Relazione autovalori

Di Ciarlo Michele (S5337477) e Giampietro Andrea (S5208458)

# Esercizio 1

*d0=8, d1=5 quindi n=68. Per motivi di spazio la matrice risultante non verrà riportata una matrice sostitutiva 15x15.*

A = | 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 |

| 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 |

| 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 |

| 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 |

| 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 |

| 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 |

| 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 |

| 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 |

| 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 |

| 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 |

| 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 |

| 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 |

| 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 |

| 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 |

| 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 |

Esaminiamo il sistema lineare Ax = b, in cui A è la matrice di Jordan. Introducendo una perturbazione alla matrice A con la matrice E, otteniamo la matrice B = A + E. Nell'ambito della teoria dell'errore nei sistemi lineari, possiamo applicare un teorema che ci consente di stimare l'errore relativo dell'output: ℇx ≤ μ(A) ∗ ℇb, dove μ(A) rappresenta il condizionamento della matrice A, definito come il prodotto delle norme 2 di A e della sua inversa.

Ora, unendo questi concetti con quelli della teoria degli autovalori e autovettori, possiamo riformulare l'errore relativo in input e in output come segue:

Per l'errore relativo in input (ℇb): ℇb = norma2(B - A) / norma2(A).

Per l'errore relativo in output (ℇx): ℇx = norma2(𝛽 - 𝛼) / norma2(𝛼), dove 𝛼 rappresenta gli autovalori di A e 𝛽 gli autovalori di B. Questa riformulazione ci offre una prospettiva più completa sull'errore nel sistema lineare, considerando sia la perturbazione nei termini noti che la variazione negli autovalori. Di seguito i dati ottenuti

VA = [1, …, 1] con 68 ricorrenze, che coinciderà con VB dato che il valore di perturbazione risulta *3.388131789017201e-21* e, come abbiamo visto nell’esercitazione sugli errori, la precisione di macchina risulta non essere in grado di considerare una cifra talmente piccola. Ne consegue che la differenza tra i due sia nulla.

Seguono gli errori di input e output derivati da essi:

Errore di input

1.6945e-21

Errore di output

0

Ripetendo l’esercizio con AtA e BtB abbiamo ottenuto:

VAa = { 0.0005, 0.0047, 0.0131, 0.0257, 0.0424, 0.0633, 0.0882, 0.1172, 0.1501, 0.1868, 0.2275, 0.2718, 0.3198, 0.3713, 0.4262, 0.4844, 0.5458, 0.6103, 0.6777, 0.7479, 0.8207, 0.8960, 0.9736, 1.0534, 1.1352, 1.2188, 1.3040, 1.3907, 1.4787, 1.5677, 1.6577, 1.7484, 1.8397, 1.9312, 2.0229, 2.1146, 2.2060, 2.2970, 2.3874, 2.4769, 2.5655, 2.6528, 2.7388, 2.8232, 2.9059, 2.9867, 3.0655, 3.1419, 3.2160, 3.2875, 3.3563, 3.4223, 3.4853, 3.5451, 3.6017, 3.6549, 3.7047, 3.7508, 3.7933, 3.8320, 3.8669, 3.8978, 3.9248, 3.9476, 3.9664, 3.9811, 3.9916, 3.9979}.

Dato che la perturbazione di partenza è identica, i restanti dati saranno medesimi rispetto al punto precedente, tranne che per l’errore di input che risulterà 8.4748e-22.

# Esercizio 2

Matrice A2 ottenuta dal grafo dato dal testo:

A2= [1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0

1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0

1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0

1 0 0 1 1 1 0 1 0 0 0

1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 0

1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0

0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 0

0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0

0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 1

0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1]

D = [7 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 3 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 4 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 5 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 4 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 4 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 4 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2]

G = [0.1429 0.5000 0.3333 0.2500 0.2000 0.2500 0.5000 0 0 0 0

0.1429 0.5000 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0.1429 0 0.3333 0 0 0 0 0 0 0.2500 0

0.1429 0 0 0.2500 0.2000 0 0 0 0 0.2500 0

0.1429 0 0 0.2500 0.2000 0.2500 0 0.2500 0 0 0

0.1429 0 0 0 0.2000 0.2500 0 0.2500 0 0 0

0.1429 0 0 0 0 0 0.5000 0 0 0 0

0 0 0 0 0.2000 0.2500 0 0.2500 0.5000 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0.2500 0.5000 0 0

0 0 0.3333 0.2500 0 0 0 0 0 0.2500 0.5000

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.2500 0.5000 ]

aValG = [ 1.0000 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 -0.3538 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 -0.2082 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 -0.0441 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 -0.0358 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0.8471 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0.7447 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0.2984 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0.4107 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.5172 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.5000 ]

aVetG = [ -0.5483 -0.7214 -0.3684 -0.4109 -0.4762 -0.0262 0.5834 -0.0537 -0.0900 -0.0364 -4.1988e-16

-0.1567 0.1207 0.0743 0.1079 0.1270 -0.0108 0.3406 0.0381 0.1440 -0.3012 0.7071

-0.2350 0.2974 -0.0579 0.1271 -0.1597 -0.2613 0.0071 -0.3745 -0.7276 -0.0443 8.6866e-16

-0.3133 0.3449 -0.3014 -0.1805 0.1063 -0.1465 0.0115 0.7213 -0.1135 0.3888 -1.6919e-15

-0.3916 -0.0193 0.5337 0.5054 -0.4466 0.2339 0.0138 0.1092 0.1902 0.5602 -2.6807e-15

-0.3133 0.2243 0.1718 -0.5175 0.2963 0.2771 0.0100 -0.4951 0.2593 0.3723 -2.1684e-15

-0.1567 0.1207 0.0743 0.1079 0.1270 -0.0108 0.3406 0.0381 0.1440 -0.3012 -0.7071

-0.3133 -0.1142 -0.5314 0.4393 0.2907 0.4897 -0.3247 -0.1525 0.0659 -0.0294 2.9301e-16

-0.1567 0.0334 0.1876 -0.2018 -0.1356 0.3527 -0.3317 0.1891 -0.1845 -0.4260 2.2217e-15

-0.3133 -0.4052 0.3360 0.0429 0.5079 -0.5220 -0.3218 0.0830 -0.1737 -0.0118 2.7038e-16

-0.1567 0.1187 -0.1186 -0.0197 -0.2370 -0.3759 -0.3288 -0.1030 0.4860 -0.1712 3.9894e-16 ]

È stato verificato dai dati ottenuti che:

* Un autovalore di G è 1, mentre gli risultano avere modulo minore di 1
* Esiste un autovettore x relativo a 1 le cui componenti sono tutte comprese tra 0 e 1, infatti moltiplicando il primo autovettore di G per y = -1 avremo un autovettore risultante relativo a 1 le cui componenti sono comprese tra 0 e 1:
  + x = [0.5483, 0.1567, 0.2350, 0.3133, 0.3916, 0.3133, 0.1567, 0.3133, 0.1567, 0.3133, 0.1567]
* Per ogni altro autovalore, l corrispondente autovettore ha componenti sia positive che negative.

Esaminiamo adesso una valutazione dell'importanza della stazione ferroviaria associata al nodo m, basata sulle componenti m del vettore x.

La prima componente, con valore massimo tra le altre (0.5483), si riferisce alla stazione di Milano che è quella con il maggior numero di collegamenti, seguita da:

Bergamo (0.3916) -> 4 collegamenti

Brescia, Como, Lecco e Cremona (0.3133) -> 3 collegamenti

Lodi (0.2350) -> 2 collegamenti

Pavia, Varese, Sondrio e Mantova (0.1567) -> 1 collegamento

Il numero di archi entranti e uscenti è senza dubbio il fattore maggiormente incidente sulla classifica di importanza delle stazioni ferroviarie e, come visto a lezione, di molte altre cose tra cui il ranking di Google.