Matemática Básica

Tipos de matrices

1. Se llama *matriz nula* a la que tiene todos los elementos cero.
   Por ejemplo,
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   es una matriz nula de tamaño 2x5.

2. Se llama *matriz fila* a la que sólo tiene una fila, es decir su dimensión es 1x n.
   Por ejemplo,
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$
   es una matriz fila de tamaño 1 x 4.

3. Se llama matriz columna a la que sólo consta de una columna, es decir su dimensión será m x 1, como por ejemplo:
   $$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{8} \end{pmatrix}$$
   es una matriz columna de tamaño 3 x 1.

4. Una matriz es cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir su dimensión es n x n. La matriz $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ del primer ejemplo anterior es cuadrada de tamaño 2 x 2 o simplemente de orden 2.
   Otro ejemplo de matriz cuadrada es:
   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$
   de orden 3.
   Dentro de las matrices cuadradas llamaremos *diagonal principal* a la formada por los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$, siendo la matriz:
   $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
   En la matriz D del ejemplo anterior, su diagonal principal estaría formada por 1, 5, 0.
   Se llama *traza de la matriz* a la suma de los elementos de la diagonal. Es decir, Traza (A)=$a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}$, y en el caso de D, Traza (D)= 1+5+0 = 6.
   La *diagonal secundaria* es la formada por los elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \ldots, a_{n1}$.
   En la matriz D estaría formada por 3, 5, -3.

Una clase especial de matrices cuadradas son las *matrices triangulares*.

Una matriz es *triangular superior* si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos y *triangular inferior* si son nulos todos los elementos situados por encima de dicha diagonal.

Son ejemplos de estas matrices:

$$E = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 16 & -78 \end{pmatrix}}_{\text{Triangular inferior}} \qquad F = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}}_{\text{Triangular superior}}$$

Analisis Matematico

Relaciones

SÍMBOLOS UTILIZADOS

Lógica		*Teoría de conjuntos*	
$\Rightarrow$	"implica"	$\in$	"pertenece a"
$\Leftrightarrow$	"equivale"	$\notin$	"no pertenece a"
$\forall$	"para todo"	$\subset$	"está incluido en"
$\exists$	"existe"	$\not\subset$	"no está incluido en"
:	"tal que"	{ }	"limitación de los elementos de un conjunto"
/	"tal que"	$\bigcap$	"intersección"
		$\varnothing$	"conjunto vacio"
		$CA, A', \overline{A}$	"complementario de A"

1. PARES ORDENADOS. PRODUCTO CARTESIANO

Los **PARES ORDENADOS** son entes matemáticos que consisten de dos elementos $\underline{a}$ y $\underline{b}$, denominados **PRIMERA COMPONENTE y SEGUNDA COMPONENTE** respectivamente, y se les denota por el símbolo : (a, b) .

DEFINICIÓN FORMAL.- En términos de conjuntos, el PAR ORDENADO (a, b) se define como el conjunto:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

1.1 **IGUALDAD DE PARES ORDENADOS.-** Dados dos pares ordenados (a, b) y (c, d), entonces

$$(a, b) = (c, d) \quad \textit{si y sólo si} \quad a = c \;\; y \;\; b = d .$$

1.2 NOTA: De (1.1) tenemos que: **DOS PARES ORDENADOS** ***son iguales*** si y sólo si sus primeras componentes son iguales entre sí, y sus segundas componentes también son iguales entre sí.

1.3 EJEMPLOS .- a) $(2, 3)$ y $(3, 2)$ no son pares ordenados iguales.

b) $(6, 3)$ y $(6, 9)$ tampoco son pares ordenados iguales, pues difieren en la segunda componente.

b) Si $(2x + y, 1) = (3, 2x - y)$ entonces se cumple el sistema de ecuaciones simultáneas: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 1 = 2x - y \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = 1 , \quad y = 1$

PRODUCTO CARTESIANO

Dados los conjuntos A y B, llamamos producto cartesiano **A x B** al conjunto de pares ordenados $(a; b)$ tal que $a \in A$ y $b \in B$, esto es:

$$\boxed{A \times B = \{(a; b)/a \in A \wedge b \in B\}}$$

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{2; 3; 4\}\ y\ B = \{4; 7\}$

Producto Cartesiano A x B, será:

$$A \times B = \{(2; 4), (2; 7), (3; 4), (3; 7); (4; 4), (4; 7)\}$$

1.4 PRODUCTO CARTESIANO $A \times B$

Dados dos conjuntos no vacíos A y B se define el PRODUCTO CARTESIANO $A \times B$ como el conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{ (a, b) \; / \; a \in A \;\; y \;\; b \in B \} ,$$

tales que su primera componente está en el conjunto A, y su segunda componente en el conjunto B.

1.5 EJEMPLO.- Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, entonces
$A \times B = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$, cuyos elementos pudieron haberse distribuido en un DIAGRAMA DE ÁRBOL :

A	B		A × B
1	a	→	$(1, a)$
	b	→	$(1, b)$
2	a	→	$(2, a)$
	b	→	$(2, b)$
3	a	→	$(3, a)$
	b	→	$(3, b)$

TOTAL :
$3 \times 2 = 6$ elementos en $A \times B$.

1.6 NOTA.- En general, si los conjuntos A y B son finitos con m y n elementos respectivamente, entonces el Producto Cartesiano $A \times B$ tiene $m \times n$ elementos. De aquí proviene su nombre y su notación.

El concepto de producto Cartesiano se puede extender a más de dos conjuntos no vacíos:

$$A \times B \times C = \{ (a, b, c) \; / \; a \in A \;\wedge\; b \in B \;\wedge\; c \in C \}$$

surgiendo así el concepto de ***Terna Ordenada*** :

$$(a, b, c) = \{ \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\} \}$$

1.7 EJEMPLO .- Si $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{r, s\}$ $\Rightarrow$

$\underline{A}$	$\underline{B}$	$\underline{C}$	$\underline{A \times B \times C}$
a	1	r	$(a, 1, r)$
		s	$(a, 1, s)$
	2	r	$(a, 2, r)$
		s	$(a, 2, s)$
b	1	r	$(b, 1, r)$
		s	$(b, 1, s)$
	2	r	$(b, 2, r)$
		s	$(b, 2, s)$

Total: $2 \times 2 \times 2 = 8$ elementos.

En general, el producto cartesiano no es conmutativo; es decir ,

$$A \times B \neq B \times A \text{ , a menos que } A = B .$$

1.8 EJEMPLO .- Si $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ entonces $A \times B = \{(1, 2)\}$, mientras que $B \times A = \{(2, 1)\}$.

1.9 EJEMPLO .- Demuestre que:

1) $M \subset A \;\wedge\; N \subset B \;\Rightarrow\; M \times N \subset A \times B$

2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

3) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

1. Sea $(x, y) \in M \times N \Rightarrow x \in M \wedge y \in N$
$\Rightarrow x \in A \wedge y \in B$ por hipótesis
$\Rightarrow (x, y) \in A \times B$

Por lo tanto, $M \times N \subset A \times B$.

2. Sea $(x, y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C) \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C) \Leftrightarrow$
$(x \in A \wedge x \in A) \wedge y \in B \wedge y \in C \Leftrightarrow$
$(a \in A \wedge b \in B) \wedge (a \in A \wedge b \in C) \Leftrightarrow$
$(x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \in A \times C \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

1.10 PROBLEMA .- Demuestre que

$$(A \times B)' = (A' \times B) \cup (A \times B') \cup (A' \times B').$$

SOLUCIÓN .- Sea

$(a, b) \in (A \times B)' \Leftrightarrow (a, b) \notin A \times B \Leftrightarrow \sim[(a, b) \in A \times B]$

$\equiv \sim[a \in A \wedge b \in B] \equiv \sim(a \in A) \vee \sim(b \in B) \equiv$

$[\sim(a \in A) \wedge (b \in B \vee b \in B')] \vee [(a \in A \vee a \in A') \wedge \sim(b \in B)]$

(pues $p \equiv p \wedge V$),

$\equiv (a \in A' \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in B') \vee (a \in A' \wedge b \in B')$

$\Leftrightarrow (a, b) \in (A' \times B) \cup (A \times B') \cup (A' \times B')$.

1.12 NOTA .- Al Producto Cartesiano $A \times A$ también se le representa por A^2.

3. RELACIONES BINARIAS

3.1. Definición

Una relación R, del conjunto A al conjunto B, es todo subconjunto del producto cartesiano $A \times B$; es decir, R es una relación binaria de A en B $\leftrightarrow R \subset A \times B$.

$$\boxed{R = \{(a;b) \in A \times B \ / \ P(a;b)\}}$$

Notación:

- Si a ∈ A y b ∈ B, para decir que "a" está relacionado con "b" por R escribimos: **(a;b)∈ R** o **a R b**
- Si "a" no está relacionado con "b", entonces **(a;b) ∉ R**

2. RELACIONES. TIPOS DE RELACIONES

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, a un conjunto $\mathcal{R}$ de pares ordenados se le denomina **RELACIÓN DE A EN B** si es que $\mathcal{R}$ es un subconjunto cualquiera de $A \times B$. También se le llama **RELACIÓN BINARIA**.

$$\boxed{\mathcal{R} \text{ es una } \textit{Relación de } A \textit{ en } B \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathcal{R} \subset A \times B}$$

2.1 EJEMPLO .- Dados $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$. Los siguientes conjuntos de pares ordenados son algunas RELACIONES de A en B :

$\mathcal{R}_1 = \{(3, 1)\}$, $\mathcal{R}_2 = \{(5, 1)\}$, $\mathcal{R}_3 = \{(3, 1), (4, 2), (5, 1)\}$
$\mathcal{R}_4 = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$, $\mathcal{R}_5 = A \times B$.

Puesto que, en general, si $A \times B$ tiene n elementos entonces $A \times B$ tiene 2^n subconjuntos; por lo tanto, existen 2^n relaciones de A en B .

Cuando un par ordenado (a , b) pertenece a una relación $\mathcal{R}$ también se denota: $a \mathcal{R} b$. Es decir, $a \mathcal{R} b$ si y sólo si $(a , b) \in \mathcal{R}$, y en tal caso se lee:

" $\underline{a}$ está relacionado con $\underline{b}$ según la relación $\mathcal{R}$ ".

Para las relaciones previamente dadas: $3 \mathcal{R}_1 1$, $4 \mathcal{R}_3 2$.

Y si $(a , b) \notin \mathcal{R}$ entonces se denota $a \not{\mathcal{R}} b$.

2.2 DEFINICIÓN .- Se dice que $\mathcal{R}$ es una **RELACIÓN EN UN CONJUNTO** $\underline{A}$ si

$$\underline{\mathcal{R} \subset A \times A} .$$

2.3 EJEMPLO .- Si $\mathcal{R}$ es una Relación en $A = \{2, 3, 4\}$ tal que

$\mathcal{R} = \{(x, y) \; / \; y + 1 \leq x^2\}$ entonces

$\mathcal{R} = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$,

pues para $(x, y) \in A \times A$, con $x \in A \;\wedge\; y \in A$:

$x = 2 :\quad y + 1 \leq 2^2 \;\Rightarrow\; y \in \{2, 3\} \;\Rightarrow\; (2, 2), (2, 3) \in \mathcal{R}$
$x = 3 :\quad y + 1 \leq 3^2 \;\Rightarrow\; y \in \{2, 3, 4\} \;\Rightarrow\; (3, 2), (3, 3), (3, 4) \in \mathcal{R}$
$x = 4 :\quad y + 1 \leq 4^2 \;\Rightarrow\; y \in \{2, 3, 4\} \;\Rightarrow\; (4, 2), (4, 3), (4, 4) \in \mathcal{R}$

. RELACIONES BINARIAS

Ejemplo 1:

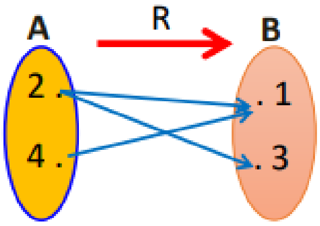
Sean los conjuntos A={2;4;7} y B={1;3;5}

Determine los elementos de la siguiente relación:
$R = \{(x; y) \in A \times B / \, x + y < 6 \}$

Solución:

$A \times B = \{(2;1), (2;3), (2;5), (4;1), (4;3), (4;5), (7;1), (7;3), (7;5)\}$

$\boxed{R = \{(2;1), (2;3), (4;1)\}}$



2,4 PROBLEMA .- En $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define la relación

$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (5,1), (2,4), (5,4), (5,2), (4,3), (3,5)\}$.

Si $M = \{(x \in A \, / \, (x, 2) \in \mathcal{R}\}$, $N = \{(y \in A \, / \, (3, y) \in \mathcal{R}\}$

$P = \{x \in A \, / \, (x, 5) \notin \mathcal{R}\}$, halle $(M \cup N) - P$.

SOLUCIÓN .- Verifique que

$M = \{(x \in A \, / \, (x, 2) \in \mathcal{R}\} = \{2, 5\}$

$N = \{(y \in A \, / \, (3, y) \in \mathcal{R}\} = \{3, 5\}$

$P = \{x \in A \, / \, (x, 5) \notin \mathcal{R}\} = \{1, 2, 4, 5\}$

$\therefore \quad (M \cup N) - P = \{2, 3, 5\} - \{1, 2, 4, 5\} = \{3\}$.

2.5 PROBLEMA .- Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ y la relación R en A:

$$(a, b) \in R \iff a \text{ es divisor de } b .$$

Halle $n(\mathcal{R})$ = *número de elementos de la relación* $\mathcal{R}$.

SOLUCIÓN .- $(a, b) \in \mathcal{R} \subset A \times A \iff b$ *es múltiplo de* a .

Así $(1, 1), (2, 4), (3, 6) \in \mathcal{R}$. En general:

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6),(4,4),(4,8),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8)\}$$

$\therefore \quad n(\mathcal{R}) = 20$ elementos.

x estudiar!!!

2.6 EJERCICIO .- Se define una relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$ como :

$$(a, b) \in \mathcal{R} \iff a - b \text{ es múltiplo de } 3 .$$

Demuestre que:
1) $(a, a) \in \mathcal{R}, \ \forall \ a \in \mathbb{Z}$
2) $(a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$
3) $(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$.

SOLUCIÓN $a - b$ *es múltiplo de* $3 \iff a - b = 3k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$

1) $\forall \ a \in \mathbb{Z}, \quad a - a = 0 = 3 \times 0$, con $0 \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow (a, a) \in \mathcal{R}$.

2) Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ entonces $a - b = 3k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$,
$\Rightarrow -(a - b) = 3(-k)$, donde $-k \in \mathbb{Z}$, pues $k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow b - a = -(a - b) \in \mathcal{R}$.

3) Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ y $(b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow a - b = 3k_1$, algún $k_1 \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow b - c = 3k_2$, algún $k_2 \in \mathbb{Z}$

Entonces, sumando ambas igualdades: $a - c = 3k_3$, donde
$k_3 = (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}, \quad \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$.

x estudiar!!!

2.7 RELACIONES REFLEXIVAS

Una relación $\mathcal{R}$ es una RELACIÓN REFLEXIVA EN $\underset{\sim}{A}$ $[\mathcal{R} \subset A \times A]$ si para todo $a \in A$: $(a, a) \in \mathcal{R}$.

Es decir, $\mathcal{R}$ es REFLEXIVA en A si *todo elemento de A está relacionado consigo mismo mediante la relación $\mathcal{R}$*.

2.8 EJEMPLO .- Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones en A :

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,2), (3,3), (3,4), (4,4), (4,1), (2,2), (1,1)\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (2,2), (3,4), (4,3), (4,4)\}$$

entonces $\mathcal{R}_1$ es reflexiva en A pues $(a, a) \in \mathcal{R}_1$, $\forall a \in A$, además de otros puntos, en cambio en $\mathcal{R}_2$ falta $(3, 3)$ para serlo.

2.9 RELACIONES SIMÉTRICAS

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es una RELACIÓN SIMÉTRICA en $\underline{A}$ si se cumple la implicación siguiente:

$$(a, b) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad (b, a) \in \mathcal{R} .$$

Es decir, si (a, b) está en $\mathcal{R}$ entonces el elemento (b, a) también debe estar en $\mathcal{R}$ para que $\mathcal{R}$ sea SIMÉTRICA .

$$(a, b) \in \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad (b, a) \in \mathcal{R} .$$

Es decir, si (a, b) está en $\mathcal{R}$ entonces el elemento (b, a) también debe estar en $\mathcal{R}$ para que $\mathcal{R}$ sea SIMÉTRICA .

2.10 EJEMPLO .- Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones en A :

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,2), (2,3), (4,2), (3,2), (2,1), (2,4)\} ,$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\} ,$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(1,1), (3,3), (4,1), (2,3), (1,4)\} ,$$

vemos que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ son Simétricas , pero que $\mathcal{R}_3$ no lo es, pues le falta el elemento $(3, 2)$ para serlo.

2.11 RELACIONES TRANSITIVAS

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto A es **TRANSITIVA** si se cumple la implicación:

$$[(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R}] \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$$

2.12 EJEMPLO.- Dado $A = \{1, 2, 3, 4\}$, la relación en A:

$$\mathcal{R}_1 = \{(1,2), (2,3), (1,3), (3,1), (1,1)\},$$

NO ES TRANSITIVA, pues si bien se cumplen las implicaciones:

$$(1, 2) \in \mathcal{R}_1 \wedge (2, 3) \in \mathcal{R}_1 \Rightarrow (1, 3) \in \mathcal{R}_1$$

y $$(1, 3) \in \mathcal{R}_1 \wedge (3, 1) \in \mathcal{R}_1 \Rightarrow (1, 1) \in \mathcal{R}_1$$

en cambio falla en: $(2, 3) \in \mathcal{R}_1 \wedge (3, 1) \in \mathcal{R}_1 \Rightarrow (2, 1) \in \mathcal{R}_1$, pues falta $(2, 1)$ en $\mathcal{R}_1$.

En cambio $\mathcal{R}_2 = \{(1,2), (2,1), (2,2), (1,1)\}$ sí es Transitiva,

$\mathcal{R}_3 = \{(1,4), (4,1), (2,4), (3,4), (4,3)\}$ no es Transitiva, pues le faltan por lo menos 7 elementos para serlo. [¿Cuáles son?]

RPTA: Son: $(1,1), (2,1), (3,1), (1,3), (2,3), (3,3)$, y $(4,4)$.

2.12 RELACIONES DE EQUIVALENCIA

Una relación $\mathcal{R}$ en A es una **RELACIÓN DE EQUIVALENCIA** si satisface (simultáneamente) las tres condiciones:

1) **REFLEXIVA :** $\forall a \in A$, $(a, a) \in \mathcal{R}$
2) **SIMÉTRICA :** Si $(a, b) \in \mathcal{R}$ entonces $(b, a) \in \mathcal{R}$
3) **TRANSITIVA :** Si $[(a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R}]$ entonces $(a, c) \in \mathcal{R}$

2.13 EJEMPLOS.- 1) Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ entonces la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (2,1), (1,2), (2,2), (3,3), (4,4)\}$$

es una **RELACIÓN DE EQUIVALENCIA** en A.

RELACIONES BINARIAS

3.2. Dominio y rango de una relación

Dominio de una relación:
Conjunto formado por todas las primeras componentes de los pares ordenados de la relación.

$\boldsymbol{Dom\ R = \{x \in A \ / \ \exists y \in B \land (x; y) \in R\}}$

Rango de una relación:
Conjunto formado por todas las segundas componentes de los pares ordenados de la relación.

$\boldsymbol{Ran\ R = \{y \in B \ / \ \exists x \in A \land (x; y) \in R\}}$

Ejemplo 2:
Si $A = \{1; 2; 3; 4\}$ $B = \{0; 1; 2; 5\}$. Halle el dominio y rango de la relación binaria $R = \{(x; y) \in A \times B / x + y = 4\}$

Solución:

$R = \{(2; 2), (3; 1), (4; 0)\}$

- *Dom*(R) = {2; 3; 4}
- *Ran*(R) = {0; 1; 2}

2.14 DOMINIO Y RANGO DE UNA RELACIÓN

Se llama **DOMINIO** de la relación $\mathcal{R}$ al conjunto de todas las primeras componentes de los pares ordenados de $\mathcal{R}$.

Y se llama **RANGO** de la relación $\mathcal{R}$ al conjunto de todas las segundas componentes de los pares ordenados de $\mathcal{R}$.

$$\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{ x \ / \ (x, y) \in \mathcal{R} \}$$

$$\text{Rang}(\mathcal{R}) = \{ y \ / \ (x, y) \in \mathcal{R} \}$$

2.15 EJEMPLO.- Dada la relación en $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

$$\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 3)\}$$

entonces $\text{Dom}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\text{Rang}(\mathcal{R}) = \{1, 2, 3\}$.

4. GRÁFICA DE RELACIONES BINARIAS LINEALES Y CUADRÁTICAS

4.1. Relación lineal

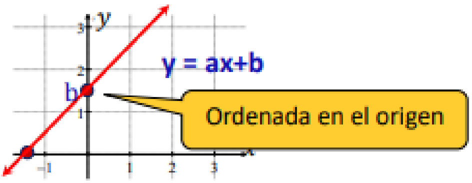
Una relación lineal está definida por:

$$R = \{ (x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, y = ax + b \} \quad a, b \in \mathbb{R} \;,\; a \neq 0 \}$$

Su representación gráfica es una recta con pendiente a :

Dom(R) = $\mathbb{R}$

Ran(R) = $\mathbb{R}$



3. GRÁFICAS DE RELACIONES

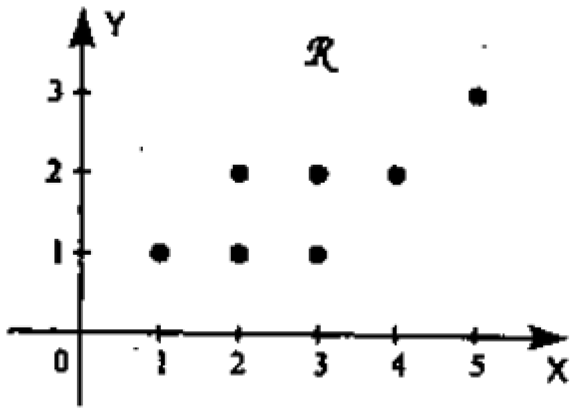
Dada una relación $\mathcal{R}$ se consideran los valores del DOMINIO de $\mathcal{R}$ en el Eje X , y los valores del RANGO de $\mathcal{R}$ en el Eje Y , y luego se van ubicando los puntos en el plano cartesiano correspondiente.
Así por ejemplo, la representación gráfica de la relación

$$\mathcal{R} = \{ (1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (4,2), (5,3) \}$$

Corresponde a la figura adyacente

3.1 NOTACIÓN.-

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$



3.2 EJEMPLO .- Bosquejaremos las gráficas de las siguientes relaciones en $\mathbb{R}$:

$$L = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x = y \} ,$$

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x = 2 \} = \{ (2, y) \ / \ y \in \mathbb{R} \}$$

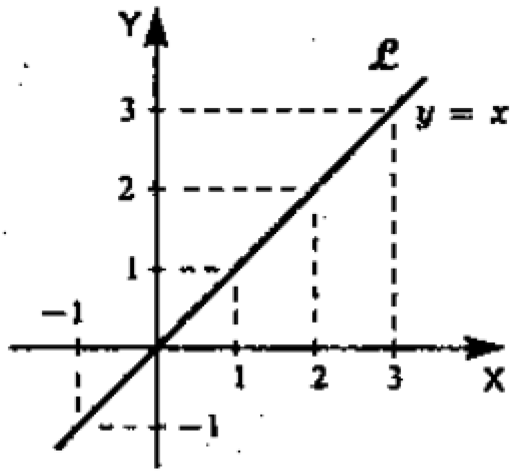
$$T = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = 3 \} = \{ (x, 3) \ / \ x \in \mathbb{R} \}$$

Para que un par ordenado se encuentre en la relación $\mathcal{L}$ sus dos componentes deben ser IGUALES. Así, algunos pares ordenados en $\mathcal{L}$ son: $(-2, -2)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(6, 6)$, $(7/5, 7/5)$, etc., y donde resulta en este caso que:

$$\text{Dom}(\mathcal{L}) = \langle -\infty, \infty \rangle = \mathbb{R} \qquad [\text{ Eje X }] ,$$

$$\text{Rang}(\mathcal{L}) = \langle -\infty, \infty \rangle = \mathbb{R} \qquad [\text{ Eje Y }]$$

En general, como el dominio ha de ser un conjunto continuo, entonces uniendo todos los puntos de $\mathcal{L}$ se obtiene una RECTA.



Algunos elementos de la relación S son $(2,-2)$, $(2,-1)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,3/2)$, etc. Aquí basta que la primera componente sea igual a $\underset{\smile}{2}$ para que tal par ordenado se encuentre en la relación

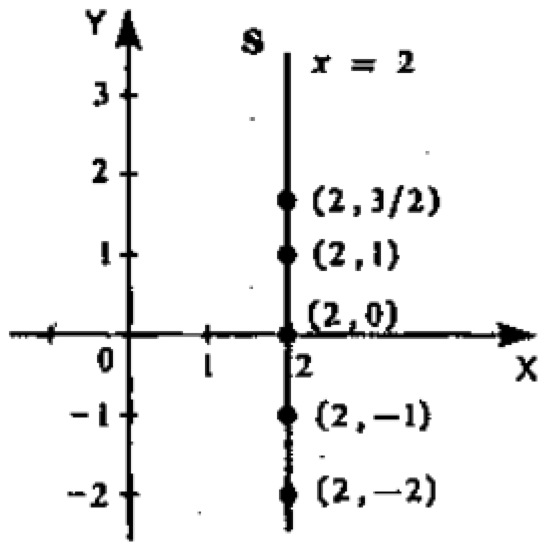
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x = 2\} = \{(2,y) \ / \ y \in \mathbb{R}\} .$$

La segunda componente no tiene restricciones en $\mathbb{R}$:

$\text{Dom}(S) = \{2\}$

$\text{Rang}(S) = \langle -\infty, \infty \rangle$

Aquí también la gráfica corresponde a una **RECTA (VERTICAL)**, que precisamente pasa por $x = 2$.

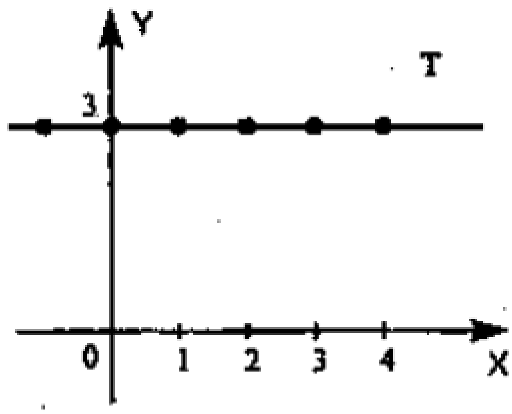


En general, toda ecuación de la forma: $\boxed{x = C}$ ($\underline{C}$ constante) en el plano XY corresponde a una **RECTA VERTICAL** que pasa por $x = C$ precisamente.

Análogamente, podemos ver que la gráfica de la relación T definida por $T = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = 3\}$ corresponde a una **RECTA HORIZONTAL** que pasa a la "altura" $y = 3$.

$\text{Dom}(T) = \langle -\infty, \infty \rangle$

$\text{Rang}(T) = \{3\}$



En general, toda ecuación de la forma: $\boxed{y = C}$, con C constante, en el plano XY corresponde a una **RECTA HORIZONTAL** que pasa precisamente a la altura $y = C$.

3.3 NOTA.- La gráfica correspondiente a

a) la ecuación $y = 0$ coincide con EL EJE X ;

b) la ecuación $x = 0$ coincide con EL EJE Y.

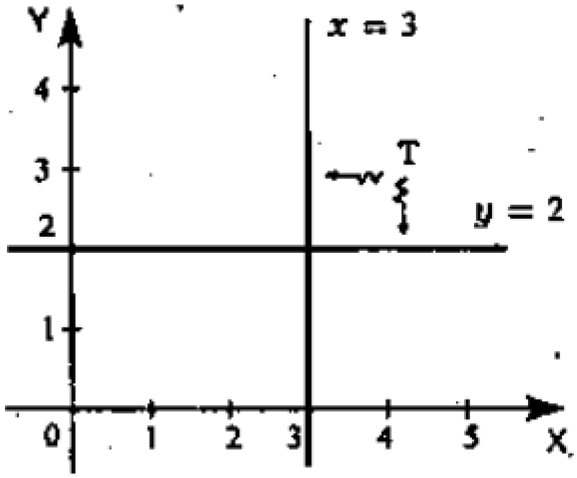
3.4 PROBLEMA .- Bosqueje la gráfica de la relación:

$$T = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ (x-3)(y-2) = 0 \}$$

SOLUCIÓN .- De la propiedad $ab = 0 \iff [\ a = 0 \ \vee \ b = 0\ ]$:

$$(x-3)(y-2) = 0 \iff [\ x - 3 = 0 \ \vee \ y - 2 = 0\ ]$$
$$\iff x = 3 \ \vee \ y = 2$$

y por tener el conectivo lógico de la **DISYUNCIÓN** $\underline{\vee}$ su gráfica consiste de (LA REUNIÓN DE) ambas rectas , es decir, de toda la cruz de la figura siguiente.



A continuación presentamos las gráficas de las siguientes relaciones (verificar) :

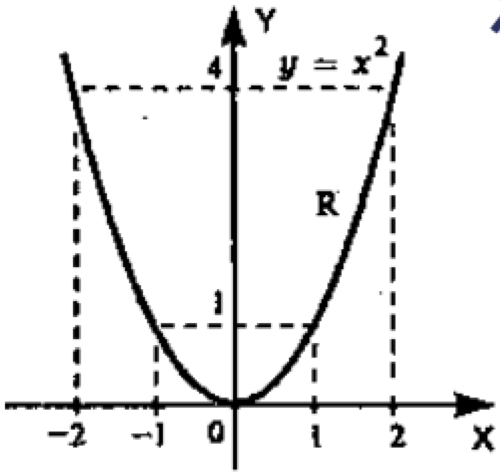
$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = x^2 \}$

$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = \sqrt{x} \}$

$T = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y = -\sqrt{x} \}$

$W = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ \cancel{x = y^2} \}$

$y = x^2$

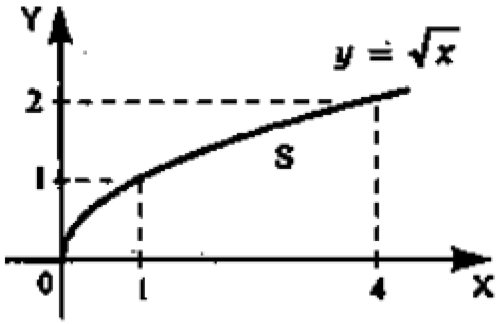


ANALÍTICAMENTE Y GRÁFICAMENTE

$$\begin{cases} y = x^2 \geq 0 \\ x \ \text{ no tiene restricciones.} \end{cases}$$

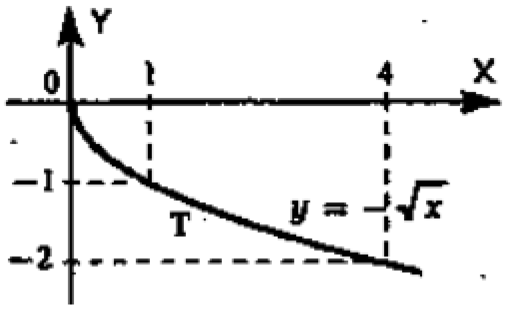
$\Rightarrow \ \mathrm{Dom}(R) = \langle -\infty, \infty \rangle = \mathbb{R}$

$\mathrm{Rang}(R) = [0, \infty \rangle$



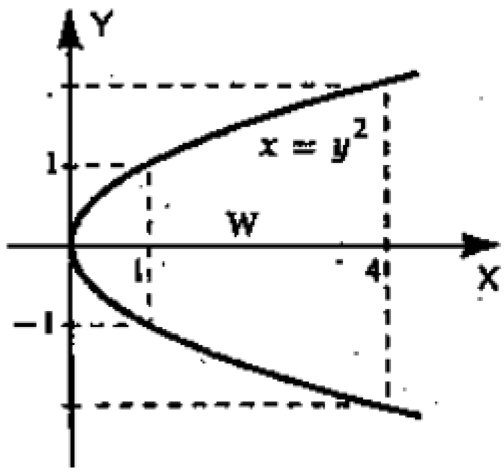
$$\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{x}\,,\ x \geq 0 \quad ó \\ y = \sqrt{x} \geq 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \text{Dom (S)} = [0, \infty\rangle$$
$$\text{Rang (S)} = [0, \infty\rangle$$



$$\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{x}\,,\ x \geq 0 \\ y = -\sqrt{x} \leq 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \text{Dom (T)} = [0, \infty\rangle$$
$$\text{Rang (T)} = \langle -\infty, 0]$$



$$\left[\begin{array}{l} x = y^2 \geq 0 \\ y \ \ \text{sin restricciones} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \text{Dom (W)} = [0, \infty\rangle$$
$$\text{Rang (W)} = \langle -\infty, \infty\rangle$$

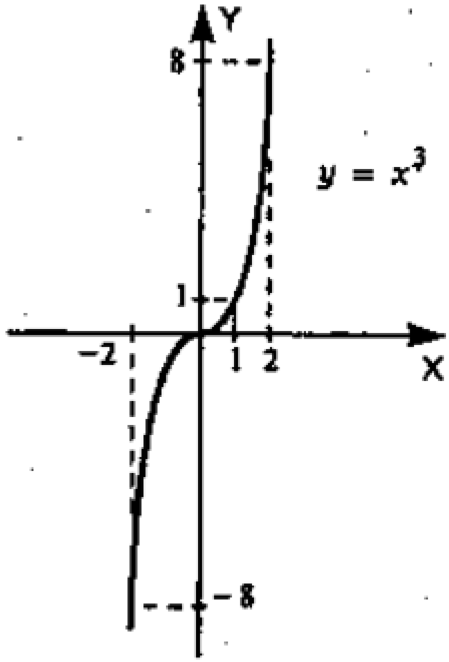
3.5 NOTA .- Como $x = y^2 \Leftrightarrow [\, y = \sqrt{x} \ \vee \ y = -\sqrt{x}\,,\ \forall\, x \geq 0\,]$, entonces la gráfica de W corresponde a la reunión de las gráficas de las relaciones S y T.

La figura adyacente corresponde a la gráfica de la relación CÚBICA:

$$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;/\; y = x^3 \}$$

$$\text{Dom}(B) = \langle -\infty, \infty \rangle$$

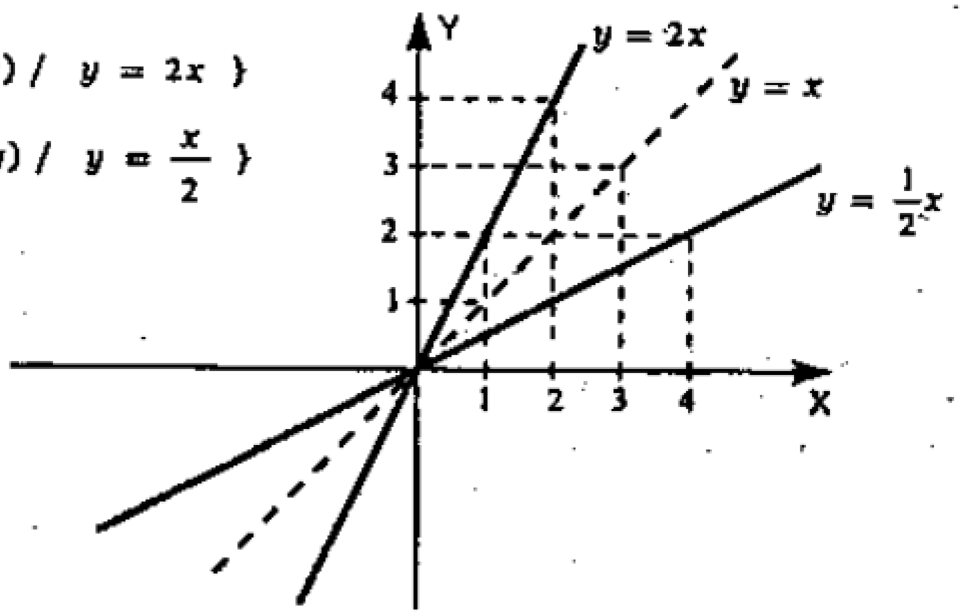
$$\text{Rang}(B) = \langle -\infty, \infty \rangle$$



Ahora bosquejaremos las gráficas de las siguientes relaciones (RECTAS):

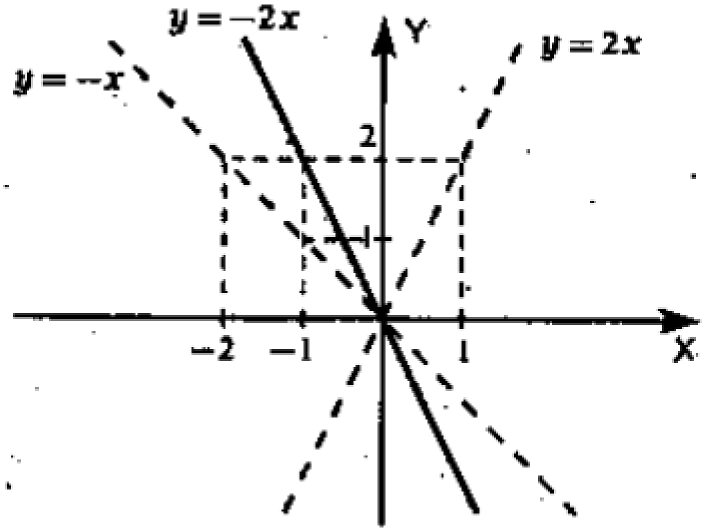
$$L_1 = \{ (x, y) \;/\; y = 2x \}$$

$$L_2 = \{ (x, y) \;/\; y = \frac{x}{2} \}$$



$L_3 = \{ (x, y) \ / \ y = -2x \}$

$L_4 = \{ (x, y) \ / \ y = -x \}$



4. GRÁFICA DE RELACIONES BINARIAS LINEALES Y CUADRÁTICAS.

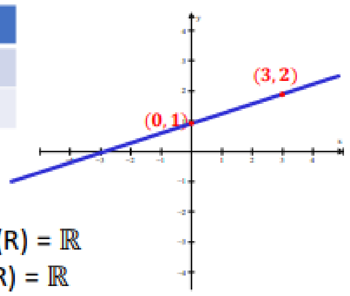
Gráfica de una relación lineal

1. Grafique:

$$R = \left\{ (x; y) \epsilon R \times R \ / \ y = \frac{1}{3}x + 1 \right\}$$

Tabulamos sólo dos puntos

x	y
0	1
3	2

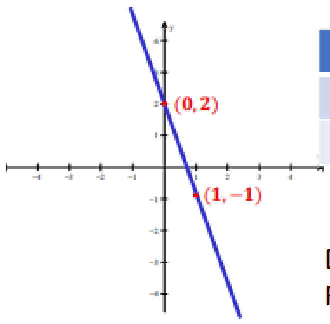


Dom(R) = $\mathbb{R}$
Ran(R) = $\mathbb{R}$

2. Grafique:

$$R = \{ (x; y) \epsilon R \times R / y = -3x + 2 \}$$

Tabulamos sólo dos puntos



x	y
0	2
1	−1

Dom(R) = $\mathbb{R}$
Ran(R) = $\mathbb{R}$

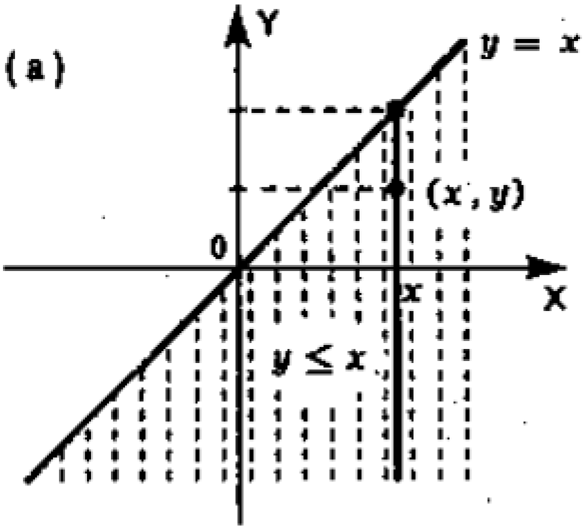
3.6 GRÁFICAS DE RELACIONES DEFINIDAS POR INECUACIONES DEL TIPO

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ y \leq x \}$$

El punto (x, y) satisface la condición $y \leq x$ (véase en el Eje Y) siempre que se encuentre en *la semirrecta vertical que comienza en la recta y baja sin límite*. [Zona sombreada de la figura (a)] .

La relación $S_0 = \{ (x, y) \ / \ y < x \}$ corresponde a la gráfica que sigue a continuación pero *con excepción de los puntos del borde* $y = x$. [Fig. (b)]

Fig. (a)



Cuando x toma todos los valores en el Eje X, la semirrecta hallada barrerá toda la zona sombreada.

Del mismo modo se puede bosquejar la gráfica de la relación T ,

$$T = \{ (x, y) / \ 2y > -x \ \} = \{ (x, y) / \ y > -\frac{1}{2}x \ \} .$$

partiendo de la gráfica del borde $y = -\frac{1}{2}x$, sin incluirlo. Fig. (c) .

Fig. (b)

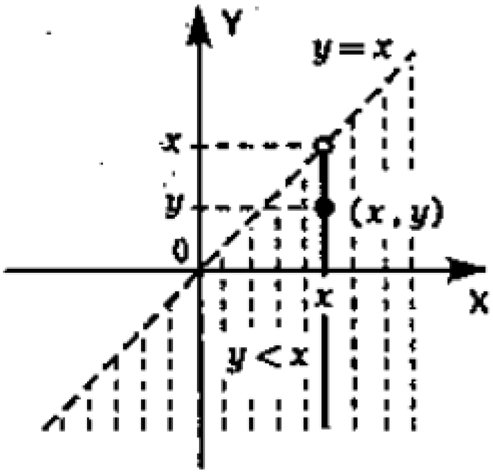
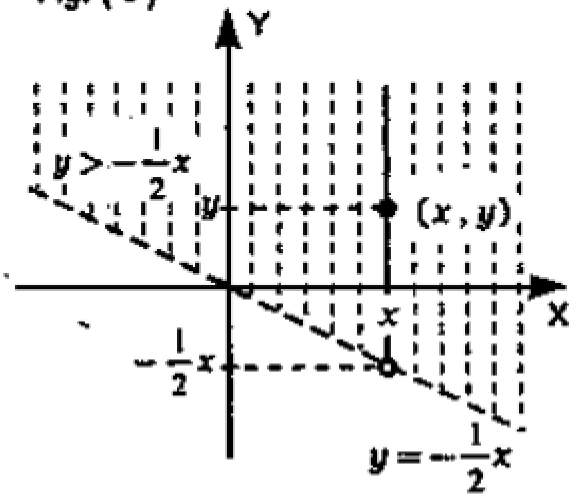


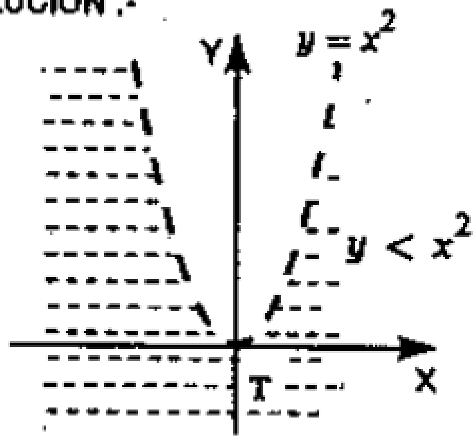
Fig. (c)

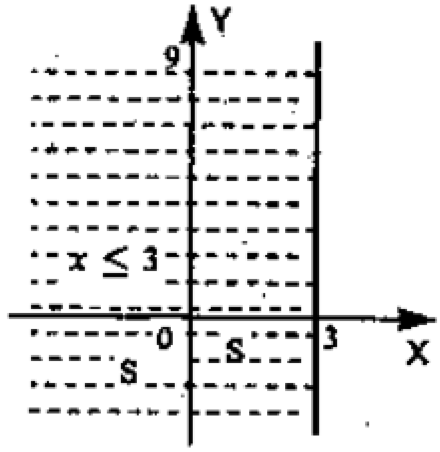


3.7 EJERCICIO .- Halle la gráfica de la intersección de las relaciones:

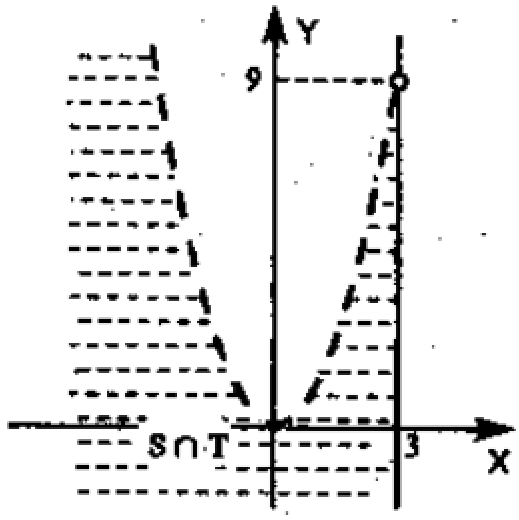
$$S = \{ (x, y) / \ x \leq 3 \}, \quad T = \{ (x, y) / \ y < x^2 \}.$$

SOLUCIÓN .-





$\Rightarrow$



3.8 RESUMEN .- Si la inecuación puede expresarse como

i) $y >$ (EXPRESIÓN en x) ,

o como ii) $y \geq$ (EXPRESIÓN en x) ,

entonces su gráfica tiene como *borde* : $y =$ (EXPRESIÓN en x) , y

(i) tiene como gráfica a *la parte superior del plano,* **SIN EL BORDE.**

(ii) tiene como gráfica a *la parte superior del plano,* **CON EL BORDE.**

En los casos : $y < \ldots$ (ó $y \leq \ldots$) la gráfica corresponde a la región debajo del borde *sin incluirlo* (o incluyéndolo si $y \leq \ldots$).

3.9 EJEMPLO .- Grafique las relaciones determinadas por las inecuaciones:

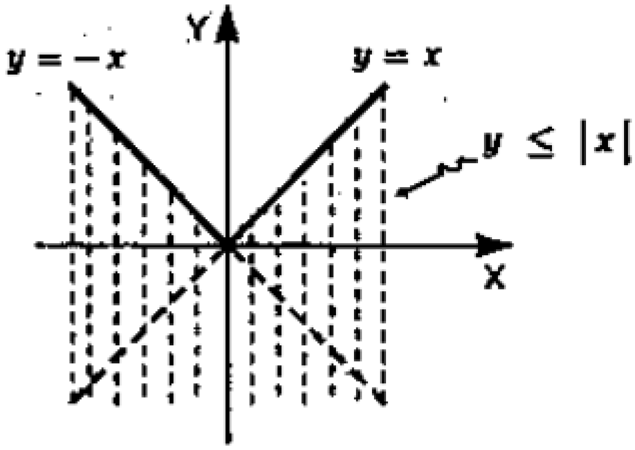
a) $y \leq |x|$, b) $y \geq |x|$.

SOLUCIÓN .-

a) $|x| \geq y \iff [\ x \geq y \quad \vee \quad x \leq -y\ ]$

$\iff [\ y \leq x \quad \vee \quad y \leq -x\ ]$,

que corresponde a la (RE)UNIÓN de las dos regiones:



b) La gráfica corresponderá al complemento de la gráfica de (a) más la frontera, pues:

$$y \geq |x| \iff |x| \leq y \iff (y \geq 0) \wedge (-y \leq x \leq y)$$

$$\iff (y \geq 0) \wedge (y \geq x) \wedge (y \geq -x)$$

(INTERSECCIÓN DE LAS TRES REGIONES)

4. RELACIONES INVERSAS

Toda RELACIÓN $\mathcal{R}$ de A en B tiene una **RELACIÓN INVERSA** de B en A, denotada por $\mathcal{R}^{-1}$, y definida por:

$$\mathcal{R}^{-1} = \{ (b, a) \,/\, (a, b) \in \mathcal{R} \} .$$

Así, los elementos de $\mathcal{R}^{-1}$ son aquellos pares ordenados obtenidos al intercambiar las componentes entre sí de cada uno de los pares ordenados de la relación directa $\mathcal{R}$.

4.1 EJEMPLO.- Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$ y la relación $\mathcal{R}$ de A en B:

$$\mathcal{R} = \{ (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5) \}$$

entonces $$\mathcal{R}^{-1} = \{ (4, 1), (5, 1), (4, 2), (5, 2) \}$$

4.2 EJEMPLO.- Dado $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y la relación en V:

$$\mathcal{R} = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \} ,$$ entonces

$$\mathcal{R}^{-1} = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \} .$$

En este caso vemos que $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.

4.3 PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS RELACIONES INVERSAS.-

Dada una relación $\mathcal{R}$ de A en B y su relación inversa $\mathcal{R}^{-1}$ de B en A :

DOMINIO de $\mathcal{R}^{-1}$ = RANGO de $\mathcal{R}$

RANGO de $\mathcal{R}^{-1}$ = DOMINIO de $\mathcal{R}$

En el primer ejemplo tenemos que

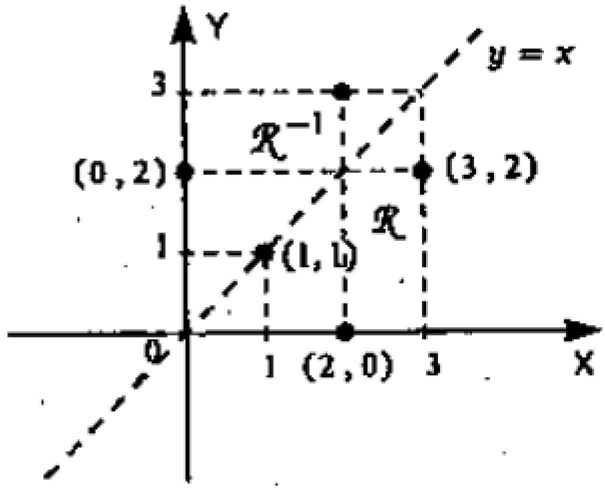
$$\text{Dom}(\mathcal{R}^{-1}) = \{4, 5\} = \text{Rang}(\mathcal{R})$$

$$\text{Rang}(\mathcal{R}^{-1}) = \{1, 2\} = \text{Dom}(\mathcal{R}) .$$

4.4 GRÁFICA DE UNA RELACIÓN INVERSA

De la definición $\mathcal{R}^{-1} = \{ (b, a) \,/\, (a, b) \in \mathcal{R} \}$, y tomando el caso $\mathcal{R} = \{ (2,0), (1,1), (3,2) \}$ entonces su inversa resulta ser

$\mathcal{R}^{-1} = \{ (0,2), (1,1), (2,3) \}$.

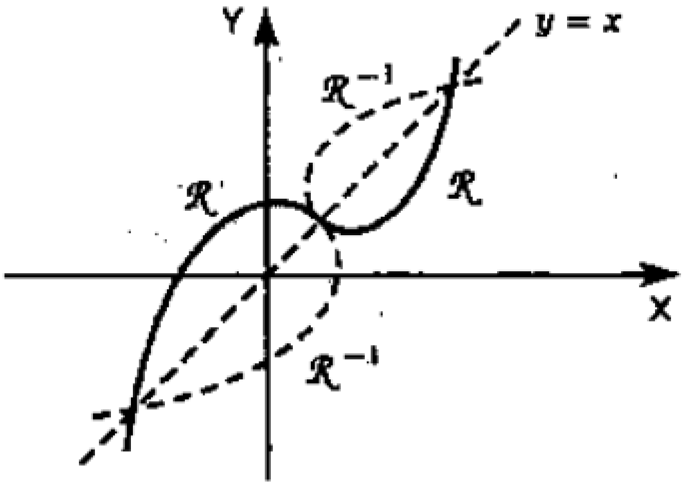


En la figura se han ubicado los puntos de $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}^{-1}$, y vemos que si se considera a la RECTA $y = x$ como un **ESPEJO DOBLE** entonces precisamente se obtiene $\mathcal{R}^{-1}$ como **LA IMAGEN DE $\mathcal{R}$ A TRAVÉS DE DICHO ESPEJO.**

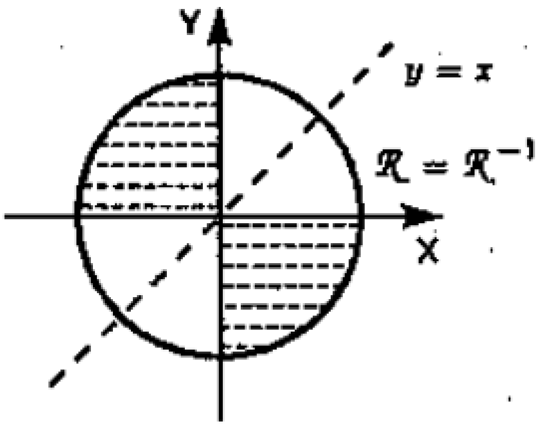
En este caso, se dice que la recta $y = x$ es una **RECTA DE SIMETRÍA,** y que:

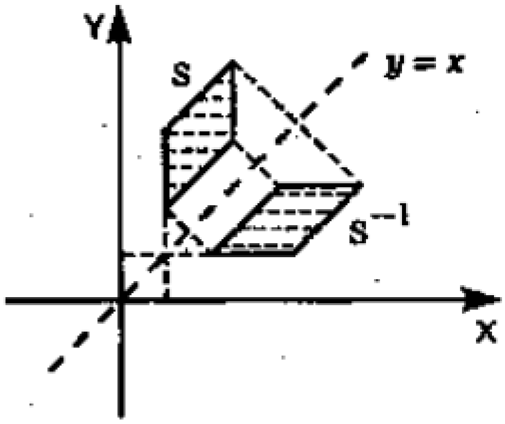
LA GRÁFICA DE LA RELACIÓN INVERSA $\mathcal{R}^{-1}$ ES SIMÉTRICA A LA GRÁFICA DE $\mathcal{R}$ CON RESPECTO A LA RECTA $y = x$.

En los diagramas siguientes, las curvas continuas corresponden a la relación directa $\mathcal{R}$, y las curvas punteadas a la relación inversa $\mathcal{R}^{-1}$.



En la figura Izquierda $\mathcal{R}$ consiste de toda la circunferencia y de toda la zona sombreada.



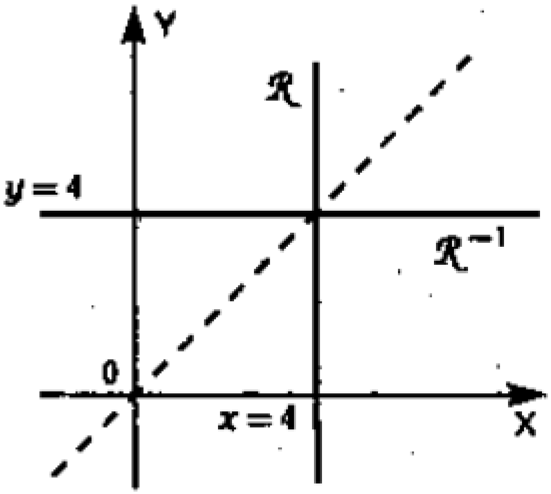


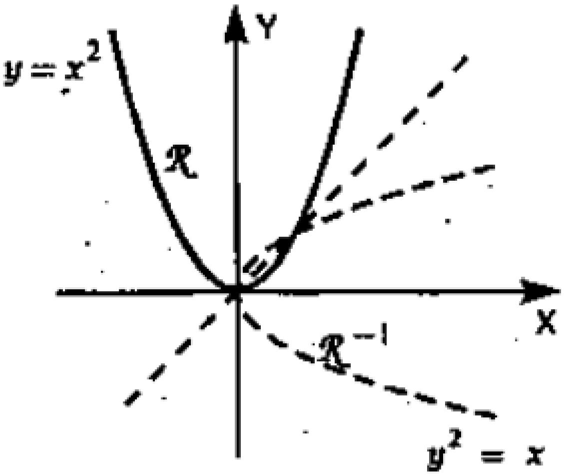
Observe que la Relación Inversa de una Recta Horizontal $y = C$ es la Recta Vertical $x = C$, y viceversa. En efecto,

$$\mathcal{R} = \{ (4, z) \ / \ z \in \mathbb{R} \} \quad \text{tiene ecuación} \quad x = 4$$

y $$\mathcal{R}^{-1} = \{ (z, 4) \ / \ z \in \mathbb{R} \} \quad \text{tiene ecuación} \quad y = 4 .$$

La Relación Inversa de la parábola $\mathcal{R}$: $y = x^2$ es la parábola $\mathcal{R}^{-1}$: $x = y^2$, la cual se obtuvo *intercambiando* x con y en la relación inicial $\mathcal{R}$.



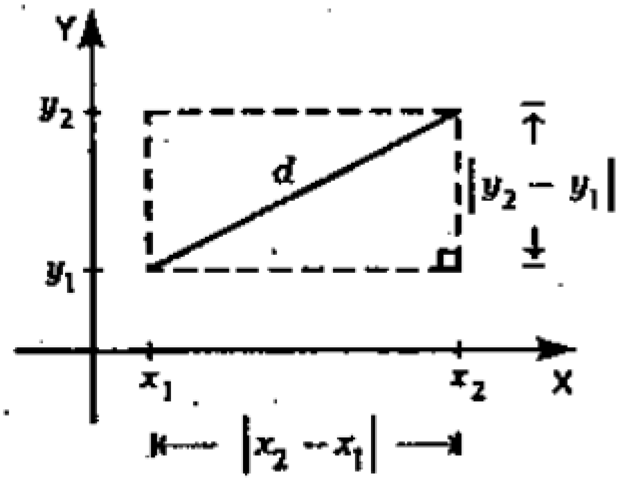


5. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

La DISTANCIA entre los puntos $P = (x_1 , y_1)$ y $Q = (x_2 , y_2)$ denotada por $d = d[P, Q]$ salisface la siguiente condición:

$$d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 .$$

$$\boxed{d[P, Q] = \\ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$



5.1 EJEMPLO .- Para los puntos:

1) $P = (3 , 4) , Q = (6 , 8)$: $d[P, Q] = \sqrt{(6 - 3)^2 + (8 - 4)^2} = \sqrt{25} = 5$

2) $P = (-1 , -4) , Q = (11 , -9)$:

$$d[P, Q] = \sqrt{[11 - (-1)]^2 + [(-9) - (-4)]^2} = \sqrt{169} = 13$$

3) $P = (-8 , -7) , Q = (0 , 8)$:

$$d[P, Q] = \sqrt{[0 - (-8)]^2 + [8 - (-7)]^2} = \sqrt{289} = 17$$

5.2 NOTA.- Siempre se cumple que $d[P, Q] = d[Q, P] \geq 0$.

5.3 PROBLEMA .- Demuestre que el triángulo de vértices

$A = (2, 3) , B = (-1, 0) , C = (-2, 4)$ es isósceles .

SOLUCIÓN.- Para que ello ocurra, dos de sus lados deben tener longitudes iguales. Podemos verificar que, en efecto:

$$d[A, B] = 3\sqrt{2} , \quad d[A, C] = \sqrt{17} , \quad d[B, C] = \sqrt{17} .$$

5.4 PROBLEMA .- Halle una ecuación para los puntos $P = (x, y)$ que equidisten de $A = (-2, 3)$ y $B = (5, 7)$.

SOLUCIÓN .-

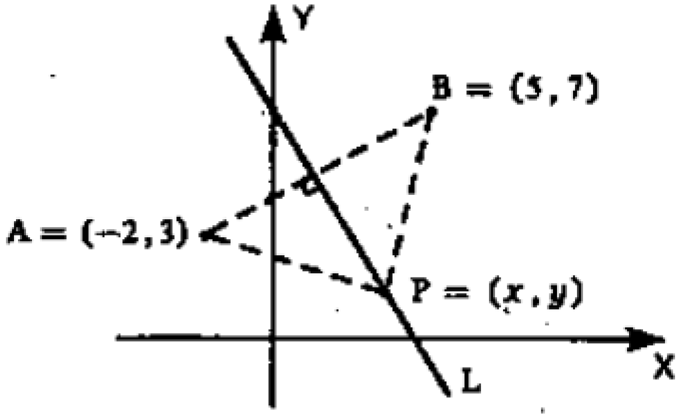
Por la condición:

$d[P, A] = d[P, B]$:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}$$

$$= \sqrt{(x-5)^2 + (y-7)^2}$$

Elevando al cuadrado y reduciendo : $14x + 8y = 61$.



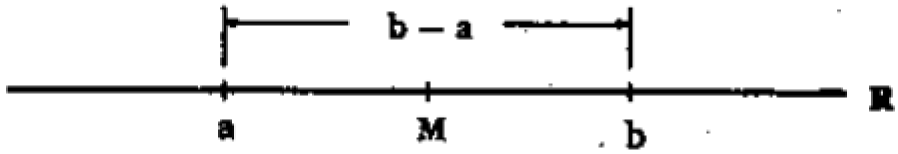
5.5 PROBLEMA .- Demuestre que los puntos $A(-3, 2)$, $B(5, -6)$ y $C(1, -2)$ son colineales [*que se encuentran en una misma recta*].

SOLUCIÓN .- Ello ocurrirá en el único caso en que, considerando las distancias entre ellos, la **SUMA** de dos de tales distancias debe coincidir con el valor de la tercera. Así, podemos verificar que esto es cierto puesto que

$$d[A, C] = 4\sqrt{2}\ ,\quad d[C, B] = 4\sqrt{2}\ ,\quad d[A, B] = 8\sqrt{2}\ .$$

5.6 FÓRMULA DEL PUNTO MEDIO

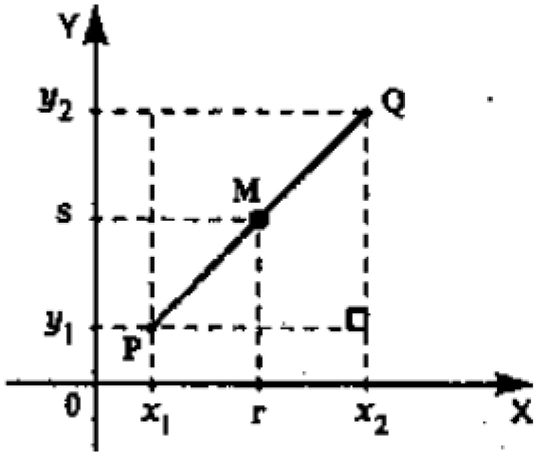
En la recta vemos que el Punto Medio M entre $\underline{a}$ y $\underline{b}$ es



$$M = a + \left(\frac{b-a}{2}\right) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{(SEMISUMA de } a \text{ y } b\text{)}$$

Usaremos este hecho en ambos Ejes X , Y , para hallar las coordenadas del punto $M = (r, s)$ que se encuentra a la mitad del segmento de recta que une a los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$:

Por el Teorema de Tales, si M es punto medio del segmento $\overline{PQ}$, entonces r es punto medio entre x_1 y x_2 , y s es punto medio entre y_1 y y_2 :



$$r = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad s = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

y se lee : LA SEMISUMA DE LAS COORDENADAS DE LOS EXTREMOS P y Q .

5.7 EJEMPLO.- El punto medio M entre $A = (3, 7)$ y $B = (9, -5)$ es

$$M = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{7+(-5)}{2}\right) = (6, 1).$$

6. LA RECTA Y SUS ECUACIONES

Si una recta es *vertical* sabemos que su ecuación es de la forma $\boxed{x = C}$, siendo C: una constante.

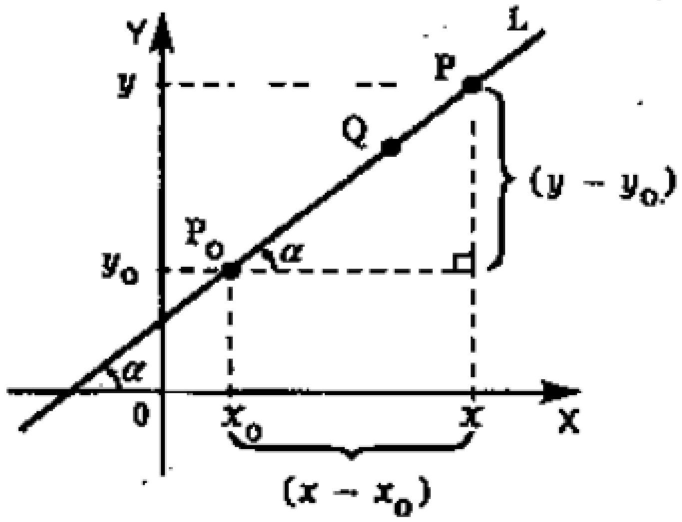
Si la recta L *no es vertical* y pasa por un punto fijo $P_0 = (x_0, y_0)$ llamado **PUNTO DE PASO** de la recta, entonces L forma un ángulo fijo $\alpha \neq 90°$ con el Eje X, medido *en sentido antihorario a partir del semieje positivo del Eje* X. Este ángulo se llama **ÁNGULO DE INCLINACIÓN** de L.

Un punto $P = (x, y) \neq P_0$ pertenecerá a la recta L si y sólo si

$$\boxed{\operatorname{Tan} \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0}}$$

Si $Q = (x_1, y_1) \in L$, entonces también se cumple que:

$$\operatorname{Tan} \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



6.1 PENDIENTE.- Se llama PENDIENTE de una recta L al valor de la tangente de su ángulo de inclinación α, y se le denota

$$\boxed{m = \operatorname{Tan} \alpha = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}} \quad , \quad \alpha \neq 90°$$

donde los puntos $(x_1, y_1) = Q$ y (x_0, y_0) *pertenecen ambos a la recta* L.

El valor de la **PENDIENTE** siempre es *constante* para cada recta, y proporciona una medida de su inclinación con respecto al Eje X. Así, la ecuación de una recta que NO ES VERTICAL L queda determinada tan sólo indicando su PENDIENTE m, y las coordenadas de cualquier PUNTO DE PASO (x_0, y_0), en la forma:

$$\boxed{L: \quad m = \frac{y - y_0}{x - x_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L: \quad y - y_0 = m(x - x_0)}$$

6.2 PROBLEMA .- Halle la ecuación de la recta L que pasa por $(1, 2)$ y tiene ángulo de inclinación de $45°$.

SOLUCIÓN.- $\alpha = 45°$. La pendiente m es : $m = \operatorname{Tan}\alpha = \operatorname{Tan} 45° = 1$, y como pasa por $(x_0 , y_0) = (1, 2)$, entonces

$$L: \quad y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 1\cdot(x - 1)$$

$\Rightarrow$ L : $y - 2 = x - 1$, es decir L : $y = x + 1$.

6.3 PROBLEMA .- Halle la ecuación de la recta L que pasa por los puntos $A = (3 , 4)$ y $B = (5 , 8)$.

SOLUCIÓN .- Como ambos puntos pertenecen a la recta L , se puede tomar cualquiera de ellos como PUNTO DE PASO $P_0 = (x_0 , y_0)$; digamos $P_0 = A = (3 ; 4)$. Ahora sólo falta hallar el valor de la pendiente m , y con las coordenadas del punto $B = (x , y) = (5 , 8)$ obtenemos

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{8 - 4}{5 - 3} = \frac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m = 2$$

Y la ecuación de L : $y - y_0 = m(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = 2(x - 3)$ ... (1)

Pero, si en lugar de $P_0 = A$ se hubiese considerado $P_0 = B = (5 , 8)$ entonces se habría obtenido $m = 2$,

$$L: \quad y - y_0 = 2(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad L: \quad y - 8 = 2(x - 5) \quad ... (2)$$

que aparentemente es diferente de (1) pero si se efectúan las reducciones necesarias se encontrará que (1) y (2) son equivalentes obteniéndose en ambos casos:

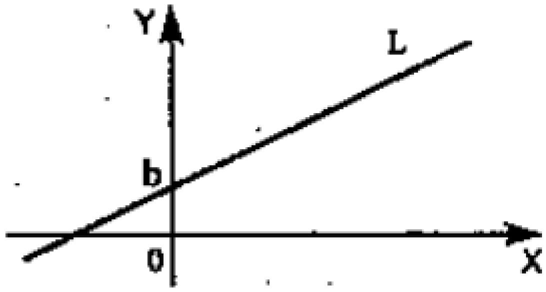
$$L: \quad y = 2x - 2$$

La ecuación para L en la forma: $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$ es denominada la **FORMA PUNTO - PENDIENTE.**

Ahora, consideremos como Punto de Paso a $(0, b)$, donde L intercepta al EJE Y, entonces

$$L: \; y - b = m(x - 0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L: \; y = mx + b}$$



Esta forma proporciona directamente la **PENDIENTE** m como el coeficiente de la variable x, mientras que el término independiente $\underline{b}$ indica el punto en el EJE Y donde la recta L lo corta y $\underline{b}$ obviamente puede ser: > 0, $= 0$ ó < 0.

Así, por ejemplo, la ecuación $y = 3x - 1$ corresponde a la recta con ***pendiente*** $m = 3$, y ***punto de paso*** $(0, b) = (0, -1)$.

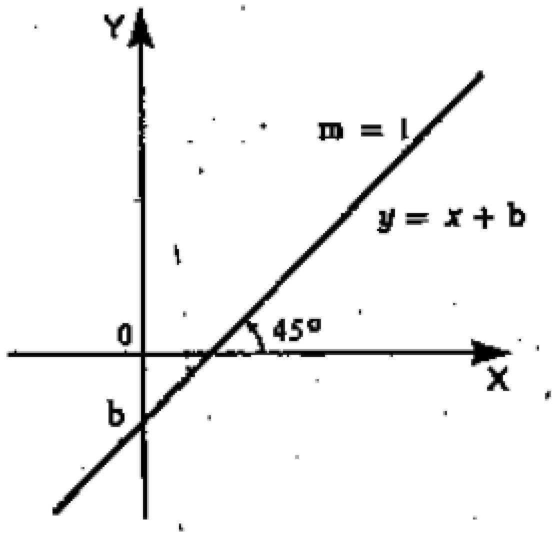
Si la recta L tiene su *ángulo de inclinación* α, tal que:

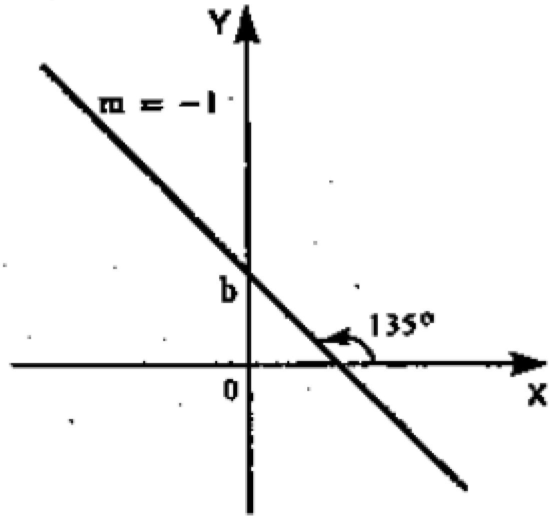
1) $0 < \alpha < 90°$: $m = \text{Tan}\,\alpha > 0$ ... PENDIENTE POSITIVA.
2) $\alpha = 0$: $m = \text{Tan}\,0 = 0$ ... Recta HORIZONTAL.
3) $90° < \alpha < 180°$: $m = \text{Tan}\,\alpha < 0$ ... PENDIENTE NEGATIVA.

Cualquier otro ángulo se reduce a los tres casos dados para efectos del cálculo de la **PENDIENTE** $m = \text{Tan}\,\alpha$.

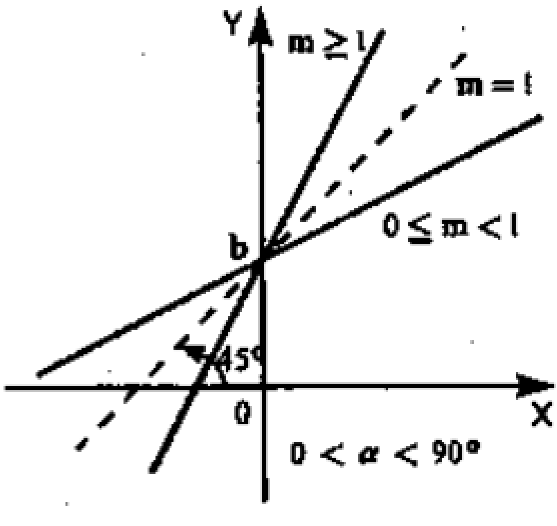
6.4 NOTA .- $m = 1 \Leftrightarrow \text{Tan}\,\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 45°$

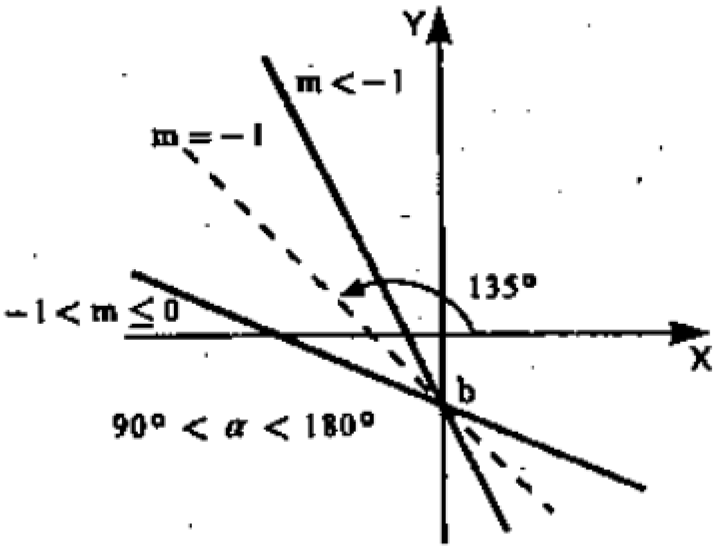
$m = -1 \Leftrightarrow \text{Tan}\,\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = 135°$





Y si $0 < \alpha < 90°$, la pendiente m aumenta de valor conforme el angulo α va creciendo. En general se tiene el siguiente esquema gráfico:

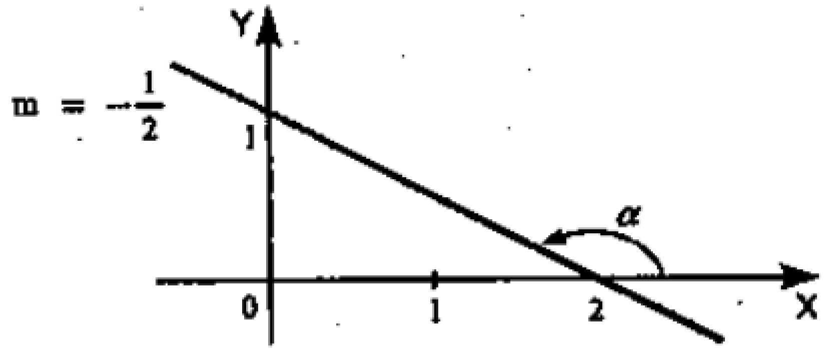




6.5 PROBLEMA .- Dada la ecuación de la recta $L: \ 2x + 4y = 4$, halle su ***pendiente***, un ***punto de paso***, y bosqueje su gráfica.

SOLUCIÓN .- Para hallar algún punto de paso basta dar un valor real cualquiera a la variable x, y despejar el correspondiente valor de y , o viceversa. Así, para $y = 0$ se tiene $x = 2$, luego $P_0 = (2, 0)$ resulta ser un punto de paso (pero NO ES EL ÚNICO) . Despejando y : $\quad y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \quad \Rightarrow \quad m = -\dfrac{1}{2}$.

Note que la recta también pasa por el punto $(0, b) = (0, 1)$



6.6 **TEOREMA .-** *Si* a *y* b *no son ambos ceros a la vez , entonces la ecuación :* $\quad ax + by + c = 0 \quad$ *siempre representa a* ***una recta en el plano*** **XY** .

PRUEBA .- i) Si $a = 0$, $b \neq 0$: $\quad y = -c/b$, (L HORIZONTAL)

ii) Si $a \neq 0$, $b = 0$: $\quad x = -c/a$, (L VERTICAL)

iii) Si $a \neq 0$, $b \neq 0$: $\quad y = (-\dfrac{a}{b})x + (-\dfrac{c}{b})$ que es una

recta con *pendiente* $m = -a/b$, y pasa por $(0, -c/b)$.

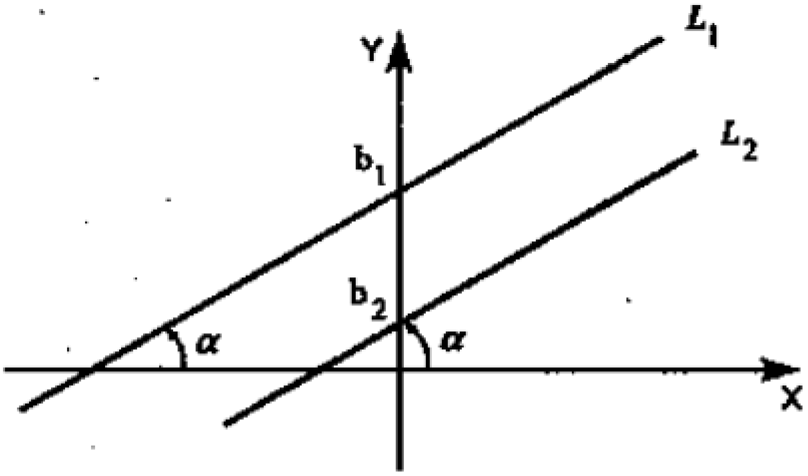
7. RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Dos rectas L_1 y L_2 son **PARALELAS** ($L_1 // L_2$) si tienen el mismo ángulo de inclinación:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha .$$

En el caso de rectas que ***no son verticales***, esto equivale a que sus pendientes sean iguales:

$$m_1 = m_2 = m = \operatorname{Tan} \alpha .$$



Si ninguna de las dos rectas L_1 y L_2 es vertical, entonces ellas serán **PERPENDICULARES** si y sólo si $\alpha_2 - \alpha_1 = 90°$,

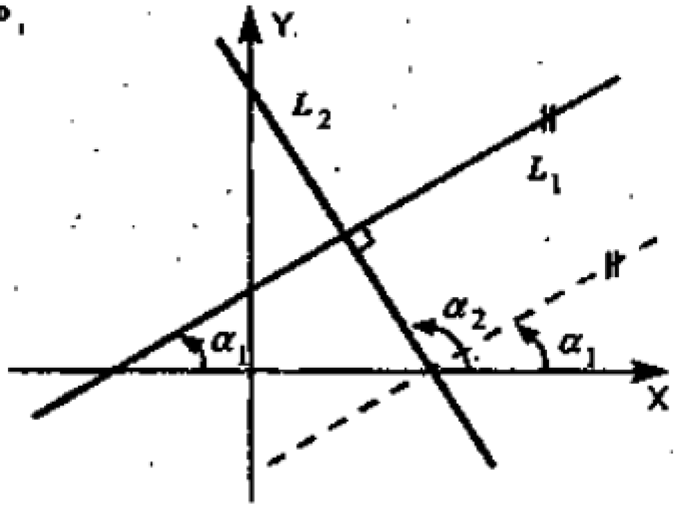
$$\alpha_2 = 90° - (-\alpha_1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Tan} \alpha_2 &= \operatorname{Cot}(-\alpha_1) \\ &= -\operatorname{Cot}(\alpha_1) \\ &= -1/\operatorname{Tan}(\alpha_1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{Tan} \alpha_1)(\operatorname{Tan} \alpha_2) = -1$$

$$\Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

[**PRODUCTO DE PENDIENTES = − 1**]



Función	Abreviatura	Equivalencias en radianes
Seno	sen	$sen\ \theta = \dfrac{1}{\csc\theta} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{cos\ \theta}{\cot\theta}$
Coseno	cos	$cos\ \theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{sen\ \theta}{\tan\theta}$
Tangente	tan	$tan\ \theta = \dfrac{1}{\cot\theta} = \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{sen\ \theta}{\cos\theta}$
Cotangente	cot	$cot\ \theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{cos\ \theta}{\operatorname{sen}\theta}$
Secante	sec	$sec\ \theta = \dfrac{1}{\cos\theta} = \csc\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
Cosecante	csc	$csc\ \theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{cot\ \theta}{\cos\theta}$

7.1 **TEOREMA .-** *Sean L_1 y L_2 dos rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente, entonces*

take note!

i) $L_1 // L_2$ son **PARALELAS** $\Leftrightarrow$ $\boxed{m_1 = m_2}$.

ii) $L_1 \perp L_2$ son **PERPENDICULARES** $\Leftrightarrow$ $\boxed{m_1 \cdot m_2 = -1}$.

7.2 **EJEMPLOS .-** Las rectas $L_1: \; 2x + y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = -2$

$L_2: \; 2y = -5 - 4x \quad \Rightarrow \quad m_2 = -2$

son **PARALELAS**, pues sus pendientes son iguales.

Las rectas $L_1: \quad ax + by + c = 0 \quad , \quad a \neq 0 \; , \; b \neq 0$

$L_2: \; -bx + ay + d = 0$

son **PERPENDICULARES**, pues $m_1 = -a/b$ y $m_2 = b/a$

$$\Rightarrow \; m_1 \cdot m_2 = \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{a}\right) = -1 .$$

Las rectas $L_1: \; 3x - 2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_1 = 3/2$

$L_2: \; 4x + 6y - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad m_2 = -4/6 = -2/3$

también son ***perpendiculares***: $m_1 \cdot m_2 = \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) = -1$

7.3 **PROBLEMA .-** Halle el valor de k para que la rectas dadas sean paralelas

$$L_1: \; kx + (k-1)y + 18 = 0 , \quad L_2: \; 4x + 3y + 7 = 0 .$$

SOLUCIÓN .- $m_1 = \dfrac{-k}{k-1}$, $m_2 = -\dfrac{4}{3}$, y como las rectas deben ser paralelas entonces $m_1 = m_2$. De esta ecuación despejamos $k = 4$.

7.4 PROBLEMA .- ¿Son las rectas $L_1: \ -2x + y = -2$, $L_2: \ x + y = 7$ perpendiculares? . Halle su punto de intersección Q .

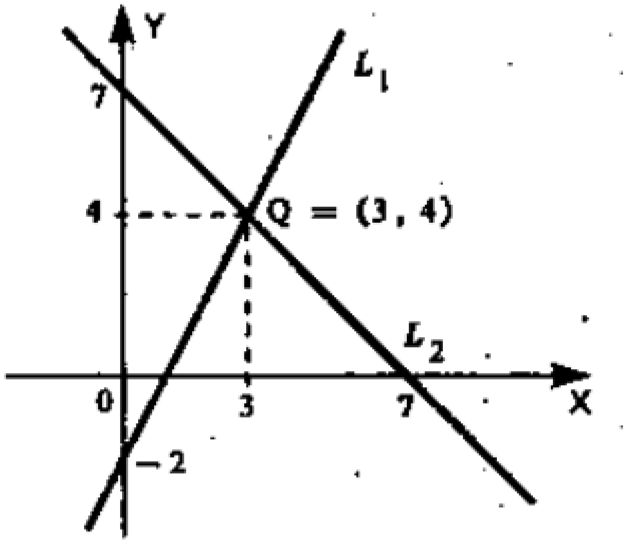
SOLUCIÓN . $m_1 = 2$, $m_2 = -1 \ \Rightarrow \ m_1 \cdot m_2 \neq -1$. Luego, las dos rectas NI SON perpendiculares NI SON paralelas.

El punto $Q = (x , y)$ buscado, al estar en ambas rectas, deben satisfacer las dos ecuaciones simultáneamente, lo que indica que se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} -2x + y = -2 \\ \quad x + y = 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad x = 3 \ , \quad y = 4$

$\Rightarrow \quad Q = (3 , 4)$.



7.5 NOTA .- Cuando dos ecuaciones (simultáneas) de dos rectas no tienen ninguna solución, es porque ambas rectas *son paralelas y están separadas entre sí.*

4. GRÁFICA DE RELACIONES BINARIAS LINEALES Y CUADRÁTICAS.

4.2. Relación cuadrática

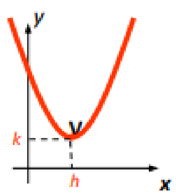
Una relación cuadrática está definida por:

$$\boxed{R = \{ (x\,;y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,/\, y = ax^2 + bx + c \} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0}$$

La representación gráfica de una relación cuadrática es una parábola.

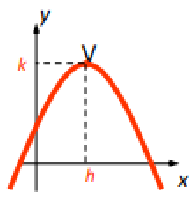
Vértice $V(h;k)$, donde $h = -\frac{b}{2a}$, $k = ah^2 + bh + c$

CASO I: $a > 0$



$\mathrm{Dom}(R) = \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathrm{Ran}(R) = [k , +\infty\rangle$

CASO II: $a < 0$



$\mathrm{Dom}(R) = \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathrm{Ran}(R) = \langle -\infty , k]$

Gráfica de una relación cuadrática

1. Grafique:

$R = \{(x; y)\epsilon R \times R / y = x^2 + 2x + 1\}$

- $a = 1,\ b = 2,\ c = 1$
- $a > 0$: la parábola se abre hacia arriba
- El vértice: $V(h; k)$

✓ $h = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1$

✓ $k = (-1)^2 + 2(-1) + 1 = 0$

$V(-1, 0)$

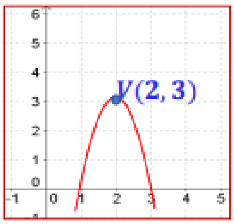
2. Grafique:

$R = \{(x; y)\epsilon R \times R / y = -3x^2 + 12x - 9\}$

- $a = -3,\ b = 12,\ c = -9$
- $a < 0$: la parábola se abre hacia abajo
- El vértice: $V(h, k)$

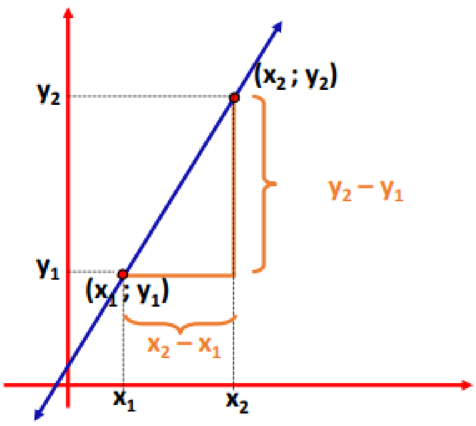
✓ $h = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-3)} = 2$

✓ $k = -3(2)^2 + 12(2) - 9 = 3$



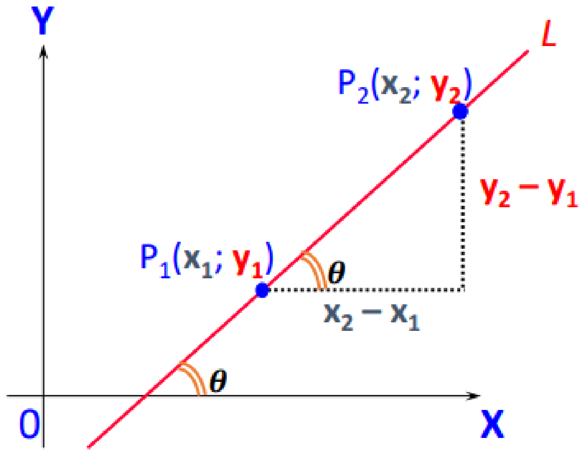
5. LA RECTA

La recta es el lugar geométrico de los puntos del plano, tal que si se toman dos puntos cualesquiera de ellos, la razón entre la diferencia de sus ordenadas y la diferencia de las abscisas es constante. Es decir :



$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = constante$$

La pendiente **m** de una recta no vertical L que pasa por los puntos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ es:



Luego, la pendiente **m** se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

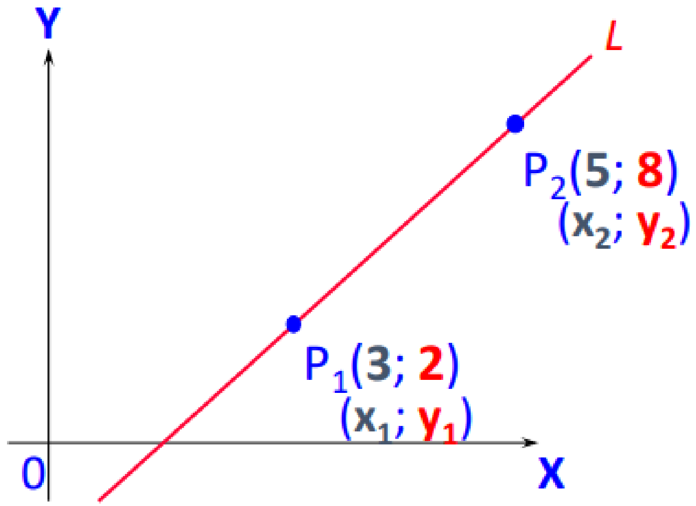
También se entiende que, la pendiente ***m*** de una recta es la tangente del ángulo de inclinación, es decir:

$$\boxed{m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Ejemplo 1

Calcula la pendiente de la recta **L** que pasa por los puntos $\mathbf{P_1(3; 2)}$ y $\mathbf{P_2(5; 8)}$.

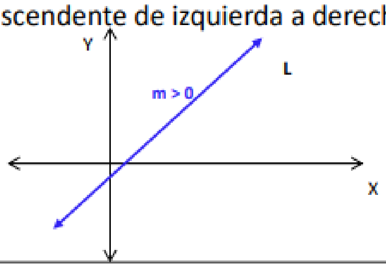
Solución:



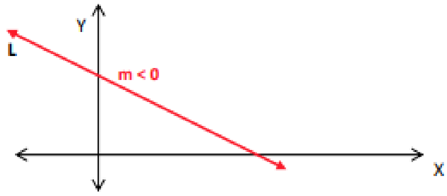
Entonces, la pendiente es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{5-3} = 3$$

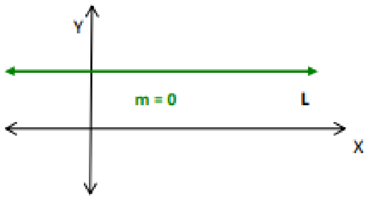
PENDIENTE POSITIVA
(recta ascendente de izquierda a derecha)



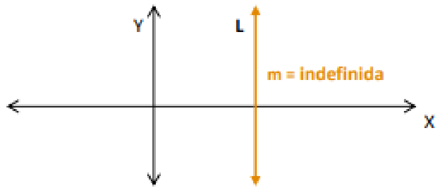
PENDIENTE NEGATIVA
(recta descendente de izquierda a derecha)



PENDIENTE NULA
(recta horizontal)



PENDIENTE INDEFINIDA
(recta vertical)



. FORMAS DE ECUACIÓN DE LA RECTA

ECUACIÓN PUNTO PENDIENTE:

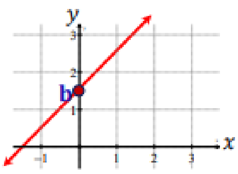
La recta que pasa por el punto $(x_1;y_1)$ con pendiente ***m*** tiene por ecuación:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

ECUACIÓN PENDIENTE ORDENADA EN EL ORIGEN:

La recta cuya pendiente es ***m*** y cuya ordenada en el origen es ***b***, tiene por ecuación:

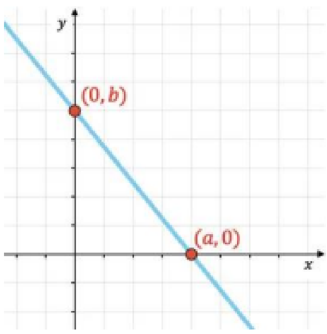
$$y = mx + b$$



ECUACIÓN SIMÉTRICA:

La recta cuyas intersecciones con los ejes X e Y son los puntos **(a;0)** y **(0;b)** respectivamente , tiene por ecuación:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



ECUACIÓN GENERAL:

Es una ecuación de primer grado con dos variables *x* e *y*, cuya forma es:

$$Ax + By + C = 0$$

En donde *A*, *B*, *C* son constantes y *A* y *B* no son ceros a la vez.

Observación:

La pendiente se puede calcular a partir de la ecuación general de la recta

$$m = -\frac{A}{B}$$

Ejemplo 2

Determina la **ecuación pendiente ordenada en el origen** y la **ecuación general** de la recta que pasa por $(4; -1)$ con pendiente -2 .

Solución:

$(x_1; y_1) = (4; -1)$

$m = -2$

Podemos utilizar:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-1) = -2[x - (4)]$$

$$y + 1 = -2x + 8$$

Luego, le damos la forma de la ecuación solicitada.

Ecuación pendiente ordenada en el origen

$y = -2x + 7$

Ecuación general

$2x + y - 7 = 0$

Ejemplo 3

Determina la **ecuación pendiente ordenada en el origen** y la **ecuación general** de la recta con pendiente 3 ; y que interseca al eje y en $(0; 4)$.

Solución:

$m = 3$

$b = 4$

Podemos utilizar:

$$y = mx + b$$

$y = 3x + 4$ ➡ $3x - y + 4 = 0$

Ecuación pendiente ordenada en el origen | **Ecuación general**

Ejemplo 4

Determina la **ecuación pendiente ordenada en el origen** y la **ecuación general** de la recta que pasa por $(5; 2)$ y $(-3; 1)$.

Solución:

$(x_1; y_1) = (5; 2) \qquad (x_2; y_2) = (-3; 1)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (2)}{-3 - (5)} = \frac{-1}{-8} = \frac{1}{8}$$

Podemos utilizar:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (2) = \frac{1}{8}[x - (5)]$$
$$8y - 16 = x - 5$$
$$8y = x + 11$$

Ecuación pendiente ordenada en el origen

$$y = \frac{x}{8} + \frac{11}{8}$$

Ecuación general

$$x - 8y + 11 = 0$$

Ejemplo 5

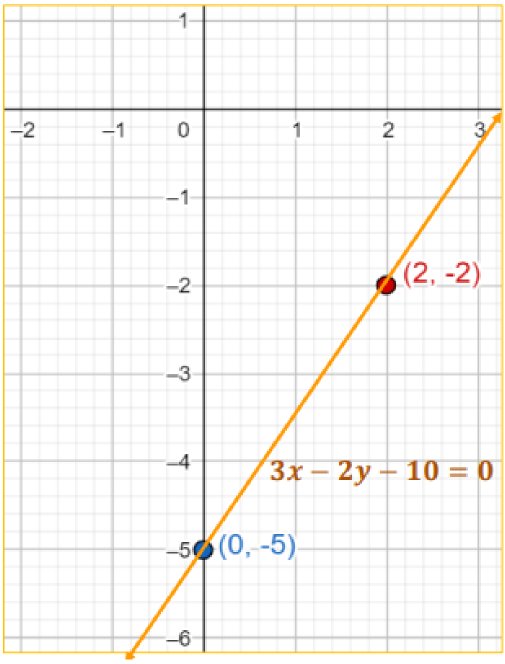
Grafica la recta definida por $3x - 2y - 10 = 0$

Solución:

Para graficar, es suficiente dar dos valores arbitrarios a x y calcular los respectivos valores de y.

$$3x - 2y - 10 = 0$$
$$3x - 10 = 2y$$
$$\frac{3x}{2} - 5 = y$$

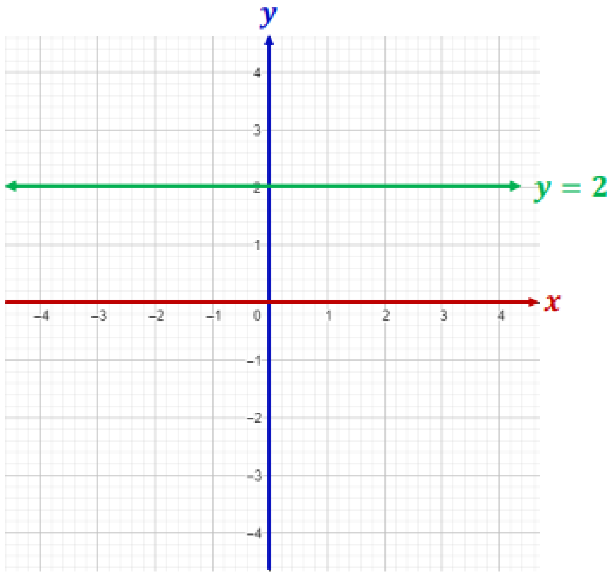
x	$y = \frac{3x}{2} - 5$	$(x; y)$
0	$y = \frac{3(0)}{2} - 5 = -5$	$(0; -5)$
2	$y = \frac{3(2)}{2} - 5 = -2$	$(2; -2)$



Rectas horizontales

Las rectas horizontales son **rectas paralelas al eje x** (eje de las abscisas).
Su ecuación, tiene la forma: $\boldsymbol{y = b}$

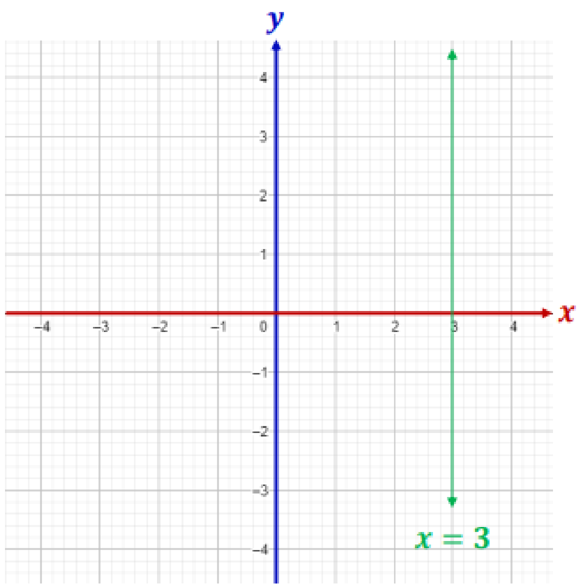
Por ejemplo, la recta que tiene por ecuación $y = 2$ se grafica de la siguiente forma:



Rectas verticales

Las rectas verticales son **rectas paralelas al eje y** (eje de las ordenadas).
Su ecuación, tiene la forma: $\boldsymbol{x = a}$

Por ejemplo, la recta que tiene por ecuación $x = 3$ se grafica de la siguiente forma:

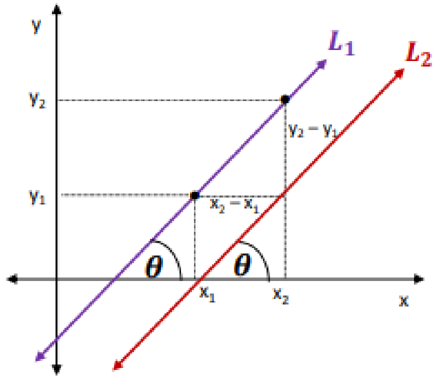


Rectas paralelas

Dos rectas (no verticales) **son paralelas** si y solo si sus **pendientes son iguales.**

Es decir, dadas las rectas L_1 y L_2 cuyas pendientes son m_1 y m_2 respectivamente :

$m_1 = m_2 \leftrightarrow L_1 // L_2$



Cálculo 1

¿Qué es el cálculo?

El cálculo es la matemática de los cambios (velocidades y aceleraciones). También son objeto de cálculo rectas tangentes, pendientes, áreas, volúmenes, longitudes de arco, centroides, curvaturas y una gran variedad de conceptos que han permitido a científicos, ingenieros y economistas elaborar modelos para situaciones de la vida real.

Aunque las matemáticas del precálculo también tratan con velocidades, aceleracio- nes, rectas tangentes, pendientes y demás, existe una diferencia fundamental entre ellas y el cálculo. Mientras que las primeras son más estáticas, el cálculo es más dinámico.

Las matemáticas del precálculo permiten analizar un objeto que se mueve con ve- locidad constante. Sin embargo, para analizar la velocidad de un objeto sometido a aceleración es necesario recurrir al cálculo.

Las matemáticas del precálculo permiten analizar la pendiente de una recta, pero para analizar la pendiente de una curva es necesario el cálculo

Las matemáticas del precálculo permiten analizar la curvatura constante de un círculo, pero para analizar la curvatura variable de una curva general es necesario el cálculo.

Las matemáticas del precálculo permiten analizar el área de un rectángulo, pero para analizar el área bajo una curva general es necesario el cálculo.

De tal modo, una ma- nera de responder a la pregunta “¿qué es el cálculo?”, consiste en decir que el cálculo es una “máquina de límites” que funciona en tres etapas. La primera la constituyen las matemáticas del precálculo, con conceptos como la pendiente de una recta o el área de un rectángulo. La segunda es el proceso de límite, y la tercera es la nueva formulación propia del cálculo en términos de derivadas e integrales.