$$\begin{bmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \\ \dot z_3 \\ \dot z_4 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_{12}+k_1}{m_1} & -\frac{b_{12}}{m_1} & \frac{k_{12}}{m_1} & \frac{b_{12}}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_{12}}{m_2} & \frac{b_{12}}{m_2} & -\frac{k_2+k_{12}}{m_2} & -\frac{b_{12}}{m_2} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_2 \end{bmatrix}}^{B} f$$

$4 \times 1 \qquad 4 \times 4 \quad 4 \times 1 \qquad 4 \times 1 \quad 1 \times 1$

z_1 : pos carro 1
z_2 : veloc carro 1
z_3 : pos carro 2
z_4 : veloc carro 2

1.1 Actividad 3.1

Graficar respuesta temporal de la posición de cada carro, considerando $f(t) = \sin t$

$$\dot z = A z + B f \quad \leftarrow \sin(t)$$

$$Y = \underline{C} z + \underline{D} f$$

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= z_1 \\ Y_2 &= z_3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} Y_1 &= 1 z_1 + 0 z_2 + 0 z_3 + 0 z_4 + 0 f \\ Y_2 &= 0 z_1 + 0 z_2 + 1 z_3 + 0 z_4 + 0 f \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{C} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + 0 f$$

$2 \times 1 \qquad 2 \times 4 \quad 4 \times 1$

polos: parte real negativa — ESTABLE | parte real positiva — INESTABLE

Función transfencia

$$\dot{y}(t) = a\,y(t) + b\,u(t)$$

Resolver ED
- sol part
- sol natural
- proponer sol

Laplace cambio dominio

tiempo (s, segundos) t

→ frecuencia (rad/s) S

símbolo de frecuencia complejo

$$\begin{cases} y(t) \xrightarrow{\text{“}\mathcal{L}\text{”}} Y(s) \\ \dot{y}(t) \rightarrow s\,Y(s) - y(0) \\ \ddot{y}(t) \rightarrow s^2\,Y(s) - s\,y(0) - \dot{y}(0) \end{cases}$$

función transformada

función en el tiempo

$$\dot{y} + a y = b u$$

$$\boxed{\underbrace{s\,Y(s) - y(0)}} + a\,Y(s) = b\,U(s)$$

$$Y(s)\,(s+a) = b\,U(s) + y(0)$$

$$Y(s) = \frac{b}{s+a}\,U(s) + \cancel{\frac{y(0)}{s+a}}$$

CI nulas

$$Y(s) = \frac{b}{s+a} \cdot U(s)$$

Si $U(s) = 1$ (corresponde a impulso unitario)

$$Y(s) = \frac{b}{s+a}$$

$\downarrow$

puedo hallar $y(t)$

Si $U(s) = \frac{1}{s}$ (escalón unit)

$$Y(s) = \frac{b}{s+a} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\text{"salida"}}{\text{entrada}}} = \frac{b}{s+a}$$

(CI nulas)

función transferencia

3 Actividad 3.2 Modelo de estados y Función transferencia

Un sistema de nivel viene definido por

$$A\dot{y} = q_i(t) - ky(t)$$

Considerando $A = 3$ y $k = 1$

1. Utilizar el algoritmo `ode23` para obtener una gráfica de la respuesta temporal de $y(t)$ cuando $q_i(t) = 10$. CI nulas
2. Transformar y despejar $Y(s)$ considerando condiciones iniciales no-nulas, y luego hallar la función transferencia (definida únicamente con condiciones iniciales nulas).
3. ¿Qué unidades tiene el factor A/k?
4. Considerando como variables bajo estudio el nivel de fluido y la rapidez de descenso del mismo, el vector de salidas sería:

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

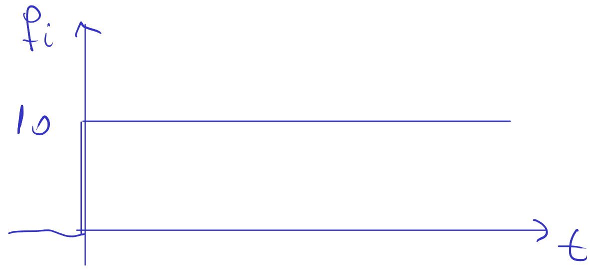
Verificar que el modelo de estados está definido por las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-k}{A} \end{bmatrix}$$

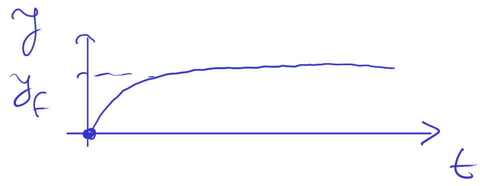
$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ -k/A \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/A \end{bmatrix}$$



1)



2) $A \cdot sY = Q_i - k\,Y$ CI nulas

$$Y(As + k) = Q_i$$

$$\boxed{\frac{Y}{Q_i} = \frac{1}{As+k}}$$

$$\left[\frac{Y}{Q_i}\right] = \left[\frac{y}{q_i}\right] \quad \text{ojo} \quad [Y(s)] = [y(t)]$$

3) A/k unidades

$$\frac{Y}{Q_i} = \frac{1}{k\left(\frac{A}{k}s + 1\right)} = \frac{1/k}{\frac{A}{k}s + 1}$$

unidades

$$\left[\frac{A}{k}s\right] = 1 \qquad \left[\frac{A}{k}\right] = \text{seg}$$

$\frac{A}{K} = \tau$ constante de tiempo

4) Tarea

polos: anulan el denominador de una FT

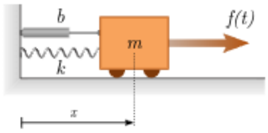
$$\frac{A}{K} s + 1 = 0$$

$$s = -K/A \quad \text{polos}$$

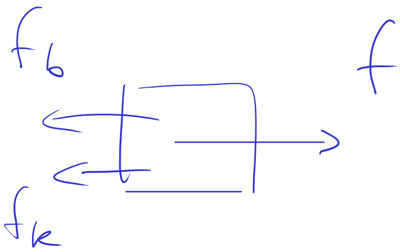
polo negativo $\rightarrow$ sist. estable

$\longrightarrow +$

4 Sistema masa-resorte-amortiguador



Sistema masa-resorte-amortiguador



Viene definido por

$$f(t) - kx(t) - b\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$$

$$f - f_b - f_k = m\ddot{x}$$

Reescribiendo:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}f$$

4.1 Acvitividad 3.3

Considerando $b = 1, k = 1, m = 1$, $x(0) = 0.5$ y $\dot{x}(0) = 0.7$, y una entrada $f(t) = 1.5$ (definida únicamente para $t >= 0$.

1. Determinar cuáles son las unidades físicas de cada variable.
2. Verificar que las matrices descriptivas son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-b}{m} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/m \end{bmatrix}$$

3. Utilizar el algoritmo `ode45` para graficar una respuesta temporal de $\dot{x}$ y x. Tener en cuenta que `ode45` únicamente acepta ecuaciones de primer orden.
4. Obtener la función transferencia, y graficar respuesta temporal usando la función `step`.
5. Graficar la ubicación de ceros y polos.

1) Unidades

$[m] = kg$

$[\ddot{x}] = m/s^2$

$[\dot{x}] = m/s$

$[x] = m$

$$\frac{\cancel{m}}{s^2} = \frac{[k]}{kg}\cancel{m}$$

$$[k] = \frac{kg}{s^2}$$

Terminar 1)

2)

$$x = x_1 \longrightarrow \dot{x} = \dot{x}_1 \longrightarrow \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$\dot{x} = x_2 \longrightarrow \ddot{x} = \dot{x}_2 \longrightarrow \dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}f$$

$$\dot{x}_1 = 0x_1 + 1\,x_2 + 0\,u$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}u$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix}}_{2\times 2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix}}_{2\times 1}u$$

3) Rta temp. ME: necesito C y D

x_1: posic

x_2: veloc

$$Y_1 = x_1$$

$$Y_2 = x_2$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{C}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

↳ MATLAB

4) FT → CI nulos

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}f$$

en dominio de transformada

$\times s \leftrightarrow \frac{d}{dt}$

$\times s^2 \leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right)$

$$s^2 X = -\frac{k}{m} X - \frac{b}{m} s X + \frac{1}{m} F$$

$\frac{\text{"salida"}}{\text{ent}}$ "salida" → X, ent → F

$$\left(s^2 + \frac{k}{m} + \frac{b}{m} s\right) X = \frac{1}{m} F$$

$$\frac{X}{F} = \frac{1/m}{s^2 + \frac{b}{m} s + \frac{k}{m}}$$

m = 1

b = 1

k = 1

$f_0 = 1.5$

$$\left[\frac{k}{m}\right] = \left(\frac{\overset{\approx 1}{\text{rad}}}{\text{seg}}\right)^2$$

5) Ceros: valores de "s" que anulan al num

polos: valores de "s" que anulan al den

$$s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m} = 0$$

¿cuántos polos hay?

$\underline{\underline{2}}$

"$b = m = k = 1$"

$$s^2 + s + 1 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -0.5 \pm j0.866$$

sist. estable