

Appunti di Astrofisica

Corso della prof.ssa B. Lanzoni - A.A. 2022/2023

G. Oancia, S. Coli,
L. Calandra Buonaura, A. D'Amico

UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

GITHUB.COM/GIANCHIX/APPUNTI-ASTROFISICA

Prima Stesura

Prima pubblicazione, Gennaio 2023

Prefazione

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim.

Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim.

Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim.

Vestibulum pellentesque felis eu massa.



Indice

1	Setting the stage	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Grandezze e unità di misura	2
1.2.1	Lunghezze e massa	2
1.2.2	Sfera celeste	2
1.2.3	Sistema equatoriale	4
2	Meccanismi di emissione	7
2.1	Introduzione all'astrofisica osservativa	7
2.2	Equazione del trasporto radiativo	9
2.2.1	Intensità specifica o brillanza	9
2.2.2	Luminosità	10
2.2.3	Relazione tra intensità e luminosità	10
2.2.4	L'equazione del trasporto radiativo e le sue soluzioni	11
2.2.5	Trascuro la sorgente di background	13
2.2.6	Radiazione termica	14
2.3	Corpo nero	14
2.3.1	Legge di Planck	14
2.3.2	Legge di spostamento di Wien	15
2.3.3	Legge di Stefan-Boltzmann	16
2.4	Flusso	17
2.5	Magnitudine	17
2.5.1	Magnitudine apparente	17
2.5.2	Legame tra magnitudine apparente e flusso	18

2.5.3	Magnitudine assoluta	19
2.5.4	Modulo di distanza	19
2.6	Colore	20
2.6.1	Definizione di colore	20
2.6.2	Colore e temperatura	21
2.6.3	Estinzione	21
2.6.4	Modulo di distanza e reddening	22
3	Struttura stellare	23
3.1	Modelli stellari	23
3.2	Equilibrio idrostatico	24
3.3	Continuità di massa	26
3.4	Equazione di stato	26
3.4.1	Pressione di radiazione	27
3.4.2	Pressione del gas ideale	27
3.4.3	Peso molecolare medio	28
3.4.4	Degenerazione	30
3.4.5	Principio di indeterminazione e di esclusione	30
3.4.6	Distribuzione di Fermi-Dirac	31
3.4.7	L'equazione in breve	33
3.4.8	Contributo dominante	34
3.5	Equazione del bilancio energetico	36
3.5.1	Ricavare l'equazione	36
3.5.2	Teorema del viriale	37
3.6	Gradiente radiativo	38
3.6.1	Ricavare l'equazione	39
3.6.2	Meccanismi di trasporto di energia	39
3.6.3	Criterio di Schwarzschild	40
3.6.4	Esempio per il gas perfetto	41
3.6.5	Gradiente di pressione e scala logaritmica	41
3.7	Opacità	42
3.7.1	Assorbimento bound-bound (BB)	43
3.7.2	Assorbimento bound-free (BF)	44
3.7.3	Assorbimento free-free (FF)	44
3.7.4	Scattering elettronico (E)	44
3.7.5	Recap	45
3.8	Reazioni Termonucleari	45
3.8.1	Ripasso di fisica nucleare	46
3.8.2	Catena protone–protone	48
3.8.3	Catena CNO	50
3.8.4	Il problema dell'elio	51
3.8.5	Catena 3-alpha	52
3.8.6	Processi di cattura alpha	53

3.8.7	Processi di cattura neutronica	53
3.8.8	Tasso di produzione di energia	53
3.9	Riassunto sul modello stellare.	55



1. Setting the stage

1.1 Introduzione

Come per ogni ambito della fisica, anche per l'*astrofisica* è necessario avere in mente gli ordini di grandezza con cui si lavora e gli oggetti di studio. Nella tab. 1.1 sono riportate alcune grandezze riferite al nostro Sole e alla Via Lattea. A causa delle scale spaziali e temporali enormi rispetto a quella umana, risulta ovvio che non è possibile riprodurre le strutture cosmiche in laboratorio, andare su di esse per prendere delle misure dirette, oppure seguirne la loro evoluzione istante per istante. Dunque, è necessario uno studio *indiretto*, che avvenga analizzando la radiazione che riceviamo, che proviene necessariamente dal passato. In prima approssimazione, possiamo ritenere che essa sia stata emessa $\Delta t = D/c$ tempo fa, con D distanza della sorgente e c velocità della luce nel vuoto. Un altro limite delle osservazioni astrofisiche consiste nel non avere accesso alla terza dimensione, ovvero alla profondità rispetto alla linea di vista. Inoltre, è necessario un *approccio statistico* per comprendere i processi evolutivi, cercando, in prima istanza, di raggruppare oggetti simili, i quali presumibilmente abbiamo la stessa età. Ovviamente l'astrofisica utilizza le *leggi della fisica* per interpretare i dati osservativi e avanzare predizioni teoriche, tramite *modelli* e *simulazioni*.

Tabella 1.1: Ordini di grandezza riferiti al Sole e alla Via Lattea.

Grandezza	Sole	Via Lattea
Raggio (cm)	$\sim 6.7 \times 10^{10}$	$\sim 8 \times 10^{22}$
Massa (g)	$\sim 2 \times 10^{33}$	$\sim 10^{45}$
Età (s)	$\sim 1.4 \times 10^{17}$	$\sim 3.8 \times 10^{17}$
Distanza da noi (cm)	$\sim 1.5 \times 10^{13}$	$\sim 2.5 \times 10^{22}$

Tabella 1.2: Dimensioni di alcune stelle e strutture cosmiche.

Stella	Ordini di grandezza per le stelle Dimensioni	Ordini di grandezza per alcune strutture stellari Struttura	Ordini di grandezza per alcune strutture stellari Dimensioni
Giove	$\sim 0.1 R_{\odot}$	Galassie	\sim qualche kpc
Giganti rosse	$\sim 2000 R_{\odot}$	Via Lattea	~ 25 kpc
Nane bianche	~ 6000 km	Ammassi di Galassie	\sim qualche Mpc
Stelle di neutroni	~ 10 km	Nubi di Magellano	~ 60 kpc

Tabella 1.3: Masse di alcune strutture cosmiche.

Struttura	Massa (M_{\odot})
Stelle	0.08–150
Ammassi stellari	10^3 – 10^6
Galassie	10^7 – 10^{13}
Ammassi di galassie	10^{14} – 10^{15}

1.2 Grandezze e unità di misura

Gli ordini di grandezza tipici delle strutture studiate dall’astrofisica rendono necessario introdurre delle nuove unità di misura rispetto a quelle standard.

1.2.1 Lunghezze e massa

Di seguito sono elencate le unità di misura maggiormente utilizzate per esprimere le lunghezze e le masse in astrofisica.

Raggio solare Vale $R_{\odot} \simeq 6.7 \times 10^{10}$ cm. Nella tabella 1.2 sono riportate le dimensioni di alcune stelle, espresse in raggi solari. Questa unità di misura viene utilizzata principalmente per esprimere la distanza di stelle e pianeti.

Unità astronomica Esprime la distanza media tra Terra e Sole. Vale $1 \text{ AU} \simeq 1.5 \times 10^{13}$ cm. Si utilizza principalmente per indicare distanze riferite al sistema solare e dintorni.

Anno luce Rappresenta la distanza che la luce percorre nel vuoto in un anno, si utilizza molto nei libri di divulgazione scientifica ma non in ambito professionale. Vale $1 \text{ ly} \sim 9.5 \times 10^{17}$ cm.

parsec Indica la distanza alla quale 1 AU sottende un angolo di $1''$ (*secondo d’arco*), come mostrato in figura 1.1. Vale $1 \text{ pc} = 3.1 \times 10^{18}$ cm. Nella tabella 1.2 sono riportate le dimensioni di alcune strutture cosmiche. Questa unità di misura si utilizza principalmente in astrofisica galattica ed extra-galattica.

Redshift Viene utilizzato per indicare distanze dell’universo lontano e in cosmologia.

Massa Solare Vale $M_{\odot} = 2 \times 10^{33}$ g. In tabella 1.3 sono presenti alcuni valori tipici di massa.

1.2.2 Sfera celeste

Come anticipato precedentemente, non siamo in grado di osservare la profondità degli oggetti cosmici, ma solo la loro proiezione sulla *sfera celeste*. Questa è, per definizione, una sfera di raggio indeterminato (per convenzione si pone $R = 1$) centrata nell’osservatore (come mostrato in fig. 1.2). In genere, a seconda della convenienza, si considera il centro della sfera celeste coincidente con il *centro della Terra* (sfera geocentrica), con il *centro del Sole* (sfera eliocentrica) oppure con il

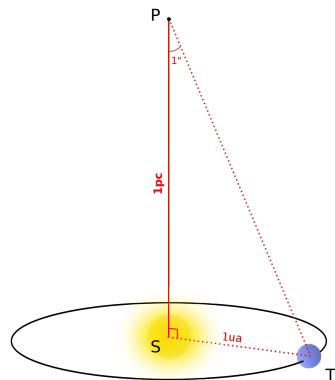


Figura 1.1: Definizione di parsec. 1 pc è la distanza alla quale 1 AU sottende un angolo di $1''$.

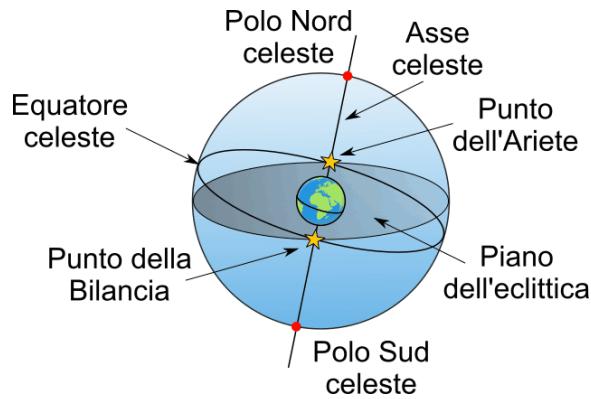


Figura 1.2: Sfera celeste. L'eclittica è l'intersezione tra la sfera celeste e il piano orbitale della Terra attorno al Sole. Essa interseca l'equatore terrestre in due punti opposti detti equinozi. Il punto dell'Ariete corrisponde all'equinozio di primavera (21 marzo), detto anche punto vernali.

baricentro del sistema solare (sfera baricentrica). Se la distanza del corpo che si sta studiando è grande, scegliere uno dei tre centri è del tutto equivalente. Si definisce *equatore celeste* la proiezione dell'equatore terrestre sulla sfera celeste e non è altro che un cerchio massimo. Si definisce *asse del mondo* la retta passante per il centro O della sfera celeste e perpendicolare al piano equatoriale. L'intersezione tra questa retta e la sfera celeste individua due punti detti *poli celesti*: attualmente il polo nord celeste è circa nella direzione della stella polare, mentre il polo sud celeste è vicino alla croce del sud.

L'*eclittica* è definita come il cerchio massimo descritto dalla traiettoria (apparente) del sole attorno alla Terra, ovvero è l'intersezione tra la sfera celeste e il piano orbitale della Terra attorno al Sole. Essa è inclinata di $23^\circ 27'$ rispetto all'equatore celeste e interseca l'equatore in due punti opposti, detti *equinozi*: il *punto della Bilancia* e il *punto dell'Ariete* (o *punto vernali* o *equinozio di primavera*).

Lo *Zenith* (fig. 1.3) è la congiungente tra il centro della Terra e l'osservatore, cioè la verticale dell'osservatore stesso. L'*orizzonte astronomico* è il cerchio massimo formato dall'intersezione tra la sfera celeste e il piano perpendicolare alla verticale dell'osservatore. Ovviamente, l'osservatore è in grado di vedere solamente ciò che si trova sopra all'orizzonte astronomico. Si noti che lo Zenith e l'orizzonte astronomico dipendono dalla posizione dell'osservatore sulla Terra.

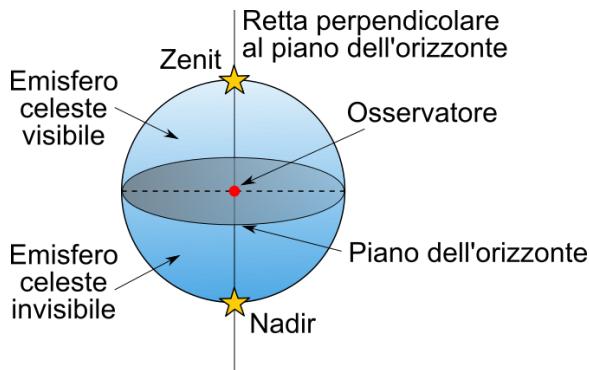


Figura 1.3: Zenith e orizzonte astronomico. L’osservatore vede solo ciò che sta sopra l’orizzonte astronomico. Dipendono da dove è posizionato l’osservatore sulla Terra.

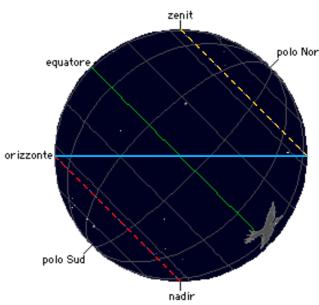


Figura 1.4: Come ci appare il movimento delle stelle. Tutte le stelle sopra il cerchio giallo non tramontano mai, quelle sotto il cerchio rosso non sorgono mai e le altre stelle le vediamo sorgere e tramontare.

In ogni punto della Terra, l’osservatore la vede ruotare attorno all’asse del mondo, che passa per i *poli celesti*, di cui solamente uno è visibile sopra all’orizzonte (cfr. fig. 1.2). Il moto delle stelle, rappresentato in fig. 1.4 avviene da est verso ovest ed è un moto rigido attorno all’asse del mondo. Le distanze relative tra le stelle ci appaiono fisse, ciononostante ogni stella si muove di moto proprio, ma, data la distanza, le variazioni di posizione non sono apprezzabili. Il periodo di rotazione delle stelle definisce il così detto *giorno siderale*.

1.2.3 Sistema equatoriale

Come definire un sistema di coordinate sulla sfera celeste? Si ricordi che noi osserviamo delle proiezioni su un piano, quindi sono sufficienti due coordinate. In particolare, conviene utilizzare delle coordinate angolari e il sistema di coordinate più utilizzato è il *sistema equatoriale* (fig. 1.5). Esso usa come cerchi di riferimento l’equatore celeste e il meridiano* passante per il punto vernale (γ). Chiamato C il centro della sfera celeste, l’origine del sistema di coordinate è nel punto vernali, $O \equiv \gamma$, e ha per coordinate angolari l’ascensione della retta (α) e la declinazione:

Ascensione retta (RA o α) distanza angolare tra il punto γ e il meridiano dell’astro. Si misura in ore, minuti e secondi (hms), varia tra 0^h e 24^h , aumentando verso E.

*Un meridiano è un cerchio massimo perpendicolare all’equatore.

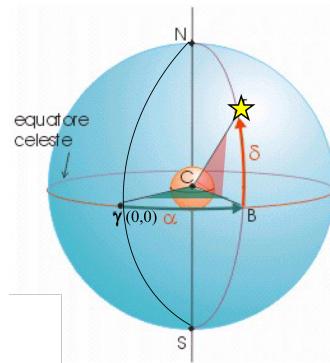


Figura 1.5: Sistema equatoriale. C è il centro della sfera celeste, l'origine del sistema di riferimento coincide con il punto vernale, $O \equiv \gamma$. α è l'ascensione retta, ovvero la distanza angolare tra il punto γ e il meridiano dell'astro, il quale, nella figura, interseca l'equatore celeste nel punto B . δ è la declinazione, ovvero la distanza angolare tra l'equatore celeste e l'astro, lungo il meridiano dell'astro. Nella figura corrisponde alla distanza angolare tra B e la stella.

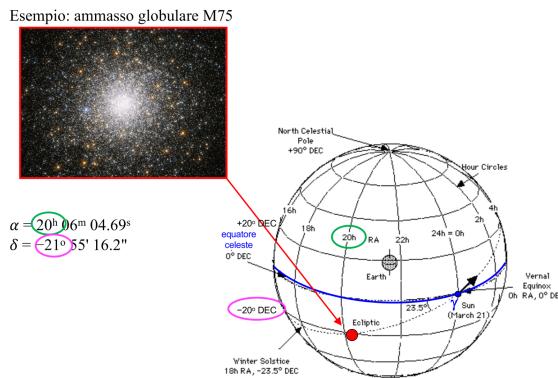


Figura 1.6: Esempio di utilizzo delle coordinate del sistema equatoriale.

Declinazione (Dec o δ) distanza angolare tra l'equatore celeste e l'astro, lungo il meridiano dell'astro. Si misura in gradi, primi e secondi (gradi, arcominuti e arcosecondi), varia tra 0° e $+90^\circ$ dall'equatore al polo N e tra 0° e -90° dall'equatore al polo S.

Si faccia attenzione al fatto che i minuti e secondi d'orologio (RA) sono diversi dai minuti e secondi d'arco (Dec). Utilizzando:

$$1^h = 60^m = 3600^s \quad 1^\circ = 60' = 3600'' \quad 24^h = 360^\circ$$

si trova che:

$$1^h = 15^\circ \quad 1^m = 15' \quad 1^s = 15''$$

Si guardi la figura 1.6 per un esempio sull'utilizzo di tale sistema di coordinate.

2. Meccanismi di emissione

2.1 Introduzione all'astrofisica osservativa

Come introdotto nel paragrafo 1.1, l'astrofisica studia le strutture cosmiche in maniera indiretta attraverso la radiazione che raccogliamo con i telescopi e altri strumenti. In particolare, osservando a bande diverse, si possono estrapolare informazioni quantitative dalla misura della radiazione. Si tenga tuttavia a mente che la radiazione che riceviamo dipende sia dai processi fisici che l'hanno generata sia da quelli che ha subito nel tragitto tra la sorgente e l'osservatore.

Il primo problema dell'osservazione è il così detto *assorbimento atmosferico* (fig. 2.1). Infatti, non tutta la radiazione emessa dagli oggetti astrofisici riesce a raggiungere la superficie terrestre. In particolare, ci giungono il vicino ultravioletto, il vicino infrarosso e le onde radio e visibili, mentre il resto della radiazione non arriva a terra perché viene assorbita dall'atmosfera. È dunque necessario osservare con telescopi spaziali in orbita. Un altro problema che si riscontra è quello del *seeing*, secondo il quale le particelle di vapor acqueo dell'atmosfera creano una turbolenza che sfoca le immagini acquisite dai telescopi. Per questo motivo è conveniente effettuare le osservazioni in posti poco umidi, come il Cile o le Hawaii. Senza tecniche per correggere tale problema sarebbe inutile costruire telescopi di diametro maggiore per avere una maggior qualità dell'immagine. Guardando

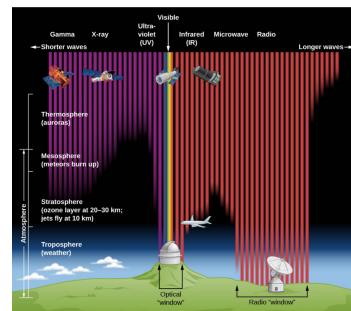


Figura 2.1: Assorbimento atmosferico. Non tutta la radiazione emessa dagli oggetti astrofisici raggiunge il suolo terrestre.

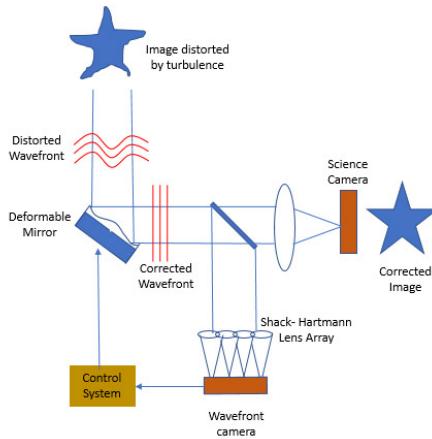


Figura 2.2: Principio di funzionamento delle ottiche adattive. Un fronte d'onda distorto incide su uno specchio deformabile (con pistoni idraulici che si allungano o contraggono), la luce viene mandata a un sistema (waveform camera) che controlla se l'immagine della stella è soggetta a turbolenza oppure no, se è distorta (ovvero soggetta a turbolenza), i pistoncini idraulici deformano lo specchio iniziale per annullare l'effetto.

una stella, generalmente l'immagine risulta un disco sulla lente, mentre se c'è turbolenza si ha un'immagine distorta e "sbrodolata". Un'immagine affetta dal problema del seeing si dice *seeing-limited*. Si chiama inoltre *diffraction-limited* un'immagine la cui qualità dipende solo dal potere risolutivo che si calcola conoscendo la minore distanza angolare che si può risolvere attraverso la formula:

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

dove λ è la lunghezza d'onda dell'onda incidente sulla lente di diametro D . Si può notare che, se fossimo in grado di sbarazzarci del problema del seeing, aumentando il diametro della lente saremmo in grado di diminuire il potere risolutivo e quindi potremmo risolvere oggetti più vicini. Fortunatamente, la tecnologia attuale offre la possibilità di correggere il problema del seeing attraverso l'utilizzo di *ottiche adattive*. Nella figura 2.2 si spiega il loro funzionamento.

Per calcolare la deformazione da applicare alla lente per correggere il problema del seeing, si utilizza una *stella guida*, che deve essere una stella molto brillante. Siccome non sempre è presente una stella molto brillante per effettuare la calibrazione, si utilizza una *stella laser*, ovvero i telescopi sparano fasci laser brillanti che simulano la presenza di una stella brillante attraverso l'eccitazione di atomi di sodio a 90 km di altitudine. Un altro modo per evitare il seeing è banalmente evitare l'atmosfera terrestre, dunque utilizzando telescopi spaziali, che sono solamente diffraction-limited.

Si vuole, infine, sottolineare la differenza tra un telescopio e i suoi strumenti a bordo: ciascun telescopio, infatti, ha diversi strumenti a bordo. Questi si dividono in due categorie particolari: le *photometric cameras*, utilizzate per l'imaging o la spettroscopia, e gli *spettrografi*, utilizzati per la spettrografia, ovvero per misurare lo spettro della radiazione, che può essere in assorbimento o in emissione.

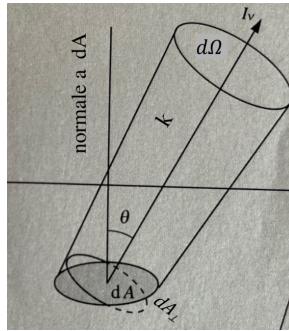


Figura 2.3: Definizione di intensità specifica. dA è un'area infinitesima sulla superficie della stella, P è il punto della superficie della stella, \hat{k} è il versore rispetto al quale definisco l'intensità e $dA_{\perp} = dA \cos \theta$. La radiazione è portata da un fascio di fotoni, quindi devo considerare un tronco di angolo solido $d\Omega$, in cui dA rappresenta la sezione del fascio.

2.2 Equazione del trasporto radiativo

Come anticipato nel paragrafo 2.1, per poter interpretare in maniera corretta le misure di radiazione, è necessario studiare i meccanismi d'interazione tra la radiazione e la materia. Le cause principali di tale interazione sono l'*assorbimento*, lo *scattering** e l'*emissione*. Questi fenomeni variano a seconda della *frequenza* della radiazione e questo è il motivo per cui osservare a frequenze diverse porta a informazioni diverse.

L'*equazione del trasporto radiativo* descrive il trasporto di radiazione da parte dei fotoni. Non è l'unico meccanismo di trasporto ma è il più comune nell'universo. In particolare, l'equazione dice come varia l'intensità della radiazione a causa dell'interazione tra la radiazione e la materia. Prima di ricavare l'equazione è necessario introdurre alcune grandezze indispensabili per esprimere le energie.

2.2.1 Intensità specifica o brillanza

Dato un campo di radiazione, l'intensità specifica I_v (fig. 2.3) lungo la direzione \hat{k} in un punto P del campo è la quantità di energia che, nell'intervallo di tempo dt e nell'intervallo di frequenze dv , attraversa una superficie infinitesima perpendicolare alla direzione \hat{k} (dA_{\perp}), entro un angolo solido elementare $d\Omega$:

$$I_v = \frac{dE}{dt dv dA_{\perp} d\Omega} = \frac{dE}{dt dv dA \cos \theta d\Omega} \quad [\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}] \quad (2.1)$$

dove θ è l'angolo tra la normale a dA e la direzione \hat{k} , ovvero si può scrivere $dA_{\perp} = dA \cos \theta$.

Si tratta di una proprietà *intrinseca* del campo di radiazione, ovvero della sorgente, ed è definita per unità di frequenza o equivalentemente di lunghezza d'onda.

Si ricordi, inoltre, che il differenziale di angolo solido si scrive:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.2)$$

La dipendenza dell'intensità dalla frequenza (equiv. dalla lunghezza d'onda) si può rappresentare attraverso una *distribuzione spettrale di energia (SED)*, come sarà visto successivamente.

*Lo scattering è la deviazione rispetto alla direzione di propagazione originale.

2.2.2 Luminosità

La *luminosità bolometrica* (L) di una sorgente è definita come la quantità di energia totale emessa dalla sorgente nell'unità di tempo. Si misura in erg s^{-1} oppure in *luminosità solari*, dove $L_{\odot} = 3.8 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$. Si tratta di una quantità *intrinseca* della sorgente.

$$L = \frac{dE}{dt} \quad [\text{erg s}^{-1}] \quad (2.3)$$

La *luminosità monocromatica* (L_{ν}) è la luminosità per unità di frequenza (o lunghezza d'onda), cioè la quantità di energia totale emessa dalla sorgente nell'unità di tempo e nell'intervallo di frequenze compreso tra ν e $\nu + d\nu$:

$$L_{\nu} = \frac{dE}{dt d\nu} \quad [\text{erg s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}], \quad L_{\lambda} = \frac{dE}{dt d\lambda} \quad [\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-1}] \quad (2.4)$$

È semplice ricavare la relazione che lega L_{ν} e L_{λ} , considerando che $\nu = c/\lambda$. Infatti, a un aumento di λ corrisponde una diminuzione di ν , ovvero $L_{\nu} d\nu = -L_{\lambda} d\lambda$ e inoltre, si ha $d\nu/d\lambda = -c/\lambda^2$. Combinando le due espressioni si ottiene:

$$L_{\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} L_{\nu} \quad (2.5)$$

Inoltre, si può ottenere la luminosità bolometrica a partire da quella monocromatica integrando su tutte le frequenze (o lunghezze d'onda):

$$L = \int_0^{\infty} L_{\nu} d\nu = \int_0^{\infty} L_{\lambda} d\lambda \quad (2.6)$$

Ci si può ora chiedere quale sia la relazione tra l'intensità specifica e la luminosità.

2.2.3 Relazione tra intensità e luminosità

Consideriamo un campo di radiazione isotropo, per cui I_{ν} (cfr. par. 2.2.1) è uguale in ogni direzione \hat{k} . Questo significa che se considero una superficie infinitesima dA_{\perp}^* , con normale \hat{k} , la quantità di radiazione entrante e uscente da tale superficie è la stessa per ogni superficie. La luminosità (cfr. par. 2.2.2) della sorgente è la quantità di radiazione *emessa* dalla sorgente nel tempo dt , cioè la quantità di radiazione che *esce* dalla sorgente stessa, ovvero la quantità di radiazione che *esce da ciascuna superficie* dA_{\perp} , *integrata sulla superficie totale della sorgente*.

Per ottenere la quantità di radiazione che *esce* da ciascuna superficie infinitesima dA_{\perp} , che chiameremo dL_{ν}/dA_{\perp} , bisogna integrare l'intensità della sorgente sull'angolo solido della semisfera *uscente* (cfr. eq (2.1) ed eq. (2.4)), ovvero, in un sistema di riferimento con asse polare \hat{k} (fig. 2.4), per $\theta \in [0, \pi/2]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$:

$$\frac{dL_{\nu}}{dA_{\perp}} = I_{\nu} \iint d\Omega_{\text{uscente}} = I_{\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \quad (2.7)$$

dove I_{ν} è stato portato fuori dagli integrali perché non dipende dagli angoli, essendo la sorgente isotropa.

*Il simbolo \perp indica che si sta considerando una superficie tangente alla sfera, ovvero con normale \hat{k} , una qualunque direzione radiale.

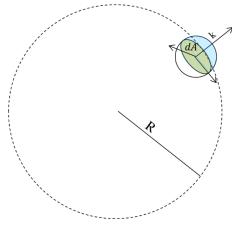


Figura 2.4: Calcolo della quantità di radiazione *uscente* da una superficie infinitesima dA_{\perp} posta sulla superficie di una stella. La radiazione uscente è quella che attraversa la semisfera uscente che ha come cerchio massimo la circonferenza di dA_{\perp} . Pertanto, in un sistema di riferimento con asse polare \hat{k} , bisogna integrare nell'angolo solido sotteso da $\theta \in [0, \pi/2]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$. Per ottenere tutta la radiazione uscente dalla stella, integro in dA_{\perp} .

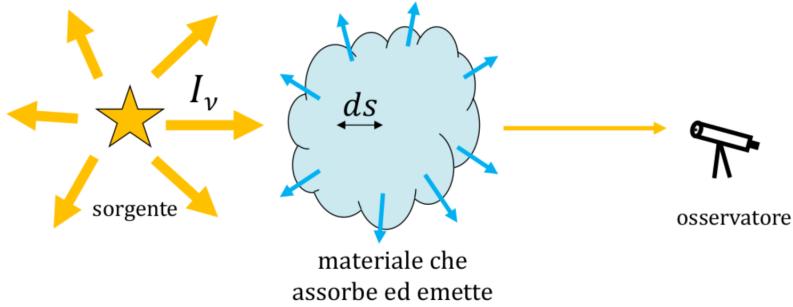


Figura 2.5: Equazione del trasporto radiativo. Si studia la variazione di intensità della radiazione emessa dalla sorgente a seguito dell'interazione con il materiale interposto, che avviene attraverso assorbimenti ed emissioni. Lo scattering viene computato nell'assorbimento, poiché l'effetto è quello di deviare la radiazione provocando una diminuzione dell'intensità misurata.

Per ottenere la luminosità monocromatica totale della sorgente (cfr. eq. (2.4)), bisogna integrare la (2.7) su tutta la superficie dA_{\perp} , ovvero integriamo per un'area che va da 0 a $4\pi R^2$. Ricordando che, in generale $dA_{\perp} = dA \cos \theta$, come visto in precedenza*, si ha:

$$L_v = \int_0^{4\pi R^2} dA_{\perp} \frac{dL_v}{dA_{\perp}} = \int_0^{4\pi R^2} dA \cos \theta \frac{dL_v}{dA_{\perp}} = I_v \int_0^{4\pi R^2} dA \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin \theta \cos \theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

Sviluppando i conti si ottiene un'espressione per la luminosità monocromatica:

$$L_v = 4\pi R^2 \pi I_v = 4\pi^2 R^2 I_v \quad (2.8)$$

e integrando su tutte le frequenze (eq. (2.6)) si ottiene la luminosità bolometrica:

$$L = 4\pi R^2 \pi I = 4\pi^2 R^2 I \quad (2.9)$$

2.2.4 L'equazione del trasporto radiativo e le sue soluzioni

Come già anticipato nel par. 2.2, l'*equazione del trasporto radiativo* descrive la variazione dell'intensità della radiazione a causa dell'interazione tra la radiazione stessa e la materia. Infatti,

*È importante non dimenticare il fattore $\cos \theta$, infatti bisogna integrare sia in angolo solido sia rispetto all'area normale a \hat{k} , quindi nel doppio integrale bisogna proiettare l'area generica lungo \hat{k} .

prima di arrivare all'osservatore, la radiazione attraversa della materia, interagendo attraverso assorbimento ed emissione (fig. 2.5). L'equazione si presenta così:

$$dI_\lambda = -k_\nu \rho I_\nu dS + j_\nu dS \quad (2.10)$$

dove appaiono i seguenti termini:

dI_ν variazione dell'intensità specifica.

k_ν coefficiente di assorbimento per unità di massa od opacità ($\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$). L'opacità ha le dimensioni di una sezione d'urto per unità di massa ed esprime quanta radiazione viene assorbita per unità di massa e per lunghezza traversata.

ρ densità di massa del materiale attraversato.

I_ν intensità in input.

dS dimensione infinitesima del materiale attraversato.

j_ν coefficiente di emissione [$\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1} \text{-sr}^{-1}$].

In genere si definisce:

$$\alpha_\nu = k_\nu \rho \quad (2.11)$$

e l'equazione (2.10) assume la seguente forma:

$$\frac{dI_\nu}{dS} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu \quad (2.12)$$

La si può risolvere facilmente in due casi limite. Nel caso di *pura emissione*, corrispondente a $\alpha_\nu = 0$ ($k_\nu = 0$ - opacità nulla) si ha:

$$\frac{dI_\nu}{dS} = j_\nu \quad I_\nu = I_\nu(0) + \int dS j_\nu$$

In questo caso, l'aumento di intensità è pari al coefficiente di emissione integrato lungo la linea di vista.

Nel caso di *puro assorbimento*, corrispondente a $j_\nu = 0$, si ha:

$$\frac{dI_\nu}{dS} = -\alpha_\nu I_\nu \quad I_\nu(S) = I_\nu(0) e^{-\int \alpha_\nu dS}$$

In questo caso, l'intensità cala come l'esponenziale del coefficiente di assorbimento integrato lungo la linea di vista.

È conveniente introdurre la *profondità ottica* (sarà approfondita successivamente, cfr. ??):

$$\tau_\nu = \int k_\nu \rho dS = \int \alpha_\nu dS \quad (2.13)$$

dove si integra lungo il cammino dS . La profondità ottica in generale dipende anche dalla frequenza ed è un numero puro.

È conveniente introdurre anche la *funzione sorgente*:

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu \rho} = \frac{j_\nu}{\alpha_\nu} \quad (2.14)$$

Essa esprime il rapporto tra il coefficiente di emissione e quello di assorbimento in termini di α_ν e ha le stesse unità di misura di una intensità specifica.

Con queste due nuove variabili, l'equazione (2.12) assume una forma particolarmente semplice:

$$\frac{dI_v}{d\tau_v} = -I_v + S_v \quad (2.15)$$

Integriamola, separando le variabili e riscrivendola in una forma più comoda:

$$dI_v = -I_v d\tau_v + S_v d\tau_v$$

$$dI_v + I_v d\tau_v = S_v d\tau_v$$

$$e^{\tau_v} (dI_v + I_v d\tau_v) = e^{\tau_v} (S_v d\tau_v)$$

$$d(e^{\tau_v} I_v) = e^{\tau_v} S_v d\tau_v$$

Ricordando (cfr. ??) che la profondità ottica è un integrale tra 0 e S e al centro è nulla, come limiti inferiori dell'integrazione scelgo $\tau_{v_0} = 0$ e I_{v_0} , corrispondente all'intensità iniziale, prima dell'interazione con la materia. Suppongo, inoltre, che la funzione sorgente S_v non varii con τ , ovvero con la distanza.

$$e^{\tau_v} I_v - I_{v_0} = \int_0^{\tau_v} e^{\tau'_v} S_v d\tau'_v = S_v (e^{\tau_v} - 1)$$

Moltiplico ambo i membri per $e^{-\tau_v}$

$$I_v - I_{v_0} e^{-\tau_v} = S_v (1 - e^{-\tau_v})$$

da cui si ottiene:

$$I_v = I_{v_0} e^{-\tau_v} + S_v (1 - e^{-\tau_v}) \quad (2.16)$$

Il primo termine è l'intensità iniziale I_{v_0} (prima dell'interazione con la materia) attenuata da un fattore esponenziale (si ricordi che $\tau \in [1, +\infty]$), mentre il secondo termine *non* dipende dall'intensità iniziale (quella emessa dalla sorgente), ma riguarda solamente il materiale interposto*. Trascurando il primo termine, questo secondo termine, che rappresenta l'emissione e l'assorbimento, può anche rappresentare una auto-emissione e un auto-assorbimento nel caso in cui non ci sia una stella "dietro".

2.2.5 Trascuro la sorgente di background

Se nell'equazione (2.16) trascuro la sorgente di background, assume la forma:

$$I_v = S_v (1 - e^{-\tau_v}) \quad (2.17)$$

Questo corrisponde, ad esempio, a osservare il mezzo interposto da una direzione perpendicolare rispetto alla stella, come mostrato in fig. 2.6. Il primo termine, S_v , rappresenta l'emissione, mentre il secondo termine, $S_v e^{-\tau_v}$, rappresenta l'auto-assorbimento. Si può studiare l'eq. (2.17) considerando due situazioni limite:

Regime otticamente spesso la profondità ottica è molto grande, $\tau_v \gg 1$, quindi l'intensità coincide con la funzione sorgente: $I_v = S_v$

Regime otticamente sottile la profondità ottica è molto piccola, $\tau_v \ll 1$, quindi l'intensità risulta

$$I_v = S_v \tau_v$$

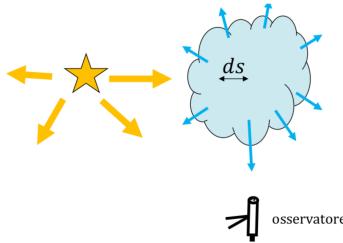


Figura 2.6: Trascuro la sorgente di background nella soluzione dell'equazione del trasporto radiativo.

Ci si può chiedere come sia fatta la funzione sorgente S_V , definita tramite l'eq. (2.14). Essa è diversa a seconda del tipo di radiazione, cioè del processo responsabile del fenomeno di radiazione osservato. Tipicamente i processi di emissione vengono raggruppati in processi termici e processi non termici.

Radiazione termica è emessa da un corpo in equilibrio termico (o termodinamico), in cui tra materia e radiazione avvengono continui processi di emissione e assorbimento di fotoni tali da rendere il tasso di assorbimento uguale al tasso di emissione. Esempi di processi termici sono:

- Radiazione di corpo nero (stelle)
- Bremsstrahlung (gas negli ammassi di galassie)

Radiazione non termica non sono dovuti a processi di emissione e assorbimento, ma, ad esempio, a moto di cariche elettriche oppure a un effetto di scattering. Esempio sono:

- Sincrotrone (pulsar)
- Compton (effetto Sinyaev-Zel'dovich)

2.2.6 Radiazione termica

Se, nell'approssimazione del paragrafo 2.2.5 considero solamente processi termici, ovvero processi dovuti a continue emissioni e assorbimenti, la funzione sorgente coincide con la *funzione di Planck* (eq. (2.18)):

$$S_V = B_{BB}(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{V^3}{e^{\frac{hv}{k_B T}} - 1}$$

In questo caso, i due regimi di approssimazione si riducono alle seguenti espressioni:

regime otticamente spesso ($\tau_V \gg 1$) $I_V = B_{BB}$

regime otticamente sottile ($\tau_V \ll 1$) $I_V = B_{BB} \tau_V$

È evidente che, se il regime è *otticamente spesso*, la radiazione termica è *radiazione di corpo nero*.

2.3 Corpo nero

2.3.1 Legge di Planck

Introdotto da Planck alla fine del 1800, un *corpo nero* è un corpo idealizzato in equilibrio termodinamico che assorbe tutta la radiazione incidente ed emette uno spettro che dipende solo dalla temperatura superficiale T del corpo stesso. Il tasso di assorbimento e di emissione è lo stesso e la

*Il materiale interposto può anche essere l'atmosfera della stella stessa che si osserva, oppure potrebbe essere l'atmosfera della Terra e così via.

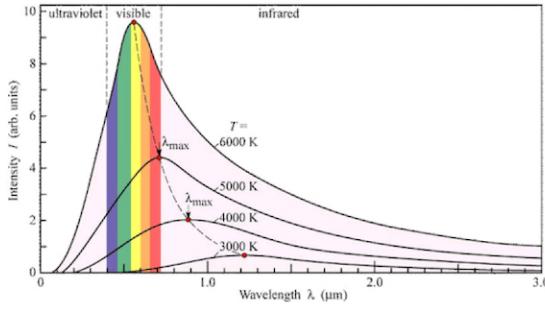


Figura 2.7: Legge di Planck. Curve in funzione della frequenza plottate a diverse temperature. I picchi seguono la legge di spostamento di Wien.

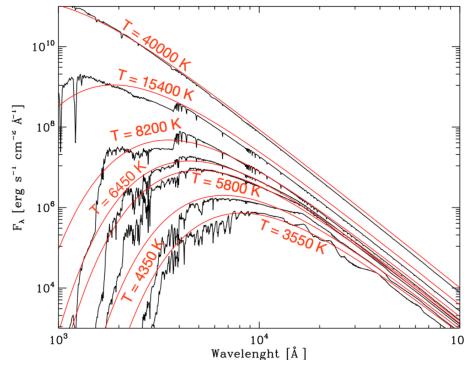


Figura 2.8: Confronto tra i profili teorici di planckiana e dati sperimentali delle stelle. In prima approssimazione le stelle possono essere trattate come corpi neri.

forma dello spettro del corpo segue la legge di Planck (fig. 2.7):

$$B_{BB}(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (2.18)$$

La planckiana dipende sia dalla *frequenza* che dalla *temperatura* del corpo. Le stelle in prima approssimazione si possono considerare dei corpi neri, come si può osservare da un confronto tra dati sperimentali e curve teoriche in fig. 2.8. Guardando come sono fatte le curve a diverse lunghezze d'onda si può inferire la *legge di spostamento di Wien*.

2.3.2 Legge di spostamento di Wien

Più elevata è la temperatura T del corpo, più il picco di emissione si trova a basse lunghezze d'onda, corrispondenti ad alte frequenze (fig. 2.7):

$$T\lambda_{\max} = 0.29 \text{ cmK} \quad (2.19)$$

Da questa legge è immediato capire perché vediamo il nostro sole di colore giallo. Infatti, la sua temperatura superficiale è circa $T \sim 5770 \text{ K}$, da cui una lunghezza d'onda sul picco corrispondente a $\lambda_{\max} \sim 0.5 \mu\text{m}$. Si può esprimere la legge di Wien anche in funzione della frequenza, come mostrato in fig. 2.9. Si nota che più elevata è la temperatura del corpo, più il picco di emissione si trova ad alte

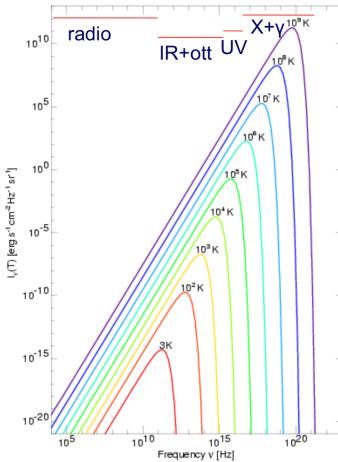


Figura 2.9: Legge di Wien vista in funzione della frequenza. All'aumentare della temperatura, il picco di emissione si sposta verso frequenze più alte.

frequenze (basse lunghezze d'onda). Dunque, supponendo che una sorgente osservata sia un corpo nero ed effettuando misure a diverse frequenze (lunghezze d'onda), in base alla frequenza (lunghezza d'onda) a cui si osserva il picco di emissione è possibile risalire alla temperatura superficiale della stella. In particolare, una *stella blu* sarà *calda*, mentre una *stella rossa* sarà *fredda*.

2.3.3 Legge di Stefan-Boltzmann

Osservando lo spettro di corpo nero, eq. (2.18), è possibile inferire che debba esserci una relazione tra la temperatura T e la luminosità bolometrica di una stella, L_{bol} . Infatti, all'aumentare di T aumenta l'intensità del corpo nero (l'energia emessa per unità di tempo), ovvero, integrando su tutte le lunghezze d'onda, aumenta l'area sottesa dalla curva 2.7. La luminosità integrata su tutte le frequenze è proprio la luminosità bolometrica (si veda par. 2.2.2 ed eq. (2.3) e (2.6)).

Gli esperimenti di *Josef Stefan* (1879) hanno mostrato che la luminosità bolometrica L_{bol} di un corpo nero di area A alla temperatura T , misurata in Kelvin, è data da:

$$L_{\text{bol}} = A\sigma T^4$$

dove σ è la *costante di Stefan-Boltzmann* e vale:

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Dunque, data una stella di raggio R e *temperatura superficiale* T :

$$L_{\text{bol}} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (2.20)$$

Inserendo i dati del Sole

$$R \sim 7 \times 10^{10} \text{ cm} \quad T \sim 5770 \text{ K}$$

si ottiene

$$L_{\odot} \sim 3.8 \times 10^{-33} \text{ erg s}^{-1}$$

Si può utilizzare la legge (2.20), ad esempio, per ricavare il raggio di una stella, conoscendone la temperatura superficiale e la luminosità, posto che l'ipotesi di corpo nero sia accurata.

2.4 Flusso

L'intensità, eq. (2.1), e la luminosità, eq. (2.3), sono quantità *intrinseche* della sorgente, ma *non* sono direttamente misurabili. Infatti, più una sorgente è lontana da noi, più ci appare debole, ma la sua luminosità non cambia con la distanza, poiché l'energia emessa ogni secondo è sempre la stessa. Ciò che osserviamo è il *flusso*, definito come la luminosità per unità di area: l'energia per unità di tempo per unità di area che arriva sull'apparato di misura. Ovviamente il flusso dipende dalla distanza: diminuisce all'aumentare della distanza dalla sorgente.

Ipotizzando una emissione isotropa, il flusso misurato a una distanza r da una sorgente che emette con una luminosità L è dato da:

$$F(r) = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (2.21)$$

Analogamente all'intensità, è possibile definire un *flusso monocromatico*, per unità di frequenza, F_ν , e trovare il flusso totale come:

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu$$

Il flusso e la luminosità delle sorgenti sono spesso espressi in termini di *magnitudini*.

2.5 Magnitudine

2.5.1 Magnitudine apparente

La *magnitudine apparente* è una misura del flusso ricevuto dallo strumento. È una grandezza introdotta per la prima volta dall'astronomo greco *Ipparco* e varia tra $m = 1$, che corrisponde all'oggetto più brillante del cielo, e $m = 6$, che corrisponde alle stelle più deboli che si possono osservare a occhio nudo. Si faccia attenzione al fatto che *maggior è la magnitudine, più debole è la stella*. In particolare, la scala di magnitudini segue la *risposta logaritmica* dell'occhio umano alla luminosità delle stelle che osserviamo sulla volta celeste.

Norman Robert Pogson (1856) notò che una magnitudine di $m = 6$ corrisponde a una stella ~ 100 volte più debole di una con magnitudine $m = 1$. Si può quindi osservare che una differenza di 5 magnitudini corrisponde a un rapporto tra i flussi di 100:

$$m_1 = 1, m_2 = 6 \implies F_1 = 100F_2$$

$$m_2 - m_1 = 5 \implies \frac{F_1}{F_2} = 100 = 100^{\frac{m_2 - m_1}{5}}$$

Quindi risulta:

$$\frac{F_1}{F_2} = 100^{\frac{m_2 - m_1}{5}} \quad (2.22)$$

da ciò segue che una differenza di 1 magnitudine corrisponde a un rapporto tra i flussi pari a $100^{1/5} \sim 2.5$. Quindi, una stella di magnitudine $m = 1$ *appare* 2.5 volte più brillante di una stella di magnitudine $m = 2$ e $2.5^5 \sim 100$ volte più brillante di una stella con magnitudine $m = 6$. Si parla dunque di magnitudini *apparenti*.

Tabella 2.1: Magnitudini apparenti nel Sistema Fotometrico di Vega. Il Sole, essendo la stella a noi più vicina, è quella che ci *appare* più luminosa, infatti ha la magnitudine assoluta più piccola possibile, ovvero più negativa possibile in questo caso. Il flusso dipende sia dalla luminosità della sorgente sia dalla distanza della sorgente dall'osservatore.

Oggetto	Magnitudine apparente
Sole	-26.8
Luna piena	-12.6
Venere	-4.7
Giove, Marte	-2.8
Sirio	-1.5
Vega	0.0
Uranio	5.5
Più deboli visibili a occhio	6.0
Nettuno	7.7
Plutone	13.0

2.5.2 Legame tra magnitudine apparente e flusso

Prendendo il logaritmo* di entrambi i membri dell'equazione (2.22), si trova:

$$\log \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_2 - m_1}{5} \log(100) = \frac{2}{5}(m_2 - m_1) = 0.4(m_2 - m_1)$$

Da cui segue:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{F_1}{F_2} \quad (2.23)$$

Ovvero, considerando i flussi monocromatici:

$$m_{1v} - m_{2v} = -2.5 \log \frac{F_{1v}}{F_{2v}} \quad (2.24)$$

Misurando il flusso di una sorgente *non* si conosce la sua magnitudine, poiché, come ovvio dall'equazione (2.23), è possibile solamente conoscere la magnitudine *rispetto a un'altra sorgente*. È dunque necessario assegnare un valore di magnitudine apparente fisso attraverso un *sistema fotometrico*. Un esempio è il *sistema fotometrico di Vega*, secondo il quale si impone che la stella Vega abbia magnitudine $m = 0$ a tutte le frequenze, sicché la relazione tra magnitudine e flusso diventano:

$$m_v = -2.5 \log \frac{F_v}{F_{0v}}$$

dove m_v e F_v sono rispettivamente la magnitudine e il flusso della sorgente a una data frequenza v , mentre F_{0v} è il flusso della stella Vega a quella data frequenza. Per farsi un'idea degli ordini di grandezza nel sistema di Vega si faccia riferimento alla tab. 2.1.

*In questo testo adotteremo la notazione \log per il logaritmo in base 10 e \ln il logaritmo in base e .

2.5.3 Magnitudine assoluta

Si definisce *magnitudine assoluta* la magnitudine apparente che avrebbe una sorgente se fosse a una distanza di 10 parsec ($1\text{ pc} = 3.086 \times 10^{18}\text{ cm}$):

$$M = m_{10\text{pc}} \quad (2.25)$$

Essa, a differenza della magnitudine apparente, è legata alla luminosità intrinseca della sorgente ed è possibile ricavare la loro relazione utilizzando l'eq. (2.23):

$$M_1 - M_2 = m_{1,10\text{pc}} - m_{2,10\text{pc}} = -2.5 \log \frac{F_1(10\text{pc})}{F_2(10\text{pc})}$$

e utilizzando l'equazione (2.21) per scrivere:

$$\frac{F_1(10\text{pc})}{F_2(10\text{pc})} = \frac{L_1}{L_2}$$

possiamo concludere che:

$$M_1 - M_2 = -2.5 \log \frac{L_1}{L_2} \quad (2.26)$$

2.5.4 Modulo di distanza

Conoscendo la magnitudine apparente e la magnitudine assoluta di una sorgente, è possibile stimare la sua distanza attraverso il *modulo di distanza*. Troviamo la relazione tra m e M utilizzando l'equazione (2.23):

$$m - M = m - m_{10\text{pc}} = -2.5 \log \frac{F(d)}{F(10\text{pc})}$$

e usando l'equazione (2.21) con $r = d$:

$$\frac{F(d)}{F(10\text{pc})} = \frac{10^2}{d^2}$$

Mettendo insieme si trova:

$$m - M = -5 \log \frac{10}{d} = -5 + 5 \log d$$

Da cui l'espressione per il *modulo di distanza*:

$$m - M = -5 + 5 \log(d_{\text{pc}}) \quad (2.27)$$

dove con il pedice si è sottolineato che le distanze sono espresse in *parsec*.

Siccome siamo in grado di misurare la distanza del Sole e possiamo misurare la sua magnitudine apparente a varie lunghezze d'onda, utilizzando l'equazione (2.27) è possibile ricavare le magnitudini assolute del sole a varie lunghezze d'onda, ad esempio si ha (B, V e K sono tre differenti filtri fotometrici):

$$M_{\text{bol}\odot} = 4.75 \quad M_B\odot = 5.48 \quad M_V\odot = 4.83 \quad M_K\odot = 3.31$$

Queste sono utilizzate come riferimento per esprimere la luminosità e la magnitudine assoluta per ogni altra sorgente. Infatti, richiamando l'equazione (2.26) e imponendo $M_2 = M_\odot$ e $L_2 = L_\odot$, si ottiene

$$M_1 - M_\odot = -2.5 \log \frac{L_1}{L_\odot} \quad (2.28)$$

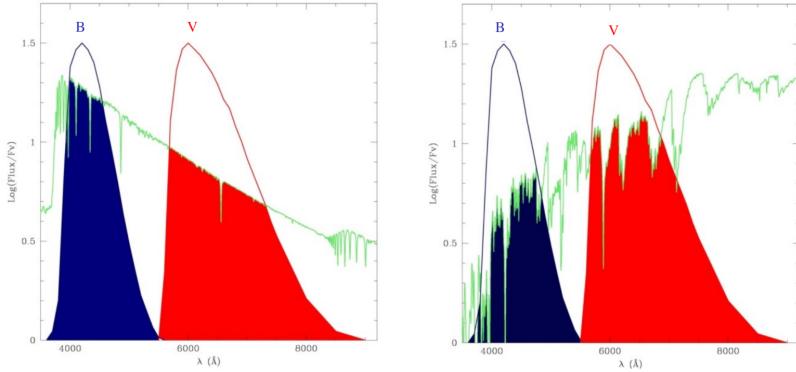


Figura 2.10: Osservazione di due spettri diversi con due filtri, uno blu (B) e uno rosso (R). In verde sono rappresentati gli spettri analizzati e le curve in blu e rosso sono rispettivamente le curve di trasmissione del filtro blu e rosso. Le zone evidenziate rappresentano il flusso misurato. Si nota che a sinistra vale $F_B > F_V$ mentre a destra $F_B < F_V$. Ciò evidenzia come il flusso misurato dipende sia dallo spettro della sorgente che dal filtro utilizzato.

2.6 Colore

2.6.1 Definizione di colore

L'indice di colore è la differenza tra le magnitudini misurate in due diverse bande fotometriche (*filtri*). In particolare, le immagini vengono acquisite attraverso filtri che selezionano solamente alcune lunghezze d'onda. Ciascun filtro ha la propria curva di trasmissione, centrata su una data lunghezza d'onda. D'altra parte, ciascuna sorgente ha il proprio spettro di emissione. Quindi, i diversi filtri selezionano solo una frazione dello spettro della sorgente, quella inclusa sotto la loro curva di trasmissione (fig. 2.10). Ne conviene che il flusso misurato durante l'osservazione in un dato filtro dipende sia dal filtro che dallo spettro della sorgente.

Ricordando l'equazione (2.23), si può scrivere:

$$m_B = -2.5 \log F_B + \text{const}$$

$$m_V = -2.5 \log F_V + \text{const}$$

dove m_B e m_V sono le magnitudini apparenti rispettivamente in filtro blu e filtro rosso (analogo per i flussi misurati F_B e F_V). Si definisce *colore* la differenza tra la magnitudine misurata col filtro più blu e la magnitudine misurata col filtro più rosso:

$$m_B - m_V \equiv B - V \quad (2.29)$$

Il colore, dunque, è un numero puro, e in tab. 2.2 sono presenti le relazioni tra il colore, la magnitudine apparente e il flusso in filtro blu e rosso.

Ovviamente, cambiando i filtri, cambia anche la denominazione del colore. Si tenga inoltre in considerazione che il colore *non* dipende dalla distanza, poiché usando le equazioni (2.23) e (2.21) si ottiene che la differenza tra le magnitudini apparenti e le magnitudini assolute è uguale:

$$m_B - m_V = M_B - M_V \quad (2.30)$$

Tavella 2.2: Relazione tra colore, magnitudine apparente e flusso.

Colore	Magnitudine apparente	Flusso
< 0	$m_B < m_V$	$F_B > F_V$
$= 0$	$m_B = m_V$	$F_B = F_V$
> 0	$m_B > m_V$	$F_B < F_V$

2.6.2 Colore e temperatura

Ci si può chiedere quale sia la ragione fisica alla base del diverso colore delle stelle. Ripensando all'esempio in fig. 2.10 è evidente che una stella è tanto più blu quanto maggiore è il flusso misurato a basse lunghezze d'onda. Dunque, in definitiva, la ragione fisica del diverso colore è la stessa del diverso spettro. Come introdotto nel par. 2.3.1 ed evidenziato in fig. 2.8, le stelle in prima approssimazione sono dei corpi neri, dunque lo spettro è definito dall'equazione di Planck (2.18). Utilizzando un particolare filtro, si sta fissando la lunghezza d'onda (o frequenza) di picco a cui lavora tale filtro, dunque lo spettro osservato di una stella dipenderà solamente dalla sua *temperatura superficiale*. Ricordando la relazione tra intensità e luminosità monocromatica espressa dall'eq. (2.8) e imponendo per una stella $I_V = B_V(T)$ si ottiene:

$$L_V = 4\pi^2 R^2 B_V(T)$$

da cui, attraverso la relazione (2.26), usando (2.30), si ottiene

$$m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} = M_{\lambda_1} - M_{\lambda_2} = -2.5 \log \frac{L_{\lambda_1}}{L_{\lambda_2}} + \text{const} = -2.5 \log \frac{B_{\lambda_1}(T)}{B_{\lambda_2}(T)} + \text{const}$$

da cui si può inferire che, nel limite di validità dell'approssimazione della stella come corpo nero, il colore dipende solamente dalla temperatura.

Per riassumere, più bassa è la temperatura superficiale, più rossa è la stella, che equivale a un grande $(B - V)$, mentre più alta è la temperatura superficiale, maggiore è il flusso a basse λ (cfr. fig. 2.7) e più blu è la stella, che equivale a un piccolo $(B - V)$.

2.6.3 Estinzione

In generale, a causa dei processi d'interazione tra radiazione e materia nel cammino tra la sorgente e l'osservatore, una stella tende ad apparire *più debole* e *più rossa* di come non sia veramente, questo fenomeno prende il nome di *estinzione* (o arrossamento). È possibile esprimere tale fenomeno analiticamente, introducendo un parametro di correzione alla magnitudine "intrinseca", ovvero quella che vedremmo se non ci fosse l'interazione con il mezzo interstellare.

$$m_\lambda = m_{\lambda 0} + A_\lambda \quad (2.31)$$

dove m_λ è la magnitudine osservata, $m_{\lambda 0}$ quella intrinseca e A_λ prende il nome di *parametro di estinzione*. Esso è relativo alla direzione in cui viene osservata la stella e dipende fortemente dalla lunghezza d'onda, in particolare A_λ cresce al diminuire di λ . La dipendenza di A_λ da λ , detta *legge di estinzione*, è tuttavia scarsamente nota: dipende infatti dalle proprietà del mezzo interstellare lungo la linea di vista, quindi sicuramente cambia al variare della linea di vista, e cambia al variare della galassia che si sta considerando.

È presente una legge di estinzione standard per la Via Lattea, derivata da *Cardelli* (1989), tuttavia probabilmente non è valida ovunque nella nostra galassia e non è chiaro se debba valere anche per altre galassie. L'unica cosa chiara è che l'effetto dell'estinzione cresce al diminuire delle lunghezze d'onda.

Per spiegare l'effetto del *reddening* consideriamo due filtri particolari, un B e un V, e utilizziamo l'equazione (2.31) in combinazione con la (2.29). Possiamo scrivere:

$$m_\lambda - m_{\lambda 0} = A_\lambda$$

$$B - B_0 = A_B \quad V - V_0 = A_V$$

e sottraendo membro a membro:

$$B_0 - V_0 \equiv (B - V)_0 = (B - V) - (A_B - A_V)$$

Il primo termine, $(B - V)_0$, rappresenta il *colore intrinseco*, $(B - V)$ rappresenta il *colore osservato*, mentre l'ultimo termine, $(A_B - A_V) \equiv E(B-V)$ rappresenta il *reddening*, ovvero l'eccesso di colore. Partendo dal reddening dei filtri B-V si può indicare l'effetto per dei filtri qualunque, moltiplicando per un opportuno fattore correttivo R_λ :

$$m_\lambda = m_{\lambda 0} + A_\lambda = m_{\lambda 0} + R_\lambda E(B-V) \quad (2.32)$$

2.6.4 Modulo di distanza e reddening

Si faccia attenzione al fatto che la magnitudine apparente che compare nell'espressione del modulo di distanza (2.27) è quella *vera*, ovvero de-arrossata. Talvolta, tuttavia, in letteratura si trova il modulo di distanza *osservato*, ad esempio, in banda V. In questo caso, per trovare la distanza, è necessario de-arrossare:

$$(m - M)_V = -5 + 5 \log(d_{pc}) + 3.12 E(B-V)$$

Si faccia attenzione anche a un'ultima cosa: la magnitudine assoluta, per definizione, è sempre quella vera. Non ha senso parlare di magnitudine assoluta arrossata.

3. Struttura stellare

3.1 Modelli stellari

Cos'è una stella? Una *stella* è una sfera auto-gravitante di gas in equilibrio idrostatico, ossia in cui la forza di pressione del gas egualia la forza di gravità. I parametri principali con cui si descrive una stella sono la sua *massa M* e la sua *composizione chimica*; solitamente quest'ultima viene espressa con la convenzione riportata di seguito:

X Frazione in massa dell'*idrogeno*.

Y Frazione in massa dell'*elio*.

Z Frazione in massa degli elementi più pesanti dell'*elio*, ovvero dei *metalli*.

Ovviamente deve essere $X + Y + Z = 1$. La maggior parte della frazione in massa di una stella è costituita da idrogeno, anche se la loro composizione varia nel corso della loro vita. Per il Sole, ad esempio, si ha:

$$X = 0.70 \quad Y = 0.28 \quad Z = 0.02$$

Una stella è caratterizzata da tre regioni principali:

- **Nucleo:** in questa zona, che è la più interna, viene prodotta l'energia.
- **Involucro:** in questa zona l'energia è trasportata in superficie; ci sono zone radiative e convettive (a seconda di come avviene il trasporto di energia verso la superficie della stella).
- **Atmosfera:** è a sua volta suddivisa in tre zone:
 - **Fotosfera:** si tratta dello strato responsabile della maggior emissione di luce. Sotto la fotosfera la stella è opaca, cioè non emette praticamente nulla.
 - **Cromosfera:** questo strato è quello che vediamo durante un'eclissi.
 - **Corona:** è lo strato più esterno della stella, anche questo può essere visto durante un'eclissi.

Lo studio di una stella parte dallo studio delle sue caratteristiche osservabili, che sono la magnitudine e il colore che vengono dall'atmosfera; per interpretare le misurazioni e inferire la sua struttura interna è necessario un *modello stellare*. Esso prenderà in input la massa e la composizione chimica della stella presa in considerazione e da queste dovrà fornire in output la luminosità e la temperatura superficiale. Possiamo quindi schematizzarlo come segue:



Tuttavia, massa e composizione chimica *non* sono direttamente osservabili, quindi, bisogna tenere conto di tutti i fenomeni fisici visti in precedenza e ricondursi a tali grandezze attraverso la *magnitudine* e il *colore* per confrontare teoria e dati sperimentali.

Di seguito sono esposte le sette equazioni necessarie per un modello stellare esaustivo:

1. *Equilibrio idrostatico*:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)$$

2. *Continuità di massa*:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

3. *Equazione di stato*:

$$P = \frac{aT^4}{3} + \frac{k\rho T}{\mu_i H} + \begin{cases} \frac{k\rho T}{\mu_e H} \\ k_1 \rho^{5/3} \\ k_2 \rho^{4/3} \end{cases}$$

4. *Bilancio energetico*:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon$$

5. *Gradiente radiativo e criterio di Schwarzschild*:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} = -\frac{3\kappa\rho}{4\pi r^2} \frac{L(r)}{4acT^3}$$

se $\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}}$ \Rightarrow c'è convezione.

6. *Opacità*:

$$\kappa = \kappa(\rho, T) \begin{cases} \kappa_{BF} \propto 10^{25} Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ \kappa_{FF} \propto 10^{22} (X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ \kappa_E \propto 0.2(1+X) \end{cases}$$

7. *Produzione di energia tramite reazioni termonucleari*:

$$\varepsilon = \varepsilon(X, \rho, T) \begin{cases} \varepsilon_{PP} = \varepsilon_1 \rho X^2 T_6^\alpha & \alpha \in [3.5 - 6] \\ \varepsilon_{CN} = \varepsilon_2 \rho X X_{CN} T_6^\beta & \beta \in [13 - 20] \\ \varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_3 \rho^2 Y^3 T_8^\gamma & \gamma \in [20 - 30] \end{cases}$$

3.2 Equilibrio idrostatico

L'equazione dell'*equilibrio idrostatico* esprime la condizione per cui la pressione interna del gas che compone la stella è in equilibrio con la forza di gravità data dalla massa della stella stessa. Si può riassumere nella seguente maniera:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \quad (3.1)$$

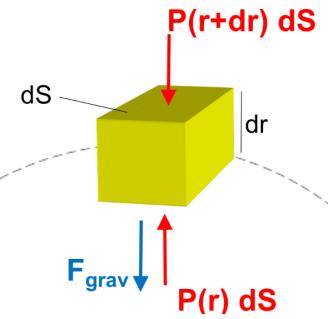


Figura 3.1: Volumetto infinitesimo a distanza r dal centro della stella. Sulla faccia superiore agisce la pressione che spinge verso il centro. Sulla faccia inferiore agiscono la pressione, verso l'esterno, e la forza di gravità, verso il centro.

Per ricavare tale equazione immaginiamo di dividere la stella in gusci sferici concentrici a temperatura e densità costanti; ognuno di questi è caratterizzato da un valore di densità e di temperatura decrescenti all'aumentare della distanza dal centro. Consideriamo un volume infinitesimo di stella a una distanza r dal centro; come mostrato in figura 3.1, sulla faccia esterna del volumetto agisce una forza di pressione verso l'interno, mentre sulla faccia interna agisce una forza di pressione verso l'esterno e la forza gravitazionale, verso l'interno. Per imporre la condizione di equilibrio è sufficiente scrivere le espressioni per la forza di pressione F_p e per la forza di gravità F_g . Si tenga conto che stiamo considerando l'asse radiale rivolto verso il centro, sicché le forze che agiscono verso l'esterno avranno segno negativo.

$$F_p = P(r + dr) dS - P(r) dS = \frac{dP(r)}{dr} dr dS$$

$$F_g = \frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) dr dS$$

dove $M(r)$ rappresenta la massa contenuta all'interno del guscio di raggio r , il termine $GM(r)/r^2$ rappresenta l'accelerazione locale di gravità e il termine $\rho(r) dr dS$ rappresenta la massa del volumetto preso in considerazione. Imponendo l'equilibrio si trova:

$$F_p + F_g = 0 \iff \frac{dP(r)}{dr} dr dS + \frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) dr dS = 0$$

da cui segue immediatamente l'equazione (3.1). Quindi, in ogni guscio sferico della stella a fissata distanza r dal centro, la gravità è bilanciata dalla pressione interna del gas. In particolare, è più corretto affermare che la gravità è bilanciata dal *gradiente di pressione*, ovvero dalla variazione di P col raggio. La pressione deve decrescere all'aumentare del raggio, sicché la pressione nel centro della stella è maggiore della pressione vicino alla sua superficie.

Quando F_g e F_p non sono bilanciate, la stella si contrae per $F_g > F_p$ o espande per $F_g < F_p$ in un *tempo caratteristico* pari a:

$$T_d = \sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{\frac{2r^3}{GM}}$$

Ci potremmo chiedere quanto ci vorrebbe per una stella come il Sole a collassare se la pressione scomparisse improvvisamente: utilizzando l'equazione sopra otterremmo un tempo di circa 38 minuti.

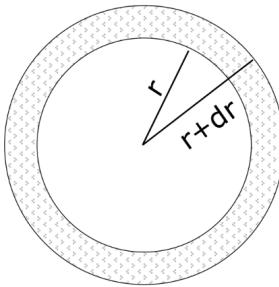


Figura 3.2: Guscio sferico infinitesimo a distanza r dal centro. All'interno del guscio, a causa della simmetria sferica, ipotizziamo che la densità e la temperatura siano costanti.

3.3 Continuità di massa

L'equazione di *continuità di massa* descrive come la massa interna della stella varia con il raggio. Si può scrivere nella seguente maniera:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (3.2)$$

Per ricavarla consideriamo un guscio sferico infinitesimo di stella, come in figura 3.2. Siccome all'interno di tale guscio la densità di ogni elemento è la stessa, a causa della simmetria sferica della struttura, possiamo ricavare il valore di massa all'interno di tale guscio:

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

da cui segue immediatamente l'eq. (3.2). Consideriamo il caso semplice di densità costante, in cui $\rho(r) = \bar{\rho}$, si può calcolare in maniera semplice la massa presente entro il raggio r :

$$M(r) = \int_0^{M(r)} dm(r) = \int_0^r dr' 4\pi r'^2 \rho(r') = \frac{4}{3}\pi r^3 \bar{\rho}$$

3.4 Equazione di stato

Guardando le equazioni (3.1) e (3.2), notiamo come queste siano 2 equazioni in 3 incognite: $P(r)$, $M(r)$ e $\rho(r)$. Per risolvere completamente il sistema è necessario stabilire un'altra relazione tra grandezze indipendenti. Una relazione tra P e ρ è stabilita dall'*equazione di stato*:

$$P = \frac{aT^4}{3} + \frac{k\rho T}{\mu_i H} + \begin{cases} \frac{k\rho T}{\mu_e H} & (\text{gas perfetto}) \\ k_1 \rho^{5/3} & (\text{gas degenero non relativistico}) \\ k_2 \rho^{4/3} & (\text{gas degenero relativistico}) \end{cases} \quad (3.3)$$

Un primo aspetto da considerare è che la pressione nell'interno delle stelle è dovuta a due contributi, ossia la *pressione di radiazione* e la *pressione del gas*:

$$P = P_{\text{rad}} + P_{\text{gas}}$$

3.4.1 Pressione di radiazione

I fotoni esercitano una pressione perché a ogni fotone di energia E è associato un impulso $p = E/c$. Una stella si può approssimare come un corpo nero, dunque è possibile calcolare la pressione di radiazione attraverso la legge di Planck (2.18).

$$P_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{3c} \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) d\nu = \frac{1}{3}aT^4$$

dove a è una costante pari a $a = 4\sigma/c = 7.6 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$, in cui σ è la costante di Stefan-Boltzmann. Accontentiamoci del risultato senza ulteriori specificazioni sui dettagli del conto. Si ha:

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3}aT^4 \quad (3.4)$$

Si noti come la pressione di radiazione *non* dipenda dalla densità della stella e invece dipenda fortemente dalla temperatura.

3.4.2 Pressione del gas ideale

A causa delle temperature elevate negli interni stellari, gli atomi sono ionizzati e possiamo pensare al gasstellare come a un *plasma di ioni e elettroni*. Quindi, nella maggior parte dei casi, anche a densità e pressioni elevate, il gasstellare può essere trattato come un *gas ideale*, in cui si trascurano le interazioni tra le particelle del gas e la distribuzione delle velocità è rappresentata dalla distribuzione di Maxwell. La densità del gas, in questo caso, dipende sia dalla pressione che dalla temperatura e viceversa, quindi si avrà una pressione che è funzione di densità e temperatura:

$$P = P(\rho, T)$$

Per un gas ideale, inoltre, vale la nota legge:

$$PV = Nk_B T \quad (3.5)$$

Utilizzando l'equazione (3.5) e definendo $\langle m \rangle \equiv M/N$ la massa media delle particelle del gas, e $\rho \equiv M/V$ la densità, si ottiene:

$$P = \frac{N}{V} k_B T = \frac{N}{M} \frac{M}{V} k_B T = \frac{k_B \rho T}{\langle m \rangle}$$

In più la massa media delle particelle del gas può essere scritta anche come $\langle m \rangle = \mu H$, dove μ è il *peso molecolare medio* e H rappresenta la massa di un nucleo di idrogeno, ovvero la massa del protone ($H = m_P = 1.6 \times 10^{-24} \text{ g}$). Mettendo tutto insieme si ottiene l'equazione di stato per un gas ideale:

$$P_{\text{gas}} = \frac{k_B \rho T}{\mu H} \quad (3.6)$$

Vediamo che la costante di proporzionalità $\rho/\mu H$ dipende dalla massa del gas, che a sua volta dipende dalla composizione chimica.

La caratteristica più importante di questa equazione è la cosiddetta *termo-regolazione*: se T cresce P cresce, ma se P cresce la stella si espande e la temperatura diminuisce, quindi si ha continuamente un bilancio fra pressione e temperatura. Si faccia tuttavia attenzione al fatto che non tutti i gas si comportano come un gas ideale (par. 3.4.4).

3.4.3 Peso molecolare medio

Arrivati a questo punto ci interessa legare il *peso molecolare medio* μ alla composizione chimica del gas, introdotta all'inizio del par. 3.1. Come già ricordato, μ rappresenta la media delle masse delle particelle che compongono il gas, espressa in termini della massa del protone H :

$$\mu = \frac{\langle m \rangle}{H} \quad (3.7)$$

D'altra parte, conoscendo la massa totale del gas M_{tot} e il numero totale di particelle libere N_{free} , si può calcolare la massa media delle particelle come:

$$\langle m \rangle = \frac{M_{\text{tot}}}{N_{\text{free}}} \quad (3.8)$$

Si faccia molta attenzione al fatto che N_{free} rappresenta le particelle libere, dunque, in un gas ionizzato è pari alla somma del numero degli *ioni* e degli *elettroni*. Esso dipende da:

- la *composizione chimica del gas*, ovvero da X , Y e Z (vedi par. 3.1).
- lo *stato di ionizzazione* del gas. In particolare:
 - ogni atomo *neutro* contribuisce con 1 particella, ovvero l'atomo stesso.
 - ogni atomo *totalmente ionizzato* contribuisce con $1 + Z_a$ particelle, ovvero il nucleo e Z_a elettroni (Z_a è il numero atomico).
 - ogni atomo *parzialmente ionizzato* contribuisce con un numero compreso fra 1 e $1 + Z_a$ di particelle.

Si faccia nuovamente attenzione a due dettagli. Innanzi tutto, stiamo dividendo il gas studiato in tre parti: l'idrogeno, la cui abbondanza in massa è espressa da X , l'elio, la cui abbondanza è espressa da Y e gli elementi più pesanti, la cui abbondanza è Z . Dunque, non stiamo distinguendo gli elementi più pesanti dell'elio, bensì li stiamo accorpando tutti in una stessa famiglia. Questo è lecito poiché le loro abbondanze sono ridotte in confronto ai primi due elementi della tavola periodica. Inoltre, Z_a rappresenta il grado di ionizzazione del gas per un gas totalmente ionizzato, che coincide dunque con il numero di protoni del gas.

Tenendo a mente che stiamo distinguendo solamente tre specie di elementi (idrogeno, elio e più pesanti), indicizziamo la specie con l'indice j , con $j = 1, 2, 3$; a costo di essere ridondanti, ribadiamo che $j = 1$ si riferisce all'idrogeno, $j = 2$ all'elio e $j = 3$ a tutti gli altri elementi. A questo punto possiamo calcolare il numero di atomi della specie j -esima:

$$N_j = \frac{M_{\text{tot},j}}{m_{\text{atomo},j}} \simeq \frac{M_{\text{tot},j}}{A_j H} \quad (3.9)$$

dove A_j è il *numero di massa*, ovvero il numero di nucleoni, pari alla somma dei protoni e dei neutroni. In particolare, se consideriamo l'isotopo più comune dell'idrogeno, il prozio, il suo nucleo è composto solamente da un protone, per cui $A_1 = 1$. Considerando l'elio 4, il suo nucleo è composto da 2 protoni e 2 neutroni, pertanto $A_2 = 4$. Invece per gli elementi più pesanti possiamo considerare che i più stabili in genere hanno un numero di protoni circa uguale al numero di protoni (la repulsione coulombiana sfavorisce l'aumento dei protoni, quindi al crescere di A avremo in genere un maggior numero di neutroni; ciò nonostante la variazione non è troppo significativa, quindi possiamo assumere che il numero di protoni e quello di neutroni in genere sia lo stesso). Se consideriamo un gas *totalmente ionizzato*, gli elementi più pesanti avranno $\sim Z_a$ particelle libere (con Z_a il loro numero atomico) e avremo $A_3 \sim 2Z_a$.

Inoltre possiamo scrivere l'abbondanza in massa della specie j -esima utilizzando la definizione stessa, ossia:

$$X_j = \frac{M_{\text{tot},j}}{M_{\text{tot}}} \quad (3.10)$$

dove $X_1 = X$, $X_2 = Y$ e $X_3 = Z$, come più volte ricordato. Mettendo insieme le equazioni (3.9) e (3.10) si trova:

$$N_j = \frac{X_j M_{\text{tot}}}{A_j H} \quad (3.11)$$

Pertanto, per un gas *totalmente ionizzato* possiamo calcolare il numero totale di particelle libere contando le particelle come espresso nella lista sopra e utilizzando l'equazione (3.11):

$$N_{\text{free}} = \sum_{j=1}^3 N_j (1 + Z_j) = \frac{M_{\text{tot}}}{H} \sum_{j=1}^3 \frac{X_j}{A_j} (1 + Z_j) \quad (3.12)$$

dove Z_j rappresenta il numero atomico dell'elemento considerato, dunque per l'idrogeno $Z_1 = 1$, per l'elio $Z_2 = 2$ e per gli elementi più pesanti considereremo un numero atomico generico Z_a , per cui $Z_3 = Z_a^*$.

Mettendo insieme le equazioni (3.7), (3.8) e (3.12), si ottiene:

$$\mu = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \frac{X_j}{A_j} (1 + Z_j)} \quad (3.13)$$

Sostituendo con i valori che sono stati introdotti precedentemente si ha:

$$\mu = \frac{1}{\frac{X_1}{A_1} (1 + Z_1) + \frac{X_2}{A_2} (1 + Z_2) + \frac{X_3}{A_3} (1 + Z_3)} = \frac{1}{\frac{X}{1} (1 + 1) + \frac{Y}{4} (1 + 2) + \frac{Z}{2Z_a} (1 + Z_a)}$$

In definitiva, per un gas *totalmente ionizzato*, considerando sia il contributo degli *ioni* che il contributo degli *elettroni*, si ottiene un *peso molecolare medio* pari a:

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} \quad (3.14)$$

Se ora consideriamo il solo contributi degli *elettroni* in un gas totalmente ionizzato, otteniamo:

$$\mu_e = \frac{1}{X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z} \quad (3.15)$$

infatti se consideriamo solo il contributo degli *elettroni* di ogni componente del gas non stiamo considerando il contributo degli *ioni*, che altro non sono che i nuclei; perciò si avrà che ogni componente contribuisce solo con Z_j particelle invece che con $1 + Z_j$ e se si modifica in questo modo l'equazione (3.13) si ottiene la formula riportata.

Ma in più possiamo usare il fatto che la somma delle frazioni in massa delle varie componenti è pari a 1, quindi si ottiene che:

$$X + Y + Z = 1 \implies X + \frac{1}{2}(Y + Z) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}(X + Y + Z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}X$$

Inserendo nell'equazione (3.15) otteniamo infine:

$$\mu_e = \frac{2}{X + 1} \quad (3.16)$$

*non si confonda Z_i con l'abbondanza degli elementi pesanti Z , la quale *non* ha un pedice

3.4.4 Degenerazione

Un gas che segue l'equazione (3.6) è un gas ideale e come spiegato nel paragrafo 3.4.2 in questo caso la struttura è *termoregolata*. Nel caso in cui il gas *non* sia ideale, si dice che si trova in una situazione di *degenerazione*, e gli effetti quanto-meccanici diventano rilevanti. Per la *componente ionica* del gas (par. 3.4.3) ci si può sempre mettere nell'approssimazione di gas perfetto, mentre per la *componente elettronica* non sempre è così; ciò è dovuto al fatto che la massa dell'elettrone è circa mille volte inferiore alla massa del protone, dunque a densità fissata è possibile una degenerazione della sola componente elettronica del gas. Possiamo quindi studiare quest'ultima, trovando un limite inferiore che varrà sicuramente anche per la componente ionica. Ma quindi in quali situazioni bisogna preoccuparsi degli effetti quanto-meccanici?

Ricordiamo che in meccanica quantistica una particella è rappresentabile attraverso una *lunghezza d'onda di de Broglie* pari a:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m k_B T}} \quad (3.17)$$

Se la distanza media tra le particelle è molto più grande della lunghezza d'onda di de Broglie (vedi concentrazione quantistica), allora si può ignorare la natura ondulatoria e applicare le leggi della meccanica classica. Dato un certo volume V , la distanza media tra le particelle è tanto più grande quando più piccola è la densità. Si può dimostrare che gli effetti quantistici sono trascurabili se:

$$T > 2.4 \cdot 10^{-22} \frac{\rho^{2/3}}{m}$$

che rappresenta la *condizione di non degenerazione* per un gas di temperatura T , alla densità ρ , costituito da particelle di massa m . Tale condizione tende ad essere violata, ovvero il gas tende ad essere degenere, solitamente in due casi:

- ad alte densità (poiché la distanza media tra le particelle è minore)
- per particelle di massa minore

Come accennato precedentemente, a causa della significativa differenza di massa tra elettrone e protone, è possibile che le condizioni della materia stellare siano tali per cui gli elettroni siano in condizione di degenerazione mentre gli ioni no. D'ora in avanti ci occuperemo solamente della degenerazione elettronica. Dato che per gli elettroni $m_e \sim 10^{-27}$ g si può individuare un limite di demarcazione:

- $\frac{T}{\rho^{2/3}} > 10^5$: in questo caso si possono trascurare gli effetti quantistici e trattare il gas come gas perfetto.
- $\frac{T}{\rho^{2/3}} < 10^5$: in questo caso si *devono* considerare gli effetti quantistici per la degenerazione elettronica.

In particolare, gli effetti quantistici che entrano in causa sono il *principio di indeterminazione di Heisenberg* e il *principio di esclusione di Pauli*.

3.4.5 Principio di indeterminazione e di esclusione

Chiamando Δx , Δy e Δz le incertezze nella determinazione delle posizioni e Δp_x , Δp_y e Δp_z le incertezze nella determinazione dei momenti nello spazio delle fasi, il *principio di indeterminazione*

di Heisenberg si può scrivere:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim \hbar \quad (3.18a)$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \sim \hbar \quad (3.18b)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \sim \hbar \quad (3.18c)$$

Questo principio ha come importante conseguenza quella di fissare il *volume limite minimo* nello spazio delle fasi (ossia quello di una singola cella) pari a:

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)(\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z) \sim h^3 \quad (3.19)$$

Il *principio di esclusione di Pauli* afferma che in ciascuna cella dello spazio delle fasi, definita dall'equazione (3.19), non possono stare più di due fermioni, purché di spin opposto.

Questi due principi hanno un effetto diretto sulla *distribuzione di velocità (momenti)* delle particelle, e quindi in definitiva sulla dipendenza della pressione dalle proprietà del gas.

Consideriamo un gas di elettroni in condizioni di bassa densità: potremo trattarlo come gas perfetto e seguirà la distribuzione di Maxwell. Aumentando il numero di elettroni tenendo fissa la temperatura T , al curva di Maxwell si abbasserà, fino a un limite in cui non posso più trascurare gli effetti quantistici. In questo caso, il numero di elettroni con quantità di moto compresa tra p e $p + dp$, in un dato volume V , non può più essere infinito come nel caso della distribuzione di Maxwell, ma sarà:

$$n(p) dp \leq \frac{2V}{h^3} dp_x dp_y dp_z$$

Quindi, se aumentiamo il numero di elettroni, la maggior parte delle celle con i momenti più piccoli verrà via via riempita e gli elettroni in più dovranno necessariamente occupare celle con momenti maggiori, ovvero, a parità di T , questi ultimi avranno energie maggiori. Questo significa che la temperatura *non* è più una misura dell'energia degli elettroni.

Nel caso di *degenerazione completa*, si dice che *tutti* i valori dei momenti o livelli energetici sono occupati fino a p_0 (E_0), detto momento (energia) di Fermi. Quindi p_0 (E_0) è il massimo momento (energia) possibile per le particelle di gas.

Mentre per il gas perfetto è T a stabilire il livello energetico più probabile, l'ingresso nel regime degenero di fatto cancella la dipendenza dalla temperatura:

$$P \neq P(T)$$

3.4.6 Distribuzione di Fermi-Dirac

Se il volume mimimo nello spazio delle fasi, come evidenziato in eq. (3.19), è h^3 , considerando per un fermione ci sono 2 possibili stati possibili (par. 3.4.5), il peso statistico di uno stato corrisponde a $2/h^3$ e dunque si può esprimere il numero di elettroni con quantità di moto tra p e dp in un dato volume V come:

$$n(p) dp = \frac{2}{h^3} dp_x dp_y dp_z$$

Poiché ci interessa il numero di elettroni tra p e dp , notiamo che $dp_x dp_y dp_z$ è equivalente al volume compreso tra due sfere concentriche di raggio p e $p + dp$ (vedi figura 3.3), cioè $4\pi p^2 dp$.

Sostituendo si trova la *distribuzione di Fermi-Dirac*:

$$N_p dp = \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp \quad (3.20)$$

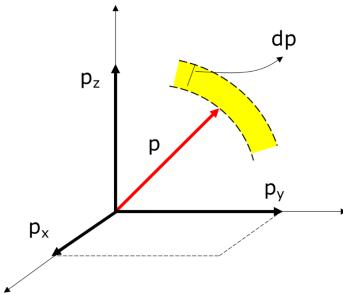


Figura 3.3: $dP_x dP_y dP_z$ è uguale al volume compreso tra due sfere concentriche di raggio p e $p + dp$

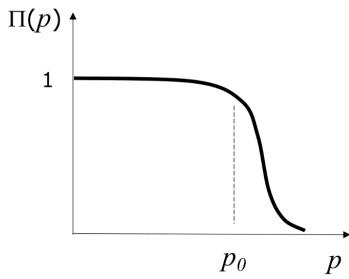


Figura 3.4: Indice di occupazione dei livelli energetici $\Pi(p)$ in funzione della quantità di moto p . $\Pi = 1$ corrisponde a un livello totalmente occupato.

Si noti come essa *non* dipenda da T . Per evidenziare l'emergenza del comportamento quantistico oltre la soglia di Fermi, si faccia riferimento alla figura 3.4, in cui è rappresentato l'indice di occupazione dei livelli energetici $\Pi(p)$ in funzione di p .

Integrando l'equazione (3.20) possiamo ottenere relazioni importanti in funzione del momento di Fermi. Si faccia attenzione al fatto che il massimo momento possibile è p_0 , ovvero il momento di Fermi, quindi l'integrale si fermerà a questo valore:

$$N_e = \int_0^{p_0} \frac{8\pi}{h^3} p^3 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_0^3$$

dove N_e rappresenta il numero di particelle per unità di volume. Sia N_{tot} il numero totale di particelle, $\langle m \rangle$ la massa media delle particelle, M la massa totale e V il volume. Si ha:

$$N_e = \frac{N_{\text{tot}}}{V} = \frac{M}{\langle m \rangle} \frac{1}{V} = \frac{\rho}{\mu_e H}$$

dove è stata introdotta la densità ρ e si è usata l'espressione (3.7). Mettendo insieme le ultime due espressioni si ottiene:

$$p_0 = \sqrt[3]{\frac{3h^3}{8\pi\mu_e H}} \rho^{1/3} \quad (3.21)$$

Arrivati a questo punto, abbiamo tutti gli strumenti necessari per il calcolo della pressione. Come noto dalla meccanica statistica, conoscendo una distribuzione dei moduli di velocità, ipotizzando isotropia dello spazio, si può sempre trovare la pressione come:

$$P = \frac{1}{3} m \int_0^{\infty} N(v) v^2 dv = \frac{1}{3m} \int_0^{\infty} N(p) p^2 dp \quad (3.22)$$

e in generale bisogna distinguere tre casi:

Gas perfetto: in questo caso la distribuzione di velocità da utilizzare è quella di Maxwell-Boltzmann.

Integrando la (3.22) si ottiene la legge dei gas perfetti (3.6), in cui $\mu = \mu_e$.

Gas degenero non relativistico: la distribuzione di velocità è quella di Fermi Dirac. Si utilizza l'espressione classica per l'impulso, $p = mv$.

Gas degenero relativistico: la distribuzione di velocità è ancora quella di Fermi-Dirac, tuttavia si utilizza l'espressione relativistica per l'impulso, $p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$

Vediamo cosa si ottiene negli ultimi due casi.

Caso non relativistico

In questo caso $p_0 \ll m_e c$ quindi possiamo scrivere $p = mv$ e integrare la (3.22) utilizzando la distribuzione di Fermi-Dirac (3.20). Si ottiene:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3 m} \int_0^{p_0} p^4 dp = \frac{8\pi}{3h^3 m} \frac{p_0^5}{5}$$

e sostituendo l'espressione per p_0 trovata precedentemente (3.21) otteniamo

$$P = k_1 \rho^{5/3} \quad (3.23)$$

dove k_1 è una costante pari a:

$$k_1 = 10^{13} \mu_e^{-5/3}$$

Si noti come la pressione *non* dipenda dalla temperatura. Questo fa sì che *non* ci sia termoregolazione. Inoltre, la dipendenza dalla densità è maggiore rispetto che al gas perfetto (equazione (3.6)).

Caso relativistico

In questo caso si ha $p_0 \sim m_e c$ e bisogna utilizzare l'espressione relativistica dell'impulso:

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Sostituendo dentro (3.22) si ha:

$$P = \frac{8\pi}{3mh^3} \int_0^{p_0} \frac{p^4 dp}{(1 + \frac{p^2}{m^2 c^2})^{1/2}} = \dots = \frac{2\pi c}{3h^3} p_0^4$$

dove si sono saltati i passaggi intermedi, riportati nel *Cester*. Unendo l'ultima espressione con (3.21) si ottiene:

$$P = k_2 \rho^{4/3} \quad (3.24)$$

con k_2 una costante pari a

$$k_2 = 1.2 \cdot 10^{15} \mu_e^{-4/3}$$

Nuovamente, non c'è dipendenza dalla temperatura e la dipendenza dalla densità è più forte che nel gas ideale (3.6).

3.4.7 L'equazione in breve

L'equazione di stato negli interni stellari (3.3) ha tre contributi principali. Analizziamoli celermente.

Pressione di radiazione

Il termine:

$$P = \frac{aT^4}{3}$$

rappresenta il contributo della pressione di radiazione per un corpo nero, secondo la eq. (3.4) ottenuta integrando la distribuzione di Planck 2.18. È il contributo dei fotoni che compongono il gasstellare, i quali hanno un impulso e dunque esercitano una pressione.

Pressione degli ioni

Il termine:

$$\frac{k\rho T}{\mu_i H}$$

è il contributo degli ioni nel materialestellare, che pensiamo come a un plasma. Questi sono sempre approssimati come a un gas perfetto, infatti seguono la legge (3.6).

Pressione degli elettroni

Il contributo:

$$\begin{cases} \frac{k\rho T}{\mu_e H} \\ k_1 \rho^{5/3} \\ k_2 \rho^{4/3} \end{cases}$$

dipende dalla degenerazione del gas per ciò che concerne il contributo elettronico. Se il gas di elettroni è *non* degenero, ovvero è un gas perfetto, segue la legge (3.6), dove $\mu = \mu_e$. Nel caso *degenero* si distinguono due situazioni: la prima in cui si trattano le particelle come *non* relativistiche, con un contributo alla pressione pari a $k_1 \rho^{5/3}$, e un secondo in cui si trattano le particelle come *relativistiche*, con un contributo alla pressione pari a $k_2 \rho^{4/3}$.

3.4.8 Contributo dominante

Per descrivere lo stato della materia negli internistellari, è utile utilizzare il *diagramma log ρ – log T*. In pratica, note la densità e la temperatura di un certo strato di stella, questo piano permette di sapere quale componente di pressione prevale. Infatti, eguagliando tra loro diversi contributi di pressione, si ottengono delle rette che suddividono il piano in regioni in cui domina l'uno o l'altro contributo. Analizziamo i domini di demarcazioni per casi. Nella figura 3.5 sono mostrati tutti i casi. Essa è riferita al nucleostellare, in cui le temperature sono elevatissime, in superficie le temperature sono più basse.

Pressione di radiazione – Pressione del gas perfetto

Imponiamo $P_{\text{rad}} = P_{\text{gas}}$, uguagliando dunque l'eq. (3.4) con l'eq. (3.6). In pratica sto considerando insieme il contributo degli ioni e degli elettroni, utilizzando $1/\mu_i + 1/\mu_e = 1/\mu$

$$\frac{1}{3}aT^4 = \frac{k_B \rho T}{\mu H}$$

sviluppando si trova:

$$T^3 = \frac{3k_B}{a\mu H} \rho$$

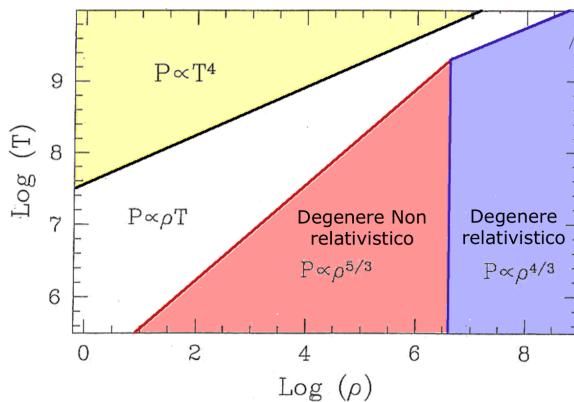


Figura 3.5: Diagramma $\log \rho - \log T$. In giallo domina la pressione di radiazione, in bianco il gas non degenero (gas perfetto), in rosso il gas degenero non relativistico e in blu il gas degenero relativistico.

da cui, passando ai logaritmi:

$$\log T^3 = \log \rho + c$$

e infine si può ricavare:

$$\log T = \frac{1}{3} \log \rho + 7.57 \quad (3.25)$$

La regione in giallo del diagramma 3.5 è quella in cui la pressione di radiazione domina su quella del gas perfetto, ovvero $P_{\text{rad}} > P_{\text{gas}}$

Pressione del gas degenero – Pressione del gas perfetto

Per sapere quando la pressione del gas degenero di elettroni prevale su quella di gas perfetto, uguagliamo la (3.6) con la (3.23). Siccome la condizione di degenerazione riguarda solamente il contributo elettronico, nella parte del gas perfetto considero solo gli elettroni, per cui $\mu = \mu_e$:

$$\frac{k_B \rho T}{\mu_e H} = k_1 \rho^{5/3}$$

da cui si ottiene:

$$T = \frac{k_1}{k_B} \rho^{2/3} \mu_e H$$

e, passando ai logaritmi:

$$\log T = \frac{2}{3} \log \rho + 4.88 \quad (3.26)$$

La regione in rosso del diagramma 3.5 è quella in cui la pressione del gas degenero è maggiore della pressione del gas non degenero.

Pressione del gas degenero relativistico – Pressione del gas degenero non relativistico

Per sapere quando la pressione del gas degenero relativistico prevale su quella del gas degenero non relativistico, uguagliamo la (3.23) con la (3.24):

$$k_1 \rho^{5/3} = P = k_2 \rho^{4/3}$$

si trova:

$$\rho^{1/3} = \frac{k_2}{k_1}$$

da cui, passando ai logaritmi:

$$\log \rho = 3 \log \frac{k_2}{k_1} = 6.6 \quad (3.27)$$

La pressione in blu del diagramma 3.5 è quella in cui la pressione del gas degenera relativistico è maggiore di quella del gas degenera non relativistico.

Pressione del gas perfetto – Pressione del gas degenera relativistico

Analogamente a quanto fatto nel caso *non relativistico*, ci sarà una regione del diagramma (per $\log \rho > 6.6$) in cui il gas può passare da *non degenera* a *degenera relativistico*. Per trovarla uguagliamo la (3.6) con la (3.24):

$$\frac{k_B \rho T}{\mu H} = k_2 \rho^{4/3}$$

si trova:

$$T = \frac{k_2 \mu_e H}{k_B} \rho^{1/3}$$

e passando ai logaritmi:

$$\log T = \frac{1}{3} \log \rho + 7.07 \quad (3.28)$$

Conclusioni

La pressione di radiazione, siccome $p_{\text{rad}} \propto T^4$, domina ad alte temperature. La pressione del gas degenera diventa dominante ad alte densità perché per avere degenerazione devo avere gli elettroni estremamente impacchettati nello spazio delle fasi, e ciò corrisponde ad elevate densità. Nei casi intermedi è sufficiente riferirsi al grafico 3.5 per capire in quale situazione si è.

Riprenderemo questo utile diagramma successivamente, parlando di evoluzione stellare. Per ora sottolineamo solamente che le reazioni termonucleari sono attive solo se il gas si trova in condizioni di non degenerazione (gas perfetto).

3.5 Equazione del bilancio energetico

L'*equazione del bilancio energetico* esprime l'energia che emerge da ogni *shell* della struttura stellare, essenzialmente dovuta alle reazioni termonucleari. Si può scrivere:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon \quad (3.29)$$

dove $L(r)$ è la luminosità emergente dalla sfera di raggio r e ε l'energia prodotta da ogni shell per unità di tempo e di massa, $[\varepsilon] = \text{erg s}^{-1} \text{g}^{-1}$.

3.5.1 Ricavare l'equazione

È semplice ricavare tale equazione. consideriamo, infatti, l'usuale guscio di gas a una distanza r dal centro.. Sia $L(r)$ la luminosità emergente dalla porzione di stella delimitata dal guscio a raggio r e analogamente per $L(r+dr)$. Possiamo scrivere:

$$L(r+dr) - L(r) = dL(r) = 4\pi \rho r^2 dr \varepsilon$$

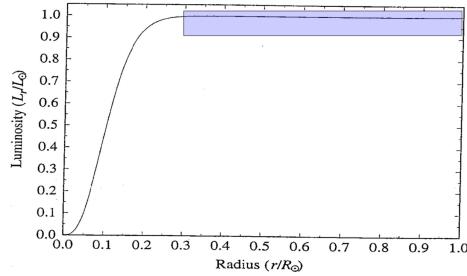


Figura 3.6: Profilo di luminosità radiale del Sole. Nella zona evidenziata si ha $L(r) = \text{const}$, da cui, secondo eq. (3.29), $\varepsilon = 0$. Questo ci dice che negli strati esterni della stella non viene prodotta energia e le reazioni termonucleari sono concentrate nell'internostellare, dove infatti le temperature sono più elevate.

dove $4\pi\rho r^2 dr$ rappresenta la massa del guscio di sfera tra r e $r + dr$ e ε è l'energia prodotta da ogni guscio per unità di tempo e di massa. Attenzione, *non* si tratta dell'energia radiata dalla stella. In questo modo si riottiene la definizione di luminosità (par. 2.2.2).

Consideriamo un tipico profilo di luminosità radiale per una stella (fig. 3.6): la luminosità varia con r solo in una regione ristretta della stella, corrispondente al suo centro, poi verso l'esterno diventa costante. All'esterno, secondo la eq. (3.29) vale $\varepsilon = 0$ e questo ci dice che tutta l'energia viene prodotta nelle regioni interne, come ci aspettiamo dal fatto che le reazioni termonucleari hanno bisogno di una elevata temperatura per poter avvenire. Tuttavia, le reazioni termonucleari *non* sono le uniche a poter contribuire all'energia, in particolare anche la *contrazione gravitazionale* può produrre energia, e tale contributo non è incluso nell'eq. (3.29). Per capire come la contrazione gravitazionale possa contribuire all'energia, bisogna far riferimento al *teorema del viriale*.

3.5.2 Teorema del viriale

Per ogni sistema in equilibrio di particelle auto-gravitanti, come nel caso delle strutture stellari, vale il *teorema del viriale*:

$$2K + \Omega = 0 \quad (3.30)$$

dove K è l'energia cinetica del sistema e Ω l'energia potenziale. L'eq. (3.30) dice sostanzialmente che a una contrazione ($d\Omega < 0$) segue un aumento dell'energia cinetica, e quindi un aumento della temperatura. Scrivendo inoltre l'energia totale del sistema come $U = K + \Omega$, si ha

$$U = -\frac{\Omega}{2} + \Omega \implies U = \frac{\Omega}{2}$$

ovvero a una contrazione ($d\Omega < 0$) segue una diminuzione dell'energia totale del sistema ($dU < 0$).

Le due relazioni considerate precedentemente:

$$dU = \frac{d\Omega}{2} \quad dK = -\frac{d\Omega}{2} \quad (3.31)$$

mostrano che in ogni contrazione ($d\Omega$) metà dell'energia è *emessa* e metà dell'energia è usata per incrementare la temperatura del caso. Possiamo riformulare quanto detto in un altro modo: ogni perdita di energia totale dU dovuta a emissioni genera una contrazione del sistema, che produce anche un incremento della temperatura interna.

Come stimare il contributo della contrazione gravitazionale alla luminosità di una stella? Se fosse elevato andrebbe corretta l'eq. (3.29). Per capirlo utilizziamo la (3.31) per scrivere

$$L = \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \left| \frac{d\Omega}{dt} \right|$$

ovvero abbiamo scritto la luminosità in funzione della variazione di energia potenziale dovuta alla contrazione gravitazionale. Integriamo nel tempo:

$$\int_0^t L dt = \frac{1}{2} |\Omega|$$

A questo punto consideriamo un tempo caratteristico t^* approssimando L con un suo valore medio costante \bar{L} . Si può scrivere:

$$\bar{L} \cdot t^* = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{R}$$

dove abbiamo sostituito Ω con l'espressione del potenziale gravitazionale. Quindi abbiamo trovato il così detto *tempo di Kelvin-Helmoltz*:

$$t^* = \frac{GM^2}{2LR} \quad (3.32)$$

Esso ci dà una *stima* del tempo durante il quale una stella è in grado di mantenere costante la sua luminosità per effetto della sola contrazione gravitazionale.

Facciamo una stima per il nostro Sole introducendo nella (3.32) i parametri $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_{\odot} \sim 2 \times 10^{33} \text{ g}$, $R_{\odot} \sim 7 \times 10^{10} \text{ cm}$ e $L_{\odot} \sim 4 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$. Si ottiene:

$$t^*_{\text{Sole}} \sim 1.5 \times 10^7 \text{ anni}$$

ovvero, per il nostro Sole, l'energia gravitazionale può mantenere costante la luminosità per circa 15 milioni di anni (sono molto pochi). Questo farebbe pensare che la fonte principale di luminosità sia la contrazione gravitazionale per il nostro Sole, ma si rivela un'idea sbagliata perché attraverso fonti geologiche si è mostrato che l'età del Sole è dell'ordine dei miliardi di anni e che in tale tempo la luminosità del Sole è rimasta praticamente invariata. Questo dimostra che il grosso del contributo alla luminosità del Sole proviene dalle reazioni termonucleari e quindi l'equazione (3.29) risulta soddisfacente anche se non contempla il contributo della contrazione di gravità.

3.6 Gradiante radiativo e criterio di Schwarzschild

L'equazione del *gradiante radiativo* fornisce il profilo radiale delle variazioni di T all'interno della stella. Si può scrivere:

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{\text{rad}} = -\frac{3\kappa\rho}{4\pi r^2} \frac{L(r)}{4acT^3} \quad (3.33)$$

Essa mostra che l'opacità e il flusso radiativo determinano quanto rapidamente T varia con r .

Utilizzando questa equazione è possibile determinare quando c'è convezione nella stella, utilizzando il seguente *criterio di Schwarzschild*:

$$\text{se } \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} \implies \text{c'è convezione.} \quad (3.34)$$

in particolare, quando il criterio è verificato avverrà la convezione.

3.6.1 Ricavare l'equazione

Per trovare il gradiente radiativo prima di tutto ricaviamo il gradiente di pressione di radiazione, derivando rispetto a r l'espressione (3.4). Si ottiene:

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = \frac{4}{3}aT^3 \frac{dT}{dr}$$

d'altra parte, il gradiente di radiazione dipende anche dall'*opacità* e dal *flusso* di radiazione. Si ricorda che l'*opacità* κ era stata introdotta nell'eq. (2.10) del par. 2.2.4, mentre il flusso, F_{rad} , è definito dall'eq. (2.21). In particolare, senza dare ulteriori specificazioni, possiamo esprimere il gradiente della pressione di radiazione come:

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c}F_{\text{rad}}$$

e mettendo insieme le ultime due relazioni si ottiene:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa\rho}{T^3} F_{\text{rad}}$$

con

$$F_{\text{rad}} = \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

da cui segue immediatamente la (3.33). Come già detto, l'equazione fornisce il profilo radiale delle variazioni di T con r e mostra come l'*opacità* κ e il flusso radiativo F_{rad} influiscono sulla rapidità di variazione di T con r .

Il gradiente di temperatura ha un impatto cruciale sul meccanismo preponderante di trasporto di energia all'interno della struttura stellare. Introduciamo brevemente i meccanismi di trasporto di energia.

3.6.2 Meccanismi di trasporto di energia

I tre meccanismi di trasporto in una stella sono il *trasporto radiativo*, *convettivo* e *conduttivo*. Di seguito ne sono elencate le principali proprietà:

Trasporto conduttivo: I principali responsabili di questo meccanismo sono gli *elettroni* ed è efficiente solo se il gas è *degenere*. Infatti, in condizione di non degenerazione, ovvero se il gas è perfetto, il libero cammino medio è molto piccolo e un elettrone cede subito energia. Come visto, nel caso di un gas degenere (par. 3.4.5) le celle dello spazio delle fasi sono impacchettati in modo che i livelli energetici più bassi sono pieni, quindi gli elettroni percorrono una grande distanza prima di cedere energia (la quale deve essere di un ordine pari al primo livello energetico libero, che tendenzialmente sarà alto). In questo caso il trasporto conduttivo è efficiente e in questo modo è possibile trasportare l'energia dall'interno verso l'esterno. Tuttavia, questo meccanismo di trasporto non è quello preponderante.

Trasporto radiativo: Esso è dovuto alla radiazione trasportata dai *fotoni*.

Trasporto convettivo: Con la convezione ho un rimescolamento del *gas* e dunque di porzioni di gas con composizioni chimiche diverse. Siccome la struttura chimica è cruciale per stabilire la struttura stellare e la sua evoluzione, è importante capire se è in atto questo meccanismo di trasporto energetico.

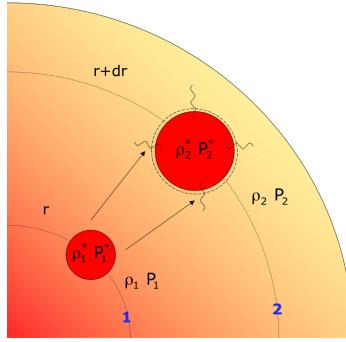


Figura 3.7: Raffigurazione del criterio di Schwarzschild. Se la bolla si sposta dalla posizione 1 e 2, può avvenire la convezione solamente se $\rho_2^* < \rho_2$. In caso contrario siamo in presenza di equilibrio stabile e la bolla viene respinta verso la posizione iniziale.

3.6.3 Criterio di Schwarzschild

Come evidenziato nel paragrafo precedente, stabilire se sia in corso un meccanismo di convezione è importante per realizzare dei corretti modelli della struttura stellare e dunque per capire correttamente l'evoluzione di una stella. Come discriminante si può utilizzare il *criterio di Schwarzschild* (equazione (3.34)). Semplicemente si tratta di un confronto tra il *gradiente radiativo* di temperatura e un valore di riferimento chiamato *gradiente adiabatico*. In particolare, nelle regioni in cui il gradiente radiativo è maggiore del gradiente adiabatico, è in corso la convezione, come stabilito dalla (3.34). Il gradiente adiabatico dipende dai calori specifici del gas e si può scrivere:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (3.35)$$

dove

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{5}{3}$$

Per capire il criterio (3.34) consideriamo (figura 3.7) una bolla di gas in una posizione 1 a distanza r rispetto al centro, di densità ρ_1^* e pressione interna P_1^* . Siano ρ_1 e P_1 rispettivamente la densità e la pressione dell'ambiente circostante la bolla in quella posizione. Immagino che essa si sposti in una posizione 2 a distanza $r + dr$ dal centro, avendo una nuova densità ρ_2^* e una nuova pressione interna P_2^* . Analogamente a prima, siano ρ_2 e P_2 rispettivamente la densità e la pressione dell'ambiente circostante la bolla in quella posizione. Ho convezione nella stella solo se l'equilibrio è instabile, perché in caso di equilibrio stabile la bolla tenderebbe a tornare nella posizione originaria 1 e non sarebbe possibile lo spostamento di porzioni di gas nella stella. La condizione di equilibrio dipende dal rapporto della densità interna della bolla nel secondo caso, ρ_2^* , e la densità del gas circostante, ρ_2 . In particolare:

$$\text{se } \rho_2^* > \rho_2 \implies \text{la bolla torna nella posizione iniziale 1.} \quad (3.36a)$$

$$\text{se } \rho_2^* < \rho_2 \implies \text{la bolla continua ad andare verso l'alto.} \quad (3.36b)$$

ed è semplice tradurre le espressioni (3.36) in termini dei gradienti di temperatura, ottenendo (3.34).

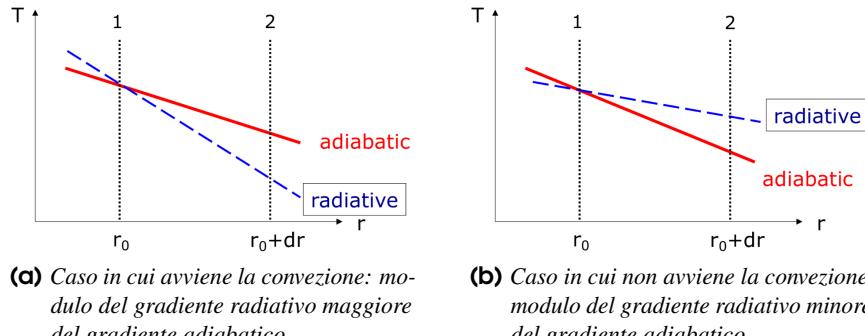


Figura 3.8: Applicazione del criterio di Schwarzschild nel caso di un gas perfetto.

3.6.4 Esempio per il gas perfetto

Per capire meglio le condizioni (3.36) e il criterio di Schwarzschild (3.34), consideriamo il caso di un gas perfetto, in cui vale la legge (3.6). Si faccia riferimento alla figura 3.8. Consideriamo un caso in cui è possibile la convezione e un caso in cui essa non è possibile

Convezione possibile

Nel caso illustrato nella figura 3.8a la convezione è possibile, infatti in quel caso si ha:

$$\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}}$$

si faccia attenzione al fatto che nel criterio di Schwarzschild (3.34) i gradienti sono espressi in modulo, quindi bisogna guardare la pendenza in modulo delle rette. In particolare, la bolla di gas di sposta da r_0 fino a $r_0 + dr$ e nella posizione $r_0 + dr$ possiede una temperatura (curva rossa – profilo adiabatico) maggiore dell’ambiente circostante (curva blu – profilo radiativo). Per un gas perfetto, secondo la (3.6), a fissata pressione, a una maggiore temperatura corrisponde una densità più bassa. Quindi la bolla possiede una densità più bassa dell’ambiente circostante e tende a continuare il suo moto verso l’esterno. È dunque possibile la convezione.

Convezione impossibile

Nel caso illustrato nella figura 3.8b la convezione *non* è possibile, infatti in quel caso si ha:

$$\text{abs} * \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} < \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}}$$

In particolare, la bolla di gas di sposta da r_0 fino a $r_0 + dr$ e nella posizione $r_0 + dr$ possiede una temperatura (curva rossa – profilo adiabatico) minore dell’ambiente circostante (curva blu – profilo radiativo). Per un gas perfetto, secondo la (3.6), a fissata pressione, a una minore temperatura corrisponde una densità più alta. Quindi la bolla possiede una densità più alta dell’ambiente circostante e viene respinta verso la posizione iniziale a r_0 .

Si faccia riferimento alla figura 3.8b

3.6.5 Gradiente di pressione e scala logaritmica

Il criterio di Schwarzschild è spesso scritto usando il gradiente di temperatura riferito alla *pressione* invece che al raggio e in scala logaritmica. Questo perché la temperatura è intimamente connessa

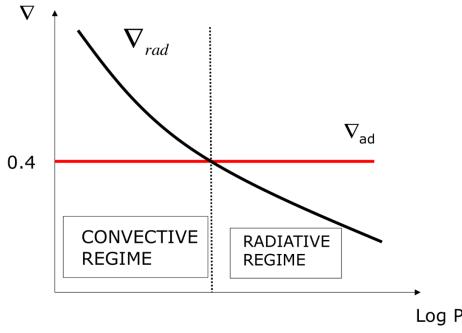


Figura 3.9: Raffigurazione del criterio di Schwarzschild utilizzando ∇ .

con la pressione.

$$\frac{dT}{dP} \frac{P}{T} = \frac{d\log T}{d\log P} \equiv \nabla \quad (3.37)$$

L'impiego di ∇ semplifica la formulazione del criterio. Ad esempio, possiamo riscrivere l'espressione del gradiente adiabatico (3.35) nella seguente maniera:

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{P}{T} \frac{dr}{dP} \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} \Big|_{ad}$$

da cui:

$$\nabla_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \quad (3.38)$$

che è semplicemente un numero. In particolare, con $\gamma = 5/3$ si ottiene $\nabla_{ad} = 0.4$ ed è possibile riscrivere il criterio di Schwarzschild (3.34) nella seguente maniera:

$$\text{se } \nabla_{rad} > \nabla_{ad} \implies \text{c'è convezione.} \quad (3.39)$$

Si faccia riferimento alla figura 3.9 per un sunto del criterio.

3.7 Opacità

L'opacità è una misura della resistenza della materia al flusso radiativo, ovvero alla transizione della radiazione. È una sorta di sezione d'urto per unità di massa.

$$\kappa = \kappa(\rho, T) \quad [\kappa] = \text{cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

L'equazione dell'opacità in un modello stellare si può riassumere nel seguente set di equazioni, che saranno sviscerate nei paragrafi seguenti:

$$\kappa = \kappa(\rho, T) \begin{cases} \kappa_{BF} \propto 10^{25} Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ \kappa_{FF} \propto 10^{22} (X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ \kappa_E \propto 0.2(1+X) \end{cases} \quad (3.40)$$

I fenomeni che possono interferire con il passaggio di radiazione in una stella sono essenzialmente dovuti alla capacità degli elettroni di assorbire e/o deviare i fotoni, e si possono riassumere nei seguenti processi:

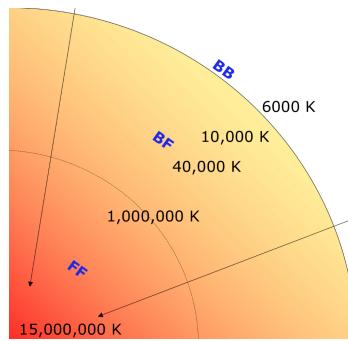


Figura 3.10: Processi di assorbimento preponderanti in funzione della distanza dal centro. Andando verso il centro della struttura le temperature aumentano, quindi il numero di atomi completamente ionizzati e il numero di elettroni liberi aumenta. In superficie domina il BB perché le temperature sono minori e gli atomi sono ancora non ionizzati. Andando verso il centro inizia a dominare il BF perché alcuni atomi sono parzialmente ionizzati. Verso l'interno domina il FF perché quasi tutti gli atomi sono ionizzati.

- Assorbimento bound-bound (BB)
- Assorbimento bound-free(BF)
- Assorbimento free-free (FF)
- Scattering elettronico (E)

i quali sono spiegati di seguito. La rilevanza di questi processi dipende principalmente da tre fattori:

- La composizione chimica del gas (X, Y, Z).
- La temperatura.
- La densità.

In particolare, è la temperatura a stabilire il libello di ionizzazione e dell'eccitazione di ogni specie chimica. In figura 3.10 sono riportati i diversi processi di assorbimento in funzione della distanza dal centro stellare. È difficile una modellizzazione di tali processi, pertanto si utilizzano delle relazioni approssimate, note con il nome di *leggi di Kramer*, che saranno mostrate nei seguenti paragrafi.

3.7.1 Assorbimento bound-bound (BB)

Un elettrone legato a un atomo, in uno stato di energia E_1 , cattura un fotone e passa a uno stato eccitato E_2 *rimanendo legato all'atomo*. Il fotone catturato ha energia:

$$h\nu_{BB} = E_2 - E_1 \quad (3.41)$$

questo effetto *non* è rilevante negli interni stellari, siccome la maggior parte degli atomi sono completamente ionizzati a causa delle elevate temperature (fig 3.10). Tuttavia questo fenomeno è cruciale nell'*atmosfera* stellare ed è responsabile della formazione delle righe di assorbimento spettrale.

In particolare, tale fenomeno avviene a una determinata lunghezza d'onda, ovvero:

$$\lambda_{12} = h \frac{c}{E_2 - E_1} \quad (3.42)$$

Come detto, essendo questo fenomeno non rilevante negli interni stellari, non viene considerato nell'equazione dell'opacità.

3.7.2 Assorbimento bound-free (BF)

Un elettrone legato a energia E_1 cattura un fotone e diventa libero, con energia E_∞ , producendo uno ione. Il fotone catturato ha energia

$$h\nu_{BF} = E_\infty - E_1 > \chi_{\text{ion}} \quad (3.43)$$

dove χ_{ion} è l'energia di ionizzazione dell'atomo.

Tale fenomeno, dunque avviene a una lunghezza d'onda maggiore di una determinata soglia, ovvero:

$$\lambda < \lambda_{\text{soglia}} \quad (3.44)$$

Rispetto all'atmosfera, in cui domina il BB, andando verso il centro inizierà progressivamente a dominare il BF a causa dell'aumento della temperatura e del fatto che alcuni atomi iniziano a essere parzialmente ionizzati (fig 3.10). Si noti come *non ci siano limitazioni alla lunghezza d'onda a cui tale fenomeno può avvenire*. La corrispondente legge di Kramer, che compare nella (3.40), si può scrivere nella seguente maniera:

$$\kappa_{BF} \propto 10^{25} Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (3.45)$$

L'opacità κ_{BF} dipende da Z perché, ovvero dall'abbondanza degli elementi più pesanti dell'elio, perché affinché il BF possa avvenire, è necessario che siano ancora presenti degli atomi con elettroni legati. A causa della ionizzazione dell'idrogeno e dell'elio verso gli interni stellari, si possono trovare elettroni legati solamente negli elementi più pesanti.

3.7.3 Assorbimento free-free (FF)

Un elettrone libero, di energia E_1 , cattura un fotone e la sua energia aumenta a E_2 . Il fotone catturato ha energia:

$$h\nu_{FF} = E_2 - E_1 \quad (3.46)$$

senza restrizioni come nei casi precedenti, perché il sistema non è legato. Questo processo è dominante negli interni stellari, perché lì la temperatura è così elevata che gli atomi sono tutti ionizzati (fig 3.10). Non ci sono limitazioni alla lunghezza d'onda in cui tale fenomeno può avvenire. La corrispondente legge di Kramer, che compare nella (3.40), si può scrivere nella seguente maniera:

$$\kappa_{FF} \propto 10^{22}(X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (3.47)$$

L'opacità κ_{FF} dipende da X e Y perché il FF dipende dagli elettroni liberi e l'idrogeno e l'elio, che sono ionizzati alle alte temperature degli interni stellari, sono di gran lunga gli elementi più abbondanti, e dunque anche i principali fornitori di elettroni liberi.

3.7.4 Scattering elettronico (E)

Un elettrone libero interagisce con un fotone, cambiando al propria traiettoria. Non si tratta di un reale assorbimento, ma agisce comunque come un effetto di opacità perché essendo il fotone deviato dal fascio, l'intensità del fascio stesso diminuisce. La corrispondente legge di Kramer, che compare nella (3.40), si può scrivere nella seguente maniera:

$$\kappa_E \propto 0.2(1+X) \quad (3.48)$$

Si noti come *non ci sia dipendenza dalla temperatura T e dalla densità ρ* e come esso *dipende solo da X* , poiché l'idrogeno è l'elemento più abbondante. Lo scattering diventa dominante solamente ad alte temperature, perché per gli altri processi $\kappa \propto T^{-3.5}$.

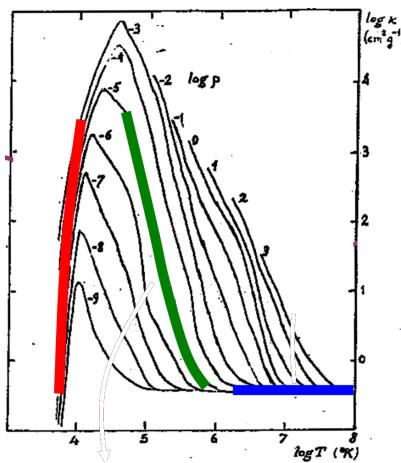


Figura 3.11: Diagramma $\log \kappa - \log T$. Sono rappresentate curve a diverso $\log \rho$. A $T \sim 10^4$ K, curva rossa, l'opacità aumenta perché è in atto la ionizzazione dell'idrogeno. Nella curva verde si ha $\kappa \propto T^{-3.5}$ come indicato dalla eq. (3.40). Nella curva blu domina lo scattering elettronico e l'opacità è costante come atteso.

3.7.5 Recap

Per riassumere l'andamento dell'opacità rappresentato dall'eq. (3.40), facciamo riferimento alla figura 3.11. Possiamo notare che, in generale, l'opacità aumenta con la densità, infatti si ha $\kappa \propto \rho$. Inoltre si può notare che per temperature nelle regioni a $T \sim 10^4$ K l'opacità aumenta, infatti questa è la finestra di temperatura che corrisponde alla *ionizzazione dell'idrogeno*. Ovviamente, se l'idrogeno *non* è ionizzato, allora i processi BF, FF ed E sono impossibili, poiché necessitano di elettroni liberi. D'altra parte, all'aumentare della temperatura, dunque al grado di ionizzazione degli elementi presenti nella struttura stellare, l'opacità decresce secondo (3.40), con $\kappa \propto T^{-3.5}$. Ad altissime temperature, invece, domina lo scattering elettronico e la curva si appiattisce, come ci si aspetta.

3.8 Produzione di energia tramite reazioni termonucleari

Le *reazioni termonucleari* sono la principale fonte di energia in una stella. La *fusion* di elementi leggeri in elementi più pesanti produce non solo *energia*, ma anche *nuovi elementi*. Come nel caso dell'opacità i processi sono molto complessi e utilizzeremo solamente delle equazioni approssimate. Si faccia attenzione al fatto che i processi di fusione termonucleare coinvolgono solamente i *nuclei* dell'atomo, perché le temperature sono così elevate ($T > 10^6$ K) che tutti gli atomi si possono considerare completamente ionizzati.

L'equazione di produzione di energia attraverso *reazioni termonucleari* appare nella seguente maniera:

$$\epsilon = \epsilon(X, \rho, T) \begin{cases} \epsilon_{PP} = \epsilon_1 \rho X^2 T_6^\alpha & \alpha \in [3.5 - 6] \\ \epsilon_{CN} = \epsilon_2 \rho X X_{CN} T_6^\beta & \beta \in [13 - 20] \\ \epsilon_{3\alpha} = \epsilon_3 \rho^2 Y^3 T_8^\gamma & \gamma \in [20 - 30] \end{cases} \quad (3.49)$$

È dapprima necessario introdurre dei concetti di base sulla reazioni termonucleari.

3.8.1 Ripasso di fisica nucleare

Numero atomico e numero di massa

Nel presente paragrafo si farà una veloce rassegna dei concetti di fisica nucleare utili per proseguire il discorso.

Ogni elemento chimico è univocamente identificato dal suo *numero atomico* Z , corrispondente al numero di protoni nel nucleo. Il *peso atomico* A è il numero totale di nucleoni, ovvero la somma di protoni e neutroni. Gli *isotopi* hanno stesso Z ma diverso A .

Difetto di massa

Nelle reazioni di fusione termonucleare, nuclei di elementi leggeri si fondono tra loro generando nuclei di elementi più pesanti (Z più alto) ed energia. Pertanto, a causa della nota relazione massa-energia, la somma delle masse dei nuclei leggeri che fondono tra loro è maggiore della massa del nucleo più pesante che viene generato, e si può scrivere:

$$E = \Delta mc^2 \quad (3.50)$$

Guardando la carta dei nuclidi che rappresenta l'energia di legame per nucleone (fig. 3.12), possiamo stabilire che è grazie alle reazioni di fusione del nucleo delle stelle che sono stati prodotti tutti gli elementi più pesanti dell'elio ($Z = 2$) fino al ferro ($Z = 26$), come verrà riassunto successivamente.

Energia di legame

All'interno del nucleo atomico, i nucleoni sono legati tra loro dalla *forza forte*, la quale agisce su distanze estremamente piccole ($\sim 10^{-12}$ cm – 10^{-13} cm). La massa totale del nucleo è sempre minore della somma di tutti i nucleoni che lo costituiscono. Questo si spiega attraverso il difetto di massa, eq. (3.50), e permette di definire l'*energia di legame* come:

$$E(Z, N) = [Zm_p + Nm_n - m(Z, n)] c^2 \quad (3.51)$$

con Z il numero di protoni, N il numero di neutroni, $m_p = 1.672 \times 10^{-24}$ g la massa del protone, $m_n = 1.675 \times 10^{-24}$ g la massa del neutrone e $m(Z, n)$ la massa del nucleo. Questo significa che quando si forma un nuovo nucleo stabile, una certa frazione di massa viene trasformata in energia secondo la (3.51), ovvero, $E(Z, N)$ è l'energia che viene prodotta quando si forma un nuovo nucleo stabile, ovvero $E(Z, N)$ è l'energia che bisogna fornire ad un nucleo per spaccarlo nei singoli nucleoni che lo costituiscono.

Energia di legame per nucleone dei nuclidi stabili

Consideriamo l'*energia di legame media per nucleone*, plottata in fig. 3.12, e corrispondente, secondo la (3.51) a $E(Z, N)/A$. Dalla figura possiamo trarre alcune considerazioni generali:

- ci sono configurazioni nucleari particolarmente stabili quali ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$...
- a parte queste eccezioni, l'energia di legame media per nucleone, E/A , ha un andamento regolare. Aumenta rapidamente con il numero di nucleoni fino ad un valore dell'ordine degli 8 Mev per poi diminuire assai lentamente (*proprietà di saturazione*).
- i nuclei più stabili sono il ${}^{56}\text{Fe}$ e il ${}^{62}\text{Ni}$. Ciò significa che i nuclei pesanti alla sua destra possono raggiungere configurazioni più stabili (B/A più elevato) diminuendo il numero di nucleoni A , ovvero frazionandosi in nuclei più piccoli. Mentre i nuclei leggeri alla sua sinistra possono raggiungere configurazioni più stabili (B/A più elevato) aumentando A , ovvero aggregandosi in nuclei più grandi. Detto in altri termini ciò significa che le reazioni di fissione dei nuclei pesanti e quelle di fusione dei nuclei leggeri sono esoenergetiche ovvero producono energia qualora si sia in grado di innescarle.

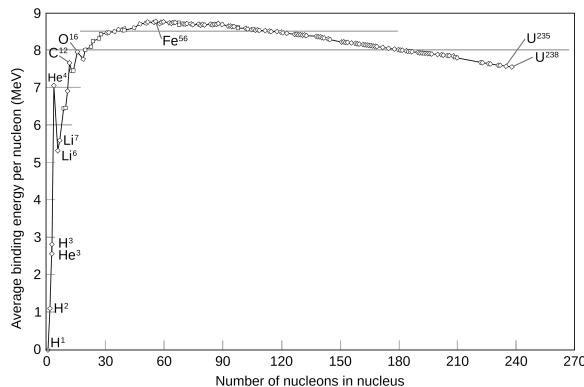


Figura 3.12: Energia di legame media per nucleone. Si noti come ${}^4\text{He}$ sia particolarmente stabile, fino al ferro domina la fusione e dopo il ferro domina la fissione.

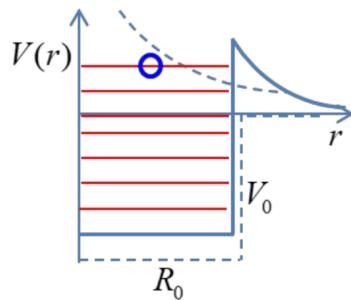


Figura 3.13: Barriera di potenziale. È data dalla sovrapposizione del potenziale attrattivo della forza forte, che agisce per $r < R_0$ e della forza repulsiva Coulombiana, che agisce per $r > R_0$ e vale $E_c = Z_1 Z_2 e^2 / r$.

- dal punto precedente consegue che le reazioni di *fusione dei nuclei leggeri* e *fissione dei nuclei pesanti* costituiscono la doppia opportunità offerta dalla fisica nucleare per la produzione di energia.

Barriera di potenziale ed effetto tunnel

Da un punto di vista *classico* la reazione di fusione avviene se due nuclei riescono ad avvicinarsi a meno della distanza R_0 necessaria per far entrare in gioco le interazioni forti, ovvero solo dopo aver superato la barriera di potenziale in figura 3.13.

Facendo una stima molto rossa, possiamo trovare che la barriera di potenziale è circa 1000 volte superiore all'energia termica media delle particelle, quindi, anche ad elevatissime temperature, è molto improbabile che le reazioni possano avvenire. Dal punto di vista quantistico questo si spiega con il così detto *effetto tunnel*.

Principali catene di fusione termonucleare nelle stelle

Di seguito sono elencate le principali catene di fusione nelle stelle, le quali saranno approfondite nei successivi paragrafi:

Catena PP Processo di bruciamento dell'idrogeno. È un processo di cattura protonica. Avviene per $T \simeq 10^7 \text{ K}$.

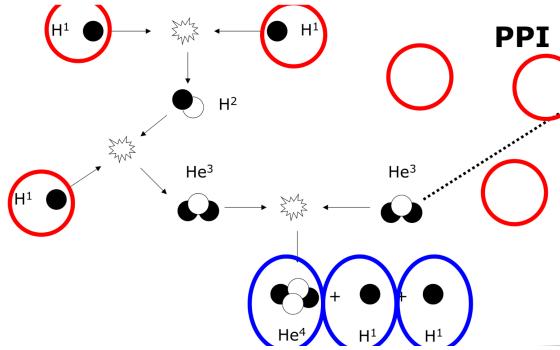


Figura 3.14: Catena protone-protone (PPI).

Catena CNO Processo di bruciamento dell'idrogeno. È un processo di cattura protonica. Avviene per $T \simeq 1.8 \times 10^7$ K.

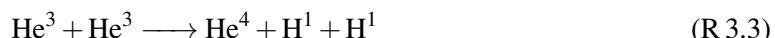
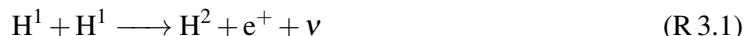
Catena 3-alpha Processo di bruciamento dell'elio. Avviene per temperature $T \simeq 1.5 \times 10^8$ K.

Cattura alpha Il carbonio e materiali più pesanti catturano particelle α per produrre materiali più pesanti. Avviene per $T > 5 \times 10^8$ K.

3.8.2 Catena protone-protone

Catena PPI

La catena *protone-protone PPI* è rappresentata in fig. 3.14. È una reazione di bruciamento dell'idrogeno e dà elio. Può essere scritta nella seguente maniera:



ovvero, in definitiva da 4 H ottengo 1 He⁴, e siccome 1 He⁴ pesa meno di 4 H, dall'eq. (3.50) possiamo stabilire che la reazione è *esotermica*.

Facciamo una stima dei contributi energetici. Il neutrino ν porta un contributo energetico *negativo*, perché avendo una scarsa interazione con la materia tendono a sfuggire dalla struttura stellare. Senza aggiungere ulteriori specificazioni, si ricordi che, tenuti in considerazione tutti i contributi, l'energia totale prodotta dalla reazione PPI è:

$$E_{PPI} = 26.2 \text{ MeV} = 4.2 \times 10^{-5} \text{ erg} \quad (3.52)$$

Senza scendere troppo nei dettagli, evidenziamo che il *tempo scala* della reazione R 3.1 è $t_1 = 1.4 \times 10^9$ yr, il tempo scala della reazione R 3.2 è $t_2 = 6$ s e il tempo scala della reazione R 3.3 è $t_3 = 10^6$ yr. Dunque, ricordando che la *probabilità* che avvenga la reazione è proporzionale all'inverso del tempo scala, possiamo stabilire che la prima reazione è molto improbabile che avvenga, mentre la seconda è molto probabile. In particolare, concentriamoci sulla prima reazione (R 3.1). Essa trasforma due protoni liberi (H) in un nucleo costituito da un protone e un neutrone (H^2). Significa che uno dei due protoni si è trasformato in neutrone. Quindi, affinché la reazione possa avvenire, è necessario che ci sia un *decadimento* β , espresso dalla seguente equazione:



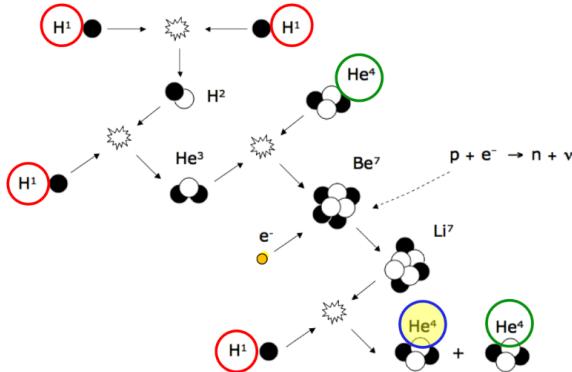


Figura 3.15: Catena protone-protone (PPII).

Tuttavia, il decadimento β^+ per un protone libero è essenzialmente impossibile, poiché la massa del protone è minore della massa del neutrone (eq. (3.50)). Nonostante ciò, nel nucleo delle stelle tale reazione può avvenire poiché ci sono tantissimi protoni, dunque anche se la probabilità è bassissima, questa è compensata dall'elevato numero.

D'altra parte, il *decadimento β^-* , secondo il quale un neutrone decade in protone, è un processo spontaneo, in quanto il suo tempo scala è dell'ordine di 800 s e tende ad eliminare tutti i neutroni liberi:



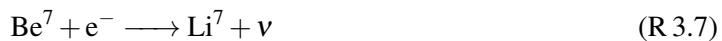
Tuttavia negli interni stellari possono comunque esserci neutroni liberi, i quali contribuiscono alla formazione di elementi più pesanti, come vedremo successivamente.

Catena PPII e PPIII

Consideriamo le reazioni R 3.1 e R 3.2. Con una probabilità $P_1 = 69\%$ può avvenire, successivamente, la reazione R 3.3, dando origine alla catena PPI. Tuttavia, non si tratta dell'unica possibilità. Infatti, con una probabilità residua del 31%, può avvenire la seguente reazione:



Se inizialmente prevale la PPI, dopo un po' che questa è attiva l'ambiente si popola di He^2 e può facilmente avvenire la R 3.6, che produce energia. Se è attivo tale canale, quasi sempre la catena prosegue con la PPII (fig. 3.15), con una probabilità $P_2 = 99.7\%$, nella seguente maniera:



In particolare, nella R 3.9 il Be^8 è instabile e si spacca in due nuclei di He^4 , producendo energia, a causa della sua elevata stabilità, come si nota anche in fig. 3.12.

Con una probabilità residua di $P_3 = 0.3\%$, la R 3.6 può proseguire con una catena PPIII (fig. 3.16), nella seguente maniera:



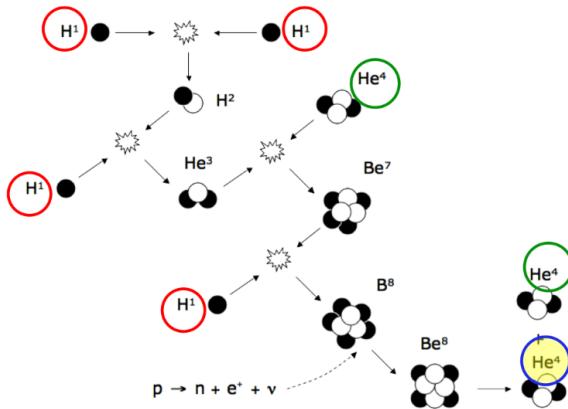


Figura 3.16: Catena protone-protone (PPIII).



In tutti i casi, tuttavia, brucio 4 H per generare 1 He⁴, producendo un'energia di ~ 20 Mev. In particolare si ha: $E_{\text{PPI}} = 26.2$ Mev, $E_{\text{PPII}} = 25.7$ Mev e $E_{\text{PPIII}} = 19.3$ Mev.

3.8.3 Catena CNO

Un'altra possibile catena di bruciamento dell'idrogeno, è la così detta *catena CNO*, detta anche *CN-NO*. A differenza della precedente (par. 3.8.2), richiede la presenza di carbonio, azoto e ossigeno. Si noti che questi ultimi elementi *non* sono prodotti dalla catena di reazione, ma devono essere già presenti nel gas, agendo come catalizzatori. Il ciclo principale della catena è raffigurato in fig. 3.17 e può essere sintetizzato dalle seguenti reazioni:



In totale il ciclo utilizza 4 H e genera 1 He⁴. Facendo un computo delle energie, si ha:

$$E_{\text{CNO}} = 25 \text{ MeV} \simeq 2 \times 10^{-5} \text{ erg} \quad (3.53)$$

dello stesso ordine di grandezza dell'energia delle catene PP (3.52). Senza approfondire tutti i tempi scala, si sottolinea che quello della reazione R 3.16 è dell'ordine di 3.2×10^8 yr, dividendo la catena in un ramo rapido (da R 3.13 a R 3.16) e un ramo lento (da R 3.16 a R 3.18 e nuovamente R 3.13). Quindi, nelle stelle in cui avviene il ciclo CNO mi aspetto che, se il materiale processato va verso la superficie per convezione, deve esserci una variazione delle abbondanze chimiche. In particolare, mi aspetto che l'abbondanza del carbonio diminuisca e quella dell'azoto e dell'ossigeno aumentino. Infine, sottolineiamo che questa reazione è un prototipo di reazione di cattura protonica.

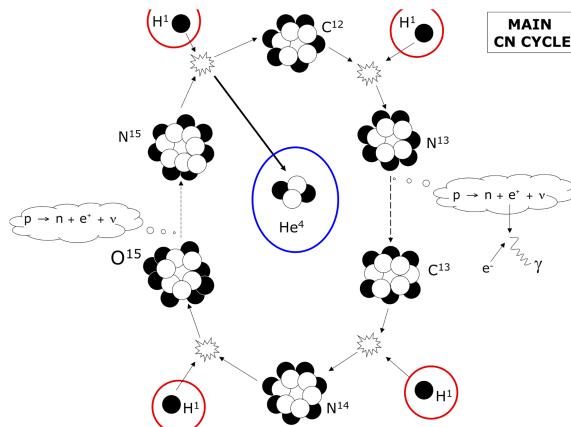


Figura 3.17: Catena CN–NO. Partendo da C^{12} , la parte sinistra rappresenta il ramo rapido, mentre la parte destra, che parte da N^{14} rappresenta il ramo lento.

3.8.4 Il problema dell'elio

Dopo aver visto alcune catene di bruciamento dell'idrogeno, soffermiamoci sul *problema dell'elio*. Esso consiste nel fatto che l'abbondanza di He che si misura nell'universo è troppo alta per essere spiegata solo in base al bruciamento dell'idrogeno negli interni stellari.

Considerato che nell'universo si misura un'abbondanza di He pari a

$$Y \sim 0.24 - 0.28 \quad (3.54)$$

Stimiamo, quindi, quanto He può essere stato prodotto dalla stella da quando si è formato l'universo, ovvero in un tempo di Hubble ($t_H \sim 13$ Gyr), facendo un conto per la Via Lattea, della quale conosciamo la massa M_G e la luminosità L_G

$$M_G \sim 10^{12} M_\odot \quad M_G \sim 10^{11} L_\odot$$

e supponendo che tutta la luminosità della Galassia venga dal bruciamento di idrogeno in elio e che sia rimasta sempre costante. In questo modo dovrei sovrastimare il valore reale. Ricordando che la luminosità è l'energia prodotta per unità di tempo (par. 2.2.2), per L_G , in un tempo t_H si trova un'energia:

$$E_{\text{tot}} \simeq L_G t_H \sim 1.6 \times 10^{62} \text{ erg}$$

che rappresenta l'energia totale prodotta dal bruciamento di H in He da quando si è formata la Galassia. Considerato che l'energia di legame di un nucleo di He è

$$E_{\text{b}, \text{He}} \sim 4.5 \times 10^{-5} \text{ erg}$$

e che può essere pensata come l'energia prodotta dal bruciamento di 4 nuclei di H in un nucleo di He, possiamo trovare il numero di atomi di He⁴ che si sono formati dalla formazione della Galassia:

$$N_{\text{He}} = \frac{E_{\text{tot}}}{E_{\text{b}, \text{He}}} \simeq 3.5 \times 10^{66}$$

Possiamo pensare questo numero come il numero di reazioni di bruciamento di idrogeno che sono avvenute. Ora, dalla massa di un atomo di elio, $m_{\text{He}} \sim 6.64 \times 10^{-24} \text{ g}$, possiamo ricavare la massa totale di He prodotta in un tempo di Hubble:

$$M_{\text{He}} = N_{\text{He}} m_{\text{He}} \sim 2.4 \times 10^{43} \text{ g}$$

Infine, usando M_G possiamo trovare la frazione in massa di elio prodotta dalle Via Lattea da quando l'universo si è formato:

$$Y = \frac{M_{\text{He}}}{M_G} \sim 0.01 \quad (3.55)$$

Confrontando la (3.54) con la (3.55), notiamo come l'abbondanza di elio misurata sia circa 20 volte maggiore di quella stimata. Questo significa che una frazione rilevante di He deve essere stata prodotta da un altro processo, molto più efficiente e primordiale: si tratta del *Big Bang*. Infatti, un punto rilevante che esso riesce a spiegare è la formazione di *deuterio* (H^2), processo molto difficile nelle stelle a causa della carenza di neutroni liberi, che decadono spontaneamente in protoni per il decadimento β^- (R 3.5). Tuttavia, nei primi minuti successivi al Big Bang, c'erano molti neutroni liberi disponibili, e dunque la seguente catena di reazioni spiega la formazione di una grande quantità di elio subito dopo il Big Bang:

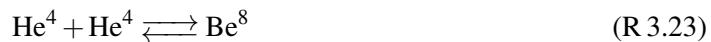


Tale *nucleosintesi primordiale* si è fermata all'elio e non ha prodotto elementi più pesanti, poiché le reazioni successive di cattura neutronica o protonica avrebbero prodotto elementi instabili. In definitiva, riteniamo che gran parte dell'elio sia stato prodotto durante il Big Bang, mentre gli elementi più pesanti siano prodotti negli interni stellari.

3.8.5 Catena 3-alpha

La *catena 3- α* è una catena di bruciamento dell'elio in carbonio. Si ricordi che una particella α non è altro che un nucleo di elio. Vediamo quando tale catena si innesca.

Quando il nucleostellare è costituito quasi interamente da elio, le reazioni di bruciamento dell'idrogeno cessano e la struttura va fuori dall'equilibrio idrostatico. In questa situazione prevale la forza gravitazionale che fa contrarre il nucleo, provocando un conseguente aumento della temperatura. Quando le temperature raggiungono $T \sim 1.5 \times 10^8 \text{ K}$, può avvenire la reazione di fusione termonucleare di He. Le due reazioni salienti della catena 3- α sono le seguenti:



Come si può notare, la reazione R 3.23 è reversibile, e in particolare, a causa dell'elevata instabilità di Be^8 , appena questo si forma, in un tempo molto breve tende a spaccarsi nuovamente in 2He^4 . Tuttavia, in questo caso l'abbondanza di He è così elevata che Be^8 , prima di decadere, si fonde con un altro He^4 , secondo la reazione R 3.24.

In definitiva 2He^4 vengono trasformati in un C^{12} . Facendo un computo dell'energia si trova:

$$E_{3\alpha} = 7.3 \text{ MeV} \simeq 1.2 \times 10^{-5} \text{ erg} \quad (3.56)$$

e possiamo notare che viene prodotta molta meno energia dei processi di bruciamento dell'idrogeno, (3.52) e (3.53). In particolare, l'energia per unità di massa prodotta dal bruciamento dell'elio è $\sim 10\%$ di quella prodotta dal bruciamento dell'idrogeno. Questo ha un impatto sui *tempi di*

evoluzione stellare: la fase in cui viene bruciato idrogeno nel nucleo, detta *sequenza principale* è molto più lunga della fase in cui viene bruciato elio nel nucleo, detta *red clump o horizontal branch*.

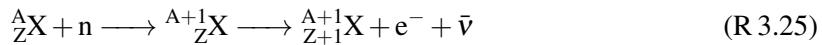
A questo punto, se la struttura è termoregolata (gas non degenere), esaurito l'elio, possono continuare processi di bruciamento di materiali sempre più pesanti, fino al silicio, che genera ferro. Infatti, dopo il ferro (fig. 3.12) i processi di fusione sono endotermici. Non ci soffermeremo sui dettagli di tali reazioni, tuttavia vogliamo richiamare l'attenzione sul fatto che durante tutte queste reazioni vengono prodotte tante particelle α . Che fine fanno?

3.8.6 Processi di cattura alpha

Le particelle α possono essere catturate da particelle più pesanti generando elementi pesanti attraverso reazioni che necessitano di temperature più basse della fusione. Gli elementi prodotti da queste reazioni sono detti *elementi- α* e sono sostanzialmente tutti gli elementi dal carbonio al silicio. In generale, è più conveniente per un atomo pesante catturare una particella α che fondersi con essa, perché la temperatura di innescio è più bassa. Ovviamente, posso arrivare fino al ferro. E per gli elementi più pesanti?

3.8.7 Processi di cattura neutronica

Attraverso processi di *cattura neutronica* si spiega la presenza di elementi più pesanti del ferro. Essi consistono nella cattura di un neutrone da parte di un elemento, il quale rimane lo stesso elemento chimico (Z non varia), ma diventa un suo isotopo (il numero di massa A aumenta di 1). Tale isotopo spesso è instabile e decade in un elemento che ha un numero atomico maggiore. Si può riassumere nella seguente reazione:



La catena può proseguire in questo moto, tuttavia non scendiamo nei dettagli. In generale, le catture elettroniche si dividono in catture *lente*, che producono *elementi s*, e catture *rapide*, che producono *elementi r*. Per capire in quale dei due casi si è, si compara il tempo di decadimento dell'isotopo con il tempo di acquisizione del neutrone.

Affinché le reazioni di cattura neutronica possano avvenire, è necessario che ci siano neutroni liberi che possano essere catturati, tuttavia, per il decadimento β^- (R 3.5), il quale è molto veloce e probabile, un neutrone tende a decadere in protone. Le principali sorgenti di neutroni per i processi s sono i processi α (par. 3.8.6), i quali avvengono nel *ramo asintotico delle giganti*, come vedremo in seguito. Per i processi r, invece, la fonte principale di neutroni liberi è la fotodisintegrazione del ferro, che avviene a temperature alte durante l'esplosione di una supernova di tipo II, di cui parleremo successivamente.

3.8.8 Tasso di produzione di energia

I processi visti finora, riassunti in tab. 3.1 e i cui prodotti sono raffigurati in fig. 3.18, rappresentano la fonte principale di energia in una stella. Ci proponiamo ora di calcolare il *tasso di produzione di energia* ϵ per una stella, ovvero l'energia prodotta per unità di massa e unità di tempo.

Essa può essere stimata così:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^r E_i \frac{N_i}{\text{gs}} = \sum_{i=1}^r E_i \frac{N_i}{\text{cm}^3 \text{s}} \frac{\text{cm}^3}{\text{g}} \quad (3.57)$$

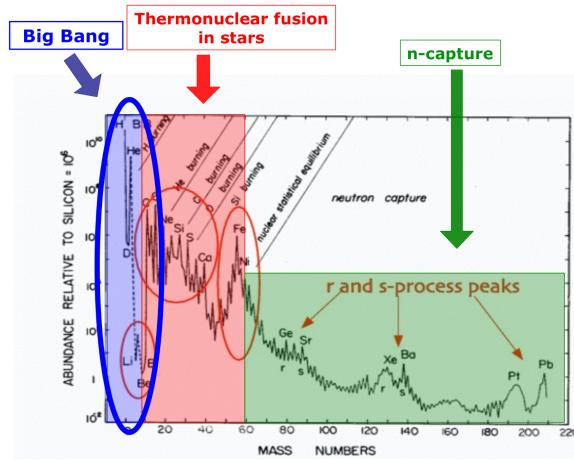


Figura 3.18: Abbondanze degli elementi divise per i processi che li hanno generati in maniera preponderante.

Tabella 3.1: Principali reazioni nucleari.

Processo	Temperatura (K)	Tempo scala (yr)
Elementi leggeri	$\sim 10^6$	$\sim 10^5$
Catena PP	$\sim 10^7$	$\sim 10^{10}$
Catena CNO	$\sim 10^7$	10^9
Catena 3- α	$> 10^8$	10^7
Bruciamento carbonio	$\sim 10^9$	10^5
Bruciamento Ossigeno	$> 10^9$	10^5
Processo s	$> 10^8$	$10^3\text{--}10^7$
Processo r	$> 10^{10}$	10 s–100 s

dove con $i \in [r]$ si sta sommando sulle varie reazioni della catena in considerazione, E_r è l'energia prodotta da ciascuna reazione, $N_r/\text{cm}^3\text{s}$ è il numero di reazioni per unità di volume e di tempo e cm^3/g rappresenta l'inverso della densità della materia stellare. Essa dipende da:

- Carburante disponibile
- Temperatura (le reazioni si innescano dopo una certa soglia)
- Densità

In un modello stellare si esprime ε in maniera approssimata, in base alle proprietà macroscopica della struttura. In particolare possiamo scrivere:

$$\varepsilon_{PP} = \varepsilon_1 \rho X^2 T_6^{V_{PP}} \quad V_{PP} \in [3.5 - 6] \quad (3.58a)$$

$$\varepsilon_{CN} = \varepsilon_2 \rho X X_{CN} T_6^{V_{CN}} \quad V_{CN} \in [13 - 20] \quad (3.58b)$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_3 \rho^2 Y^3 T_8^{V_{3\alpha}} \quad V_{3\alpha} \in [20 - 30] \quad (3.58c)$$

dove T_6 significa che la temperatura è espressa in unità di 10^6 K , mentre T_8 significa che la temperatura è espressa in unità di 10^8 K . X è l'abbondanza dell'idrogeno, Y l'abbondanza dell'elio e X_{CN} l'abbondanza di carbonio e azoto. Si noti la mostruosa dipendenza dalla temperatura delle (3.58), il che evidenzia che reazioni termonucleari stabili possono avvenire solamente in ambienti termoregolati, ovvero in cui il gas può essere considerato perfetto. Infatti, in ambienti degeneri, in cui la pressione non dipende dalla temperatura, siccome piccole variazioni di energia producono una variazione enorme della creazione di energia, la struttura può esplodere. Come si può notare, queste sono le espressioni che compaiono nell'equazione (3.49).

3.9 Riassunto sul modello stellare.

Con le 7 equazioni presentate nel par. 3.1 abbiamo un sistema di 7 equazioni in 7 incognite per descrivere la struttura di una stella. In particolare, le incognite sono:

- La pressione P
- La massa M
- La densità ρ
- La luminosità L
- L'opacità κ
- Il tasso di produzione di energia ε

Queste equazioni descrivono l'internostellare di una stella, dandomi in output la sua *luminosità*. L'altro parametro di cui ho bisogno è la *temperatura superficiale* della stella. Per ottenerla ho bisogno di un modello della sua atmosfera.