Phân tích giá trị kì dị của ma trận

Mọi đóng góp xin gửi về email: tam.doduc@hust.edu.vn

Mục lục

1. Phân tích SVD rút gọn của ma trận

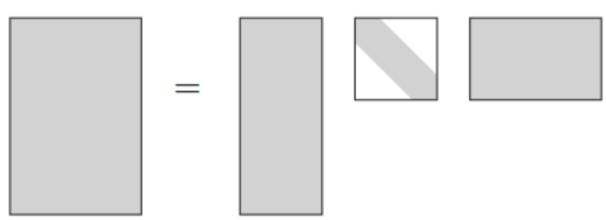
Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Giả sử có thể phân tích

$$A = U\Sigma V^T \qquad (1)$$

trong đó

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1r} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & u_{m3} & \cdots & u_{mr} \end{pmatrix}, \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & \cdots & v_{1r} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & \cdots & v_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & v_{n3} & \cdots & v_{nr} \end{pmatrix}$$

U và V là các ma trận có các cột tạo thành các hệ vector trực chuẩn và $\sigma_i \neq 0,\ i = 1,2,3,\cdots,r$ .Khi đó, ta gọi (1) là ***phân tích giá trị kì dị*** của ma trận A.



$A \qquad U \qquad \Sigma \qquad V^{\mathsf{T}}$

Nhắc lại: Hệ vector $v_1, v_2, \cdots, v_r$ gọi là trực chuẩn nếu $\|v_i\| = 1,\ \forall i = 1,2,3,\cdots,r$ và $\langle v_i, v_j\rangle = 0,\ \forall i \neq j$. Suy ra

$$V^T V = E_r.$$

Hiển nhiên, một hệ vector trực chuẩn là một hệ vector độc lập tuyến tính. Thật vậy, xét $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_rv_r = 0$. Khi đó $x_i = \langle v, v_i\rangle = \langle 0, v_i\rangle = 0,\ \forall i = 1,2,3\cdots,r$. Theo định nghĩa hệ $v_1, v_2, \cdots, v_r$ là hệ độc lập tuyến tính.

Khi đó phân tích (1) viết lại thành

$$AV = U\Sigma \qquad (2).$$

Ta gọi σ_i, v_i và u_i, với $i = 1, 2, 3, \cdots, r$ lần lượt là ***giá trị kì dị***, ***vector kì dị phải*** và ***vector kì dị trái*** của A. Dễ thấy từ phân tích (2) suy ra

$$Av_i = \sigma_i u_i, \forall i = 1, 2, 3, \cdots, r.$$

Tính chất:

a) Các vector kì dị trái $u_i, i = 1, 2, 3, \cdots, r$ tạo thành cơ sở trực chuẩn của không gian vector $\mathfrak{I}(A)$.

Chứng minh. Lấy $y \in \mathfrak{I}(A) \Rightarrow y = Ax = U\Sigma V^T x = \sum_{i=1}^{r} \Sigma V^T x(i) u_i$. Do đó u_i, $i = 1, 2, 3, \cdots, r$ là hệ sinh của $\mathfrak{I}(A)$. Lại có $u_i, i = 1, 2, 3, \cdots, r$ gồm r vector độc lập tuyến tính nên nó tạo thành một cơ sở của $\mathfrak{I}(A)$. (Một hệ sinh độc lập tuyến tính thì tạo thành một cơ sở của kgvt). Tính chất trực chuẩn suy ra từ định nghĩa của các vector kì dị trái.

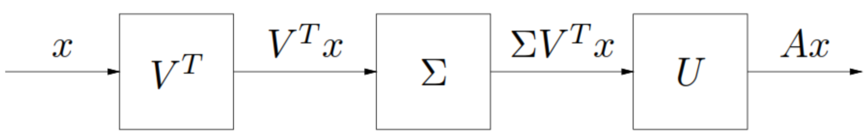
b) Các vector kì dị phải $v_i, i = 1, 2, 3, \cdots, r$ tạo thành cơ sở trực chuẩn của không gian vector $\mathfrak{I}(A^T)$.

Chứng minh. Lấy $y \in \mathfrak{I}(A^T) \Rightarrow y = A^T x = V\Sigma U^T x = \sum_{i=1}^{r} \Sigma U^T x(i) v_i$. Lại có $v_i, i = 1, 2, 3, \cdots, r$ gồm r vector độc lập tuyến tính nên nó tạo thành một cơ sở của $\mathfrak{I}(A^T)$. Tính chất trực chuẩn suy ra từ định nghĩa của các vector kì dị phải.

c) Ma trận A có hạng bằng r.

Chứng minh. Ta có $rank(A) = dim(\mathfrak{I}(A))$, mà theo mục a) thì $dim(\mathfrak{I}(A)) = r$ nên $rank(A) = r$.

d) Ma trận A tương ứng với ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ biến vector input x thành vector output y.



Ta chia việc tìm output y thành các bước như sau:

Bước 1. Tìm tọa độ hình chiếu của x (trong cở sở v_i, $i = 1, 2, 3, \cdots, r$) xuống $span\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$.

Bước 2. Điều chỉnh các tọa độ vừa tìm được theo tỉ lệ tương ứng $\Sigma V^T x(i) = \sigma_i V^T x(i)$.

Bước 3. Tính vector output y dựa vào vector u_i, $i = 1, 2, 3, \cdots, r$ theo công thức $y = \sum_{i=1}^{r} \Sigma V^T x(i) u_i$.

Ví dụ 1. Phân tích svd của ma trận A

```
A = [1 2; 3 1;4 2]
```

```
A = 3×2
      1      2
```

```
     3     1
     4     2
```

```
%[U,Sigma,V] = svd(A)
```

Ma trận U là

```
U = [-0.319 0.915 ;-0.542  -0.391;
-0.778  -0.103];
disp(U)
```

```
   -0.3190    0.9150
   -0.5420   -0.3910
   -0.7780   -0.1030
```

Ma trận $U^T U$ là

```
disp(U'*U)
```

```
    1.0008    0.0002
    0.0002    1.0007
```

Ma trận Σ là

```


Sigma = [5.747  0 ;0  1.403];
disp(Sigma)
```

```
    5.7470         0
         0    1.4030
```

Ma trận V là

```
V = [-0.880  -0.476;
-0.476  0.880];
disp(V)
```

```
   -0.8800   -0.4760
   -0.4760    0.8800
```

Ma trận $V^T V$ là

```
disp(V'*V)
```

```
    1.0010         0
         0    1.0010
```

Ma trận $U \Sigma V^T$ là

```
disp(U*Sigma*V')
```

```
    1.0022    2.0023
    3.0022    0.9999
    4.0034    2.0011
```

2. Sự tồn tại của phân tích SVD

Kiến thức từ đại số tuyến tính: Cho B là ma trận vuông thực cấp n. Khi đó, B chéo hóa trực giao (tồn tại ma trận trực giao D sao cho $D^T BD$ là ma trận đường chéo Λ) được khi và chỉ khi B là ma trận đối xứng.

Chuẩn 2 của ma trận A định nghĩa bởi $\|A\| = \max \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Sự tồn tại của phân tích SVD: Mọi ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ đều có phân tích giá trị kỳ dị.

Chứng minh. Giả sử $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ và nhớ lại rằng $A^T A$ là đối xứng và nửa xác định dương. Do đó, ta có phân tích

$$A^T A = Q\Lambda Q^T$$

Sắp xếp các giá trị riêng theo thứ tự không tăng $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$. Giả sử rằng các giá trị riêng $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ khác không trong khi $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. Cho là các vectơ riêng tương ứng. Gọi $Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times r}$ là ma trận có các cột là $q_1, q_2, \ldots, q_r$ và $\Lambda_1 \in \mathbb{R}^{r\times r}$ là ma trận đường chéo với $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ trên đường chéo của nó. Tương tự, gọi $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ là ma trận có các cột là $q_{r+1}, \ldots, q_m$ và $\Lambda_2 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$.

Đối với ma trận đường chéo D có các phần tử trên đường chéo không âm, kí hiệu $D^{1/2}$ là ma trận đường chéo thu được bằng cách lấy căn bậc hai của mỗi phần tử đường chéo của D. Tương tự, D có các phần tử trên đường chéo dương, kí hiệu $D^{-1/2}$ là ma trận đường chéo thu được bằng cách lấy nghịch đảo căn bậc hai của mỗi phần tử đường chéo của D. Khi đó, dễ dàng kiểm tra

$$V = Q_1,\ U = AQ_1\Lambda_1^{-1/2},\ \Sigma = \Lambda_1^{1/2}$$

và $A = U\Sigma V^T$ là phân tích SVD của A.

Từ chứng minh trên ta rút ra:

Xét phân tích ma trận

$$A^T A = (U\Sigma V^T)^T (U\Sigma V^T) = V\Sigma^2 V^T.$$

Khi đó

- v_i là các vector riêng của ma trận $A^T A$ (ứng với giá trị riêng $\lambda_i \neq 0$)
- $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$
- $\|A\| = \sigma_1$ (do $\max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} = \max\limits_{x\neq 0} \frac{x^T A^T Ax}{\|x\|^2} = \lambda_{\max}(A^T A)$).

Tương tự, xét phân tích

$$AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = U\Sigma^2 U^T.$$

Do đó

- u_i là các vector riêng của ma trận AA^T (ứng với giá trị riêng $\lambda_i \neq 0$)
- $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(AA^T)}$.

Nhận xét: Ta có thể sử dụng phương pháp lũy thừa và xuống thang để tìm phân tích SVD của ma trận A

Ví dụ 2. Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

```
A=[1 2; 3 4; 5 6]
```

```
A = 3×2
     1     2
     3     4
     5     6
```

```
A'*A
```

```
ans = 2×2
    35    44
    44    56
```

```
[X,Y] = eig(A'*A)
```

```
X = 2×2
   -0.7849    0.6196
    0.6196    0.7849
Y = 2×2
    0.2645         0
         0   90.7355
```

$$A^TA = \begin{pmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.620 & 0.785 \\ 0.785 & -0.620 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 90.7 & 0 \\ 0 & 0.265 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.620 & 0.785 \\ 0.785 & -0.620 \end{pmatrix}^T$$

Do đó:

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)} = 9.53\,, \sigma_1 = \sqrt{90.7355} = 9.53, \sigma_2 = \sqrt{0.2645} = 0.5143,$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.620 & 0.785 \\ 0.785 & -0.620 \end{pmatrix}.$$

3. Phân tích SVD đầy đủ của ma trận

Giả sử ta có phân tích SVD của $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ với $rank(A) = r$:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{bmatrix}$$

Tìm $U_1 \in \mathbb{R}^{m\times(m-r)}, V_1 \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ sao cho $U_2 = [UU_1] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ và $V_2 = [VV_1] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là các ma trận trực chuẩn.

Thêm các dòng và cột 0 và ma trậnΣ để tạo thành ma trận $\Sigma_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\Sigma_2 = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right]$$

Khi đó ta nhận được

$$A = U_2\Sigma_2V_2^T = [U \mid U_1] \left[\begin{array}{c|c} \Sigma & 0_{r\times(n-r)} \\ \hline 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} V^T \\ \hline V_2^T \end{array}\right]$$

hay

$A = U_2\Sigma_2V_2^T$

gọi là ***phân tích SVD đầy đủ*** của A.

Ví dụ 3.

```
disp(A)
```

```
     1     2
     3     4
     5     6
```

```
[U_2,Sigma_2,V_2]=svd(A)
```

```
U_2 = 3×3
   -0.2298    0.8835    0.4082
   -0.5247    0.2408   -0.8165
   -0.8196   -0.4019    0.4082
Sigma_2 = 3×2
    9.5255         0
         0    0.5143
         0         0
V_2 = 2×2
   -0.6196   -0.7849
   -0.7849    0.6196
```

Code MATLAB tìm phân tích SVD rút gọn và phân tích SVD đầy đủ sử dụng phương pháp lũy thừa và xuống thang. Các vector kì dị ứng với $\sigma = 0$ tìm bằng quy trình Gauss-Jordan và trực chuẩn hóa Gram Smith

```
clc
clear all
format short
tol = 1e-3; %tham số điều chỉnh
maxInteration=100;%số lần lặp tối đa
A =     [6     7     5     4    -8     9
```

```
    10      9     -2    -10      7    -10
     3      4      3     -5      4     -1
    -4     -2      7     14    -15     19 ]'
```

```
A = 6×4
     6    10     3    -4
     7     9     4    -2
     5    -2     3     7
     4   -10    -5    14
    -8     7     4   -15
     9   -10    -1    19
```

```
M = A'*A; M_1 = A*A';
V_2 = eig_vector_zero(M,tol);
```

```
B = 4×4
    1.0000         0         0    1.0000
         0    1.0000         0   -1.0000
         0         0    1.0000         0
         0         0         0         0
jb = 1×3
     1     2     3
```

```
U_2 = eig_vector_zero(M_1,tol);
```

```
B = 6×6    Rows 1:6 | Columns 2:6
         0         0   19.3478  -22.7391   16.6957
    1.0000         0  -21.0435   24.2174  -18.0870
         0    1.0000    7.0435   -8.2174    7.0870
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0
jb = 1×3
     1     2     3
```

```
[~,jb] = GJ(M,tol);
r = length(jb);

lambda=[];
V=[];
U=[];
for i=1:r
    [lambda_1,v_1] = powerMethod(M,tol,maxInteration);
    u_1 = 1/sqrt(lambda_1)*A*v_1;
    [~,w_1] = powerMethod(M',tol,maxInteration);
    lambda=[lambda,lambda_1];
    V =[V,v_1];
    U=[U,u_1];
    M = M-lambda_1*v_1*w_1'/(w_1'*v_1);
    fprintf('Giá trị riêng thứ %d là %8.7f\n',i,lambda_1)
    fprintf('Vector riêng v_i thứ %d là\n',i)
    disp(v_1)
    fprintf('Vector riêng w_i thứ %d là\n ',i)
    disp(w_1)
    disp('ma trận sau khi xuống thang')
```

```
    disp(M)
end
```

```
Giá trị riêng thứ 1 là 1326.3687645
Vector riêng v_i thứ 1 là
    0.2951
   -0.5027
   -0.1538
    0.7978
Vector riêng w_i thứ 1 là

    0.2951
   -0.5027
   -0.1538
    0.7978
ma trận sau khi xuống thang
  155.4703  123.7815   60.2212   31.6888
  123.7815   98.8223   45.4254   24.9592
   60.2212   45.4254   44.6090   14.7958
   31.6888   24.9592   14.7958    6.7296
Giá trị riêng thứ 2 là 285.0442735
Vector riêng v_i thứ 2 là
    0.7367
    0.5843
    0.3044
    0.1525
Vector riêng w_i thứ 2 là

    0.7367
    0.5843
    0.3044
    0.1525
ma trận sau khi xuống thang
    0.7627    1.0892   -3.6982   -0.3266
    1.0892    1.5201   -5.2665   -0.4309
   -3.6982   -5.2665   18.1999    1.5683
   -0.3266   -0.4309    1.5683    0.1043
Giá trị riêng thứ 3 là 20.6114945
Vector riêng v_i thứ 3 là
   -0.1913
   -0.2719
    0.9397
    0.0806
Vector riêng w_i thứ 3 là

   -0.1913
   -0.2719
    0.9397
    0.0806
ma trận sau khi xuống thang
    0.0082    0.0169    0.0072   -0.0086
    0.0169   -0.0042    0.0004    0.0210
    0.0072    0.0004    0.0011    0.0068
   -0.0086    0.0210    0.0068   -0.0297
```

```
disp('Khai triển SVD rút gọn:')
```

```
Khai triển SVD rút gọn:
```

```
sigma = diag(sqrt(lambda));
disp('Sigma=')
```

```
Sigma=
```

```
disp(sigma)
```

```
   36.4193         0         0
         0   16.8833         0
         0         0    4.5400
```

```
disp('U=')
```

```
U=
```

```
disp(U)
```

```
   -0.1897    0.6258   -0.3020
   -0.1282    0.6710   -0.0417
    0.2088    0.2663    0.6543
    0.4983   -0.1352   -0.3558
   -0.5069   -0.1702    0.4793
    0.6314    0.2002    0.3502
```

```
disp('V=')
```

```
V=
```

```
disp(V)
```

```
    0.2951    0.7367   -0.1913
   -0.5027    0.5843   -0.2719
   -0.1538    0.3044    0.9397
    0.7978    0.1525    0.0806
```

```
disp('Khai triển SVD đầy đủ')
```

```
Khai triển SVD đầy đủ
```

```
Sigma = zeros(size(A));
for i = 1:r
    Sigma(i,i) = sqrt(lambda(i));
end
disp('Sigma=')
```

```
Sigma=
```

```
disp(Sigma)
```

```
   36.4193         0         0         0
         0   16.8833         0         0
         0         0    4.5400         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0         0         0
```

```
disp('U=')
```

```
U=
```

```
U_full = [U,U_2];
disp(U_full)
```

```
   -0.1897    0.6258   -0.3020   -0.6568    0.1763    0.1481
   -0.1282    0.6710   -0.0417    0.7144    0.1356   -0.0631
    0.2088    0.2663    0.6543   -0.2391    0.0256   -0.6301
    0.4983   -0.1352   -0.3558    0.0339    0.7384   -0.2456
   -0.5069   -0.1702    0.4793         0    0.6361    0.2828
    0.6314    0.2002    0.3502         0         0    0.6609
```

```
disp('V=')
```

```
V=
```

```
V_full=[V,V_2];
disp(V_full)
```

```
    0.2951    0.7367   -0.1913   -0.5774
   -0.5027    0.5843   -0.2719    0.5774
   -0.1538    0.3044    0.9397         0
    0.7978    0.1525    0.0806    0.5774
```

```


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
function [v] = eigvalues(A,tol)
% sử dụng phương pháp lũy thừa và xuống thang để tìm các
% giá trị riêng của A
if nargin ==1
    tol = 1e-5;
end
        v = zeros(0,1);
        theta = eye(size(A,1));
        while length(v) < size(A,1)
            [vtr,vectr] = powerMethod(A,tol);
            if size(vectr, 2)==1
                A = XuongThang(A, vectr);
            else
                [A,theta] = XuongThang(A, vectr(:,1));
                [A,~] = XuongThang(A, theta*vectr(:,2));
              end
            v=[v;vtr(:)];
        end
end
function [lambda, v] = powerMethod(A,tol,M)
if nargin ==1
    tol =1e-10;
    M=200;
end
if nargin ==2
    M=200;
end

%tol là giá tr? ?i?u ch?nh
```

```
%M s? l?n l?p nhi?u nh?t cho phép
%example1
%T =[10     9    10;    10     2     8;     5     5    10];
%A= T*diag([11,-11, 2])*inv(T);
%example2
%A=[-2 1 1 1;-7 -5 -2 -1; 0 -1 -3 -2; -1 0 -1 0];
%example3
% A=[2 3 2;4 3 5;3 2 9]
%tol =1e-3;
n = size(A,1);
x = ones(n,1);
m = 1;
check = false;
lambda = [];
v =zeros(n,0);
% truong hop 1 gtr troi
y1 = x;
while check == false && (m <= M)
    y1 = A*y1;
    y2 = A*y1;
    m= m+1;
    check = KTsongsong(y1,y2,tol);
end
if check == true
    index1 = y2~=0;
    index2=y1~=0;
    index = index1&index2;
    lambda = [lambda; mean(y2(index)./y1(index))];
   v1 = y1./norm(y1,2);
    v = [v,v1];
    return
end
%truong hop 2 nghiem doi nhau
if check == false
    m = 1;
    y1 = x;
    while check ==false && (m <= M)
        y1 = A*y1;
        y2 = A*y1;
        y3 = A*y2;
       m= m+1;
        check = KTsongsong(y1,y2,tol);
    end
if check == true
    index1 = y3~=0;
    index2=y1~=0;
    index = index1&index2;
    lambda1 = sqrt(mean(y3(index)./y1(index)));
    lambda = [lambda;lambda1;-lambda1];
    v1 = y2+lambda1*y1;
```

```
    v1 = v1/norm(v1,2);
    v2 = y2-lambda1*y1;
    v2 = v2./norm(v2,2);
    v=[v,v1,v2];
    return
end
end
%truong hop 2 nghiem phuc lien hop
if check == false
     y1 = ((A^(2*m+2))*x);
     y2 = ((A^(2*m))*x);
     y3 = ((A^(2*m+1))*x);
    index = find(y1~=0);
    r = index(1);
    s = index(2);
end
    syms z
    p = det([1, y2(r), y2(s);...
          z, y3(r), y3(s); z^2 y1(r) y1(s)]);
    lambda = double(solve(p,z));
    v1 = y3-lambda(2)*y1;
    v1 = v1/norm(v1,2);
    v2 = y3-lambda(1)*y1;
    v2 = v2/norm(v2,2);
    v= [v1,v2];
end

function check = KTsongsong(u,v,tol)
    check =(norm( u./norm(u,2)-v./norm(v,2), 2)<=tol)||(norm( u./
norm(u,2)+v./norm(v,2), 2)<=tol);
end

function [A1, theta] = XuongThang(A,v)
%tra ra ma tran A1 da xuong thang
%và ma trận để xuống thang theta
[~,i] = max(abs(v));
v = v/v(i);
n = size(A);
theta = eye(n);
theta(:,i) = theta(:,i) - v;
A1 = theta*A;
end

function [A, jb] = GJ(A, tol)
[m,n] = size(A);
% Loop over the entire matrix.
i = 1; j = 1;
%create empty row vector
jb = zeros(1,0);
while i <= m && j <= n
```

```
    % Find value and index of largest element in the remainder of column j.
    [p, k] = max(abs(A(i:m,j)));
    k = k+i-1;
    if p < tol
       % The column is negligible, zero it out.
       A(i:m,j) = 0;
       j = j + 1;
    else
       % Remember column index
       jb = [jb j]; %#ok<AGROW>
       % Swap i-th and k-th rows.
       A([i k],j:n) = A([k i],j:n);
       % Divide the pivot row by the pivot element.
       A(i,j:n) = A(i,j:n)./A(i,j);
       % Subtract multiples of the pivot row from all the other rows.
       for k = [1:i-1 i+1:m]
          A(k,j:n) = A(k,j:n) - A(k,j).*A(i,j:n);
       end
       i = i + 1;       j = j + 1;
    end
end
end

function S = eig_vector_zero(M,tol)
%Nhận vào ma trận M và đưa ra ma trận trực chuẩn S chứa các vector riêng
%ứng với giá trị riêng lambda = 0 của ma trận M
n = size(M,1);
% sử dụng thuật toán Gauss-Jordan để tìm vector riêng tương ứng với giá trị
% riêng lambda = 0
[B,jb] = GJ(M,tol)
%jb là vector chứa các biến phụ thuộc của hệ Mx=0
js = setdiff(1:n,jb); %js chứa các biến độc lập
r = length(jb); %r là rank của ma trận M, cũng là rank của ma trận A
d = n - r; %số lượng các biến độc lập

S = zeros(n,d); %tìm ma trận S có các cột chứa một cơ sở của không gian
nghiệm Mx=0
for i = jb
    S(i,:) = -B(i,js);
end
for i = js
    index = find(js==i);
    S(i,index) = 1;
end
S = gramSmidth(S); %S chứa các vector kì dị phải (v_i) ứng với giá trị kì
dị 0 của ma trận A
end

function S = gramSmidth(S)
%S là ma trận  chứa các vector cơ sở của không gian các cột
```

```
%hàm thực hiện chuẩn hóa Gram Smidth
    [m,n] =  size(S);
    for i = 1:n
         x=zeros(m,1);
        for j = 1:i-1
           x =x -dot(S(:,i),S(:,j))*S(:,j);
        end
          S(:,i)=S(:,i)+x;
          S(:,i) = S(:,i)/norm(S(:,i),2);
    end
end
```

4. Ứng dụng của phân tích SVD

4.1 Giả nghịch đảo của ma trận

Nếu A có phân tích SVD $A = U\Sigma V^T$, ***giả nghịch đảo hay nghịch đảo Moore-Penrose*** của A là

$$A^\dagger = V\Sigma^{-1}U^T$$

Nếu A có hạng đầy đủ và $m > n$, (hệ $Ax = y$ vô nghiệm)

$$A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T$$

xấp xỉ gần đúng bằng phương pháp bình phương tối thiểu là $x = A^\dagger y$. Nhắc lại bài toán bình phương tối thiểu đi tìm vector x sao cho $\|Ax - y\|^2$ đạt giá trị bé nhất.

- nếu A có hạng đầy đủ và $m < n$, (hệ $Ax = y$ có vô số nghiệm)

$$A^\dagger = A^\top(AA^\top)^{-1}$$

cho lời giải bài toán chuẩn nhỏ nhất$x_{\ln} = A^\dagger y$. Bài toán chuẩn nhỏ nhất đi tìm giữa các vector x là nghiệm phương trình $Ax = y$ nghiệm có chuẩn nhỏ nhất.

4.2 Xấp xỉ ma trận với $rank$ nhỏ

Giả sử $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, rank(A) = r$, có phân tích SVD $A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$

ta tìm ma trận $\widehat{A}, rank(\widehat{A}) \le p < r$, sao cho $\widehat{A} \approx A$ theo nghĩa là $\|A - \widehat{A}\|$ không đáng kể. Khi đó, xấp xỉ bậc p là

$$\widehat{A} = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i u_i v_i^\top$$

Do đó $\|A - \widehat{A}\| = \| \sum_{i=p+1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\top \| = \sigma_{p+1}$

4.3 Số điều kiện

Xét $y = Ax, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ khả nghịch. Khi đó $x = A^{-1}y$. Trong thực hành thường xuất hiện lỗi hoặc nhiễu trong y, tức là,y trở thành $y + \delta y$ thì x trở thành $x + \delta x$ với $\delta x = A^{-1}\delta y$. Do đó, ta có $\|\delta x\| = \|A^{-1}\delta y\| \le \|A^{-1}\|\|\delta y\|$. Nếu $\|A^{-1}\|$ lớn, các lỗi nhỏ trong y có thể dẫn đến các lỗi lớn trong x. Do đó, A có thể được coi là kỳ dị trong thực hành. Tiếp theo nếu xét sai số tương đối của x và y. Vì $y = Ax$, ta có $\|y\| \le \|A\|\|x\|$, do đó

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\delta y\|}{\|y\|}.$$

Vì vậy, chúng ta định nghĩa ***số điều kiện của*** A:

$$\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = \sigma_{\max}(A)/\sigma_{\min}(A).$$

Tương tự như trên trong trường hợp A không phải là ma trận vuông, ta cũng định nghĩa số điều kiện $\kappa(A)$ như trên để phân tích tính ổn định của bài toán bình phương tối thiểu, nghĩa là tìm x để $\|Ax - y\|^2$ đạt $\min$.