Funzioni

Definizioni

- $\rightarrow$ funzione: un oggetto $f : A \rightarrow B$ che associa ad ogni elemento di A un elemento di B.
- $\rightarrow$ f. iniettiva: una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice iniettiva se

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- $\rightarrow$ f. surgettiva: una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice surgettiva se

$$\forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$$

- $\rightarrow$ f. invertibile: una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice invertibile se

$$\exists \, g : B \rightarrow A : \forall b \in B \; f(g(b)) = b, \; \forall a \in A \; g(f(b)) = a$$

Si dice quindi che g è l'inversa di f

Insiemi

Definizioni

- $\rightarrow$ minimo: sia A un insieme,

$$\min A = \{m \in A : \forall a \in A, \; m < a\}$$

- $\rightarrow$ massimo: sia A un insieme,

$$\max A = \{M \in A : \forall a \in A, \; M > a\}$$

- $\rightarrow$ insieme inferiormente limitato: un insieme A si dice inf. lim. se

$$\forall a \in A, \; \exists m : m \leq a$$

m è un minorante.

- $\rightarrow$ insieme superiormente limitato: un insieme A si dice sup. lim. se

$$\forall a \in A, \; \exists M : M \geq a$$

M è un maggiorante.

- $\rightarrow$ intervallo: un intervallo $I \in \mathbb{R}$ è un intervallo

$$I \subseteq \mathbb{R} : \forall a, b \in I, \; a \leq b \Rightarrow [a, b] \subseteq I$$

- $\rightarrow$ intorno: sia $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice intorno di x_0 di raggio ϵ l'intervallo
$$I(x_0, \epsilon) = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$
Si dice quindi che $U \subseteq \mathbb{R}$ è un intorno di x_0 se
$$\exists \epsilon > 0 : I(x_0, \epsilon) \subseteq U$$
- $\rightarrow$ insieme aperto: un ins. $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice aperto se
$$\forall x_0 \in A \; \exists \epsilon > 0 : I(x_0, \epsilon) \subseteq A$$
- $\rightarrow$ parte interna: si dice che x_0 appartiene alla parte interna di un ins. A se
$$\exists \epsilon > 0 : I(x_0, \epsilon) \subseteq A$$
Ovvero se A è un intorno di x_0.
- $\rightarrow$ punto di accumulazione: sia A un ins.. Si dice che x_0 è di accumulazione se
$$\forall \epsilon > 0 \; \exists I(x_0, \epsilon) : (I(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq 0$$
- $\rightarrow$ insieme chiuso: sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice chiusura di $cl(A) = A \cap DA$ dove con DA si indica l'insieme dei punti di accumulazione di A. Se $A = \overline{A}$ allora A è un insieme chiuso.
- $\rightarrow$ frontiera: sia A un ins.. Si definisce frontiera di A $(\partial A) = \overline{A} \setminus A^\circ$ dove $\overline{A}$ è la chiusura di A e A° è la parte interna di A.
- $\rightarrow$ punto isolato: $x_0 \in A$ si dice punto isolato se x_0 non è di accumulazione per A.

Successioni

Definizioni

Per questa sezione tutte le vole che compare n si da per scontato che $n \in \mathbb{N}$.

- $\rightarrow$ successione: dato un insieme $X : X \neq 0$ si definisce una successione di elementi di X una funzione
$$a : \{n > n_0 : n, n_0 \in \mathbb{N}\} \rightarrow X$$
- $\rightarrow$ limite di una successione: $L \in \overline{\mathbb{R}}$ è un valore limite per la successione a_n per $n \rightarrow \infty$ se $\forall U$ di L, definitivamente $a_n \in U$.
- $\rightarrow$ successione cofinale: data a_n definita per $n > n_0$ si dice che a_{s_j} è cofinale con a_n se esiste
$$s : \mathbb{N} \rightarrow \{n > n_0\} : \lim_{j \rightarrow +\infty} s_j = +\infty$$
- $\rightarrow$ successione estratta: una successione cofinale a_{s_j} si dice estratta da a_n se s_j è strettamente crescente
- $\rightarrow$ successione monotona: una successione si dice monotona crescente se $\forall n > n_0, a_{n+1} > a_n$

- $\rightarrow$ successione monotona: una successione si dice monotona decresente se $\forall n > n_0, a_{n+1} < a_n$
- $\rightarrow$ criterio di irregolarità di una successione: se esistono due successioni cofinali con (a_{s_j}, a_{s_k}) tali che

$$a_{s_j} \rightarrow L_1 \wedge a_{s_k} \rightarrow L_2,\ L_1 \neq L_2 \Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$$

- $\rightarrow$ criterio di convergenza di Cauchy: una successione a_n è detta di Cauchy se

$$\forall \epsilon > 0\ \exists k \geq n_0 : \forall n, m > k,\ |a_n - a_m| < \epsilon$$

  Allora la serie converge $\Leftrightarrow$ la serie è di Cauchy.

- $\rightarrow$ ogni successione monotona è regolare: se a_n non è superiormente limitata allora si ha che

$$\forall c \in \mathbb{R}\ \exists k > n_0 : \forall n > k,\ a_n > c$$

  ma dato che la successione è monotona si ha che $a_{n+1} > a_n > c$ quindi la successione diverge. Se a_n è superiormente limitata si ha che definitivamente

$$L - \epsilon < a_n < L < L + \epsilon$$

  ma $a_n < a_{n+1} < L$ quindi converge.

- $\rightarrow$ criterio della radice: data la successione a_n a termini positivi, si ha che se

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow L \Rightarrow \begin{cases} L > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow \infty \\ L = 1 \Rightarrow indeterminato \\ L < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \end{cases}$$

- $\rightarrow$ criterio del rapporto: data la successione a termini positivi, si ha che se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L \begin{cases} L > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow \infty \\ L = 1 \Rightarrow indeterminato \\ L < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0 \end{cases}$$

- $\rightarrow$ criterio rapporto $\Rightarrow$ radice: data una successione a termini positivi si ha che se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \rightarrow L$$

- $\rightarrow$ successioni cofinali hanno lo stesso limite della successione dalla quale sono estratte se la successione è regolare: per ogni intorno U di L si ha che

$$\exists k > n_0 : \forall n > k,\ a_n \in U$$

  Per cofinalità

$$\exists h > 0 : \forall j > h,\ s_j > k \Rightarrow a_{s_j} \in U$$

- $\rightarrow$ numero di Nepero: si prenda la successione

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Funzioni

Definizioni

Per questa sezione si indica con U un intorno base del valore di limite mentre con W un intorno base del punto di accumulazione.

→ grafico: sia $f : D \to \mathbb{R}$ il grafico di tale funzione è definito come

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ x \in D\}$$

→ fun. pari: una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice pari se $f(x) = f(-x)$

→ fun. dispari: una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice dispari se $f(x) = -f(-x)$

→ Fun. periodica: una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice periodica di periodo T se $f(x) = f(x+T)$

→ limite di una funzione: $L \in \mathbb{R}$ è un valore limite della funzione $f : D \to \mathbb{R}$ se

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ x \neq x_0,\ f((x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)) \subseteq (L - \epsilon, L + \epsilon)$$

oppure

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

oppure

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ f(I(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subseteq I(L, \epsilon)$$

→ fun. monotona: una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice monotona crescente se

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 :\ f(x_1) < f(x_2)$$

→ fun. monotona: una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice monotona decrescente se

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 < x_2 :\ f(x_1) > f(x_2)$$

→ fun.continua: una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ si dice continua in x_0 se

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Se f è continua in ogni punto di D allora f è continua. In alternativa dato $L \in \mathbb{R}$, f è continua se

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ f(I(x_0, \delta) \cap D) \subseteq I(L, \epsilon)$$

→ unicità del limite: se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists! L$$

Si suppone che esistono L_1 e L_2 tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ quindi

$$f((W_1 \cap D) \setminus \{x_0\}) \subseteq U_1 \text{ e } f((W_2 \cap D) \setminus \{x_0\}) \subseteq U_2$$

Possiamo quindi scrivere che

$$f(((W_1 \cap W_2) \cap D) \setminus \{x_0\}) \subseteq U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Il che è contraddittorio dato che $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ (sono entrambi intorni di x_0) quindi

$$f(((W_1 \cap W_2) \cap D) \setminus \{x_0\}) \subseteq U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$$

→ permanenza del segno: sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}},\ L \neq 0 \Rightarrow \exists W:\ f((W \cap D) \setminus \{x_0\}) \text{ è concorde con } L$$

infatti dato che $L \neq 0$ allora $\exists \epsilon < |L|$ in cui f ha lo stesso segno di L

→ confronto a due termini: siano $f, g : D \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per D e che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e che esista un intorno W di x_0 tale che

$$\forall x \in W \cap (D \setminus \{x_0\}),\ g(x) \geq f(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$$

→ confronto a tre termini: siano $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per D, si supponga che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

e che esista un intorno W di x_0 tale che

$$\forall x \in W \cap (D \setminus \{x_0\}),\ f(x) \leq h(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

In quanto $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D,\ x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ e $|g(x) - L| < \epsilon$ quindi

$$L - \epsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L < L + \epsilon$$

→ criterio funzioni-successioni: data $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \forall a_n : \mathbb{N} \to D \setminus \{x_0\} :\ \lim_{n \to +\infty} a_n = x_0,\ \lim_{n \to +\infty} f(a_n) = L$$

→ compattezza: un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}$ si dice compatto per successioni se

$$\forall a : \mathbb{N} \to K \exists a_{n_j} :\ \lim_{j \to +\infty} a_{n_j} = k \in K$$

→ teorema di Bolzano-Weierstrass: data a_n una successione limitata in $\mathbb{R}$ allora a_n ammette una sottosuccessione convergente. Questo significa che esistono una sottosuccessione crescente (σ_n) e un punto $L \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{n \to +\infty} a_{\sigma_n} = L$.

→ compattezza: data $K \subset \mathbb{R}$ si dice compatto per successioni se

$$\forall a : \mathbb{N} \to K\ \exists a_{n_j} :\ \lim_{j \to +\infty} a_{n_j} = k \in K$$

→ ogni intervallo chiuso e limitato è compatto: si può usare il teorema di Bolzano-Weierstrass per dimostrare che tale intervallo è compatto. Basta infatti costruire una successione con il metodo di bisezione che ad ogni passaggio crei un intervallo di lunghezza dimezzata che contiene $k \in K$ e quindi avere due successioni (a_n, b_n) le quali convergono a k, a_n crescendo b_n decrescendo.

Teoremi

Teorema di Weierstrass

Enunciato

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Se D è compatto, allora f ammette masssimo e minimo assoluti. In particolare se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua, f ammette massimo e minimo assoluti.

Dimostrazione

Se D è compatto e f è continua allora anche $f(d)$ è compatto. Vediamo che ammette massimo (per il minimo si fa un ragionamento equivalente). Poiché è compatto, $f(D)$ è limitato superiormente, per cui $\exists m = \sup f(d)$, $m \in \mathbb{R}$. Se $m \in f(D)$ ho concluso, perché se $\sup A \in A$ allora $\sup A = \max A$. Per concludere, vediamo che $m \in f(D)$, usando che $f(D)$, essendo compatto, è chiuso. Per definizione di sup, $\forall \epsilon > 0\ \exists x \in f(D) :\ m - \epsilon < x \leq m$ per cui

$$(m - \epsilon,\ m + \epsilon) \cap f(D) \neq \emptyset\,(\text{ contiene } x)$$

Se $m \in f(D)$ abbiamo concluso, altrimenti

$$((m - \epsilon,\ m - \epsilon) \cap f(D)) \smallsetminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

e per arbritarietà di ϵ, segue che m è un punto di accumulazione di $f(D)$. Ma $f(D)$ è chiuso, per cui $m \in f(D)$.