Università degli Studi di Messina

Dipartimento di Scienze matematiche e informatiche,
scienze fisiche e scienze della terra

Corso di Laurea Triennale in Informatica

Prova individuale di

Calcolo Numerico 1

Anno Accademico
2020/2021

GIOVANNI DOMENICO TRIPODI

469016

1. TRACCIA

Data il vettore c, le cui componenti sono i numeri interi da 3 a 11, costruire la matrice di Vandermonde. Studiare il condizionamento di tale matrice. Valutare la norma dell’errore della differenza tra A A-1 e la matrice identica I. Commentare i risultati.

2. SVOLGIMENTO

• Definiamo il vettore **c**, le cui componenti sono i numeri interi da 3 a 11.

```
c = [3: 11]
```

Output:

```
c = 3   4   5   6   7   8   9   10   11
```

• Costruiamo la matrice di Vandermonde, utilizzando la funzione ‘*fliplr*’ per rappresentare al meglio la matrice, in quanto, mediante l’utilizzo di questa funzione riusciamo ad ottenere la classica struttura della matrice di Vandermonde.

```
matrix = fliplr(vander(c))
```

Output:

1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
1	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
1	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
1	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721
1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000
1	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881

• Calcoliamo la matrice di identità, moltiplicando la matrice per la sua inversa. Utilizziamo l’operatore ‘/’ perché permette sia un migliore tempo di esecuzione dell’operazione e sia una maggiore accuratezza numerica, a differenza dell’operatore ‘ * ‘.

```
matrixId = matrix/inv(matrix)
```

Output:

```
matrixId =

   1.0e+16 *

    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0002
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0001    0.0016
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0001    0.0008    0.0092
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0003    0.0036    0.0390
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0001    0.0011    0.0121    0.1323
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0003    0.0032    0.0349    0.3818
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0001    0.0007    0.0081    0.0889    0.9730
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0002    0.0017    0.0188    0.2054    2.2481
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0003    0.0037    0.0400    0.4381    4.7977
```

- Consideriamo la seguente matrice di identità.

```
Id = eye(9)
```

Output:

```
Id =

     1     0     0     0     0     0     0     0     0
     0     1     0     0     0     0     0     0     0
     0     0     1     0     0     0     0     0     0
     0     0     0     1     0     0     0     0     0
     0     0     0     0     1     0     0     0     0
     0     0     0     0     0     1     0     0     0
     0     0     0     0     0     0     1     0     0
     0     0     0     0     0     0     0     1     0
     0     0     0     0     0     0     0     0     1
```

• Determiniamo il numero di condizionamento della matrice di Vandermonde, utilizzando il comando *‘ cond ‘*. Esso restituisce il numero di condizionamento in *norma 2*.

```
matrixCond = cond(matrix)
```

Output:

```
matrixCond =

   3.7976e+12
```

• Se volessimo calcolare il numero di condizionamento in *norma 1*, possiamo alternativamente utilizzare il comando *‘ rcond ’.*

```
matrixrCond = rcond(matrix)
```

Output:

```
matrixrCond =

   1.5106e-13
```

• Calcoliamo il numero di condizionamento in *norma 2* della matrice identità

```
matrixIdCond = cond(matrixId)
```

• Allo stesso modo, calcoliamo il numero di condizionamento in *norma 1* della matrice di Identità utilizzando il comando ‘*rcond*’.

```
matrixIdrCond = rcond(matrixId)
```

•Definiamo a questo punto l'errore espresso come la norma della differenza tra la matrice di identità della nostra matrice di Vandermonde e la matrice di identità.

```
error = norm(matrixId - Id)
```

```
Output:     error =

              5.4249e+16
```

3. ANALISI DEI RISULTATI

1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
1	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
1	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
1	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721
1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000
1	11	121	1331	14641	161051	1771561	19487171	214358881

Il problema presentato ci chiede di studiare il condizionamento, ovvero, dobbiamo andare ad analizzare il problema e valutare il comportamento sulle variazioni dei dati in input. Se a variare dei dati in input, il risultato rimane invariato possiamo definire il problema come ben condizionato e perciò non sensibile a perturbazioni dei dati in input.
Al contrario, se a piccole variazioni dei dati in input, corrisponde una variazione evidente dell'output allora il problema sarà mal condizionato.
E' possibile determinare il condizionamento di un problema mediante il numero di condizionamento. Se il numero di condizionamento assume valori piccoli, il problema è ben condizionato, altrimenti il problema sarà malcondizionato.
Il numero di condizionamento, per definizione è dato dalla norma della matrice per la norma della sua inversa.
Il numero di condizionamento della matrice di Vandermonde, che abbiamo ottenuto tramite la funzione *cond* in (norma 2) sarà:

```
matrixCond = 3.7976e+12
```

Il numero di condizionamento ottenuto tramite la funzione *rcond* in (norma 1) sarà:

```
matrixrCond = 1.5106e-13
```

Dunque possiamo affermare che la matrice di Vandermonde, avendo come vettore iniziale il vettore c, sia **fortemente malcondizionata** poiché il valore del numero di condizionamento in norma 2 è di molto superiore ad 1. Inoltre, il valore del numero di condizionamento in norma 1 è estremamente vicino al valore dello 0, per essere ben condizionata il valore deve essere il più possibile vicino ad 1.

Per avere una prova tangibile del malcondizionamento, andiamo a definire la matrice di identità della nostra matrice di Vandermonde.
Essendo una matrice quadrata, essa è invertibile, perciò esisterà una inversa che sarà dello stesso ordine della matrice iniziale.
La matrice di identità della nostra matrice di Vandermonde è la seguente e sarà calcolata effettuando il prodotto della matrice per la sua inversa:

```
matrixId =

   1.0e+16 *

    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0002
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0001    0.0016
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0001    0.0008    0.0092
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0003    0.0036    0.0390
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0001    0.0011    0.0121    0.1323
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0003    0.0032    0.0349    0.3818
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0001    0.0007    0.0081    0.0889    0.9730
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0002    0.0017    0.0188    0.2054    2.2481
    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000    0.0003    0.0037    0.0400    0.4381    4.7977
```

Una matrice di identità, per definizione ha solo gli elementi uguali ad 1 nella diagonale mentre il resto degli elementi è zero.
Guardando questa matrice di identità, notiamo che non abbiamo una struttura del genere, in quanto non abbiamo elementi uguali ad 1 nella diagonale e nulli altrove.
Calcolando il condizionamento di questa matrice di identità, notiamo che essa è **fortemente malcondizionata**:

```
matrixIdCond = 4.7934e+21 (norma 2)

matrixIdrCond = 5.4978e-24 (norma 1)
```

Poiché il risultato di matrixIdCond in norma 2 è di gran lunga superiore ad 1, e il risultato di matrixIdrCond è lontano dallo 0, alla luce di ciò possiamo dire che la matrice identità ricavata da Vandermonde è **fortemente malcondizionata**.

A questo punto, andiamo a definire l'errore assoluto effettuando la norma della differenza tra la matrice di identità ricavata dalla matrice di Vandermonde, e la matrice di identità:

```
error = 5.4249e+16
```

Perciò possiamo ritienere che l'errore che commettiamo quando calcoliamo una soluzione utilizzando la matrice di Vandermonde è alto rispetto alla matrice di identità.

4. SORGENTE MATLAB

```
%Definiamo il vettore c, le cui componenti sono numeri interi da 3 a 11%
c = [3: 11];
%Costruiamo la matrice di Vandermonde, utilizzando fliplr per rappresentare
%al meglio la matrice, in quanto, utilizzando fliplr abbiamo la struttura
%classica della matrice di Vandermonde dove abbiamo elementi nella prima
    %colonna tutti uguali a 1.
    matrix = fliplr(vander(c));
    %Calcoliamo la matrice di identità, moltiplicando la matrice per la sua
    %inversa. Utilizziamo l'operatore ' / ' perché permette sia un migliore tempo di
    %esecuzione dell'operazione e sia una maggiore accuratezza numerica, a
    %differenza dell'operatore ' * '
    matrixId= matrix/inv(matrix);
    %Matrice di identità con 1 sulla diagonale principale e 0 altrove
    Id = eye(9);
    %Calcoliamo il numero di condizionamento della matrice, utilizzando il
    %comando 'cond'. Esso restituisce il numero di condizionamento in norma 2.
    matrixCond = cond(matrix);
    %Per calcolare il numero di condizionamento in norma 1, possiamo
    %alternativamente utilizzare il comando 'rcond'.
    matrixrCond = rcond(matrix);
    %Calcoliamo il numero di condizionamento in norma 2 della matrice identità
    matrixIdCond = cond(matrixId);
    %Allo stesso modo, calcoliamo il numero di condizionamento in norma 1 della %matrice di identità %comando 'rcond'.
    matrixIdrCond = rcond(matrixId);
    %Definiamo l'errore assoluto tra la matrice di identità della nostra matrice di Vandermonde
    %e la matrice di identità.
    error = norm(matrixId - Id);
```