

# Misura della costante di Boltzmann a partire dal rumore Johnson

Gruppo AA

Luca Ciambriello, Gianfranco Cordella, Leonardo Bertini

11 Maggio 2017

## 1 Scopo e strumentazione

L'esperienza ha l'obiettivo di svolgere una misura empirica della costante di Boltzmann a partire dalla misura del rumore termico di un circuito, costituito da un pre-amplificatore, un filtro passa-banda, un post-amplificatore ed un convertitore RMS disposti in serie.

I diversi componenti del circuito sono stati montati separatamente e per ciascuno di essi è stato verificato il funzionamento, mandando un segnale sinusoidale in ingresso. Oltre a numerose resistenze e condensatori le cui impedenze sono specificate nel seguito, abbiamo impiegato gli integrati INA114, AD708 (2), AD736. Abbiamo inoltre collegato tra loro le linee di massa onde minimizzare differenze di tensione tra le stesse.

Per minimizzare il rumore si è realizzato un circuito di filtraggio, mostrato in figura (1), dove abbiamo impiegato  $R_1 = 995 \pm 8 \Omega$  e  $R_2 = 997 \pm 8 \Omega$ . Le tensioni in uscita sono state utilizzate come tensioni di alimentazione per gli integrati.

## 2 Pre-amplificatore

Abbiamo realizzato il circuito mostrato in figura (2), utilizzando come componenti  $R_1 = 977 \pm 8 \Omega$ ,  $R_2 = 4.62 \pm 0.04 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 68.8 \pm 0.6 \text{ k}\Omega$ . Abbiamo quindi mandato in ingresso un segnale sinusoidale ottenuto dal generatore di funzioni, osservando ingresso ed uscita ai due canali dell'oscilloscopio. Il segnale mostra un offset, che per la misura corrispondente al primo rigo della tabella vale  $V_{in} = 1.2 \pm 0.5 \text{ mV}$ ,  $V_{out} = 0.7 \pm 0.1 \text{ V}$ .

In tabella (1) sono mostrate le misure realizzate variando la frequenza, dove l'errore è dato dalla parte di lettura.

In figura (3) è mostrato il plot di Bode per l'amplificazione. Abbiamo realizzato un fit lineare (al modello  $y=mx+q$ ), numerico, a due parametri limitatamente alla parte di sinistra, dove l'amplificazione risulta circa costante. Abbiamo ottenuto  $m = -0.02 \pm 0.07 \text{ dB/decade}$ , compatibile con 0;  $q = 57.8 \pm 0.1 \text{ dB}$ , pari all'amplificazione per le frequenze passanti; covarianza normalizzata = -0.9;  $\chi^2/dof = 0.03/3$ . Un fit analogo è stato svolto per la parte lineare a destra, ottenendo  $m = -16.8 \pm 1.5 \text{ dB/decade}$ ;  $q = 126 \pm 7 \text{ dB}$ ;  $cov = -1.0$ ,  $\chi^2/dof = 0.2/2$ . I valori bassi del chi quadro indicano una prevalenza della parte sistematica nell'errore (è stato considerato solo quello sulle y).

L'amplificazione attesa è pari a  $A_{att} = 58 \pm 1 \text{ [dB]}$ , ottenuta a partire dal prodotto delle amplificazioni attese dei due sottocircuiti e pienamente compatibile con il valore ottenuto sperimentalmente.

Dall'intersezione delle due rette e propagando opportunamente gli errori considerando anche la covarianza dei due parametri di ciascuna retta è possibile ottenere il valore della frequenza di taglio  $f_T = 11.2 \pm 0.8 \text{ kHz}$ .

$f$ [Hz]	$df$ [Hz]	$V_{in}$ [mV]	$dV_{in}$ [mV]	$V_{out}$ [V]	$dV_{out}$ [V]	A [dB]	dA [dB]
7.1	0.3	9.4	0.5	7.28	0.08	57.8	0.1
20.3	0.5	8.9	0.5	6.84	0.04	57.7	0.1
54	2	8.0	0.6	6.04	0.04	57.6	0.2
258	3	7.8	0.6	6.12	0.04	57.9	0.2
1.70 k	0.07 k	9.4	0.7	7.16	0.08	57.7	0.2
3.2 k	0.1 k	9.4	0.7	7.16	0.08	57.6	0.2
9.5 k	0.2 k	9.4	0.7	6.6	0.1	57.0	0.2
13.2 k	0.3 k	7.7	0.6	5.00	0.15	56.3	0.2
21 k	1 k	7.8	0.6	3.68	0.14	53.5	0.3
27 k	1 k	7.7	0.7	2.9	0.1	51.5	0.3
31 k	2 k	9.5	0.6	2.7	0.1	48.7	0.3
36 k	2 k	8.0	0.7	2.16	0.08	49.1	0.1

Tabella 1: Tensioni picco-picco in uscita e in ingresso misurate all'oscilloscopio, con l'amplificazione corrispondente A, espressa in Decibel, e la frequenza corrispondente ricavata a partire dalla misura del periodo del segnale.

### 3 Passa-banda e post-amplificatore

Abbiamo realizzato il circuito mostrato in figura (4), utilizzando i componenti, misurati con il tester digitale,  $R_1 = 2.66 \pm 0.02$  k $\Omega$ ,  $R_2 = 119 \pm 3$   $\Omega$ ,  $R_3 = 68.8 \pm 0.6$  k $\Omega$ ,  $C_1 = 9.9 \pm 0.4$  nF,  $C_2 = 10.4 \pm 0.4$  nF. Abbiamo inoltre realizzato il circuito mostrato in figura (5), dove abbiamo impiegato  $R_1 = 973 \pm 8$   $\Omega$ ,  $R_2 = 33.1 \pm 0.3$  k $\Omega$ ,  $R_3 = 3.85 \pm 0.03$  k $\Omega$ . L'uscita del primo circuito è stata poi mandata all'ingresso del secondo, ed abbiamo misurato così la risposta in frequenza del circuito complessivo, rilevando per diversi valori di frequenza tensione in ingresso e tensione in uscita.

In tabella (2) sono mostrati i dati misurati all'oscilloscopio, con errori dati dalla parte di lettura. T è il periodo. In figura (6) è mostrato il grafico dell'amplificazione in funzione della frequenza (plot di

T [ms]	dT[ms]	$V_{in}$ [mV]	$dV_{in}$ [mV]	$V_{out}$ [mV]	$dV_{out}$ [mV]
0.065	0.001	7.4	0.7	78	1
0.099	0.001	7.5	0.5	188	2
0.080	0.001	7.7	0.8	121	1
0.182	0.001	8.0	0.5	588	2
0.148	0.001	7.7	0.8	1040	5
0.118	0.001	7.5	0.6	344	2
0.158	0.001	7.5	0.8	1280	5
0.152	0.001	7.4	0.7	1270	5
0.200	0.001	7.5	0.7	266	2
0.300	0.002	7.2	0.7	142	2
0.392	0.002	7.5	0.6	101	2
0.528	0.002	7.4	0.7	66	1
0.150	0.001	14.6	1.1	2220	15
0.176	0.001	14.8	0.8	1350	10
0.492	0.002	14.8	1.2	144	2
0.246	0.001	14.8	1.2	412.0	0.2
0.192	0.001	15.0	1.2	880	4
1.80	0.01	27	1	66	1
20.6	0.1	190	1	42	2

Tabella 2: Misure effettuate tra l'ingresso del passabanda e l'uscita del post-amplificatore.

Bode). Abbiamo realizzato un fit con la funzione di trasferimento 1, ottenendo:

- $f_0 = \frac{\omega_i}{2\pi} = 6.392 \pm 0.053$  [kHz]
- $A = 1.04 \pm 0.04$  [MHz]
- $\Delta\omega = -2\omega_r = 6.1 \pm 0.6$  [kHz]

$$|g(\omega)| = \frac{A\omega}{\sqrt{(\omega - \omega_i)^2 + \omega_r^2} \sqrt{(\omega + \omega_i)^2 + \omega_r^2}} \quad (1)$$

L'amplificazione attesa a centro banda è pari a  $A_{att} = \frac{R_{3pb}}{2R_{1pb}}(1 + \frac{R_{2pa}}{R_{1pa}}) = 308 \pm 5 = 49.8 \pm 0.1$  [dB]. I pedici pb e pa si riferiscono rispettivamente al passa-banda ed al post-amplificatore. Tale valore è incompatibile con quello ottenuto dal fit pari a  $169 \pm 21$ .

## 4 Convertitore RMS

In figura (7) è mostrato il terzo componente del circuito, che include condensatori di capacità  $C_1 = 107 \pm 4$  nF,  $C_2 = 9.2 \pm 0.4$   $\mu$ F,  $C_3 = 490 \pm 20$  nF. Abbiamo misurato ancora una volta l'ingresso e l'uscita, quest'ultima non più oscillante ma continua, per una frequenza fissata pari a  $f = 1.85 \pm 0.03$  kHz, ottenendo  $V_{in} = 2.10 \pm 0.07$  V (ampiezza picco-picco) e  $V_{out} = 740 \pm 20$  mV, compatibile con il valore atteso di  $V_{out,att} = \frac{V_{in}}{2\sqrt{2}} = 742 \pm 14$  mV. Aumentando la frequenza  $V_{out}$  tende ad aumentare, rimanendo tuttavia entro l'incertezza, fino a circa 36 kHz, dopodichè cala. A frequenze basse, parimenti,  $V_{out}$  cala. C'è quindi un range di frequenze per cui il convertitore funziona in modo ottimale.

Negli errori per le misure di tensione abbiamo considerato anche la parte di calibrazione, diversamente da quanto abbiamo fatto per i fit, dove l'errore, essendo di natura stocastica, non include la parte sistematica dovuta alla calibrazione.

## 5 Circuito completo

Abbiamo collegato in serie i circuiti precedentemente realizzati, nell'ordine pre-amplificatore, passa-banda, post-amplificatore, convertitore RMS, mandando ogni volta l'uscita del precedente all'ingresso del successivo. Il valore di  $V_{rms}$  è stato poi misurato con il multimetro digitale, mentre l'ingresso del pre-amplificatore è stato collegato a terra tramite una resistenza di valore variabile. Abbiamo così misurato  $V_{rms}$  in funzione della resistenza; i valori ottenuti sono mostrati in tabella (3). L'errore sulle misure di tensione è dovuto alla fluttuazione delle misure e non all'errore sistematico del multimetro, molto minore.

In figura (10) è mostrato un grafico del potenziale in funzione della resistenza. Su di esso è stato

R [k $\Omega$ ]	dR [k $\Omega$ ]	$V_{out}$ [mV]	d $V_{out}$ [mV]
217	2	352	10
147	1	270	10
102.0	0.8	230	10
56.0	0.5	173	5
32.8	0.3	137	7
22.0	0.2	117	6
15.2	0.1	102	5
9.78	0.08	90	4
2.70	0.02	68	5
1.75	0.01	66	3
0.328	0.003	60	5
0.118	0.001	60	5

Tabella 3:  $V_{rms}$  in uscita in funzione della resistenza in ingresso.

eseguito un fit numerico con la funzione attesa espressa in 2, mantenendo come parametri  $V_{0n}$ ,  $R_T$ ,  $R_n$ . Come errori sono stati considerati gli errori sulle  $y$ . I risultati ottenuti dal fit sono:

- $V_{0n} = 59.6 \pm 0.9$  mV.
- $R_T = 8.0 \pm 0.4$  k $\Omega$
- $R_n = 8000 \pm 1400$  k $\Omega^2$ .
- $cov1 = 0.88$ ,  $cov2 = -0.22$ ,  $cov3 = 0.58$  (sono rispettivamente le covarianze normalizzate tra  $V_{0n}$  e  $R_T$ ,  $V_{0n}$  e  $R_n$ ,  $R_T$  e  $R_n$ ).
- $\chi^2/dof = 1.3/9$ .

$$V_{rms} = V_{0n} \sqrt{1 + \frac{R}{R_T} + \frac{R^2}{R_n}} \quad (2)$$

Nota, dal prodotto delle amplificazioni tra pre-amplificatore e l'insieme di passa-banda e post-amplificatore, l'amplificazione totale  $A_{tot} = 131000 \pm 16000$ , nota la larghezza di banda  $\Delta f$  precedentemente misurata e nota la temperatura  $T = 302 \pm 3$  K misurata con il tester, a partire da 3 è possibile determinare la costante di Boltzmann  $k_B = (1.4 \pm 0.4)10^{-23}$  [J/K], in accordo con il valore atteso  $k_{B,att} = (1.3806488 \pm 0.0000013)10^{-23}$  [J/K].

$$k_B = \frac{V_{0n}^2}{4TA_{tot}^2\Delta fR_T} \quad (3)$$

### 5.1 Risposta in frequenza del circuito complessivo

Sostituita la resistenza in ingresso, al fine di ridurre l'ampiezza del segnale in ingresso, ovvero di evitare saturazione in uscita, con un partitore di tensione avente una resistenza a massa  $R_2 = 994 \pm 8$   $\Omega$  e una all'ingresso  $R_1 = 987 \pm 8$  k $\Omega$ , abbiamo misurato la risposta in frequenza del circuito completo. In tabella (4) sono mostrati i potenziali in uscita in funzione della frequenza, misurati all'oscilloscopio, ad un'ampiezza di ingresso tenuta costante e pari a  $V_{in} = 19 \pm 5$  mV.

In figura (8) è mostrato il plot di Bode. Un fit, eseguito con la funzione di trasferimento mostrata in

$f$ [kHz]	$df$ [kHz]	$V_{out}$ [V]	$dV_{out}$ [V]
4.5	0.1	0.392	0.008
5.2	0.1	0.584	0.008
5.5	0.1	0.80	0.02
5.6	0.1	0.94	0.04
5.9	0.1	1.20	0.02
6.0	0.1	1.38	0.02
6.1	0.2	1.56	0.02
6.2	0.2	1.60	0.02
6.3	0.2	1.70	0.02
6.7	0.2	1.64	0.04
6.8	0.2	1.30	0.02
7.0	0.2	1.12	0.02
7.1	0.7	0.88	0.02
7.7	0.2	0.624	0.008
8.1	0.3	0.472	0.008
9.0	0.3	0.328	0.004
10.4	0.4	0.220	0.004

Tabella 4:  $V_{rms}$  in uscita in funzione della frequenza in ingresso.

1, a 3 parametri  $\omega_i$ ,  $\omega_r^2$ , A dà come risultati:

- $f_0 = \frac{\omega_i}{2\pi} = 6.33 \pm 0.02$  [kHz], in accordo con il valore ottenuto dalla risposta in frequenza del passa-banda  $f_0 = 6.392 \pm 0.053$  [kHz].
- $A = 528 \pm 12$  [MHz]
- $\Delta\omega = -2\omega_r = 5.7 \pm 0.3$  [kHz], in accordo con  $\Delta\omega = 6.1 \pm 0.6$  [kHz] ottenuto per l'insieme passa-banda e post-amplificatore.
- $cov1 = -0.30$ ,  $cov2 = 0.76$ ,  $cov3 = -0.12$  (covarianze rispettivamente tra  $\omega_r^2$  e  $\omega_i$ ,  $\omega_r^2$  e  $A$ ,  $A$  e  $\omega_i$ ).
- $\chi^2/dof = 10.7/14$ .

L'amplificazione in corrispondenza della frequenza di taglio è  $A_0 = 131097 \pm 8909$ , in pieno accordo con il valore dato dal prodotto di amplificazione del pre-amplificatore e del post-amplificatore  $A_0 = 131000 \pm 16000$  e non in accordo con il valore atteso  $A_0 = 245000 \pm 6000$ .

## 5.2 Risposta in ampiezza del circuito complessivo

Abbiamo inoltre ricercato l'andamento di  $V_{out}(V_{in})$  eseguendo le misure mostrate in tabella (5). Un grafico è mostrato in figura (9). Un fit lineare ( $V_{out} = mV_{in} + q$ ) presenta come risultati un'amplificazione  $m = 10680 \pm 140$ , non in accordo con il valore atteso (noto a partire dalla funzione di fit, posta alla frequenza di lavoro  $f_L = 3.23 \pm 0.08$  kHz)  $m_{att} = 9000 \pm 600$ ; un'intercetta  $q = 10 \pm 9$  mV,  $cov = -0.67$ ;  $\chi^2/dof = 0.2/3$ .

$V_{in}$ [mV]	$dV_{in}$ [mV]	$V_{out}$ [mV]	$dV_{out}$ [mV]
11.8	4	132	12
21.6	5	236	16
40.8	6	464	20
82	8	920	40
164	6	1760	40

Tabella 5: Tensioni di uscita per vari valori della tensione di ingresso

## 6 Conclusioni

La presenza di numerose fonti di rumore non considerate non inficia in modo evidente la qualità dell'esperienza, come si può vedere dall'accordo tra la costante di Boltzmann qui misurata e quella attesa. La misura risulta essere in accordo anche con il valore ricavato dall'equazione (3) sostituendo ad  $A_{tot}$  l'amplificazione misurata con il circuito complessivo, infatti si ottiene ancora una volta  $k_B = (1.4 \pm 0.4) 10^{-23}$  [J/K]. Considerando l'amplificazione attesa  $A_0 = 245000 \pm 6000$  si ha però  $k_B = 0.67 \pm 0.05 \cdot 10^{-23}$  J/K, molto inferiore al valore atteso.

## 7 Grafici ed immagini

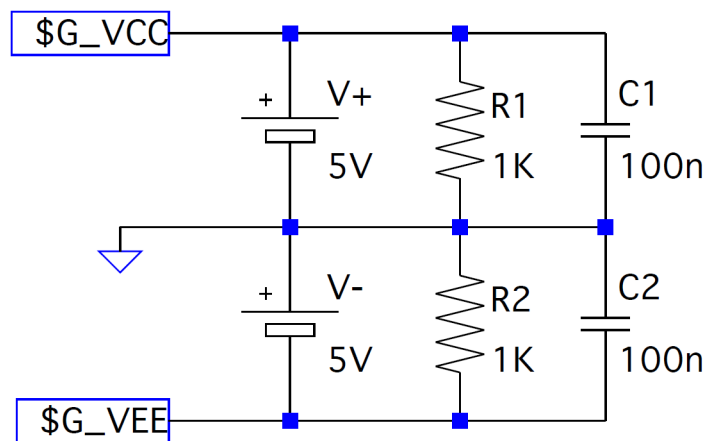


Figura 1: Schema del circuito di filtraggio posto all'uscita dell'alimentazione tra 5V e -5V per eliminare eventuali rumori della rete elettrica.

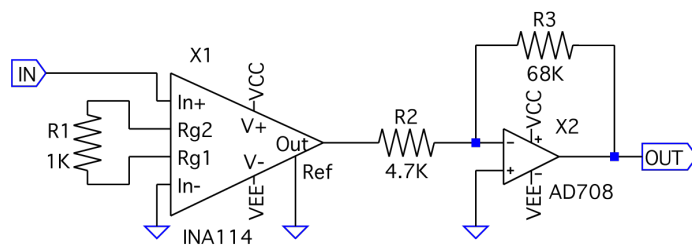


Figura 2: Schema del circuito del pre-amplificatore.

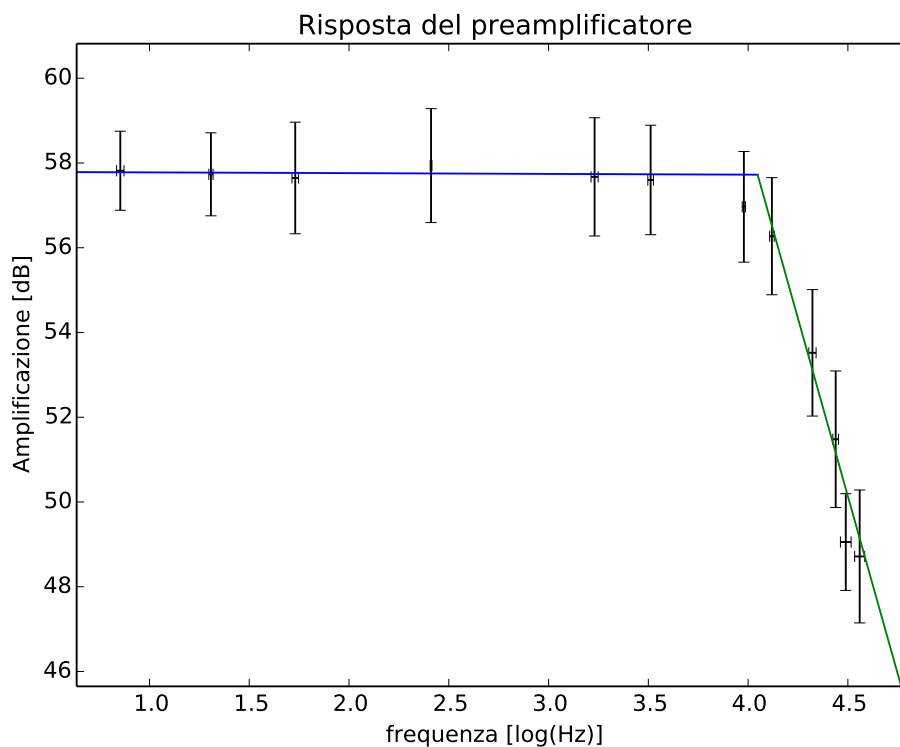


Figura 3: Plot di Bode per il pre-amplificatore. Sono plottate le rette di fit per le due parti lineari del grafico. Nei fit sono considerate rispettivamente, a partire da sinistra, le prime cinque e le ultime quattro misure.

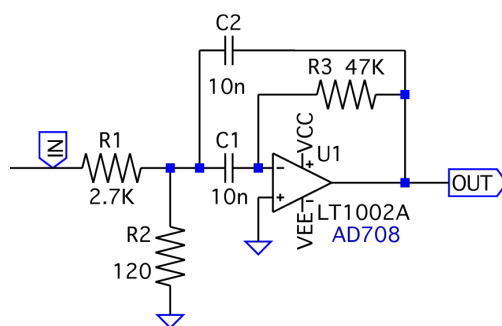


Figura 4: Schema del circuito del filtro passa-banda.

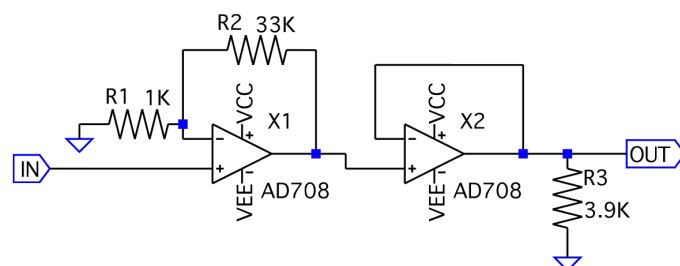


Figura 5: Schema del circuito per il post-amplificatore.

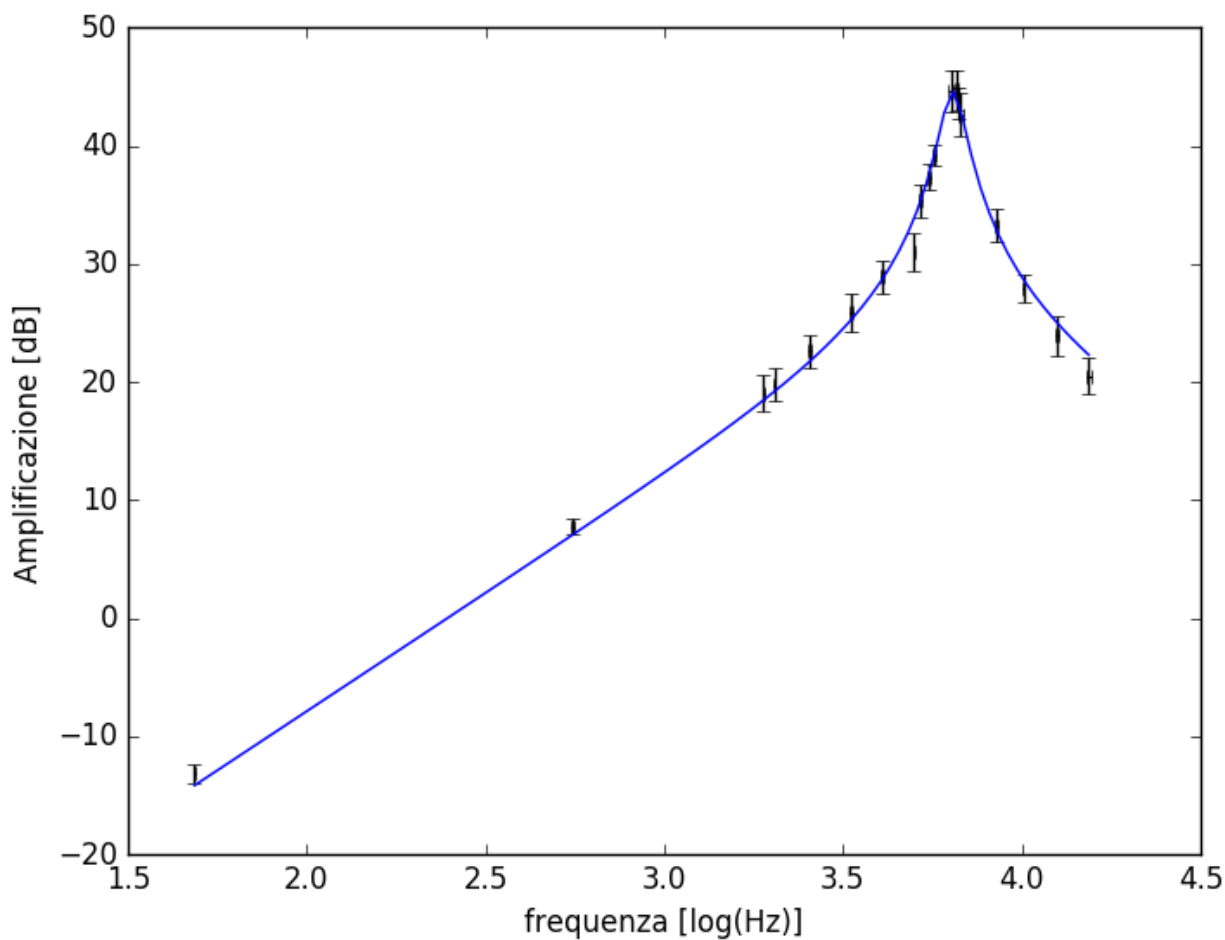


Figura 6: Fit del modulo della funzione di trasferimento del circuito passa-banda più post-amplificatore.

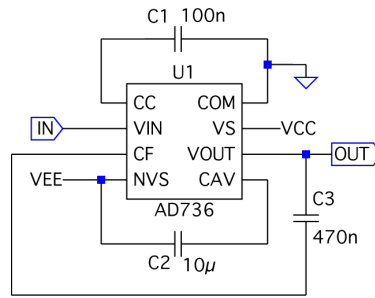


Figura 7: Schema del circuito per il convertitore RMS.

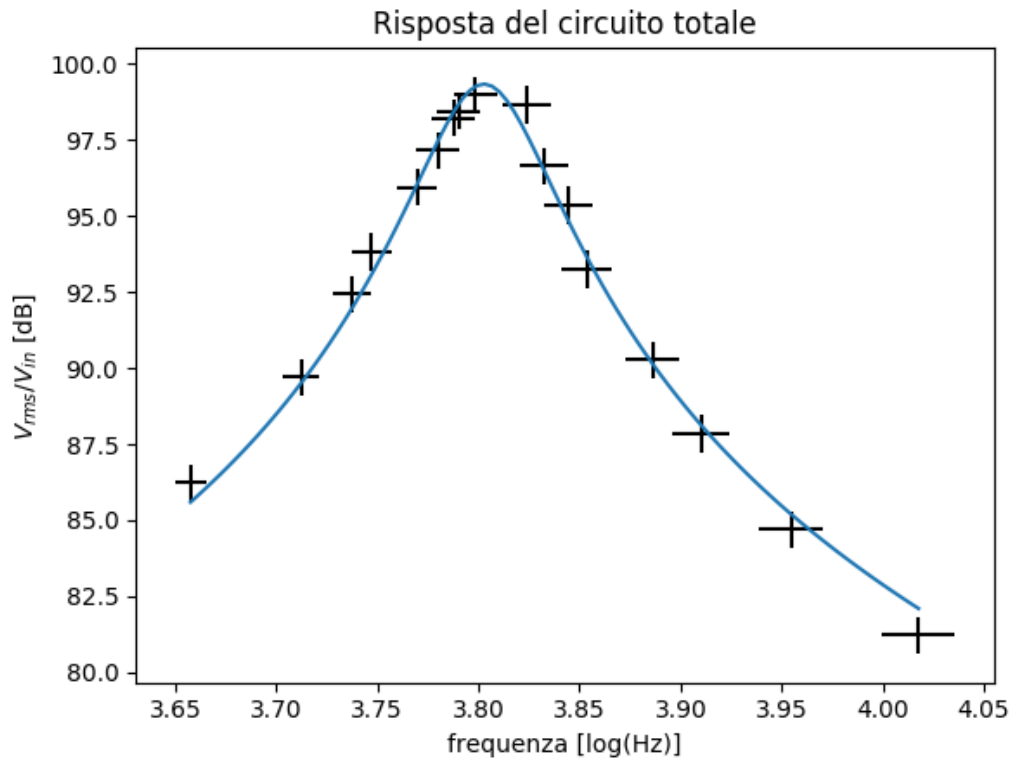


Figura 8: Risposta in frequenza del circuito completo, con  $V_{in}=18 \pm 5$  mV. In ordinate è riportato il rapporto tra il potenziale rms continuo in uscita e l'ampiezza della sinusoide in ingresso



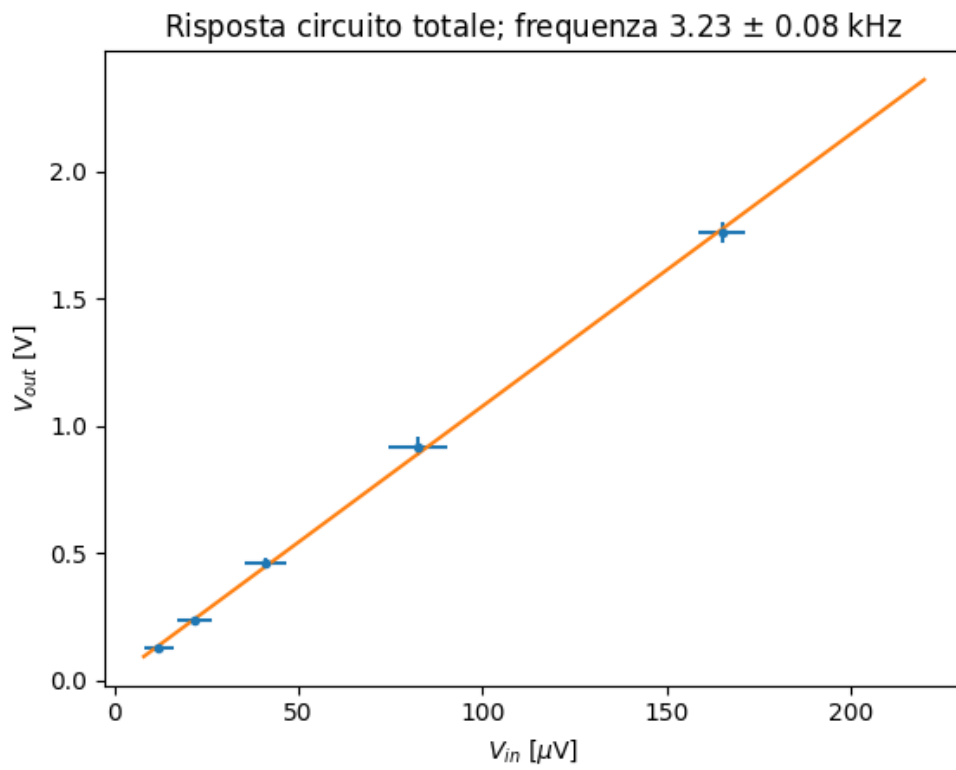


Figura 9: Potenziale rms in uscita in funzione dell'ampiezza della sinusoide in ingresso al circuito totale

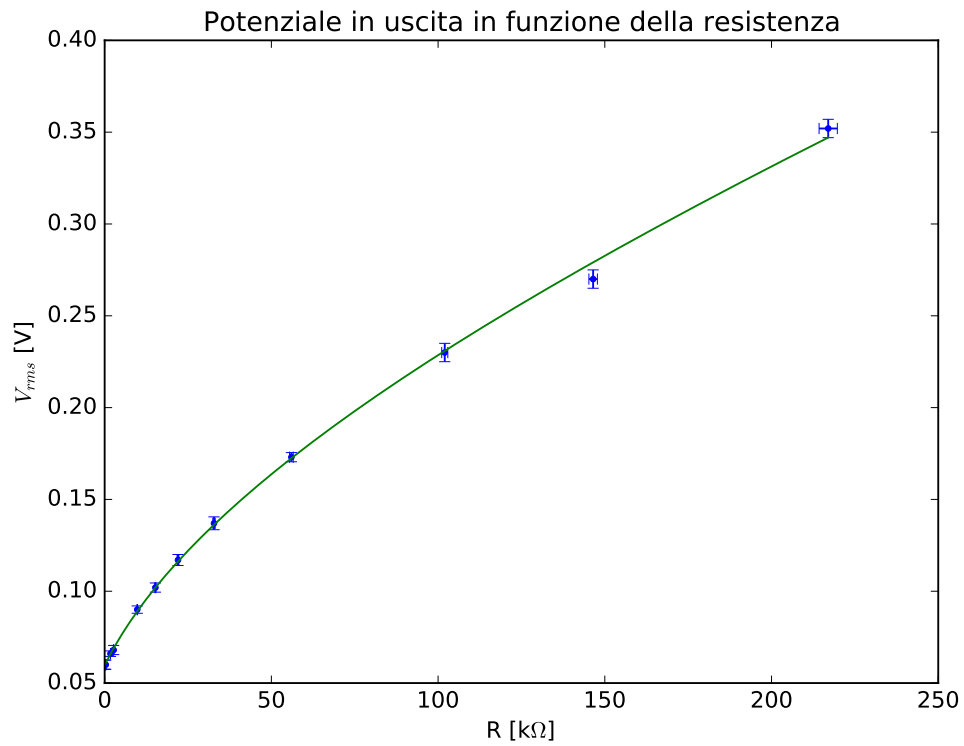


Figura 10: Fit di  $V_{RMS}$  in funzione della resistenza in ingresso al circuito completo.