ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Νικόλαος Γιακουμόγλου 9043

13 Νοεμβρίου 2020

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η ελαχιστοποίηση 3 συναρτήσεων (αυστηρά σχεδόν κυρτών) με 4 διαφορετικές μεθόδους:

- Μέθοδος Διχοτόμου (Bisection Method) $\rightarrow$ function **myBisection.m**
- Μέθοδος Χρυσού Τομέα (Golden Section Method) $\rightarrow$ function **myGolden.m**
- Μέθοδος Fibonacci (Fibonacci Method) $\rightarrow$ functionpt **myFibonacci.m**
- Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση Παραγώγου (Bisection with Derivative Method) $\rightarrow$function **myBisectionDerivative.m**

Σημειώνεται πως οι αλγόριμοι υλοποιήθηκαν βάσει αναζήτησης στο διαδίκτυο και της παράδοσης στο μάθημα και όχι αναλυτική βάσει το βιβλίο (όπως αναφέρεται στην εκφώνηση) καθώς το τελευταίο δεν έχει παραδοθεί ακόμα.
Οι συναρτήσεις προς εύρεση ελαχίστου στο δοσμένο διάστημα $[2, 5]$ είναι οι εξής:

- $f_1(x) = (x-2)^2 - sin(x+3)$
- $f_2(x) = e^{-5x} + (x+2)cos^2(0.5x)$
- $f_3(x) = x^2 sin(x+2) - (x+1)^2$

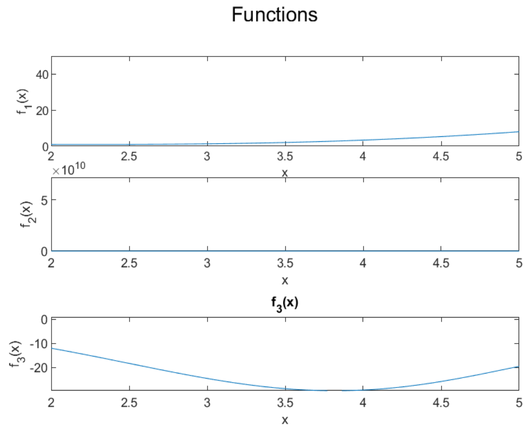

Figure 1: Συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις και τα διαστήματα δηλώνονται στην αρχή κάθε script (thema1.m, thema2.m, thema3.m, thema4.m).
Σημειώνεται ότι κάποιος μπορεί να τρέξει τα scripts thema1.m, thema2.m, thema3.m, thema4.m ένα προς ένα ή να τρέξει το script main.m που τρέχει όλα τα παραπάνω scripts ένα προς ένα.

2 ΣΥΝΤΟΜΗ ΕΞΗΓΗΣΗ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

2.1 Μέθοδος Διχοτόμου

Δοθέντος ενός αρχικού διαστήματος $[a_0, b_0]$, υπολογίζεται τα σημεία $[x_1, x_2]$ δεξιά και αριστερά της διχοτόμου σε απόσταση $\pm\varepsilon$. Η απόσταση ε δίνεται ως είσοδο στον αλγόριθμο. Κατόπιν υπολογίζει την τιμή της συνάρτησης στα σημεία $[x_1, x_2]$, έστω $f(x_1), f(x_2)$. Τότε αν $f(x_1) > f(x_2)$, μετακινεί το α_0 στο σημείο x_1 (έστω a_1) ενώ κρατάει το b_0 σταθερό ($b_1 = b_0$), καθώς στο διάστημα $[\alpha_0, x_1]$ αποκλείεται να βρίσκεται το ελάχιστο.Αν $f(x_1) < f(x_2)$, μετακινεί το b_0 στο σημείο x_2 (έστω b_1) ενώ κρατάει το a_0 σταθερό ($a_1 = a_0$), καθώς στο διάστημα $[x_2, b_0]$ αποκλείεται να βρίσκεται το ελάχιστο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με εκ νέου υπολογισμό των $[x_1, x_2]$ στο νέο διάστημα $[\alpha_1, b_1]$. Συνθήκη τερματισμού αποτελεί αν το μήκος του διαστήματος $[a_k, b_k]$ είναι μικρότερο της ευαισθησίας l. Στην συγκεκριμένη υλοποίηση δίνεται και μία παράμετρος που ορίζει τον μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων. Επίσης, αφού σε κάθε επανάληψη, τα x_1, x_2 αλλάζουν, τότε ο αριθμός των κλήσεων της $f(\cdot)$ είναι δύο φορές ο αριθμός των επαναλήψεν του κυρίου βρόγχου:

$$calls = 2 \cdot (k-1)$$

όπου k: ο αρθμός των επαναλήψεων του κυρίου βρόγχου και το k ξεκινάει από το 1 και στην 1η επανάληψη θα γίνει 2 (σύμβαση υλοποίησης, η αρίθμηση του MATLAB ξεκινάει απο το 1). Δηλαδή ο κύριος βρόγχος τρέχει $(k-1)$ φορές. Επιπλέον, τα x_1, x_2, a, b αποθηκεύονται για τις διάφορες επαναλήψεις και επιστρέφονται στην έξοδο. Σημειώνεται ότι τα x_1, x_2 δεν θα χρησιμοποιηθούν, απλά επιστρέφονται για λόγους πληρότητας.

2.2 Μέθοδος Χρυσού Τομέα

Δοθέντος ενός αρχικού διαστήματος $[a_0, b_0]$, υπολογίζεται τα σημεία $[x_1, x_2]$ ως:

$$x_1(k) = a(k) + (1-\gamma) \cdot (b(k) - a(k))$$

$$x_2(k) = a(k) + \gamma \cdot (b(k) - a(k))$$

$$\gamma = 0.618$$

Κατόπιν η μέθοδος υπολογίζει την τιμή της συνάρτησης στα σημεία $[x_1(k), x_2(k)]$, έστω $f(x_1(k)), f(x_2(k))$. Τότε αν $f(x_1(k)) > f(x_2(k))$, μετακινεί το $a(k)$ στο σημείο $x_1(k)$ (έστω $a_1(k+1)$) ενώ κρατάει το $b(k)$ σταθερό ($b(k+1) = b(k)$), καθώς στο διάστημα $[\alpha_0(k), x_1(k)]$ αποκλείεται να βρίσκεται το ελάχιστο.Αν $f(x_1(k)) < f(x_2(k))$, μετακινεί το $b(k)$ στο σημείο $x_2(k)$ (έστω $b(k+1)$) ενώ κρατάει το $a(k)$ σταθερό ($a(k+1) = a(k)$), καθώς στο διάστημα $[x_2(k), b(k)]$ αποκλείεται να βρίσκεται το ελάχιστο. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται με εκ νέου υπολογισμό των $[x_1(k), x_2(k)]$ στο νέο διάστημα $[a(k+1), b(k+1)]$. Σηνθήκη τερματισμού αποτελεί αν το μήκος του διαστήματος $[a_k, b_k]$ είναι μικρότερο της ευαισθησίας l. Στην συγκεκριμένη υλοποίηση δίνεται και μία παράμετρος που ορίζει τον μέγιστο αριθμό των επαναλήψεων. Επίσης, αφού σε κάθε επανάληψη πριν της αρχικής, ένα εκ των x_1, x_2 παραμένει σταθερό, ο αλγόριθμος αποθηκεύει το αποτέσμα $f(x_1), f(x_2)$ για να χρησιμοποιεί την τελευταία τιμή κάθε φορά. Δηλαδή ισχύει ότι ο αριθμός των κλήσεων της $f(\cdot)$ είναι είναι 2 στην αρχή σύν 1 για κάθε επανάληψη του κυρίου βρόγχου:

$$calls = 2 + (k-1) = k+1$$

όπου k: ο αρθμός των επαναλήψεων του κυρίου βρόγχου και το k ξεκινάει από το 1 και στην 1η επανάληψη θα γίνει 2 (σύμβαση υλοποίησης, η αρίθμηση του MATLAB ξεκινάει απο το 1). Δηλαδή ο κύριος βρόγχος τρέχει $(k-1)$ φορές. Επίσης, τα x_1, x_2, a, b αποθηκεύονται για τις διάφορες επαναλήψεις και επιστρέφονται στην έξοδο. Σημειώνεται ότι τα x_1, x_2 δεν θα χρησιμοποιηθούν, απλά επιστρέφονται για λόγους πληρότητας.

2.3 Μέθοδος Fibonacci

Η μέθοδος αυτή είναι ακριβώς ίδια με την Μέθοδο Χρυσού Τομέα, μόνο που οι συντελεστές $\gamma, (1-\gamma)$ αντικαθίστανται από όρους την ακολουθίας Fibonacci.

$$x_1(k) = a(k) + (\frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}) \cdot (b(k) - a(k))$$

$$x_2(k) = a(k) + (\frac{F_{n-k}}{F_{n-k-1}}) \cdot (b(k) - a(k))$$

Εδώ όμως μένει να υπολογίσουμε το n: αριθμός των επαναλήψεων. Μετά από n επαναλήψεις ισχύει:

$$b_n - a_n = \frac{1}{F_n}(b_1 - a_1)$$

$$b_n - a_n < l \Rightarrow \frac{1}{F_n}(b_1 - a_1) < l$$

Έτσι, βρίσκουμε τον αριθμό Fibonacci που είναι μεγαλύτερος του F_n ενώ παράλληλα υπολογίζουμε και τους αριθμούς Fibonacci (πιο αποδοτικός τρόπος απο τον αναδρομικό λόγω μειωμένης πολυπλοκότητας). Τέλος προσθέτουμε 2 ακόμα αριθμούς που θα χρειαστούν λόγω του +2 που εμφανίζεται για $k \leftarrow k+1$. Επίσης σημειώνεται ότι επειδή δεν χρησιμοποιούμε τον F_0, η αναδρομή τρέχει έως $n-1$. Ομοίως με πριν ισχύει:

$$calls = 2 + (k-1) = k+1$$

για τους ίδιους ακριβώς λόγους.

2.4 Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση Παραγώγου

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί την παράγωγο της $\frac{\partial f}{\partial x}$. Δοθέντος ενός διαστήματος $[a(k), b(k)]$, Υπολογίζει την κλίση στην διχοτόμο $x(k) = \frac{a(k)+b(k)}{2}$. Εάν η κλίση είναι μηδέν, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x} \mid_{x=x(k)}= 0$, τότε ο αλγόριθμος τερματίζει και πετύχαμε ακριβώς το ελάχιστο. Αν $\frac{\partial f}{\partial x} \mid_{x=x(k)}> 0$ τότε το ελάχιστο $x^* \notin [x(k), b(k)]$ και θέτουμε $a(k+1) = a(k), b(k+1) = x(k)$. Αν $\frac{\partial f}{\partial x} \mid_{x=x(k)}< 0$ τότε το ελάχιστο $x^* \notin [a(k), x(k)]$ και θέτουμε $a(k+1) = x(k), b(k+1) = b(k)$. Αυτός ο αλγόριθμος υπολογίζει μία φορά την τιμή του $\frac{\partial f}{\partial x}$ στο $x(k)$ σε κάθε επανάληψη δηλαδή οι κλήσεις στην συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial x}$ είναι ίσες με τις επαναλήψεις του βρόγχου, οπότε ισχύει

$$calls = k - 1$$

όπου k: ο αρθμός των επαναλήψεων του κυρίου βρόγχου και το k ξεκινάει από το 1 και στην 1η επανάληψη θα γίνει 2 (σύμβαση υλοποίησης, η αρίθμηση του MATLAB ξεκινάει απο το 1). Δηλαδή ο κύριος βρόγχος τρέχει $(k-1)$ φορές.

2.5 Σύνοψη

Συνοψίζεται ο αριθμός των κλήσεων της αντικειμενικής συνάρτησης συναρτήσει του αριθμού των επαναλήψεν του βρόγχου. Τονίζουμε πάλι ότι ο βρόγχος εκτελελείται $Loops = k-1$ φορές αλλα εμείς μετράμε το μήκος του a ή του b που είναι k (διατηρούμε τον συμβολισμό από τα scripts).

- Μέθοδος Διχοτόμου $\rightarrow$ $calls = 2 \cdot (k-1) = 2 \cdot Loops$
- Μέθοδος Χρυσού Τομέα $\rightarrow$ $calls = k + 1 = Loops + 2$
- Μέθοδος Fibonacci $\rightarrow$ $calls = k + 1 = Loops + 2$
- Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση Παραγώγου $\rightarrow$ $calls = k - 1 = Loops$

όπου υπενθυμίζουμε ότι

- $calls$: αριθμός κλήσεων της συνάρτησης $(f, \partial f/\partial x)$
- $Loops$: αριθμός επαναλήψεων του βρόγχου
- k: πόσες τιμές υπολογίζουμε για τα διαστήματα $[a(k), b(k)]$ συμπεριλαμβανομένου του a_0, b_0. Ισχύει $Loops = k - 1$

3 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ ΣΕ MATLAB

Για την εποπτική επικύρωση των αποτελεσμάτων, χρησιμοποιήθηκε το **wolfram**. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής:

- $f_1(x)$ ελάχιστο στο $x^* = 2.25057$
- $f_2(x)$ ελάχιστο στο $x^* = 3.14159$
- $f_3(x)$ ελάχιστο στο $x^* = 3.81992$

Για τον σκοπό των προσομοιώσεων φτιάχτηκε επιπλέον η συνάρτηση **plot_intervals.m** που εμφανίζει στο εκάστοτε figure τα διαστήματα $[a(k), b(k)]$ σε βάθος επαναλήψεων. Σημειώνεται ότι το αρχικό διάστημα που δίνεται $[a_0, b_0] \equiv [a(1), b(1)]$ εμφανίζεται για $k = 1$, ενώ η πρώτη επανάληψη βρίσκεται στο $k = 2$. Οι 2 παραλαγγές την συνάρτησεις βασίζονται στο πώς να εμφανίζεται το διάστημα. Προτιμήθηκε μία εκ των 2 για απεικόνιση στις επόμενες ενότητες. Αναλυτικές οδηγίες χρήσης δίνονται μέσα στον κώδικα.

3.1 Μέθοδος Διχοτόμου

Η προσομοιώσεις βρίσκονται στο αρχείο **thema1.m**. Τα figures αποθηκεύονται αυτόματα στον φάκελο PlotsThema1.

3.1.1 Σταθερό εύρος αναζήτης $l = 0.01$

Μελετήθηκε ο αριθμός των κλήσεων της εκάστοτε συνάρτησης σε σχέση με την απόσταση από την διχοτόμο ε για σταθερό εύρος αναζήτησης l. Τα αποτελέσματα για τις 3 συναρτήσεις είναι τα εξής

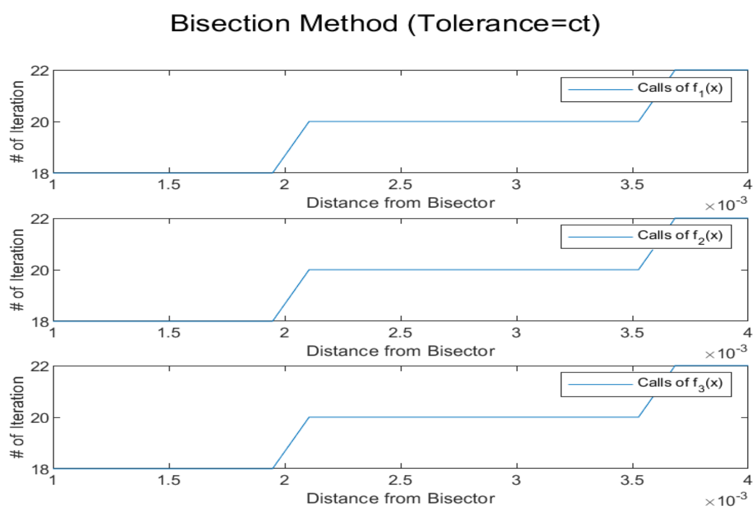

Figure 2: Σταθερό εύρος αναζήτης $l = 0.01$

Παρατηρούμε ότι αυξάνοντας την απόσταση απο την διχοτόμο, χρειαζόμαστε περισσότερες επαναλήψεις για να βρούμε το ελάχιστο με την ίδια ακρίβεια. Αυτό είναι προφανές αφού η μέθοδος αργεί να "κόψει" το διάστημα σε μικρότερα για να πετύχει την ακρίβεια που ζητάμε. Επίσης για τα γραφήματα για τις 3 συναρτήσεις, οι τιμές είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, που σημαίνει ότι ο ρυθμός σύγκλισης είναι σταθερός, ανεξαρτήτου συνάρτησης. Προσοχή ότι για μεγάλες τιμλες του ε, ο αλγόριθμος δεν τερματίζει.

3.1.2 Σταθερή απόσταση απο διχοτόμο $\varepsilon = 0.001$

Μελετήθηκε ο αριθμός των κλήσεων της εκάστοτε συνάρτησης σε σχέση με το εύρος αναζήτησης l για σταθερή απόσταση από την διχοτόμο $\varepsilon = 0.001$. Τα αποτελέσματα για τις 3 συναρτήσεις είναι τα εξής

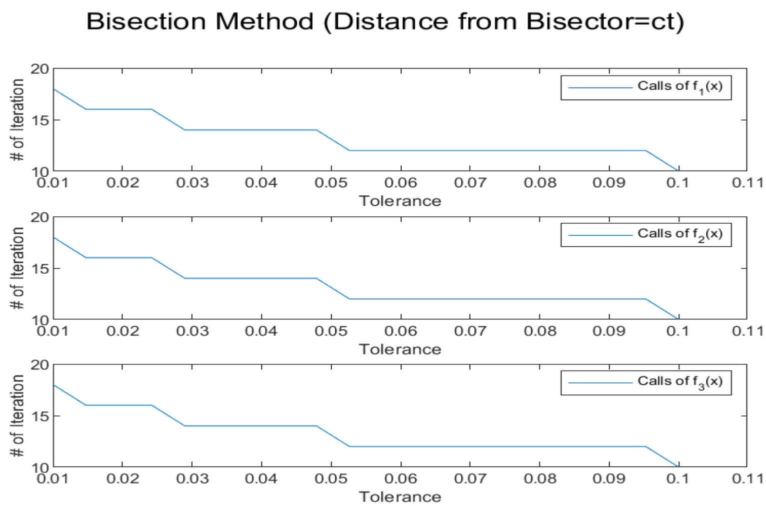

Figure 3: Σταθερό εύρος αναζήτης $l = 0.01$

Παρατηρούμε πως αυξάνοντας την ευαισθησία, δηλαδή αν είμαστε πιο ανεκτικοί σε σφάλμα (μεγαλύτερο διάστημα για το ελάχιστο), πετυχαίνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα σε λιγότερο αριθμό επαναλήψεων, όπως ήταν και αναμενόμενο αφού για μικρότερη ευαισθησία, η μέθοδος θέλει κι άλλες επαναλήψεις για να "μικρύνει" το διάστημα $[a(k), b(k)]$. Επίσης για τα γραφήματα, οι τιμές για τις 3 συναρτήσεις είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, που σημαίνει ότι ο ρυθμός σύγκλισης είναι σταθερός, ανεξαρτήτου συνάρτησης.

3.1.3 Άκρα διαστήματος για $\varepsilon = 0.001$ και $l = [0.01, 0.1, 0.3]$

Μελετήθηκε το εύρος των διαστημάτων $[a(k), b(k)]$ για σταθερό ε και 3 τιμές του l που επιλέχθηκαν αυθαίτερα. Τα αποτελέσματα έιναι τα εξής

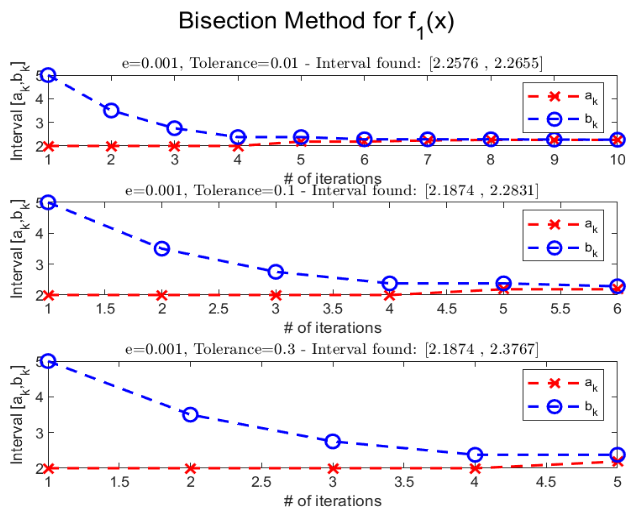

Figure 4: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_1(x)$ για κάποιες τιμές l

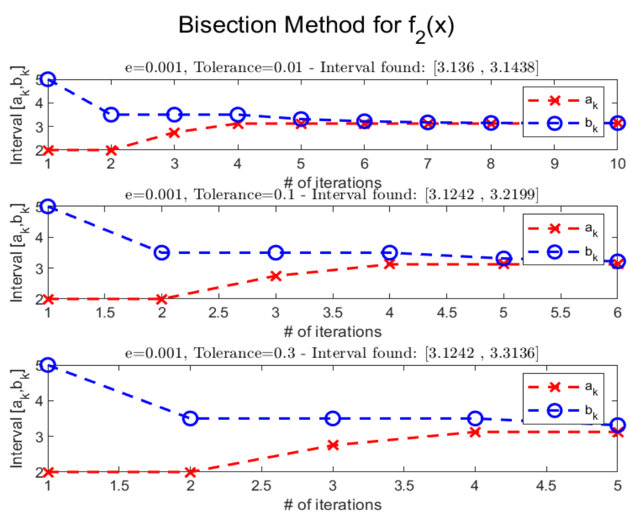

Figure 5: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_2(x)$ για κάποιες τιμές l

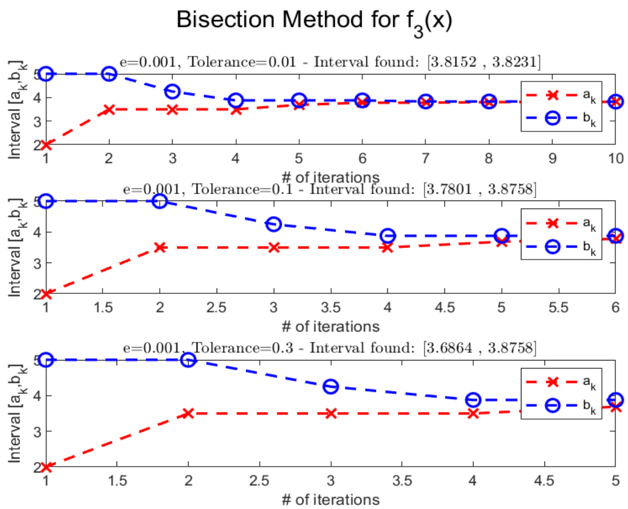

Figure 6: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_3(x)$ για κάποιες τιμές l

Παρατηρούμε ότι πράγματι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο που έχουμε από το wolfram.

3.2 Μέθοδος Χρυσού Τομέα

Η προσομοιώσεις βρίσκονται στο αρχείο **thema2.m**. Τα figures αποθηκεύονται αυτόματα στον φάκελο PlotsThema2.

3.2.1 Μεταβλητό εύρος αναζήτησης l

Μελετήθηκε ο αριθμός των κλήσεων της εκάστοτε συνάρτησης σε σχέση με το εύρος αναζήτησης l. Τα αποτελέσματα για τις 3 συναρτήσεις είναι τα εξής

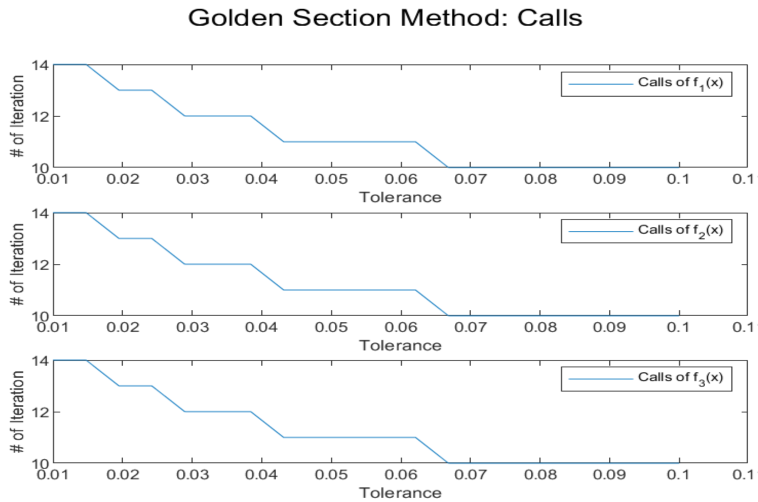

Figure 7: Σταθερό εύρος αναζήτης $l = 0.01$

Παρατηρούμε πως αυξάνοντας την ευαισθησία, δηλαδή αν είμαστε πιο ανεκτικοί σε σφάλμα (μεγαλύτερο διάστημα για το ελάχιστο), πετυχαίνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα σε λιγότερο αριθμό επαναλήψεων, όπως ήταν και αναμενόμενο αφού για μικρότερη ευαισθησία, η μέθοδος θέλει κι άλλες επαναλήψεις για να "μικρύνει" το διάστημα $[a(k), b(k)]$. Επίσης για τα γραφήματα για τις 3 συναρτήσεις, οι τιμές είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, που σημαίνει ότι ο ρυθμός σύγκλισης είναι σταθερός, ανεξαρτήτου συνάρτησης.

3.2.2 Άκρα διαστήματος $l = [0.01, 0.1, 0.3]$

Μελετήθηκε το εύρος των διαστημάτων $[a(k), b(k)]$ για 3 τιμές του l που επιλέχθηκαν αυθαίτερα. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής

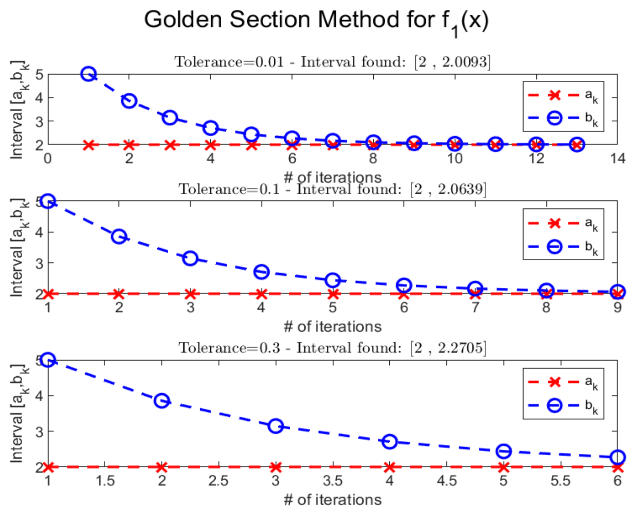

Figure 8: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_1(x)$ για κάποιες τιμές l

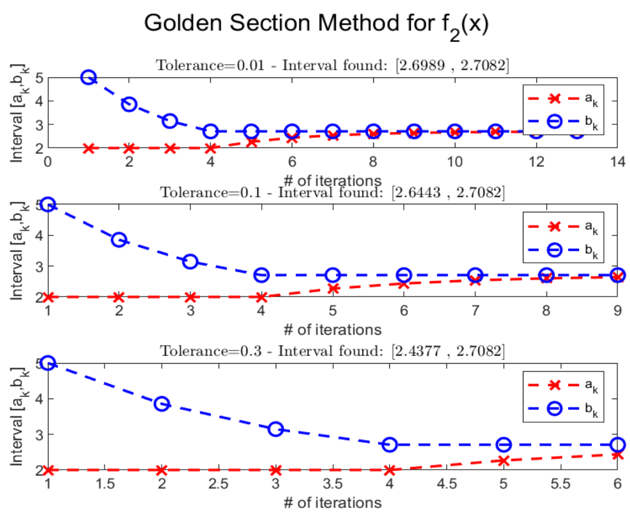

Figure 9: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_2(x)$ για κάποιες τιμές l

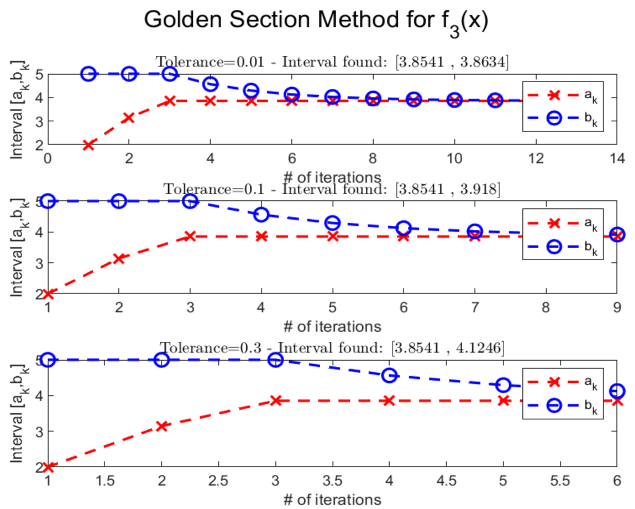

Figure 10: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_3(x)$ για κάποιες τιμές l

Παρατηρούμε ότι πράγματι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο που έχουμε από το wolfram.

3.3 Μέθοδος Fibonacci

Η προσομοιώσεις βρίσκονται στο αρχείο **thema3.m**. Τα figures αποθηκεύονται αυτόματα στον φάκελο PlotsThema3.

3.3.1 Μεταβλητό εύρος αναζήτησης l

Μελετήθηκε ο αριθμός των κλήσεων της εκάστοτε συνάρτησης σε σχέση με το εύρος αναζήτησης l. Τα αποτελέσματα για τις 3 συναρτήσεις είναι τα εξής

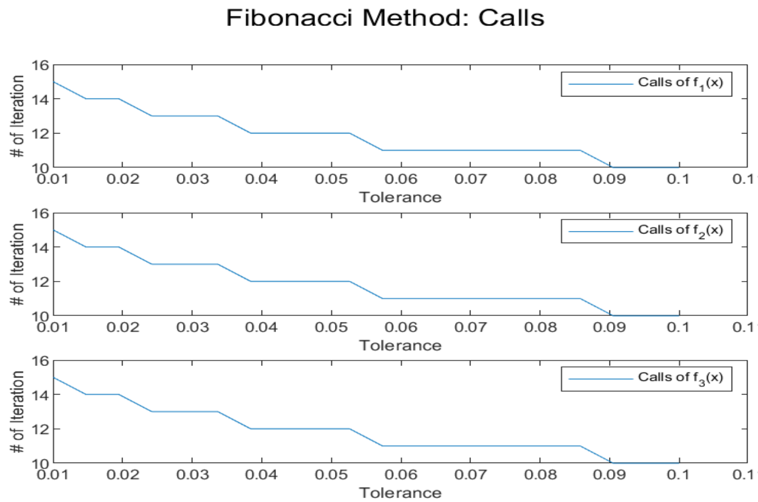

Figure 11: Σταθερό εύρος αναζήτης $l = 0.01$

Παρατηρούμε πως αυξάνοντας την ευαισθησία, δηλαδή αν είμαστε πιο ανεκτικοί σε σφάλμα (μεγαλύτερο διάστημα για το ελάχιστο), πετυχαίνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα σε λιγότερο αριθμό επαναλήψεων, όπως ήταν και αναμενόμενο αφού για μικρότερη ευαισθησία, η μέθοδος θέλει κι άλλες επαναλήψεις για να "μικρύνει" το διάστημα $[a(k), b(k)]$. Επίσης για τα γραφήματα για τις 3 συναρτήσεις, οι τιμές είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, που σημαίνει ότι ο ρυθμός σύγκλισης είναι σταθερός, ανεξαρτήτου συνάρτησης. Σε μία γρήγορη σύγκριση με τον αλγόριθμο του Χρυσού Τομέα (που μοιάζουν και το περισσότερο αφού η διαφορά του είναι ο συντελεστής επαναπροσαρμογής των $a(k), b(k)$), ο αλγόριθμος του Fibonacci χρειάζεται περισσότερες επαναλήψεις για να πετύχει την ίδια ευαισθησία (βλέπουμε ότι τα όρια του y άξονα εδώ είναι από 10 έως 16, ενώ στου Χρυσού Τομέα από 10 έως 14). Επίσης ο αλγόριθμος του Χρυσού Τομέα, πετυχαίνει τον στόχο για υψηλή ανεκτικότητα πολύ πιο γρήγορα (για μεγάλες τιμες ανεκτικότητας, ο αριθμός των επαναλήψεων γίνειται ευθεία σε μικρότερη ανεκτικότητα σε σχέση με την μέθοδο Fibonacci).

3.3.2 Άκρα διαστήματος για $l = [0.01, 0.1, 0.3]$

Μελετήθηκε το εύρος των διαστημάτων $[a(k), b(k)]$ για 3 τιμές του l που επιλέχθηκαν αυθαίτερα. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής

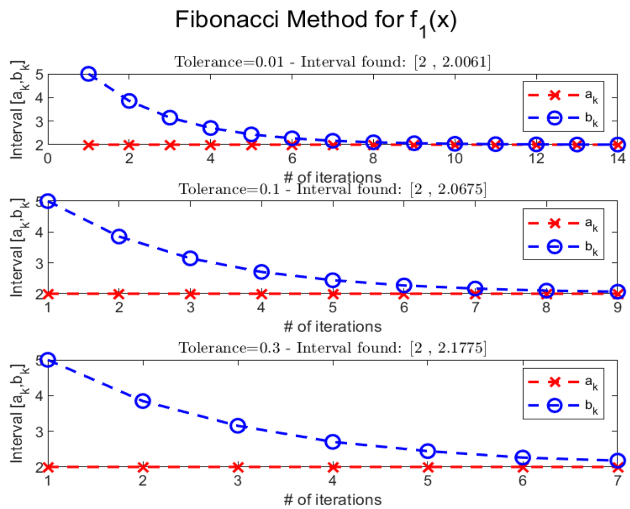

Figure 12: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_1(x)$ για κάποιες τιμές l

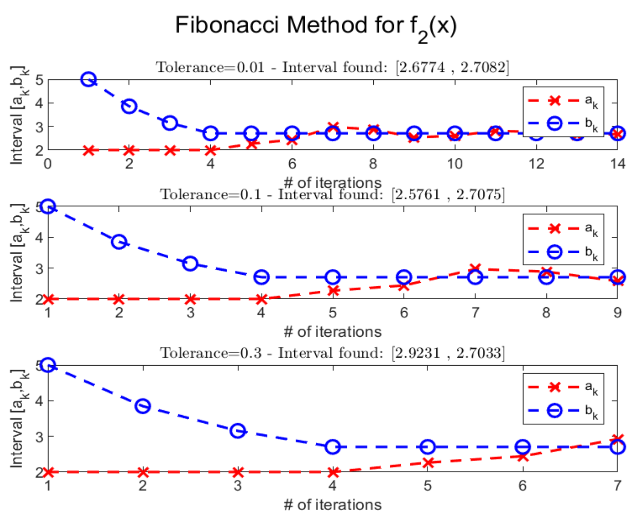

Figure 13: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_2(x)$ για κάποιες τιμές l

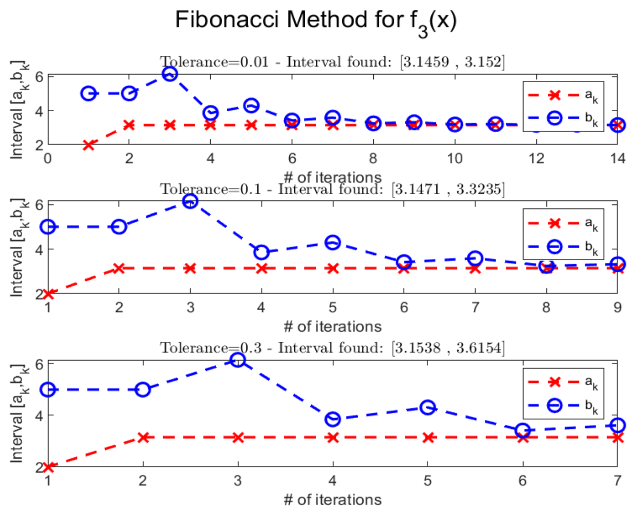

Figure 14: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_3(x)$ για κάποιες τιμές l

Παρατηρούμε ότι πράγματι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο που έχουμε από το wolfram.

3.4 Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση Παραγώγου

Η προσομοιώσεις βρίσκονται στο αρχείο **thema4.m**. Τα figures αποθηκεύονται αυτόματα στον φάκελο PlotsThema4.

3.4.1 Μεταβλητό εύρος αναζήτης l

Μελετήθηκε ο αριθμός των κλήσεων της εκάστοτε συνάρτησης σε σχέση με το εύρος αναζήτησης l. Τα αποτελέσματα για τις 3 συναρτήσεις είναι τα εξής

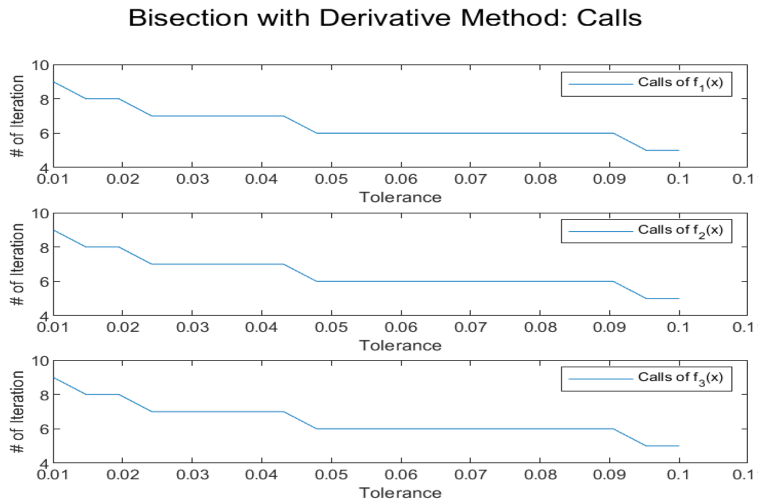

Figure 15: Σταθερό εύρος αναζήτης $l = 0.01$

Παρατηρούμε πως αυξάνοντας την ευαισθησία, δηλαδή αν είμαστε πιο ανεκτικοί σε σφάλμα (μεγαλύτερο διάστημα για το ελάχιστο), πετυχαίνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα σε λιγότερο αριθμό επαναλήψεων, όπως ήταν και αναμενόμενο αφού για μικρότερη ευαισθησία, η μέθοδος θέλει κι άλλες επαναλήψεις για να "μικρύνει" το διάστημα $[a(k), b(k)]$. Επίσης για τα γραφήματα για τις 3 συναρτήσεις, οι τιμές είναι πολύ κοντά μεταξύ τους, που σημαίνει ότι ο ρυθμός σύγκλισης είναι σταθερός, ανεξαρτήτου συνάρτησης

3.4.2 Άκρα διαστήματος για $l = [0.01, 0.1, 0.3]$

Μελετήθηκε το εύρος των διαστημάτων $[a(k), b(k)]$ για 3 τιμές του l που επιλέχθηκαν αυθαίτερα. Τα αποτελέσματα είναι τα εξής

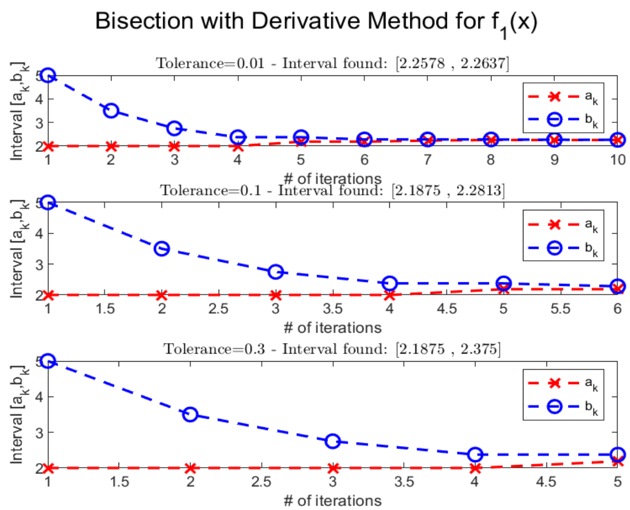

Figure 16: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_1(x)$ για κάποιες τιμές l

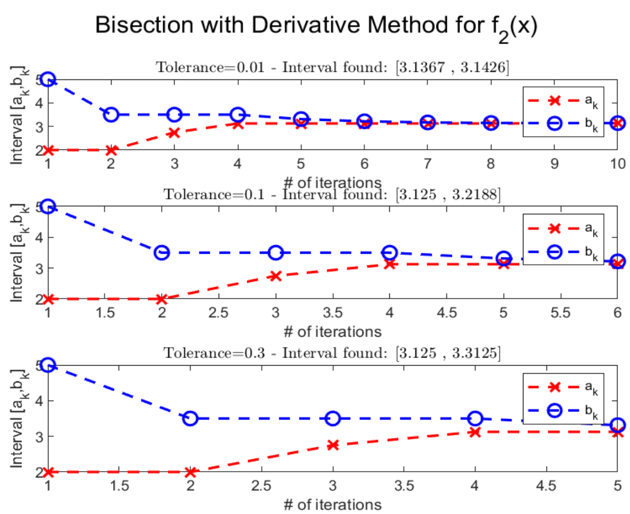

Figure 17: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_2(x)$ για κάποιες τιμές l

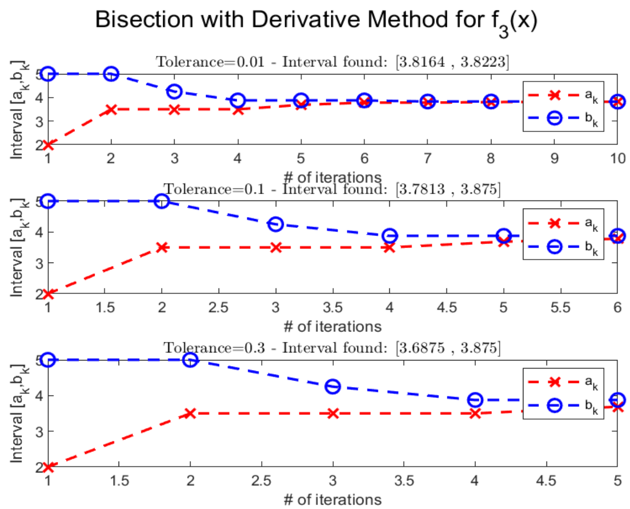

Figure 18: Διάστηματα $[a(k), b(k)]$ για την $f_3(x)$ για κάποιες τιμές l

Παρατηρούμε ότι πράγματι ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο που έχουμε από το wolfram.

3.5 Σύνοψη

Συγκρίνοντας τα Figures 2, 7, 11, 15 παρατηρούμε ότι τις λιγότερες κλήσεις στην αντικειμενική συνάρτηση έχει η μέθοδος Διχοτόμου με την χρήση Παραγώγου, μετά η μέθοδος του Χρυσού Τομέα, μετά η μέθοδος Fibonacci και τέλος η μέθοδος Διχοτόμου.