Mục lục

Mọi đóng góp xin gửi về email: tam.doduc@hust.edu.vn

PHƯƠNG PHÁP LŨY THỪA TÌM GIÁ TRỊ RIÊNG TRỘI

1. Giá trị riêng trội

Giá trị riêng trội

- Giả sử ma trận A vuông cỡ n thực có các giá trị riêng khác nhau xếp theo thứ tự:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_s|$$

- Các vector riêng ứng với các giá trị riêng:

$$Av_i = \lambda_i v_i, i = \overline{1, s}$$

- Khi đó

$|\lambda_1| > |\lambda_2| \Rightarrow \lambda_1$ là giá trị riêng trội.

$|\lambda_1| = |\lambda_2| > \lambda_3 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2$ là các giá trị riêng trội.

Ví dụ 1:

```
clc
clear all
format long
A=[1 2 3 4;2 1 2 3;3 2 1 2;4 3 2 1]
```

```
A = 4×4
     1     2     3     4
     2     1     2     3
     3     2     1     2
     4     3     2     1
```

```
[eigVectors, eigValues]=eig(A);
disp(eigValues)
```

```
  -3.414213562373095                   0                   0                   0
                   0  -1.099019513592785                   0                   0
```

```
                   0                   0   -0.585786437626905                   0
                   0                   0                    0   9.099019513592784
```

Ma trận A có giá trị riêng trội là $\lambda_1 = 9.0990$.

2. Phương pháp lũy thừa tìm GTR trội λ_1 là nghiệm đơn của đa thức đặc trưng.

Do λ_1 là GTR trội và là nghiệm đơn nên $\lambda_1 > \lambda_k \ \forall k = \overline{1, s}$. Xét vector $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_sv_s$ là tổ hợp tuyến tính của các vector riêng.

Ta có

$$A(v) = A\left(\sum_{i=1}^{s} c_iv_i\right) = \sum_{i=1}^{s} c_iAv_i = \sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_iv_i.$$

$$A^2v = A(Av) = A\left(\sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_iv_i\right) = \sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_iAv_i = \sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_i^2v_i.$$

Tiếp tục quá trình như trên

$$A^kv = A(A^{k-1}v) = A\left(\sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_i^{k-1}v_i\right) = \sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_i^{k-1}Av_i = \sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_i^{k}v_i.$$

Xét

$$A^{k+1}v = \lambda_1^{k+1}\left(c_1v_1 + \sum_{i=2}^{s} c_i\frac{\lambda_i^{k+1}}{\lambda_1^{k+1}}v_i\right). \qquad (1)$$

Do $\lambda_1 > \lambda_k \ \forall k = \overline{1, s}$ nên

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\lambda_i^{k+1}}{\lambda_1^{k+1}} = 0.$$

Do đó từ (1) suy ra với k đủ lớn ta có:

$$A^{k+1}v \approx c_1\lambda_1^{k+1}v_1 = c_1\lambda_1(\lambda_1^kv_1) = c_1\lambda_1A^kv_1 \approx \lambda_1(A^kv). \qquad (2).$$

Từ (2) theo định nghĩa vector riêng thì A^kv là một vector gần đúng của vector riêng ứng với giá trị riêng λ_1.

Ngoài ra, giá trị riêng λ_1 có thể tính gần đúng như sau: $\lambda_1 \approx \dfrac{(A^{k+1}v)(i)}{(A^{k+1}v)(i)}$ với i là một chỉ số bất kỳ $1, 2, 3, \cdots, n$.

Ví dụ 2.

```
clc
%clear all
format long
```

```
A=[1 2 3 4;2 1 2 3;3 2 1 2;4 3 2 1]
```

```
A = 4×4
     1     2     3     4
     2     1     2     3
     3     2     1     2
     4     3     2     1
```

```
k=20;
v = [5;-2;1;-3];
disp('vector v la:')
```

```
vector v la:
```

```
disp(v)
```

```
     5
    -2
     1
    -3
```

```
x=v;
for i = 1:k
    x = A*x;
    y = A*x;
    if i==k, break, end
end
disp('vector A^19v la')
```

```
vector A^19v la
```

```
disp(x)
```

```
   1.0e+18 *
   5.340223957821464
   4.377936387828187
   4.377936277154168
   5.340223690630745
```

```
disp('vector A^20v la')
```

```
vector A^20v la
```

```
disp(y)
```

```
   1.0e+19 *
   4.859080032746332
   3.983492792967168
   3.983492830753642
   4.859080123970949
```

```
disp(y./x)
```

```
   9.099019200551631
   9.099019355425821
   9.099019671759750
   9.099019826633953
```

Vậy vector riêng trội λ_1 có thể chọn là một trong những giá trị trên, chẳng hạn

```
lambda_1 = y(1)/x(1)
```

```
lambda_1 =
   9.099019200551631
```

và vector riêng v_1 lấy bằng

```
v_1 = y/norm(y,2)
```

```
v_1 = 4×1
   0.546835467184198
   0.448297852224490
   0.448297856476938
   0.546835477450515
```

So sánh với giá trị chính xác sử dụng câu lệnh MATLAB

```
eigVectors(:,4)
```

```
ans = 4×1
   0.546835472317356
   0.448297854350714
   0.448297854350714
   0.546835472317356
```

2. Trường hợp giá trị riêng trội λ_1 là nghiệm bội r của đa thức đặc trưng.

Giả sử $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_s|$ và $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_s$. Xét vector $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_sv_s$ là tổ hợp tuyến tính của các vector riêng.

Ta có

$$A(v) = A\left(\sum_{i=1}^{s} c_iv_i\right) = \sum_{i=1}^{s} c_iAv_i = \sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_iv_i.$$

$$A^2v = A(Av) = A\left(\sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_iv_i\right) = \sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_iAv_i = \sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_i^2v_i.$$

Tiếp tục quá trình như trên

$$A^kv = A(A^{k-1}v) = A\left(\sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_i^{k-1}v_i\right) = \sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_i^{k-1}Av_i = \sum_{i=1}^{s} c_i\lambda_i^kv_i.$$

Xét

$$A^{k+1}v = \lambda_1^{k+1}\left(\sum_{i=1}^{r} c_iv_i + \sum_{i=r+1}^{s} c_i\frac{\lambda_i^{k+1}}{\lambda_1^{k+1}}v_i\right). \qquad (3)$$

Do $\lambda_1 > \lambda_k \ \forall k = \overline{r+1, s}$ nên

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\lambda_i^{k+1}}{\lambda_1^{k+1}}=0.$$

Do đó từ (3) suy ra với k đủ lớn ta có:

$$A^{k+1}v \approx \lambda_1^{k+1}\left(\sum_{i=1}^{r}c_iv_i\right)=\lambda_1\left(\lambda_1^k\sum_{i=1}^{r}c_iv_i\right)=\lambda_1A^k\left(\sum_{i=1}^{r}c_iv_i\right)\approx\lambda_1(A^kv). \qquad (4).$$

Từ (4) theo định nghĩa vector riêng thì A^kv là một vector gần đúng của vector riêng ứng với giá trị riêng λ_1.

Ngoài ra, giá trị riêng λ_1 có thể tính gần đúng như sau: $\lambda_1 \approx \dfrac{(A^{k+1}v)(i)}{(A^{k+1}v)(i)}$ với i là một chỉ số bất kỳ $1,2,3,\cdots,n$.

Chú ý: Ở đây ta chỉ tìm được một vector riêng ứng với GTR λ_1.

3. Giá trị riêng trội λ_1 là nghiệm đơn của đa thức đặc trưng và $\lambda_2=-\lambda_1$ là một GTR của A.

Giả sử $|\lambda_1|=|\lambda_2|>|\lambda_3|\geq\cdots\geq|\lambda_s|$ và $\lambda_1=-\lambda_2$. Tương tự như trên ta có:

$$A^{2k}v=\lambda_1^{2k}c_1v_1+\lambda_2^{2k}c_2v_2+\sum_{i=3}^{s}\lambda_i^{2k}c_iv_i. \qquad (5)$$

$$A^{2k+1}v=\lambda_1^{2k+1}c_1v_1-\lambda_2^{2k+1}c_2v_2+\sum_{i=3}^{s}\lambda_i^{2k+1}c_iv_i. \qquad (6)$$

$$A^{2k+2}v=\lambda_1^{2k+2}c_1v_1+\lambda_2^{2k+2}c_2v_2+\sum_{i=3}^{s}\lambda_i^{2k+2}c_iv_i. \qquad (7)$$

Do $|\lambda_1|=|\lambda_2|$ trội hơn các GTR khác nên từ (6)-(7) suy ra

$$A^{2k}v\approx\lambda_1^{2k}c_1v_1+\lambda_2^{2k}c_2v_2. \qquad (8)$$

$$A^{2k+1}v\approx\lambda_1^{2k+1}c_1v_1-\lambda_2^{2k+1}c_2v_2. \qquad (9)$$

$$A^{2k+2}v\approx\lambda_1^{2k+2}c_1v_1+\lambda_2^{2k+2}c_2v_2. \qquad (10)$$

Từ (8) và (10) suy ra

$$A^{2m+2}v\approx\lambda_1^2A^{2m}v\Rightarrow\lambda_1^2=\frac{(A^{2m+2}v)(i)}{(A^{2m}v)(i)},$$

với i bất kỳ trong các số $1,2,3,\cdots,n$. Tiếp theo $\lambda_1*(8)+(9)$ ta có:

$$\lambda_1A^{2k}v+A^{2k+1}v\approx2c_1\lambda_1^{2k+1}v_1. \qquad (11).$$

Lại có, từ (11) suy ra

$$A(\lambda_1 A^{2k} v + A^{2k+1} v) \approx A(2c_1\lambda_1^{2k+1} v_1) = 2c_1\lambda_1^{2k+1} A v_1 = \lambda_1(2c_1\lambda^{2k+1} v_1) \approx \lambda_1\big(\lambda_1 A^{2k} v + A^{2k+1} v\big).$$

Do đó có thể lấy $\lambda_1 A^{2k} v + A^{2k+1} v$ là vector riêng gần đúng của A ứng với giá trị riêng λ_1.

Tiếp theo $\lambda_1 * (8) - (9)$ ta có:

$$\lambda_1 A^{2k} v - A^{2k+1} v \approx 2c_2\lambda_1^{2k+1} v_2. \qquad (12).$$

Lại có, từ (12) suy ra

$$A(\lambda_1 A^{2k} v - A^{2k+1} v) \approx A(2c_2\lambda_1^{2k+1} v_2) = 2c_2\lambda_1^{2k+1} A v_2 = -\lambda_1(2c_2\lambda_2^{2k+1} v_2) \approx -\lambda_1\big(\lambda_1 A^{2k} v - A^{2k+1} v\big).$$

Do đó có thể lấy $\lambda_1 A^{2k} v - A^{2k+1} v$ là vector riêng gần đúng của A ứng với giá trị riêng $-\lambda_1$.

Ví dụ 3: Xét ma trận A như sau:

```
clc
A=eigVectors*diag([10,-10,2,1])/eigVectors;
disp(A)
```

```
   2.703532934003101   4.110810420523126   1.282383295776937  -6.124894190743088
   4.110810420523126  -1.203532934003103  -4.375105809256913   1.282383295776935
   1.282383295776936  -4.375105809256910  -1.203532934003100   4.110810420523124
  -6.124894190743090   1.282383295776933   4.110810420523124   2.703532934003102
```

```
k=10;
v = [5;-2;1;-3];
x=v;
for i=1:k
    x =A*x;
    y=A*x;
    z=A*y;
    if i==k,break,end
end
disp(['A^',num2str(k),'v',' la'])
```

```
A^10v la
```

```
disp(x)
```

```
   1.0e+10 *
   3.530970692162448
   0.405224000740662
  -1.983862743942811
  -2.236796489384589
```

```
disp(['A^',num2str(k+1),'v',' la'])
```

```
A^11v la
```

```
disp(y)
```

```
   1.0e+11 *
   2.236796397991143
   1.983862964711653
  -0.405224221445853
  -3.530970600691362
```

```
disp(['A^',num2str(k+2),'v',' la'])
```

```
A^12v la
```

```
disp(z)
```

```
   1.0e+12 *
   3.530970582408791
   0.405224265596438
  -1.983863008855873
  -2.236796379700809
```

```
disp(z./x)
```

```
   1.0e+02 *
   0.999999968916860
   1.000000653603379
   1.000000133533967
   0.999999950963898
```

Có thể lấy giá trị riêng trội λ_1 là

```
lambda_1=sqrt(z(1)/x(1))
```

```
lambda_1 =
   9.999999844584298
```

Có thể lấy giá trị riêng trội λ_2 là

```
lambda_2=-sqrt(z(1)/x(1))
```

```
lambda_2 =
  -9.999999844584298
```

Vector riêng ứng v_1 với giá trị riêng λ_1 là

```
v_1 = lambda_1*x+y;
v_1 = v_1/norm(v_1)
```

```
v_1 = 4×1
   0.653281496837517
   0.270598013963744
  -0.270598011177651
  -0.653281499106863
```

Vector riêng v_2 ứng với giá trị riêng λ_2 là

```
v_2 = lambda_1*x-y;
v_2 = v_2/norm(v_2)
```

```
v_2 = 4×1
   0.448297870508028
```

```
-0.546835555201823
-0.546835389414842
 0.448297838215399
```

So sánh với giá trị tính bằng câu lệnh MATLAB

```
[eigVectors, eigValues]=eig(A);
disp(eigValues)
```

```
  -9.999999999999995                  0                  0                  0
                   0  10.000000000000012                  0                  0
                   0                  0   0.999999999999998                  0
                   0                  0                  0   2.000000000000001
```

```
disp(eigVectors)
```

```
   0.448297854350714  -0.653281482438188  -0.546835472317355  -0.270598050073099
  -0.546835472317357  -0.270598050073098  -0.448297854350715   0.653281482438188
  -0.546835472317356   0.270598050073098  -0.448297854350713  -0.653281482438189
   0.448297854350714   0.653281482438188  -0.546835472317357   0.270598050073098
```

4. *Giá trị riêng trội* λ_1 là nghiệm đơn của đa thức đặc trưng và $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ là một GTR của A.

Tương tự như trên ta có:

$$A^k v \approx c_1\lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2. \qquad (13).$$

$$A^{k+1} v \approx c_1\lambda_1^{k+1} v_1 + c_2\lambda_2^{k+1} v_2. \qquad (14)$$

$$A^{k+2} v \approx c_1\lambda_1^{k+2} v_1 + c_2\lambda_2^{k+2} v_2. \qquad (15)$$

Xét

$$(15) - (\lambda_1 + \lambda_2)(14) + \lambda_1\lambda_2(13).$$

$$VT = A^{k+2}v - (\lambda_1 + \lambda_2)A^{k+1}v + \lambda_1\lambda_2 A^k v.$$

$$VP = (c_1\lambda_1^{k+2}v_1 + c_2\lambda_2^{k+2}v_2) - (\lambda_1 + \lambda_2)(c_1\lambda_1^{k+1}v_1 + c_2\lambda_2^{k+1}v_2) + \lambda_1\lambda_2(c_1\lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2) = 0.$$

Do đó

$$A^{k+2}v - (\lambda_1 + \lambda_2)A^{k+1}v + \lambda_1\lambda_2 A^k v = 0.$$

Nếu tìm được hai số p và q sao cho

$$A^{k+2}v + pA^{k+1}v + qA^k v = 0$$

thì $\lambda_1 + \lambda_2 = -p$ và $\lambda_1\lambda_2 = q$ hay λ_1, λ_2 là nghiệm của phương trình $z^2 + pz + q = 0$. Ta tìm p và q bằng cách lấy hai chỉ số r và s nào đó và thành lập hệ phương trình

$$\begin{cases} (A^{k+2}v)(r) + p(A^{k+1}v)(r) + q(A^k v)(r) = 0 \\ (A^{k+2}v)(s + p(A^{k+1}v)(s) + q(A^k v)(s) = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này ta sẽ tìm được p và q. Kết hợp với phương trình $z^2 + pz + q = 0$ ta thành lập hệ

$$\begin{aligned} z^2 + pz + q = 0 \\ (A^{k+2}v)(r) + p(A^{k+1}v)(r) + q(A^k v)(r) = 0 \\ (A^{k+2}v)(s) + p(A^{k+1}v)(s) + q(A^k v)(s) = 0. \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z^2 \\ A^{k+2}v)(r) \\ (A^{k+2}v)(s) \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} z \\ (A^{k+1}v)(r) \\ (A^{k+1}v)(s) \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ (A^k v)(r) \\ (A^k v)(s) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det\begin{vmatrix} z^2 & z & 1 \\ (A^{k+2}v)(r) & (A^{k+1}v)(r) & (A^k v)(r) \\ (A^{k+2}v)(s) & (A^{k+1}v)(s) & (A^k v)(s) \end{vmatrix} =$$

Để tìm vector riêng ta làm như sau:

Xét $(14) - \lambda_1(13)$ và $(14) - \lambda_2(13)$, ta có:

$$A^{k+1}v - \lambda_1 A^k v \approx c_2\lambda_2^k(\lambda_2 - \lambda_1)v_2,$$
$$A^{k+1}v - \lambda_2 A^k v \approx c_1\lambda_1^k(\lambda_1 - \lambda_2)v_1.$$

Do đó

$$A(A^{k+1}v - \lambda_1 A^k v) \approx c_2\lambda_2^k(\lambda_2 - \lambda_1)Av_2 = \lambda_2(c_2\lambda_2^k(\lambda_2 - \lambda_1)v_2) \approx \lambda_2 A(A^{k+1}v - \lambda_1 A^k v),$$
$$A(A^{k+1}v - \lambda_2 A^k v) \approx c_1\lambda_1^k(\lambda_1 - \lambda_2)Av_1 = \lambda_1(c_1\lambda_1^k(\lambda_1 - \lambda_2)v_1) \approx \lambda_1(A^{k+1}v - \lambda_2 A^k v).$$

Có thể chọn $v_1 = A^{k+1}v - \lambda_2 A^k v$ là vector riêng gần đúng ứng với λ_1 và $v_2 = A^{k+1}v - \lambda_1 A^k v$ là vector riêng gần đúng ứng với λ_2.

Ví dụ 4:

```
clc
clear i
A=[-2 1 1 1;-7 -5 -2 -1;0 -1 -3 -2;-1 0 -1 0];
disp(A)
```

```
    -2     1     1     1
    -7    -5    -2    -1
     0    -1    -3    -2
    -1     0    -1     0
```

```
k=10;
v = [5;-2;1;-3];
x=v;
for i=1:k
    x =A*x;
    y=A*x;
    z=A*y;
    if i==k,break,end
end
disp(['A^',num2str(k),'v',' la'])
```

```
A^10v la
```

```
disp(x)
```

```
   10659267
  -43270058
  -10631955
      11313
```

```
disp(['A^',num2str(k+1),'v',' la'])
```

```
A^11v la
```

```
disp(y)
```

```
  -75209234
  162988018
   75143297
     -27312
```

```
disp(['A^',num2str(k+2),'v',' la'])
```

```
A^12v la
```

```
disp(z)
```

```
  388522471
 -438734734
 -388363285
      65937
```

```
syms t
B=[t^2 t 1;
    z(1) y(1) x(1);
    z(2) y(2) x(2)];
disp(B)
```

$$\begin{pmatrix} t^2 & t & 1 \\ 388522471 & -75209234 & 10659267 \\ -438734734 & 162988018 & -43270058 \end{pmatrix}$$

```
g = det(B);
disp(g)
```

$$1516975115652766\, t^2 + 12134799182593340\, t + 30327604223418722$$

Hai gia trị riêng trội liên hợp là

```
 s= double(solve(g))
```

```
s = 2×1 complex
 -3.999669822326533 - 1.998699080206798i
 -3.999669822326533 + 1.998699080206798i
```

```
 lambda_1 = s(1);
 lambda_2=s(2);
 v_1 = y-lambda_2*x;
 v_1 = v_1/norm(v_1,2);
 v_2 = y-lambda_1*x;
```

```
v_2= v_2/norm(v_2,2);
disp('v_1=')
```

```
v_1=
```

```
disp(v_1)
```

```
-0.316229361192943 - 0.206815641462244i
-0.097831755008307 + 0.839544107618141i
 0.316649716374285 + 0.206285722397489i
 0.000174116782182 - 0.000219499647758i
```

```
disp('v_2=')
```

```
v_2=
```

```
disp(v_2)
```

```
-0.316229361192943 + 0.206815641462244i
-0.097831755008307 - 0.839544107618141i
 0.316649716374285 - 0.206285722397489i
 0.000174116782182 + 0.000219499647758i
```

```
[eigVectors, eigValues]=eig(A);
disp(eigValues)
```

```
 0.414213562373095 + 0.000000000000000i  0.000000000000000 + 0.000000000000000i  0.000000000000000 + 0.00000000000
 0.000000000000000 + 0.000000000000000i -3.999999999999997 + 2.000000000000001i  0.000000000000000 + 0.00000000000
 0.000000000000000 + 0.000000000000000i  0.000000000000000 + 0.000000000000000i -3.999999999999997 - 2.00000000000
 0.000000000000000 + 0.000000000000000i  0.000000000000000 + 0.000000000000000i  0.000000000000000 + 0.00000000000
```

```
disp(eigVectors)
```

```
 0.110663315446150 + 0.000000000000000i -0.169030850945702 - 0.338061701891407i -0.169030850945702 + 0.33806170189
-0.129650138662365 + 0.000000000000000i  0.845154254728517 + 0.000000000000000i  0.845154254728517 + 0.00000000000
-0.469504684683351 + 0.000000000000000i  0.169030850945702 + 0.338061701891407i  0.169030850945702 - 0.33806170189
 0.866319700352983 + 0.000000000000000i  0.000000000000000 + 0.000000000000000i  0.000000000000000 - 0.00000000000
```

Code MATLAB cho phương pháp lũy thừa tìm giá trị riêng trội

```
tol =1e-10;
M=20;

%tol là giá trị điều chỉnh
%M số lần lặp nhiều nhất cho phép
%example1
T =[10     9    10;    10     2     8;     5     5    10];
%A= T*diag([11,-11, 2])*inv(T);
%example2
%A=[-2 1 1 1;-7 -5 -2 -1; 0 -1 -3 -2; -1 0 -1 0];
%example3
% A=[2 3 2;4 3 5;3 2 9]
%tol =1e-3;
n = size(A,1);
```

```
x = ones(n,1);
m = 1;
check = false;
lambda = [];
v =zeros(n,0);
% truong hop 1 gtr troi
y1 = x;
while check == false && (m <= M)
    y1 = A*y1;
    y2 = A*y1;
    m= m+1;
    check = KTsongsong(y1,y2,tol);
end
if check == true
    lambda = [lambda; mean(y2(y2~=0)./y1(y1~=0))];
   v1 = y1./norm(y1,2);
    v = [v,v1];
    return
end
%truong hop 2 nghiem doi nhau
if check == false
    m = 1;
    y1 = x;
    while check ==false && (m <= M)
        y1 = A*y1;
        y2 = A*y1;
        y3 = A*y2;
       m= m+1;
        check = KTsongsong(y1,y2,tol);
    end
if check == true
    lambda1 = sqrt(mean(y3(y3~=0)./y1(y1~=0)));
    lambda = [lambda;lambda1;-lambda1];
    v1 = y2+lambda1*y1;
    v1 = v1/norm(v1,2);
    v2 = y2-lambda1*y1;
    v2 = v2./norm(v2,2);
    v=[v,v1,v2];
    return
end
end
%truong hop 2 nghiem phuc lien hop
if check == false
     y1 = ((A^(2*m+2))*x);
     y2 = ((A^(2*m))*x);
     y3 = ((A^(2*m+1))*x);
    index = find(y1~=0);
    r = index(1);
    s = index(2);
end
```

```
syms z
p = det([1, y2(r), y2(s);...
      z, y3(r), y3(s); z^2 y1(r) y1(s)]);
lambda = double(solve(p,z));
v1 = y3-lambda(2)*y1;
v1 = v1/norm(v1,2);
v2 = y3-lambda(1)*y1;
v2 = v2/norm(v2,2);
v= [v1,v2];
disp(lambda)
```

```
-4.000000000000131 - 2.000000000005039i
-4.000000000000131 + 2.000000000005039i
```

```
disp(v)
```

```
-0.422983016352157 + 0.220905159604306i -0.422983016352157 - 0.220905159604306i
 0.648896696371944 - 0.351433683804697i  0.648896696371944 + 0.351433683804697i
 0.422983016352791 - 0.220905159604659i  0.422983016352791 + 0.220905159604659i
 0.000000000000262 - 0.000000000000146i  0.000000000000262 + 0.000000000000146i
```

PHƯƠNG PHÁP XUỐNG THANG TÌM GIÁ TRỊ RIÊNG TRỘI TIẾP THEO

1. Ma trận xuống thang $\theta(v, i)$

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ có các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ và các vector riêng tương ứng $v_1, v_2, \cdots$. Không mất tính tổng quát giả sử các giá trị riêng được sắp xếp theo thứ tự độ lớn giảm dần

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_s|.$$

Giả sử ta đã tìm được giá trị riêng và vector riêng trội λ_1 và v_1 (dùng phương pháp lũy thừa). Do $v_1 \neq 0$ nên bằng cách chia các tọa độ cho thành phần có mô đun lớn nhất của v_1 có thể coi

$v_1 = \left(v_1(1), v_1(2), \cdots, 1, \cdots, v_1(n)\right)^T$ trong đó số 1 nằm ở vị trí thứ i. Thành lập ma trận

$$\begin{aligned}\theta(v_1, i) &= \left(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \cdots, \mathscr{E}_{i-1}, \mathscr{E}_i - v_1, \mathscr{E}_{i+1}, \cdots, \mathscr{E}_n\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -v_1(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -v_1(2) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -v_1(n) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Xét vector $z = (z(1) \quad z(2) \quad \cdots \quad z(n))^T$ bất kỳ. Ta có

$$\theta(v_1,i)z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & -v_1(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & -v_1(2) & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -v_1(n) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \cdots \\ z(i) \\ \cdots \\ z(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z(1)-v_1(1)z(i) \\ z(2)-v_1(2)z(i) \\ \cdots \\ 0 \\ \cdots \\ z(n)-v_1(n)z(i) \end{pmatrix} = z - z(i)v_1.$$

Đặc biệt, nếu $z = v_1$ thì

$$\theta(v_1,i)v_1 = v_1 - v_1(i)v_1 = v_1 - 1 * v_1 = 0.$$

Ví dụ 1. Cho ma trận

```
A=[1 2 3 4;2 1 2 3;3 2 1 2;4 3 2 1]
```

```
A = 4×4
     1     2     3     4
     2     1     2     3
     3     2     1     2
     4     3     2     1
```

```
[eigVectors,eigValues] = eig(A)
```

```
eigVectors = 4×4
   0.653281482438188  -0.448297854350714   0.270598050073098   0.546835472317356
   0.270598050073098   0.546835472317356  -0.653281482438188   0.448297854350714
  -0.270598050073098   0.546835472317356   0.653281482438188   0.448297854350714
  -0.653281482438188  -0.448297854350714  -0.270598050073099   0.546835472317356
eigValues = 4×4
  -3.414213562373095                   0                   0                   0
                   0  -1.099019513592785                   0                   0
                   0                   0  -0.585786437626905                   0
                   0                   0                   0   9.099019513592784
```

```
lambda_1 = eigValues(4,4);
disp('Giá trị riêng trội')
```

```
Giá trị riêng trội
```

```
disp(lambda_1)
```

```
   9.099019513592784
```

```
disp('Vector riêng v_1')
```

```
Vector riêng v_1
```

```
v_1 = eigVectors(:,4);v_2 = eigVectors(:,1);v_3 = eigVectors(:,2);v_4 =
eigVectors(:,3);
disp(v_1);
```

```
   0.546835472317356
   0.448297854350714
   0.448297854350714
   0.546835472317356
```

```
[~,i] = max(abs(v_1))
```

```
i = 
    4
```

```
theta_1 = eye(size(A));
v_1 = v_1/v_1(i);
theta_1(:,i) = theta_1(:,i)-v_1;
disp('Ma trận xuống thang')
```

```
Ma trận xuống thang
```

```
disp(theta_1)
```

```
   1.000000000000000                   0                   0  -1.000000000000000
                   0   1.000000000000000                   0  -0.819803902718557
                   0                   0   1.000000000000000  -0.819803902718557
                   0                   0                   0                   0
```

```
theta_1*v_1
```

```
ans = 4×1
    0
    0
    0
    0
```

2. Ma trận sau khi xuống thang $A^1 = \theta(v_1, i)A$.

Giống phần trên, giả sử ta đã tìm được giá trị riêng và vector riêng trội λ_1 và v_1 (dùng phương pháp lũy thừa). Đặt $A^1 = \theta(v_1, i)A$. Dễ thấy

$$\begin{aligned} A^1 &= A_1\begin{pmatrix} \mathscr{A}_1 & \mathscr{A}_2 & \cdots & \mathscr{A}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_1(i)v_1 & A_2 - \mathscr{A}_2(i)v_1 & \cdots & A_n - \mathscr{A}_n(i)v_1 \end{pmatrix} \\ &= A - v_1 A_i. \end{aligned}$$

Nhắc lại ta kí hiệu $\mathscr{A}_j$ là cột thứ j của ma trận A, và A_i là dòng thứ i của ma trận A.

Tiếp theo, ta xét

$$A^1 v_1 = \theta(v_1, i)Av_1 = \theta(v_1, i)\lambda_1 v_1 = \lambda_1\theta(v_1, i)v_1 = 0 = 0v_1.$$

Suy ra v_1 là vector riêng của A^1 ứng với giá trị riêng 0. Lại có

$$\begin{aligned} &A^1\theta(v_1, i)v_k = A^1(v_k - v_2(i)v_1) = A_1 v_k - v_k(i)A^1 v_1 = \theta(v_1, i)Av_k - v_k(i)\theta(v_1, i)Av_1 \\ &= \theta(v_1, i)\lambda_k v_k - v_k(i)\theta(v_1, i)\lambda_1 v_1 = \lambda_k\theta(v_1, i)v_k - v_k(i)\lambda_k\theta(v_1, i)v_1 = \lambda_k\theta(v_1, i)v_k, \forall k = 2, 3, \cdots. \end{aligned}$$

Từ đẳng thức trên ta thấy $\theta(v_1, i)v_k$ chính là vector riêng của ma trận A^1 ứng với giá trị riêng λ_k. Tóm lại, ma trận A^1 có các giá trị riêng là $0, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ và các vector riêng tương ứng là $v_1, \theta(v_1, i)v_2, \theta(v_1, i)v_3, \cdots$.

Tiếp theo dùng phương pháp lũy thừa để tìm giá trị riêng và vector riêng trội cho ma trận A^1. Quá trình này có thể lặp đến $n-1$ lần để tìm hết các giá trị riêng và vector riêng.

Trong quá trình xuống thang thì giá trị riêng của ma trận A không thay đổi nhưng vector riêng tương ứng sẽ thay đổi. Việc tìm ra VTR v_2 của ma trận A từ VTR w_2 của ma trận A^1 sẽ khó khăn.

Ví dụ 2. Ma trận sau khi xuống thang của A ở ví dụ 1.

```
A1 = theta_1*A;
disp('Ma trận sau khi xuống thang')
```

```
Ma trận sau khi xuống thang
```

```
disp(A1)
```

```
  -2.999999999999998  -0.999999999999999   1.000000000000001   3.000000000000000
  -1.279215610874227  -1.459411708155670   0.360392194562887   2.180196097281443
  -0.279215610874227  -0.459411708155670  -0.639607805437113   1.180196097281443
                   0                   0                   0                   0
```

```
disp('Các giá trị riêng và vector riêng của A1 là')
```

```
Các giá trị riêng và vector riêng của A1 là
```

```
[eigVectors,eigValues] = eig(A1)
```

```
eigVectors = 4×4
   0.838642421086450   0.485056825163434   0.000000000000000   0.546835472317356
   0.517449697293714  -0.386689643760970   0.707106781186548   0.448297854350715
   0.170072632498297   0.784341122070228   0.707106781186547   0.448297854350715
                   0                   0                   0   0.546835472317355
eigValues = 4×4
  -3.414213562373092                   0                   0                   0
                   0  -0.585786437626905                   0                   0
                   0                   0  -1.099019513592784                   0
                   0                   0                   0                   0
```

Code MATLAB

```
clc
clear all
tol = 1e-5;
A = [4     2     2; 2     5     1; 2     1     6]
```

```
A = 3×3
     4     2     2
     2     5     1
     2     1     6
```

```
v = eigvalues(A,tol) % lấy ra các giá trị riêng của ma trận A
```

```
v = 3×1
   8.387603857165166
   4.486360491807390
   2.125917206146348
```

4. Ma trận xuống thang dựa vào A^T.

Tiếp theo đây ta sẽ xây dựng một phương pháp xuống thang giữ nguyên được các giá trị riêng và vector riêng.

Giả sử ta có λ_1 là giá trị riêng trội của ma trận A. Do A và A^T có cùng tập các giá trị riêng $(\det(A - tE) = \det(A - tE)^T = \det(A^T - tE))$. Gọi w_1 là vector riêng tương ứng giá trị riêng λ_1 của A^T. Xét ma trận

$$A^1 = A - \frac{\lambda_1}{w_1^T v_1} v_1 w_1^T.$$

Ta có

$$A^1 v_1 = A v_1 - \frac{\lambda_1}{w_1^T v_1} v_1 w_1^T v_1 = A v_1 - \frac{\lambda_1}{w_1^T v_1} v_1 \left(w_1^T v_1\right) = A v_1 - \lambda_1 v_1 = 0.$$

Ngoài ra còn có, từ điều kiện

$$\begin{aligned} & A^T w_1 = \lambda_1 w_1 \Rightarrow w_1^T A v_k = \lambda_1 w_1^T v_k \Rightarrow w_1^T \lambda_k v_k = \lambda_1 w_1^T v_k \\ & \Rightarrow (\lambda_k - \lambda_1) w_1^T v_k = 0 \Rightarrow w_1^T v_k = 0, \forall \lambda_k \neq \lambda_1. \end{aligned}$$

Do đó

$$A^1 v_k = A v_k - \frac{\lambda_1}{w_1^T v_1} v_1 w_1^T v_k = A v_k - \frac{\lambda_1}{w_1^T v_k} v_1 \left(w_1^T v_k\right) = A v_k = \lambda_k v_k, \forall k \neq 1.$$

Do đó A^1 có các giá trị riêng là $0, \lambda_2, \lambda_3, \cdots$ và các vector riêng tương ứng là $v_1, v_2, v_3, \cdots$.

Code MATLAB

```
A = [4     5     2; 2     5     1; 2     1     6]
```

```
A = 3×3
     4     5     2
     2     5     1
     2     1     6
```

```
[X,Y]=eig(A)
```

```
X = 3×3
  -0.673812763418024  -0.878471293213417  -0.362477992929097
  -0.463602138030256   0.384229384469249  -0.388553435007200
  -0.575368940305906   0.283999942095644   0.847133952091521
Y = 3×3
   9.147941325966132                   0                   0
                   0   1.166501824513442                   0
                   0                   0   4.685556849520423
```

```
tol = 1e-5; %tham số điều chỉnh
M=50;%số lần lặp tối đa

n = size(A,1);
```

```
for i=1:n
    [lambda_1,v_1] = powerMethod(A,tol,M);
    [~,w_1] = powerMethod(A',tol,M);
    A = A-lambda_1*v_1*w_1'/(w_1'*v_1);
    fprintf('Giá trị riêng thứ %d là %8.7f\n',i,lambda_1)
    fprintf('Vector riêng thứ %d là\n %8.7f\n %8.7f\n %8.7f\n',i,v_1)
end
```

```
Giá trị riêng thứ 1 là 9.1479432
Vector riêng thứ 1 là
 0.6738180
 0.4636075
 0.5753585
Giá trị riêng thứ 2 là 4.6855732
Vector riêng thứ 2 là
 0.3624971
 0.3885751
 -0.8471158
Giá trị riêng thứ 3 là 1.1665018
Vector riêng thứ 3 là
 -0.8784714
 0.3842117
 0.2840235
```

5. Phụ lục các hàm con

```
function [v] = eigvalues(A,tol)
% sử dụng phương pháp lũy thừa và xuống thang để tìm các
% giá trị riêng của A
if nargin ==1
    tol = 1e-5;
end
        v = zeros(0,1);
        theta = eye(size(A,1));
        while length(v) < size(A,1)
            [vtr,vectr] = powerMethod(A,tol);
            if size(vectr, 2)==1
                A = XuongThang(A, vectr);
            else
                [A,theta] = XuongThang(A, vectr(:,1));
                [A,~] = XuongThang(A, theta*vectr(:,2));
              end
            v=[v;vtr(:)];
        end
end
function [lambda, v] = powerMethod(A,tol,M)
if nargin ==1
    tol =1e-10;
    M=200;
end
if nargin ==2
    M=200;
end
```

```
%tol là giá tr? ?i?u ch?nh
%M s? l?n l?p nhi?u nh?t cho phép
%example1
%T =[10     9    10;    10     2     8;     5     5    10];
%A= T*diag([11,-11, 2])*inv(T);
%example2
%A=[-2 1 1 1;-7 -5 -2 -1; 0 -1 -3 -2; -1 0 -1 0];
%example3
% A=[2 3 2;4 3 5;3 2 9]
%tol =1e-3;
n = size(A,1);
x = ones(n,1);
m = 1;
check = false;
lambda = [];
v =zeros(n,0);
% truong hop 1 gtr troi
y1 = x;
while check == false && (m <= M)
    y1 = A*y1;
    y2 = A*y1;
    m= m+1;
    check = KTsongsong(y1,y2,tol);
end
if check == true
    index1 = y2~=0;
    index2=y1~=0;
    index = index1&index2;
    lambda = [lambda; mean(y2(index)./y1(index))];
   v1 = y1./norm(y1,2);
    v = [v,v1];
    return
end
%truong hop 2 nghiem doi nhau
if check == false
    m = 1;
    y1 = x;
    while check ==false && (m <= M)
        y1 = A*y1;
        y2 = A*y1;
        y3 = A*y2;
       m= m+1;
        check = KTsongsong(y1,y2,tol);
    end
if check == true
    index1 = y3~=0;
    index2=y1~=0;
    index = index1&index2;
    lambda1 = sqrt(mean(y3(index)./y1(index)));
```

```
    lambda = [lambda;lambda1;-lambda1];
    v1 = y2+lambda1*y1;
    v1 = v1/norm(v1,2);
    v2 = y2-lambda1*y1;
    v2 = v2./norm(v2,2);
    v=[v,v1,v2];
    return
end
end
%truong hop 2 nghiem phuc lien hop
if check == false
     y1 = ((A^(2*m+2))*x);
     y2 = ((A^(2*m))*x);
     y3 = ((A^(2*m+1))*x);
    index = find(y1~=0);
    r = index(1);
    s = index(2);
end
    syms z
    p = det([1, y2(r), y2(s);...
          z, y3(r), y3(s); z^2 y1(r) y1(s)]);
    lambda = double(solve(p,z));
    v1 = y3-lambda(2)*y1;
    v1 = v1/norm(v1,2);
    v2 = y3-lambda(1)*y1;
    v2 = v2/norm(v2,2);
    v= [v1,v2];
end

function check = KTsongsong(u,v,tol)
    check =(norm( u./norm(u,2)-v./norm(v,2), 2)<=tol)||(norm( u./norm(u,2)+v./
norm(v,2), 2)<=tol);
end

function [A1, theta] = XuongThang(A,v)
%tra ra ma tran A1 da xuong thang
%và ma trận để xuống thang theta
[~,i] = max(abs(v));
v = v/v(i);
n = size(A);
theta = eye(n);
theta(:,i) = theta(:,i) - v;
A1 = theta*A;
end
```