

# Clustering the interstellar medium

Data Mining and Machine Learning in Astronomy

Andrea Hidalgo

SUMMER RESEARCH INTERNSHIP, UNIVERSITY OF WESTERN ONTARIO

GITHUB.COM/LAURETHTEX/CLUSTERING

This research was done under the supervision of Dr. Pauline Barmby with the financial support of the MITACS Globalink Research Internship Award within a total of 12 weeks, from June 16th to September 5th of 2014.

*First release, August 2014*



# Indice

<b>1</b>	<b>Setting the stage</b>	<b>7</b>
1.1	<b>Introduzione</b>	7
1.2	<b>Grandezze e unità di misura</b>	8
1.2.1	Lunghezze .....	8
1.2.2	Massa .....	8
1.2.3	Tempo .....	8
1.2.4	Posizione sulla sfera celeste .....	10
<b>2</b>	<b>Meccanismi di emissione</b>	<b>15</b>
2.1	<b>Introduzione all'astrofisica osservativa</b>	15
2.2	<b>Equazione del trasporto radiativo</b>	17
2.2.1	Intensità specifica o brillanza .....	17
2.2.2	Luminosità .....	17
2.2.3	Relazione tra intensità e luminosità .....	18
2.2.4	L'equazione e le sue soluzioni .....	19
2.2.5	Trascuro la sorgente di background .....	21
2.2.6	Radiazione termica .....	22
2.3	<b>Corpo nero</b>	<b>22</b>
2.3.1	Legge di Planck .....	22
2.3.2	Legge di spostamento di Wien .....	24
2.3.3	Legge di Stefan-Boltzmann .....	24
2.4	<b>Flusso</b>	<b>25</b>
2.5	<b>Magnitudine</b>	<b>26</b>
2.5.1	Magnitudine apparente .....	26

2.5.2	Legame tra magnitudine apparente e flusso . . . . .	26
2.5.3	Magnitudine assoluta . . . . .	27
2.5.4	Modulo di distanza . . . . .	27
<b>2.6</b>	<b>Colore</b>	<b>28</b>
2.6.1	Definizione di colore . . . . .	28
2.6.2	Colore e temperatura . . . . .	29
2.6.3	Estinzione . . . . .	30
2.6.4	Modulo di distanza e reddening . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Struttura stellare</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelli stellari</b>	<b>33</b>
<b>3.2</b>	<b>Equilibrio idrostatico</b>	<b>34</b>
<b>3.3</b>	<b>Continuità di massa</b>	<b>35</b>
<b>3.4</b>	<b>Equazione di stato</b>	<b>36</b>
3.4.1	Pressione di radiazione . . . . .	36
3.4.2	Pressione del gas ideale . . . . .	37
3.4.3	Peso molecolare medio . . . . .	37
3.4.4	Degenerazione . . . . .	39
3.4.5	Principio di indeterminazione e di esclusione . . . . .	40
3.4.6	Distribuzione di Fermi-Dirac . . . . .	41
3.4.7	L'equazione in breve . . . . .	43
3.4.8	Contributo dominante . . . . .	44
<b>3.5</b>	<b>Equazione del bilancio energetico</b>	<b>46</b>
3.5.1	Ricavare l'equazione . . . . .	46
3.5.2	Teorema del viriale . . . . .	46
<b>3.6</b>	<b>Gradiente radiativo</b>	<b>48</b>
3.6.1	Ricavare l'equazione . . . . .	48
3.6.2	Meccanismi di trasporto di energia . . . . .	49
3.6.3	Criterio di Schwarzschild . . . . .	49
3.6.4	Esempio per il gas perfetto . . . . .	50
3.6.5	Gradiente di pressione e scala logaritmica . . . . .	51
<b>3.7</b>	<b>Opacità</b>	<b>52</b>
3.7.1	Assorbimento bound-bound (BB) . . . . .	53
3.7.2	Assorbimento bound-free (BF) . . . . .	54
3.7.3	Assorbimento free-free (FF) . . . . .	54
3.7.4	Scattering elettronico (E) . . . . .	54
3.7.5	Recap . . . . .	55
<b>3.8</b>	<b>Reazioni Termonucleari</b>	<b>55</b>
3.8.1	Ripasso di fisica nucleare . . . . .	56
3.8.2	Catena protone-protone . . . . .	58
3.8.3	Catena CNO . . . . .	61
3.8.4	Il problema dell'elio . . . . .	62
3.8.5	Catena 3-alpha . . . . .	63

3.8.6	Processi di cattura alpha . . . . .	63
3.8.7	Processi di cattura neutronica . . . . .	64
3.8.8	Tasso di produzione di energia . . . . .	64
<b>3.9</b>	<b>Riassunto sul modello stellare.</b>	<b>65</b>
<b>4</b>	<b>Modello di atmosfera stellare</b>	<b>67</b>
<b>4.1</b>	<b>Profondità ottica</b>	<b>67</b>
4.1.1	Profondità ottica verticale . . . . .	67
4.1.2	Temperatura effettiva . . . . .	68
<b>4.2</b>	<b>Righe Spettrali</b>	<b>68</b>
4.2.1	Opacità per l'atmosfera stellare . . . . .	68
4.2.2	Continuo spettrale e righe spettrali di assorbimento . . . . .	69
4.2.3	Classificazione spettrale delle stelle . . . . .	69
4.2.4	Equazione di Boltzmann . . . . .	70
4.2.5	Equazione di Saha . . . . .	71
4.2.6	Frazione di atomi attivi . . . . .	72
4.2.7	Analisi delle righe spettrali . . . . .	72
4.2.8	square bracket abundances . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Evoluzione Stellare</b>	<b>77</b>
<b>5.1</b>	<b>Modello di evoluzione stellare</b>	<b>77</b>
5.1.1	Introduzione all'evoluzione stellare . . . . .	77
5.1.2	Diagramma H-R e traccia evolutiva . . . . .	77
<b>5.2</b>	<b>Pre Main Sequence</b>	<b>78</b>
5.2.1	Massa di Jeans . . . . .	78
5.2.2	Initial mass function . . . . .	79
5.2.3	Protostelle e Teorema di Hayashi . . . . .	80
<b>5.3</b>	<b>Main sequence</b>	<b>81</b>
<b>5.4</b>	<b>Post Main Sequence</b>	<b>81</b>
<b>6</b>	<b>Galassie</b>	<b>83</b>
<b>6.1</b>	<b>Classificazione di Hubble</b>	<b>83</b>
6.1.1	Galassie a spirale . . . . .	84
6.1.2	Galassie ellittiche . . . . .	84
6.1.3	Galassie irregolari e peculiari . . . . .	85
6.1.4	Effetti ambientali . . . . .	85
<b>6.2</b>	<b>Spettro di emissione delle galassie</b>	<b>87</b>
6.2.1	Caratteristiche generali . . . . .	87
6.2.2	Gas freddo, gas tiepido e polvere nelle galassie a spirale . . . . .	89

<b>6.3</b>	<b>Struttura delle galassie a spirale</b>	<b>89</b>
<b>6.4</b>	<b>Brillanza superficiale</b>	<b>91</b>
<b>6.5</b>	<b>Dinamica interna</b>	<b>92</b>
6.5.1	Curve di rotazione delle galassie a spirale .....	92
6.5.2	Dispersione delle velocità per galassie ellittiche .....	95
<b>7</b>	<b>Ammassi di galassie .....</b>	<b>97</b>
<b>8</b>	<b>Introduzione alla cosmologia .....</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Appendici .....</b>	<b>101</b>



# 1. Setting the stage

## 1.1 Introduzione

Ci si può fare un'idea degli ordini di grandezza con cui ha a che fare l'astrofisica osservando la tabella 1.1 e 1.2. Quindi risulta ovvio che non è possibile riprodurre le strutture cosmiche in laboratorio, non è possibile andare sulle strutture cosmiche a fare misurazioni e non è neanche possibile seguirne la loro evoluzione temporale. Dunque, la *scienza astrofisica* studia le strutture cosmiche in maniera *indiretta*, in particolare misurando e analizzando la radiazione che raccogliamo con i telescopi e altri strumenti, radiazione proveniente dal *passato* a causa delle grandi distanze cosmiche e del fatto che la velocità della luce è finita. In particolare, possiamo stimare che la radiazione che misuriamo è stata emessa  $\Delta t = D/c$  tempo fa, con  $D$  distanza della sorgente e  $c$  velocità della luce nel vuoto. Inoltre, le misure astrofisiche *non* hanno accesso alla terza dimensione, ovvero alla profondità lungo la linea di vista, ma sono limitate a *proiezioni sul piano del cielo*. È necessario, infine, un *approccio statistico* per comprendere i processi evolutivi degli oggetti cosmicci, a causa del loro tempo di vita elevatissimo rispetto all'intervallo di tempo entro il quale riusciamo a prendere misure. Studiamo, allora, gruppi di oggetti simili, presumibilmente della stessa età, per cercare di capire come questi evolvano nel corso del tempo. Ovviamente l'astrofisica utilizza le *leggi della fisica* per interpretare i dati osservativi e avanzare predizioni teoriche, tramite *modelli e simulazioni*.

**Tabella 1.1:** Parametri principali del Sole

Grandezza	Ordine di grandezza
Raggio	$\sim 6.7 \times 10^{10}$ cm
Massa	$\sim 2 \times 10^{33}$ g
Età	$\sim 1.4 \times 10^{17}$ s
Distanza da noi	$\sim 1.5 \times 10^{13}$ cm

**Tabella 1.2:** Parametri principali della Via Lattea

Grandezza	Ordine di grandezza
Raggio	$\sim 8 \times 10^{22}$ cm
Massa	$\sim 10^{45}$ g
Età	$\sim 3.8 \times 10^{17}$ s
Distanza centro-Sole	$\sim 2.5 \times 10^{22}$ cm

**Tabella 1.3:** Dimensioni di alcune stelle

Stella	Dimensioni
Stella più piccola	$\sim 0.084 R_{\odot}$
Giove	$\sim 0.1 R_{\odot}$
Super giganti rosse	$\sim 2000 R_{\odot}$
Nane bianche	$\sim 6000$ km
Stelle di neutroni	$\sim 10$ km

## 1.2 Grandezze e unità di misura

È necessario introdurre delle nuove grandezze fisiche per lo studio dei fenomeni astrofisici a causa degli ordini di grandezza elevati.

### 1.2.1 Lunghezze

Di seguito sono elencate le unità di misura maggiormente utilizzate per esprimere le lunghezze in astrofisica.

**Raggio solare** Non c'è bisogno di specificare a cosa si riferisce e vale  $R_{\odot} \sim 6.7 \times 10^{10}$  cm. Nella tabella 1.3 sono riportate le dimensioni di alcune stelle, per farsi un'idea degli ordini di grandezza. Si utilizza principalmente per la distanza di stelle e pianeti.

**Unità astronomica** Esprime la distanza media tra Terra e Sole. Vale  $1 \text{ AU} \sim 1.5 \times 10^{13}$  cm. Si utilizza principalmente per indicare distanze riferite al sistema solare e dintorni.

**Anno luce** Rappresenta la distanza che la luce percorre nel vuoto in un anno, si utilizza molto nei libri di divulgazione scientifica ma non in ricerca. Vale  $1 \text{ ly} \sim 9.5 \times 10^{17}$  cm. Nella tabella 1.4 sono riportate le distanze di alcune stelle in anni luce.

**parsec** Indica la distanza alla quale 1 AU sottende un angolo di  $1''$  (*secondo d'arco*), come mostrato in figura 1.1. Vale  $1 \text{ pc} = 3.1 \times 10^{18}$  cm. Nella tabella 1.5 sono riportate le distanze di alcune strutture in parsec. Si utilizza principalmente in astrofisica galattica ed extra-galattica.

**Redshift** Viene utilizzato per indicare distanze dell'universo lontano e in cosmologia.

### 1.2.2 Massa

**Massa solare** Si spiega da sè. Vale  $M_{\odot} = 2 \times 10^{33}$  g. In tabella 1.6 sono presenti alcuni valori indicativi.

### 1.2.3 Tempo

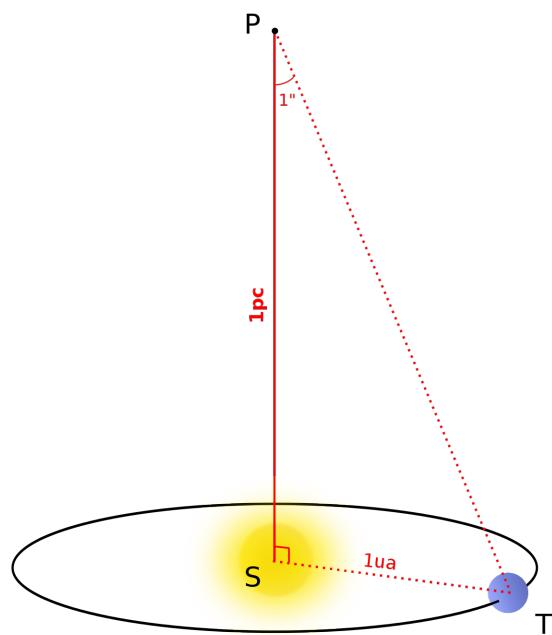
Si utilizzano le solite unità di misura. In tabella 1.7 sono riportati alcuni valori indicativi.

**Tabella 1.4:** Distanza di alcune stelle

Stella	Distanza da noi
Proxima Centauri	4.2 ly
Sirio	8.6 ly
Betelgeuse	600 ly

**Tabella 1.5:** Dimensioni di alcune strutture in parsec

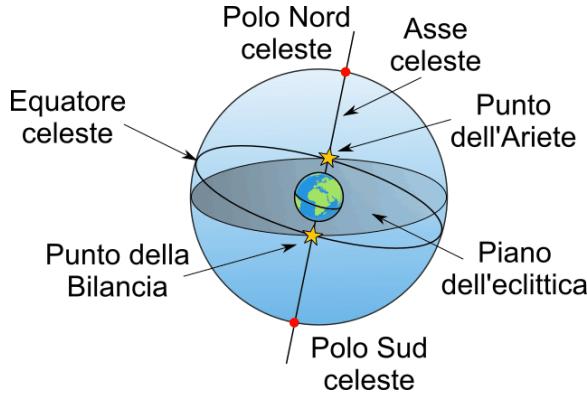
Struttura	Dimensioni
Galassie	~ qualche kpc
Via Lattea	~ 25 kpc
Ammassi di Galassie	~ qualche Mpc
Nubi di Magellano	~ 60 kpc

**Figura 1.1:** Definizione di parsec. 1 pc è la distanza alla quale 1 AU sottende un angolo di  $1''$ **Tabella 1.6:** Masse di alcune strutture

Struttura	Massa ( $M_{\odot}$ )
Stelle	0.08–150
Ammassi stellari	$10^3$ – $10^6$
Galassie	$10^7$ – $10^{13}$
Ammassi di galassie	$10^{14}$ – $10^{15}$

**Tabella 1.7:** Età di alcune strutture

Struttura	Età
Stelle	qualche Myr $\sim 100$ Gyr
Universo	$t_H = 13.7$ Gyr



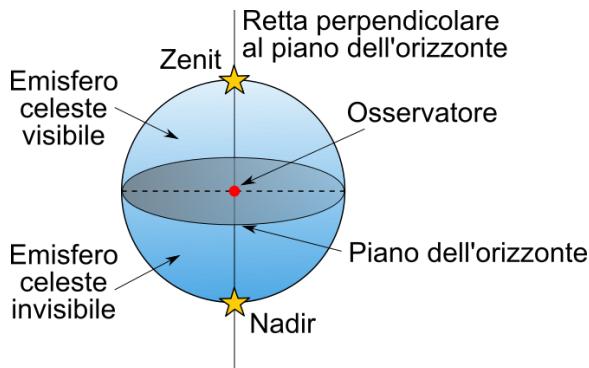
**Figura 1.2:** Sfera celeste. L'eclittica è l'intersezione tra la sfera celeste e il piano orbitale della Terra attorno al Sole. Essa interseca l'equatore terrestre in due punti opposti detti equinozi. Il punto dell'Ariete corrisponde all'equinozio di primavera (21 marzo), detto anche punto vernali.

## Secondo Anno

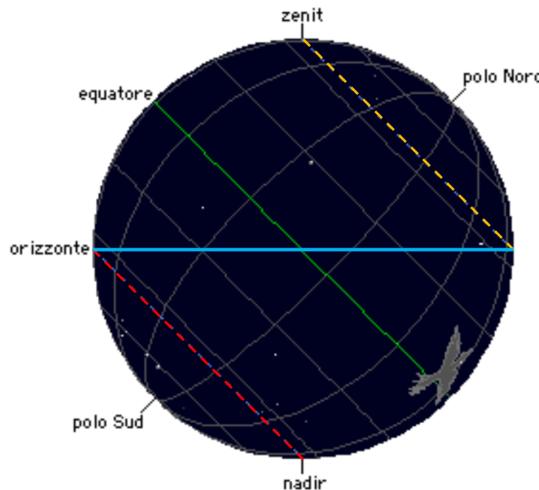
### 1.2.4 Posizione sulla sfera celeste

Per *sfera celeste* si intende una sfera di raggio unitario che dovrebbe essere centrata nell'osservatore, tuttavia, a seconda della convenienza, si considera in centro della sfera celeste coincidente con il *centro della Terra* (sfera geocentrica), con il *centro del Sole* (sfera eliocentrica) oppure con il *baricentro del sistema solare* (sfera baricentrica). Se la distanza del corpo che si sta studiando è grande, scegliere uno dei tre diversi centri è del tutto equivalente. Si definisce *equatore celeste* la proiezione dell'equatore terrestre sulla sfera celeste, si tratta di un cerchio massimo. Si definisce *asse del mondo* la retta passante per il centro  $O$  e perpendicolare al piano equatoriale. L'*asse* del piano definisce sulla sfera celeste due punti che prendono il nome di *poli celesti*. Si faccia riferimento alla figura 1.2. Attualmente la croce del sud è vicina al polo sud terrestre, mentre il polo nord celeste è circa nella direzione della stella polare. A questo punto siamo pronti per introdurre l'*eclittica*: è il cerchio massimo che descrive la traiettoria (apparente) del sole attorno alla Terra, in un anno. Ovvero, è l'intersezione tra la sfera celeste e il piano orbitale della Terra attorno al sole. Essa è inclinata di  $23^{\circ}27'$  rispetto all'equatore celeste e interseca l'equatore in due punti opposti, detti *equinozi*. Questi sono detti *punto della Bilancia* e *punto dell'Ariete*, quest'ultimo chiamato anche *punto vernali* o *equinozio di primavera*.

Lo *Zenith* è il punto del cielo sopra la testa, ovvero la congiungente tra il centro della Terra e l'osservatore, cioè la verticale dell'osservatore. Si faccia riferimento alla figura 1.3. L'*orizzonte astronomico* è il cerchio massimo formato dall'intersezione tra la sfera celeste e il piano perpendicolare alla verticale dell'osservatore. Ovviamente, l'osservatore è in grado di vedere solamente



**Figura 1.3:** Zenith e orizzonte astronomico. L'osservatore vede solo ciò che sta sopra l'orizzonte astronomico. Dipendono da dove è posizionato l'osservatore sulla terra

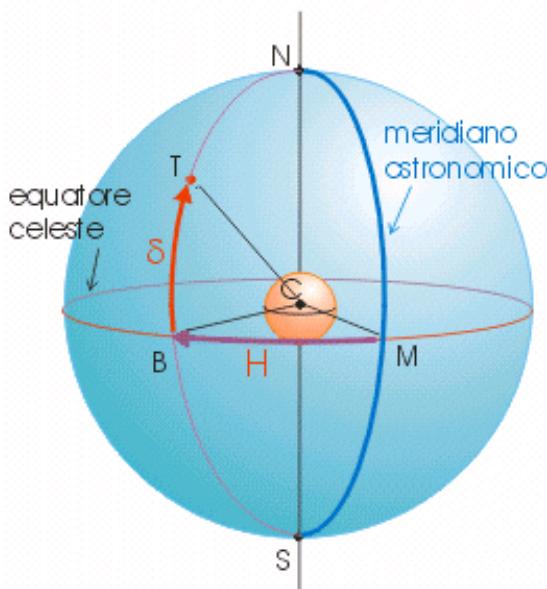


**Figura 1.4:** Come ci appare il movimento delle stelle. Tutte le stelle sopra il cerchio giallo non tramontano mai, quelle sotto il cerchio rosso non sorgono mai e le altre stelle le vediamo sorgere e tramontare

ciò che si trova sopra all'orizzonte astronomico. Si faccia attenzione al fatto che Zenith e orizzonte astronomico, dipendono dalla posizione dell'osservatore sulla Terra.

In ogni punto della Terra, la vedo ruotare attorno all'asse del mondo, che passa per i *poli celesti*, di cui solamente uno è visibile sopra all'orizzonte (si vedi figura 1.2). Come vedo le stelle? Il loro moto avviene da est verso ovest ed è un moto rigido attorno all'asse del mondo. Quindi le distanze relative tra le stelle appaiono fisse, tuttavia ogni stella si muove di moto proprio, solo che le variazioni appaiono piccolissime a noi, che le osserviamo da lontano. Il periodo di rotazione delle stelle definisce il così detto *giorno siderale*. Si faccia riferimento alla figura 1.4 per capire come osserviamo il moto delle stelle.

Come definire un sistema di coordinate sulla sfera celeste? Si ricordi che noi osserviamo delle proiezioni su un piano, quindi sono sufficienti due coordinate. Conviene utilizzare delle coordinate angolari e il sistema di coordinate più utilizzato è il *sistema equatoriale*. Esso usa come cerchi di



**Figura 1.5:**  $\alpha$  è l'ascensione retta, ovvero la distanza angolare tra il punto  $\gamma$  e il meridiano dell'astro,  $\delta$  è la declinazione, ovvero la distanza angolare tra l'equatore celeste e l'astro, lungo il meridiano dell'astro.

riferimento l'equatore celeste e il meridiano\* passante per il punto vernali ( $\gamma$ ). L'origine del sistema di coordinate è nel punto vernali,  $O \equiv \gamma$ , e ha per coordinate angolari l'ascensione della retta e la declinazione (figura 1.5).

**Ascensione retta (RA o  $\alpha$ )** distanza angolare tra il punto  $\gamma$  e il meridiano dell'astro. Si misura in ore, minuti e secondi (hms), varia tra  $0^h$  e  $24^h$ , aumentando verso E.

**Declinazione (Dec o  $\delta$ )** distanza angolare tra l'equatore celeste e l'astro, lungo il meridiano dell'astro. Si misura in gradi, primi e secondi (gradi, arcominuti e arcosecondi), varia tra  $0^\circ$  e  $+90^\circ$  dall'equatore al polo N e tra  $0^\circ$  e  $-90^\circ$  dall'equatore al polo S.

Si faccia attenzione al fatto che i minuti e secondi d'orologio (RA) sono *diversi* dai minuti e secondi d'arco (Dec). Utilizzando:

$$1^h = 60^m = 3600^s \quad 1^\circ = 60' = 3600'' \quad 24^h = 360^\circ$$

si trova che:

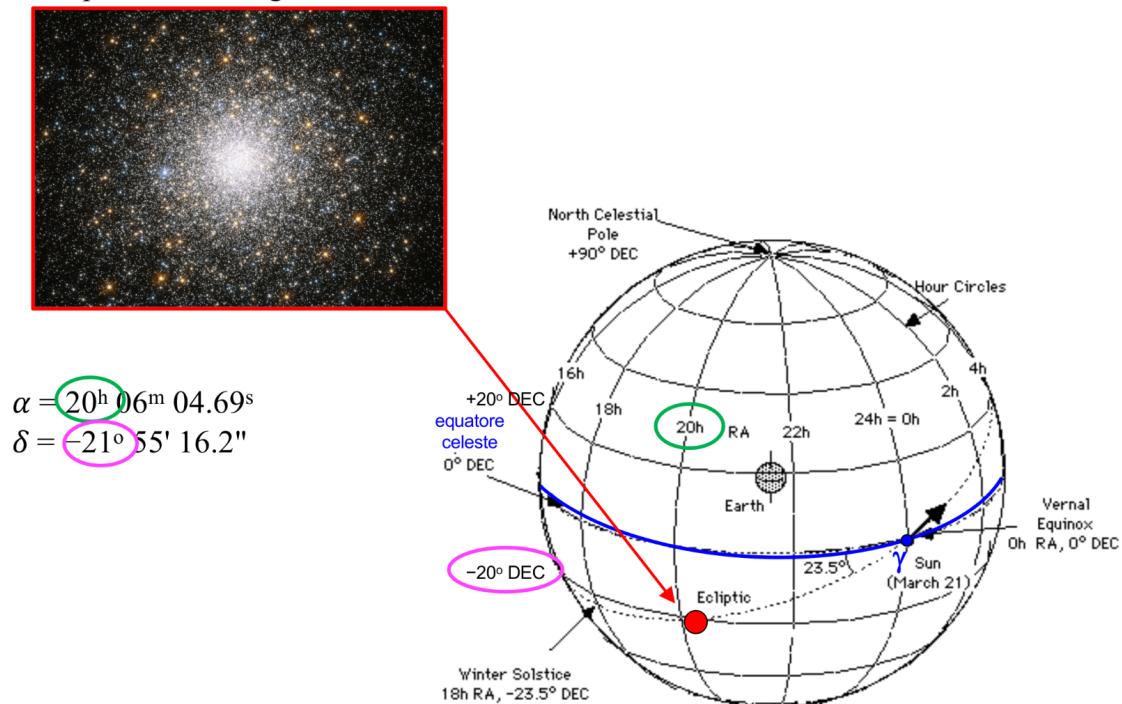
$$1^h = 15^\circ \quad 1^m = 15' \quad 1^s = 15''$$

Si guardi la figura 1.6 per un esempio sull'utilizzo di tale sistema di coordinate.

---

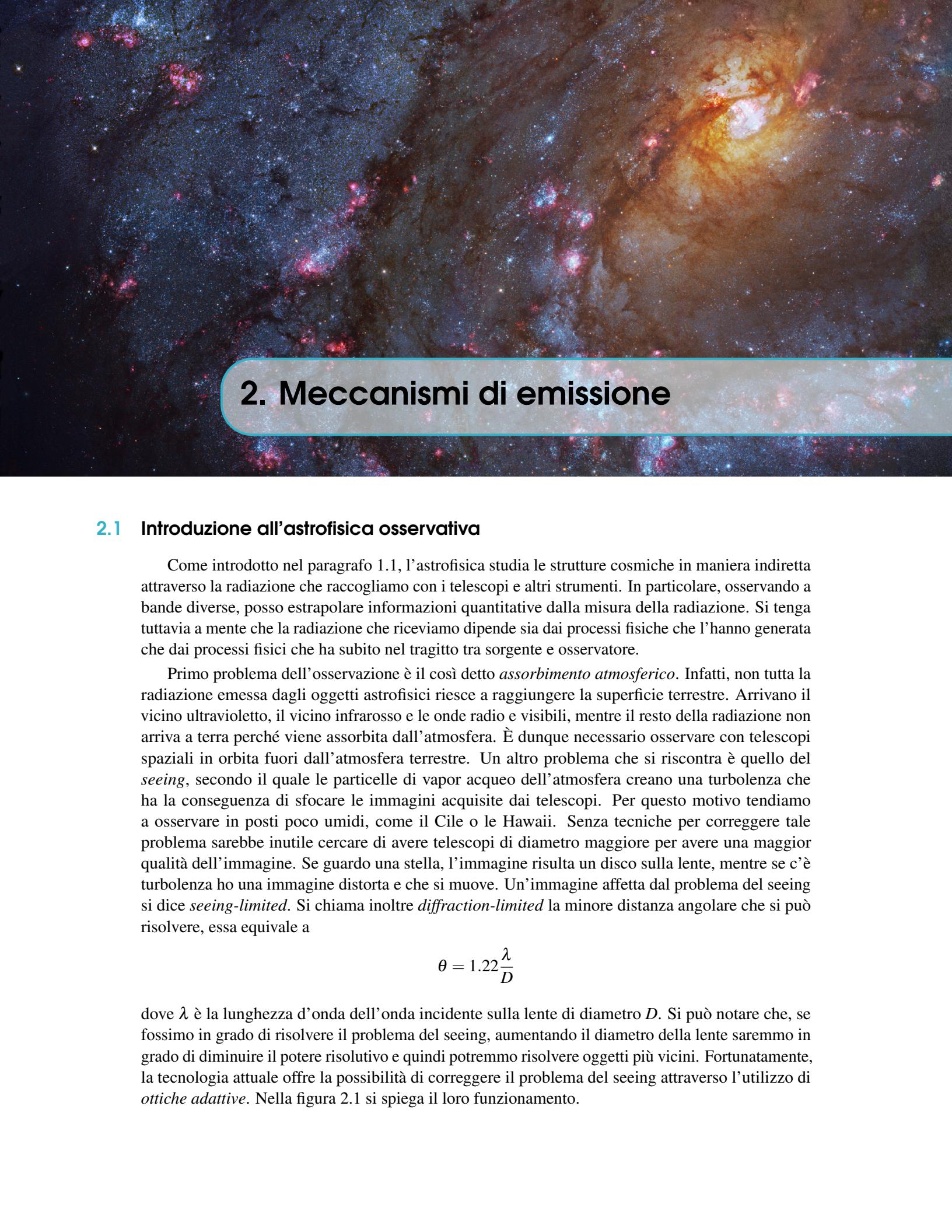
\*Un meridiano è un cerchio perpendicolare all'equatore.

Esempio: ammasso globulare M75



**Figura 1.6:** Esempio di impiego delle coordinate del sistema equatoriale.





## 2. Meccanismi di emissione

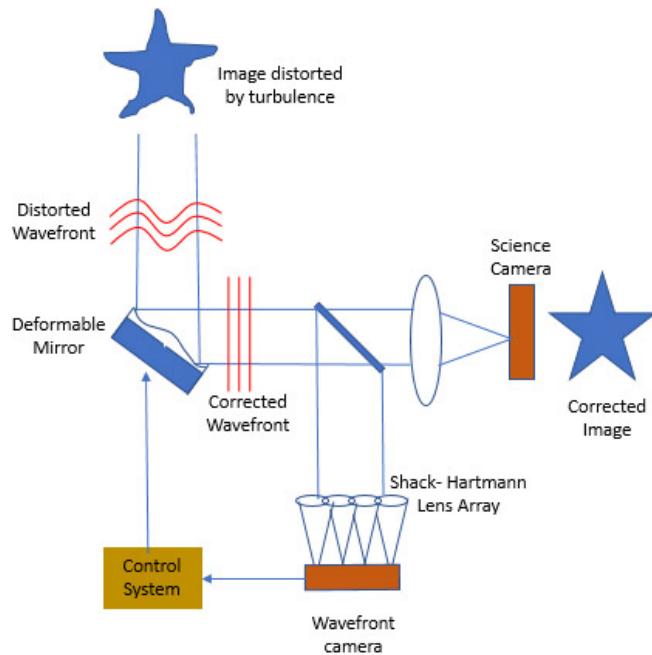
### 2.1 Introduzione all'astrofisica osservativa

Come introdotto nel paragrafo 1.1, l'astrofisica studia le strutture cosmiche in maniera indiretta attraverso la radiazione che raccogliamo con i telescopi e altri strumenti. In particolare, osservando a bande diverse, posso estrapolare informazioni quantitative dalla misura della radiazione. Si tenga tuttavia a mente che la radiazione che riceviamo dipende sia dai processi fisiche che l'hanno generata che dai processi fisici che ha subito nel tragitto tra sorgente e osservatore.

Primo problema dell'osservazione è il così detto *assorbimento atmosferico*. Infatti, non tutta la radiazione emessa dagli oggetti astrofisici riesce a raggiungere la superficie terrestre. Arrivano il vicino ultravioletto, il vicino infrarosso e le onde radio e visibili, mentre il resto della radiazione non arriva a terra perché viene assorbita dall'atmosfera. È dunque necessario osservare con telescopi spaziali in orbita fuori dall'atmosfera terrestre. Un altro problema che si riscontra è quello del *seeing*, secondo il quale le particelle di vapor acqueo dell'atmosfera creano una turbolenza che ha la conseguenza di sfocare le immagini acquisite dai telescopi. Per questo motivo tendiamo a osservare in posti poco umidi, come il Cile o le Hawaii. Senza tecniche per correggere tale problema sarebbe inutile cercare di avere telescopi di diametro maggiore per avere una maggior qualità dell'immagine. Se guardo una stella, l'immagine risulta un disco sulla lente, mentre se c'è turbolenza ho una immagine distorta e che si muove. Un'immagine affetta dal problema del seeing si dice *seeing-limited*. Si chiama inoltre *diffraction-limited* la minore distanza angolare che si può risolvere, essa equivale a

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

dove  $\lambda$  è la lunghezza d'onda dell'onda incidente sulla lente di diametro  $D$ . Si può notare che, se fossimo in grado di risolvere il problema del seeing, aumentando il diametro della lente saremmo in grado di diminuire il potere risolutivo e quindi potremmo risolvere oggetti più vicini. Fortunatamente, la tecnologia attuale offre la possibilità di correggere il problema del seeing attraverso l'utilizzo di *ottiche adattive*. Nella figura 2.1 si spiega il loro funzionamento.



**Figura 2.1:** Principio di funzionamento delle ottiche adattive. Un fronte d'onda distorto incide su uno specchio deformabile (con pistoncini idraulici che si allungano o contraggono), la luce passa attraverso un sistema che la manda a un sistema (waveform camera) che controlla se l'immagine della stella è soggetta a turbolenza oppure no, se è distorta (ovvero soggetta a turbolenza), dice ai pistoncini idraulici come deforma lo specchio iniziale per annullare tale effetto.

Per calcolare la deformazione da applicare alla lente per correggere il problema del seeing, si utilizza una *stella guida*, che deve essere una stella molto brillante. Siccome non sempre è presente una stella molto brillante per effettuare la calibrazione, si utilizza una *stella laser*, ovvero i telescopi sparano fasci laser brillanti che simulano la presenza di una stella brillante attraverso l'eccitazione di atomi di sodio a 90 km di altitudine. Un altro modo per evitare il seeing è banalmente evitare l'atmosfera terrestre, dunque utilizzare telescopi spaziali, che sono solamente diffraction-limited.

Si vuole, infine, sottolineare la differenza tra un telescopio e i suoi strumenti a bordo: ciascun telescopio, infatti, ha diversi strumenti a bordo. Questi si dividono in due categorie particolari: le *photometric cameras*, utilizzate per l'imaging o la spettroscopia, e gli *spettroografi*, utilizzati per la spettrografia, ovvero per misurare lo spettro della radiazione, che può essere in assorbimento o in emissione.

## 2.2 Equazione del trasporto radiativo

Come anticipato nel paragrafo 2.1, per poter interpretare in maniera corrette le misure di radiazione, è necessario studiare i meccanismi di *interazione tra la radiazione e la materia*. Le cause principali di tale interazione sono l'*assorbimento*, lo *scattering*<sup>\*</sup> e l'*emissione*. Questi fenomeni variano a seconda della *frequenza* e questo è il motivo per cui osservare a frequenze diverse porta a informazioni diverse.

L'*equazione del trasporto radiativo* descrive il trasporto di radiazione da parte dei fotoni. Non è l'unico meccanismo di trasporto ma è il più comune nell'universo. In particolare, l'equazione dice come varia l'intensità della radiazione a causa dell'interazione tra la radiazione e la materia. Prima di ricavare l'equazione è necessario introdurre alcune grandezze indispensabili per indicare le energie.

### 2.2.1 Intensità specifica o brillanza

Dato un campo di radiazione, l'intensità specifica  $I_V$  lungo la direzione  $k$ , in un punto qualsiasi  $P$  del campo, è la quantità di energia che, in un intervallo di tempo  $dt$  e nell'intervallo di frequenze  $dv$ , attraversa una superficie infinitesima perpendicolare alla direzione  $k$  ( $dA_{\perp}$ ), entro un angolo solido elementare  $d\Omega$ :

$$I_V = \frac{dE}{dt dv dA d\Omega \cos \theta} \quad [\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1} \text{sr}^{-1}] \quad (2.1)$$

dove  $\theta$  è l'angolo tra la normale a  $dA$  e la direzione  $k$ , ovvero posso scrivere:  $dA_{\perp} = dA \cos \theta$ . Si guardi la figura 2.2.

Si tratta di una proprietà *intrinseca* del campo di radiazione, ovvero della sorgente e si noti come sia definita per unità di frequenza o equivalentemente di lunghezza d'onda.

Si ricordi, inoltre, che il differenziale di angolo solido si scrive:

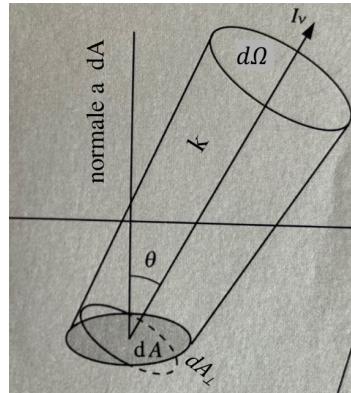
$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.2)$$

Più avanti vedremo uno spettro o *distribuzione spettrale di energia (SED)*. Si tratta della dipendenza dell'intensità dalla lunghezza d'onda (equivolentemente dalla frequenza).

### 2.2.2 Luminosità

La *luminosità bolometrica* ( $L$ ) di una sorgente è definita come la quantità di energia totale emessa dalla sorgente nell'unità di tempo. Si misura in  $\text{erg s}^{-1}$  oppure in *luminosità solari*, dove  $L_{\odot} = 3.8 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$ . Essa è una quantità *intrinseca* della sorgente.

\*deviazione rispetto alla direzione di propagazione originale



**Figura 2.2:** Definizione di intensità specifica.  $dA$  è un'area infinitesima sulla superficie della stella,  $P$  è il punto della superficie della stella,  $k$  è il versore rispetto al quale definisco l'intensità e  $dA_{\perp} = dA \cos \theta$ . La radiazione è portata da un fascio di fotoni, quindi devo considerare un tronco di angolo solido  $d\Omega$ , in cui  $dA$  rappresenta la sezione del fascio.

La *luminosità monocromatica* ( $L_v$ ) è la luminosità per unità di frequenza (o lunghezza d'onda), cioè la quantità di energia totale emessa dalla sorgente nell'unità di tempo e nell'intervallo di frequenze tra  $v$  e  $v + dv$ .  $L_v$  si misura in  $\text{ergs}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ , mentre  $L_{\lambda}$  si misura in  $\text{ergs}^{-1} \text{cm}^{-1}$ . È semplice ricavare la relazione che lega  $L_v$  e  $L_{\lambda}$ , considerando che  $v = c/\lambda$ . Da questo segue che a un aumento di  $\lambda$  corrisponde una diminuzione di  $v$ , ovvero  $L_v dv = -L_{\lambda} d\lambda$  e anche che  $dv/d\lambda = -c/\lambda^2$ . Mentre le due espressioni insieme si ottiene:

$$L_{\lambda} = \frac{c}{\lambda^2} L_v \quad (2.3)$$

Inoltre è semplice ottenere la luminosità bolometrica a partire da quella monocromatica, è infatti sufficiente integrare su tutte le frequenze:

$$L = \int_0^{\infty} L_v dv = \int_0^{\infty} L_{\lambda} d\lambda \quad (2.4)$$

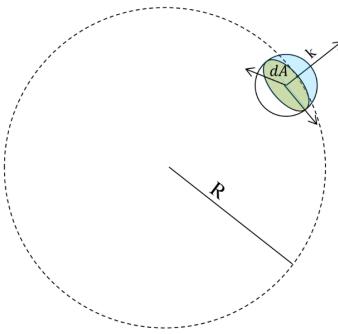
Infatti, per il *teorema di Fourier* è possibile scomporre un'onda nelle sue componenti monocromatiche e nel computo dell'intensità bolometrica considero il contributo di tutte le frequenze.

Ci si può ora chiedere, quale sia la relazione tra l'intensità specifica e la luminosità.

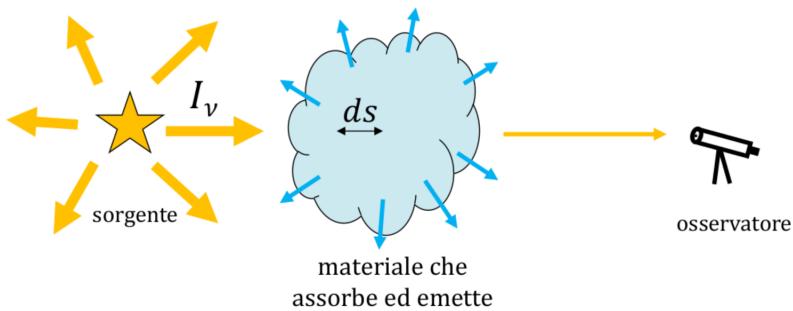
### 2.2.3 Relazione tra intensità e luminosità

Consideriamo un campo di radiazione isotropo, per cui  $I_v$  è uguale per ogni direzione  $k$ . Questo significa che se considero una superficie infinitesima  $dA$ , la quantità di radiazione entrante e uscente da tale superficie è la stessa per ogni superficie. La luminosità della sorgente è la quantità di radiazione *emessa* dalla sorgente nel tempo  $dt$ , cioè la quantità di radiazione che *esce* dalla sorgente stessa, ovvero la quantità di radiazione che *esce da ciascuna superficie*  $dA$ , *integrata sulla superficie totale della sorgente*.

Per ottenere la quantità di radiazione che *esce* da ciascuna superficie infinitesima  $dA$  bisogna integrare sull'angolo solido dell'emisfera *uscente*, ovvero per  $\phi \in [0, 2\pi]$  e  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Si faccia riferimento alla figura 2.3.



**Figura 2.3:** La figura rappresenta un elemento infinitesimo  $dA$  sulla superficie di una stella. Voglio trovare la radiazione uscente, dunque è quella che attraversa la semisfera uscente che ha come cerchio massimo  $dA$ , poi integro in  $dA$  per ottenere la radiazione uscente da tutta la superficie della stella



**Figura 2.4:** Equazione del trasporto radiativo. Si studia la variazione di intensità della radiazione emessa dalla sorgente a seguito dell'interazione con il materiale interposto, che avviene attraverso assorbimenti e emissioni. Lo scattering entra nell'assorbimento, poiché l'effetto è quello di deviare la radiazione, e ciò comporta il fatto che misuro una intensità minore di quella iniziale.

Per ottenere la luminosità totale della sorgente, bisogna integrare su tutta la superficie  $4\pi R^2$ :

$$L_v = I_v \int_0^{4\pi R^2} dA \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin \theta \cos \theta$$

dove  $I_v$  è stato portato fuori dal segno di integrale perché non dipende dagli angoli poiché la sorgente è isotropa. Sviluppando i conti si ottiene un'espressione per la luminosità monocromatica

$$L_v = 4\pi R^2 \pi I_v \quad (2.5)$$

e integrando su tutte le frequenze si ottiene la luminosità bolometrica

$$L = 4\pi R^2 \pi I \quad (2.6)$$

#### 2.2.4 L'equazione e le sue soluzioni

Come già anticipato nel paragrafo 2.2, l'*equazione del trasporto radiativo* descrive la variazione dell'intensità della radiazione a causa dell'interazione tra la radiazione stessa e la materia. Infatti, prima di arrivare all'osservatore, la radiazione attraversa della materia, e l'interazione con tale materia provoca assorbimento ed emissione (figura 2.4). L'equazione si presenta così:

$$dI_\lambda = -k_\lambda \rho I_\lambda dS + j_\lambda dS \quad (2.7)$$

dove appaiono i seguenti termini:

$dI_v$  variazione dell'intensità specifica

$k_v$  coefficiente di assorbimento per unità di massa o opacità ( $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$ ). L'opacità ha le dimensioni di una sezione d'urto per unità di massa ed esprime quanta radiazione viene assorbita per unità di massa e per lunghezza attraversata.

$\rho$  densità di massa del materiale attraversato

$I_v$  intensità in input

$dS$  dimensione infinitesima del materiale attraversato

$j_v$  coefficiente di emissione ( $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-3} \text{Hz}^{-1} \text{-sr}^{-1}$ )

In genere si definisce:

$$\alpha_v = k_v \rho$$

e l'equazione assume la seguente forma:

$$\frac{dI_v}{dS} = -\alpha_v I_n u + j_v \quad (2.8)$$

Si può risolvere l'equazione immediatamente in due casi particolarmente semplici. Nel caso di *pura emissione*, corrispondente a  $\alpha_v = 0$  si ha:

$$\frac{dI_v}{dS} = j_n u \quad I_v = I_v(0) + \int dS j_v$$

In questo caso l'aumento di densità è pari al coefficiente di emissione integrato lungo la linea di vista.

Nel caso di *puro assorbimento*, corrispondente a  $j_v = 0$ , si ha:

$$\frac{dI_v}{dS} = -\alpha_v I_v \quad I_v(S = I_v(0)) e^{-\int \alpha_v dS}$$

In questo caso l'intensità cala come l'esponenziale del coefficiente di assorbimento intergato lungo la linea di vista.

È conveniente introdurre la *profondità ottica*:

$$\tau_v = \int k_v \rho dS \quad (2.9)$$

dove sto integrando lungo il cammino  $dS$ . La profondità ottica in generale dipende anche dalla frequenza ed è un numero puro.

È conveniente introdurre anche la *funzione sorgente*:

$$S_v = \frac{j_v}{k_v \rho} = \frac{j_v}{\alpha_v} \quad (2.10)$$

Essa esprime il rapporto tra il coefficiente di emissione e quello di assorbimento in termini di  $\alpha$  e ha le stesse unità di misura di una intensità specifica.

Con queste due nuove variabili, l'equazione assume una forma particolarmente semplice:

$$\frac{dI_v}{d\tau_v} = -I_v + S_v \quad (2.11)$$

Integriamo l'equazione (2.11). Separo le variabili e riscrivo l'equazione in una forma più comoda:

$$dI_v = -I_v d\tau_v + S_v d\tau_v$$

$$\begin{aligned} dI_v + I_v d\tau_v &= S_v d\tau_v \\ e^{\tau_v} (dI_n u + I_v d\tau_v) &= e^{\tau_v} (S_v d\tau_v) \\ d(e^{\tau_v} I_v) &= e^{\tau_v} dI_v + I_v e^{\tau_v} d\tau_v \\ d(e^{\tau_v} I_v) &= e^{\tau_v} S_v d\tau_v \end{aligned}$$

Ricordando che la profondità ottica è un integrale tra 0 e  $S$  e al centro è nullo, come limiti inferiori dell'integrazione scelgo  $\tau_{v0} = 0$  e  $I_{v0}$ , corrispondente all'intensità iniziale, prima dell'interazione con la materia. Suppongo, inoltre, che la funzione sorgente  $S_v$  non vari con  $\tau$ , ovvero non vari con la distanza.

$$e^{\tau_v} I_v - I_{v0} = \int_0^{\tau_v} e^{\tau'_v} S_v d\tau'_v = S_v (e^{\tau_v} - 1)$$

Moltiplico ambo i membri per  $e^{-\tau_v}$

$$I_v(\tau_v) - I_{v0} e^{-\tau_v} = S_v (1 - e^{-\tau_v})$$

da cui si ottiene:

$$I_v = I_{v0} e^{-\tau_v} + S_v (1 - e^{-\tau_v}) \quad (2.12)$$

Il primo termine è l'intensità iniziale  $I_{v0}$  (prima dell'interazione con la materia) attenuata da un fattore esponenziale (si ricordi che  $\tau \in [1, +\infty]$ ), mentre il secondo termine *non* dipende dall'intensità iniziale (quella emessa dalla sorgente), ma riguarda solamente il materiale interposto<sup>†</sup>. Trascurando il primo termine, questo secondo termine, che rappresenta l'emissione e l'assorbimento, può anche rappresentare una autoemissione e un autoassorbimento nel caso in cui non ci sia una stella "dietro".

### 2.2.5 Trascuro la sorgente di background

Se nell'equazione (2.12) trascuro la sorgente di background, assume la forma:

$$I_v = S_v (1 - e^{-\tau_v}) \quad (2.13)$$

Questo corrisponde, ad esempio, a osservare il mezzo interposto da una direzione perpendicolare rispetto alla stella, come mostrato in figura 2.5. Il primo termine,  $S_v$  rappresenta l'emissione, mentre il secondo termine,  $S_v e^{-\tau_v}$  rappresenta l'auto-assorbimento. Si può studiare questo caso considerando due situazioni limite:

**Regime otticamente spesso** la profondità ottica è molto grande,  $\tau_v \gg 1$ , quindi l'intensità coincide con la funzione sorgente:  $I_v = S_v$

**Regime otticamente sottile** la profondità ottica è molto piccola,  $\tau_v \ll 1$ , quindi l'intensità risulta:

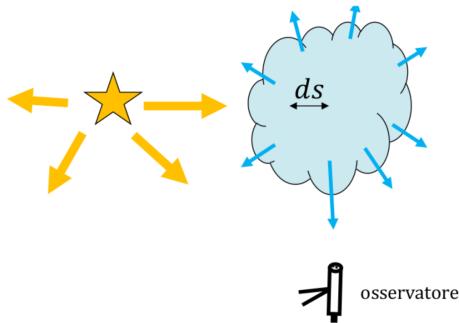
$$I_v = S_v \tau_v$$

Ci si può chiedere come sia fatta la funzione sorgente  $S_v$ , definita tramite eq. (2.10). Essa è diversa a seconda del tipo di radiazione, cioè del processo responsabile del fenomeno di radiazione che sto osservando. Tipicamente i processi di emissione vengono raggruppati in processi termici e processi non termici.

**Radiazione termica** emessa da un corpo in equilibrio termico (o termodinamico). Ovvero materia e radiazione sono accoppiate, ci sono continui processi di emissione e assorbimento di fotoni e il tasso di assorbimento è uguale al tasso di emissione. Esempi di processi termici sono:

---

<sup>†</sup>Il materiale interposto può anche essere l'atmosfera della stella stessa che si osserva, oppure potrebbe essere l'atmosfera della Terra e così via.



**Figura 2.5:** Trascuro la sorgente di background nella soluzione dell’equazione del trasporto radiativo.

- Radiazione di corpo nero (stelle)
- Bremsstrahlung (gas negli ammassi di galassie)

**Radiazione non termica** non sono dovuti a processi di emissione e assorbimento, ma, ad esempio, da moto di cariche elettriche oppure da scattering. Esempio sono:

- Sincrotrone (pulsar)
- Compton (effetto Sinyaev-Zel’dovich)

## 2.2.6 Radiazione termica

Se, nell’approssimazione del paragrafo 2.2.5 considero solamente processi termici, ovvero processi dovuti a continue emissioni e assorbimenti, la funzione sorgente coincide con la *funzione di Planck* (eq. (2.14)), che verrà introdotta nel prossimo paragrafo.

$$S_V = B_{BB}(T)$$

In questo caso, i due regimi di approssimazione si riducono alle seguenti espressioni:

**regime otticamente spesso** ( $\tau_V \gg 1$ )  $I_V = B_{BB}$

**regime otticamente sottile** ( $\tau_V \ll 1$ )  $I_V = B_{BB}\tau_V$

È evidente che, se il regime è *otticamente spesso*, la radiazione termica è *radiazione di corpo nero*.

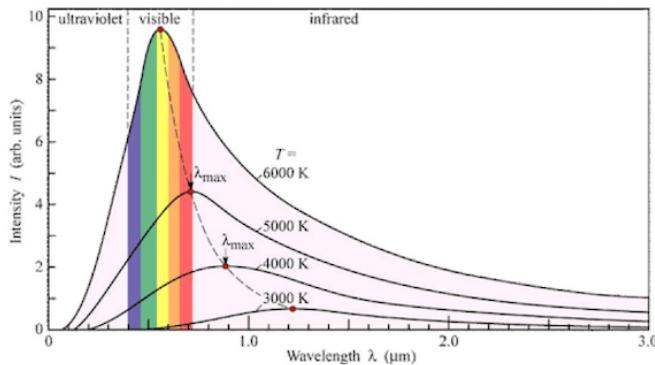
## 2.3 Corpo nero

### 2.3.1 Legge di Planck

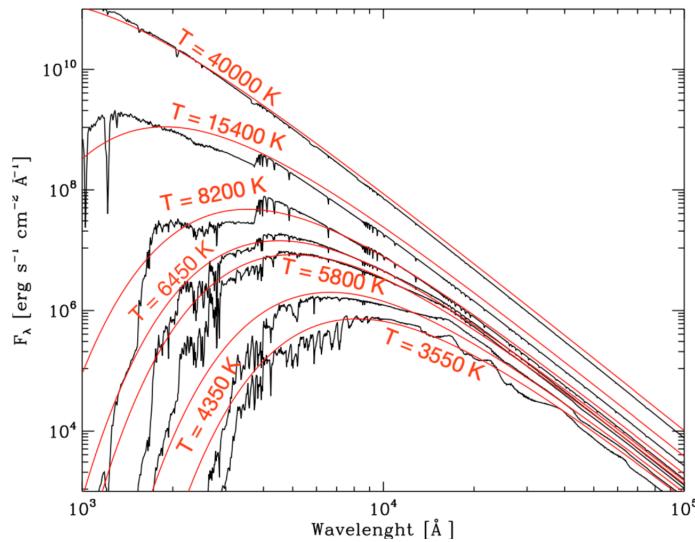
Introdotto da Planck alla fine del 1800, un *corpo nero* è un corpo idealizzato in equilibrio termodinamico che assorbe tutta la radiazione incidente ed emette uno spettro che dipende solo dalla temperatura superficiale  $T$  del corpo stesso. Il tasso di assorbimento e di emissione è lo stesso e la forma dello spettro del corpo segue la legge di Planck:(fig. 2.6):

$$B_{BB}(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{V^3}{e^{\frac{hv}{k_B T}} - 1} \quad (2.14)$$

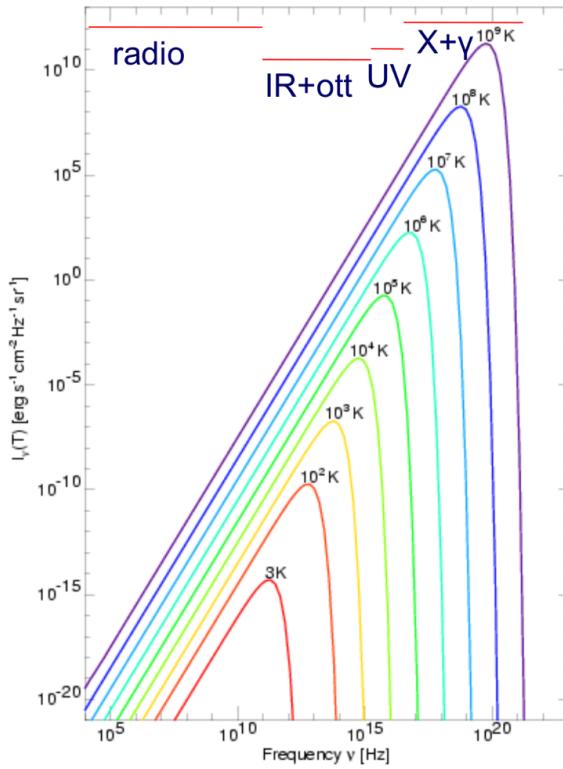
La planckiana dipende sia dalla *frequenza* che dalla *temperatura* del corpo. Le stelle in prima approssimazione si possono considerare dei corpi neri, come si può osservare da un confronto tra dati sperimentali e curve teoriche in figura 2.7. Guardando come sono fatte le curve a diverse lunghezze d’onda si può inferire la *legge di spostamento di Wien*.



**Figura 2.6:** Legge di Planck. Curve in funzione della frequenza plottate a diverse temperature. I picchi seguono la legge di spostamento di Wien.



**Figura 2.7:** Confronto tra i profili teorici di planckiana e dati sperimentali sulle stelle. In prima approssimazione le stelle possono essere trattate come corpi neri.



**Figura 2.8:** Legge di Wien vista in funzione della frequenza. All'aumentare della temperatura, il picco di emissione si sposta verso frequenze più alte.

### 2.3.2 Legge di spostamento di Wien

Più elevata è la temperatura  $T$  del corpo, più il picco di emissione si trova a basse lunghezze d'onda, corrispondenti ad alte frequenze (fig. 2.6):

$$T \lambda_{\max} = 0.29 \text{ cm K} \quad (2.15)$$

Da questa legge è immediato capire perché vediamo il nostro sole di colore giallo. Infatti, la sua temperatura sua temperatura superficiale è circa  $T \sim 5770 \text{ K}$ , da cui una lunghezza d'onda sul picco corrispondente a  $\lambda_{\max} \sim 0.5 \mu\text{m}$ . Si può esprimere la legge anche in funzione della frequenza, come mostrato in figura 2.8, ed esprime che più elevata è la temperatura del corpo, più il picco di emissione si trova ad alte frequenze (basse lunghezze d'onda). Quindi, se suppongo che una sorgente che sto osservando sia un corpo nero, effettuando misure a lunghezze d'onda diverse, in base alla frequenza a cui osservo il picco di emissione, posso risalire alla temperatura superficiale della stella. In particolare, una *stella blu* sarà *calda*, mentre una *stella rossa* sarà *fredda*.

### 2.3.3 Legge di Stefan-Boltzmann

All'aumentare della temperatura  $T$ , aumenta anche l'intensità del corpo nero, come si può osservare nell'equazione (2.14). Questo significa che un corpo nero più caldo emetterà più energia al secondo, su tutte le lunghezze d'onda, infatti basta integrare su tutte le lunghezze d'onda, ovvero basta guardare l'area sotto la curva a fissata temperatura nella figura 2.6. Ma l'energia totale emessa

integrata su tutte le frequenze (par. 2.2.2) è proprio la luminosità bolometrica  $L_{\text{bol}}$  del corpo. Questo suggerisce che debba esistere una relazione tra  $T$  e  $L_{\text{bol}}$ .

Gli esperimenti di Josef Stefan (1879) hanno mostrato che la luminosità bolometrica  $L_{\text{bol}}$  di un corpo nero di area  $A$  alla temperatura  $T$ , misurata in Kelvin, è data da:

$$L_{\text{bol}} = A\sigma T^4$$

dove  $\sigma$  è la *costante di Stefan-Boltzmann* e vale:

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Dunque, data una stella di raggio  $R$  e *temperatura superficiale*  $T$ :

$$L_{\text{bol}} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (2.16)$$

Inserendo i dati del Sole

$$R \sim 7 \times 10^{10} \text{ cm} \quad T \sim 5770 \text{ K} \quad \sigma \sim 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

si ottiene

$$L_{\odot} \sim 3.8 \times 10^{-33} \text{ erg s}^{-1}$$

Si può utilizzare la legge (2.16), ad esempio, per ricavare il raggio di una stella, conoscendone la temperatura superficiale e la luminosità.

## 2.4 Flusso

L'intensità (par. 2.2.1) e la luminosità (par. 2.2.2) sono quantità *intrinseche* della sorgente, ma *non* sono osservabili. Infatti, più una sorgente è lontana da noi, più ci appare debole, ma la sua luminosità non cambia con la distanza, poiché l'energia emessa ogni secondo è sempre la stessa. Ciò che osserviamo è il *flusso*, definito come la luminosità per unità di area: l'energia per unità di tempo per unità di area che arriva nel nostro strumento. Ovviamente il flusso dipende dalla distanza: diminuisce all'aumentare della distanza dalla sorgente.

Ipotizzando una emissione isotropa, il flusso misurato a una distanza  $r$  da una sorgente che emette con una luminosità  $L$  è dato da:

$$F(r) = \frac{L}{4\pi r^2} \quad (2.17)$$

Come nei casi già visti, è possibile definire un *flusso monocromatico*, per unità di frequenza,  $F_v$ , e trovare il flusso totale come:

$$F = \int_0^{\infty} F_v dv$$

Il flusso e la luminosità delle sorgenti sono spesso espressi in termini di *magnitudini*.

## 2.5 Magnitudine

### 2.5.1 Magnitudine apparente

La *magnitudine apparente* è una misura del flusso ricevuto dallo strumento. È una grandezza introdotta per la prima volta dall'astronomo greco *Ipparco* e varia tra  $m = 1$ , che corrisponde all'oggetto più brillante del cielo, e  $m = 6$ , che corrisponde alle stelle più deboli che si possono osservare a occhio nudo. Si faccia attenzione al fatto che *maggior è la magnitudine, più debole è la stella*. In particolare, la scala di magnitudini segue la *risposta logaritmica* dell'occhio umano alla luminosità delle stelle che osserviamo sulla volta celeste.

*Norman Robert Pogson* (1856) notò che una magnitudine di  $m = 6$  corrisponde a una stella  $\sim 100$  volte più debole di una con magnitudine  $m = 1$ . Si può quindi osservare che una differenza di 5 magnitudini corrisponde a un rapporto tra i flussi di 100:

$$\begin{aligned} m_1 = 1, m_2 = 6 &\implies F_1 = 100F_2 \\ m_2 - m_1 = 5 &\implies \frac{F_1}{F_2} = 100 = 100^{\frac{m_2 - m_1}{5}} \end{aligned}$$

Quindi risulta:

$$\frac{F_1}{F_2} = 100^{\frac{m_2 - m_1}{5}} \quad (2.18)$$

da ciò segue che una differenza di 1 magnitudine corrisponde a un rapporto tra i flussi pari a  $100^{1/5} \sim 2.5$ . Quindi, ad esempio, una stella di magnitudine  $m = 1$  appare 2.5 volte più brillante di una stella di magnitudine  $m = 2$  e  $2.5^5 \sim 100$  volte più brillante di una stella con magnitudine  $m = 6$ . Si parla dunque di magnitudini *apparenti*.

### 2.5.2 Legame tra magnitudine apparente e flusso

Prendendo il logaritmo (sia log il logaritmo in base 10) di entrambi i membri dell'equazione (2.18), si trova:

$$\log \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_2 - m_1}{5} \log(100) = \frac{2}{5}(m_2 - m_1) = 0.4(m_2 - m_1)$$

Da cui segue:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{F_1}{F_2} \quad (2.19)$$

Ovvero, considerando i flussi monocromatici:

$$m_V - m_{V'} = -2.5 \log \frac{F_{V'}}{F_V} \quad (2.20)$$

Misurando il flusso di una sorgente, *non* conosco la sua magnitudine, poiché, come ovvio dall'equazione (2.19), posso solamente conoscere la magnitudine *rispetto a un'altra sorgente*. È dunque necessario assegnare un valore di magnitudine apparente fisso attraverso un *sistema fotometrico*. Un esempio è il *sistema fotometrico di Vega*, secondo il quale impongo che la stella Vega abbia magnitudine  $m = 0$  a tutte le frequenze, sicché la relazione tra magnitudine e flusso diventeranno:

$$m_V = -2.5 \log \frac{F_V}{F_{0V}}$$

dove  $m_V$  e  $F_V$  sono rispettivamente la magnitudine e il flusso della sorgente a una data frequenza  $V$ , mentre  $F_{0V}$  è il flusso della stella Vega a quella data frequenza. Per farsi un'idea degli ordini di grandezza nel sistema di Vega si faccia riferimento alla tabella 2.1.

**Tavella 2.1:** Magnitudini apparenti nel Sistema Fotometrico di Vega. Il Sole, essendo la stella a noi più vicina, è quella che ci *appare* più luminosa, infatti ha la magnitudine assoluta più piccola possibile, ovvero più negativa possibile in questo caso. Il flusso dipende sia dalla luminosità della sorgente sia dalla distanza della sorgente dall'osservatore.

Oggetto	Magnitudine apparente
Sole	-26.8
Luna piena	-12.6
Venere	-4.7
Giove, Marte	-2.8
Sirio	-1.5
Vega	0.0
Uranio	5.5
Più deboli visibili a occhio	6.0
Nettuno	7.7
Plutone	13.0

### 2.5.3 Magnitudine assoluta

Si definisce *magnitudine assoluta* la magnitudine apparente che avrebbe una sorgente se fosse a una distanza di 10 parsec ( $1\text{ pc} = 3.086 \times 10^{18}\text{ cm}$ ):

$$M = m_{10\text{pc}} \quad (2.21)$$

Se la magnitudine apparente *non* dà informazioni sulla brillantezza intrinseca della sorgente, essendo dipendente dalla distanza della sorgente stessa, la magnitudine è legata alla luminosità intrinseca della sorgente.

Si può ricavare la relazione che sussiste tra la magnitudine assoluta e la luminosità utilizzando l'equazione (2.19)

$$M_1 - M_2 = m_{1,10\text{pc}} - m_{2,10\text{pc}} = -2.5 \log \frac{F_1(10\text{pc})}{F_2(10\text{pc})}$$

e utilizzando l'equazione (2.17) per scrivere

$$\frac{F_1(10\text{pc})}{F_2(10\text{pc})} = \frac{L_1}{L_2}$$

Da ciò segue che:

$$M_1 - M_2 = -2.5 \log \frac{L_1}{L_2} \quad (2.22)$$

### 2.5.4 Modulo di distanza

Conoscendo la magnitudine apparente e la magnitudine assoluta di una sorgente, è possibili stimare la sua distanza attraverso il così detto *modulo di distanza*. Troviamo la relazione tra  $m$  e  $M$  utilizzando l'equazione (2.19)

$$m - M = m - m_{10\text{pc}} = -2.5 \log \frac{F(d)}{F(10\text{pc})}$$

e usando l'equazione (2.17) con  $r = d$

$$\frac{F(d)}{F(10\text{pc})} = \frac{10^2}{d^2}$$

mettendo insieme si trova

$$m - M = -5 \log \frac{10}{d} = -5 + 5 \log d$$

Da cui l'espressione per il *modulo di distanza*:

$$m - M = -5 + 5 \log(d_{\text{pc}}) \quad (2.23)$$

dove con il pedice si è sottolineato che le distanze sono espresse in *parsec*.

Siccome siamo in grado di misurare la distanza del Sole e possiamo misurare la sua magnitudine apparente a varie lunghezze d'onda, utilizzando l'equazione (2.23) è possibile ricavare le magnitudini assolute del sole a varie lunghezze d'onda, ad esempio si ha ( $B$ ,  $V$  e  $K$  sono tre differenti filtri fotometrici):

$$M_{\text{bol}\odot} = 4.75 \quad M_B\odot = 5.48 \quad M_V\odot = 4.83 \quad M_K\odot = 3.31$$

Queste sono utilizzate come riferimento per esprimere la luminosità e la magnitudine assoluta per ogni altra sorgente. Infatti, richiamando l'equazione (2.22) e imponendo  $M_2 = M_\odot$  e  $L_2 = L_\odot$ , si ottiene

$$M_1 - M_\odot = -2.5 \log \frac{L_1}{L_\odot} \quad (2.24)$$

## 2.6 Colore

### 2.6.1 Definizione di colore

L'*indice di colore* è la differenza tra le magnitudini misurate in due diverse bande fotometriche (*filtri*). In particolare, le immagini vengono acquisite attraverso filtri che selezionano solamente alcune lunghezze d'onda. Ciascun filtro ha la propria curva di trasmissione, centrata su una data lunghezza d'onda, con al sua specifica curva e la sua larghezza. D'altra parte, ciascuna sorgente ha il proprio spettro di emissione. Quindi i diversi filtri selezionano solo una frazione dello spettro della sorgente, quella inclusa sotto la loro curva di trasmissione. Ne conviene che il flusso misurato durante l'osservazione in un dato filtro dipende sia dal filtro che dallo spettro della sorgente. Un esempio utile è rappresentato in figura 2.9.

Ricordando l'equazione (2.19), posso scrivere

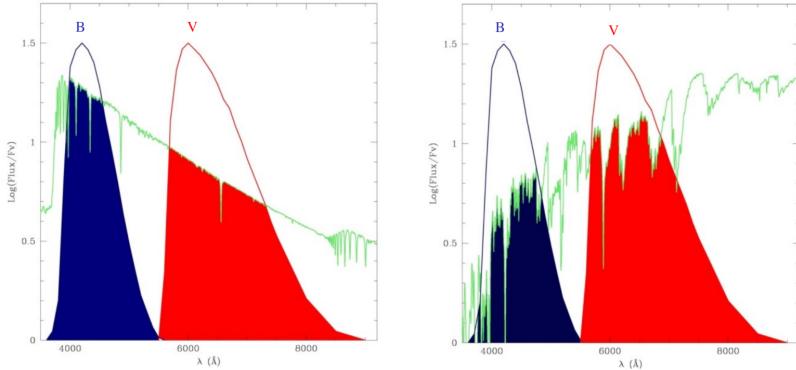
$$m_B = -2.5 \log F_B + \text{const}$$

$$m_V = -2.5 \log F_V + \text{const}$$

dove  $m_B$  e  $m_V$  sono le magnitudini apparenti rispettivamente in filtro blu e filtro rosso (analogo per i flussi misurati  $F_B$  e  $F_V$ ). Si definisce *colore* la differenza tra la magnitudine misurata col filtro più blu e la magnitudine misurata col filtro più rosso:

$$m_B - m_V \equiv B - V \quad (2.25)$$

Il colore, dunque, è un numero puro, e in tabella 2.2 sono presenti le relazioni tra il colore, la magnitudine assoluta e il flusso in filtro blu e rosso.



**Figura 2.9:** Osservazione di due spettri diversi con due filtri, uno blu (B) e uno rosso (R). In verde sono rappresentato gli spettri e le curve in blu e rosso sono rispettivamente le curve di trasmissione del filtro blu e rosso. Le zone evidenziate rappresentano il flusso misurato. Si nota che a sinistra vale  $F_B > F_V$  mentre a destra  $F_B < F_V$ . Ciò evidenzia come il flusso misurato dipende sia dallo spettro della sorgente che dal filtro utilizzato.

**Tabella 2.2:** Relazione tra colore, magnitudine apparente e flusso

Colore	Magnitudine apparente	Flusso
$< 0$	$m_B < m_V$	$F_B > F_V$
$= 0$	$m_B = m_V$	$F_B = F_V$
$> 0$	$m_B > m_V$	$F_B < F_V$

Ovviamente, cambiamo i filtri, cambia anche la denominazione del colore. Si tenga inoltre in considerazione che il colore *non* dipende dalla distanza, poiché usando le equazioni (2.19) e (2.17) si ottiene che la differenza tra le magnitudini apparenti e le magnitudini assolute è uguale:

$$m_B - m_V = M_B - M_V \quad (2.26)$$

### 2.6.2 Colore e temperatura

Ci si può chiedere quale sia la ragione fisica alla base del diverso colore delle stelle. Ripensando all'esempio in figura 2.9, è evidente che una stella è tanto più blu quanto maggiore è il flusso misurato a basse lunghezze d'onda. Dunque, in definitiva, la ragione fisica del diverso colore è la stessa del diverso spettro. Come introdotto nel paragrafo 2.3.1 e evidenziato in figura 2.7, le stelle in prima approssimazione sono dei corpi neri, dunque lo spettro è definito dall'equazione di Planck (2.14). Dato un filtro sto fissando una lunghezza d'onda (ovvero una frequenza) di picco a cui lavora il filtro stesso, dunque, in definitiva, lo spettro osservato di una stella dipenderà solamente dalla sua *temperatura superficiale*. Ricordando la relazione tra intensità e luminosità monocromatica (2.5) e imponendo per una stella  $I_V = B_n u(T)$  si ottiene:

$$L_V = 4\pi R^2 \pi B_V(T)$$

da cui, attraverso la relazione (2.22), usando (2.26), si ottiene

$$m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} = M_{\lambda_1} - M_{\lambda_2} = -2.5 \log \frac{L_{\lambda_1}}{L_{\lambda_2}} + \text{const} = -2.5 \log \frac{B_{\lambda_1}(T)}{B_{\lambda_2}(T)} + \text{const}$$

da cui si può inferire che, nel limite di validità dell'approssimazione della stella come corpo nero, il colore dipende solamente dalla temperatura.

Per riassumere, più bassa è la temperatura superficiale, più rossa è la stella, che equivale a un grande  $(B - V)$ , mentre più alta è la temperatura superficiale, maggiore è il flusso a basse  $\lambda$  (cfr. fig. 2.6) e più blu è la stella, che equivale a un piccolo  $(B - V)$ .

### 2.6.3 Estinzione

In generale, a causa dei processi di interazione tra radiazione e materia nel cammino tra la sorgente e l'osservatore, una stella tende ad apparire *più debole* e *più rossa* di come non sia veramente, questo fenomeno prende il nome di *estinzione* (o arrossamento). È possibile esprimere ciò analiticamente, introducendo un parametro di correzione alla magnitudine "intrinseca", ovvero quella che vedremmo se non ci fosse l'interazione con il mezzo interstellare.

$$m_\lambda = m_{\lambda 0} + A_\lambda \quad (2.27)$$

dove  $m_\lambda$  è la magnitudine osservata,  $m_{\lambda 0}$  quella intrinseca e  $A_\lambda$  prende il nome di *parametro di estinzione*. Esso è relativo alla direzione in cui viene osservata la stella e dipende fortemente dalla lunghezza d'onda, in particolare  $A_\lambda$  cresce al diminuire di  $\lambda$ . La dipendenza di  $A_\lambda$  da  $\lambda$ , detta *legge di estinzione*, è tuttavia scarsamente nota: dipende infatti dalle proprietà del mezzo interstellare lungo la linea di vista, quindi sicuramente cambia al variare della linea di vista, e cambia al variare della galassia che si sta considerando.

È presente una legge di estinzione standard per la Via Lattea, derivata da Cardelli (1989), tuttavia probabilmente non è valida ovunque nella nostra galassia e non è chiaro se debba valere anche per altre galassie. L'unica cosa chiara è che l'effetto dell'estinzione cresce al diminuire delle lunghezze d'onda.

Per spiegare l'effetto del *reddening* consideriamo due filtri particolari, un B e un V, e utilizziamo l'equazione (2.27) in combinazione con la (2.25). Possiamo scrivere:

$$m_\lambda - m_{\lambda 0} = A_\lambda$$

$$B - B_0 = A_B \quad V - V_0 = A_V$$

e sottraendo membro a membro:

$$B_0 - V_0 \equiv (B - V)_0 = (B - V) - (A_B - A_V)$$

Il primo termine,  $(B - V)_0$ , rappresenta il *colore intrinseco*,  $(B - V)$  rappresenta il *colore osservato*, mentre l'ultimo termine,  $(A_B - A_V) \equiv E(B-V)$  rappresenta il *reddening*, ovvero l'eccesso di colore. Partendo dal reddening dei filtri B-V si può indicare l'effetto per dei filtri qualunque moltiplicando per un opportuno fattore correttivo  $R_\lambda$ :

$$m_\lambda = m_{\lambda 0} + A_\lambda = m_{\lambda 0} + R_\lambda E(B-V) \quad (2.28)$$

### 2.6.4 Modulo di distanza e reddening

Si faccia attenzione al fatto che la magnitudine apparente che compare nell'espressione del modulo di distanza (2.23) è quella *vera*, ovvero de-arrossata. Talvolta, tuttavia, in letteratura si trova

il modulo di distanza *osservato*, ad esempio, in banda V. In questo caso, per trovare la distanza, è necessario de-arrossare:

$$(m - M)_V = -5 + 5 \log(d_{\text{pc}}) + 3.12 E(B-V)$$

Si faccia attenzione anche a un'ultima cosa: la magnitudine assoluta, per definizione, è sempre quella vera. Non ha senso parlare di magnitudine assoluta arrossata.





## 3. Struttura stellare

### 3.1 Modelli stellari

Una *stella* è una sfera auto-gravitante di gas in equilibrio idrostatico, in cui, dunque, la forza di pressione del gas egualia la forza di gravità. I parametri principali con cui si descrive una stella sono la sua *massa*  $M$  e la sua *composizione chimica*. Di seguito è riportato il modo usuale in cui si esprime quest'ultima:

- X** Frazione in massa dell'*idrogeno*.
- Y** Frazione in massa dell'*elio*.
- Z** Frazione in massa degli elementi più pesanti dell'*elio*, ovvero dei *metalli*.

Per il Sole, ad esempio, si ha:

$$X = 0.70 \quad Y = 0.28 \quad Z = 0.02$$

Una stella è caratterizzata da tre regioni principali:

**Nucleo** Dove viene prodotta l'energia.

**Involucro** Dove l'energia è trasportata in superficie. Vi sono zone radiative e convettive.

**Atmosfera** è a sua volta suddivisa in tre zone

**Fotosfera** Emette la maggior parte della luce. Sotto la fotosfera la stella è opaca.

**Cromosfera** Ciò che vediamo durante un'eclissi.

**Corona** Strato più esterno della stella. Può essere visto durante un'eclissi.

Di una stella, osserviamo la magnitudine e il colore che vengono dall'atmosfera e per interpretare le misurazioni e inferire la sua struttura interna, è necessario un *modellostellare*. Esso prenderà in input la massa e la composizione chimica e darà in output la luminosità e la temperatura superficiale. Queste, tuttavia, non sono direttamente osservabili, quindi, dovrà tenere conto di tutti i fenomeni fisici visti in precedenza e ricondurmi a tali grandezze attraverso la *magnitudine* e il *colore* per confrontare teoria e dati sperimentali. Di seguito sono esposte le sette equazioni necessarie per un modellostellare esaustivo:

1. *Equilibrio idrostatico*:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r)$$

2. *Continuità di massa:*

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

3. *Equazione di stato:*

$$P = \frac{aT^4}{3} + \frac{k\rho T}{\mu_i H} + \begin{cases} \frac{k\rho T}{\mu_e H} \\ k_1 \rho^{5/3} \\ k_2 \rho^{4/3} \end{cases}$$

4. *Bilancio energetico:*

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon$$

5. *Gradiente radiativo e criterio di Schwarzschild:*

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} = -\frac{3\kappa\rho}{4\pi r^2} \frac{L(r)}{4acT^3}$$

se  $\left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}}$   $\Rightarrow$  c'è convezione.

6. *Opacità:*

$$\kappa = \kappa(\rho, T) \begin{cases} \kappa_{BF} \propto 10^{25} Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ \kappa_{FF} \propto 10^{22} (X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ \kappa_E \propto 0.2(1+X) \end{cases}$$

7. *Produzione di energia tramite reazioni termonucleari:*

$$\varepsilon = \varepsilon(X, \rho, T) \begin{cases} \varepsilon_{PP} = \varepsilon_1 \rho X^2 T_6^\alpha & \alpha \in [3.5 - 6] \\ \varepsilon_{CN} = \varepsilon_2 \rho X X_{CN} T_6^\beta & \beta \in [13 - 20] \\ \varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_3 \rho^2 Y^3 T_8^\gamma & \gamma \in [20 - 30] \end{cases}$$

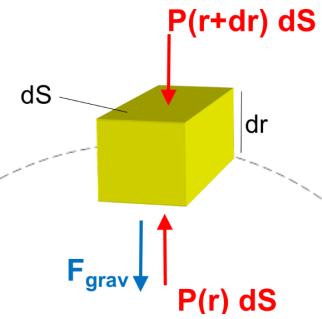
## 3.2 Equilibrio idrostatico

L'equazione dell'*equilibrio idrostatico* esprime la condizione per cui la pressione interna del gas che compone la stella è in equilibrio con la forza di gravità data dalla massa della stella stessa. Si può riassumere nella seguente maniera:

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) \quad (3.1)$$

Per ricavare tale equazione dividiamo la stella in gusci sferici concentrici a temperatura e densità costanti e consideriamo un volume infinitesimo di stella a una distanza  $r$  dal centro. Come mostrato in figura 3.1, sulla faccia esterna del volumetto agisce una forza di pressione verso l'interno, mentre sulla faccia interna agisce una forza di pressione verso l'esterno e la forza gravitazionale, verso l'interno. Scriviamo, dunque, l'espressione per la forza di pressione  $F_p$  e la forza di gravità  $F_g$  e successivamente uguagliamo tali forze. Si tenga conto che l'asse radiale è rivolto verso il centro, sicché le forze che agiscono verso l'esterno avranno segno negativo.

$$F_p = P(r + dr) dS - P(r) dS = \frac{dP(r)}{dr} dr dS$$



**Figura 3.1:** Volumetto infinitesimo a distanza  $r$  dal centro della stella. Sulla faccia superiore agisce la pressione che spinge verso il centro. Sulla faccia inferiore agiscono la pressione, verso l'esterno, e la forza di gravità, verso il centro.

$$F_g = \frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) dr dS$$

dove  $M(r)$  rappresenta la massa all'interno del raggio  $r$ , il termine  $GM(r)/r^2$  rappresenta l'accelerazione locale di gravità e il termine  $\rho(r) dr dS$  rappresenta la massa all'interno del volumetto. Imponendo l'equilibrio si trova:

$$F_p + F_g = 0 \iff \frac{dP(r)}{dr} dr dS + \frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) dr dS = 0$$

da cui segue immediatamente l'eq. (3.1). Quindi, in ogni guscio sferico della stella a fissata distanza  $r$  dal centro, la gravità è bilanciata dalla pressione interna del gas. In particolare, la gravità *non* è bilanciata dalla pressione, più precisamente essa è bilanciata dal *gradiente di pressione*, ovvero dalla variazione di  $P$  col raggio. La pressione deve decrescere all'aumentare del raggio, sicché la pressione nel centro della stella è maggiore della pressione vicino alla sua superficie.

Quando  $F_g$  e  $F_p$  non sono bilanciate, la stella si contrae se  $F_g > F_p$  o espande se  $F_g < F_p$  in un *tempo caratteristico* pari a:

$$T_d = \sqrt{\frac{2r}{g}} = \sqrt{\frac{2r^3}{GM}}$$

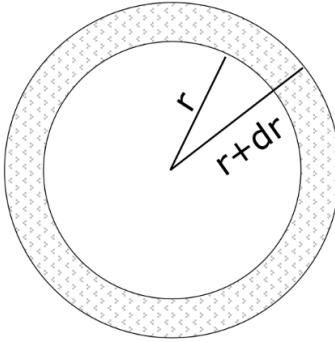
### 3.3 Continuità di massa

L'equazione di *continuità di massa* descrive come la massa interiore della stella varia con il raggio. Si può scrivere nella seguente maniera:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (3.2)$$

Per ricavarla consideriamo un guscio sferico infinitesimo di stella, come in figura 3.2. Siccome all'interno di tale guscio la densità di ogni elemento è la stessa, a causa della simmetria sferica della struttura, possiamo ricavare il valore di massa all'interno di tale guscio:

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$



**Figura 3.2:** Guscio sferico infinitesimo a distanza  $r$  dal centro. All'interno del guscio, a causa della simmetria sferica, ipotizziamo che la densità e la temperatura siano costanti.

da cui segue immediatamente l'eq. (3.2). Consideriamo il caso semplice di densità costante, in cui  $\rho(r) = \bar{\rho}$ , si può calcolare in maniera semplice la massa presente entro il raggio  $r$ :

$$M(r) = \int_0^{M(r)} dm(r) = \int_0^r dr' 4\pi r'^2 \rho(r') = \frac{4}{3}\pi r^3 \bar{\rho}$$

### 3.4 Equazione di stato

Guardando le equazioni (3.1) e (3.2), queste sono 2 equazioni in 3 incognite:  $P(r)$ ,  $M(r)$  e  $\rho(r)$ . Una relazione tra  $P$  e  $\rho$  è stabilita dall'*equazione di stato*:

$$P = \frac{aT^4}{3} + \frac{k\rho T}{\mu_i H} + \begin{cases} \frac{k\rho T}{\mu_e H} \\ k_1 \rho^{5/3} \\ k_2 \rho^{4/3} \end{cases} \quad (3.3)$$

Un primo aspetto da considerare è che al pressione nell'interno delle stelle è dovuta a due contributi: la *pressione di radiazione* e la *pressione del gas*

$$P = P_{\text{rad}} + P_{\text{gas}}$$

#### 3.4.1 Pressione di radiazione

I fotoni esercitano una pressione perché a ogni fotone di energia  $E$  è associato un impulso  $p = E/c$ . Una stella si può approssimare come un corpo nero, dunque è possibile calcolare la pressione di radiazione attraverso la legge di Planck (2.14).

$$P_{\text{rad}} = \frac{4\pi}{3c} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{1}{3} a T^4$$

dove  $a$  è una costante pari a  $a = 4\sigma/c = 7.6 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$ , con  $\sigma$  costante di Stefan-Boltzmann. Accontentiamoci del risultato senza ulteriori specificazioni sui dettagli del conto:

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{3} a T^4 \quad (3.4)$$

Si noti come la pressione di radiazione *non* dipenda dalla densità e dipenda fortemente dalla temperatura.

### 3.4.2 Pressione del gas ideale

A causa delle temperature elevate negli interni stellari, gli atomi sono ionizzati e possiamo pensare al gasstellare come a un *plasma di ioni e elettroni*. Quindi, nella maggior parte dei casi, anche a densità e pressioni elevate, il gasstellare può essere trattato come un *gas ideale*, in cui si trascurano le interazioni tra le particelle del gas e la distribuzione delle velocità è rappresentata dalla distribuzione di Maxwell. La densità del gas, in questo caso, dipende sia dalla pressione che dalla temperatura:

$$P = P(\rho, T)$$

Per un gas ideale, inoltre, vale la nota legge:

$$PV = N k_B T \quad (3.5)$$

Utilizzando l'equazione (3.5) e definendo  $\langle m \rangle \equiv M/N$ , la massa media delle particelle del gas, e  $\rho \equiv M/V$  la densità, si ottiene:

$$P = \frac{N}{V} k_B T = \frac{N}{M} \frac{M}{V} k_B T = \frac{k_B \rho T}{\langle m \rangle}$$

ora, la massa media delle particelle del gas può essere scritta come  $\langle m \rangle = \mu H$ , dove  $\mu$  è il *peso molecolare medio* e  $H$  rappresenta la massa di un nucleo di idrogeno, ovvero la massa del protone,  $H = m_p = 1.6 \times 10^{-24}$  g. Mettendo tutto insieme si ottiene:

$$P_{\text{gas}} = \frac{k_B \rho T}{\mu H} \quad (3.6)$$

La caratteristica più importante di questa equazione è la *termo-regolazione*: se  $T$  cresce  $P$  cresce, ma se  $P$  cresce la stella si espande, ma se la stella si espande la temperatura diminuisce. Si faccia tuttavia attenzione al fatto che non tutti i gas si comportano come un gas ideale (par. 3.4.4).

### 3.4.3 Peso molecolare medio

Vogliamo, ora, legare il *peso molecolare medio*  $\mu$  alla composizione chimica del gas, introdotta nel par. 3.1.  $\mu$  rappresenta la media delle masse delle particelle che compongono il gas, espressa in termini della massa del protone  $H$ :

$$\mu = \frac{\langle m \rangle}{H} \quad (3.7)$$

D'altra parte, conoscendo la massa totale del gas  $M_{\text{tot}}$  e il numero totale di particelle libere  $N_{\text{free}}$ , si può calcolare la massa media delle particelle come:

$$\langle m \rangle = \frac{M_{\text{tot}}}{N_{\text{free}}} \quad (3.8)$$

si faccia molta attenzione al fatto che  $N_{\text{free}}$  rappresenta le particelle libere, dunque, in un gas ionizzato è pari alla somma del numero degli *ioni* e degli *elettroni*. Esso dipende da:

- la *composizione chimica del gas*, ovvero da  $X, Y$  e  $Z$  (vedi par. 3.1).
- lo *stato di ionizzazione* del gas. In particolare:
  - ogni atomo *neutro* contribuisce con 1 particella, ovvero l'atomo stesso.
  - ogni atomo *totalmente ionizzato* contribuisce con  $1 + Z_a$  particelle, ovvero il nucleo e  $Z_a$  elettroni.

– ogni atomo *parzialmente ionizzato* contribuisce con più di 1 e meno di  $1 + Z_a$  particelle. Si faccia nuovamente attenzione a due dettagli. Innanzitutto, stiamo dividendo il gas studiato in tre parti: l'idrogeno, la cui abbondanza in massa è espressa da  $X$ , l'elio, la cui abbondanza è espressa da  $Y$  e gli elementi più pesanti, la cui abbondanza è  $Z$ . Dunque, non stiamo distinguendo tra gli elementi più pesanti dell'elio, bensì li stiamo accorpando tutti in una stessa famiglia. Questo è lecito poiché le loro abbondanze sono ridotte, in confronto ai primi due elementi della tavola periodica. Inoltre,  $Z_a$  rappresenta il grado di ionizzazione del gas per un gas totalmente ionizzato, che coincide dunque con il numero di protoni del gas.

Tenendo a mente che stiamo distinguendo solamente tre specie di elementi (idrogeno, elio e più pesanti), indicizziamo la specie con l'indice  $j$ , con  $j = 1, 2, 3$ . A costo di essere ridondanti, ribadiamo che  $j = 1$  si riferisce all'idrogeno,  $j = 2$  all'elio e  $j = 3$  a tutti gli altri elementi. Possiamo, ora calcolare il numero di atomi della specie  $j$ -esima:

$$N_j = \frac{M_{\text{tot},j}}{m_{\text{atomo},j}} \simeq \frac{M_{\text{tot},j}}{A_j H} \quad (3.9)$$

dove  $A_j$  è il *numero di massa*, ovvero il numero di nucleoni, pari alla somma dei protoni e dei neutroni. In particolare, se consideriamo l'isotopo più comune dell'idrogeno, il protio, il suo nucleo è composto solamente da un protone, per cui  $A_1 = 1$ . Considerando l'elio 4, il suo nucleo è composto da 2 protoni e 2 neutroni, pertanto  $A_2 = 4$ . Mentre per gli elementi più pesanti possiamo considerare che i più stabili in genere hanno un numero di protoni circa uguale al numero di elettroni. Se consideriamo un gas *totalmente ionizzato*, gli elementi più pesanti avranno  $\sim Z_a$  particelle libere (con  $Z_a$  il loro numero atomico) e avremo  $A_3 \sim 2Z_a$ .

Ora, possiamo scrivere l'abbondanza della specie  $j$ -esima utilizzando la sua definizione:

$$X_j = \frac{M_{\text{tot},j}}{M_{\text{tot}}} \quad (3.10)$$

dove  $X_1 = X$ ,  $X_2 = Y$  e  $X_3 = Z$ , come più volte ricordato. Mettendo insieme l'eq. (3.9) e (3.10) si trova:

$$N_j = \frac{X_j M_{\text{tot}}}{A_j H} \quad (3.11)$$

Pertanto, per un gas *totalmente ionizzato* possiamo calcolare il numero totale di particelle libere contando le particelle come espresso nella lista sopra e utilizzando l'eq. (3.11):

$$N_{\text{free}} = \sum_{j=1}^3 N_j (1 + Z_j) = \frac{M_{\text{tot}}}{H} \sum_{j=1}^3 \frac{X_j}{A_j} (1 + Z_j) \quad (3.12)$$

dove  $Z_j$  rappresenta il numero atomico dell'elemento considerato, dunque per l'idrogeno  $Z_1 = 1$ , per l'elio  $Z_2 = 2$  e per gli elementi più pesanti considereremo un numero atomico generico  $Z_a$ , per cui  $Z_3 = Z_a$ <sup>\*</sup>.

Mettendo insieme le eq. (3.7), (3.8) e (3.12), si ottiene:

$$\mu = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \frac{X_j}{A_j} (1 + Z_j)} \quad (3.13)$$

---

<sup>\*</sup>non si confonda  $Z_i$  con l'abbondanza degli elementi pesanti  $Z$ , la quale *non* ha un pedice

Sostituendo con i valori che sono stati introdotti precedentemente si ha:

$$\mu = \frac{1}{\frac{X_1}{A_1}(1+Z_1) + \frac{X_2}{A_2}(1+Z_2) + \frac{X_3}{A_3}(1+Z_3)} = \frac{1}{\frac{X}{1}(1+1) + \frac{Y}{4}(1+2) + \frac{Z}{2Z_a}(1+Z_a)}$$

In definitiva, per un *gas totalmente ionizzato*, considerando sia il contributo degli *ioni* che il contributo degli *elettroni* si ottiene un *peso molecolare medio* pari a:

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z} \quad (3.14)$$

Se ora consideriamo il solo contributi degli *elettroni* in un gas totalmente ionizzato, otteniamo:

$$\mu = \frac{1}{X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}Z} \quad (3.15)$$

infatti, **finisci di scrivere e spiega il perché considerato quanto scritto prima.**

Usando che

$$X + Y + Z = 1 \implies X + \frac{1/2}{(Y+Z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}X$$

otteniamo:

$$\mu = \frac{2}{X+1} \quad (3.16)$$

**controlla che sia giusto**

#### 3.4.4 Degenerazione

Un gas che segue l'equazione (3.6) è un gas ideale e come spiegato nel paragrafo 3.4.2 in questo caso la struttura è *termoregolata*. Nel caso in cui il gas *non* sia ideale, si dice che si trova in una situazione di *degenerazione*, e gli effetti quanto-meccanici diventano rilevanti. Per la *componente ionica* del gas (par.3.4.3) posso sempre mettermi nell'approssimazione di gas perfetto, mentre per la *componente elettronica* non sempre è così. Ciò è dovuto al fatto che la massa dell'elettrone è circa mille volte inferiore alla massa del protone, dunque a densità fissata è possibile una degenerazione della sola componente elettronica del gas. Quindi studieremo quest'ultima, trovando un limite inferiore che varrà sicuramente anche per la componente ionica. Dunque, quando bisogna preoccuparci degli effetti quanto-meccanici?

Ricordiamo che in meccanica quantistica una particella è rappresentabile attraverso una *lunghezza d'onda di de Broglie* pari a:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m k_B T}} \quad (3.17)$$

Se la distanza media tra le particelle è molto più grande della lunghezza d'onda ad essere associata, posso ignorare la natura ondulatoria, mentre dato un certo volume  $V$ , la distanza media tra le particelle è tanto più grande quanto più piccola è la densità. Si può dimostrare che gli effetti quantistici sono trascurabili se:

$$T > 2.4 \cdot 10^{-22} \frac{\rho^{2/3}}{m}$$

che rappresenta la *condizione di degenerazione* per un gas di temperatura  $T$ , alla densità  $\rho$ , costituito da particelle di massa  $m$ . Tale condizione tende ad essere violata, ovvero il gas tende ad essere degenero:

- ad alte densità (poiché la distanza media tra le particelle è minore)
- per particelle di massa minore

Come accennato precedentemente, a causa della differenza di massa tra elettrone e protone, è possibile che gli elettroni siano in condizione di degenerazione mentre gli ioni no. D'ora in avanti ci occuperemo solamente della degenerazione elettronica. Dato che per gli elettroni  $m_e \sim 10^{-27}$  g ho un limite di demarcazione:

- $\frac{T}{\rho^{2/3}} > 10^5$ : in questo caso posso trascurare gli effetti quantistici e trattare il gas come gas perfetto.
- $\frac{T}{\rho^{2/3}} < 10^5$ : in questo caso *devo* considerare gli effetti quantistici per la degenerazione elettronica.

In particolare, gli effetti quantistici che entrano in caso sono il *principio di indeterminazione di Heisenberg* e il *principio di esclusione di Pauli*.

### 3.4.5 Principio di indeterminazione e di esclusione

Chiamando  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  e  $\Delta z$  le incertezze nella determinazione delle posizioni e  $\Delta p_x$ ,  $\Delta p_y$  e  $\Delta p_z$  le incertezze nella determinazione dei momenti nello spazio delle fasi, il *principio di indeterminazione* si può scrivere:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim \hbar \quad (3.18a)$$

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \sim \hbar \quad (3.18b)$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \sim \hbar \quad (3.18c)$$

Questo principio fissa il *volume limite minimo*, una cella, nello spazio delle fasi, pari a:

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z)(\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z) \sim h^3 \quad (3.19)$$

Il *principio di esclusione di Pauli* afferma che in ciascuna cella dello spazio delle fasi, definita dall'eq.(3.19), non possono stare più di due fermioni, purché di spin opposto.

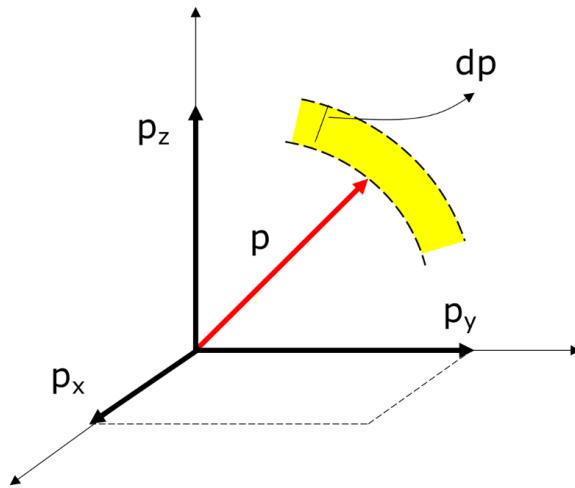
Questi due principi hanno un effetto diretto sulla *distribuzione di velocità (momenti)* delle particelle, e quindi in definitiva sulla dipendenza della pressione dalle proprietà del gas.

Consideriamo un gas di elettroni in condizioni di bassa densità: potremo trattarlo come gas perfetto e seguirà la distribuzione di Maxwell. Aumentando il numero di elettroni tenendo fissa la temperatura  $T$ , al curva di Maxwell si abbasserà, fino a un limite in cui non posso più trascurare gli effetti quantistici. In questo caso, il numero di elettroni con quantità di moto compresa tra  $p$  e  $p + dp$ , in un dato volume  $V$ , non può più essere infinito come nel caso della distribuzione di Maxwell, ma sarà:

$$n(p) dp \leq \frac{2V}{h^3} dp_x dp_y dp_z$$

Quindi, se aumentiamo il numero di elettroni, la maggior parte delle celle con i momenti più piccoli verrà via via riempita e gli elettroni in più dovranno necessariamente occupare celle con momenti maggiori, ovvero, a parità di  $T$ , questi ultimi avranno energie maggiori. Questo significa che la temperatura *non* è più una misura dell'energia degli elettroni.

Nel caso di *degenerazione completa*, si dice che *tutti* i valori dei momenti o livelli energetici sono occupati fino a  $p_0$  ( $E_0$ ), detto momento (energia) di Fermi. Quindi  $p_0$  ( $E_0$ ) è il massimo momento (energia) possibile per le particelle di gas.



**Figura 3.3:**  $dp_x dp_y dp_z$  è uguale al volume compreso tra due sfere concentriche di raggio  $p$  e  $p + dp$

Mentre per il gas perfetto è  $T$  a stabilire il livello energetico più probabile, l'ingresso nel regime degenero di fatto cancella la dipendenza dalla temperatura:

$$P \neq P(T)$$

#### 3.4.6 Distribuzione di Fermi-Dirac

Se il volume minimo nello spazio delle fasi, come evidenziato in eq. (3.19), è  $\hbar^3$ , considerando per un fermione ci sono 2 possibili stati possibili (par. 3.4.5), il peso statistico di uno stato corrisponde a  $2/\hbar^3$  e dunque si può esprimere il numero di elettroni con quantità di moto tra  $p$  e  $dp$  in un dato volume  $V$  come:

$$n(p) dp = \frac{2}{\hbar^3} dp_x dp_y dp_z$$

Poiché ci interessa il numero di elettroni tra  $p$  e  $dp$ , notiamo che  $dp_x dp_y dp_z$  è equivalente al volume compreso tra due sfere concentriche di raggio  $p$  e  $p + dp$  (vedi figura 3.3), cioè  $4\pi p^2 dp$ .

Sostituendo si trova la *distribuzione di Fermi-Dirac*:

$$N_p dp = \frac{8\pi}{\hbar^3} p^2 dp \quad (3.20)$$

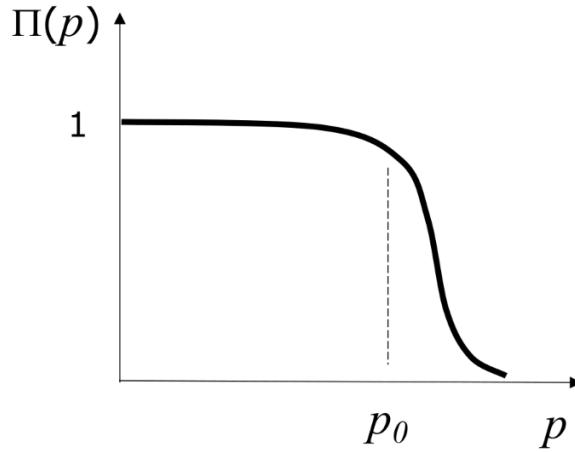
Si noti come essa *non* dipenda da  $T$ . Per evidenziare l'emergenza del comportamento quantistico oltre la soglia di Fermi, si faccia riferimento alla figura 3.4, in cui è rappresentato l'indice di occupazione dei livelli energetici  $\Pi(p)$  in funzione di  $p$ .

Integrando l'equazione (3.20) possiamo ottenere relazioni importanti in funzione del momento di Fermi. Si faccia attenzione al fatto che il massimo momento possibile è  $p_0$ , ovvero il momento di Fermi:

$$N_e = \int_0^{p_0} \frac{8\pi}{\hbar^3} p^3 dp = \frac{8\pi}{3\hbar^3} p_0^3$$

dove  $N_e$  rappresenta il numero di particelle per unità di volume. Sia  $N_{\text{tot}}$  il numero totale di particelle,  $\langle m \rangle$  la massa media delle particelle,  $M$  la massa totale e  $V$  il volume. Si ha:

$$N_e = \frac{N_{\text{tot}}}{V} = \frac{M}{\langle m \rangle V} = \frac{\rho}{\mu_e H}$$



**Figura 3.4:** Indice di occupazione dei livelli energetici  $\Pi(p)$  in funzione della quantità di moto  $p$ .  $\Pi = 1$  corrisponde a un livello totalmente occupato.

dove è stata introdotta la densità  $\rho$  e si è usata l'espressione (3.7). Mettendo insieme le ultime due espressioni si ottiene:

$$p_0 = \sqrt[3]{\frac{3h^3}{8\pi\mu_e H}}\rho^{1/3} \quad (3.21)$$

Arrivati a questo punto, abbiamo tutti gli strumenti necessari per il calcolo della pressione. Come noto dalla meccanica statistica, conoscendo una distribuzione dei moduli di velocità, ipotizzando isotropia dello spazio, si può sempre trovare la pressione come:

$$P = \frac{1}{3}m \int_0^\infty N(v)v^2 dv = \frac{1}{3m} \int_0^\infty N(p)p^2 dp \quad (3.22)$$

e in generale bisogna distinguere tre casi:

**Gas perfetto** In questo caso la distribuzione di velocità da utilizzare è quella di Maxwell-Boltzmann.

Integrando la (3.22) si ottiene la legge dei gas perfetti (3.6), in cui  $\mu = \mu_e$ .

**Gas degenere non relativistico** La distribuzione di velocità è quella di Fermi Dirac. Si utilizza l'espressione classica per l'impulso,  $p = mv$ .

**Gas degenere relativistico** La distribuzione di velocità è ancora quella di Fermi-Dirac, tuttavia si utilizza l'espressione relativistica per l'impulso,  $p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$

Vediamo cosa si ottiene negli ultimi due casi.

#### Caso non relativistico

In questo caso  $p_0 \ll m_e c$  quindi possiamo scrivere  $p = mv$  e integrare la (3.22) utilizzando la distribuzione di Fermi-Dirac (3.20). Si ottiene:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3 m} \int_0^{p_0} p^4 dp = \frac{8\pi}{3h^3 m} \frac{p_0^5}{5}$$

e sostituendo l'espressione per  $p_0$  trovata precedentemente 3.21 otteniamo

$$P = k_1 \rho^{5/3} \quad (3.23)$$

dove  $k_1$  è una costante pari a:

$$k_1 = 10^{13} \mu_e^{-5/3}$$

Si noti come la pressione *non* dipenda dalla temperatura. Questo fa sì che *non* ci sia termoregolazione. Inoltre, la dipendenza dalla densità è maggiore rispetto che al gas perfetto (eq. (3.6)).

### Caso relativistico

In questo caso si ha  $p_0 \sim m_e c$  e bisogna utilizzare l'espressione relativistica dell'impulso:

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Sostituendo dentro (3.22) si ha:

$$P = \frac{8\pi}{3mh^3} \int_0^{p_0} \frac{p^4 dp}{(1 + \frac{p^2}{m^2 c^2})^{1/2}} = \dots = \frac{2\pi c}{3h^3} p_0^4$$

dove si sono saltati i passaggi intermedi, riportati nel *Cester*. Unendo l'ultima espressione con (3.21) si ottiene:

$$P = k_2 \rho^{4/3} \quad (3.24)$$

con  $k_2$  una costante pari a

$$k_2 = 1.2 \cdot 10^{15} \mu_e^{-4/3}$$

Nuovamente, non c'è dipendenza dalla temperatura e la dipendenza dalla densità è più forte che nel gas ideale (3.6).

### 3.4.7 L'equazione in breve

L'equazione di stato negli interni stellari (3.3) ha tre contributi principali. Analizziamoli velocemente.

#### Pressione di radiazione

Il termine:

$$P = \frac{aT^4}{3}$$

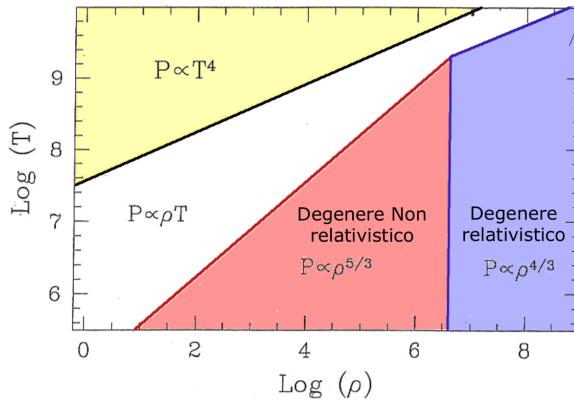
rappresenta il contributo della pressione di radiazione per un corpo nero, secondo la eq. (3.4) ottenuta integrando la distribuzione di Planck 2.14. È il contributo dei fotoni che compongono il gasstellare, i quali hanno un impulso e dunque esercitano una pressione.

#### Pressione degli ioni

Il termine:

$$\frac{k\rho T}{\mu_i H}$$

è il contributo degli ioni nel materialestellare, che pensiamo come a un plasma. Questi sono sempre approssimati come a un gas perfetto, infatti seguono la legge (3.6).



**Figura 3.5:** Diagramma  $\log \rho - \log T$ . In giallo domina la pressione di radiazione, in bianco il gas non degenero (gas perfetto), in rosso il gas degenero non relativistico e in blu il gas degenero relativistico.

### Pressione degli elettroni

Il contributo:

$$\begin{cases} k\rho T \\ \mu_e H \\ k_1 \rho^{5/3} \\ k_2 \rho^{4/3} \end{cases}$$

dipende dalla degenerazione del gas per ciò che concerne il contributo elettronico. Se il gas di elettroni è *non* degenero, ovvero è un gas perfetto, segue la legge (3.6), dove  $\mu = \mu_e$ . Nel caso *degenero* si distinguono due situazioni: la prima in cui si trattano le particelle come *non* relativistiche, con un contributo alla pressione pari a  $k_1 \rho^{5/3}$ , e un secondo in cui si trattano le particelle come *relativistiche*, con un contributo alla pressione pari a  $k_2 \rho^{4/3}$ .

#### 3.4.8 Contributo dominante

Per descrivere lo stato della materia negli interni stellari, è utile utilizzare il *diagramma  $\log \rho - \log T$* . In pratica, note la densità e la temperatura di un certo strato di stella, questo piano permette di sapere quale componente di pressione prevale. Infatti, eguagliando tra loro diversi contributi di pressione, si ottengono delle rette che suddividono il piano in regioni in cui domina l'uno o l'altro contributo. Analizziamo i domini di demarcazioni per casi. Nella figura 3.5 sono mostrati tutti i casi. Essa è riferita al nucleostellare, in cui le temperature sono elevatissime, in superficie le temperature sono più basse.

### Pressione di radiazione – Pressione del gas perfetto

Imponiamo  $P_{\text{rad}} = P_{\text{gas}}$ , uguagliando dunque l'eq. (3.4) con l'eq. (3.6). In pratica sto considerando insieme il contributo degli ioni e degli elettroni, utilizzando  $1/\mu_i + 1/\mu_e = 1/\mu$

$$\frac{1}{3} aT^4 = \frac{k_B \rho T}{\mu H}$$

sviluppando si trova:

$$T^3 = \frac{3k_B}{a\mu H} \rho$$

da cui, passando ai logaritmi:

$$\log T^3 = \log \rho + c$$

e infine si può ricavare:

$$\log T = \frac{1}{3} \log \rho + 7.57 \quad (3.25)$$

La regione in giallo del diagramma 3.5 è quella in cui la pressione di radiazione domina su quella del gas perfetto, ovvero  $P_{\text{rad}} > P_{\text{gas}}$

#### **Pressione del gas degenero – Pressione del gas perfetto**

Per sapere quando la pressione del gas degenero di elettroni prevale su quella di gas perfetto, uguagliamo la (3.6) con la (3.23). Siccome la condizione di degenerazione riguarda solamente il contributo elettronico, nella parte del gas perfetto considero solo gli elettroni, per cui  $\mu = \mu_e$ :

$$\frac{k_B \rho T}{\mu_e H} = k_1 \rho^{5/3}$$

da cui si ottiene:

$$T = \frac{k_1}{k_B} \rho^{2/3} \mu_e H$$

e, passando ai logaritmi:

$$\log T = \frac{2}{3} \log \rho + 4.88 \quad (3.26)$$

La regione in rosso del diagramma 3.5 è quella in cui la pressione del gas degenero è maggiore della pressione del gas non degenero.

#### **Pressione del gas degenero relativistico – Pressione del gas degenero non relativistico**

Per sapere quando la pressione del gas degenero relativistico prevale su quella del gas degenero *non* relativistico, uguagliamo la (3.23) con la (3.24):

$$k_1 \rho^{5/3} = P = k_2 \rho^{4/3}$$

si trova:

$$\rho^{1/3} = \frac{k_2}{k_1}$$

da cui, passando ai logaritmi:

$$\log \rho = 3 \log \frac{k_2}{k_1} = 6.6 \quad (3.27)$$

La pressione in blu del diagramma 3.5 è quella in cui la pressione del gas degenero relativistico è maggiore di quella del gas degenero non relativistico.

#### **Pressione del gas perfetto – Pressione del gas degenero relativistico**

Analogamente a quanto fatto nel caso *non* relativistico, ci sarà una regione del diagramma (per  $\log \rho > 6.6$ ) in cui il gas può passare da *non degenero* a *degenero relativistico*. Per trovarla uguagliamo la (3.6) con la (3.24):

$$\frac{k_B \rho T}{\mu H} = k_2 \rho^{4/3}$$

si trova:

$$T = \frac{k_2 \mu_e H}{k_B} \rho^{1/3}$$

e passando ai logaritmi:

$$\log T = \frac{1}{3} \log \rho + 7.07 \quad (3.28)$$

### Conclusioni

La pressione di radiazione, siccome  $p_{\text{rad}} \propto T^4$ , domina ad alte temperature. La pressione del gas degenero diventa dominante ad alte densità perché per avere degenerazione devo avere gli elettroni estremamente impacchettati nello spazio delle fasi, e ciò corrisponde ad elevate densità. Nei casi intermedi è sufficiente riferirsi al grafico 3.5 per capire in quale situazione si è.

Riprenderemo questo utile diagramma successivamente, parlando di evoluzione stellare. Per ora sottolineamo solamente che le reazioni termonucleari sono attive solo se il gas si trova in condizioni di non degenerazione (gas perfetto).

## 3.5 Equazione del bilancio energetico

L'*equazione del bilancio energetico* esprime l'energia che emerge da ogni *shell* della struttura stellare, essenzialmente dovuta alle reazioni termonucleari. Si può scrivere:

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \varepsilon \quad (3.29)$$

dove  $L(r)$  è la luminosità emergente dalla sfera di raggio  $r$  e  $\varepsilon$  l'energia prodotta da ogni shell per unità di tempo e di massa,  $[\varepsilon] = \text{erg s}^{-1} \text{g}^{-1}$ .

### 3.5.1 Ricavare l'equazione

È semplice ricavare tale equazione. consideriamo, infatti, l'usuale guscio di gas a una distanza  $r$  dal centro.. Sia  $L(r)$  la luminosità emergente dalla porzione di stella delimitata dal guscio a raggio  $r$  e analogamente per  $L(r+dr)$ . Possiamo scrivere:

$$L(r+dr) - L(r) = dL(r) = 4\pi \rho r^2 dr \varepsilon$$

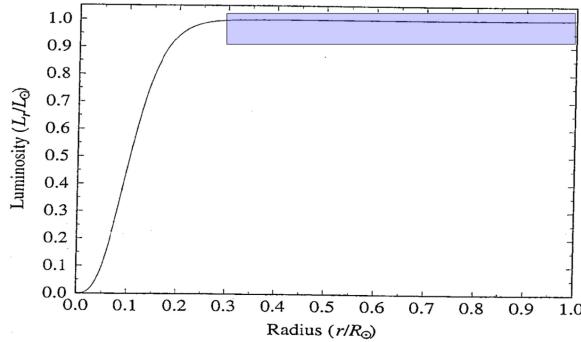
dove  $4\pi \rho r^2 dr$  rappresenta la massa del guscio di sfera tra  $r$  e  $r+dr$  e  $\varepsilon$  è l'energia prodotta da ogni guscio per unità di tempo e di massa. Attenzione, *non* si tratta dell'energia radiata dalla stella. In questo modo si riottiene la definizione di luminosità (par. 2.2.2).

Consideriamo un tipico profilo di luminosità radiale per una stella (fig. 3.6): la luminosità varia con  $r$  sono in una regione ristretta della stella, corrispondente al suo centro, poi verso l'esterno diventa costante. All'esterno, secondo la eq. (3.29) vale  $\varepsilon = 0$  e questo ci dice che tutta l'energia viene prodotta nelle regioni interne, come ci aspettiamo dal fatto che le reazioni termonucleari hanno bisogno di una elevata temperatura per poter avvenire. Tuttavia, le reazioni termonucleari *non* sono le uniche a poter contribuire all'energia, in particolare anche la *contrazione gravitazionale* può produrre energia, e tale contributo non è incluso nell'eq. (3.29). Per capire come la contrazione gravitazionale possa contribuire all'energia, bisogna far riferimento al *teorema del viriale*.

### 3.5.2 Teorema del viriale

Per ogni sistema in equilibrio di particelle auto-gravitanti, come nel caso delle strutture stellari, vale il *teorema del viriale*:

$$2K + \Omega = 0 \quad (3.30)$$



**Figura 3.6:** Profilo di luminosità radiale del Sole. Nella zona evidenziata si ha  $L(r) = \text{const}$ , da cui, secondo eq. (3.29),  $\epsilon = 0$ . Questo ci dice che negli strati esterni della stella non viene prodotta energia e le reazioni termonucleari sono concentrate nell'internostellare, dove infatti le temperature sono più elevate.

dove  $K$  è l'energia cinetica del sistema e  $\Omega$  l'energia potenziale. L'eq. (3.30) dice sostanzialmente che a una contrazione ( $d\Omega < 0$ ) segue un aumento dell'energia cinetica, e quindi un aumento della temperatura. Scrivendo inoltre l'energia totale del sistema come  $U = K + \Omega$ , si ha

$$U = -\frac{\Omega}{2} + \Omega \implies U = \frac{\Omega}{2}$$

ovvero a una contrazione ( $d\Omega = 0$ ) segue una diminuzione dell'energia totale del sistema ( $dU < 0$ ).

Le due relazioni considerate precedentemente:

$$dU = \frac{d\Omega}{2} \quad dK = -\frac{d\Omega}{2} \quad (3.31)$$

mostrano che in ogni contrazione ( $d\Omega$ ) metà dell'energia è *emessa* e metà dell'energia è usata per incrementare la temperatura del caso. Possiamo riformulare quanto detto in un altro modo: ogni perdita di energia totale  $dU$  dovuta a emissioni genera una contrazione del sistema, che produce anche un incremento della temperatura interna.

Come stimare il contributo della contrazione gravitazionale alla luminosità di una stella? Se fosse elevato andrebbe corretta l'eq. (3.29). Per capirlo utilizziamo la (3.31) per scrivere

$$L = \frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \left| \frac{d\Omega}{dt} \right|$$

ovvero abbiamo scritto la luminosità in funzione della variazione di energia potenziale dovuta alla contrazione gravitazionale. Integriamo nel tempo:

$$\int_0^t L dt = \frac{1}{2} |\Omega|$$

A questo punto consideriamo un tempo caratteristico  $t^*$  approssimando  $L$  con un suo valore medio costante  $\bar{L}$ . Si può scrivere:

$$\bar{L} \cdot t^* = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{R}$$

dove abbiamo sostituito  $\Omega$  con l'espressione del potenziale gravitazionale. Quindi abbiamo trovato il così detto *tempo di Kelvin-Helmoltz*:

$$t^* = \frac{GM^2}{2LR} \quad (3.32)$$

Esso ci dà una *stima* del tempo durante il quale una stella è in grado di mantenere costante la sua luminosità per effetto della sola contrazione gravitazionale.

Facciamo una stima per il nostro Sole introducendo nella (3.32) i parametri  $G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$ ,  $M_\odot \sim 2 \times 10^{33} \text{ g}$ ,  $R_\odot \sim 7 \times 10^{10} \text{ cm}$  e  $L_\odot \sim 4 \times 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$ . Si ottiene:

$$t^*_{\text{Sole}} \sim 1.5 \times 10^7 \text{ anni}$$

ovvero, per il nostro Sole, l'energia gravitazionale può mantenere costante la luminosità per circa 15 milioni di anni (sono molto pochi). Questo farebbe pensare che la fonte principale di luminosità sia la contrazione gravitazionale per il nostro Sole, ma si rivela un'idea sbagliata perché attraverso fonti geologiche si è mostrato che l'età del Sole è dell'ordine dei miliardi di anni e che in tale tempo la luminosità del Sole è rimasta praticamente invariata. Questo dimostra che il grosso del contributo alla luminosità del Sole proviene dalle reazioni termonucleari e quindi l'equazione (3.29) risulta soddisfacente anche se non contempla il contributo della contrazione di gravità.

### 3.6 Gradiente radiativo e criterio di Schwarzschild

L'equazione del *gradiente radiativo* fornisce il profilo radiale delle variazioni di  $T$  all'interno della stella. Si può scrivere:

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} = -\frac{3\kappa\rho}{4\pi r^2} \frac{L(r)}{4acT^3} \quad (3.33)$$

Essa mostra che l'opacità e il flusso radiativo determinano quanto rapidamente  $T$  varia con  $r$ .

Utilizzando questa equazione è possibile determinare quando c'è convezione nella stella, utilizzando il seguente *criterio di Schwarzschild*:

$$\text{se } \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{rad}} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{\text{ad}} \implies \text{c'è convezione.} \quad (3.34)$$

in particolare, quando il criterio è verificato avverrà la convezione.

#### 3.6.1 Ricavare l'equazione

Per trovare il gradiente radiativo prima di tutto ricaviamo il gradiente di pressione di radiazione, derivando rispetto a  $r$  l'espressione (3.4). Si ottiene:

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = \frac{4}{3}aT^3 \frac{dT}{dr}$$

d'altra parte, il gradiente di radiazione dipende anche dall'*opacità* e dal *flusso* di radiazione. Si ricorda che l'opacità  $\kappa$  era stata introdotta nell'eq. (2.7) del par. 2.2.4, mentre il flusso,  $F_{\text{rad}}$ , è definito dall'eq. (2.17). In particolare, senza dare ulteriori specificazioni, possiamo esprimere il gradiente della pressione di radiazione come:

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c} F_{\text{rad}}$$

e mettendo insieme le ultime due relazioni si ottiene:

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{\text{rad}} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa \rho}{T^3} F_{\text{rad}}$$

con

$$F_{\text{rad}} = \frac{L_r}{4\pi r^2}$$

da cui segue immediatamente la (3.33). Come già detto, l'equazione fornisce il profilo radiale delle variazioni di  $T$  con  $r$  e mostra come l'opacità  $\kappa$  e il flusso radiativo  $F_{\text{rad}}$  influiscono sulla rapidità di variazione di  $T$  con  $r$ .

Il gradiente di temperatura ha un impatto cruciale sul meccanismo preponderante di trasporto di energia all'interno della struttura stellare. Introduciamo brevemente i meccanismi di trasporto di energia.

### 3.6.2 Meccanismi di trasporto di energia

I tre meccanismi di trasporto in una stella sono il *trasporto radiativo*, *convettivo* e *conduttivo*. Di seguito ne sono elencate le principali proprietà:

**trasporto conduttivo** I principali responsabili di questo meccanismo sono gli *elettroni* ed è efficiente solo se il gas è *degenere*. Infatti, in condizione di non degenerazione, ovvero se il gas è perfetto, il libero cammino medio è molto piccolo e un elettrone cede subito energia. Come visto, nel caso di un gas degenere (par. 3.4.5) le celle dello spazio delle fasi sono impacchettati in modo che i livelli energetici più bassi sono pieni, quindi gli elettroni percorrono una grande distanza prima di cedere energia (la quale deve essere di un ordine pari al primo livello energetico libero, che tendenzialmente sarà alto). In questo caso il trasporto conduttivo è efficiente e in questo modo è possibile trasportare l'energia dall'interno verso l'esterno. Tuttavia, questo meccanismo di trasporto non è quello preponderante.

**trasporto radiativo** Esso è dovuto alla radiazione trasportata dai *foton*i.

**trasporto convettivo** Con la convezione ho un rimescolamento del *gas* e dunque di porzioni di gas con composizioni chimiche diverse. Siccome la struttura chimica è cruciale per stabilire la struttura stellare e la sua evoluzione, è importante capire se è in atto questo meccanismo di trasporto energetico.

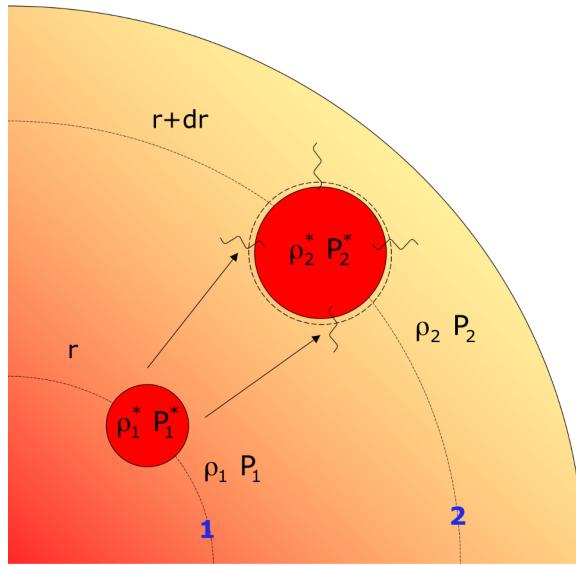
### 3.6.3 Criterio di Schwarzschild

Come evidenziato nel paragrafo precedente, stabilire se sia in corso un meccanismo di convezione è importante per realizzare dei corretti modelli della struttura stellare e dunque per capire correttamente l'evoluzione di una stella. Come discriminante si può utilizzare il *criterio di Schwarzschild* (eq. (3.34)). Semplicemente si tratta di un confronto tra il *gradiente radiativo* di temperatura e un valore di riferimento chiamato *gradiente adiabatico*. In particolare, nelle regioni in cui il gradiente radiativo è maggiore del gradiente adiabatico, è in corso la convezione, come stabilito dalla (3.34). Il gradiente adiabatico dipende dai calori specifici del gas e si può scrivere:

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{\text{ad}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (3.35)$$

dove

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{5}{3}$$



**Figura 3.7:** Raffigurazione del criterio di Schwarzschild. Se la bolla si sposta dalla posizione 1 e 2, può avvenire la convezione solamente se  $\rho_2^* < \rho_2$ . In caso contrario siamo in presenza di equilibrio stabile e la bolla viene respinta verso la posizione iniziale.

Per capire il criterio (3.34) consideriamo (fig. 3.7) una bolla di gas in una posizione 1 a distanza  $r$  rispetto al centro, di densità  $\rho_1^*$  e pressione interna  $P_1^*$ . Siano  $\rho_1$  e  $P_1$  rispettivamente la densità e la pressione dell’ambiente circostante la bolla in quella posizione. Immagino che essa si sposti in una posizione 2 a distanza  $r + dr$  dal centro, avendo una nuova densità  $\rho_2^*$  e una nuova pressione interna  $P_2^*$ . Analogamente a prima, siano  $\rho_2$  e  $P_2$  rispettivamente la densità e la pressione dell’ambiente circostante la bolla in quella posizione. Ho convezione nella stella solo se l’equilibrio è instabile, perché in caso di equilibrio stabile la bolla tenderebbe a tornare nella posizione originaria 1 e non sarebbe possibile lo spostamento di porzioni di gas nella stella. La condizione di equilibrio dipende dal rapporto della densità interna della bolla nel secondo caso,  $\rho_2^*$ , e la densità del gas circostante,  $\rho_2$ . In particolare:

$$\text{se } \rho_2^* > \rho_2 \implies \text{la bolla torna nella posizione iniziale 1.} \quad (3.36a)$$

$$\text{se } \rho_2^* < \rho_2 \implies \text{la bolla continua ad andare verso l’alto.} \quad (3.36b)$$

ed è semplice tradurre le espressioni (3.36) in termini dei gradienti di temperatura, ottenendo (3.34).

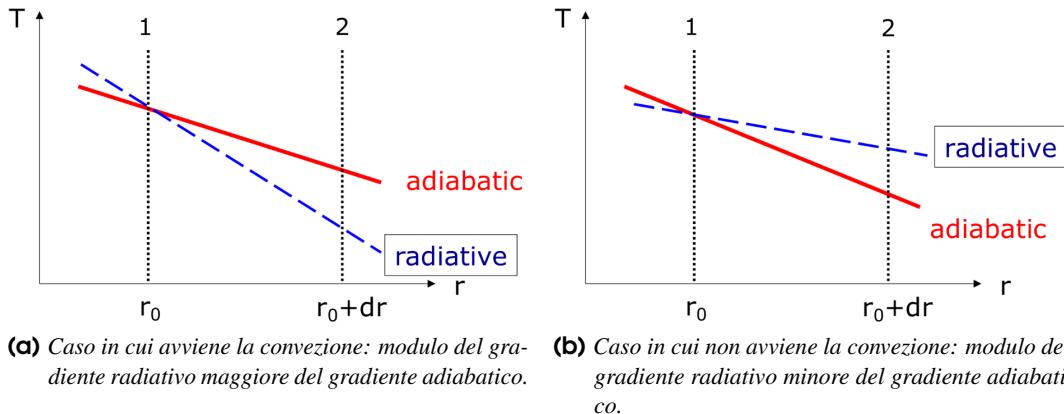
### 3.6.4 Esempio per il gas perfetto

Per capire meglio le condizioni (3.36) e il criterio di Schwarzschild (3.34), consideriamo il caso di un gas perfetto, in cui vale la legge (3.6). Si faccia riferimento alla figura 3.8. Consideriamo un caso in cui è possibile la convezione e un caso in cui essa non è possibile

#### Convezione possibile

Nel caso illustrato nella figura 3.8a la convezione è possibile, infatti in quel caso si ha:

$$abs * \frac{dT}{dr}_{rad} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad}$$



**Figura 3.8:** Applicazione del criterio di Schwarzschild nel caso di un gas perfetto.

si faccia attenzione al fatto che nel criterio di Schwarzschild (3.34) i gradienti sono espressi in modulo, quindi bisogna guardare la pendenza in modulo delle rette. In particolare, la bolla di gas di sposta da  $r_0$  fino a  $r_0 + dr$  e nella posizione  $r_0 + dr$  possiede una temperatura (curva rossa – profilo adiabatico) maggiore dell’ambiente circostante (curva blu – profilo radiativo). Per un gas perfetto, secondo la (3.6), a fissata pressione, a una maggiore temperatura corrisponde una densità più bassa. Quindi la bolla possiede una densità più bassa dell’ambiente circostante e tende a continuare il suo moto verso l’esterno. È dunque possibile la convezione.

### Convezione impossibile

Nel caso illustrato nella figura 3.8b la convezione *non* è possibile, infatti in quel caso si ha:

$$abs * \frac{dT}{dr}_{rad} < \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad}$$

In particolare, la bolla di gas di sposta da  $r_0$  fino a  $r_0 + dr$  e nella posizione  $r_0 + dr$  possiede una temperatura (curva rossa – profilo adiabatico) minore dell’ambiente circostante (curva blu – profilo radiativo). Per un gas perfetto, secondo la (3.6), a fissata pressione, a una minore temperatura corrisponde una densità più alta. Quindi la bolla possiede una densità più alta dell’ambiente circostante e viene respinta verso la posizione iniziale a  $r_0$ .

Si faccia riferimento alla figura 3.8b

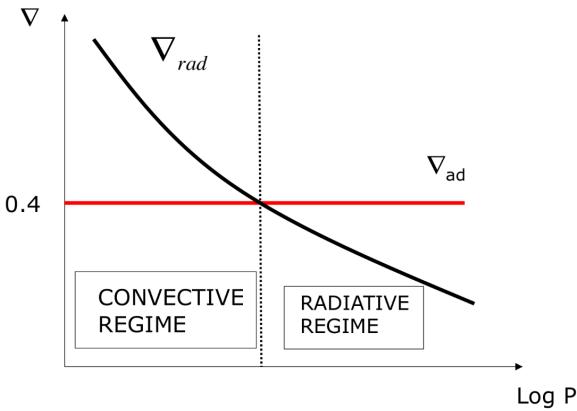
### 3.6.5 Gradiente di pressione e scala logaritmica

Il criterio di Schwarzschild è spesso scritto usando il gradiente di temperatura riferito alla *pressione* invece che al raggio e in scala logaritmica. Questo perché la temperatura è intimamente connessa con la pressione.

$$\frac{dT}{dP} \frac{P}{T} = \frac{d\log T}{d\log P} \equiv \nabla \quad (3.37)$$

L’impiego di  $\nabla$  semplifica la formulazione del criterio. Ad esempio, possiamo riscrivere l’espressione del gradiente adiabatico (3.35) nella seguente maniera:

$$\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{P}{T} \frac{dr}{dP} \frac{dT}{dr} \Big|_{ad} = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} \Big|_{ad}$$



**Figura 3.9:** Raffigurazione del criterio di Schwarzschild utilizzando  $\nabla$ .

da cui:

$$\nabla_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \quad (3.38)$$

che è semplicemente un numero. In particolare, con  $\gamma = 5/3$  si ottiene  $\nabla_{ad} = 0.4$  ed è possibile riscrivere il criterio di Schwarzschild (3.34) nella seguente maniera:

$$\text{se } \nabla_{rad} > \nabla_{ad} \implies \text{c'è convezione.} \quad (3.39)$$

Si faccia riferimento alla figura 3.9 per un sunto del criterio.

### 3.7 Opacità

L'opacità è una misura della resistenza della materia al flusso radiativo, ovvero alla transizione della radiazione. È una sorta di sezione d'urto per unità di massa.

$$\kappa = \kappa(\rho, T) \quad [\kappa] = \text{cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

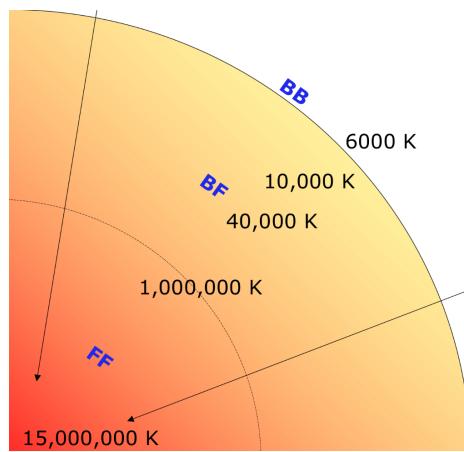
L'equazione dell'opacità in un modello stellare si può riassumere nel seguente set di equazioni, che saranno sviluppate nei paragrafi seguenti:

$$\kappa = \kappa(\rho, T) \begin{cases} \kappa_{BF} \propto 10^{25} Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ \kappa_{FF} \propto 10^{22} (X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \\ \kappa_E \propto 0.2(1+X) \end{cases} \quad (3.40)$$

I fenomeni che possono interferire con il passaggio di radiazione in una stella sono essenzialmente dovuti alla capacità degli elettroni di assorbire e/o deviare i fotoni, e si possono riassumere nei seguenti processi:

- Assorbimento bound-bound (BB)
- Assorbimento bound-free(BF)
- Assorbimento free-free (FF)
- Scattering elettronico (E)

i quali sono spiegati di seguito. La rilevanza di questi processi dipende principalmente da tre fattori:



**Figura 3.10:** Processi di assorbimento preponderanti in funzione della distanza dal centro. Andando verso il centro della struttura le temperature aumentano, quindi il numero di atomi completamente ionizzati e il numero di elettroni liberi aumenta. In superficie domina il BB perché le temperature sono minori e gli atomi sono ancora non ionizzati. Andando verso il centro inizia a dominare il BF perché alcuni atomi sono parzialmente ionizzati. Verso l'interno domina il FF perché quasi tutti gli atomi sono ionizzati.

- La composizione chimica del gas ( $X, Y, Z$ ).
- La temperatura.
- La densità.

In particolare, è la temperatura a stabilire il libello di ionizzazione e dell'eccitazione di ogni specie chimica. In figura 3.10 sono riportati i diversi processi di assorbimento in funzione della distanza dal centro stellare. È difficile una modellizzazione di tali processi, pertanto si utilizzano delle relazioni approssimate, note con il nome di *leggi di Kramer*, che saranno mostrate nei seguenti paragrafi.

### 3.7.1 Assorbimento bound-bound (BB)

Un elettrone legato a un atomo, in uno stato di energia  $E_1$ , cattura un fotone e passa a uno stato eccitato  $E_2$  *rimanendo legato all'atomo*. Il fotone catturato ha energia:

$$h\nu_{BB} = E_2 - E_1 \quad (3.41)$$

questo effetto *non* è rilevante negli interni stellari, siccome la maggior parte degli atomi sono completamente ionizzati a causa delle elevate temperature (fig 3.10). Tuttavia questo fenomeno è cruciale nell'*atmosfera* stellare ed è responsabile della formazione delle righe di assorbimento spettrale.

In particolare, tale fenomeno avviene a una determinata lunghezza d'onda, ovvero:

$$\lambda_{12} = h \frac{c}{E_2 - E_1} \quad (3.42)$$

Come detto, essendo questo fenomeno non rilevante negli interni stellari, non viene considerato nell'equazione dell'opacità.

### 3.7.2 Assorbimento bound-free (BF)

Un elettrone legato a energia  $E_1$  cattura un fotone e diventa libero, con energia  $E_\infty$ , producendo uno ione. Il fotone catturato ha energia

$$h\nu_{BF} = E_\infty - E_1 > \chi_{\text{ion}} \quad (3.43)$$

dove  $\chi_{\text{ion}}$  è l'energia di ionizzazione dell'atomo.

Tale fenomeno, dunque avviene a una lunghezza d'onda maggiore di una determinata soglia, ovvero:

$$\lambda < \lambda_{\text{soglia}} \quad (3.44)$$

Rispetto all'atmosfera, in cui domina il BB, andando verso il centro inizierà progressivamente a dominare il BF a causa dell'aumento della temperatura e del fatto che alcuni atomi iniziano a essere parzialmente ionizzati (fig 3.10). Si noti come *non ci siano limitazioni alla lunghezza d'onda a cui tale fenomeno può avvenire*. La corrispondente legge di Kramer, che compare nella (3.40), si può scrivere nella seguente maniera:

$$\kappa_{BF} \propto 10^{25} Z(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (3.45)$$

L'opacità  $\kappa_{BF}$  dipende da  $Z$  perché, ovvero dall'abbondanza degli elementi più pesanti dell'elio, perché affinché il BF possa avvenire, è necessario che siano ancora presenti degli atomi con elettroni legati. A causa della ionizzazione dell'idrogeno e dell'elio verso gli interni stellari, si possono trovare elettroni legati solamente negli elementi più pesanti.

### 3.7.3 Assorbimento free-free (FF)

Un elettrone libero, di energia  $E_1$ , cattura un fotone e la sua energia aumenta a  $E_2$ . Il fotone catturato ha energia:

$$h\nu_{FF} = E_2 - E_1 \quad (3.46)$$

senza restrizioni come nei casi precedenti, perché il sistema non è legato. Questo processo è dominante negli interni stellari, perché lì la temperatura è così elevata che gli atomi sono tutti ionizzati (fig 3.10). Non ci sono limitazioni alla lunghezza d'onda in cui tale fenomeno può avvenire. La corrispondente legge di Kramer, che compare nella (3.40), si può scrivere nella seguente maniera:

$$\kappa_{FF} \propto 10^{22}(X+Y)(1+X) \frac{\rho}{T^{3.5}} \quad (3.47)$$

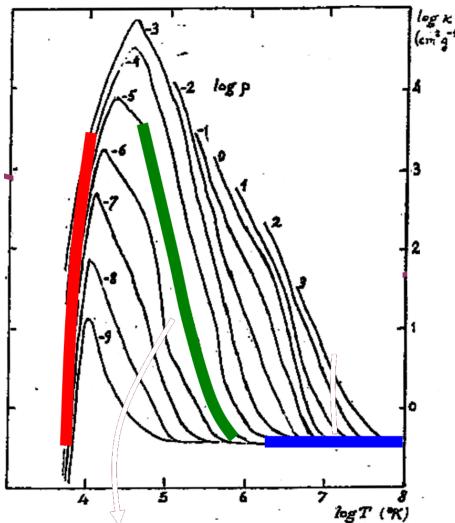
L'opacità  $\kappa_{FF}$  dipende da  $X$  e  $Y$  perché il FF dipende dagli elettroni liberi e l'idrogeno e l'elio, che sono ionizzati alle alte temperature degli interni stellari, sono di gran lunga gli elementi più abbondanti, e dunque anche i principali fornitori di elettroni liberi.

### 3.7.4 Scattering elettronico (E)

Un elettrone libero interagisce con un fotone, cambiando al propria traiettoria. Non si tratta di un reale assorbimento, ma agisce comunque come un effetto di opacità perché essendo il fotone deviato dal fascio, l'intensità del fascio stesso diminuisce. La corrispondente legge di Kramer, che compare nella (3.40), si può scrivere nella seguente maniera:

$$\kappa_E \propto 0.2(1+X) \quad (3.48)$$

Si noti come *non ci sia dipendenza dalla temperatura  $T$  e dalla densità  $\rho$*  e come esso *dipende solo da  $X$* , poiché l'idrogeno è l'elemento più abbondante. Lo scattering diventa dominante solamente ad alte temperature, perché per gli altri processi  $\kappa \propto T^{-3.5}$ .



**Figura 3.11:** Diagramma  $\log \kappa - \log T$ . Sono rappresentate curve a diverso  $\log \rho$ . A  $T \sim 10^4$  K, curva rossa, l'opacità aumenta perché è in atto la ionizzazione dell'idrogeno. Nella curva verde si ha  $\kappa \propto T^{-3.5}$  come indicato dalla eq. (3.40). Nella curva blu domina lo scattering elettronico e l'opacità è costante come atteso.

### 3.7.5 Recap

Per riassumere l'andamento dell'opacità rappresentato dall'eq. (3.40), facciamo riferimento alla figura 3.11. Possiamo notare che, in generale, l'opacità aumenta con la densità, infatti si ha  $\kappa \propto \rho$ . Inoltre si può notare che per temperature nelle regioni a  $T \sim 10^4$  K l'opacità aumenta, infatti questa è la finestra di temperatura che corrisponde alla *ionizzazione dell'idrogeno*. Ovviamente, se l'idrogeno *non* è ionizzato, allora i processi BF, FF ed E sono impossibili, poiché necessitano di elettroni liberi. D'altra parte, all'aumentare della temperatura, dunque al grado di ionizzazione degli elementi presenti nella struttura stellare, l'opacità decresce secondo (3.40), con  $\kappa \propto T^{-3.5}$ . Ad altissime temperature, invece, domina lo scattering elettronico e la curva si appiattisce, come ci si aspetta.

## 3.8 Produzione di energia tramite reazioni termonucleari

Le *reazioni termonucleari* sono la principale fonte di energia in una stella. La *fusion* di elementi leggeri in elementi più pesanti produce non solo *energia*, ma anche *nuovi elementi*. Come nel caso dell'opacità i processi sono molto complessi e utilizzeremo solamente delle equazioni approssimate. Si faccia attenzione al fatto che i processi di fusione termonucleare coinvolgono solamente i *nuclei* dell'atomo, perché le temperature sono così elevate ( $T > 10^6$  K) che tutti gli atomi si possono considerare completamente ionizzati.

L'equazione di produzione di energia attraverso *reazioni termonucleari* appare nella seguente maniera:

$$\epsilon = \epsilon(X, \rho, T) \begin{cases} \epsilon_{PP} = \epsilon_1 \rho X^2 T_6^\alpha & \alpha \in [3.5 - 6] \\ \epsilon_{CN} = \epsilon_2 \rho X X_{CN} T_6^\beta & \beta \in [13 - 20] \\ \epsilon_{3\alpha} = \epsilon_3 \rho^2 Y^3 T_8^\gamma & \gamma \in [20 - 30] \end{cases} \quad (3.49)$$

È dapprima necessario introdurre dei concetti di base sulla reazioni termonucleari.

### 3.8.1 Ripasso di fisica nucleare

#### Numero atomico e numero di massa

Nel presente paragrafo si farà una veloce rassegna dei concetti di fisica nucleare utili per proseguire il discorso.

Ogni elemento chimico è univocamente identificato dal suo *numero atomico*  $Z$ , corrispondente al numero di protoni nel nucleo. Il *peso atomico*  $A$  è il numero totale di nucleoni, ovvero la somma di protoni e neutroni. Gli *isotopi* hanno stesso  $Z$  ma diverso  $A$ .

#### Difetto di massa

Nelle reazioni di fusione termonucleare, nuclei di elementi leggeri si fondono tra loro generando nuclei di elementi più pesanti ( $Z$  più alto) ed energia. Pertanto, a causa della nota relazione massa-energia, la somma delle masse dei nuclei leggeri che fondono tra loro è maggiore della massa del nucleo più pesante che viene generato, e si può scrivere:

$$E = \Delta mc^2 \quad (3.50)$$

Guardando la carta dei nuclidi che rappresenta l'energia di legame per nucleone (fig. 3.12), possiamo stabilire che è grazie alle reazioni di fusione del nucleo delle stelle che sono stati prodotti tutti gli elementi più pesanti dell'elio ( $Z = 2$ ) fino al ferro ( $Z = 26$ ), come verrà riassunto successivamente.

#### Energia di legame

All'interno del nucleo atomico, i nucleoni sono legati tra loro dalla *forza forte*, la quale agisce su distanze estremamente piccole ( $\sim 10^{-12}$  cm –  $10^{-13}$  cm). La massa totale del nucleo è sempre minore della somma di tutti i nucleoni che lo costituiscono. Questo si spiega attraverso il difetto di massa, eq. (3.50), e permette di definire l'*energia di legame* come:

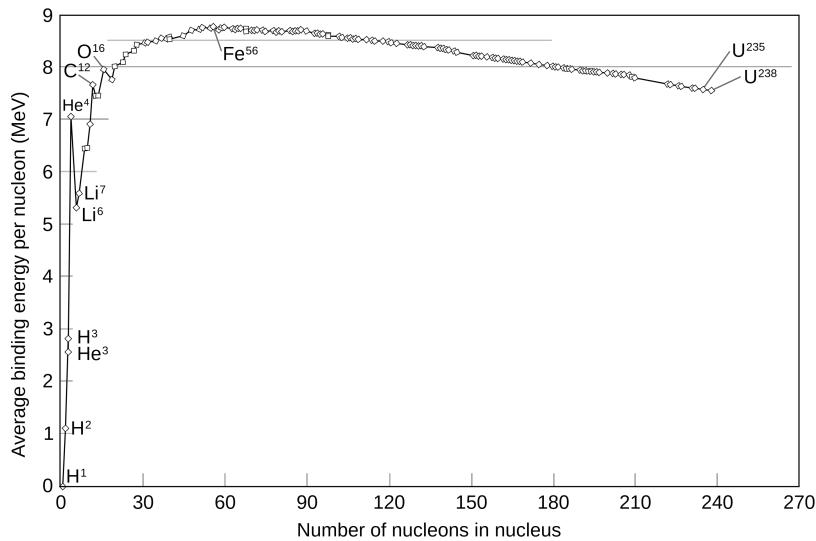
$$E(Z, N) = [Zm_p + Nm_n - m(Z, n)] c^2 \quad (3.51)$$

con  $Z$  il numero di protoni,  $N$  il numero di neutroni,  $m_p = 1.672 \times 10^{-24}$  g la massa del protone,  $m_n = 1.675 \times 10^{-24}$  g la massa del neutrone e  $m(Z, n)$  la massa del nucleo. Questo significa che quando si forma un nuovo nucleo stabile, una certa frazione di massa viene trasformata in energia secondo la (3.51), ovvero,  $E(Z, N)$  è l'energia che viene prodotta quando si forma un nuovo nucleo stabile, ovvero  $E(Z, N)$  è l'energia che bisogna fornire ad un nucleo per spaccarlo nei singoli nucleoni che lo costituiscono.

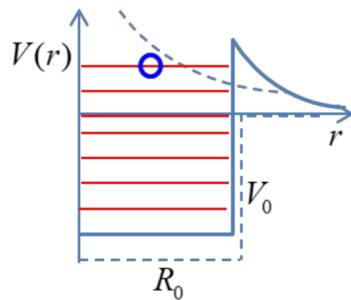
#### Energia di legame per nucleone dei nuclidi stabili

Consideriamo l'*energia di legame media per nucleone*, plottata in fig. 3.12, e corrispondente, secondo la (3.51) a  $E(Z, N)/A$ . Dalla figura possiamo trarre alcune considerazioni generali:

- ci sono configurazioni nucleari particolarmente stabili quali  ${}^4\text{He}$ ,  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{16}\text{O}$  ...
- a parte queste eccezioni, l'energia di legame media per nucleone,  $E/A$ , ha un andamento regolare. Aumenta rapidamente con il numero di nucleoni fino ad un valore dell'ordine degli 8 Mev per poi diminuire assai lentamente (*proprietà di saturazione*).
- i nuclei più stabili sono il  ${}^{56}\text{Fe}$  e il  ${}^{62}\text{Ni}$ . Ciò significa che i nuclei pesanti alla sua destra possono raggiungere configurazioni più stabili ( $B/A$  più elevato) diminuendo il numero di nucleoni  $A$ , ovvero frazionandosi in nuclei più piccoli. Mentre i nuclei leggeri alla sua sinistra possono raggiungere configurazioni più stabili ( $B/A$  più elevato) aumentando  $A$ , ovvero aggregandosi in nuclei più grandi. Detto in altri termini ciò significa che le reazioni di fissione dei nuclei pesanti e quelle di fusione dei nuclei leggeri sono esoenergetiche ovvero producono energia qualora si sia in grado di innescarle.



**Figura 3.12:** Energia di legame media per nucleone. Si noti come  ${}^4\text{He}$  sia particolarmente stabile, fino al ferro domina la fusione e dopo il ferro domina la fissione.



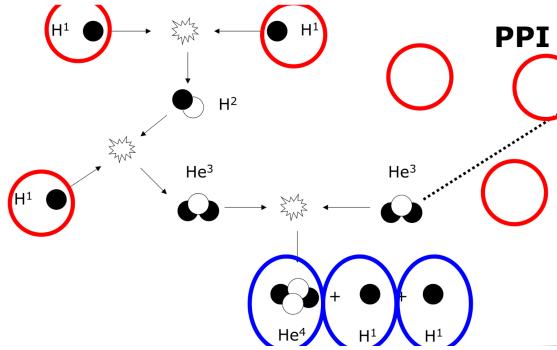
**Figura 3.13:** Barriera di potenziale. È data dalla sovrapposizione del potenziale attrattivo della forza forte, che agisce per  $r < R_0$  e della forza repulsiva Coulombiana, che agisce per  $r > R_0$  e vale  $E_c = Z_1 Z_2 e^2 / r$ .

- dal punto precedente consegue che le reazioni di  *fusione dei nuclei leggeri e fissione dei nuclei pesanti* costituiscono la doppia opportunità offerta dalla fisica nucleare per la produzione di energia.

### Barriera di potenziale ed effetto tunnel

Da un punto di vista *classico* la reazione di fusione avviene se due nuclei riescono ad avvicinarsi a meno della distanza  $R_0$  necessaria per far entrare in gioco le interazioni forti, ovvero solo dopo aver superato la barriera di potenziale in fig. 3.13

Facendo una stima molto rozza, possiamo trovare che la barriera di potenziale è circa 1000 volte superiore all'energia termica media delle particelle, quindi, anche ad elevatissime temperature, è molto improbabile che le reazioni possano avvenire. Dal punto di vista quantistico questo si spiega con il così detto *effetto tunnel*.



**Figura 3.14:** Catena protone-protone (PPI).

### Principali catene di fusione termonucleare nelle stelle

Di seguito sono elencate le principali catene di fusione nelle stelle, le quali saranno approfondite nei successivi paragrafi:

**Catena PP** Processo di bruciamento dell'idrogeno. È un processo di cattura protonica. Avviene per  $T \simeq 10^7$  K.

**Catena CNO** Processo di bruciamento dell'idrogeno. È un processo di cattura protonica. Avviene per  $T \simeq 1.8 \times 10^7$  K.

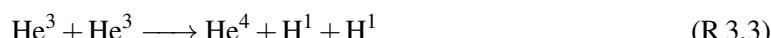
**Catena 3-alpha** Processo di bruciamento dell'elio. Avviene per temperature  $T \simeq 1.5 \times 10^8$  K.

**Cattura alpha** Il carbonio e materiali più pesanti catturano particelle  $\alpha$  per produrre materiali più pesanti. Avviene per  $T > 5 \times 10^8$  K.

#### 3.8.2 Catena protone-protone

##### Catena PPI

La catena *protone-protone PPI* è rappresentata in fig. 3.14. È una reazione di bruciamento dell'idrogeno e dà elio. Può essere scritta nella seguente maniera:



ovvero, in definitiva da 4 H ottengo 1 He<sup>4</sup>, e siccome 1 He<sup>4</sup> pesa meno di 4 H, dall'eq. (3.50) possiamo stabilire che la reazione è *esotermica*.

Facciamo una stima dei contributi energetici. Il neutrino  $\nu$  porta un contributo energetico *negativo*, perché avendo una scarsa interazione con la materia tendono a sfuggire dalla struttura stellare. Senza aggiungere ulteriori specificazioni, si ricordi che, tenuti in considerazione tutti i contributi, l'energia totale prodotta dalla reazione PPI è:

$$E_{PPI} = 26.2 \text{ MeV} = 4.2 \times 10^{-5} \text{ erg} \quad (3.52)$$

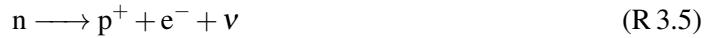
Senza scendere troppo nei dettagli, evidenziamo che il *tempo scala* della reazione R 3.1 è  $t_1 = 1.4 \times 10^9$  yr, il tempo scala della reazione R 3.2 è  $t_2 = 6$  s e il tempo scala della reazione R 3.3 è  $t_3 = 10^6$  yr. Dunque, ricordando che la *probabilità* che avvenga la reazione è proporzionale all'inverso del tempo scala, possiamo stabilire che la prima reazione è molto improbabile che

avvenga, mentre la seconda è molto probabile. In particolare, concentriamoci sulla prima reazione (R 3.1). Essa trasforma due protoni liberi ( $H$ ) in un nucleo costituito da un protone e un neutrone ( $H^2$ ). Significa che uno dei due protoni si è trasformato in neutrone. Quindi, affinché la reazione possa avvenire, è necessario che ci sia un *decadimento  $\beta$* , espresso dalla seguente equazione:



Tuttavia, il decadimento  $\beta^+$  per un protone libero è essenzialmente impossibile, poiché la massa del protone è minore della massa del neutrone (eq. (3.50)). Nonostante ciò, nel nucleo delle stelle tale reazione può avvenire poiché ci sono tantissimi protoni, dunque anche se la probabilità è bassissima, questa è compensata dall'elevato numero.

D'altra parte, il *decadimento  $\beta^-$* , secondo il quale un neutrone decade in protone, è un processo spontaneo, in quanto il suo tempo scala è dell'ordine di 800 s e tende ad eliminare tutti i neutroni liberi:



Tuttavia negli interni stellari possono comunque esserci neutroni liberi, i quali contribuiscono alla formazione di elementi più pesanti, come vedremo successivamente.

### Catena PPII e PPIII

Consideriamo le reazioni R 3.1 e R 3.2. Con una probabilità  $P_1 = 69\%$  può avvenire, successivamente, la reazione R 3.3, dando origine alla catena PPI. Tuttavia, non si tratta dell'unica possibilità. Infatti, con una probabilità residua del 31%, può avvenire la seguente reazione:



Se inizialmente prevale la PPI, dopo un po' che questa è attiva l'ambiente si popola di  $He^2$  e può facilmente avvenire la R 3.6, che produce energia. Se è attivo tale canale, quasi sempre la catena prosegue con la PPII (fig. 3.15), con una probabilità  $P_2 = 99.7\%$ , nella seguente maniera:

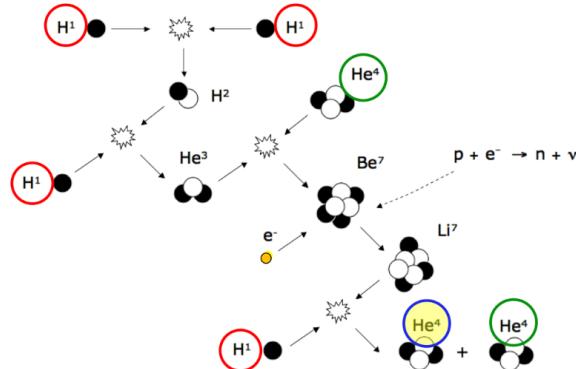


In particolare, nella R 3.9 il  $Be^8$  è instabile e si spacca in due nuclei di  $He^4$ , producendo energia, a causa della sua elevata stabilità, come si nota anche in fig. 3.12.

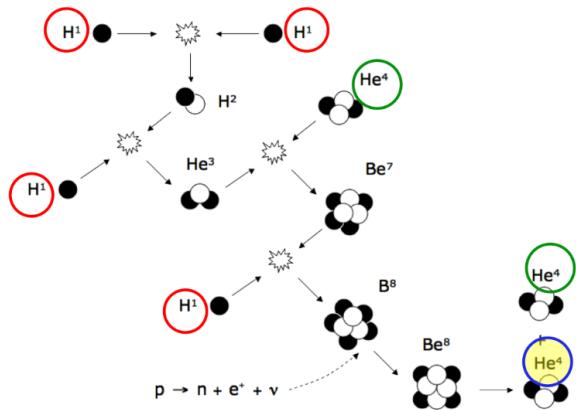
Con una probabilità residua di  $P_3 = 0.3\%$ , la R 3.6 può proseguire con una catena PPIII (fig. 3.16), nella seguente maniera:



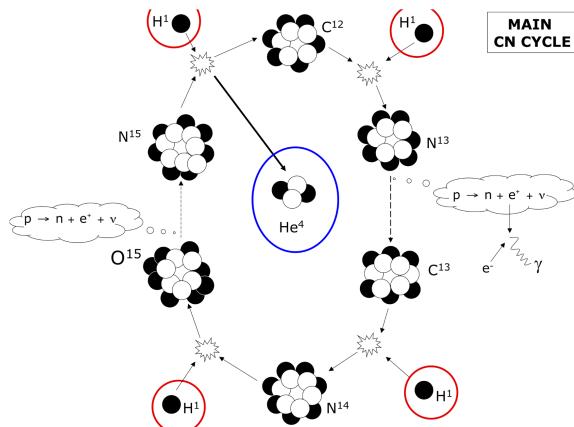
In tutti i casi, tuttavia, brucio 4H per generare 1 $He^4$ , producendo un'energia di  $\sim 20$  Mev. In particolare si ha:  $E_{PPI} = 26.2$  Mev,  $E_{PPII} = 25.7$  Mev e  $E_{PPIII} = 19.3$  Mev.



**Figura 3.15:** Catena protone-protone (PPII).



**Figura 3.16:** Catena protone-protone (PPIII).



**Figura 3.17:** Catena CN–NO. Partendo da  $C^{12}$ , la parte sinistra rappresenta il ramo rapido, mentre la parte destra, che parte da  $N^{14}$  rappresenta il ramo lento.

### 3.8.3 Catena CNO

Un'altra possibile catena di bruciamento dell'idrogeno, è la così detta *catena CNO*, detta anche *CN–NO*. A differenza della precedente (par. 3.8.2), richiede la presenza di carbonio, azoto e ossigeno. Si noti che questi ultimi elementi *non* sono prodotti dalla catena di reazione, ma devono essere già presenti nel gas, agendo come catalizzatori. Il ciclo principale della catena è raffigurato in fig. 3.17 e può essere sintetizzato dalle seguenti reazioni:



In totale il ciclo utilizza 4H e genera 1He<sup>4</sup>. Facendo un computo delle energie, si ha:

$$E_{CNO} = 25 \text{ MeV} \simeq 2 \times 10^{-5} \text{ erg} \quad (3.53)$$

dello stesso ordine di grandezza dell'energia delle catene PP (3.52). Senza approfondire tutti i tempi scala, si sottolinea che quello della reazione R 3.16 è dell'ordine di  $3.2 \times 10^8$  yr, dividendo la catena in un ramo rapido (da R 3.13 a R 3.16) e un ramo lento (da R 3.16 a R 3.18 e nuovamente R 3.13). Quindi, nelle stelle in cui avviene il ciclo CNO mi aspetto che, se il materiale processato va verso la superficie per convezione, deve esserci una variazione delle abbondanze chimiche. In particolare, mi aspetto che l'abbondanza del carbonio diminuisca e quella dell'azoto e dell'ossigeno aumentino. Infine, sottolineiamo che questa reazione è un prototipo di reazione di cattura protonica.

### 3.8.4 Il problema dell'elio

Dopo aver visto alcune catene di bruciamento dell'idrogeno, soffermiamoci sul *problema dell'elio*. Esso consiste nel fatto che l'abbondanza di He che si misura nell'Universo è troppo alta per essere spiegata solo in base al bruciamento dell'idrogeno negli interni stellari.

Considerato che nell'Universo si misura un'abbondanza di He pari a

$$Y \sim 0.24 - 0.28 \quad (3.54)$$

Stimiamo, quindi, quanto He può essere stato prodotto dalla stella da quando si è formato l'Universo, ovvero in un tempo di Hubble ( $t_H \sim 13 \text{ Gyr}$ ), facendo un conto per la Via Lattea, della quale conosciamo la massa  $M_G$  e la luminosità  $L_G$

$$M_G \sim 10^{12} M_\odot \quad M_G \sim 10^{11} L_\odot$$

e supponendo che tutta la luminosità della Galassia venga dal bruciamento di idrogeno in elio e che sia rimasta sempre costante. In questo modo dovrei sovrastimare il valore reale. Ricordando che la luminosità è l'energia prodotta per unità di tempo (par. 2.2.2), per  $L_G$ , in un tempo  $t_H$  si trova un'energia:

$$E_{\text{tot}} \simeq L_G t_H \sim 1.6 \times 10^{62} \text{ erg}$$

che rappresenta l'energia totale prodotta dal bruciamento di H in He da quando si è formata la Galassia. Considerato che l'energia di legame di un nucleo di He è

$$E_{\text{b, He}} \sim 4.5 \times 10^{-5} \text{ erg}$$

e che può essere pensata come l'energia prodotta dal bruciamento di 4 nuclei di H in un nucleo di He, possiamo trovare il numero di atomi di He<sup>4</sup> che si sono formati dalla formazione della Galassia:

$$N_{\text{He}} = \frac{E_{\text{tot}}}{E_{\text{b, He}}} \simeq 3.5 \times 10^{66}$$

Possiamo pensare questo numero come il numero di reazioni di bruciamento di idrogeno che sono avvenute. Ora, dalla massa di un atomo di elio,  $m_{\text{He}} \sim 6.64 \times 10^{-24} \text{ g}$ , possiamo ricavare la massa totale di He prodotta in un tempo di Hubble:

$$M_{\text{He}} = N_{\text{He}} m_{\text{He}} \sim 2.4 \times 10^{43} \text{ g}$$

Infine, usando  $M_G$  possiamo trovare la frazione in massa di elio prodotta dalla Via Lattea da quando l'universo si è formato:

$$Y = \frac{M_{\text{He}}}{M_G} \sim 0.01 \quad (3.55)$$

Confrontando la (3.54) con la (3.55), notiamo come l'abbondanza di elio misurata sia circa 20 volte maggiore di quella stimata. Questo significa che una frazione rilevante di He deve essere stata prodotta da un altro processo, molto più efficiente e primordiale: si tratta del *Big Bang*. Infatti, un punto rilevante che esso riesce a spiegare è la formazione di *deuterio* ( $\text{H}^2$ ), processo molto difficile nelle stelle a causa della carenza di neutroni liberi, che decadono spontaneamente in protoni per il decadimento  $\beta^-$  (R 3.5). Tuttavia, nei primi minuti successivi al Big Bang, c'erano molti neutroni liberi disponibili, e dunque la seguente catena di reazioni spiega la formazione di una grande quantità di elio subito dopo il Big Bang:



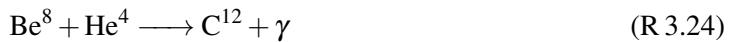
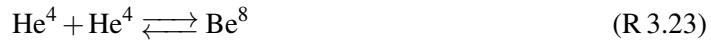


Tale *nucleosintesi primordiale* si è fermata all'elio e non ha prodotto elementi più pesanti, poiché le reazioni successive di cattura neutronica o protonica avrebbero prodotto elementi instabili. In definitiva, riteniamo che gran parte dell'elio sia stato prodotto durante il Big Bang, mentre gli elementi più pesanti siano prodotti negli interni stellari.

### 3.8.5 Catena 3-alpha

La *catena 3- $\alpha$*  è una catena di bruciamento dell'elio in carbonio. Si ricordi che una particella  $\alpha$  non è altro che un nucleo di elio. Vediamo quando tale catena si innesca.

Quando il nucleostellare è costituito quasi interamente da elio, le reazioni di bruciamento dell'idrogeno cessano e la struttura va fuori dall'equilibrio idrostatico. In questa situazione prevale la forza gravitazionale che fa contrarre il nucleo, provocando un conseguente aumento della temperatura. Quando le temperature raggiungono  $T \sim 1.5 \times 10^8 \text{ K}$ , può avvenire la reazione di fusione termonucleare di He. Le due reazioni salienti della catena 3- $\alpha$  sono le seguenti:



Come si può notare, la reazione R 3.23 è reversibile, e in particolare, a causa dell'elevata instabilità di  $\text{Be}^8$ , appena questo si forma, in un tempo molto breve tende a spaccarsi nuovamente in  $2\text{He}^4$ . Tuttavia, in questo caso l'abbondanza di He è così elevata che  $\text{Be}^8$ , prima di decadere, si fonde con un altro  $\text{He}^4$ , secondo la reazione R 3.24.

In definitiva  $2\text{He}^4$  vengono trasformati in un  $\text{C}^{12}$ . Facendo un computo dell'energia si trova:

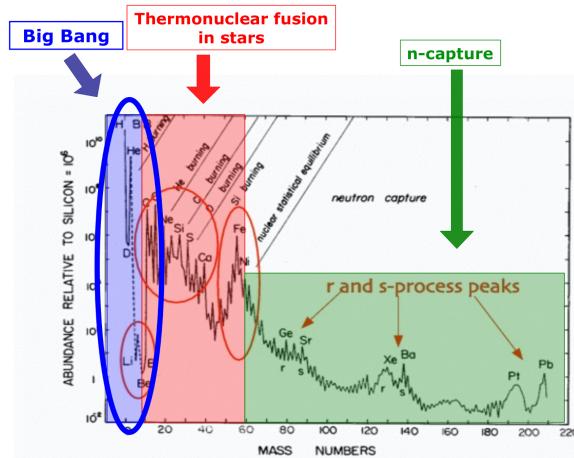
$$E_{3\alpha} = 7.3 \text{ MeV} \simeq 1.2 \times 10^{-5} \text{ erg} \quad (3.56)$$

e possiamo notare che viene prodotta molta meno energia dei processi di bruciamento dell'idrogeno, (3.52) e (3.53). In particolare, l'energia per unità di massa prodotta dal bruciamento dell'elio è  $\sim 10\%$  di quella prodotta dal bruciamento dell'idrogeno. Questo ha un impatto sui *tempi di evoluzione stellare*: la fase in cui viene bruciato idrogeno nel nucleo, detta *sequenza principale* è molto più lunga della fase in cui viene bruciato elio nel nucleo, detta *red clump* o *horizontal branch*.

A questo punto, se la struttura è termoregolata (gas non degenere), esaurito l'elio, possono continuare processi di bruciamento di materiali sempre più pesanti, fino al silicio, che genera ferro. Infatti, dopo il ferro (fig. 3.12) i processi di fusione sono endotermici. Non ci soffermeremo sui dettagli di tali reazioni, tuttavia vogliamo richiamare l'attenzione sul fatto che durante tutte queste reazioni vengono prodotte tante particelle  $\alpha$ . Che fine fanno?

### 3.8.6 Processi di cattura alpha

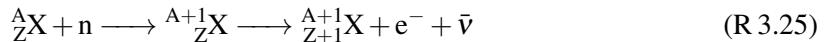
Le particelle  $\alpha$  possono essere catturate da particelle più pesanti generando elementi pesanti attraverso reazioni che necessitano di temperature più basse della fusione. Gli elementi prodotti da queste reazioni sono detti *elementi- $\alpha$*  e sono sostanzialmente tutti gli elementi dal carbonio al silicio. In generale, è più conveniente per un atomo pesante catturare una particella  $\alpha$  che fondersi con essa, perché la temperatura di innesco è più bassa. Ovviamente, posso arrivare fino al ferro. E per gli elementi più pesanti?



**Figura 3.18:** Abbondanze degli elementi divise per i processi che li hanno generati in maniera preponderante.

### 3.8.7 Processi di cattura neutronica

Attraverso processi di *cattura neutronica* si spiega la presenza di elementi più pesanti del ferro. Essi consistono nella cattura di un neutrone da parte di un elemento, il quale rimane lo stesso elemento chimico ( $Z$  non varia), ma diventa un suo isotopo (il numero di massa  $A$  aumenta di 1). Tale isotopo spesso è instabile e decade in un elemento che ha un numero atomico maggiore. Si può riassumere nella seguente reazione:



La catena può proseguire in questo moto, tuttavia non scendiamo nei dettagli. In generale, le catture elettroniche si dividono in catture *lente*, che producono *elementi s*, e catture *rapide*, che producono *elementi r*. Per capire in quale dei due casi si è, si compara il tempo di decadimento dell'isotopo con il tempo di acquisizione del neutrone.

Affinché le reazioni di cattura neutronica possano avvenire, è necessario che ci siano neutroni liberi che possano essere catturati, tuttavia, per il decadimento  $\beta^-$  (R 3.5), il quale è molto veloce e probabile, un neutrone tende a decadere in protone. Le principali sorgenti di neutroni per i processi s sono i processi  $\alpha$  (par. 3.8.6), i quali avvengono nel *ramo asintotico delle giganti*, come vedremo in seguito. Per i processi r, invece, la fonte principale di neutroni liberi è la fotodisintegrazione del ferro, che avviene a temperature alte durante l'esplosione di una supernova di tipo II, di cui parleremo successivamente.

### 3.8.8 Tasso di produzione di energia

I processi visti finora, riassunti in tab. 3.1 e i cui prodotti sono raffigurati in fig. 3.18, rappresentano la fonte principale di energia in una stella. Ci proponiamo ora di calcolare il *tasso di produzione di energia*  $\epsilon$  per una stella, ovvero l'energia prodotta per unità di massa e unità di tempo.

Essa può essere stimata così:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{N_r} E_r \frac{N_r}{\text{g s}} = \sum_{i=1}^{N_r} E_r \frac{N_r}{\text{cm}^3 \text{s}} \frac{\text{cm}^3}{\text{g}} \quad (3.57)$$

**Tabella 3.1:** Principali reazioni nucleari.

Processo	Temperatura (K)	Tempo scala (yr)
Elementi leggeri	$\sim 10^6$	$\sim 10^5$
Catena PP	$\sim 10^7$	$\sim 10^{10}$
Catena CNO	$\sim 10^7$	$10^9$
Catena $3-\alpha$	$> 10^8$	$10^7$
Bruciamento carbonio	$\sim 10^9$	$10^5$
Bruciamento Ossigeno	$> 10^9$	$10^5$
Processo s	$> 10^8$	$10^3\text{--}10^7$
Processo r	$> 10^{10}$	$10\text{s}\text{--}100\text{s}$

dove con  $i \in [N_r]$  si sta sommando sulle varie reazioni della catena in considerazione,  $E_r$  è l'energia prodotta da ciascuna reazione,  $N_r/\text{cm}^3\text{s}$  è il numero di reazioni per unità di volume e di tempo e  $\text{cm}^3/\text{g}$  rappresenta l'inverso della densità della materia stellare. Essa dipende da:

- Carburante disponibile
- Temperatura (le reazioni si innescano dopo una certa soglia)
- Densità

In un modello stellare si esprime  $\varepsilon$  in maniera approssimata, in base alle proprietà macroscopica della struttura. In particolare possiamo scrivere:

$$\varepsilon_{\text{PP}} = \varepsilon_1 \rho X^2 T_6^{v_{\text{PP}}} \quad v_{\text{PP}} \in [3.5 - 6] \quad (3.58\text{a})$$

$$\varepsilon_{\text{CN}} = \varepsilon_2 \rho X X_{\text{CN}} T_6^{v_{\text{CN}}} \quad v_{\text{CN}} \in [13 - 20] \quad (3.58\text{b})$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_3 \rho^2 Y^3 T_8^{v_{3\alpha}} \quad v_{3\alpha} \in [20 - 30] \quad (3.58\text{c})$$

dove  $T_6$  significa che la temperatura è espressa in unità di  $10^6\text{ K}$ , mentre  $T_8$  significa che la temperatura è espressa in unità di  $10^8\text{ K}$ .  $X$  è l'abbondanza dell'idrogeno,  $Y$  l'abbondanza dell'elio e  $X_{\text{CN}}$  l'abbondanza di carbonio e azoto. Si noti la mostruosa dipendenza dalla temperatura delle (3.58), il che evidenzia che reazioni termonucleari stabili possono avvenire solamente in ambienti termo-nucleari, ovvero in cui il gas può essere considerato perfetto. Infatti, in ambienti degeneri, in cui la pressione non dipende dalla temperatura, siccome piccole variazioni di energia producono una variazione enorme della creazione di energia, la struttura può esplodere. Come si può notare, queste sono le espressioni che compaiono nell'equazione (3.49).

### 3.9 Riassunto sul modello stellare.

Con le 7 equazioni presentate nel par. 3.1 abbiamo un sistema di 7 equazioni in 7 incognite per descrivere la struttura di una stella. In particolare, le incognite sono:

- La pressione  $P$
- La massa  $M$
- La densità  $\rho$
- La luminosità  $L$
- L'opacità  $\kappa$
- Il tasso di produzione di energia  $\varepsilon$

Queste equazioni descrivono l'internostellare di una stella , dandomi in output la sua *luminosità*. L'altro parametro di cui ho bisogno è la *temperatura superficiale* della stella. Per ottenerla ho bisogno di un modello della sua atmosfera.



## 4. Modello di atmosfera stellare

### 4.1 Profondità ottica

Per realizzare un modello dell'atmosfera stellare si procede in maniera simile alla modellizzazione dell'interno stellare. Tuttavia, come variabile, invece della distanza dal centro,  $r$ , si utilizza la *profondità ottica*. Infatti, le distanze dal centro sono molto elevate, pertanto è conveniente avere una misura della distanza dalla superficie della stella.

#### 4.1.1 Profondità ottica verticale

La profondità ottica è definita nella seguente maniera:

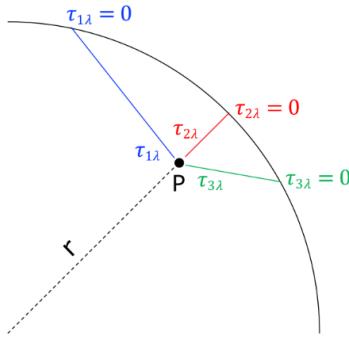
$$\tau_\lambda = \int \kappa_\lambda \rho \, dS \quad (4.1)$$

dove  $\kappa$  è l'opacità, misurata in  $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$ ,  $\rho$  è la densità di massa, misurata in  $\text{g cm}^{-3}$  e  $S$  rappresenta la distanza lungo una direzione radiale, misurata in cm.

In particolare,  $\tau_\lambda = 0$  sulla superficie della stella, mentre  $\tau_\lambda$  cresce andando verso il centro, seguendo un cammino radiale. Come si può notare in fig. 4.1, la profondità ottica *non* è una misura *unica* della distanza dalla superficie, infatti, se considero raggi con direzioni diverse, ottengo profondità ottiche diverse. Per utilizzare questa grandezza per misurare univocamente le distanze, si considera la *profondità ottica verticale*, dove integro lungo una direzione radiale:

$$\tau_{\lambda,V} = \int_z^0 \kappa_\lambda \rho \, dz \quad (4.2)$$

dove la direzione identificata da  $z$  è perpendicolare alla superficie della stella. A questo punto possiamo utilizzare la profondità ottica per determinare quale è lo strato più interno dal quale la radiazione a una data lunghezza d'onda riesce ad emergere verso l'esterno, o, in altre parole, la profondità ottica mi dice quanto è schermata la radiazione che viene dall'interno. D'ora in poi, quando si parlerà di profondità ottica si farà riferimento alla profondità ottica verticale.



**Figura 4.1:** La profondità ottica non è una misura univoca della distanza dalla superficie. Se scelgo tre direzioni radiali, in blu, rosso e verde, ottengo profondità ottiche diverse in uno stesso punto P, in particolare  $\tau_{1\lambda} \neq \tau_{2\lambda} \neq \tau_{3\lambda}$ . L'unica cosa uguale per le tre situazioni è che in superficie la profondità ottica è nulla.

### 4.1.2 Temperatura effettiva

Sia la profondità ottica che la temperatura aumentano andando verso il centro della struttura stellare. La loro relazione definisce univocamente la così detta *temperatura effettiva* della stella, ed è un'equazione chiave per un modello di atmosfera:

$$T^4 = \frac{3}{4} T_e^4 (\tau_v + \frac{2}{3}) \quad (4.3)$$

La temperatura effettiva  $T_e$  è la temperatura alla quale la profondità ottica vale  $\tau_\lambda = 2/3$ . Posso interpretare lo strato in cui ciò è vero come lo strato più interno da cui riesce ad emergere la radiazione. Per il sole, ad esempio, si ha  $T_e = 5770\text{ K}$ .

## 4.2 Righe Spettrali

### 4.2.1 Opacità per l'atmosfera stellare

Un parametro importante per la determinazione di un modello per l'atmosfera stellare è l'opacità, già discussa nel par. 3.7. Ripassiamo i concetti principali. I processi che determinano l'opacità di una struttura sono:

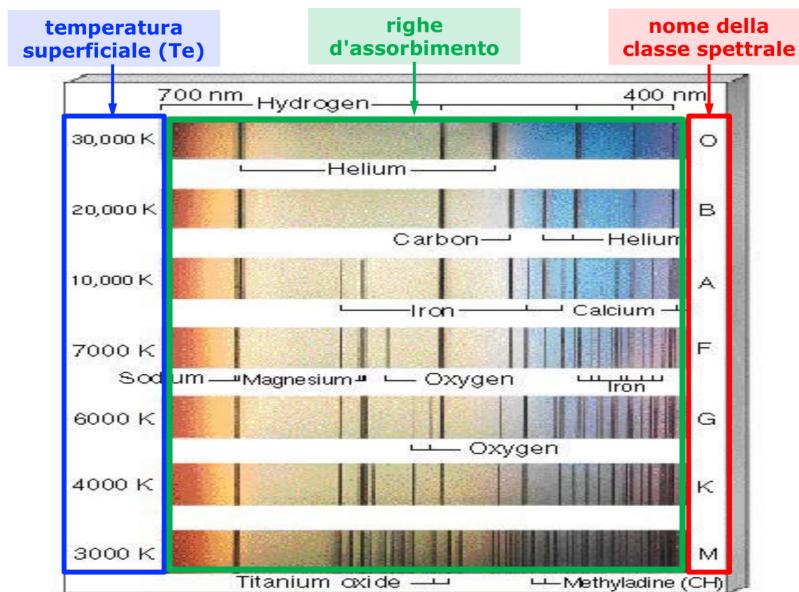
**BB** discusso nel par. 3.7.1. Avviene a una determinata lunghezza d'onda, secondo l'eq. (3.42). È responsabile delle *righe di assorbimento*, poiché determinano la mancanza di flusso a una determinata lunghezza d'onda.

**BF** discusso nel par. 3.7.2. Contribuisce all'opacità del *continuo*.

**FF** discusso nel par. 3.7.3. Contribuisce all'opacità del *continuo*.

**E** discusso nel par. 3.7.4. Contribuisce all'opacità del *continuo*.

In particolare, nelle atmosfere le temperature sono sufficientemente basse affinché i fotoni possano essere poco energetici e possano eccitare gli elettroni degli atomi, lasciandoli in stati legati. Dunque il fenomeno del BB, che negli interni stellari trascuravamo a causa delle elevate temperature, sarà determinante nelle atmosfere. La velocità di variazione dell'opacità con la lunghezza d'onda determina come l'opacità stessa si manifesta, ovvero in forma di righe di assorbimento o nel continuo. Vediamo degli esempi.



**Figura 4.2:** Classi spettrali principali.

**Esempio-Serie di Balmer**

**Esempio-Balmer Jump**

#### 4.2.2 Continuo spettrale e righe spettrali di assorbimento

#### 4.2.3 Classificazione spettrale delle stelle

Come visto nel par. 4.2.1, l'*atmosfera* stellare è dove si formano il *continuo spettrale* e le *righe spettrali di assorbimento*. Le righe di assorbimento, in particolare, sono degli osservabili fondamentali perché è dalla loro intensità che possiamo misurare l'*abbondanza* dei diversi elementi chimici. Si faccia attenzione al seguente fatto: la presenza o meno di una data riga spettrale *non* dipende dalla presenza o meno di quel dato elemento, ma è fortemente modulata dalla *temperatura*. Vediamo di chiarire il fatto.

Ovviamente, se un elemento non è presente nella struttura stellare, lo spettro non potrà mostrare le sue righe. Tuttavia, l'assenza di righe di un dato elemento *non necessariamente* significa che quel dato elemento è assente: potrebbe esserci, ma la *temperatura* non è tale da far manifestare le sue righe. Infatti, le righe di assorbimento sono dovute a fenomeni di eccitazioni o ionizzazioni della materia e, come noto, il numero di stati eccitati o ionizzati dipende primariamente dalla temperatura. Se, ad esempio, la temperatura non è sufficientemente alta da far sì che tutti gli atomi di un dato elemento siano ionizzati, non potrò mai vedere la riga di assorbimento di tale elemento, anche se esso è presente.

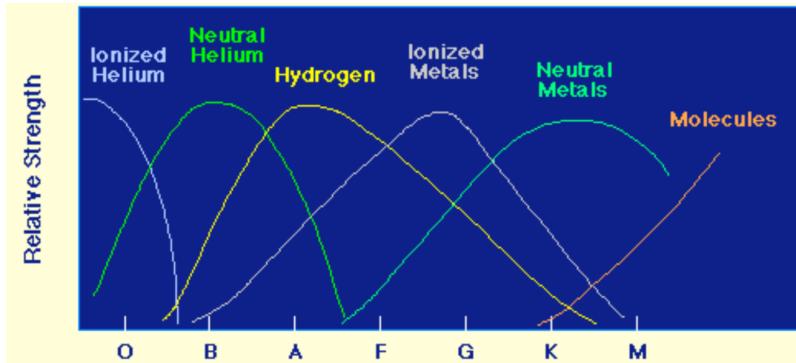
In definitiva, è la temperatura che modula il manifestarsi delle righe spettrali, ovvero è la *temperatura* che determina il *tipo spettrale* delle stelle. Dunque, le stelle sono classificate in base al loro tipo spettrale, ovvero in base alla presenza e all'intensità delle varie righe spettrali, il quale, a sua volta, riflette il valore della temperatura atmosferica della stella.

Nelle fig. 4.2 e fig. 4.3 sono rappresentate le principali *classi spettrali*, elencate anche di seguito:

**O**  $T_e > 25\,000\text{K}$

**B**  $11\,000\text{K} < T_e < 25\,000\text{K}$ : ???

**A**  $7\,500\text{K} < T_e < 11\,000\text{K}$ : ???



**Figura 4.3:** Classi spettrali principali.

**F**  $6000\text{K} < T_e < 7500\text{K}$ : ???

**G**  $5000\text{K} < T_e < 6000\text{K}$ : ???

**K**  $3500\text{K} < T_e < 3000\text{K}$ : ???

**M**  $3500\text{K} < T_e < 3000\text{K}$ : ???

Si può ricordare tale lista con la seguente frase: "O,B,A, Fine Girl Kiss Me".

Come detto precedentemente, una data riga di assorbimento è presente o assente nello spettro a seconda del numero di atomi nei diversi stati eccitati o ionizzati di quel dato elemento. Tale numero dipende in primo luogo dalla temperatura e viene stimato attraverso:

**Equazione di Boltzmann** : percentuale di atomi in un dato stato di eccitazione. Risponde alla domanda: "quale frazione di atomi con elettroni legati si trova in un dato stato eccitato?"

**Equazione di Saha** : percentuale di atomi in un dato stato di ionizzazione. Risponde alla domanda: "questo elemento ha ancora elettroni legati?"

#### 4.2.4 Equazione di Boltzmann

Come suggerito nel precedente paragrafo, l'*equazione di Boltzmann* fornisce la percentuale di atomi in un dato stato di eccitazione. In particolare, per ogni specie chimica, considera gli atomi ionizzati  $j$ -volte ( $N_j$ ) e fornisce la frazione di quelli che sono eccitati  $i$ -volte ( $N_{ji}$ ):

$$\frac{N_{ji}}{N_j} = \frac{g_i}{U_j(T)} 10^{-\theta \chi_i} \quad (4.4)$$

dove:

$N_j$  : numero di atomi nello stato di ionizzazioni  $j$  (ovvero ionizzati  $j$ -volte).

$N_{ji}$  : numero di atomi nello stato di ionizzazione  $j$ , che si trovano nello stato di eccitazioni  $i$  (ovvero ionizzati  $j$ -volte *ed* eccitati  $i$ -volte).

$g_i$  : peso statistico del livello energetico  $i$ .

$\theta \equiv \frac{5040}{T} \text{eV}^{-1}$ , con  $T$  espressa in K.

$U_j(T)$  : funzione di partizione per lo stato di ionizzazione  $j$ .

$\chi_i$  : potenziale di eccitazione dal primo livello energetico disponibile al livello energetico  $i$ .

Notiamo che l'espressione è dipendente dalla struttura dell'atomo, attraverso i termini  $g_i$ ,  $U_j(T)$  e  $\chi_i$ , e dalla temperatura. In definitiva, la percentuale è tanto maggiore quanto più alta è  $T$  e quanto più basso è il potenziale di eccitazione  $\chi_i$ . Vediamo, ora, i vari termini con maggior dettaglio.

### Peso statistico

Il peso statistico  $g_i$  del livello energetico  $i$ -esimo rappresenta il numero di livelli energetici degeneri, ovvero alla stessa energia. Per gli atomi idrogenoidi si ha:

$$g_i = 2i^2$$

e si ottengono i noti risultati per cui nel livello fondamentale ( $i = 1$ ) si ha  $g_1 = 2$ , ovvero possono alloggiare 2 elettroni di spin opposto, mentre nel primo livello eccitato,  $i = 2$ , vale  $g_2 = 8$  e possono alloggiare 2 elettroni nell'orbitale s e 6 elettroni nell'orbitale p, e così via.

### Funzione di partizione

La funzione di partizione per lo stato di ionizzazione  $j$ -esimo,  $U_j(T)$ , è una sommatoria dei pesi statistici ( $g_i$ ) di tutti i livelli energetici pesati con un termine che dipende dalla temperatura, ovvero:

$$U_j(T) = \sum_i g_i 10^{-\theta \chi_i}$$

### Potenziale di eccitazione

nell'equazione (4.4),  $\chi_i$  rappresenta il potenziale di eccitazione dal primo livello energetico *disponibile* al livello energetico  $i$ -esimo. Vediamo cosa si intende per primo livello disponibile, il quale dipenderà dal livello di ionizzazione,  $j$ . Consideriamo, ad esempio, NeI, ovvero il neon neutro. Esso ha  $10e^-$  legati, in cui  $2e^-$  si trovano nel livello  $n = 2$  e  $8e^-$  si trovano nel livello  $n = 1$ . Essendo, dunque, i primi due livelli totalmente occupati, il primo livello disponibile sarà  $n = 3$ . Nel caso di NeII, ovvero del neon ionizzato 1 volta, il primo livello disponibile è  $n = 2$ , non essendo questa volta occupato del tutto.

Per gli atomi idrogenoidi, il potenziale di eccitazione tra due livelli energetici  $a$  e  $b$ , con  $a < b$ , è:

$$\chi_{ab} = Z^2 \left( \frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right) \times 13.6 \text{ eV}$$

con  $Z$  il numero atomico. Essendo il primo livello energetico disponibile il livello fondamentale, rappresentato da  $a = 1$ , si ha:

$$\chi_i = Z^2 \left( 1 - \frac{1}{i^2} \right) \times 13.6 \text{ eV}$$

#### 4.2.5 Equazione di Saha

Per ogni specie chimica, l'*equazione di Saha* fornisce la percentuale di atomi ionizzati  $j+1$ -volte ( $N_{j+1}$ ) rispetto al numero di atomi ionizzati  $j$ -volte ( $N_j$ ):

$$\log \frac{N_{j+1}}{N_j} = -0.176 - \log P_e - \theta \chi_i + 2.5 \log T + \log \frac{U_{j+1}(T)}{U_j(T)} \quad (4.5)$$

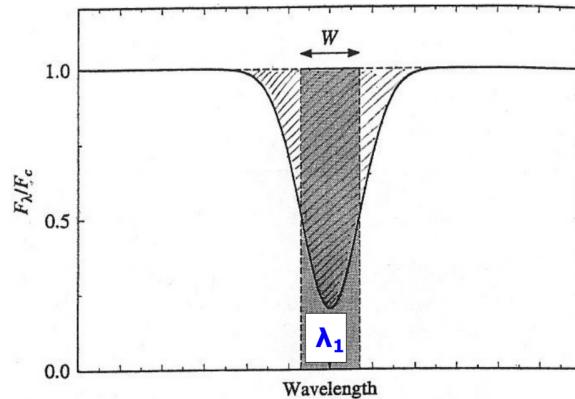
dove:

$N_j, N_{j+1}$  : numero di atomi nello stato di ionizzazione  $j$  e  $j+1$ , ovvero contigui.

$P_e$  : pressione elettronica, ovvero esercitata dalla componente elettronica del gas. Si ricordi che siamo nelle atmosfere stellari, in cui il gas è sempre approssimabile come gas perfetto.

$\theta \equiv \frac{5040}{T} \text{ eV}^{-1}$ , con  $T$  espressa in K.

$\chi_i$  : potenziale di ionizzazione dell'atomo ionizzato  $j$ -volte. ERRORE FORSE, NON DOVREBBE ESSERE CHI J???????



**Figura 4.4:** Misura di una riga spettrale e analisi per la determinazione della velocità radiale e delle abbondanze chimiche. La riga spettrale di una transizione elettronica B–B è misurata a lunghezza d’onda  $\lambda_1$ , confrontata con la lunghezza d’onda di laboratorio di tale transizione  $\lambda_0$ .

$U_j(T), U_{j+1}(T)$  : funzioni di partizione per gli stati di ionizzazione  $j$  e  $j + 1$ .

Si faccia molta attenzione a cosa si riferisce l’eq. (4.5). Essa *non* permette di calcolare il numero di atomi in un certo stato di ionizzazione ( $N_j$ ) rispetto al numero totale ( $N$ ) di atomi di quella specie, che sarebbe equivalente a  $N_j/N$ , tuttavia essa calcola il rapporto tra il numero di atomi in due stati di ionizzazione contigui ( $j + 1$  e  $j$ ), equivalente a  $N_{j+1}/N_j$ . Per ottenere  $N_j/N$  sono necessarie applicazioni successive dell’equazione di Saha tra due stati di ionizzazione contigui.

#### 4.2.6 Frazione di atomi attivi

In pratica, mettendo insieme le due equazioni, per ogni equazione chimica:

- l’equazione di Saha (4.5) mi dice se, a quella data temperatura  $T$  esistono atomi che non sono completamente ionizzati, cioè che hanno ancora elettroni legati
- se ciò è vero, l’equazione di Boltzmann (4.4) mi dice se, a quella data temperatura  $T$  gli elettroni legati sono nello stato fondamentale o in quale livello di eccitazione

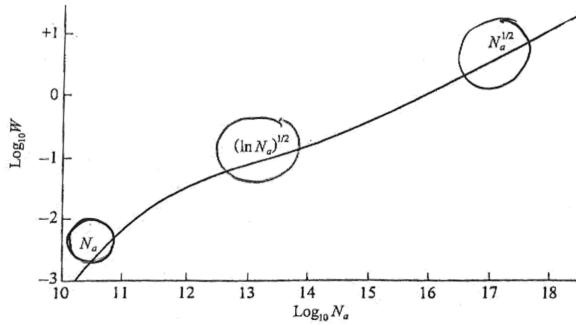
Insieme, le eq. (4.5) e (4.4) forniscono la *frazione di atomi attivi*  $N_a$  (che generano le righe spettrali) rispetto al totale di atomi di quella specie. È possibile misurare  $N_a$  attraverso un’analisi spettroscopica delle righe spettrali, dunque, in definitiva, usando le equazioni di Saha e Boltzmann è possibile ricavare l’*abbondanza* di quel dato elemento chimico.

#### 4.2.7 Analisi delle righe spettrali

Come discusso nel par. 4.2.1, le linee spettrali sono originate dalle transizioni elettroniche di tipo bound–bound. Nelle righe spettrali sono contenute informazioni di cruciale importanza, tra cui le *abbondanze chimiche* e la *velocità radiale*.

Per capire come si procede sperimentalmente all’analisi delle righe spettrali, consideriamo una situazione tipo, illustrata in fig. 4.4. Immaginiamo di misurare una riga spettrale corrispondente a una data transizione elettronica a una lunghezza d’onda  $\lambda_1$ , diversa, in generale, dalla lunghezza d’onda di laboratorio di tale transizione,  $\lambda_0$ . A causa dell’*effetto Doppler*, la differenza tra la lunghezza d’onda misurata e quella di laboratorio è una misura diretta della *velocità radiale* della stella. Infatti si ha:

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \quad (4.6)$$



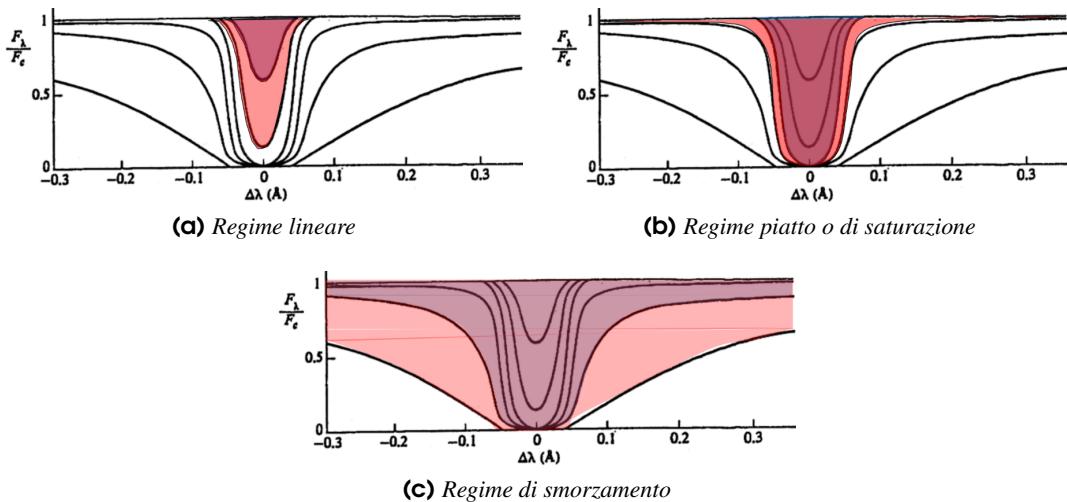
**Figura 4.5:** Curva di crescita. Descrive la dipendenza della larghezza equivalente  $W$  dal numero di atomi attivi  $N_a$ . La curva è doppio-logaritmica. L'andamento varia con l'aumentare degli atomi attivi. In particolare, sono presenti tre regimi: il regime lineare in cui  $W \propto N_a$ , il regime piatto in cui  $W \propto \sqrt{\log N_a}$  e il regime di smorzamento in cui  $W \propto \sqrt{N_a}$ .

Per ciò che concerne le *abbondanze chimiche*, è necessario misurare l'*intensità* delle righe spettrali prodotte dagli atomi della specie studiata attraverso transizioni BB. In particolare, l'intensità, come mostrato in fig. 4.4, è rappresentata dall'area sotto la curva dello spettro continuo. È tuttavia comunemente misurata in termini di *larghezza equivalente*. La larghezza equivalente  $W$  è la larghezza (in Armstrong) di un rettangolo di altezza unitaria e area uguale all'intensità della riga spettrale. Si può calcolare nella seguente maniera:

$$W = \int \frac{F_c - F_\lambda}{F_c} d\lambda \quad (4.7)$$

dove  $F$  rappresenta il flusso. In particolare  $W$  è correlato con il numero di atomi per  $\text{cm}^2$  che generano la transizione, ovvero con  $N_a$ , il numero di atomi attivi. Come è possibile osservare in figura 4.6, la riga spettrale è tanto più profonda quanto maggiore è l'abbondanza dell'elemento considerato. Siccome la profondità della riga dipende dal numero di atomi attivi, anche  $W$  dipenderà da  $N_a$ . In particolare è possibile osservare la loro correlazione in una *curva di crescita*, mostrata in fig. 4.5. Come si osserva dal grafico, l'andamento di  $W$  con  $N_a$  varia all'aumentare del numero di atomi attivi. Nel *regime lineare* si ha  $W \propto N_a$  poiché  $W$  è dominata dal contributo del core della riga, evidenziato nella fig. 4.6a. Aumentando il numero di atomi attivi si entra nel *regime piatto (o di saturazione)*, in cui si ha  $W \propto \sqrt{\log N_a}$ . In questo regime  $W$  cresce molto lentamente, poiché il core della riga è saturo (la riga ha massima profondità, ovvero arriva a toccare lo zero) e il contributo delle ali è ancora trascurabile, come mostrato in fig. 4.6b. Nel *regime di smorzamento*  $W$  si ha  $W \propto \sqrt{N_a}$  e  $W$  torna ad essere più sensibile alle variazioni di  $N_a$  rispetto al regime di saturazione, poiché le ali hanno un contributo dominante, come mostrato in fig. 4.6c.

Conoscendo la curva di crescita è possibile ricavare il numero di atomi attivi data la larghezza equivalente, che a sua volta può essere ricavata sperimentalmente dall'analisi spettroscopica del corpo in esame. Tuttavia, siamo interessati all'*abbondanza* di un elemento, piuttosto che il numero dei suoi atomi attivi,  $N_a$ , che dipende sensibilmente dalla temperatura dell'atmosfera stellare. Ovviamente il numero totale di atomi di una data specie,  $N_{\text{tot}}$ , non dipende dalla temperatura. Per ottenere  $N_{\text{tot}}$  dalla misura di  $N_a$  è necessario conoscere la percentuale di atomi di quella data specie chimica che sono nella condizione di attivare le transizioni elettroniche che generano la linea di assorbimento che si sta misurando. Abbiamo dunque bisogno di conoscere:



**Figura 4.6:** Correlazione tra la larghezza equivalente  $W$  e il numero di atomi attivi  $N_a$ . La riga spettrale è tanto più profonda quanto maggiore è l'abbondanza dell'elemento considerato.

1. la percentuale di atomi che hanno ancora elettroni legati alla struttura atomica alla data temperatura  $T$ , ovvero il *fattore di ionizzazione*. Esso si trova con l'*equazione di Boltzmann* (4.4) (vedi par. 4.2.4).
2. la percentuale di atomi nei quali gli elettroni possono effettuare le transizioni osservata alla data temperatura  $T$ , ovvero il *fattore di eccitazione*. Esso si trova con l'*equazione di Saha* (4.5) (vedi par. 4.2.5).

A questo punto, conoscendo il numero totale di atomi di un dato elemento,  $N_{\text{tot}}$ , è possibile trovare l'abbondanza in massa di tale elemento nell'atmosfera stellare:

$$A_{\text{el}} = N_{\text{tot}} m_{\text{el}} \quad (4.8)$$

dove  $N_{\text{tot}}$  è il numero di atomi per cm quadro, ovvero è espresso in  $\text{cm}^{-2}$ ,  $m_{\text{el}}$  è la massa dell'elemento, espressa in g e  $A_{\text{el}}$  è misurato in  $\text{g cm}^{-2}$ . Tuttavia, si preferisce riferirsi alle *square bracket abundances*.

#### 4.2.8 square bracket abundances

Le abbondanze in massa, espresse dall'eq. (4.8), sono tipicamente normalizzate all'abbondanza di idrogeno presente nella stella studiata e anche rispetto al rapporto nel Sole, espressi in scala logaritmica. Per fare un esempio chiarificativo, supponiamo di voler esprimere l'abbondanza del sodio in una stella. Con la eq. (4.8) trovo  $A_{\text{Na}} = 9.3 \times 10^{-5} \text{ g cm}^{-2}$ . Essa è normalizzata rispetto all'abbondanza dell'idrogeno nella stella stessa, che supponiamo essere  $A_{\text{H}} = 1.1 \text{ g cm}^{-2}$ , in scala logaritmica:

$$\log\left(\frac{A_{\text{Na}}}{A_{\text{H}}}\right)_* \sim -4 - 0 = -4$$

A sua volta questa quantità è riferita alla quantità analoga del nostro Sole, che in questo caso vale:

$$\log\left(\frac{A_{\text{Na}}}{A_{\text{H}}}\right)_\odot = 6.33 - 12 = -5.67$$

Ora, il logaritmo del rapporto tra l'abbondanza del sodio nell'stellla normalizzata rispetto all'idrogeno e l'abbondanza del sodio nel Sole normalizzato rispetto all'idrogeno ci dà la *square bracket abundance* del sodio:

$$\left[ \frac{\text{Na}}{\text{H}} \right] = \log \frac{\left( \frac{A_{\text{Na}}}{A_{\text{H}}} \right)_*}{\left( \frac{A_{\text{Na}}}{A_{\text{H}}} \right)_{\odot}} = \log \left( \frac{A_{\text{Na}}}{A_{\text{H}}} \right)_* - \log \left( \frac{A_{\text{Na}}}{A_{\text{H}}} \right)_{\odot} = -4 - (-5.67) = +1.67$$

ovvero, nella stella osservata il sodio è  $10^{1.67} \sim 50$  volte *più abbondante* che nel Sole. In generale si ha la seguente formula:

$$\left[ \frac{\text{el}}{\text{H}} \right] = \log \left( \frac{A_{\text{el}}}{A_{\text{H}}} \right)_* - \log \left( \frac{A_{\text{el}}}{A_{\text{H}}} \right)_{\odot} \quad (4.9)$$

Secondo l'eq. (4.9),  $\left[ \frac{\text{el}}{\text{H}} \right] = 0$  significa che l'abbondanza in massa dell'elemento *el* è la stessa del Sole,  $\left[ \frac{\text{el}}{\text{H}} \right] = -0.5$  significa che è pari a  $1/3$  di quella del Sole e  $\left[ \frac{\text{el}}{\text{H}} \right] = -2$  significa che è  $1/100$  di quella del Sole.



## 5. Evoluzione Stellare

### 5.1 Modello di evoluzione stellare

#### 5.1.1 Introduzione all'evoluzione stellare

Data la massa iniziale e la composizione chimica di una data stella, siamo riusciti a costruire un modello che ci permettesse di ottenere una predizione sulla sua luminosità e temperatura. Nella realtà, però, le proprietà di una stella non rimangono costanti nel corso della sua vita, ma variano con il tempo.

Questo processo è principalmente dovuto alla presenza delle reazioni termonucleari all'interno dei vari strati della struttura stellare, le quali si modifica d'intensità e natura durante tutta l'evoluzione della stella, variandone la composizione chimica. Inoltre, dal momento che la stragrande maggioranza delle strutture cosmiche sono composte da stelle, la radiazione che viene ricevuta deve essere generata principalmente al loro interno. Per capire, quindi, come queste strutture si evolvono è necessario comprendere le varie fasi della vita stellare.

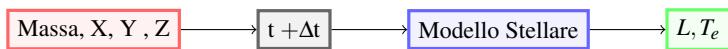
#### 5.1.2 Diagramma H-R e traccia evolutiva

Per avere una rappresentazione visiva dell'evoluzione, costruiamo quello che viene chiamato diagramma di Hertzsprung-Russell (in breve diagramma H-R) che mostra la dipendenza della luminosità stellare, normalizzata a quella solare, dalla temperatura effettiva

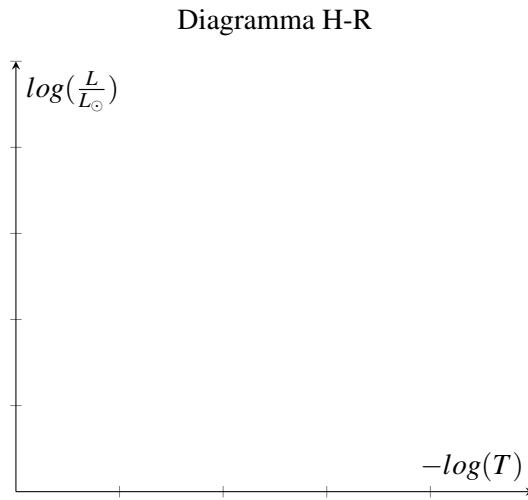
Se il modello stellare considerato precedentemente ha una forma del tipo,



quello che definiamo ora contiene una parte dipendente dal tempo:



Questo perché le reazioni termonucleari all'interno di una stella bruciano gli elementi più leggeri producendone di più pesanti. Ma non sono tutte reazioni uguali, infatti, nel corso dell'evoluzione stellare queste si modificano a seconda del combustibile utilizzato, variando anche la



**Figura 5.1:** La figura mostra un diagramma Hertzsprung-Russell. Si noti che la temperatura, sull'asse delle ascisse, cresce verso sinistra e diminuisce verso destra e che il diagramma è in scala doppio logaritmica.

quantità di energia che viene prodotta. Potenzialmente attivando o spegnendo la convezione della stella, o la sua degenerazione.

Tutti questi processi vanno a modificare la luminosità e la temperatura di una stella ed è quindi possibile associare un punto del diagramma H-R per ogni stato di  $L$  e  $T_e$ . In generale, prendendo stelle di masse differenti, ma composizione chimica simile, è possibile costruire un diagramma simile a quello che in cui si osserva l'evoluzione anche in funzione della massa, come mostrato in nella figura 5.2.

## 5.2 Pre Main Sequence

La fase di pre-MS (pre main sequence) è quella in cui si va a formare una stella, partendo dalla contrazione di una nube di gas. Per far sì che questa si formi, però, è necessario che siano presenti determinate condizioni: sia  $m$  la massa di una particella di ai margini della nube gassosa (possibilmente una molecola di  $H_2$ ) e si indichi con  $R$  la distanza di questa dal centro. Al fine di osservare la formazione di una stella è necessario che l'attrazione gravitazionale agente sulla particella, dal resto della nube, sia maggiore rispetto alla pressione esercitata dal gas su di essa, imponiamo quindi l'equazione 5.1.

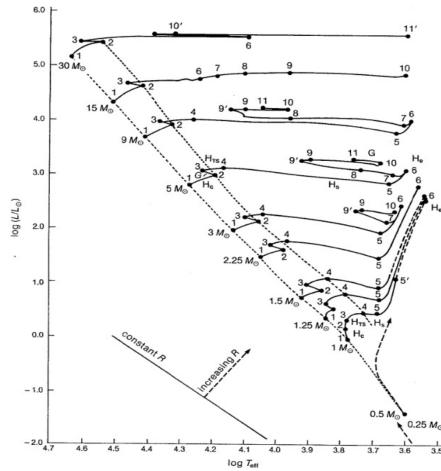
$$G \frac{Mm}{R} \geq k_B T \quad (5.1)$$

Dove  $M$  è la massa della nube,  $T$  è la temperatura e  $k_B$  la costante di Boltzmann.

### 5.2.1 Massa di Jeans

Considerando che la massa della nube può essere espressa come segue

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$



**Figura 5.2:** Nel diagramma H-R sono mostrate nove stelle di massa differente ma di struttura chimica simile evolvere nel tempo.

allora possiamo esplicitare la dipendenza del raggio da alcune caratteristiche della nube, in particolare della massa e della densità.

$$R = \sqrt{\frac{3}{4\pi} \frac{M}{\rho}} \quad (5.2)$$

Inserendo l'equazione 5.2 nella (5.1), si ottiene la relazione come le varie caratteristiche del gas devo essere in modo tale da permettere la formazione di una stella.

$$M^{\frac{2}{3}} \geq \frac{k_B T}{Gm} \sqrt{\frac{3}{4\pi} \frac{1}{\rho}} \quad (5.3)$$

Sia  $a = \sqrt{\frac{3}{4\pi} \frac{k_B}{Gm}} \sim 10^{16} \text{ g K}^{-1} \text{ cm}^{-1}$  una costante, allora si riscrive la relazione 5.3 nella forma dell'equazione 5.4

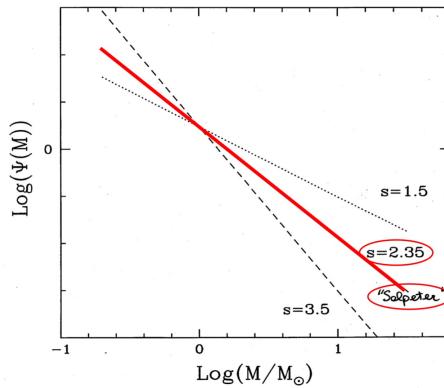
$$M \geq a^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}} \rho^{-\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

Questa è la massa necessaria a permettere la contrazione, assumendo che la densità di gas sia uniforma e il valore minimo che soddisfa questa diseguaglianza viene detto massa di Jeans, la quale dipende dai valori di densità e temperatura del gas. In particolare, per temperature elevate e gas rarefatti questa risulta maggiore rispetto al caso con gas densi e relativamente freddi. Di conseguenza si deduce che l'ambiente più favorevole alla formazione stellare è proprio quest'ultimo.

Benché il modello costruito permette di trovare le condizioni iniziali necessarie a favorire la nascita di una stella, il meccanismo che attiva l'effettivo collasso gravitazionale non è ancora ben noto. Le ipotesi più probabili sono quelle dello Shock Front, cioè la compressione dovuta all'esplosione di una supernova, della collisione tra nubi o all'interazione con una galassia.

### 5.2.2 Initial mass function

Si consideri ora di essere in condizioni interstellari ( $T = 10 \text{ K}$  e  $\bar{\rho} = 10^{-23} \text{ g cm}^{-3}$ ), allora per formare una stella sarebbe necessaria una massa di circa  $100 M_{\odot}$ , ma noi osserviamo stelle anche decisamente meno massive. Questo significa che in realtà tale meccanismo favorisce la formazione



**Figura 5.3:** La figura mostra l’andamento della IMF in funzione della massa (normalizzata a quella solare) in scala logaritmica. La presenza di più linee è dovuta al fatto che non è presente una stima unica del parametro  $s$  e di conseguenza sono indicate varie possibilità per questo parametro dove in rosso si ha quella più probabile.

di vari aggregati stellari, con processi frammentati riferiti alla nube iniziale. Definiamo ora con IMF (initial mass function) la distribuzione di massa della stella in formazione all’interno di una popolazione stellare, utile per studiare i passaggi che una data stella attraversa durante la sua evoluzione, in particolare questo valore permette di avere una stima delle seguenti grandezze:

**Destino** di una stella, cioè quale percorso una stella seguirà nella parte finale della sua vita;

**Durata della vita** di una stella, indica l’ordine di grandezza del tempo necessario alla sua evoluzione;

**Inquinamento** di una stella, ovvero i tipi di elementi chimici che essa rilascia nell’universo nelle ultime fasi della propria vita.

Essendo la IMF una funzione di natura empirica, le sue caratteristiche non sono ancora ben conosciute. Questo significa che non è ben chiaro quale sia la forma di tale funzione e nemmeno se valga in maniera universale, ovvero se sia indipendente dal tempo, caratteristiche della nube o, addirittura, dalla posizione nello spazio. Un’ipotesi del suo andamento vuole che questa prenda la forma dell’equazione 5.5.

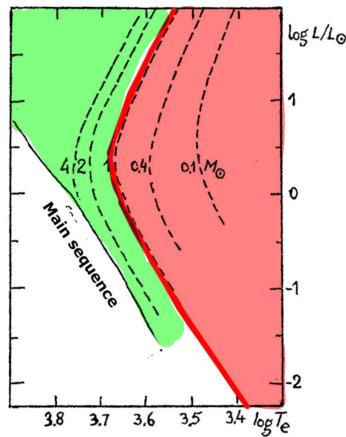
$$\Psi(M) = kM^{-s} \quad (5.5)$$

Dove  $s$  è un numero positivo e  $k$  una costante di proporzionalità.

Si osserva che se il modello dovesse avere questa forma, allora la percentuale di stelle massive è decisamente minore rispetto a quella di stelle con massa relativamente piccola. Tale predizione viene confermata dal fatto che la morte di una stella molto massiva produce un implosione sul nucleo stesso generando una supernova, ma nel nostro cielo tali avvenimenti non sono così comuni. L’andamento della IMF è mostrato nella figura 5.3.

### 5.2.3 Protostelle e Teorema di Hayashi

Data ora una nube di gas non uniforme, questa si inizierà a frammentare verso le varie buche di potenziale gravitazionale, se questi frammenti avranno una massa che soddisfa il criterio di Jeans (5.4), allora potrà verrà innescato il collasso gravitazionale, producendo quelle che vengono chiamate Protostelle. Quando la contrazione innesca le reazioni termonucleari, generando un equilibrio idrostatico tra pressione gravitazionale e pressione di radiazione, la stella sarà completamente convettiva. Questo stato può essere rappresentato nel diagramma H-R come un punto della traccia di



**Figura 5.4:** La figura mostra un diagramma H-R dove è stata evidenziata la traccia di Hayashi in rosso. A destra e a sinistra di questa sono state evidenziate due regioni, una in rosso ed una in verde. La prima mostra la zona in cui non è possibile generare stelle in equilibrio idrostatico, mentre la seconda mostra una regione di stabilità parzialmente convettiva.

Hayashi. Si tratta di una linea nel piano H-R che data una stella con una determinata composizione chimica, mostra al variare della massa un punto del diagramma in cui la stella è in equilibrio idrostatico e completamente convettiva. Tale curva quindi mostra una famiglia di stelle con la stessa composizione chimica, ma differente massa iniziale.

Il teorema di Hayashi afferma, inoltre, che fissata la composizione chimica e la massa di una stella, esiste una regione del piano H-R dove non è possibile realizzare modelli stellari in equilibrio idrostatico, la cui traccia di Hayashi funge da bordo. In figura 5.4 è mostrata la zona in questione colorata in rosso, mentre in colorata di verde si ha la regione che permette di avere modelli stabili, parzialmente convettivi. La validità di questo teorema è generale, continua quindi a valere per ogni punto dell'evoluzione stellare, in modelli convettivi e non.

Particolarmente importante è la posizione di questa zona d'instabilità e della conseguente traccia di Hayashi. Infatti, queste si trovano nella parte fredda del diagramma H-R e, per quanto visto precedentemente, minore la temperatura, maggiore sarà l'opacità della stella. Questo implica un gradiente radiativo maggiore di quello adiabatico ( $\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$ ) e quindi la presenza di convezione.

La fase di protostella dura fino a quando il nucleo raggiunge una temperatura  $T \sim 10^7$  K, necessaria ad attivare le reazioni termonucleari. La durata di questa fase della vita della stella è compresa tra i  $10^4$  e i  $10^7$  anni, a seconda della massa iniziale della stella (maggiore è la massa iniziale, minore sarà la durata). Si tratta di una parte relativamente breve dell'evoluzione stellare.

### 5.3 Main sequence

### 5.4 Post Main Sequence





## 6. Galassie

### 6.1 Classificazione di Hubble

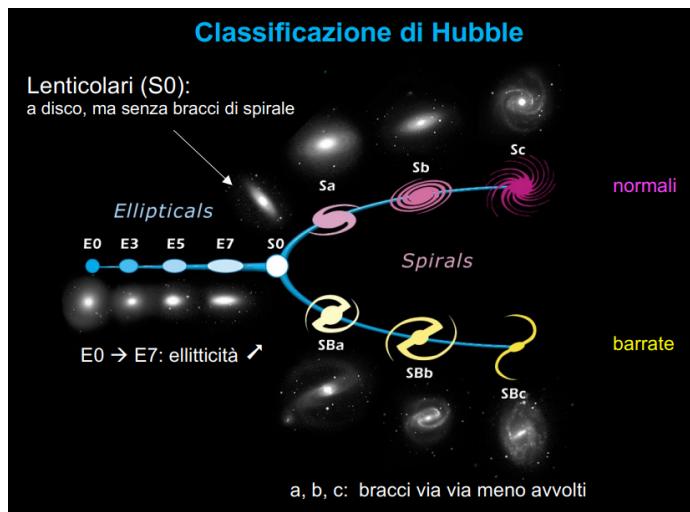
Le galassie sono sistemi celesti auto-gravitanti composti da circa  $10^3$  -  $10^7$  stelle, ma anche da polvere, gas e materia oscura. Sono l'unico posto dell'Universo in cui possiamo trovare stelle, nello spazio interstellare NON sono presenti stelle isolate (a parte alcune nel mezzo inter-galattico degli ammassi di galassie e le prime stelle formatesi nell'Universo, Pop III?). Una prima classificazione delle galassie può essere fatta in base alla loro morfologia, individuando tre classi principali:

- a spirale;
- ellittiche (o *early-type*);
- irregolari e peculiari.

Una classificazione ulteriore delle galassie è data dalla cosiddetta *classificazione di Hubble*, che è rappresentata dal diagramma a forcella in figura 6.1:

- Le galassie ellittiche sono classificate in base alla loro ellitticità, con un indice crescente da E0 a E7 (E0 corrisponde a una forma circolare, mentre E7 indica le galassie più ellittiche).
- Le galassie a spirale sono distinte in: spirali normali (S) e le spirali barrate (SB) e per entrambe ci sono sotto classificazioni: a, b, c. A seconda della lettera cambia il grado di avvolgimento dei bracci a spirale (Sa e SBa hanno bracci di spirale più avvolti intorno al nucleo rispetto a quelle Sc e SBc). Le galassie indicate con S0, anche dette lenticolari, sono galassie a disco che non mostrano evidenza di bracci nel disco.
- Come possiamo vedere le galassie irregolari e peculiari non sono incluse nella classificazione di Hubble.

La cosa più importante da tenere in considerazione quando si osserva il diagramma a forcella della classificazione di Hubble è che *non si tratta di una sequenza evolutiva!* Non dobbiamo mai pensare che questo diagramma indichi che le galassie ellittiche evolvano verso galassie a spirale, è solo un modo per classificare il tipo di galassie esistenti.



**Figura 6.1:** Classificazione di Hubble

### 6.1.1 Galassie a spirale

Sono composte da dischi sottili con braccia a spirale e sono composte da stelle, gas e polvere con distribuzione non omogenea (le stelle sono organizzate lungo bracci a spirale). Al centro del disco c'è un rigonfiamento sferico chiamato bulge; attorno ad esso c'è un alone molto esteso quasi vuoto che presenta qualche ammasso globulare (alone costituito da molto meno materia rispetto al disco e al bulge). Nei bracci a spirale c'è formazione stellare in corso: ho stelle giovani, con età sotto 10 ml di anni e ricche di metalli (popolazione I), a causa della presenza di gas arricchiti dalle generazioni precedenti di stelle. Nel bulge e nell'alone non c'è formazione stellare in corso, quindi sono costituiti da stelle vecchie, con età sopra 12 mld di anni (popolazione II). Circa i 2/3 delle galassie a spirale sono spirali barrate, cioè oltre al bulge è presente una barra centrale ai cui estremi si diramano i bracci; anche la Via Lattea è una spirale barrata (SBc).

Una galassia a spirale è caratterizzata dalle seguenti caratteristiche generali:

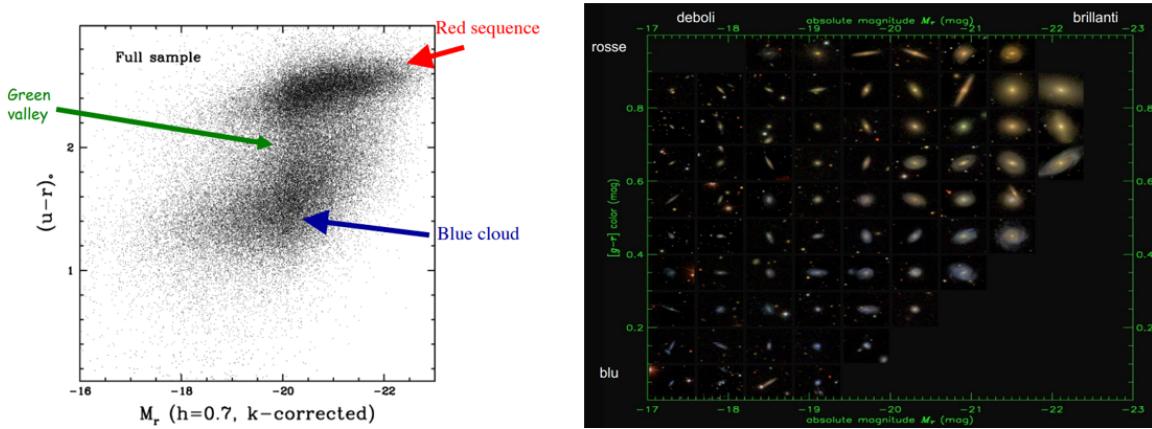
- **MASSA:**  $10^9 M_{\odot}$  fino a qualche  $10^{11} M_{\odot}$ .
- **DIMENSIONE (diametro):** da  $\sim 5$  kpc a varie decine di kpc.
- **POPOLAZIONE STELLARE:** eterogenea (giovane e vecchia).
- **COLORE:** soprattutto blu
- **GAS, POLVERE:** soprattutto gas freddo; polvere nel disco, non nei bracci (dove c'è invece produzione stellare).

### 6.1.2 Galassie ellittiche

Sono ellissoidi, costituiti essenzialmente da stelle di popolazione II, c'è pochissimo gas e pochissima polvere e ciò corrisponde al fatto che non c'è formazione stellare in corso (infatti le stelle si formano da gas freddo).

Una galassia ellittica è caratterizzata dalle seguenti caratteristiche generali:

- **MASSA:** da qualche  $10^7 M_{\odot}$  (galassie ellittiche "nane") fino a  $10^{12} - 10^{13} M_{\odot}$  (sono il tipo di galassia più massivo).
- **DIMENSIONE (diametro):** da  $\sim 1$  kpc a varie decine di kpc.
- **POPOLAZIONE STELLARE:** omogenea e vecchia (5 - 13 Gyr).



**Figura 6.2:** In figura possiamo vedere una classificazione della magnitudine delle galassie in funzione del colore: notiamo come quelle che tendono più verso il rosso e sono più brillanti sono quelle di forma ellittica. Le galassie a spirale risultano anch'esse abbastanza brillanti ma di colore blu (ci sono stelle più calde e più giovani).

- *COLORE*: rosso
- *GAS, POLVERE*: poco gas caldo ( $T \sim 10^6/10^7$  K); no, poca polvere.

### 6.1.3 Galassie irregolari e peculiari

Sono galassie che non hanno una struttura riconoscibile, quindi non sono presenti bracci di spirale, disco o bulge riconoscibili; sono composte da un mix di gas e polvere, unito a stelle tendenzialmente di popolazione I. Molto spesso sono galassie satelliti di altre galassie (quindi che ruotano attorno ad un'altra galassia) o sono in interazione con altre galassie e sono luoghi di intensa produzione stellare. Un esempio sono le due Nubi di Magellano (irregolari, perché hanno forma non ben definita), che sono galassie satellite della nostra galassia, ovvero risentono del potenziale della nostra galassia, e le Galassie Antenne (peculiari, perché hanno forma definita ma non canonica), che sono due galassie autointeragenti.

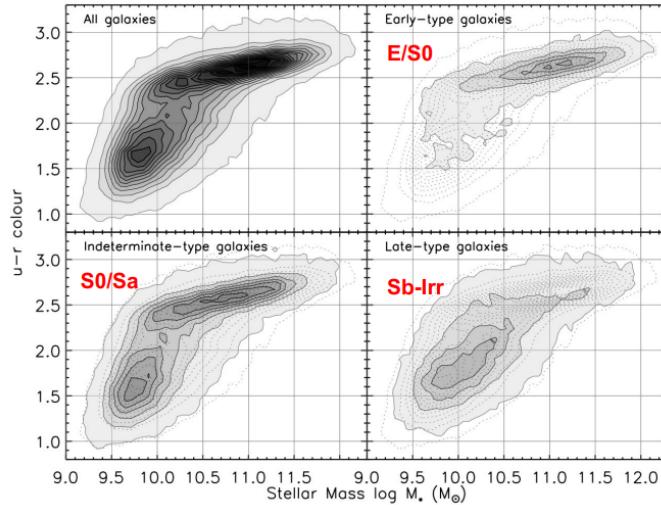
Una galassia irregolare o peculiare è caratterizzata dalle seguenti caratteristiche generali:

- *MASSA*: da qualche  $10^7 M_\odot$  (galassie irregolari "nane") fino a  $< 10^{10} M_\odot$ .
- *DIMENSIONE (diametro)*: da  $\sim 1$  kpc a  $\sim 10$  kpc.
- *POPOLAZIONE STELLARE*: soprattutto giovane.
- *COLORE*: blu (per le "starburst" (quelle che formano stelle ad alto tasso) si ha colore rosso a causa della emissione della radiazione dalla polvere da cui si formano le stelle che riemette nel rosso come già visto in precedenza).
- *GAS, POLVERE*: soprattutto gas freddo; polvere nel disco, non nei bracci (dove c'è invece produzione stellare).

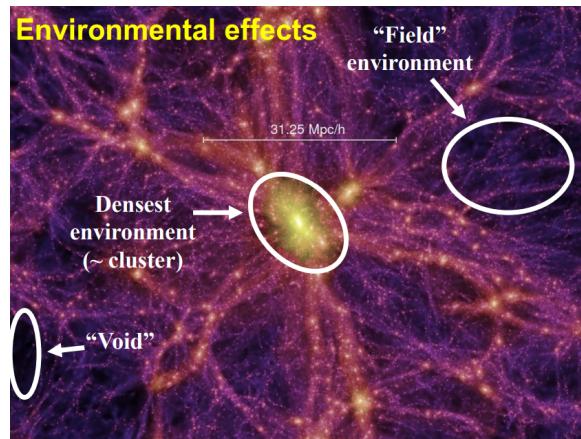
### 6.1.4 Effetti ambientali

Il nostro Universo non è riempito in modo omogeneo: sono presenti zone più dense (dette zone di cluster, dove avviene la formazione delle galassie), zone meno dense (dette ambienti di campo) e anche zone praticamente vuote, come si può vedere in figura 6.4.

Una domanda che sorge spontanea è: le diverse regioni di universo contengono stessi tipi morfologici di galassie oppure ci sono determinati tipi morfologici di galassie in diverse regioni di

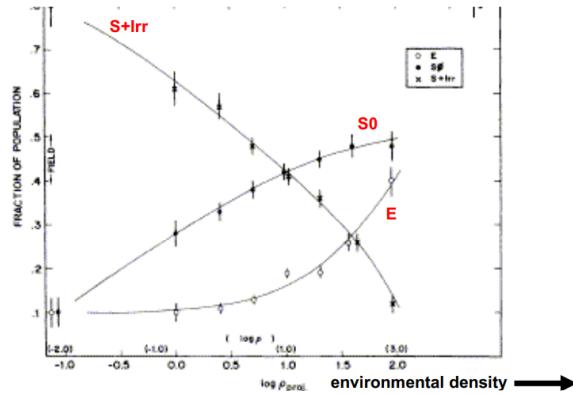


**Figura 6.3:** In figura possiamo vedere un grafico che confronta colore e massa delle galassie: come possiamo notare le galassie ellittiche sono le più massive e verso il rosso, le galassie a spirale sono in parte verso il rosso e in parte verso il blu (con masse confrontabili con quelle ellittiche), mentre quelle irregolari sono quasi tutte blu e con masse molto minori.



**Figura 6.4:** In figura possiamo vedere rappresentate le tre tipologie di zone del nostro universo: cluster, ambienti di campo e spazio vuoto.

universo? Quello che è stato osservato è che negli ambienti di bassa densità (ossia gli ambienti di campo) c'è forte presenza di galassie spirali e irregolari (poche ellittiche e reticolari), mentre negli ambienti a più alta densità (ammassi di galassie) dominano le galassie reticolari e ellittiche (poche spirali), come è riassunto dal grafico in figura 6.5.



**Figura 6.5:** Nel grafico viene evidenziato come a basse densità siano presenti soprattutto galassie a spirale; all'aumentare della densità queste diminuiscono ed aumentano le galassie ellittiche e reticolari.

Perché abbiamo questa distribuzione? Le galassie nascono in questa maniera oppure vengono trasformate dall'ambiente? È l'ambiente che riesce a modificare il tipo morfologico delle galassie oppure nascono direttamente in quel tipo in quella regione particolare? In realtà è una domanda ancora aperta, infatti si contrappongono due visioni del fenomeno differenti:

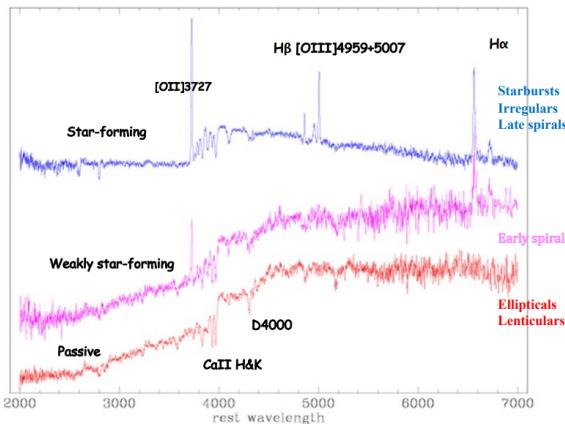
- Da una parte infatti si ha il modello cosmologico di Cold Dark Matter (il migliore attualmente), che prevede che le regioni di alta densità sono anche le regioni più vecchie (formate prima) e infatti si ha che le galassie ellittiche sono più vecchie delle altre. Questo quindi sembrerebbe aver senso col dato sperimentale. Ma perché allora sono proprio le ellittiche a formarsi prima? Anche a questa domanda non c'è ancora risposta.
- D'altra parte, sappiamo che ci sono molti processi fisici che hanno impatto nella morfologia delle galassie (ad es. ram pressure stripping, galaxy harassment...), in particolare in ambienti densi ci sono fenomeni che possono distruggere le spirali; infatti a causa dell'alta densità i bracci formati dalla galassia vengono strappati da quelle accanto, trasformandole tutte in ellittiche. Tuttavia, pensiamo che le ellittiche si formino da merge di galassie, e la probabilità di merge è più bassa per cluster più massivi (perchè le velocità relative sono troppo alte per permettere una collisione e successiva fusione).

Quindi in entrambi gli scenari ci sono problemi e la questione è ancora aperta.

## 6.2 Spettro di emissione delle galassie

### 6.2.1 Caratteristiche generali

Per osservare le galassie viene ovviamente raccolta la radiazione proveniente da loro, ma essendo corpi celesti molto lontani otteniamo delle immagini spesso soddisfacenti, perché non è possibile distinguere le singole stelle che compongono la galassia (in quel caso si dice che stiamo osservando una popolazione stellare risolta). Per le galassie più lontane si è notato che la luce proveniente da esse ha una magnitudine che altro non è che l'integrale della magnitudine di tutte le stelle al suo interno: quello che osserviamo quindi è la cosiddetta luce integrata, che viene dalla



**Figura 6.6:** Lo spettro della radiazione diviso per morfologia mostra come alcune lunghezze d'onda siano specifiche per galassie in cui si verifica formazione stellare

somma di sorgenti non risolte per la maggior parte delle galassie (solo le stelle delle galassie del Gruppo Locale sono risolte, per le altre no). Allo stesso modo della luce, possiamo osservare che anche il colore di una galassia lontana è dato dall'integrale dei colori delle singole stelle e allo stesso modo possiamo applicare il medesimo ragionamento anche per uno spettro di risoluzione  $\Delta\lambda$  finita. Quindi quando osserviamo la luce proveniente da una galassia in realtà stiamo osservando la luce che viene da diverse fonti: flusso o magnitudine integrata, colore integrato e spettro integrato con risoluzione  $\Delta\lambda$  finita. Le normali tecniche di risoluzione stellare NON sono applicabili a galassie lontane.

Data una galassia, la luce che osserviamo provenire da essa sarà sicuramente emessa dalle stelle che la compongono ma non solo, abbiamo diverse origini:

- Stelle: emissione fotosferica (UV - infrarosso intermedio), vento stellare (linee di emissione, IR da involucri di polvere), fenomeni di accelerazione (raggi X binari).
- Gas: freddo (idrogeno non ionizzato, nubi molecolari), tiepido ( $T \sim 10^4$  K, linee di emissione, idrogeno ionizzato), più tiepido ( $T \sim 2/3 10^4$  K, resti di supernovae, compressioni rapide del gas), caldo ( $T \sim 10^7$  K, raggi X, linee di emissione continua).
- Polvere: emissione termica (luce stellare riprocessata dalle interazioni, shock termico), caratteristiche di emissione/assorbimento (PAHs, silicati e grafiti), scattering (UV - luce infrarossa).
- Nucleo Galattico Attivo (AGN): non è presente in tutte le galassie, si tratta di un buco nero supermassiccio al centro di una galassia. Ci può essere emissione termica e non termica (spettro continuo e discreto). Nell'emissione termica lo spettro principale è quello dalle onde radio ai raggi gamma. La radiazione di un AGN può dominare l'intero spettro integrato.

In figura 6.6 è riportato lo spettro di emissione (per lunghezza d'onda) delle galassie divise per morfologia: possiamo notare che determinate emissioni con una lunghezza d'onda precisa sono proprie della formazione stellare (osserviamo dei picchi in corrispondenza di quelle  $\lambda$ , come per OII e H $\alpha$ ) e infatti non appaiono in spettri di galassie in cui non si ha generazione stellare (passive, come quelle ellittiche o lenticolari). Lo spettro prende tutte le galassie; si potrebbe anche osservare la distribuzione spettrale di energia (SED) di una galassia in cui si verifica formazione stellare, che riporta solo un campionamento. Il confronto tra i due grafici (l'altro è sulle slide) è però in accordo con quanto riportato, si osservano quei picchi in entrambi i casi.

### 6.2.2 Gas freddo, gas tiepido e polvere nelle galassie a spirale

Come abbiamo detto una parte della radiazione proveniente dalle galassie proviene da gas freddo, in particolare da idrogeno neutro ( $H\ I$ ); questo all'interno di una galassia è caratterizzato da una densità superficiale  $\sim 1 - 10 M_{\odot} pc^{-2}$ , con un disco di dimensioni circa 5 volte maggiori dei dischi stellari (arriva fino a  $\sim 100 Kpc$ ). L'idrogeno neutro si osserva in banda radio, dal momento che l'emissione è di radiazione a lunghezza d'onda pari a 21 cm. Perché avviene l'emissione? Si tratta di una transizione dovuta alla struttura iperfine dell'atomo di idrogeno. Il livello fondamentale dell'atomo di idrogeno è diviso in due sottolivelli: nel livello di più bassa energia il neutrone e l'elettrone hanno spin opposto, mentre il livello in cui gli spin sono uguali ha energia lievemente superiore (differenza di  $6 * 10^{-6} eV$ , corrispondente alla lunghezza d'onda di 21 cm). Questa transizione è impossibile sulla Terra, avendo probabilità di emissione molto bassa, che corrisponde ad un'emivita lunghissima ( $\tau \sim 10^7$  anni). Tuttavia, osserviamo tale transizione nell'Universo a causa dell'elevata abbondanza di idrogeno nell'Universo e infatti la linea di emissione a 21 cm è ben visibile sia per la Via Lattea sia per altre galassie più esterne. La distribuzione di idrogeno neutro inoltre non è uniforme nel disco galattico: si ha una zona di maggior densità di idrogeno neutro (uguale per idrogeno ionizzato) lungo i bracci della spirale della galassia.

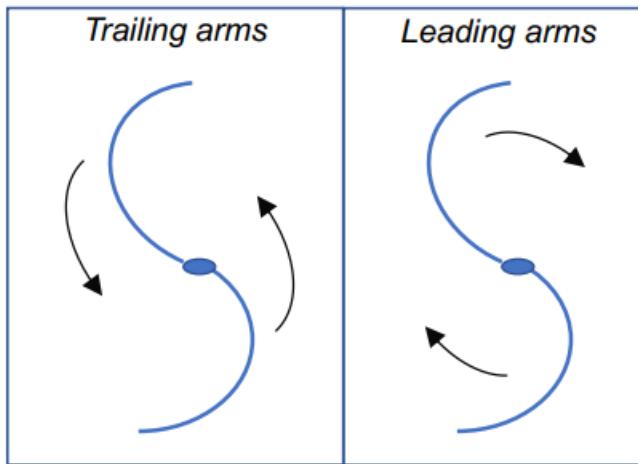
L'idrogeno può comparire anche a temperature più alte e in quel caso si tratta di idrogeno ionizzato ( $H\ II$ ): ci sono alcune regioni che si osservano in luce ultravioletta perché la radiazione viene messe da stelle OB (stelle più calde – più giovani, hanno un'emissione così energetica che ionizza gas circostante e quindi la vediamo in UV). Ma abbiamo stelle così calde se ci troviamo in una zona di formazione stellare; quindi osservare gas ionizzato è indice della presenza di formazione stellare. Dal momento che questo fenomeno si osserva principalmente lungo i bracci della galassie, se ne deduce che i bracci delle galassie a spirale sono luogo di formazione stellare.

Per quanto riguarda invece il gas freddo e la polvere, questi sono osservabili in luce infrarossa, perché per assorbimento (reddening) della luce, questa viene riemessa in banda infrarossa.

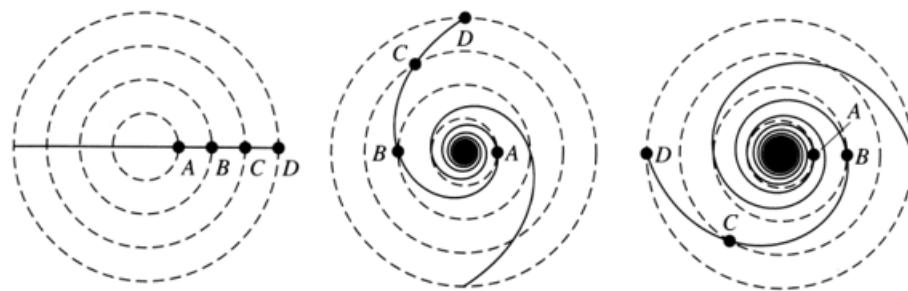
## 6.3 Struttura delle galassie a spirale

Analizziamo ora la struttura delle galassie a spirale: i dischi di spirale sono sempre in rotazione attorno al centro galattico. In quasi tutti i casi i bracci ruotano con bracci "trailing", solo in pochissime galassie si hanno "leading arms" (fare riferimento alla figura 6.7): la forma a spirale quindi data dal materiale che viene trascinato dai bracci ma che si muove con velocità diverse. Infatti NON si ha rotazione rigida: la velocità angolare NON è la stessa in tutti i punti del disco. Si ha invece rotazione differenziale, quindi le stelle più vicine al centro ruotano con velocità più elevate; in genere la velocità tangenziale è la stessa indipendentemente dalla distanza dal centro, quindi le regioni più esterne hanno velocità angolare  $\omega = V/r$  minore rispetto a quelle più vicine al centro. Questo significa che le stelle delle regioni più lontane dal centro impiegheranno decisamente più tempo per compiere un'orbita rispetto a quelle più vicine al centro.

In seguito a questa osservazione nasce il cosiddetto "dilemma del winding", mostrato in figura 6.8: se i bracci fossero fatti da materia, allora dovrebbero avvolgersi attorno al centro galattico in tempi scala più corti dell'età della galassia stessa (dopo poche decine di rotazioni). Questo però comporterebbe la perdita dei bracci, che risulterebbero tutti avvolti su se stessi, ma non è quello che noi osserviamo; infatti siamo in grado di osservare bracci a spirale anche per galassie molto antiche. La risposta quindi è che questo "arrotolamento" non c'è anche se è presente rotazione differenziale. Ma perché non c'è?



**Figura 6.7:** Differenza tra "trailing arms" e "leading arms": nel primo caso i bracci sono trascinati dalla rotazione, mentre nel secondo guidano e anticipano la rotazione.



**Figura 6.8:** Dilemma del winding: se i bracci delle galassie fossero di materia dovrebbero pian piano arrotolarsi sul centro della galassia stessa.

La soluzione a questo quesito è basata sulla teoria di onda di densità di Lin: il fatto è che i bracci di spirale non sono materiali (quindi non sono composti da un insieme di gas e stelle che si muovono sempre insieme), ma sono generati da un'onda di densità, un'onda quasi-statica e molto duratura nel tempo. La galassia può essere pensata come un disco di materiale che ruota, attraversato da un'onda in compressione che ruota a sua volta ma a una velocità inferiore del disco materiale, creando così dei picchi di densità che sono quelli che chiamiamo bracci della spirale. I bracci di spirale sono perciò i luoghi di densità più elevata (e quindi la buca di potenziale è più profonda), ma NON sono composti sempre dalla stesse stelle! Si può fare un'analogia al caso delle macchine bloccate nel traffico: le zone dove c'è traffico sono quelle con maggiore densità di macchine e dove queste saranno costrette a trascorrere più tempo. Una volta superata la zona però la macchina se ne va e al suo posto ce ne saranno altre. Allo stesso modo le stelle e il gas, durante la loro orbita attraversano queste zone di più alta densità restandoci più a lungo ma pian piano escono e vengono sostituite da altre. Di conseguenza lo spazio fra i diversi bracci delle galassie non è vuoto e i bracci sono solo i luoghi dove le stelle della galassia trascorrono la maggior parte del tempo della loro orbita.

Questo modello spiega anche perché si ha formazione stellare lungo i bracci: quando le stelle e i gas entrano nell'onda si crea una regione di compressione che, per il criterio di instabilità di Jeans TEMP (che dice che le stelle si formano più facilmente in regioni di alta densità), fa sì che la formazione stellare sia favorita.

Un'altra cosa che a questo punto è naturale chiedersi è da cosa siano generate queste onde di densità? La risposta non è ancora chiara, ma si ipotizza che ci siano mancanze di simmetria iniziali nel disco, ad esempio legate al processo di formazione delle galassie, che prevedere l'interazione con altre galassie (quindi potrebbe esserci una galassia molto grande che interagisce con una piccolina a formare la galassia finale che in quella zona presenterà un zona a più alta densità).

## 6.4 Brillanza superficiale

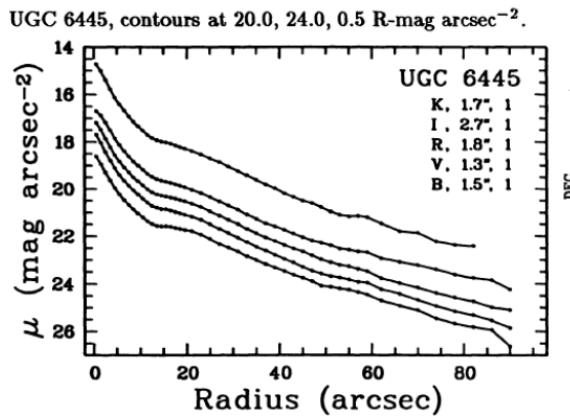
Un altro parametro importante della galassie è la loro brillanza superficiale (surface brightness, SB): questa altro non è che la distribuzione bidimensionale della materia luminosa sul piano del cielo, quindi la magnitudine per unità di area. Come facciamo a calcolare i profili di brillanza superficiale? Per farlo si costruiscono le isofote (ossia anelli di profilo caratterizzata dalla stessa brillantezza), si calcola la brillanza in ogni anello e infine si plottano i profili di brillanza superficiale (magnitudine - raggio), rappresentati in figura 6.9.

Si è osservato che quasi tutti i profili di brillanza delle galassie (sia ellittiche sia a spirale) seguono il profilo di Sersic, descritto dalla seguente equazione:

$$I(r) = I_0 e^{-b_n \left( \frac{r}{r_e} \right)^{\frac{1}{n}}}$$

in cui  $I(r)$  è la brillantezza superficiale,  $I_0$  è la brillantezza centrale,  $r_e$  è il raggio effettivo (ossia il raggio contenente il 50% della luce proiettata),  $b_n$  una costante e  $n$  è l'indice di concentrazione (compreso fra 1 e 10).

Le galassie ellittiche sono caratterizzate da un cosiddetto "profilo Vaucouleurs", corrispondente a  $n=4$ , mentre le galassie a spirale hanno un profilo di tipo esponenziale, corrispondente a  $n=1$ .



**Figura 6.9:** Profili di brillanza, costruiti piazzando la magnitudine a raggi diversi (quindi studiando la magnitudine delle isofite).

## 6.5 Dinamica interna

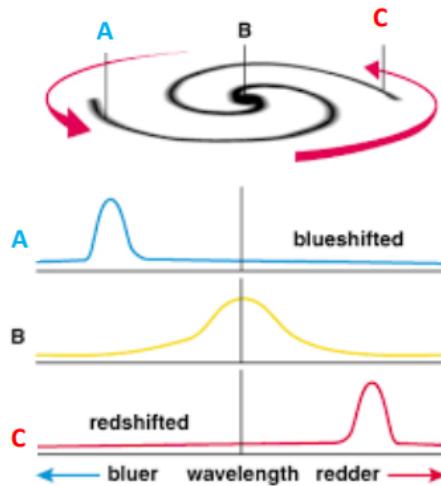
Arrivati a questo punto è interessante studiare la dinamica interna di queste galassie, ossia come si muovono le stelle al loro interno. Si nota infatti che le galassie a spirale e quelle ellittiche hanno una dinamica interna molto differente:

- *Galassie a spirale*: sono "rotation supported", ossia le stelle si muovono su orbite circolari (o quasi) attorno al centro (in modo molto ordinato). Le misure di cinematica interna si esplicano nella realizzazione di una curva di rotazione, che descrive come la rotazione delle stelle varia con la distanza dal centro galattico.
- *Galassie ellittiche*: sono "pressure supported", ossia le stelle si muovono di moti randomici attorno al centro (moto non ordinato). Una misura di cinematica si traduce nella realizzazione di un profilo di dispersione di velocità. Infatti noi dobbiamo pensare che il sistema si muove con un moto di insieme (il cosiddetto "bulk motion") verso di me o lontano da me, ma ciascuna stella ha proprio moto. La dispersione di velocità misura quanto la velocità delle singole stelle sono disperse attorno alla velocità media del bulk motion, anche detta velocità sistemica.

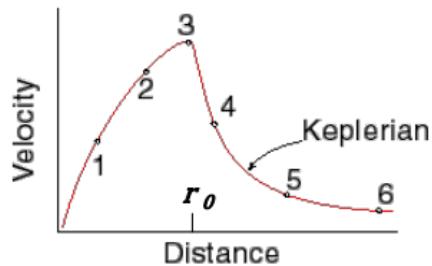
### 6.5.1 Curve di rotazione delle galassie a spirale

Per analizzare la dinamica interna delle galassie a spirale ci serviamo di due strumenti principali:

- Split spettroscropy: mettiamo una fenditura quando osserviamo una galassia, in modo da ricevere solo la luce caduta sulla fenditura: al centro della fenditura ci sarà la luce che proviene dal centro della galassia e la luce ai bordi della fenditura verrà invece dal bordo della galassia. Per costruire uno spettro a questo punto misuriamo una determinata riga spettrale, prima al centro e poi agli estremi della fenditura: quello che si ottiene è che la riga è centrata a lunghezze d'onda diverse per effetto Doppler. La riga della parte di galassia che si avvicina a noi è blue shifted e quella della parte di galassia che si allontana da noi è red shifter e attraverso una misura della differenza delle lunghezze d'onda delle parti estremali trovo la velocità di rotazione della galassia. La riga misurata al centro mi dice invece la velocità sistemica della galassia (tramite un confronto della lunghezza d'onda con quella di laboratorio), come viene riassunto in figura 6.10. La velocità di rotazione si misura utilizzando forti righe di emissione in banda otica e dalla riga 21cm in banda radio (viene da idrogeno neutro/gas freddo).



**Figura 6.10:** La riga proveniente dal punto B (centro della galassia) ci dà la velocità sistematica, mentre le linee che provengono dai punti A e C ci dicono come si stanno muovendo i bracci della galassia: se si muovono verso di noi avranno emissione più spostata sul blu, mentre se si allontanano sul rosso.

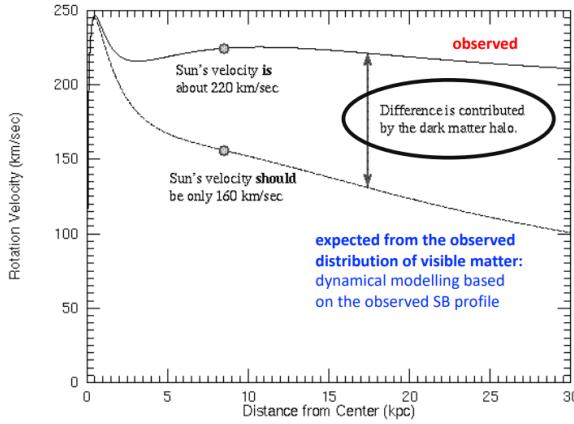


**Figura 6.11:** Andamento del potenziale nelle galassie a spirale.

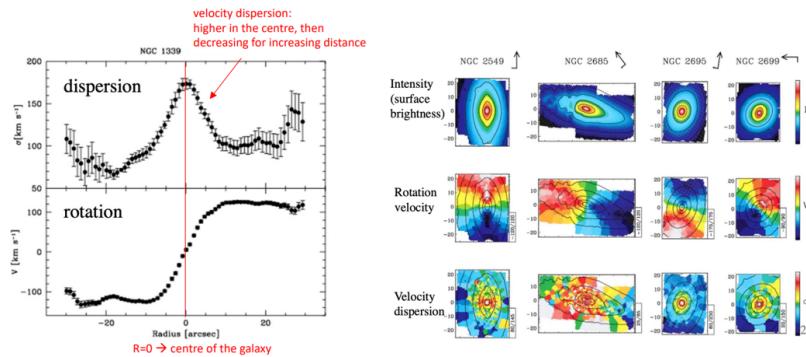
- Integral Field spettroscopy: combina imaging (fotometria) e spettroscopia. Dopo aver ottenuto un'immagine della galassia, da ogni pixel del CCD otteniamo uno spettro. Abbiamo quindi un piano su cui si ha la luce che viene raccolta e una terza dimensione perché per ogni pixel c'è uno spettro. Questo ci permette di avere informazione sulla dinamica non solo sulla fenditura, come prima, ma su tutta l'area della galassia, quindi riusciamo ad ottenere delle mappe bidimensionali di rotazione. Mentre con la "split spettroscropy" abbiamo un valore di velocità per ogni distanza fissata dal centro, in questo modo otteniamo invece una mappa bidimensionale, quindi in ogni punto dell'area possiamo vedere quanto velocemente ruotano le stelle.

Le stelle in una galassia a spirale sono punti che ruotano attorno al centro, quindi ci aspettiamo un potenziale kepleriano; la galassia però non è puntiforme. Dobbiamo quindi pensarla come a una sfera di gas e una stella che si muove in quella sfera. Al centro della galassia si ha rotazione nulla (infatti ci troviamo sull'asse di rotazione), poi ci sarà un andamento lineare della velocità fino a un certo punto, in cui possiamo ritornare al caso kepleriano, con un andamento riassunto in figura 6.11.

Dal punto 3 di figura 6.11, siamo fuori dalla zona in cui c'è tanta materia, la densità è così bassa che posso approssimare la situazione come se fosse una massa puntiforme e quindi poi ci aspettiamo

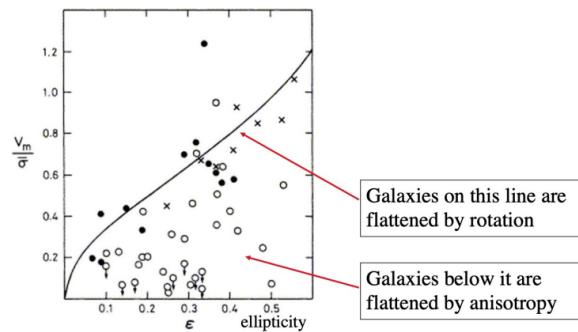


**Figura 6.12:** Confronto fra la curva di rotazione aspettata che segue un decadimento kepleriano e quella invece osservata, che non presenta questo decadimento ma piuttosto un plateau: questo fenomeno è spiegabile grazie alla materia oscura.



**Figura 6.13:** Confronto fra i due tipi di spettroscopia: quella a fessura mi da una riga spettrale radiale, quella a campo integrale mi dà invece una mappa bidimensionale.

un andamento kepleriano Dal profilo di brillanza ci aspetteremo quindi un andamento dapprima con aumento lineare della velocità (fino a quando mi trovo abbastanza vicino alla galassia e più forza d'interazione c'è) e poi decrescita kepleriana.. Guardando ai dati però non si osserva il “calo” kepleriano che ci aspetteremmo da come osserviamo la materia visibile. C'è una spiegazione a questo: l'unico modo per avere un andamento di questo tipo è infatti avere la presenza di una massa invisibile che continua ad essere presente anche quando ci aspettiamo che sia finiti la materia della galassia. Questa materia, che contribuisce alla buca di potenziale ma non è rilevabile attraverso emissione elettromagnetica, viene detta *materia oscura*. In figura 6.12 possiamo vedere le curve di rotazione relative alla nostra galassia, Via Lattea, con indicazione del Sole come sua stella. Come emerge dal confronto c'è una profonda discrepanza fra il comportamento aspettato e quello invece osservato, e questo è spiegabile solo ammettendo la presenza di questo alone di materia oscura che circonda anche la nostra galassia (addirittura si stima che la nostra galassia sia fatta al 75% di materia oscura).



**Figura 6.14:** La curva in figura divide le galassie che hanno velocità di rotazione sufficiente per causare in questo modo lo schiacciamento e quelle che invece sono schiacciate per anisotropia della dispersione di velocità. Possiamo vedere che la maggior parte delle galassie ellittiche è schiacciata proprio per questo secondo motivo.

### 6.5.2 Dispersione delle velocità per galassie ellittiche

Per quanto riguarda le galassie ellittiche, queste sono caratterizzate da una velocità media di movimento della galassia intera e poi in realtà ogni stella si muove random. Questi moti randomi hanno velocità distribuite con una distribuzione simile ad una gaussiana intorno alla velocità sistemica; si dice che le galassie ellittiche sono "pressure supported" perché più grande è la buca di potenziale e maggiore è la dispersione di velocità (quindi galassie più massicce hanno dispersione di velocità maggiore). Ci immaginiamo un allargamento della riga spettrale: ciascuna stella si muove con una velocità maggiore o minore rispetto alla velocità sistemica, quindi, avrà uno shift verso il blu o verso il rosso rispetto alla sistemica. Osserviamo una sovrapposizione di righe spettrali, alcune spostate verso il rosso e altre verso il blu; se la dispersione fosse zero avrei una distribuzione più stretta (gaussiana più stretta), quanto maggiore è la dispersione di velocità, tanto più larga è la distribuzione. A questo punto si misura l'allargamento al centro e a varie distanze dal centro e si ottiene un profilo di dispersione di velocità (sempre usando la spettroscopia a fessura). In modo alternativo si può procedere con la spettroscopia a campo integrale, in modo da ricavare una mappa bidimensionale di dispersione di velocità e non solo un profilo radiale. Un confronto tra i risultati ottenuti dai due tipi di spettroscopia è presentato in figura 6.13.

Un'altra caratteristica interessante delle galassie a spirale è il loro schiacciamento: queste galassie infatti abbiamo detto che praticamente non ruotano significativamente in genere, come mai allora sono schiacciate? Questo fenomeno è in gran parte dovuta alla anisotropia orbitale (anisotropia della dispersione di velocità): questo significa che la dispersione di velocità non ha lo stesso valore in tutte le direzioni dello spazio. Se si ha una dispersione di velocità maggiore su un asse, avremo la galassia più allungata lungo tale direzione, ovvero la galassia risulta schiacciata nella direzione in cui si ha minore dispersione di velocità. La maggior parte delle ellittiche ha grande ellitticità pur con bassa velocità media di rotazione, come si può vedere in figura 6.14.





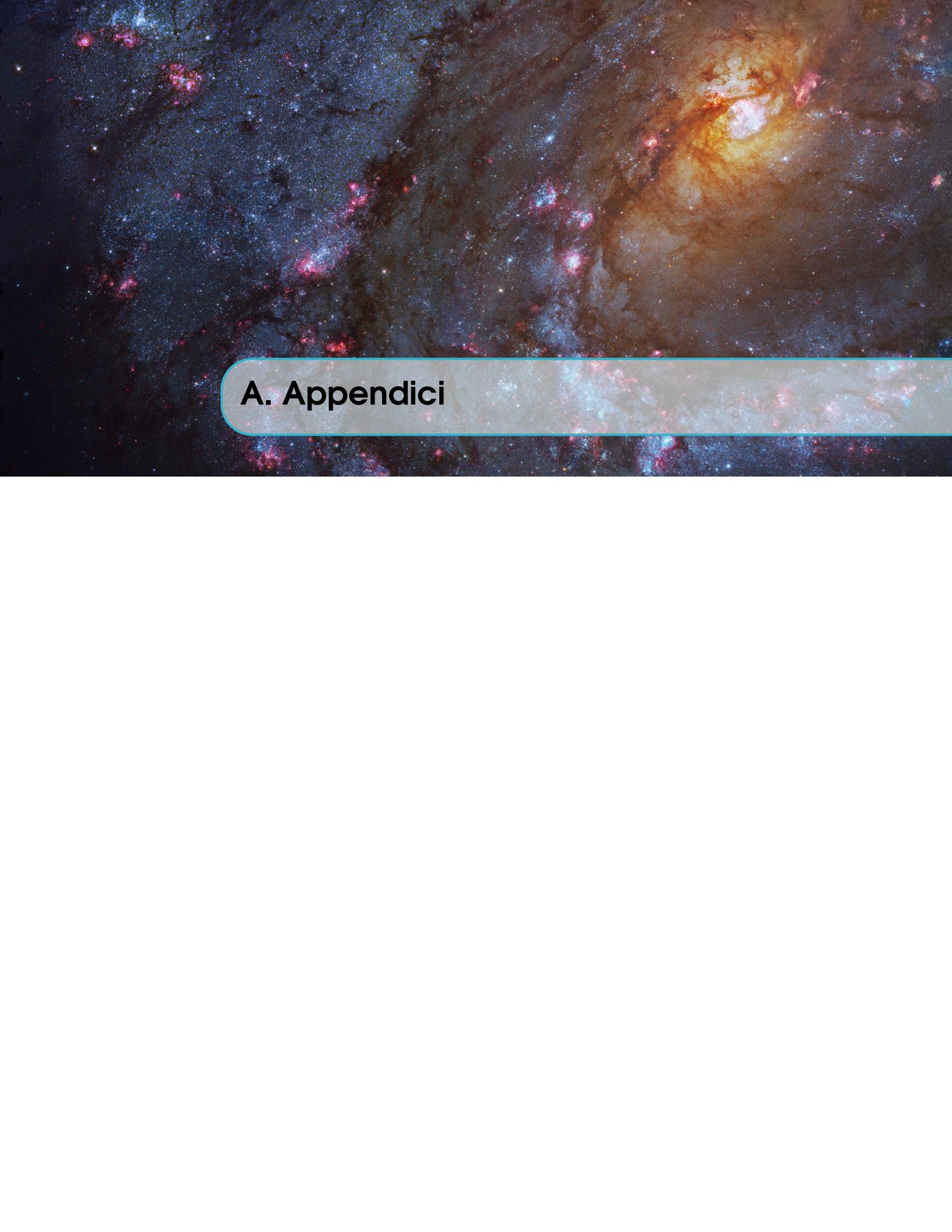
## 7. Ammassi di galassie





## 8. Introduzione alla cosmologia





## A. Appendix