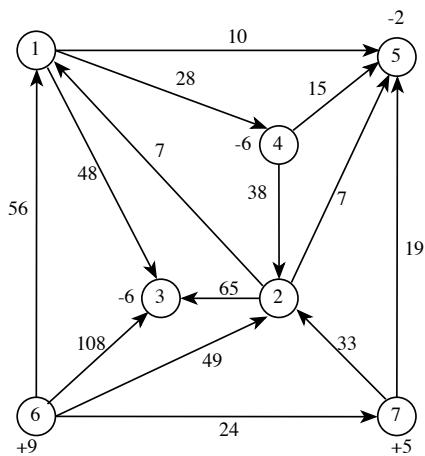


Figura 3.2: Il grafo dell'Esercizio 3.2.2

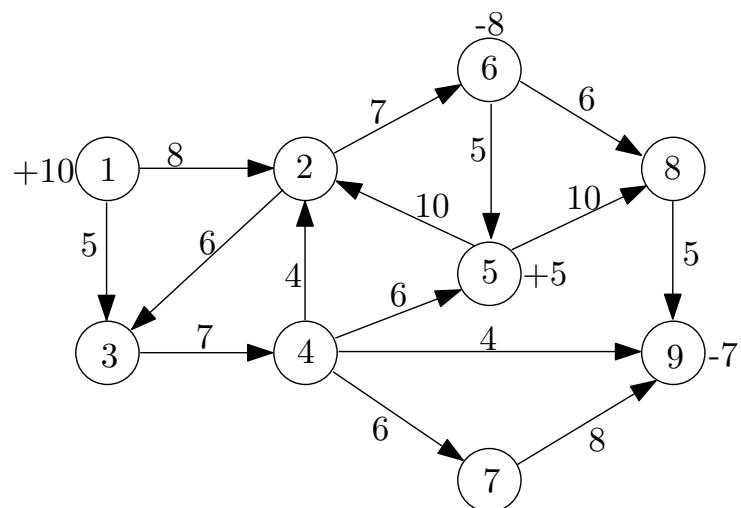


Figura 3.3: Il grafo dell'Esercizio 3.2.3

1. Determinare quale tra i seguenti insiemi di archi forma una base ammissibile e calcolare la relativa distribuzione di flusso.

$$T_1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 6), (6, 5), (5, 8), (8, 9), (4, 9), (4, 7)\}$$

$$T_2 = \{(1, 3), (3, 4), (2, 6), (6, 5), (5, 8), (8, 9), (4, 9), (4, 7)\}$$

2. Determinare la distribuzione di flusso a costo minimo a partire dalla soluzione determinata al punto precedente.

*Soluzione* –  $T_2$  è una base non ammissibile. A partire da  $T_1$  si giunge alla base ottima (degenere):

$$\{(1, 2), (1, 3), (2, 6), (3, 4), (5, 8), (8, 9), (4, 9), (4, 7)\}$$

◊

**ESERCIZIO 3.2.4** ■ Si consideri la rete di flusso non capacitata riportata nella figura seguente, in cui le etichette sugli archi rappresentano i costi unitari e quelle sui nodi le divergenze.

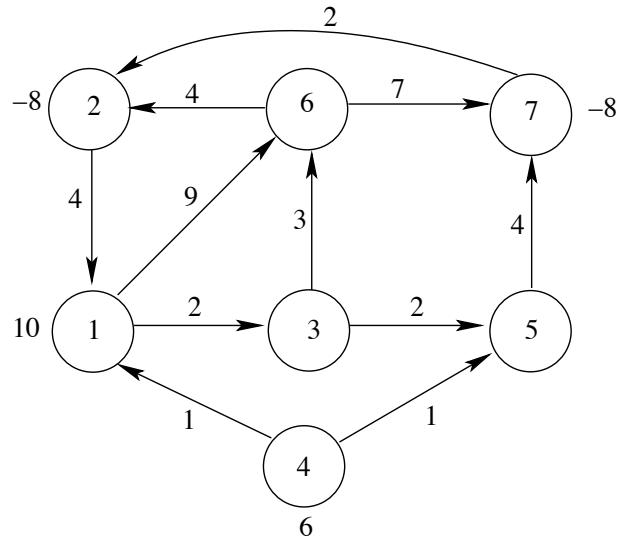


Figura 3.4: Il grafo dell’Esercizio 3.2.4

- Si supponga che ad una certa iterazione  $r$  dell’Algoritmo del Simplex gli archi  $(1, 6)$  e  $(6, 2)$  siano archi di base. Dimostrare che per qualsiasi valore delle variabili duali  $\lambda_i$  non può mai verificarsi che  $\hat{c}_{21} \leq 0$ .
- Si consideri ora il seguente vettore di variabili duali  $\lambda = [0, -9, -2, -7, -8, -5, -12]^\top$ .
  - Calcolare la soluzione primale  $f$  complementare a  $\lambda$  e verificare che  $f$  è di base ma non ottima.

- (b) Determinare la soluzione ottima del problema a partire dalla distribuzione di flusso determinata al punto precedente.

◊

**ESERCIZIO 3.2.5** ■ Si consideri la rete di flusso di seguito riportata

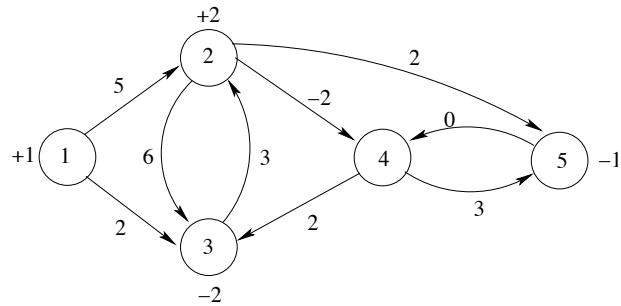


Figura 3.5: Il grafo dell'Esercizio 3.2.5

- La presenza del coefficiente di costo  $c_{24} < 0$  è sufficiente a garantire che il problema sia inferiormente illimitato? Motivare la risposta.
- Determinare, se esiste, la distribuzione di flusso a costo minimo a partire dalla base

$$T = \{(1, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 3)\}$$

◊

### 3.3 Flusso di Costo Minimo su reti capacitate - Esercizi svolti

## 2 Esercizio 2 - Flusso di costo minimimo capacitato

Si risolva il problema di flusso di costo minimo sulla rete di seguito riportata nella quale le etichette sui nodi e sugli archi sono definiti come in Figura 10.

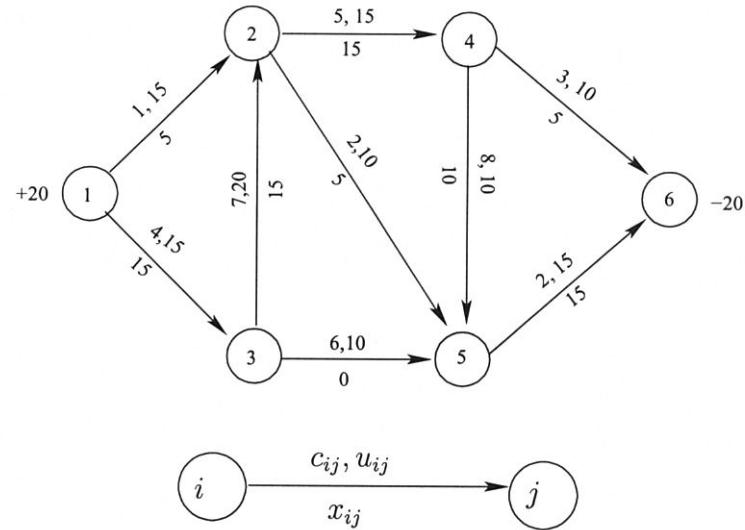


Figura 10:

### Soluzione

La distribuzione iniziale riportata in figura è ammissibile. Indichiamo con  $T$  l'insieme delle variabili in base, con  $L$  le variabili fuori base che sono al rispettivo lower bound ( $x_{ij} = l_{ij}$ ) ed infine con  $U$  le variabili fuori base che sono al rispettivo upper bound ( $x_{ij} = u_{ij}$ ). Poiché nel nostro caso  $l_{ij} = 0 \quad \forall(i,j)$  le variabili in  $L$  assumeranno valore nullo.

$$T^1 = \{(1,2), (3,2), (2,5), (4,5), (4,6)\}$$

$$L^1 = \{(3,5)\}$$

$$U^1 = \{(1,3), (2,4), (5,6)\}$$

Si noti che tale soluzione è degenere in quanto una variabile di base ( $x_{4,5}$ ) è al suo upper bound.

#### Prima Iterazione

Calcoliamo i potenziali nodali risolvendo il sistema:

$$\pi_1 = 0$$

$$\pi_i - \pi_j = c_{ij} \quad \forall (i, j) \in T$$

Troviamo:  $\pi_1 = 0, \pi_2 = -1, \pi_3 = 6, \pi_4 = 5, \pi_5 = -3, \pi_6 = 2$

Calcoliamo i coefficienti di costo ridotto per le variabili in  $L$  ed  $U$ :

$$L^1 \Rightarrow r_{35} = -3$$

$$U^1 \Rightarrow r_{13} = 10, r_{24} = 11, r_{56} = 7$$

La condizione di ottimalità per i problemi di PL con vincoli di box:

$$r_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in T$$

$$r_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in L$$

$$r_{ij} \leq 0 \quad \forall (i, j) \in U$$

non è verificata. Portiamo in base la variabile  $x_{56}$ . A seguito di tale operazione si forma il ciclo mostrato in figura 11:

Scelto il verso di percorrenza del ciclo opposto all'orientamento dell'arco (5,6), restano individuati gli insiemi  $C^+ = \{(4, 6)\}$  e  $C^- = \{(4, 5), (6, 5)\}$ . La massima variazione di flusso sugli archi del ciclo sarà:

$$\theta = \min \left\{ \min_{(i,j) \in C^-} \{x_{ij} - l_{ij}\}, \min_{(i,j) \in C^+} \{u_{ij} - x_{ij}\} \right\}$$

Nel nostro caso avremo:

$$\theta = \min \{\min \{x_{45}, x_{56}\}, (10 - 5)\} = 5$$

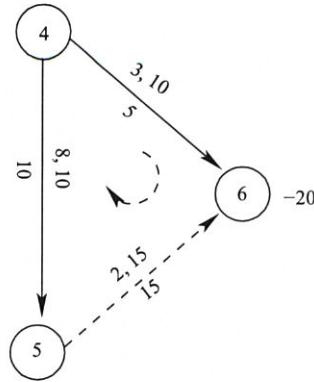


Figura 11: Ciclo alla prima iterazione.

in corrispondenza dell'arco (4,6). La nuova distribuzione di flusso sarà pertanto:

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} + \theta & \forall (i,j) \in C^+ \\ x'_{ij} = x_{ij} - \theta & \forall (i,j) \in C^- \\ x'_{ij} = x_{ij} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

A seguito di tali operazioni l'arco (4,6) in corrispondenza del quale è stato calcolato il valore di  $\theta$  uscirà dalla base.

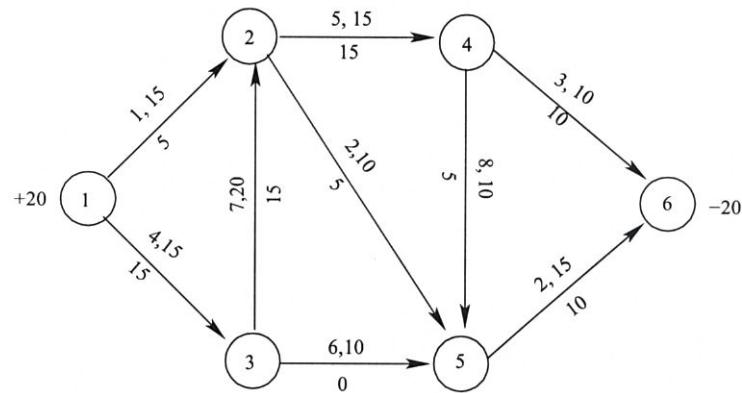


Figura 12: Soluzione alla seconda iterazione.

*Seconda Iterazione*

$$T^2 = \{(1,2), (3,2), (2,5), (4,5), (5,6)\}$$

$$L^2 = \{(3,5)\}$$

$$U^2 = \{(1,3), (2,4), (4,6)\}$$

$$\pi_1 = 0, \pi_2 = -1, \pi_3 = 6, \pi_4 = 5, \pi_5 = -3, \pi_6 = -5$$

$$L^2 \Rightarrow r_{35} = -3$$

$$U^2 \Rightarrow r_{13} = 10, r_{24} = 11, r_{46} = -8$$

Soluzione non ottima. Portiamo in base la variabile  $x_{13}$ ; si forma il ciclo:

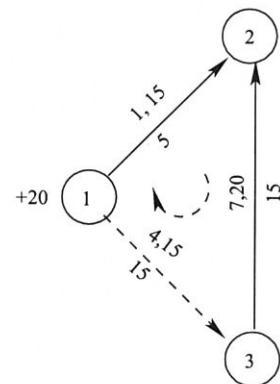


Figura 13: Ciclo alla seconda iterazione.

$$C^+ = \{(1,2)\} \quad C^- = \{(2,3), (1,3)\}$$

$$\theta = \min \{ \min \{x_{23}, x_{13}\}, (15 - 5) \} = 10$$

in corrispondenza dell'arco (1,2), che esce dalla base.

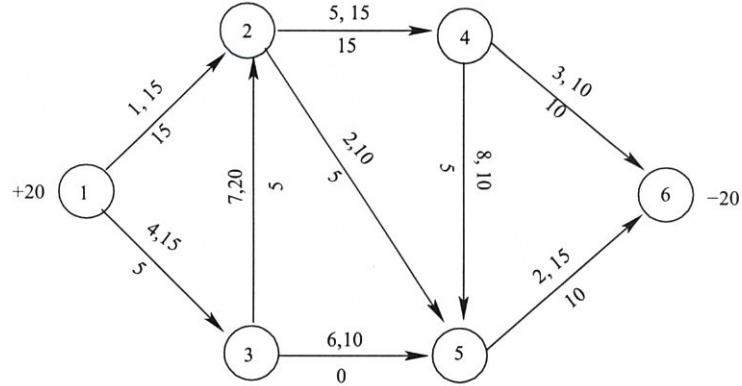


Figura 14: Soluzione alla terza iterazione.

## Terza Iterazione

$$T^3 = \{(1, 3), (3, 2), (2, 5), (4, 5), (5, 6)\}$$

$$L^3 = \{(3, 5)\}$$

$$U^3 = \{(1, 2), (2, 4), (4, 6)\}$$

$$\pi_1 = 0, \pi_2 = -11, \pi_3 = -4, \pi_4 = -5, \pi_5 = -13, \pi_6 = -15$$

$$L^3 \Rightarrow r_{35} = -3$$

$$U^3 \Rightarrow r_{12} = -10, r_{24} = 11, r_{46} = -7$$

La soluzione non è ottima. Portiamo in base la variabile  $x_{35}$ ; si forma il ciclo mostrato in figura 15

$$C^+ = \{(3, 5)\} \quad C^- = \{(2, 5), (3, 2)\}$$

$$\theta = \min \{\min \{x_{25}, x_{32}\}, (10 - 0)\} = 5$$

in corrispondenza degli archi (3,2) e (2,5). Scegliamo ad esempio di fare uscire dalla base l'arco (3,2). La nuova soluzione è rappresentata in figura 16.

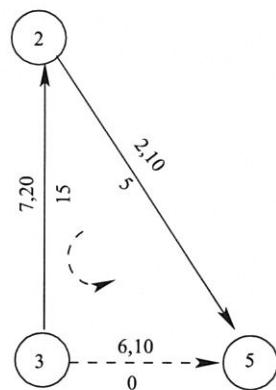


Figura 15: Ciclo alla terza iterazione.

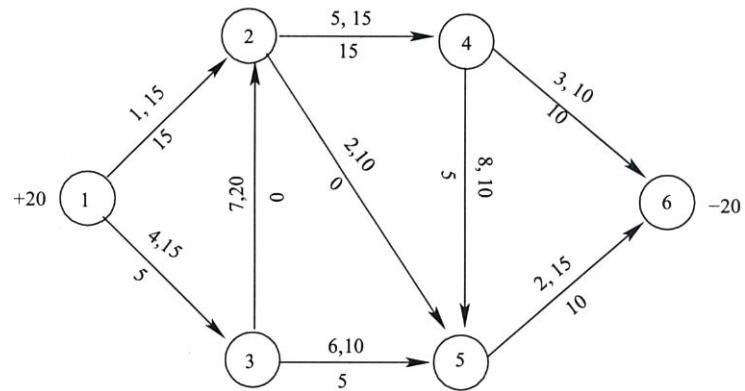


Figura 16: Soluzione alla quarta iterazione.

*Quarta Iterazione*

$$T^4 = \{(1, 3), (3, 5), (2, 5), (4, 5), (5, 6)\}$$

$$L^4 = \{(3, 2)\}$$

$$U^4 = \{(1, 2), (2, 4), (4, 6)\}$$

$$\pi_1 = 0, \pi_2 = -8, \pi_3 = -4, \pi_4 = -2, \pi_5 = -10, \pi_6 = -12$$

$$L^4 \Rightarrow r_{32} = 3$$

$$U^4 \Rightarrow r_{12} = 9, r_{24} = 11, r_{46} = -7$$

La soluzione non è ottima. Portiamo in base la variabile  $x_{24}$ ; si forma il ciclo:

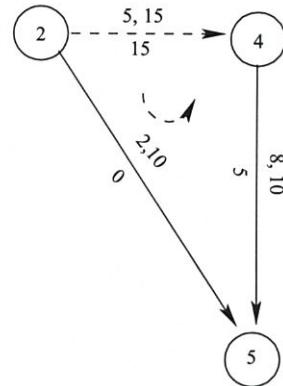


Figura 17: Ciclo alla quarta iterazione.

$$C^+ = \{(2, 5)\} \quad C^- = \{(2, 4), (4, 5)\}$$

$$\theta = \min \{\min \{x_{24}, x_{45}\}, (10 - 0)\} = 5$$

in corrispondenza dell'arco  $(4, 5)$  che esce dalla base. La nuova soluzione sarà:

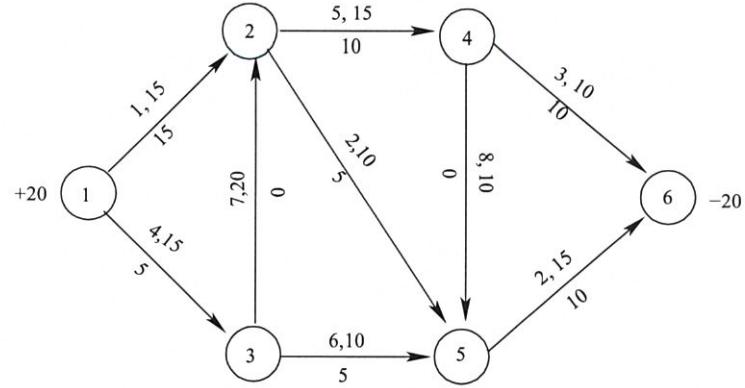


Figura 18: Soluzione alla quinta iterazione.

*Quinta Iterazione*

$$T^5 = \{(1,3), (3,5), (2,5), (2,4), (5,6)\}$$

$$L^5 = \{(3,2), (4,5)\}$$

$$U^5 = \{(1,2), (4,6)\}$$

$$\pi_1 = 0, \pi_2 = -8, \pi_3 = -4, \pi_4 = -13, \pi_5 = -10, \pi_6 = -12$$

$$L^5 \Rightarrow r_{32} = 3, r_{45} = 11$$

$$U^5 \Rightarrow r_{12} = -7, r_{46} = 4$$

Soluzione non ottima. Portiamo in base la variabile  $x_{46}$ ; si forma il ciclo mostrato in figura 19:

$$C^+ = \{(2,5), (5,6)\} \quad C^- = \{(2,4), (4,6)\}$$

$$\theta = \min \{\min \{x_{24}, x_{46}\}, \min \{u_{25} - x_{25}, u_{56} - x_{56}\}\} = 5$$

in corrispondenza degli archi (2,5) e (5,6). Scegliamo di fare uscire dalla base l'arco (5,6). La nuova soluzione, degenere, sarà:

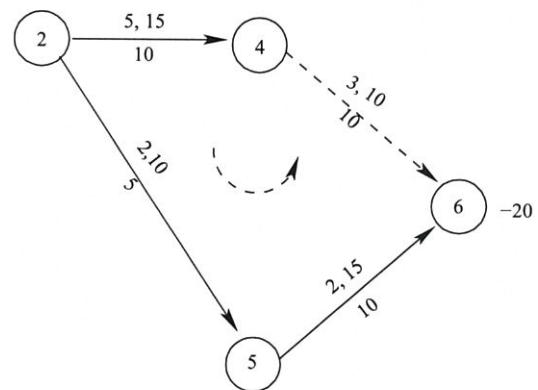


Figura 19: Ciclo alla quinta iterazione.

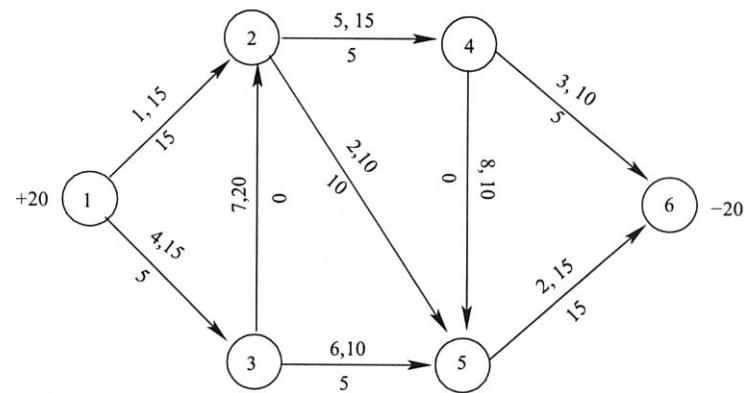


Figura 20: Soluzione alla sesta iterazione.

*Sesta Iterazione*

$$T^6 = \{(1, 3), (3, 5), (2, 5), (2, 4), (4, 6)\}$$

$$L^6 = \{(3, 2), (4, 5)\}$$

$$U^6 = \{(1, 2), (5, 6)\}$$

$$\pi_1 = 0, \pi_2 = -8, \pi_3 = -4, \pi_4 = -13, \pi_5 = -10, \pi_6 = -16$$

$$L^6 \Rightarrow r_{32} = 3, r_{45} = 11$$

$$U^6 \Rightarrow r_{12} = -7, r_{56} = -6$$

La soluzione è ottima.

### 3.4 Flusso di Costo Minimo su reti capacitate - Esercizi non svolti

ESERCIZIO 3.4.1 \* E' assegnata la rete di flusso capacitata mostrata nella figura seguente, dove le etichette sugli archi rappresentano, nell'ordine, le capacità  $i u_{ij}$  ed i costi unitari di flusso  $c_{ij}$ . Si assuma che le limitazioni inferiori siano tutte nulle e si consideri la seguente ripartizione dell'insieme degli archi:

$$T = \{(2, 1), (2, 3), (3, 4), (5, 6), (5, 2)\} \quad L = \{(1, 3), (3, 5), (4, 5), (6, 2)\} \quad U = \{(1, 4)\}$$

Determinare la distribuzione di flusso a costo minimo a partire dalla base  $T$ .

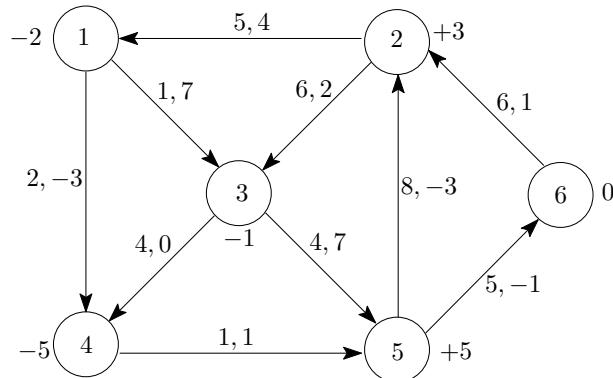


Figura 3.6: Il grafo dell'Esercizio 3.4.1

*Soluzione* – Il problema presenta ottimi multipli. Una base ottima è

$$T = \{(2, 1), (2, 3), (3, 4), (5, 6), (5, 2)\} \quad L = \{(1, 3), (3, 5), (4, 5), (6, 2)\} \quad U = \{(1, 4)\}$$

◊

ESERCIZIO 3.4.2 ■ E' assegnata la rete di flusso capacitata riportata nella figura seguente, in cui le etichette sugli archi rappresentano, nell'ordine, le capacità superiori degli archi ( $u_{ij}$ ) ed i costi unitari di flusso ( $c_{ij}$ ), mentre quelle sui nodi le divergenze.

Assumendo  $l_{ij} = 0$ ,  $\forall (i, j)$ , si consideri la seguente base:

- $T = \{(2, 1), (2, 3), (3, 4), (5, 2)\}$
- $L = \{(1, 4), (3, 5)\}$
- $U = \{(1, 3), (5, 4)\}$

1. Determinare la distribuzione di flusso associata alla base data.

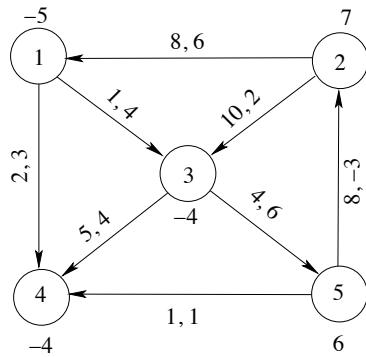


Figura 3.7: Il grafo dell'Esercizio 3.4.2

2. Risolvere il problema di flusso di costo minimo a partire dalla soluzione calcolata al punto 1.
3. Si consideri ora il problema non capacitato e la base  $T^1 = T, L^1 = L \cup \{(1, 3), (5, 4)\}$ 
  - (a) Quale sarebbe, in questo caso, la soluzione ottima?
  - (b) Quale, invece, se il coefficiente di costo  $c_{52}$  assumesse il valore  $-9$ ?

◊

**ESERCIZIO 3.4.3 ■** E' assegnata la rete di flusso capacitata riportata nella figura seguente

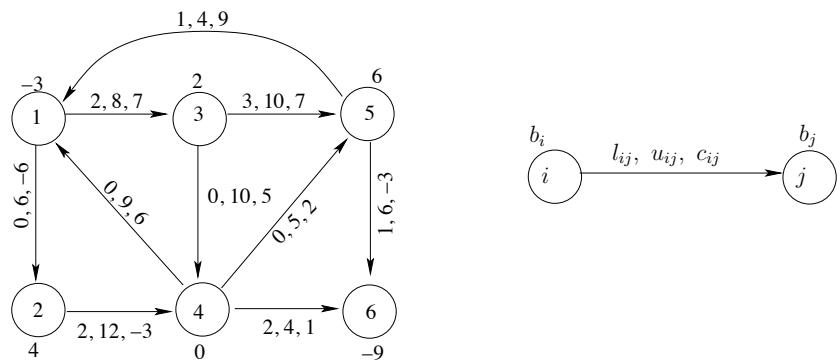


Figura 3.8: Il grafo dell'Esercizio 3.4.3

Determinare la distribuzione di flusso a costo minimo a partire dalla base:

$$\mathcal{T} = \{(2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 5), (4, 6)\}$$

$$\mathcal{L} = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5)\}$$

$$\mathcal{U} = \{(5, 1), (5, 6)\}$$

◊

Indice	
Il Problema del Massimo Flusso	71
4.1 Esercizi Svolti . . . . .	72
4.2 Esercizi non svolti . . . . .	76

## Capitolo 4

# Il Problema del Massimo Flusso

Per l'applicazione dell'algoritmo di Ford e Fulkerson per il problema del massimo flusso, faremo utilizzo di una tabella che ha  $m + 2$  colonne, se  $m$  è il numero di nodi del grafo. Una riga  $h$  di tale tabella indica un'iterazione della procedura di ricerca di un cammino aumentante; in particolare indica l'operazione di propagazione delle etichette a partire dal generico nodo  $i$ . Tale riga è composta come di seguito descritto:

1. nella prima colonna è riportato il nodo  $i$ ;
2. nell'ultima colonna lo stato della lista dei nodi etichettati fino a quell'iterazione;
3. le colonne dalla seconda alla penultima, una per ogni nodo del grafo, rappresentano le etichette dei nodi  $j$  adiacenti ad  $i$  che è possibile etichettare;
4. se all'iterazione  $h$  dal nodo  $i$  non è possibile etichettare nessun nodo ad esso adiacente, le colonne dalla seconda alla penultima sono vuote;

Va ricordato, infine, che l'algoritmo di F&F non specifica come effettuare la visita del grafo per la ricerca dei cammini aumentanti e, quindi, come gestire l'inserimento e l'estrazione dei nodi dalla lista  $Q$ . Per effettuare una visita in *ampiezza*,  $Q$  è una coda ed è gestita in modalità **FIFO**. Per ottenere una visita in profondità bisogna, invece, gestire  $Q$  come una pila (**LIFO**). In entrambi i casi useremo la seguente convenzione: se dobbiamo inserire in  $Q$  l'insieme dei nodi adiacenti al nodo  $i$ , diciamo  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ , faremo in modo che essi saranno estratti in ordine di indice crescente.

## 4.1 Esercizi Svolti

ESERCIZIO 4.1.1. Data la rete di flusso di seguito riportata, dove le etichette sugli archi rappresentano nell'ordine la capacità ed il valore di flusso, si chiede di:

1. verificare l'ammissibilità della distribuzione di flusso assegnata;
2. determinare il massimo flusso che è possibile inviare dalla sorgente  $s$  al terminale  $t$  mediante l'Algoritmo di Ford & Fulkerson
3. determinare un taglio  $s - t$  di capacità minima;
4. come si ripercuote l'incremento della capacità dell'arco  $(2, 3)$  sulla soluzione ottima precedentemente determinata? Come, invece, l'incremento della capacità dell'arco  $(5, t)$ ? Motivare le risposte.

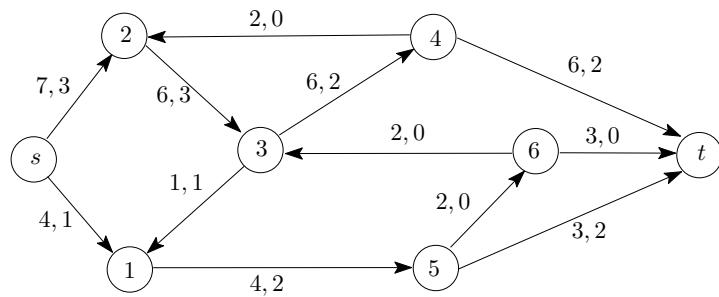


Figura 4.1: La rete di flusso dell'esercizio 4.1

*Soluzione* – La distribuzione di flusso è ammissibile. Si ha infatti:

$$f_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in G$$

sono inoltre verificate le equazioni di continuità sui nodi

$$f_{23} - f_{s2} - f_{42} = 0$$

$$f_{31} + f_{34} - f_{23} - f_{62} = 0$$

$$f_{42} + f_{4t} - f_{34} = 0$$

$$f_{56} + f_{5t} - f_{15} = 0$$

$$f_{63} + f_{6t} - f_{56} = 0$$

Utilizziamo la visita in profondità.  $v_0 = 4, \Delta V = 0$

## *Prima iterazione*

A partire dalla distribuzione di flusso mostrata in figura (4.1) troviamo

Distribuiamo l'incremento nella rete e reiteriamo.

## *Seconda iterazione*

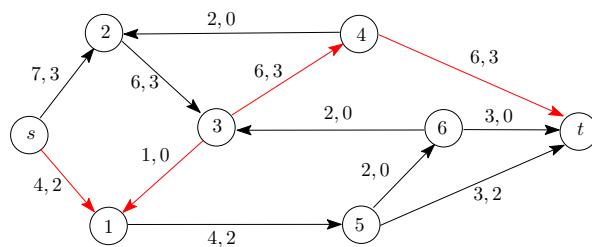


Figura 4.2: La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della seconda iterazione

Terza iterazione

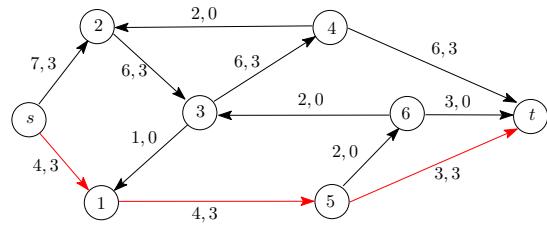


Figura 4.3: La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della terza iterazione

nodo corrente	$s$	1	2	3	4	5	6	$t$	$Q$
-	$[0, \infty]$								$\{s\}$
$s$		$[+s, 1]$	$[+s, 4]$						$\{1, 2\}$
1					$[+1, 1]$				$\{5, 2\}$
5						$[+5, 1]$			$\{6, 2\}$
6							$[+6, 1]$		$\{t, 2\}$
<b>cammino aumentante</b>	$s \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow t, \hat{\delta} = 1, \Delta V = 3$								

Quarta iterazione

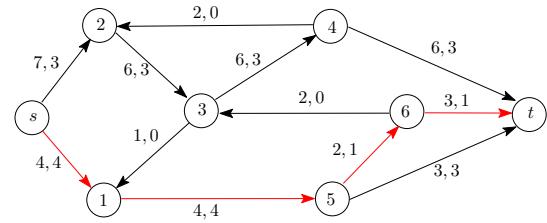


Figura 4.4: La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della quarta iterazione

nodo corrente	$s$	1	2	3	4	5	6	$t$	$Q$
-	$[0, \infty]$								$\{s\}$
$s$				$[+s, 4]$					$\{2\}$
2					$[+2, 3]$				$\{3\}$
3						$[+3, 3]$			$\{4\}$
4							$[+4, 3]$		$\{t\}$
<b>cammino aumentante</b>	$s \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow t$ , $\delta = 3$ , $\Delta V = 6$								

Quinta iterazione

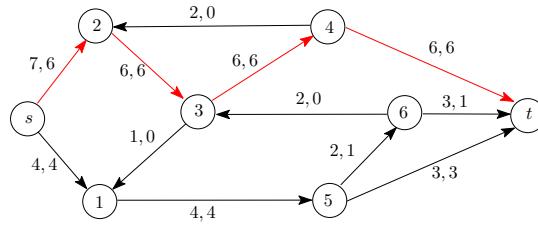


Figura 4.5: La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della quinta iterazione

nodo corrente	$s$	1	2	3	4	5	6	$t$	$Q$
-	$[0, \infty]$								$\{s\}$
$s$				$[+s, 1]$					$\{2\}$
2									$\{\emptyset\}$

Non esistono più cammini aumentanti: la distribuzione di flusso di figura (4.5) è massima, con valore  $v_{\max} = v_0 + \Delta V = 10$ . Il taglio di capacità minima è

$$W^* = \{s, 2\}, \quad \bar{W}^* = V \setminus W^*$$

ed inoltre vale

$$V_{\max} = u_{s,1} + u_{2,3} = 4 + 6 = 10$$

Poichè l'arco  $(2, 3)$  è un arco in avanti del taglio di capacità minima, l'incremento della sua capacità è una condizione necessaria ad incrementare il valore di  $v_{\max}$ , ma non sufficiente perché è possibile che nella rete sia presente un altro taglio la cui capacità vale 10, come ad esempio il taglio  $W^1 = \{s, 1, 2, 3\}$ . Viceversa l'incremento della capacità dell'arco  $(5, t)$  non essendo un arco in avanti del taglio di capacità minima, non ha alcuna influenza sul valore ottimo del massimo flusso.

◊

## 4.2 Esercizi non svolti

**ESERCIZIO 4.2.1** ■ E' dato il problema di massimo flusso definito sul grafo orientato, con 8 nodi ( $\{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, t\}$ ) e 14 archi, di seguito rappresentato. Le etichette sugli archi rappresentano, nell'ordine, la capacità ed il flusso corrente sul quell'arco.

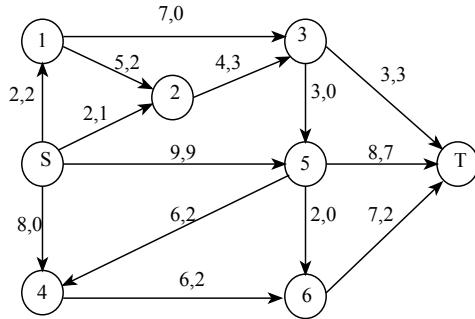


Figura 4.6: Il grafo dell'Esercizio 4.2.1

- Si consideri il taglio  $W = \{s, 1, 2, 4\}$ ,  $\bar{W} = \{5, 6, t\}$ . Quanto vale il flusso netto che attraversa il taglio?
- Rispetto al taglio  $W$ ,  $\bar{W}$  gli archi (1,2) e (6,4) sono non saturi e l'arco (5,4) è non scarico. Tale condizione è sufficiente a garantire che il flusso corrente non è quello ottimo?
- Applicando l'algoritmo di Ford & Fulkerson, determinare il massimo flusso ed il taglio di capacità minima.

◊

**ESERCIZIO 4.2.2** ■ Nella rete di flusso di seguito rappresentata le etichette su ciascun arco indicano la capacità ed il flusso corrente sull'arco, mentre i nodi 1 e 10 sono, rispettivamente, la sorgente ed il terminale

- Si considerino i tagli  $W_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\bar{W}_1 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$  e  $W_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ ,  $\bar{W}_2 = \{5, 9, 10\}$ . Siano  $v_1$  e  $v_2$  i flussi netti che attraversano rispettivamente  $(W_1, \bar{W}_1)$  e  $(W_2, \bar{W}_2)$ , verificare che  $v_1 = v_2$ .
- Determinare un estremo superiore sul numero di cammini aumentanti che sono presenti nella rete assegnata.

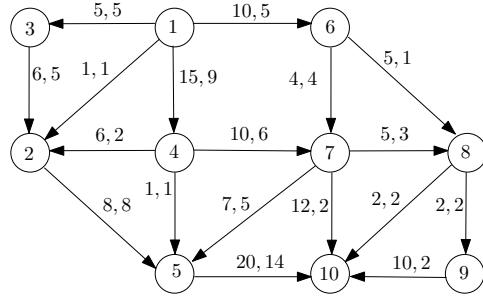


Figura 4.7: Il grafo dell'Esercizio 4.2.2

3. Determinare il massimo flusso ed il taglio di capacità minima mediante l'algoritmo di Ford e Fulkerson.

◊

**ESERCIZIO 4.2.3** ■ Nella rete di flusso di seguito rappresentata le etichette su ciascun arco indicano, rispettivamente, la capacità ed il flusso corrente.

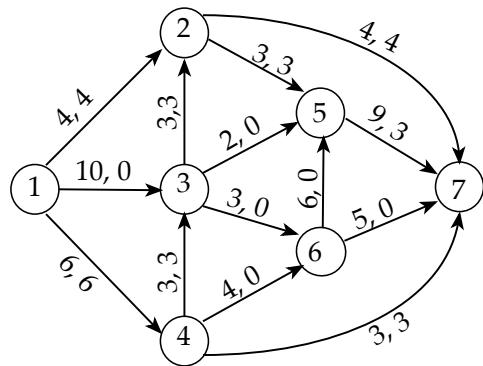


Figura 4.8: Il grafo dell'Esercizio 4.2.3

1. Verificare che la distribuzione corrente di flusso è ammissibile e calcolare il valore di  $v$ .
2. Considerato un generico taglio  $W$ ,  $\bar{W}$  è noto che vale la relazione  $C(W^*, \bar{W}^*) \leq C(W, \bar{W})$ , dove  $(W^*, \bar{W}^*)$  è il taglio di capacità minima. Osservando la rete e senza enumerare tutti i possibili tagli, determinare un estremo inferiore  $LB$  su  $C(W^*, \bar{W}^*)$ . La risposta  $LB = 0$  non vale.
3. Applicando l'algoritmo di Ford&Fulkerson, determinare il valore del massimo flusso ed il taglio di capacità minima.

◊

Indice	
Programmazione Lineare Intera	79
5.1 Esercizi svolti . . . . .	79
5.2 Esercizi non svolti . . . . .	85

## Capitolo 5

# Programmazione Lineare Intera

## 5.1 Esercizi svolti

ESERCIZIO 5.1.1. Risolvere il seguente problema di *PLI*

$$\begin{aligned}
 \min \quad z(x) = & -3x_1 + 2x_2 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
 & 3x_1 - 4x_2 \leq 3 \\
 & 2x_1 - x_2 \geq 0 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \text{ intere}
 \end{aligned}$$

*Soluzione – Algoritmo Branch and Bound*

Inizializzazione

$$\mathcal{Q} = \{S0\}, U = +\infty, \hat{x} = \perp$$

*Iterazione 1*

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti  $S0$  e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.1). Si ha  $x_{PL0}^* = (3, 3/2)^\top$ ,  $L0 = -6$ . La soluzione ottima di PL0 non è intera. Generiamo due nuovi sottoproblemi operando un branching su  $x_2$ .

1.  $S_1 = S_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 1\}$
2.  $S_2 = S_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 2\}$

$$\mathcal{Q} = \{S1, S2\}$$

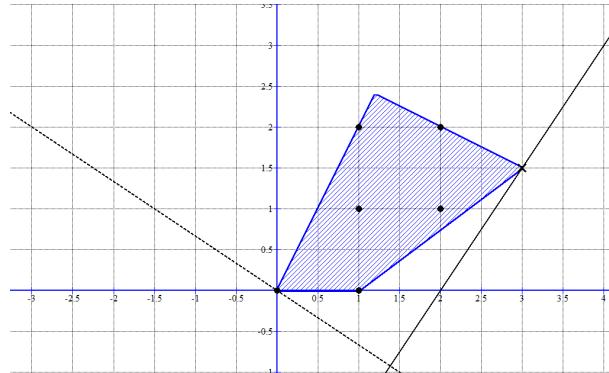


Figura 5.1: Regione ammissibile di PL0 e soluzione ottima

*Iterazione 2*

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti  $S_1$  e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.2) Si ha  $x_{PL1}^* = (7/3, 1)^\top$ ,  $L_1 = -5$ . La soluzione ottima di PL1 non è intera.

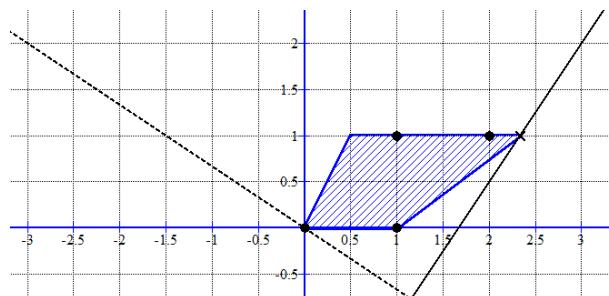


Figura 5.2: Regione ammissibile di PL1 e soluzione ottima

Generiamo due nuovi sottoproblemi operando un branching su  $x_1$ .

$$1. S_3 = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 2\}$$

$$2. S_4 = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 3\}$$

$$\mathcal{Q} = \{S_2, S_3, S_4\}$$

*Iterazione 3*

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti  $S_3$  e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.3). Si ha  $x_{PL3}^* = (2, 3/4)^\top$ ,  $L_3 = -9/2$ . La soluzione ottima di PL3 non è intera. Generiamo due nuovi sottoproblemi operando un branching su  $x_2$ .

$$1. S_5 = S_3 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 0\}$$

$$2. S_6 = S_3 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 1\}$$

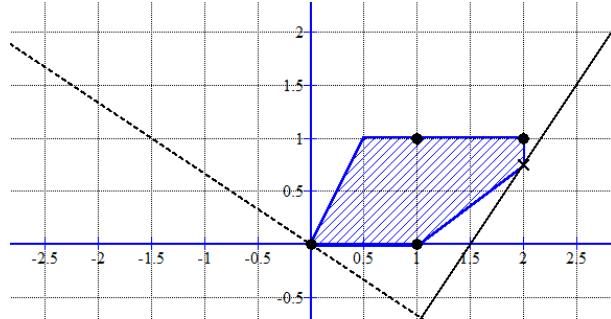


Figura 5.3: Regione ammissibile di PL3 e soluzione ottima

$$\mathcal{Q} = \{S2, S4, S5, S6\}$$

#### Iterazione 4

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti  $S5$  e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.4).

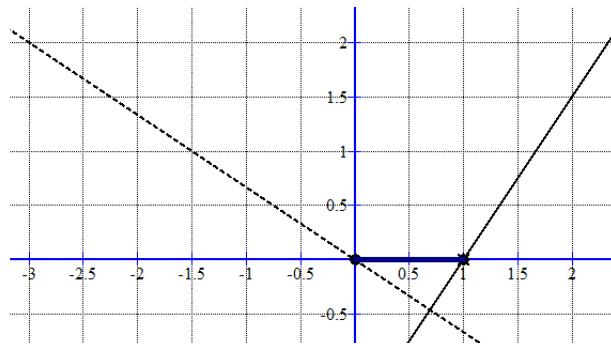


Figura 5.4: Regione ammissibile di PL5 e soluzione ottima

Si ha  $x_{PL5}^* = (1, 0)^\top$ ,  $L5 = -3$ . La soluzione ottima di PL5 è intera. Aggiorniamo l'ottimo corrente

$U = -3$ ,  $\hat{x} = (1, 0)^\top$  e chiudiamo il problema  $S5$ .

$$\mathcal{Q} = \{S2, S4, S6\}$$

#### Iterazione 5

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti  $S6$  e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.5).

Si ha  $x_{PL6}^* = (2, 1)^\top$ ,  $L6 = -4$ . La soluzione ottima di PL6 è intera ed essendo  $L6 < U$  aggiorniamo l'ottimo corrente

$U = -4$ ,  $\hat{x} = (2, 1)^\top$  e chiudiamo il problema  $S6$ .

$$\mathcal{Q} = \{S2, S4\}$$

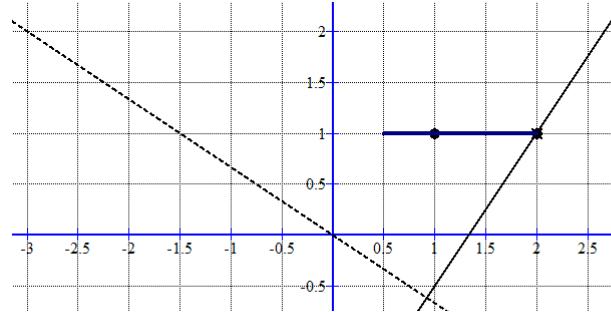


Figura 5.5: Regione ammissibile di PL6 e soluzione ottima

*Iterazione 6*

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti  $S4$ .  $S4$  risulta inammissibile e quindi si può chiudere.

$$\mathcal{Q} = \{S2\}$$

*Iterazione 7*

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti  $S2$  e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.6) Si ha  $x_{PL2}^* = (2, 2)^\top$   $L2 = -2$ . La soluzione ottima di PL5 è intera ma

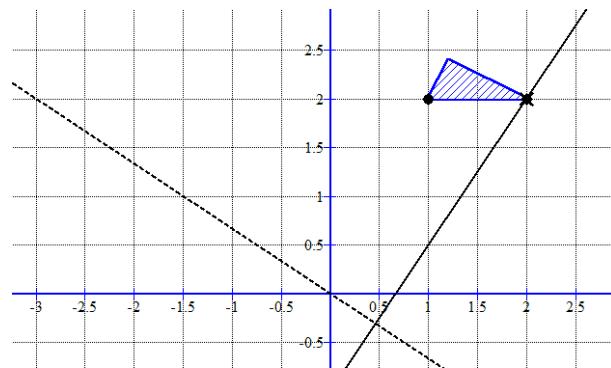


Figura 5.6: Regione ammissibile di PL2 e soluzione ottima

$L2 > U$  e quindi non aggiorniamo l'ottimo corrente. Chiudiamo il problema  $S2$ ,  $\mathcal{Q} = \emptyset$  e l'algoritmo si arresta fornendo la soluzione ottima

$$x_{PLI}^* = \hat{x} = (2, 1)^\top$$

$$z_{PLI}^* = U = -4$$

◊

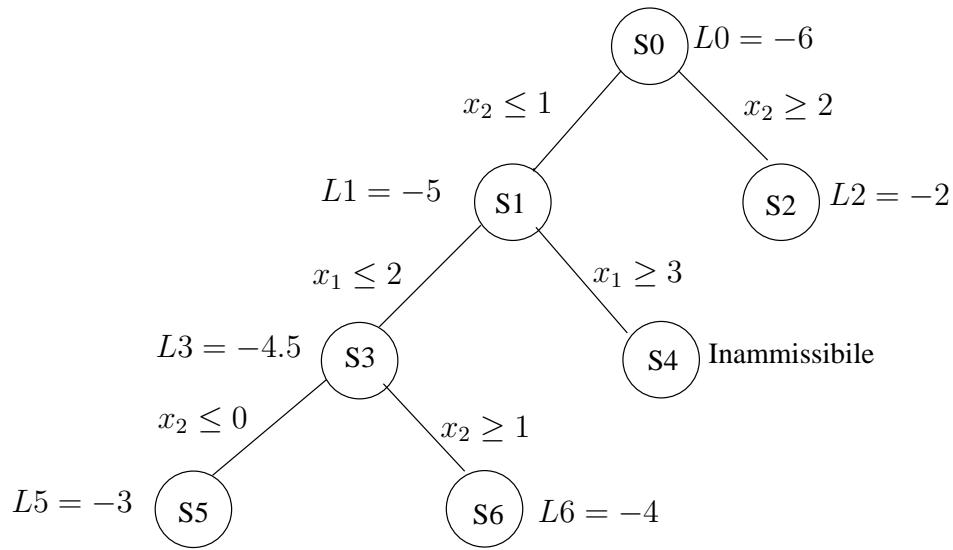


Figura 5.7: Albero dei Sottoproblemi dell'Esercizio 5.1.1

ESERCIZIO 5.1.2. Risolvere il seguente problema di *PLI*

$$\begin{aligned}
 \max \quad z(x) = & \quad x_1 + 2x_2 \\
 & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\
 & 2x_2 \leq 7 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \text{ intere}
 \end{aligned}$$

Soluzione – Algoritmo Branch and Bound

Applichiamo l'algoritmo al problema di massimo (in modo equivalente si può trasformare il problema in un problema di minimo) ricordando che questa volta la soluzione dei rilassati lineari dei vari sottoproblemi  $S_i$  forniscono Upper Bound sul valore ottimo (incognito) del problema intero e che il valore delle soluzioni ammissibili del problema intero è un Lower Bound.

Inizializzazione

$$\mathcal{Q} = \{S0\}, L = -\infty, \hat{x} = \perp$$

Iterazione 1

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti  $S0$  e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.8). Si ha  $x_{PL0}^* = (15/4, 7/2)^\top$ ,  $U_0 = 43/4 = 10.75$ . La soluzione ottima di PL0

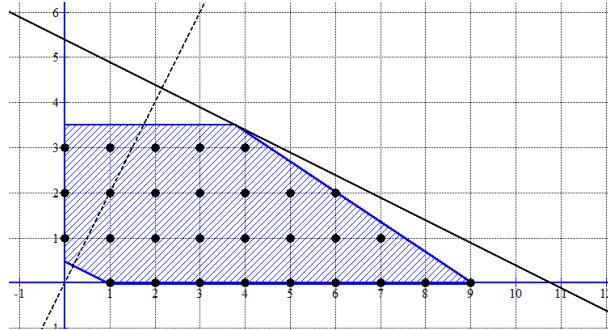


Figura 5.8: Regione ammissibile di PL0 e soluzione ottima

non è intera. Generiamo due nuovi sottoproblemi operando un branching su  $x_2$ .

$$1. S_1 = S_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 3\}$$

$$2. S_2 = S_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 4\}$$

$$\mathcal{Q} = \{S1, S2\}$$

### Iterazione 2

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti  $S1$  e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura ??) Si ha  $x_{PL1}^* = (9/2, 3)^\top$ ,  $U_1 = 21/2$ . La soluzione ottima di PL1 non è intera.

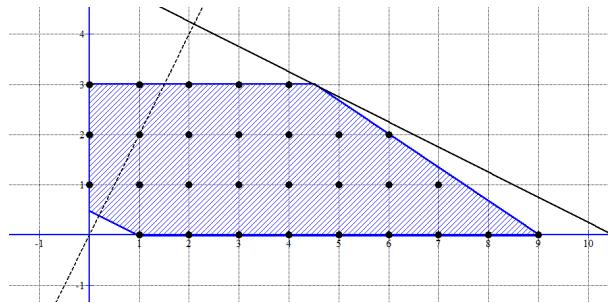


Figura 5.9: Regione ammissibile di PL1 e soluzione ottima

Generiamo due nuovi sottoproblemi operando un branching su  $x_1$ .

$$1. S_3 = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 4\}$$

$$2. S_4 = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 5\}$$

$$\mathcal{Q} = \{S2, S3, S4\}$$

### Iterazione 3

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti  $S3$  e risolviamo il suo rilassato lineare

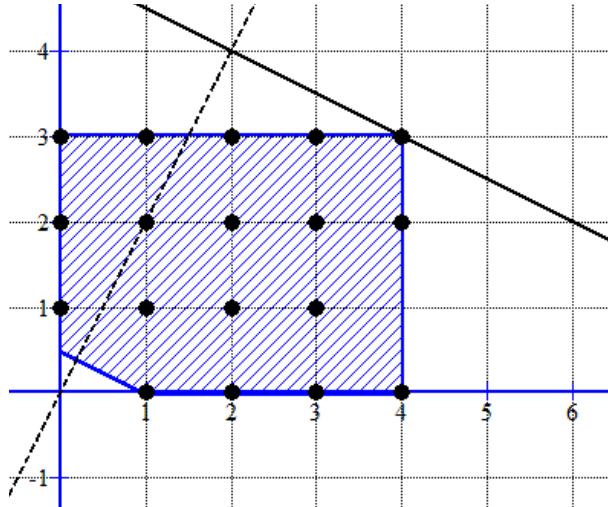


Figura 5.10: Regione ammissibile di PL3 e soluzione ottima

(Figura 5.10). Si ha  $x_{PL3}^* = (4, 3)^\top$ ,  $U_3 = 10$ . La soluzione ottima di PL3 è intera. Aggiorniamo l'ottimo corrente

$L = 10$ ,  $\hat{x} = (4, 3)^\top$  e chiudiamo il sottoproblema  $S_3$   $\mathcal{L} = \{S_2, S_4\}$

#### Iterazione 4

Notiamo che  $U_0 - L = 0.75 < 1$ . Quindi possiamo chiudere, senza esaminarli, i sottoproblemi  $S_2$  ed  $S_4$  perché sono dominati dall'ottimo corrente (in realtà  $S_2$  è inammisibile). Nella migliore delle ipotesi le soluzioni degli eventuali sottoproblemi figli del sottoproblema  $S_4$  non possono essere migliori dell'ottimo corrente, essendo l'upper bound globale pari a 10.75.

Pertanto  $\mathcal{Q} = \emptyset$  e l'algoritmo si arresta fornendo la soluzione ottima

$$\begin{aligned} x_{PLI}^* &= \hat{x} = (4, 3)^\top \\ z_{PLI}^* &= L = 10 \end{aligned}$$

◇

## 5.2 Esercizi non svolti

ESERCIZIO 5.2.1 ■ Risolvere il problema di PLI,

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3x_1 + 4x_2 \\
 \text{con} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
 & x_1, x_2 \text{ intere}
 \end{aligned}$$

applicando l'algoritmo Branch-and-Bound con le seguenti specifiche: prima separazione fatta sulla variabile  $x_2$ ; esplorazione dell'albero dei sottoproblemi a partire dal sotto-albero destro.

◊

**ESERCIZIO 5.2.2** ■ Risolvere mediante l'algoritmo Branch-and-Bound il seguente problema di PLI, esplorando l'albero dei sottoproblemi in profondità.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + x_2 \\
 \text{con} \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 15 \\
 & 4x_1 - x_2 \geq 15 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \\
 & x_1, x_2 \text{ intere}
 \end{aligned}$$

◊

**ESERCIZIO 5.2.3** ■ Per il seguente problema di PLI è noto l'albero parziale prodotto dall'algoritmo Branch & Bound

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
 \text{con} \quad & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\
 & 2x_2 \leq 5 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{intero}
 \end{aligned}$$

Assumendo che i sottoproblemi siano stati esaminati secondo la numerazione di ciascun nodo e che la lista dei sottoproblemi aperta sia  $Q = \{S_7, S_8, S_9, S_{10}\}$ , si risponda in maniera esaustiva alle seguenti domande:

1. In quale intervallo ricade il valore ottimo  $z_{PLI}^*$  prima della risoluzione di  $S_3$ . E dopo?

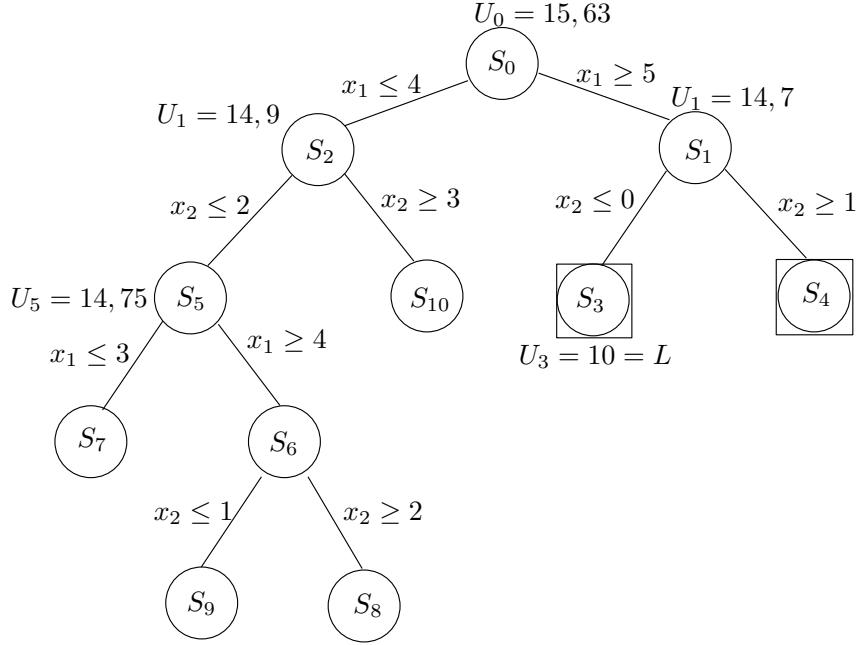


Figura 5.11: Albero di Branch&amp;Bound dell'Esercizio 5.2.3.

2. Per quale ragione il sottoproblema  $S_4$  è stato chiuso?
3. E' possibile che la risoluzione del rilassato lineare di  $S_6$  abbia fornito  $U_6 = 10, 5$ ?
4. Cosa comporta la risoluzione di  $S_{10}$  subito dopo la risoluzione di  $S_4$ ?
5. Si ipotizzi che tra i vincoli  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$   $i = 1, \dots, m$  sia presente il vincolo  $5x_1 + 4x_2 \leq 30$  e che nella descrizione di  $S_7$  solo quest'ultimo è rilevante (oltre che i vincoli di branching ovviamente). Completare l'algoritmo e determinare la soluzione ottima di PLI, visitando prima  $S_7$  ed i suoi eventuali figli, quindi nell'ordine,  $S_8$ ,  $S_9$  ed  $S_{10}$ .

◊