


Appunti di Automazione dei Sistemi Energetici

Matteo Gianello

22 ottobre 2013

Quest'opera è stata rilasciata con licenza Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 3.0 Unported. Per leggere una copia della licenza visita il sito web <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/deed.it> .

Indice

1 Introduzione

I sistemi che generano, distribuiscono e consumano energia sono diventati sempre più complessi ed articolati a causa di diversi tipi di sorgente dai quali l'energia viene ricavata (rinnovabili e non), diversi metodi di generazione, un mercato complesso ed in rapida evoluzione. La progettazione di sistemi energetici richiede perciò sempre più la figura di un ingegnere automatico che abbia una visione del sistema a più livelli, permetta una sempre più alta integrazione e sia in grado di soddisfare le nuove esigenze. Scopo del corso quello di fornire una visione a livello di sistema dei problemi di controllo analizzando le soluzioni adottate e gli sviluppi futuri senza entrare troppo nel dettaglio dei generatori e utilizzatori.

1.1 L'automazione nei sistemi energetici

I principi di automazione nei sistemi energetici li troviamo praticamente ovunque, nei refrigeratori, nelle caldaie, nelle lavatrici; più in generale nei generatori e nei consumatori. A qualsiasi livello di progetto grandi componenti, macchinari industriali, piani energetici. Praticamente l'automazione nei sistemi energetici ovunque si abbia una trasformazione di energia, dove la parola trasformazione assume un significato diverso a seconda del contesto nel quale lavoriamo, ad esempio parliamo di generazione nel caso produzione di energia, consumo nel caso di utilizzo di energia e di trasporto.

Ogni oggetto (o aggregazione di oggetti) può essere controllato per raggiungere degli obiettivi locali, ma bisogna sempre tener presente che ogni azione su un oggetto influenza l'intero sistema.

Nonostante tutto non si può definire una gerarchia tra i sistemi in quanto questa caratteristica richiederebbe un controllore enorme per eseguire il lavoro.

Possiamo comunque strutturare il sistema capendo quali sono i problemi rilevanti e se e come possono essere controllati ragionevolmente. Un problema può essere dominato se la sua estensione è finita e può essere descritta da condizioni di confine specifiche ed è possibile trovare per esso almeno una soluzione di complessità accettabile.

Per descrivere e capire il problema abbiamo bisogno di un approccio sistematico nel quale i componenti sono descritti a diversi livelli di dettaglio, preservano le loro interfacce con gli altri componenti e sono il più possibile indipendenti da come essi sono connessi con il resto del sistema.

1.2 Definizioni di base

Di seguito alcune definizioni di base prima di cominciare.

Primary-Secondary energy (PE-SE) :

- Primary Energy: quell'energia che può essere ricavata direttamente in natura (gas, vento, sole);
- Secondary Energy: quell'energia ricavata trasformando l'energia primaria in una forma più facile da utilizzare, immagazzinare e trasportare.

Renewable-Non Renewable Energy Sources (RES-NRES) :

- Energia rinnovabile ottenuta da una fonte di energia praticamente inesauribile.

- Energia non rinnovabile richiede un consumo di carburante e il rilascio di inquinanti (es. petrolio, gas).

Energy intensity :Quantit [U+FFFD] di energia per unit [U+FFFD]; ad esempio per unit [U+FFFD] prodotta o per servire una determinata richiesta.

Energy conservation : Riduzione in termini assoluti del consumo di energia.

Energy efficiency : Riduzione di EI preservando la quantit [U+FFFD] di risultato.

1.3 Alcuni problemi di controllo

Controllo di generatori (PE→ SE) : minimizzare il consumo di carburante nel caso di NRES o massimizzare rendimento (RES).

Controllo consumatori (SE→fianl user) :mantenere le condizioni ottimali (temperatura della stanza)

2 Principi di modellazione

I classici problemi di controllo sono divisi in processi e motion ma noi ci occuperemo principalmente dei primi. Incontreremo in oltre alcune PDE (Equazioni differenziali parziali) ma con al massimo una coordinata spaziale (tubi). In altri casi invece ci impareremo in sistemi di equazioni differenziali ordinarie ricavate dalla manipolazione di equazioni spaziali discrete ricavate da un approccio a volumi finiti (FV).

I tre aspetti principali dei quali ci occuperemo saranno sistemi di tipo idraulico, elettrico o termico; alcuni problemi di tipo meccanico si presenteranno ma solo sporadicamente e considereranno una sola coordinata spaziale.

2.1 Sistemi termo-idraulici

Le equazioni che incontreremo sono scritte facendo riferimento a un volume di controllo, non necessariamente costante, considerando un solo liquido incompressibile.

2.1.1 Equazione di bilancio delle masse

L'equazione ?? rappresenta l'equazione di bilancio delle masse dove M è la massa di liquido contenuta nel volume di controllo, w_i è il flusso che entra (se positivo) o esce (se negativo) dal volume di controllo.

$$\frac{dM(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n_m} w_i(t) \quad (1)$$

2.1.2 Equazione di bilancio dell'energia

Le equazioni di bilancio dinamico che riguardano l'energia considerano un volume di controllo nel quale è contenuta tutta l'energia E e dove n_m flussi di massa e n_h potenze termiche Q_j entrano (escono se negativi).

Ovviamente la derivata dell'energia E è la somma dei vari flussi termici ai quali non è associato alcun trasferimento di massa.

La derivata temporale dell'energia è data da due contributi coesistenti:

- apporti di energia legati al trasporto di massa dati da:

$$Portata \times Energia_specifica_del_fluido$$

- lavoro eseguito dal flusso entrante o uscente sul volume di liquido espresso in forma differenziale come:

$$dL = d(pv) = d(p/\rho)$$

o anche come

$$dL = p dv + v dp$$

Dove la componente $p dv$ è detta lavoro di compressione e $v dp$ è il lavoro di pulsione. La grandezza che esprime l'apporto di energia di una portata di fluido entrante è data dalla ?? che esprime l'entalpia specifica del fluido.

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (2)$$

Dove e indica l'energia interna specifica.

Pertanto l'equazione di conservazione dell'energia è data dalla ??

$$\frac{dE(t)}{dt} = \sum_{i=1}^N w_i(t) h_i(t) + \sum_{j=1}^M Q_j(t) \quad (3)$$

Il termine e domina (negli esempi ed esercizi di questo corso) di molto il termine p/ρ in questo caso si può considerare l'entalpia e l'energia interna uguali e pari a cT dove c è il calore specifico. Detto ciò, tenendo conto delle nostre ipotesi e delle semplificazioni fatte, la formula del bilancio di energia si semplifica come nella ??.

$$c \frac{dM(t)T(t)}{dt} = c \sum_{i=1}^{n_m} w_i(t) T_i(t) + \sum_{j=1}^{n_h} Q_j(t) \quad (4)$$

Alcune volte la massa rimane costante allora

$$cM \frac{dT(t)}{dt} = c \sum_{i=1}^{n_m} w_i(t) T_i(t) + \sum_{j=1}^{n_h} Q_j(t)$$

In altri casi è conveniente espandere la derivata a sinistra e sottrarre l'equazione di massa moltiplicata per cT .

$$\begin{aligned} cM(t) \frac{dT(t)}{dt} + cT(t) \frac{dM(t)}{dt} &= c \sum_{i=1}^{n_m} w_i(t) T_i(t) + \sum_{j=1}^{n_h} Q_j(t) \\ - cT(t) \frac{dM(t)}{dt} &= -cT(t) \sum_{i=1}^{n_m} w_i(t) \end{aligned}$$

$$cM(t) \frac{dT(t)}{dt} + \quad = c \sum_{i=1}^{n_m} w_i(t) (T_i(t) - T(t)) + \sum_{j=1}^{n_h} Q_j(t)$$

L'equazione precedente è chiamata equazione net energy.

2.1.3 Equazione della quantità di moto

Per quanto riguarda la quantità di moto l'equazione in questo corso è utilizzata per modellizzare le condutture.

In un tubo la derivata della quantità di moto è uguale alla somma delle forze che agiscono su di esso:

- pressione ai capi della conduttura
- forza di gravità
- forze di attrito sulle superfici laterali

tutte riferite lungo l'ascissa x del tubo (sull'asse y le componenti sono a 90° o sono bilanciate da forze esterne) L'equazione dei momenti per il sistema in Fig. ?? è data dalla ??

$$M \frac{du(t)}{dt} = Ap_i(t) - Ap_o(t) + Mg \sin(\alpha) - f_a(t) \quad (5)$$

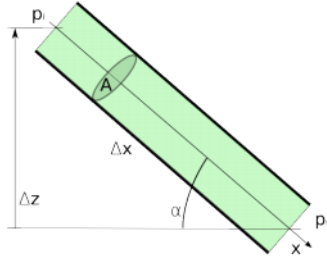


Figura 1: Sezione di tubo

Dove

$$f_a = K_f A_l \rho u |u|$$

La quantità K_f è detta *coefficiente di frizione* e dipende dalle caratteristiche di contatto tra il fluido e le pareti. Inoltre la formula contiene un termine di inerzia che però nei nostri esempi non considereremo questo perchè i fenomeni idraulici sono molto più veloci delle costanti di tempo di quelli termici. Quindi la formula della quantità di moto si riduce alla ??.

$$A(p_i(t) - P_o(t)) + Mg \frac{\Delta z}{\Delta x} - K_f A_l \rho u(t) |u(t)| = 0 \quad (6)$$

Concludendo indicando con:

- A la sezione del tubo,
- L la sua lunghezza
- e ω il suo perimetro interno

e ricordando che $w = \rho A u$ abbiamo che:

$$p_i - p_o = K_f \frac{\omega L}{\rho A^3} w |W| - \rho g \Delta z$$

L'equazione della quantità di moto può rappresentare il comportamento tipico di una valvola. Dal nostro punto di vista una valvola è come una piccola sezione variabile di tubo in cui $\Delta z = 0$ e la velocità è data dalla formula seguente:

$$w = C_v \phi(x) \sqrt{\rho(p_i - p_o)}$$

dove C_v è il coefficiente di flusso e $\phi(x)$ è la caratteristica intrinseca della valvola.

2.1.4 Equazione dell'energia nei corpi solidi

Per quanto riguarda il caso in cui non vi sia scambio di massa (ad esempio conduzione attraverso una parete) la formula diventa:

$$cM \frac{dT(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n_h} Q_j(t)$$

Nel caso in cui il muro non sia uniforme lo si divide in più livelli e si applica sempre la stessa formula.

2.1.5 Equazioni dei flussi di calore

Le equazioni per i flussi di calore ci servono per modellizzare tre fenomeni:

- Conduzione
- Convezione
- Irraggiamento

Per quanto riguarda la conduzione la potenza termica è data da :

$$Q_{ab} = G(T_a(t) - T_b(t))$$

Dove T_a e T_b sono le temperature ai due lati e G è:

$$G = \lambda \frac{A}{s}$$

con A la superficie s lo spessore e λ la conduttività termica del materiale.

Nel caso di convezione la formula della potenza termica tra flusso e parete è data da:

$$Q_{wf} = \gamma A(T_w(t) - T_f(t))$$

2.2 Sistemi elettrici

Per quanto riguarda i sistemi elettrici saranno effettuate alcune semplificazioni per rendere più chiari ed intuitivi i concetti:

- una sola sincrona frequenza per tutta la rete.
- tutti i generatori forniranno un voltaggio costante.
- le linee di trasmissione avranno un comportamento lineare.
- sistemi ad una fase

Inoltre adotteremo un sistema di modellizzazione basato sui fasori.

Ogni quantità che varia in modo sinusoidale a frequenza costante ω può essere rappresentata come segue:

$$A \cos(\omega t + \theta) = \Re(Ae^{j(\omega t + \theta)}) = \Re(Ae^{j\theta} e^{j\omega t})$$

Dove il fasore $A^{j\theta}$ esprime la fase e l'ampiezza rispetto a un opportuno sistema di riferimento.

2.2.1 La legge di Ohm

$$\underline{V} = \underline{Z}\underline{I}, \underline{I} = \underline{Y}\underline{V}$$

dove $\underline{V}, \underline{I}$ sono rispettivamente i fasori che indicano voltaggio e corrente e $\underline{Z}, \underline{Y}$ sono impedenza e ammettenza. Tipicamente le ultime due quantità vengono espresse come $\underline{Z} = R + iX$ e $\underline{Y} = G - iB$ dove R, X, G, B sono rispettivamente la resistenza, la reattanza, la conduttanza e la suscettanza.

La potenza espressa in termini di fasori è data da:

$$S = V_{RMS} I_{RMS}^* = P + jQ = Ae^{j\phi}$$

dove possiamo distinguere una componente attiva:

$$P = \Re(S) = V_{RMS} I_{RMS} \cos \phi$$

e una componente reattiva:

$$Q = \Im(S) = V_{RMS} I_{RMS} \sin \phi$$

3 Modelli a blocchi e ad oggetti

Per identificare dei modelli o dei parametri a volte ci affidiamo a delle simulazioni di modelli che possono essere di due tipi:

- Orientati ai blocchi
- Orientati agli oggetti

Nel caso di modelli orientati ai blocchi l'ordinamento è di tipo *causale* ovvero un blocco ha un ingresso ed un uscita e un uscita può connettersi a uno o più ingressi attraverso connessioni *input/output*. Nel caso di modelli orientati agli oggetti abbiamo una *a-causalità* tra i vari oggetti; le connessioni tra i vari oggetti avvengono attraverso delle porte che instaurano un collegamento di uguaglianza tra ciò che viene collegato. Vediamo ora attraverso un esempio la differenza tra modelli BO e OO.

3.1 Legge di Ohm

3.1.1 Caso BO

Se voglio modellizzare un resistore collegato ad un generatore dovrò costruire due modelli, uno nel caso in cui il generatore è un generatore di tensione, in questo caso il modello è dato da:

$$\begin{aligned} V &= E \\ I &= V/R \end{aligned}$$

Nel caso in cui invece il generatore fornisca una corrente il modello diventa:

$$\begin{aligned} I &= A \\ V &= RI \end{aligned}$$

Per gli stessi componenti abbiamo dovuto definire due differenti condizioni limite e *due modelli differenti*.

3.1.2 Caso OO

Nel caso di modelli orientati agli oggetti opto per un differente approccio; prima di tutto diamo una definizione di *porte*: esse possono essere definite come quei terminali fisici che interfacciano il componente con il mondo esterno. Nel caso del resistore sono i due pin di connessione. Il modello del resistore diventa quello identificato nell'equazione ??

$$RES : \begin{cases} a.I + b.I &= 0 \\ a.V - b.V &= Ra.I \end{cases} \quad (7)$$

Introduciamo poi i due generatori rispettivamente quello di tensione ?? e quello di corrente ?? ed inoltre la massa ??

$$VGEN : \begin{cases} a.I + b.I &= 0 \\ a.V - b.V &= RE \end{cases} \quad (8)$$

$$CGEN : \begin{cases} a.I + b.I &= 0 \\ a.I &= -A \end{cases} \quad (9)$$

$$GND : a.V = 0 \quad (10)$$

Così facendo vediamo come i due modelli descritti prima attraverso il sistema BO in questo caso

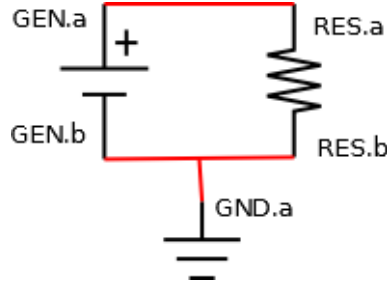


Figura 2: Schema del circuito in rosso le connessioni

possano essere descritti semplicemente cambiano il *modulo* generatore; ovvero intercambiando le equazioni che descrivono i due generatori.

Bisogna però descrivere le equazioni che governano le connessioni (Fig. ??), che anche in questo caso sono comuni per i due tipi di generatori.

$$GEN.a.V = RES.a.V \quad (11)$$

$$GEN.a.I + RES.a.I = 0 \quad (12)$$

$$GEN.b.V = GND.a.V \quad (13)$$

$$RES.b.V = GND.a.V \quad (14)$$

$$GEN.b.I + RES.b.I + GND.a.I = 0 \quad (15)$$

Le variabili che caratterizzano una porta possono essere di due tipi:

- variabili di *effort* ovvero variabili che sono definite attraverso la differenza da un riferimento (es. ddp).
- variabili *flow* definite come un flusso attraverso un canale (es. corrente).

Per connettere N porte ho bisogno di $N - 1$ equazioni per ogni variabile di effort ed una sola per tutte le variabili di flusso.

Come si è visto entrambi i metodi di modellizzazione incapsulano il comportamento del modello esponendo un'interfaccia, questo per ragioni di scalabilità. I modelli BO richiedono però che il sistema sia orientato cioè richiede che le variabili di ingresso e uscita siano ben specificate per ogni blocco. Nei modelli OO, invece, non è richiesto che i componenti siano orientati.

3.2 Concetto di circuito elettrico equivalente

Nei modelli OO le porte sono naturalmente associate ad un trasferimento di energia. Ad esempio consideriamo una porta con un'unica variabile di flusso e una di effort in diversi casi:

- elettrico (tensione v e corrente i): $vi = \text{potenza}$
- meccanico traslazionale (posizione x e forza f): $\dot{x}f = \text{potenza}$
- meccanico rotazionale (angolo θ e forza τ): $\dot{\theta}\tau = \text{potenza}$
- termico (temperatura T e potenza Q): in questo caso la potenza non è il prodotto delle due

L'equivalente elettrico è utile anche per descrivere quei fenomeni legati all'energia; come nel caso in cui:

- l'accumulo di energia è legato a una variabile di effort come nel caso $E = CT$ dove C è la capacità termica.
- il trasferimento di energia è legato linearmente a una differenza di variabili $Q = G\Delta T$ dove G è la conduttanza termica.

4 Modelli e problemi di controllo

Nel controllo di sistemi elettrici possiamo incontrare due tipi di problemi:

- **problemi di controllo di potenza** nei quali si cerca di fornire la potenza richiesta agli utilizzatori; minimizzando i costi globalmente o fornendo la massima potenza richiesta minimizzando i costi del singolo generatore.
- **problemi di controllo di energia** nei quali si richiede che l'elettricità abbia voltaggio e frequenza necessari per cooperare con tutti i generatori e i carichi.

Questi problemi sono apparentemente interlacciati in quanto dipendono entrambi dai generatori. Inoltre, solo ai generatori si applicano i meccanismi di controllo mentre i carichi sono considerati disturbi esogeni.

Possiamo considerare due tipi di generatori, il primo con masse rotanti e alternatori, il secondo senza masse rotanti ma con inverter. I generatori con masse rotanti forniscono la potenza richiesta aumentando o diminuendo la velocità di rotazione con conseguente alterazione della frequenza.

Quando ci spostiamo dal controllo dei generatori al controllo del carico della rete incontriamo un secondo problema ovvero il problema del flusso di carico; infatti si vuole distribuire la potenza senza però sovraccaricare le linee e possibilmente minimizzando le perdite di carico.

4.1 Modello di un generatore termoelettrico

Questo tipo di generatore è formato da una massa rotante nel quale potenza e frequenza sono accoppiate.

Prendiamo il caso di un generatore isolato nel quale abbiamo una fornace nella quale si brucia del carburante e di conseguenza si produce calore, il calore prodotto trasforma un fluido in vapore, questo vapore fa muovere una turbina che infine fa muovere l'alternatore.

Prendiamo in considerazione come ingresso il sistema che brucia carburante e come uscita la potenza meccanica dell'alternatore. Per semplicità consideriamo come ingresso esogeno la potenza P_c prodotta dalla combustione e rilasciata al contenitore principale di energia (vapore). Il bilancio di energia immagazzinata è dato da:

$$\dot{E} = P_c - P_{loss} - P_t$$

dove P_{loss} è la potenza persa nelle pareti esterne mentre P_t è la potenza consumata dalla turbina. Per semplicità assumiamo che l'immagazzinatore di energia sia completamente vapore e che la sua massa sia costante; a questo punto possiamo associare la P_{loss} alla differenza di temperatura tra la temperatura di saturazione del vapore a una certa pressione p e la temperatura esterna tramite la relazione:

$$P_{lost} = G_{loss}(T_{sat}(p) - T_{ext})$$

In generale la $T_{sat} \gg T_{ext}$ così possiamo scrivere che:

$$P_{loss} = K_{loss} \frac{E}{M}$$

dove K_{loss} è un opportuno parametro legato alla superficie di dispersione, e la divisione per M esprime la dipendenza della potenza dallo stato del vapore.

Un'altra semplificazione riguarda P_t infatti trascuriamo il surriscaldamento che subisce il vapore all'atto dell'attraversamento della turbina e facciamo dipendere P_t soltanto dalla pressione (E/M) e dall'apertura della valvola della turbina $\theta \in [0, 1]$

$$P_t = \theta K_{draw} \frac{E}{M}$$

e dove K_{draw} è un altro parametro.

La potenza meccanica che raggiunge l'alternatore è ottenuta tenendo conto dell'efficienza meccanica dell'alternatore assunta costante e chiamata η_m

$$P_m = \eta_m P_t$$

Mettendo le equazioni a sistema otteniamo

$$\begin{cases} \dot{E} &= P_c - K_{loss}E/M - \theta K_{draw}E/M \\ P_m &= \eta_m \theta K_{draw}E/M \end{cases} \quad (16)$$

Sapendo che $[K_{loss}E/M] = [K_{draw}E/M] = [W]$ e θ e η_m sono adimensionali ricaviamo che $[K_{loss}/M] = [K_{draw}/M] = [1/s]$ e possiamo riscrivere il sistema precedente come:

$$\begin{cases} \dot{E} &= P_c - \left(\frac{1}{T_{loss}} + \frac{\theta}{T_{draw}}\right)E \\ P_m &= \frac{\eta_m}{T_{draw}}E\theta \end{cases} \quad (17)$$

In questo caso T_{loss} e T_{draw} sono le costanti di tempo con le quali l'energia viene rispettivamente persa dalla superficie esterna e prodotta attraverso l'alternatore alla massima apertura della valvola della turbina. Questo modello risulta molto impreciso e in un caso reale sarebbe applicabile solo nell'intorno di un punto di lavoro. Ma per i nostri scopi è più che sufficiente. Introduciamo ora la potenza nominale del generatore P_n e chiamiamo T_{rest} il tempo richiesto dal generatore per immagazzinare la sua energia nominale definita come $E_n = P_n T_{rest}$. Dividiamo ora entrambe le equazioni per E_n

$$\begin{cases} \dot{e} &= \frac{1}{T_{rest}}p_c - \left(\frac{1}{T_{loss}} + \frac{\theta}{T_{draw}}\right)e \\ p_m &= \eta_m \frac{T_{rest}}{T_{draw}}e\theta \end{cases} \quad (18)$$

Dove $p_c = P_c/P_n$ e $p_m = P_m/P_n$ sono rispettivamente la potenza normalizzata di combustione e meccanica, ed $e = E/E_n$ è l'energia normalizzata.

A questo punto calcoliamo l'equilibrio di questo modello per ingressi costanti $\bar{p}_c, \bar{\theta}$

$$\bar{e} = \frac{T_{draw}T_{loss}\bar{p}_c}{T_{rest}(T_{draw} + T_{loss}\bar{\theta})}$$

$$\bar{p}_m = \frac{\eta_m T_{loss}\bar{p}_c\bar{\theta}}{T_{draw} + T_{loss}\bar{\theta}}$$

A questo punto linearizziamo il modello nelle vicinanze dell'equilibrio imponendo $\Delta p = p_c - \bar{p}_c, \Delta \theta = \theta - \bar{\theta}$ e $\Delta e = e - \bar{e}, \Delta p_m = p_m - \bar{p}_m$

$$\begin{cases} \Delta \dot{e} &= -\left(\frac{1}{T_{loss}} + \frac{\bar{\theta}}{T_{draw}}\right)\Delta e + \left[\frac{p_c T_{loss}}{T_{rest}(T_{draw} + T_{loss}\bar{\theta})} \frac{1}{T_{rest}}\right] \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta p_c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta p_m \\ \Delta e \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\eta_m T_{rest}\bar{\theta}}{T_{draw}} \\ 1 \end{bmatrix} \Delta e + \begin{bmatrix} \frac{\eta_m T_{loss}\bar{p}_c}{T_{draw} + T_{loss}\bar{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta p_c \end{bmatrix} \end{cases}$$

La corrispondente matrice di trasferimento è:

$$\Gamma(s) = \begin{bmatrix} \Gamma_{\theta_m}(s) & \Gamma_{c_m}(s) \\ \Gamma_{\theta_e}(s) & \Gamma_{c_e}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta p_m(s)}{\Delta \theta(s)} & \frac{\Delta p_m(s)}{\Delta p_c(s)} \\ \frac{\Delta e(s)}{\Delta \theta(s)} & \frac{\Delta e(s)}{\Delta p_c(s)} \end{bmatrix}$$

$$\dots = \frac{1}{1+s \frac{T_{draw} T_{loss}}{T_{draw}+T_{loss}\bar{\theta}}} \begin{bmatrix} \frac{\eta_m T_{draw} T_{loss} \bar{p}_c}{(T_{draw}+T_{loss}\bar{\theta})^2} (1+sT_{loss}) & \frac{\eta_m T_{loss} \bar{\theta}}{T_{draw}+T_{loss}\bar{\theta}} \\ \frac{T_{draw} T_{loss} \bar{p}_c}{T_{rest}(T_{draw}+T_{loss}\bar{\theta})^2} & \frac{T_{draw} T_{loss}}{T_{rest}(T_{draw}+T_{loss}\bar{\theta})} \end{bmatrix}$$

Alcune altre semplificazioni che faremo a livello di sistema per valutare i costi sono:

- Assumeremo che i costi siano dati solo dal consumo di carburante e non dal mantenimento dell'impianto
- La combustione non avviene allo stesso modo ai diversi carichi di sistema
- Il consumo specifico c_s è definito tipicamente decrescente rispetto a P_c .
- Il flusso di carburante consumato w_c e p_c sono legati dall'equazione

$$w_c = c_s(p_c P_n) p_c P_n;$$

La potenza attiva richiesta dal carico, un parametro esogeno per il generatore, viene detta P_e così il bilancio delle energie per la massa in rotazione è:

$$J\omega\dot{\omega} = P_m - P_e$$

dove J è l'inerzia totale vista all'albero del generatore (si pensi al caso di più generatori). L'equazione del rendimento all'equilibrio per ogni ω e \bar{P}_m e \bar{P}_e siano costanti e coincidenti la linearizzazione diventa:

$$\Delta\dot{\omega} = -\frac{P_m - P_e}{J\bar{\omega}^2} \Delta\omega + \frac{1}{J\bar{\omega}} (\Delta P_m - \Delta P_e)$$

Visto che $P_e = P_m$ e che ω viene regolato al valore desiderato ω_0 otteniamo:

$$\Delta\dot{\omega} = \frac{1}{J\omega_0} (\Delta P_m - \Delta P_e)$$

Normalizzando $P_{m,e}$ con P_n e ω con ω_0 e usando δ per indicare le variazioni delle quantità normalizzate otteniamo:

$$\frac{\Delta\dot{\omega}}{\omega_0 P_n} = \frac{1}{J\omega_0} \left(\frac{\Delta P_m}{\omega_0 P_n} - \frac{\Delta P_e}{\omega_0 P_n} \right)$$

$$\delta\dot{\omega} = \frac{1}{J\omega_0^2} (\delta P_m - \delta P_e)$$

4.2 Controllo di un generatore

Dopo aver descritto la relazione che lega $(\Delta\omega, \Delta p_c) \rightarrow (\Delta p_m, \Delta e)$ e la matrice di trasferimento del primo ordine $\Gamma(s)$. Ricordando inoltre che il contenuto di energia è legato alla pressione del vapore p . Ora parleremo del controllo di pressione nel generatore che significa anche controllare l'energia contenuta nel generatore.

Per effettuare questo controllo il nostro problema diventa come controllare la potenza meccanica in uscita dall'alternatore. Per applicare questo controllo si utilizzano principalmente tre metodi:

- **boiler follows:** consiste nella modulazione di θ oer modulare ΔP_m e ΔP_c per mantenere costante la pressione; questo permette una regolazione di P_m molto rapida ma che provoca piccole variazioni di pressione che causano un forte stress al sistema.
- **turbine follows** consiste nell'usare ω e P_c per regolare il sistema; con questo metodo si ha un controllo sulla pressione migliore ma il tempo di risposta del sistema è più lento.
- **sliding pressure** In questo sistema si mantiene θ al suo valore massimo e si controlla P_m agendo su w_c ; questo sistema permette di non sollecitare troppo la turbina ma come contro ha dei tempi di risposta molto lunghi.

Descriviamo ora gli attuatori che controllano θ e P_c tenendo conto dei loro tempi di risposta che non sono sicuramente immediati. La matrice di trasferimento è:

$$A(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+sT_\theta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+sT_{P_c}} \end{bmatrix}$$

Quindi in accordo con le dinamiche degli attuatori:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta(s) \\ \Delta P_c(s) \end{bmatrix} = A(s) \begin{bmatrix} \Delta\theta_c(s) \\ \Delta P_{cc}(s) \end{bmatrix}$$

Dove θ_c e P_{cc} sono le variabili di comando degli attuatori rispettivamente di θ e P_c Il sistema è così modellizzato dalla matrice di trasferimento $\Gamma(s)A(s)$

D'ora in poi non indicheremo più il pedice c per indicare le variabili di controllo e considereremo $A(s)$ come parte del processo, ovvero considerando sempre la cascata tra A e Γ ma prendendo come ingressi θ e P_c . In altre parole possiamo scrivere il sistema come:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_m(s) \\ \Delta e(s) \end{bmatrix} = \Gamma_{ap}(s) \begin{bmatrix} \Delta\theta(s) \\ \Delta P_c(s) \end{bmatrix}$$

dove $\Gamma_{ap}(s) = \Gamma(s)A(s)$

Tornando allo scopo principale, il tipo di politica di controllo utilizzata per controllare il sistema si basa su quali tipi di generatori vengono utilizzati, sulle regole della rete e talvolta anche in base al carico presente in quell'istante. Qualsiasi sia la politica di controllo scelta e qualsiasi sia la variabile di controllo usata per governare P_m (d'ora in poi denotata con u_P) il sistema può essere controllato dalla funzione di trasferimento $G(s)$ espressa come:

$$G(s) = \left. \frac{\Delta P_m(s)}{\Delta u_P(s)} \right|_{\text{struttura_generatore, politica_di_controllo}}$$

Possiamo normalizzare $G(s)$ sostituendo la potenza normalizzata P_n e la variabile di controllo normalizzata u_{P_n} ottenendo:

$$g(s) = \frac{\delta P_m(s)}{\delta u_p(s)}$$

dove u_{P_n} è 1 o P_n se la variabile di controllo è rispettivamente θ o P_c in ogni caso lo schema da controllare risulta essere (per un generatore isolato): Per il caso di generatore isolato il sistema di controllo risulta essere quello in figura ?? Dove $1/sT_A$ è un integratore che impone a zero l'uscita in caso di sistema all'equilibrio, mentre $R(s)$ è un altro integratore per mantenere a zero l'errore di frequenza nel caso di sistema all'equilibrio.

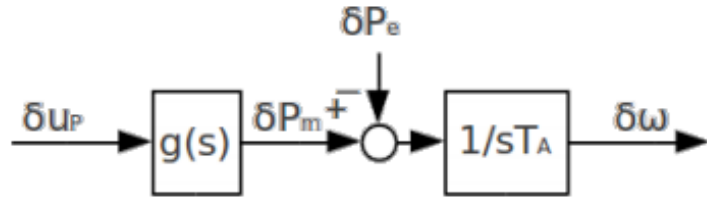


Figura 3: Schema a blocchi di un generatore isolato

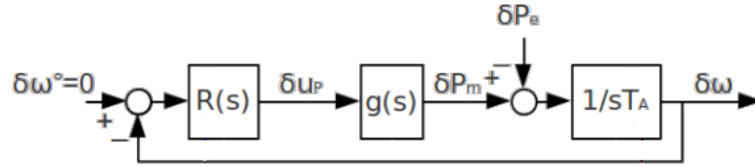


Figura 4: Schema del sistema di controllo per un generatore isolato

4.3 Generatori in rete

Prima di parlare del caso di più generatori connessi in rete dobbiamo fare alcune ipotesi sulla rete stessa; infatti si suppone che la rete sia rigida e sincrona. I generatori invece ruotano alla stessa velocità senza drift sul valore impostato. In questo caso tutta la potenza meccanica (non normalizzata) viene sommata, mentre un'unica potenza elettrica viene sottratta (il totale del carico). Il sistema sotto controllo è rappresentato in figura ?? Dove J è l'inerzia totale della

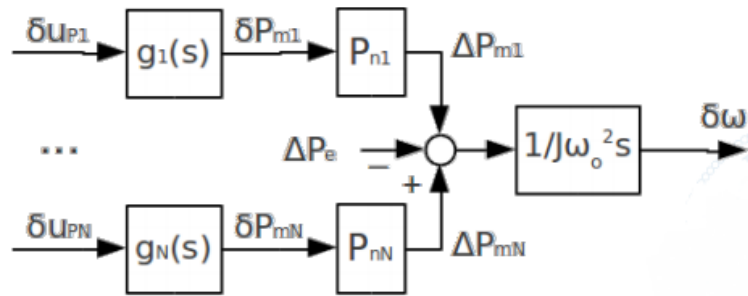


Figura 5: Sistema di più generatori collegati alla rete.

rete.

A questo punto è facile estendere lo schema del generatore isolato allo schema con più generatori come vediamo in figura ?. In questo schema l'integratore $(1/J\omega_o^2 s)$ garantisce che l'errore sulla potenza in caso di equilibrio sia zero. Mentre i regolatori $(R_1 \dots R_n)$ non possono essere tutti degli integratori altrimenti avremo delle parti non controllabili del sistema.

Per capire il perché osserviamo lo schema di figura ? equivalente al sistema. Dove ΔP_{mtot} è la variazione della potenza meccanica totale, e

$$F(s) = \sum_{i=1}^N R_i(s) g_i(s) P_{ni}$$

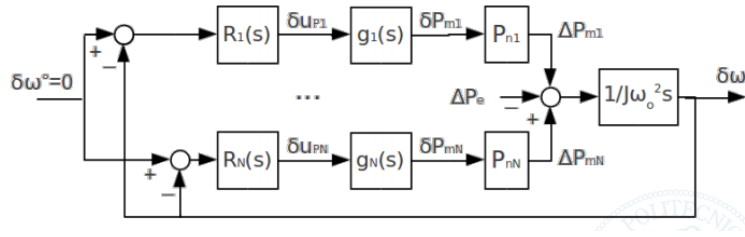


Figura 6: Schema del sistema di controllo per un generatore isolato

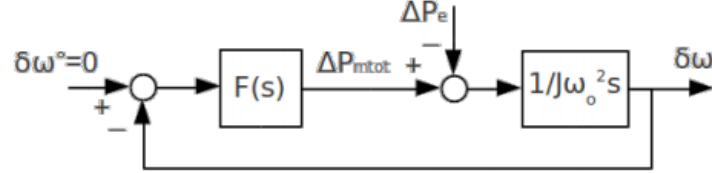


Figura 7: Schema equivalente

Degli integratori in R_i andrebbero in parallelo e farebbero perdere la controllabilità. La soluzione a questo problema è avere un solo integratore:

- avere un primo regolatore $R_i(s)$ di tipo proporzionale.
- introdurre un controllore in seconda frequenza di tipo integrale per l'intera rete.
- l'output del secondo regolatore entra in alcuni correttori che entrano a loro volta nell'ingresso degli R_i

5 Applicazione del paradigma OO al modello del generatore

Fino ad ora abbiamo utilizzato un approccio orientato ai blocchi per descrivere il nostro sistema; ora però diviene più utile descrivere tale sistema con un modello orientato agli oggetti. A questo scopo, come prima cosa definiamo un connettore che esprima l'accoppiamento sincrono e rigido, ovvero nel quale tutti i modelli connessi hanno la stessa frequenza e non presentano fenomeni di disallineamento.

```
connector PowerFreqPort
  Real f; // Frequency
  flow Real P; // Power
end PowerFreqPort;
```

Definiamo una rete nella quale potremmo collegare diversi generatori ma che controlla una singola inerzia globale.

```
model ElectricNetworkPF
  signalIn Pe; // Electric power (exogenous)
  PowerFreqPort Pg; // Port to connect all generators
  parameter Real J = 1000; // Inertia
  parameter Real fo = 50; // Nominal (and initial) frequency
  Real f(start = fo); // Frequency
  equation
```

```

der(f) = (Pg.P-Pe)/(J*8*3.14^3*fo^2); // der(2*pi*f)=(Pg-Pe)/(J*(2*pi*fo)^2)
f = Pg.f;
end ElectricNetworkPF;

```

Ed infine definiamo il modello del generatore:

```

model SimpleThermoElecGenPF
signalIn theta; // Throttling valve command
signalIn Pc; // Combustion power command
PowerFreqPort Pg; // Port to network
parameter Real Pn = 100;
parameter Real Trest = 500;
parameter Real Tdraw = 500;
parameter Real Tloss = 1e9;
parameter Real etam = 0.95;
parameter Real thetabar = 0.8;
parameter Real pcbar = 0.8;
Real e(start=Tdraw*Tloss*pcbar/Trest/(Tdraw+Tloss*thetabar));
Real pc,pm;
equation
der(e) = pc/Trest-(1/Tloss+theta/Tdraw)*e;
pm = etam*e*theta;
pc = Pc/Pn;
pm = Pg.P/Pn;
end SimpleThermoElecGenPF;

```

6 Ottimizzazione dei costi di generazione

Consideriamo una rete con N generatori nella quale in ogni istante la potenza meccanica totale è uguale alla potenza elettrica richiesta.

$$\sum_{i=1}^N P_{mi} = P_e$$

Il controllo primario e secondario assicurano questa condizione ed inoltre mantengono la frequenza costante ad un certo setpoint. Ora ci chiediamo però qual'è il costo di tale operazione; conoscendo la curva di efficienza di ogni generatore possiamo scrivere N equazioni che relazionano le P_{gi} (potenza generata dal generatore i) ad un *cost rate* $c_i[es]$. Possiamo esprimere tale relazione come $c_i(P_{gi})$ che è una funzione monotona crescente nel quale P_{gi} può variare tra un valore massimo e un valore minimo $P_{gi,min} \leq P_{gi} \leq P_{gi,max}$.

Il problema che ci poniamo ora è quello di minimizzare il costo, o più semplicemente minimizzare il cost rate totale.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^N c_i(P_{gi}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^N P_{gi} = P_e \end{aligned}$$

$$P_{gi,min} \leq P_{gi} \leq P_{gi,max} \quad i = 1 \dots N$$

Sarebbe risultato più complicato trovare il valore ottimo di cost rate per il singolo generatore ma questa soluzione permette di capirne il funzionamento con un buon compromesso sull'ottimalità della soluzione finale.

Molto frequentemente il modello di costo viene rappresentato come un polinomio di terzo grado del tipo:

$$c_i(P_{gi}) = (k_{g1}P_{gi} + k_{g2}P_{gi}^2 + k_{g3}P_{gi}^3)k_F + k_{om0} + k_{om1}P_{gi}$$

Dove k_{gj} è il coefficiente di costo per la produzione di energia, k_F è il costo del carburante per unità di energia e k_{oml} è il costo di mantenimento dell'impianto.

Il motivo per cui si tende ad utilizzare un polinomio di ordine 3 è il fatto che il *power ratio* $r_{fP}(P_g) = Q_f(P_g)/P_g$, dove Q_f è la potenza generata dal carburante e P_g è la potenza generata dal generatore e considerando che la quantità r_{fP} è adimensionale, abbia un minimo nel punto di ottimo. Il modo migliore per sintetizzare il modello è quello di descrivere la funzione $r_{fP}(P_g)$ come una parabola con un punto di ottimo nel vertice r_{fP}^o , la frazione p_g^o di $P_{g,max}$ corrisponde al rapporto ottimo dove la funzione p_g è definita come $P_g/P_{g,max}$, ed infine il massimo power ratio r_{fP}^{ml} al minimo carico sostenibile $p_g^{ml} = P_{g,min}/P_{g,max}$. Così da ottenere

$$r_{fP}(p_g) = r_{fP}^o + \frac{r_{fP}^{ml} - r_{fP}^o}{(p_g^o - p_g^{ml})^2} + (p_g - p_g^o)^2;$$

e

$$r_{fP}(P_g) = r_{fP}^o + \frac{r_{fP}^{ml} - r_{fP}^o}{(P_g^o - P_{g,min})^2} + (P_g - P_g^o)^2;$$

A questo punto possiamo scrivere

$$Q_f(P_g) = r_{fP}P_g = \left(r_{fP}^o + \frac{r_{fP}^{ml} - r_{fP}^o}{(P_g^o - P_{g,min})^2} + (P_g - P_g^o)^2 \right) P_g$$

Che contiene le potenze di P_g dalla 1 alla 3 così possiamo scriverlo come $k_{g1}P_{gi} + k_{g2}P_{gi}^2 + k_{g3}P_{gi}^3$ ed in particolare abbiamo che:

$$k_{g1} = \frac{r_{fP}^{ml}P_g^{o2} - r_{fP}^o P_{g,min}(2P_g^o - P_{g,min})}{(P_g^o - P_{g,min})^2}$$

$$k_{g2} = \frac{2P_g^o(r_{fP}^o - r_{fP}^{ml})}{(P_g^o - P_{g,min})^2}$$

$$k_{g3} = \frac{r_{fP}^{ml} - r_{fP}^o}{(P_g^o - P_{g,min})^2}$$

6.1 Il caso di due generatori

Vediamo il caso di due generatori collegati ad una rete e le previsioni di richiesta di energia da parte della rete \hat{P}_e per il prossimo periodo. Lo scopo è trovare la distribuzione ottima dei generatori $\{P_{gi}^{opt}\}$ per soddisfare la richiesta di energia \hat{P}_e , mandare poi ad ogni generatore il valore P_{gi}^{opt} previsto ed effettuare a questo punto il controllo primario e secondario.

Ora consideriamo solo il caso in cui entrambi i generatori sono attivi; la funzione di costo è data da:

$$P_{g2} = \hat{P}_e - P_{g1} \Rightarrow c_{12}(P_{g1}) = c_1(P_{g1}) + c_2(\hat{P}_e - P_{g1})$$

Ora troviamo un possibile costo ottimo $c_{12}^{opt}(\hat{P}_e)$ all'interno delle distribuzioni dei due generatori e determiniamo il $P_{g1}^{opt}(\hat{P}_e)$ corrispondente al minimo.

Quello che abbiamo appena visto è il procedimento generale vediamo ora un processo più matematico per calcolare i diversi valori.

Prima di tutto esponiamo il problema in termini di funzioni; vogliamo minimizzare una funzione reale f di N_x variabili reali x_i :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{N_x}) \quad f(\dots) \in \mathfrak{R}, \quad x_i \in \mathfrak{R}, i = 1 \dots N_x$$

soggetto a N_e vincoli di uguaglianza nella forma:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_{N_x}) = 0 \quad g_i(\dots) \in \mathfrak{R}, i = 1 \dots N_e$$

e soggetto a N_i vincoli di disuguaglianza nella forma:

$$h_i(x_1, x_2, \dots, x_{N_x}) \geq 0 \quad h_i(\dots) \in \mathfrak{R}, i = 1 \dots N_i$$

La Lagrangiana del problema è data da:

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_{N_x}) + \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_{N_x})$$

dove i coefficienti λ_i sono detti moltiplicatori lagrangiani.

Calcoliamo il gradiente di L come:

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \left[\frac{\partial L}{\partial x_1} \frac{\partial L}{\partial x_2} \dots \frac{\partial L}{\partial x_{N_x}} \right]$$

$$\nabla_x L(x, \lambda) = \left[\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} \dots \frac{\partial L}{\partial \lambda_{N_e}} \right]$$

Osserviamo inoltre che i diversi componenti di $\nabla_x L$ sono dati da:

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{N_e} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k}$$

Supponiamo adesso che (x^o, λ^o) sia soluzione delle $N_e + N_x$ equazioni. In questa situazione possiamo distinguere due casi:

- Caso 1: $\nabla_x f$ in x^o è un vettore di zeri; in questo caso x^o è un punto stazionario per $f(x)$ indipendentemente dai vincoli imposti da $g(x)$. La funzione $\nabla_x L$ può essere ridotta alla semplice espressione $\lambda' J_x g = 0$
- Caso 2: $\nabla_x f$ in x^o non è un vettore di zeri in questo caso λ^o non può essere un vettore di zeri. Possiamo quindi scrivere $\nabla_x f = -\lambda' J_x g$ e questo ci dice che i gradienti di f e di g sono paralleli.

6.2 Il procedimento

Ricapitolando noi dobbiamo risolvere il seguente sistema.

$$\begin{cases} \nabla_x L(x, \lambda) &= 0_{1 \times N_x} \\ \nabla_\lambda L(x, \lambda) &= 0_{1 \times N_e} \end{cases}$$

Ora dobbiamo chiederci se x^o è un punto di massimo o di minimo. Essendo questo calcolo relativamente complesso ci limitiamo all'analisi della matrice Hessiana di L . Questo perchè l'hessiana è matrice della derivata seconda e i suoi elementi sono dati da:

$$L_{x_i x_j}(x, \lambda) = \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \lambda \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j} + \lambda g_{x_i x_j}$$

$$L_{x_i \lambda_j}(x, \lambda) = \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial x_i \partial \lambda_j} = \frac{\partial}{\partial x_i \lambda_j} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g(x)}{\partial x_i} \right) = g_{j x_i}$$

$$L_{\lambda_i \lambda_j}(x, \lambda) = \frac{\partial^2 L(x, \lambda)}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = 0$$

Costruiamo ora la matrice hessiana partendo dalle derivate $\lambda \lambda$

$$H_{x, \lambda} L = \begin{bmatrix} L_{\lambda_1 \lambda_1} & \cdots & L_{\lambda_1 \lambda_{N_e}} & L_{\lambda_1 x_1} & \cdots & L_{\lambda_1 x_{N_x}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{\lambda_{N_e} \lambda_1} & \cdots & L_{\lambda_{N_e} \lambda_{N_e}} & L_{\lambda_{N_e} x_1} & \cdots & L_{\lambda_{N_e} x_{N_x}} \\ L_{x_1 \lambda_1} & \cdots & L_{x_1 \lambda_{N_e}} & L_{x_1 x_1} & \cdots & L_{x_1 x_{N_x}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{x_{N_x} \lambda_1} & \cdots & L_{x_{N_x} \lambda_{N_e}} & L_{x_{N_x} x_1} & \cdots & L_{x_{N_x} x_{N_x}} \end{bmatrix}$$

Sostituendo i diversi valori otteniamo

$$H_{x, \lambda} L = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & g_{1x_1} & \cdots & g_{1x_{N_x}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g_{N_e x_1} & \cdots & g_{N_e x_{N_x}} \\ g_{1x_1} & \cdots & g_{N_e x_1} & f_{x_1 x_1} + \lambda g_{x_1 x_1} & \cdots & f_{x_1 x_{N_x}} + \lambda g_{x_1 x_{N_x}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{1x_{N_x}} & \cdots & g_{N_e x_{N_x}} & f_{x_{N_x} x_1} + \lambda g_{x_{N_x} x_1} & \cdots & f_{x_{N_x} x_{N_x}} + \lambda g_{x_{N_x} x_{N_x}} \end{bmatrix}$$

7 Load Flow

Prima di entrare nel merito della discussione ricordiamo che la potenza viene ceduta dal generatore alla rete in base all'angolo del generatore; inoltre l'effetto di generatori combinati sulla rete è espresso dalla matrice di ammittanza della rete.

Visto che ci occuperemo di una rete di tipo AC ci conviene abbandonare il contesto propriamente energetico per adottare il contesto dei fasori.

Vediamo alcune semplificazioni che adotteremo nel seguito di questa discussione:

- abbiamo un'unica rete a singolo voltaggio (no trasformatori)
- considereremo un sistema a singola fase
- l'ampiezza dell'onda prodotta da ogni singolo generatore viene controllata idealmente.

Indichiamo ora $\underline{V}_n = V$ il fasore di voltaggio della rete. Supponendo che il voltaggio del generatore sia controllato in ampiezza per essere uguale a V attraverso l'espressione:

$$\underline{V}_g = V(\cos \delta + j \sin \delta)$$

dove δ è l'angolo del generatore. Ed infine $\underline{Y}_{gn} = G_{gn} - jB_{gn}$ è l'ammittanza della connessione generatore-rete. Possiamo quindi calcolarci le potenze attive e reattive come:

$$\begin{aligned} P &= (G(1 - \cos \delta) + B \sin \delta)V^2 \\ Q &= (B(1 - \cos \delta) + G \sin \delta)V^2 \end{aligned}$$

Da qui si vede come variando δ si può controllare P e Q seguirà di conseguenza. Altro modo per controllare contemporaneamente P e Q è quello di variare la tensione di riferimento; rifacendo i calcoli con V_g si nota questa cosa infatti:

$$\begin{aligned} P &= GV_g^2 + (B \sin \delta - G \cos \delta)VV_g \\ Q &= BV_g^2 + (G \sin \delta + B \cos \delta)VV_g \end{aligned}$$

Esistono molti altri modi per controllare la potenza reattiva ma per noi è sufficiente capire come il trasferimento di energia sulla rete può essere controllato variando δ accelerando o decelerando. I problemi che possiamo riscontrare nel trasferimento di energia sono principalmente di due tipi:

- Il *Load Flow* o flusso di carico
- L'*Optimal Power Flow*

Prima di entrare in dettaglio in questi problemi però dobbiamo rivedere i concetti di matrice di ammittanza.

Consideriamo ora una rete con n_B bus nei quali \underline{V}_i e \underline{I}_i sono rispettivamente la tensione e la corrente che circola nel bus i . In generale ogni bus è connesso con altri bus attraverso delle linee; dove $\underline{y}_{ij} = g_{ij} - jb_{ij}$ è il valore dell'ammittanza della linea. Alcuni bus sono connessi ad almeno un generatore (G) mentre altri sono connessi a dei carichi e per questo vengono chiamati PQ bus in quanto generano componenti di potenza sia attivi che reattivi.

Descriviamo ora la rete attraverso una matrice detta matrice delle ammittanze. La matrice delle ammittanze è creata seguendo questi passi:

- si parte dalla rappresentazione usuale della rete con i generatori e le impedenze;
- si inietta una corrente \underline{I}_i in ogni bus e si ricava la tensione ad ogni nodo

- si calcola \underline{Y}_{ij} come rapporto $\underline{I}_i/\underline{V}_j$

Infine si assembla la matrice:

$$\underline{\mathbf{Y}} = [\underline{Y}_{ij}] = \begin{cases} \underline{y}_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^{n_B} \underline{y}_{ij} & \text{per gli elementi sulla diagonale} \\ -\underline{y}_{ij} & \text{per tutti gli altri elementi} \end{cases}$$

8 Sistemi termici

Per quanto riguarda i sistemi termici ci occuperemo di alcuni materiali che dobbiamo specificare:

- vettore termico: un fluido incompressibile con un calore specifico costante nell'intervallo di temperature interessate.
- aria contenuta negli edifici: considerata alla stessa pressione di quella atmosferica
- materiali solidi: entrano in gioco nel contenimento dei liquidi o dei gas, per essi basterà una semplice descrizione

8.1 Componenti principali

Analizziamo ora i componenti principali che entrano in gioco nei sistemi termici.

8.1.1 Tubi

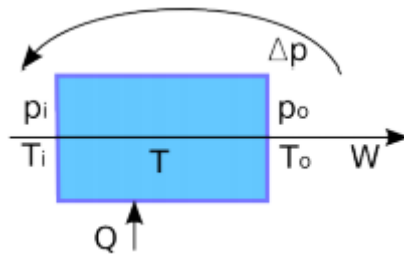


Figura 8: Schema del tubo

Le equazioni idrauliche sono:

$$\Delta p = \frac{K_T}{\rho} w^2 - \rho g \Delta z$$

Equazione di bilancio delle energie:

$$\rho V c \dot{T}_o = c w (T_i - T_o) + Q$$

8.1.2 Pompe

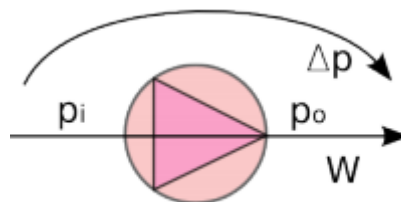


Figura 9: Schema di una pompa

Esistono diversi tipi di pompe centrifughe o volumetriche, esse variano la loro portata in base alla loro velocità comandata dal valore n . I flussi di massa e di volume sono proporzionali

alla densità ρ e vengono indicati rispettivamente da w e q .
Per quanto riguarda le pompe di tipo centrifugo:

$$\Delta p = H0(n) - H1(n)w^2$$

Mentre per quanto riguarda l'aspetto termico abbiamo che

$$T_i = T_o$$

8.1.3 Valvole

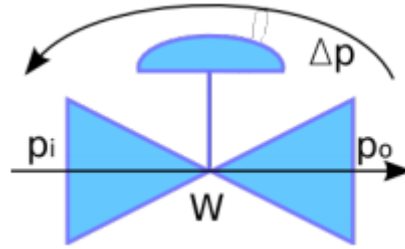


Figura 10: Schema di una valvola

Le equazioni idrauliche e termiche sono rispettivamente:

$$w = Cv_{max}\phi(x)\sqrt{\Delta p}$$

$$T_i = T_o$$

8.2 Scambi di calore

8.2.1 Scambio in un fluido

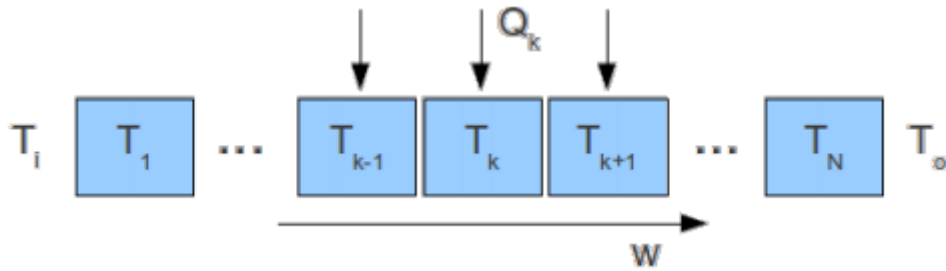


Figura 11: Scambio di calore in un fluido

Per un fluido incomprimibile le equazioni di energia sono disaccoppiate da quelle idrauliche; dopo aver deciso la direzione del flusso le equazioni per ogni elemento sono descritte da:

$$\rho c V_k \dot{T}_k = w c T_{k+1} - w c T_k + Q_k, \quad T_{-1} = T_i, T_o = T_N$$

8.2.2 Superficie metallica

Dividiamo il metallo nello stesso modo in cui abbiamo diviso il tubo in questo caso però l'equazione diventa:

$$\rho_m c_m V_{mk} \dot{T}_k = Q_{ak} + Q_{bk}$$

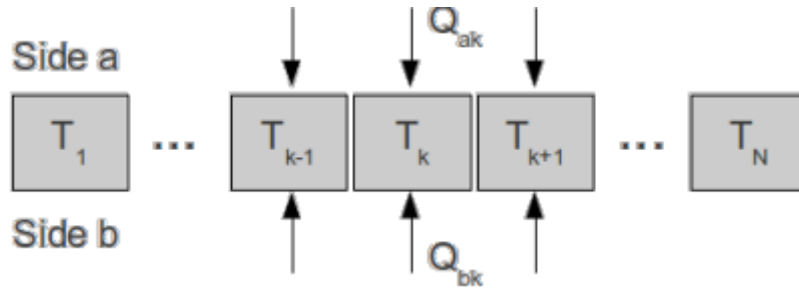


Figura 12: Scambio di calore con una superficie metallica

8.2.3 Scambio convettivo

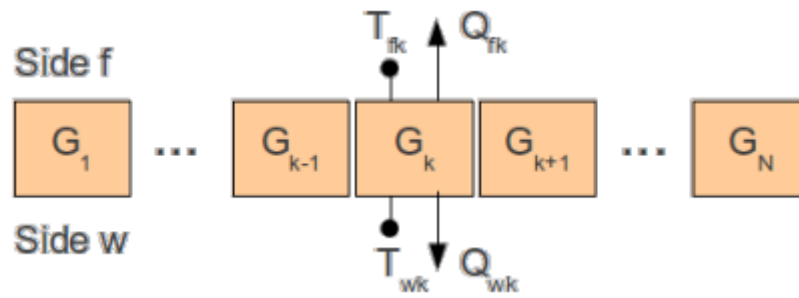


Figura 13: Scambio convettivo

Per lo scambio convettivo adottiamo la stessa tecnica di discretizzazione perciò l'equazione di bilancio dell'energia diventa:

$$Q_{fk} = -Q_{wk} = \gamma S_k (T_{fk} - T_{wk})$$

dove il pedice w sta ad indicare il materiale di scambio e S_k è la superficie di scambio.