BÀI 10. GIÁ TRỊ RIÊNG, VÉC-TƠ RIÊNG, CHÉO HÓA MA TRẬN

Học xong bài này, người học cần nắm được các nội dung sau.

- *Các khái niệm giá trị riêng, véc-tơ riêng của một ma trận cũng như của một toán tử tuyến tính và phương pháp tìm giá trị riêng, véc-tơ riêng.*
- *Các tiêu chuẩn chéo hóa ma trận và các bước để chéo hóa một ma trận.*
- *Phương pháp chéo hóa trực giao để chéo hóa một ma trận đối xứng.*

Note 1 - Ma trận Đồng dạng:

a) Định lý:

-Cho X: không gian véc tơ n chiều, tức dimX = n

-Và T: X→X, là AXTT

-MT của T trong cơ sở E là A

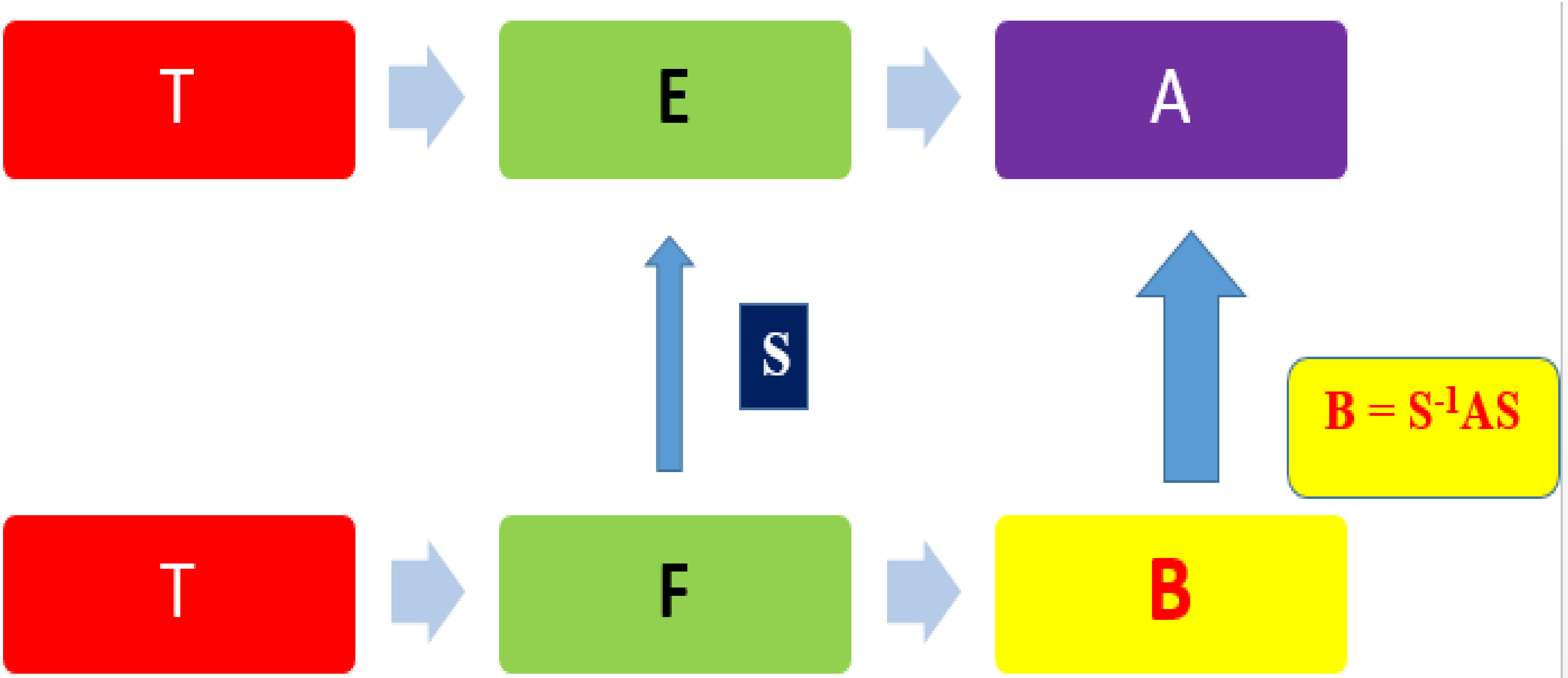
-MT của T trong cơ sở F là B

-MT chuyển cơ sở từ F vào E là S

-Khi đó: $B = S^{-1}AS$. (1)

b) Định nghĩa: … Ta nói: A và B thỏa mãn (1) là 2 MT đồng dạng.

➔Nhớ: Chiều thuận của ĐL



Note 2: Ví dụ:

B1- Tìm MT của T trong cơ sở E là A.

- Tìm MT của T trong cơ sở F là B.

B2- Tìm MT chuyển cơ sở từ F vào E là S.

B3- Tìm MT nghịch đảo của S là S^{-1} .

B4- Kiểm chứng: $S^{-1} AS = B$

➔Thực hành: Xem thật kỷ VÍ dụ sau qua 4 bước trên: (SV tự đọc thật kỷ để hiểu 1 bài ➔ sẽ hiểu được nhiều bài,...)

10.1.2 Ví dụ. Cho $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$. Xét hai cơ sở

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \;\; F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Trước tiên tìm ma trận A của T trong cơ sở E. Ta có

$$Te_1 = T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \; Te_2 = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tiếp theo cần khai triển các véc-tơ $(2,1)^T$, $(1,4)^T$ theo cơ sở E, ta có

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=2\\ \alpha_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=1,\end{cases}$$

và $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\beta_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\beta_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta_1+\beta_2=1\\ \beta=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta_1=-3\\ \beta_2=4.\end{cases}$

Vậy $[Te_1]_E=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ và $[Te_2]_E=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, cho nên $A=\begin{pmatrix}1&-3\\1&4\end{pmatrix}$.

Bây giờ tìm ma trận B của T trong cơ sở F: $Tf_1=T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$; $Tf_2=T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$. Khai triển các véc-tơ $(-1,3)^T$, $(3,5)^T$ theo cơ sở F, ta có

$$\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\gamma_1 f_1+\gamma_2 f_2=\gamma_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\gamma_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2\gamma_2=-1\\ \gamma_1+\gamma_2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma_1=\dfrac{7}{2}\\ \gamma_2=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

và $$\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\delta_1 f_1+\delta_2 f_2=\delta_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\delta_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2\delta_2=3\\ \delta_1+\delta_2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta_1=\dfrac{7}{2}\\ \delta_2=\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

Vậy $[Tf_1]_F = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$, $[Tf_2]_F = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, cho nên $B = \begin{pmatrix} 7/2 & 7/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.

Cuối cùng ta tìm ma trận chuyển từ cơ sở F vào E. Ma trận chuyển từ F vào E có cấu trúc

$$S = ([f_1]_E, [f_2]_E, \ldots, [f_n]_E).$$

Ta có

$$f_1 = s_{11}e_1 + s_{21}e_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} s_{11} = -1 \\ s_{21} = 1, \end{cases}$$

$$f_2 = s_{12}e_1 + s_{22}e_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = s_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_{22}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} s_{12} = 1 \\ s_{22} = 1. \end{cases}$$

Vậy $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, nên $S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Kiểm tra lại, ta có $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = B.$

10.2 GIÁ TRỊ RIÊNG, VÉC-TƠ RIÊNG

10.2.1 Định nghĩa Cho $A = (a_{ik})$ là ma trận vuông cấp n. Khi ấy định thức của ma trận $A - \lambda I$,

$$\boxed{det(A-\lambda I) = |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}}$$

(là một đa thức cấp n với hệ số của λ^n là $(-1)^n$ - điều đó rút trực tiếp từ định nghĩa định thức) được gọi là *đa thức đặc trưng của A*, kí hiệu là $P_A(\lambda)$. Phương trình $P_A(\lambda) = 0$ được gọi là *phương trình đặc trưng của A*.

Note 3: PT đặc trưng của MTV A cấp n.

1- Đa thức đặc trưng:

-Ký hiệu + ĐN:

(Viết lên bảng)

$$\det(A-\lambda I)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

- Đa thức cấp n, với hệ số của lũy thừa cao nhất là $(-1)^n$

$\Rightarrow$Nếu n chẵn thì hệ số dương, nếu n lẻ thì hệ số này là âm.

- Hai MTV đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng.

2- PT đặc trưng:

-Có đúng n nghiệm (kể cả nghiệm phức và nghiệm bội).

Note 4: Ví dụ:

1- Đa thức đặc trưng của MTV cấp 2.

-PT đặc trưng của MTV cấp 2.

2- Đa thức đặc trưng của MTV cấp 3.

-PT đặc trưng của MTV cấp 3.

3-Hai MTV đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng:

4-Xem thêm các ví dụ bên dưới.

10.2.2 Ví dụ. a) Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ có đa thức đặc trưng là

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

b) Ma trận $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ có đa thức đặc trưng là $P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4.$

Phương trình đặc trưng của nó $(1-\lambda)^2 + 4 = 0$ có hai nghiệm phức là

$$\lambda_1 = 1 + 2i \text{ và } \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Note 5: ĐN Giá trị riêng, Véc tơ riêng

Cho A là MTV cấp n, trên K.

1- Số a thuộc K được gọi là giá trị riêng của MTV A nếu tồn tại véc tơ x khác 0 và x thuộc K^n, sao cho: Ax = ax.

2- Khi đó x (khác 0) được gọi là véc tơ riêng của MTA ứng với giá trị riêng a. (Véc tơ riêng thì bắt buộc phải khác 0).

3- Các véc tơ riêng x ứng với giá trị riêng a (của AXTT T) là ĐLTT nên cùng với véc tơ 0 tạo thành 1 không gian véc tơ con => không gian con riêng ứng với a.

Note 6: Cách tìm: Giá trị riêng, Véc tơ riêng

Chú ý: Tìm giá trị riêng là tìm a (hay lamda) từ PT đặc trưng

Tìm véc tơ riêng là tìm x khác 0 từ hệ PT,...

B1- Giải phương trình đặc trưng: $|A-aI_n| = 0$ để tìm giá trị riêng a *(trong giáo trình ký hiệu là lamda, khi viết VD lên bảng GV viết là theo lamda)*.

B2- Giải hệ: $(A-aI_n)x = 0$ (với x khác 0) để tìm x.

B3- Kết luận.

-VD:

10.2.6 Ví dụ. Tìm trị riêng, véc-tơ riêng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ như là ma trận phức.

Ta có $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$. Với $\lambda_1 = 1 + 2i$ ta có

$$(A - \lambda_1 I)x = \begin{bmatrix} -2i & 2 \\ -2 & -2i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -2\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ix_1 & - & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & ix_2 & = & 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \alpha;\ x_2 = \alpha i.$$

Vậy véc-tơ riêng ứng với λ_1 là $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \alpha \neq 0.$

Tương tự, với $\lambda_2 = 1 - 2i$ thì véc-tơ riêng có dạng $\beta\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \beta \neq 0.$

Note 7: GTR, VTR của AXTT

-SV tự đọc giáo trình và xem thêm các kết quả sau.

(Tương tự của MT)

10.3 CHÉO HÓA MA TRẬN

10.3.1 Định nghĩa. Ma trận vuông A được gọi *chéo hóa được* nếu nó đồng dạng với một ma trận chéo D, tức là $\boxed{P^{-1}AP = D.}$

10.3.2 Định lí. *Ma trận vuông A cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi trong không gian $\mathbb{K}^n$ tồn tại một cơ sở từ các véc-tơriêng của A.*

10.3.3 Hệ quả. *Ma trận vuông A cấp n chéo hóa được nếu nó có n giá trị riêng phân biệt.*

Note 8: MTV A cấp n chéo hóa được

-Nếu tồn tại MTV khả nghịch P sao cho: $P^{-1}AP = D$

(với D là MT chéo)

-Ta nói: MTV A là chéo hóa được.

Và MT P: gọi là MT làm chéo hóa A.

-Chú ý: Nếu MTV A cấp n có n giá trị riêng phân biệt thì A nhất định chéo hóa được. Nhưng chiều ngược lại tổng quát có thể không đúng.

➔Phương pháp: Xem,...

Note 9: Các bước chéo hóa MT

B1: Giải PT đặc trưng để tìm giá trị riêng

B2: Ứng với giá trị riêng ta tìm các véc tơ riêng cụ thể *(để ở dạng cột)*

B3: Lập MT P từ các cột véc tơ riêng trên **B2**

B4: Tìm MT nghịch đảo: P^{-1}

B5: Tính: $P^{-1} A P = ?$ *(ta sẽ được MT dạng chéo)*

VD: MTV cấp 2,….

10.3.6 Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận P làm chéo hóa ma trận A.

Đa thức đặc trưng có dạng $P_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$ với các trị riêng $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Với $\lambda_1 = 0$, ta có véc-tơ riêng $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Với $\lambda_2 = 1$, ta có các véc-tơ riêng

$P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Các véc-tơ P_1, P_2, P_3 độc lập tuyến tính, tạo cơ sở. Lập ma trận $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ta tính được $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vậy ta có

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.3.7 Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, trong Ví dụ 10.2.2-b) ta đã biết rằng ứng với trị riêng $\lambda_1 = 1 + 2i$, ta có véc-tơ riêng $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, ứng với trị riêng $\lambda_2 = 1 - 2i$ ta có véc-tơ riêng $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$. Lập ma trận $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$, ta tính được $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$. Từ đó ta có thể chéo hóa được A như sau

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{i}{2}\\[2ex] \dfrac{1}{2} & \dfrac{i}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2i & 0\\ 0 & 1-2i\end{pmatrix}.$$

10.3.8 Bội hình học của giá trị riêng và chéo hóa được

Ta gọi *bội hình học* của giá trị riêng λ (của ma trận A) là số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình $(A - \lambda I)x = 0$; còn *bội đại số* của λ là bội của nghiệm λ của phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$.

Ta có thể chứng minh được rằng

1- *Bội hình học của trị riêng λ luôn nhỏ hơn hoặc bằng bội đại số của nó;*

2- *Ma trận A chéo hóa được khi và chỉ khi bội đại số của giá trị riêng bất kỳ bằng bội hình học của nó.*

10.3.9 Ví dụ. a) Trong Ví dụ 10.3.6 vừa xét ở trên ta thấy rằng $\lambda_1 = 0$ có bội đại số và bội hình học đều bằng 1, còn $\lambda_2 = 1$ có bội hình học và bội đại số bằng 2, nên ma trận chéo hóa được.

b) Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ma trận A có các giá trị riêng $\lambda_1 = 4; \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ (có nghĩa là trị riêng $\lambda = 2$ có bội đại số bằng 2). Ta tìm bội hình học của giá trị riêng $\lambda = 2$.

Ta có

$$(A-\lambda_2 I)x=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=\beta.$$

Vậy véc-tơ riêng có dạng $\beta\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$, không gian con riêng tương ứng có chiều bằng *1*, tức là $\lambda_2=2$ (có bội đại số bằng *2*) có bội hình học bằng *1*. Vậy ma trận *A* không chéo hóa được.

Note 10: Chéo hóa trực giao (Bởi MT trực giao)

- -MT thực đối xứng: $A = A^T$
- -MT trực giao: $U^{-1} = U^T$.
- -MT đối xứng chéo hóa được bởi MT trực giao:

  Nghĩa là: $U^{-1}AU = U^TAU = D$ (MT chéo).

Note 10: Chéo hóa bởi MT *TRỰC GIAO*

B1: Giải PT đặc trưng để tìm giá trị riêng

B2: Ứng với giá trị riêng ta tìm các véc tơ riêng cụ thể *(để ở dạng cột)*

B3: Trực chuẩn hệ các véc tơ riêng trên

B4: Lập MT U từ các cột véc tơ trực chuẩn trên B3

B5: Tìm MT chuyển vị U^T

B6: Tính: $U^{-1} A U = U^T A U = ?$ *(ta sẽ được MT dạng chéo)*

(hay ở chỗ là tính U^T thay vì U^{-1})

-VD: Lấy MTV cấp 2,…

10.4.3 Ví dụ. Chéo hóa ma trận đối xứng $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

- Dễ thấy A có các trị riêng $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$; $\lambda_3 = 4$.

Với $\lambda_1 = -2$, ta có hệ

$$(A - \lambda_1 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ này ta có thể chọn được hai véc-tơ riêng tương ứng, chẳng hạn

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Với $\lambda_3 = 4$, ta có hệ

$$(A - \lambda_3 I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vậy có thể lấy véc-tơ riêng $f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Để thiết lập ma trận trực giao làm chéo hóa A, ta cần có cơ sở trực chuẩn từ các véc-tơ riêng. Ở đây f_1 không vuông góc f_2 và cả 3 véc-tơ đều chưa là véc-tơ đơn vị. Vậy cần trực chuẩn hóa hệ 3 véc-tơ đó. Lưu ý rằng f_3 đã trực giao với f_1 và f_2 (vì các véc-tơ riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau), vì vậy chỉ cần trực chuẩn 2 véc-tơ f_1, f_2 và chuẩn hóa f_3.

Trước hết, theo phương pháp Gram–Schmidt, ta lấy

$$\mathbf{e}'_1 = \mathbf{f}_1;\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{(f_2, f_1)}{(f_1, f_1)} f_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tiếp theo, ta chọn

$$e_1 = \frac{e'_1}{\|e'_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}; \quad e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Ta được hệ các véc-tơ riêng trực chuẩn, thiết lập ma trận trực giao

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Vậy ta có

$$U^{-1}AU = U^{T}AU = \text{e.}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nộp BT Bài học 10

-Làm hết BT cuối Bài học 10 => Nộp online

-Chuẩn bị bài học 11

-Chuẩn bị các câu hỏi cụ thể từ bài 1 – 11