1. $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $[x]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$x = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-1) + (-3)(5) \\ (-5)(-1) + (1)(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 \\ 10 \end{bmatrix} = x$$

2. $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$; $[x]_\beta = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 4 & -8 \\ 3 & -8 & -7 \\ -6 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 4 \\ 30 \end{bmatrix} = x$$

3. $$x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -6 & 8 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & -5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{+2eq2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3eq1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{+eq2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{+3eq3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} c_1 = 3/7 \\ c_2 = 9/14 \\ c_3 = 5/7 \end{matrix} \rightarrow x = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 9/14 \\ 5/7 \end{bmatrix}$$

4. $$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$P_\beta = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ -6 & 8 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Find } P_\beta^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 8 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{+2eq2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3eq1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{+eq2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{+3eq3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & 10 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-eq2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4/3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4/3 & -3 & -1 \\ 0 & 14 & 7 & -7 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & 10 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-eq3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 4/3 & -3 & -1 \\ 0 & 14 & 0 & -3 & 11 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & 10 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{+\frac{2}{7}eq3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{21} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -3/14 & 11/14 & 4/14 \\ 0 & 0 & 1 & -4/7 & 10/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4/21 & -1/7 & -1/7 \\ -3/14 & 11/14 & 4/14 \\ -4/7 & 10/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

6.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2b+3c \\ a+b-2c \\ 4a+b \\ 3a-b-c \end{bmatrix}, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 4a \\ 3a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2b \\ b \\ b \\ -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3c \\ -2c \\ 0 \\ -c \end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_2} + c\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -4eq1 \\ -3eq1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 8 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} + eq2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & -39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + eq3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ dimension D = 3

→ the basis is all 3 vectors $\{v_1, v_2, v_3\}$

7.

$$\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -8 & -6 \\ 2 & -5 & 6 & -7 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +eq1 \\ -2eq1 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 12 & 5 & 5 \end{bmatrix} + eq1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 12 & 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +3eq2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ Dimension W = 3

$$\text{Basis} = \{V_1, V_2, V_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

8.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -8 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +eq1 \\ -2eq1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 12 & 5 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

dimension of Col A = 3

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

dimension of Nul A = $\boxed{2}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & -8 & 7 \\ 2 & 1 & -6 & 9 \end{bmatrix} + eq5 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & -5 & 15 \\ 1 & -3 & -8 & 7 \\ 2 & 1 & -6 & 9 \end{bmatrix} + eq4 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -13 & 22 \\ 1 & -3 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} - eq1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -13 & 22 \\ 0 & -3 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -13 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -13 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -13 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -13 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -6 & -13 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 6eq2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow (v_1 ; v_2 ; v_3) \rightarrow$ dimension $W = 3$

5. A one-to-one linear transformation from a vector space V onto a vector space W is called isomorphism

Say we have the plane in R^3 that does not pass through the origin

$P: \; x + y - 2z = 4$

Choose 2 vectors $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$; $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \notin P \Rightarrow$ It's not linear transformation

$\Rightarrow$ it cannot be isomorphic