BÀI 4. KHÔNG GIAN VÉC-TƠ

Học xong bài này, người học cần nắm được các nội dung sau.

- Khái niệm không gian véc-tơ và không gian véc-tơ con.
- Cách kiểm chứng một tập con có phải là không gian véc-tơ con hay không.
- Khái niệm tổ hợp tuyến tính và không gian sinh bởi một tập.
- Tìm điều kiện để một véc-tơ là tổ hợp tuyến tính của một hệ véc-tơ.
- Cách mô tả một không gian sinh bởi một tập.

Note:

-Cần học lý thuyết và làm BT tự luận, TN của các bài học trước

-Đọc trước giáo trình của bài 4 và 5

-In các slide ra để học kèm với giáo trình

-Đảm bảo sức khỏe, ăn trước giờ vào học và đi học đúng giờ (có điểm danh).

1-Định nghĩa: KGVT

4.1.1 Định nghĩa. Cho X là tập không rỗng và $\mathbb{K}$ là $\mathbb{R}$ (trường số thực) hoặc $\mathbb{C}$ (trường số phức), trên X xác định hai phép toán, phép cộng hai phần tử của X và phép toán nhân một phần tử của X với một số. Gọi x và y là phần tử của X, phép cộng giữa chúng được kí hiệu là $x + y$, và phép nhân của x với một số $\lambda \in \mathbb{K}$ được kí hiệu là λx. Hai phép toán này thỏa các điều kiện sau.

(1) $x+y = y+x$ *nằm trong* X *với* $\forall x, y \in X$;

(2) $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x, y, z \in X$;

(3) *Tồn tại phần tử không* $\mathbf{0}$ *trong* X *sao cho* $x+\mathbf{0} = x, \forall x \in X$;

(4) *Với mỗi* x *trong* X, *tồn tại phần tử đối được kí hiệu là* $-x$ *sao cho*

$$x+(-x)=\mathbf{0}=(-x)+x;$$

(5) $1.x = x, \forall x \in X$;

(6) $\beta(\alpha x) = (\alpha\beta)x$ *nằm trong* X *với* $\forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$;

(7) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y, \forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K}$;

(8) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x, \forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Khi đó, tập X với hai phép toán thỏa tất cả các điều kiện nêu trên được gọi là *không gian véc-tơ* trên trường $\mathbb{K}$, mỗi phần tử của X được gọi là một *véc-tơ*.

Nếu $\mathbb{K}$ là $\mathbb{R}$ thì ta nói X là *không gian véc-tơ thực*, nếu $\mathbb{K}$ là $\mathbb{C}$ thì ta gọi X là *không gian véc-tơ phức*.

a) Cách nhớ:

-Tập X khác rỗng.

-Trường số K (R, C,…)

-Trên X: 2 phép toán: +, *

-Thỏa: 8 điều kiện.

$\Rightarrow$Không gian véc tơ: KGVT.

(hình vẽ minh họa)

b) Nhận xét

- Để kiểm chứng có phải KGVT hay không ta cần kiểm tra đủ 8 tính chất.

Nhưng

- Để khẳng định không phải KGVT ta chỉ cần chỉ ra 1 phản ví dụ là được.

c) VD: Xem GT

-KGVT:

- R^n ; C[a; b]; $P_n[t]$; $M_{mxn}(K)$; $M_n(K)$

-Không phải KGVT:

$$P_n[\mathrm{t}];M_n(K)$$

d) Tính chất:

4.1.5 Định lí. *Cho không gian véc-tơ X, khi đó:*

(1) *Véc-tơ **0** trong X là duy nhất.*

(2) *Véc-tơ đối (-x) của véc-tơ x bất kỳ trong X là duy nhất.*

(3) *Tích của véc-tơ x trong X với số 0 trong $\mathbb{K}$ là véc-tơ **0** trong X, nghĩa là: $0x=\mathbf{0}$.*

(4) *Tích của véc-tơ **0** trong X với số λ trong $\mathbb{K}$ là véc-tơ **0** trong X, nghĩa là: $\lambda\mathbf{0}=\mathbf{0}$.*

(5) *Cho $\lambda\in\mathbb{K}$ và $x\in X$, nếu $\lambda x=\mathbf{0}$ thì hoặc là $\lambda=0$ hoặc là $x=\mathbf{0}$.*

(6) *Với bất kì $x\in X$, ta có: $(-1)x=-x$ (trong đó -x là phần tử đối của x).*

Ta chấp nhận kết quả này. Thông qua định lí này, chúng ta lưu ý phân biệt một véc-tơ trong không gian véc-tơ (đặc biệt là véc-tơ ***0***) với một số trong trường số $\mathbb{K}$.

Note: Chú ý cái thứ 5.

(5) *Cho* $\lambda \in \mathbb{K}$ *và* $x \in X$, *nếu* $\lambda x = \mathbf{0}$ *thì hoặc là* $\lambda = 0$ *hoặc là* $x = \mathbf{0}$.

2-KGVT con: GT

a) Định nghĩa:

4.2 KHÔNG GIAN VÉC-TƠ CON

4.2.1 Định nghĩa Cho X là một không gian véc-tơ và tập con Y khác rỗng của X. Tập Y được gọi là *một không véc-tơ con* của X nếu bản thân Y là một không gian véc-tơ với các phép toán là phép cộng véc-tơ và phép nhân véc-tơ với đại lượng vô hướng của X.

Từ định nghĩa, ta thấy rằng để Y là một không gian con thì cần và đủ là các phép toán trên X cũng được xác định trên Y. Nói cách khác, ta có kết quả như Định lí 4.2.2 sau.

4.2.2 Định lí. *Tập con Y khác rỗng của không gian véc-tơ X là không gian con của X khi và chỉ khi nó thỏa hai điều kiện sau.*

(1) *Nếu lấy bất kì y_1, y_2 trong Y thì $y_1 + y_2$ cũng trong Y.*

(2) *Nếu lấy bất kì y trong Y và bất kì $\alpha \in \mathbb{K}$ thì αy cũng trong Y.*

Ta có nhận xét qua định lí này rằng không gian Y có chứa véc-tơ $\mathbf{0}$ khi Y khác rỗng.

b) Cách nhớ

-Xét X là KGVT trên trường K.

-Tập Y khác rỗng, là tập con của X.

-Nếu Bản thân tập Y cũng là KGVT,… (…)

-Ta nói: Y là KGVT con của X.

(hình vẽ)

c) Nhận xét: Cho X là KGVT

1-Không phải mọi tập hợp con của X cũng là KGVT con

2-Tập X là KGVT con của chính nó

3-Tập Y = {0} chứa trong X là KGVT con của X.

4-Để chứng minh KGVT:

-C1: Kiểm tra 8 đ/kiện theo định nghĩa

-C2: Kiểm tra 2 đ/kiện trong định lý trên,

d) Cách CM KGVT con

B1- Lấy y_1, y_2 bất kỳ trong Y,
và α bất kỳ trong K.

B2-Chứng minh: $y_1 + \alpha y_2$ cũng nằm trong Y.

B3-KL: Y là KGVT con.

-VD: Lấy 2 VD,…

Chú ý:

- Trong R^3: Các MP đi qua góc tọa độ.
- Trong R^2, R^3: Các đường thẳng đi qua góc tọa độ.

(đều là KGVT con của tập hợp tương ứng—xem NX sau:)

4.2.8 Nhận xét. Tổng quát, mặt phẳng trong không gian $\mathbb{R}^3$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$ khi và chỉ khi nó đi qua gốc tọa độ O. Đường thẳng trong không gian $\mathbb{R}^2$ (hay $\mathbb{R}^3$) là không gian con của $\mathbb{R}^2$ (hay $\mathbb{R}^3$ tương ứng) khi và chỉ khi nó đi qua gốc tọa độ O.

3-KG con sinh bởi 1 tập: GT

a) Tổ hợp tuyến tính?
b) Có bao nhiêu tổ hợp tuyến tính của các véc tơ cho trước?
c) Tập sinh (Bao tuyến tính) là gì?
d) V = Span (S) = Span S = … là gì?
e) SpanS là KGVT con của X.
f) S là tập sinh của X?
g) S chính là tập sinh của SpanS.
h) SpanS là KGVT con nhỏ nhất của X chứa S.
i) ***Mô tả* một tập hợp, tức là xem nó được *sinh ra* từ *tập hợp cụ thể nào.***

4.3 KHÔNG GIAN CON SINH BỞI MỘT TẬP

4.3.1 Định nghĩa. Cho X là một không gian véc-tơ và tập $S=\{v_1, v_2, \ldots v_p\}$ trong X.

Một véc-tơ u là *tổ hợp tuyến tính* của $v_1, v_2, \ldots v_p$ nếu có thể biểu diễn u ở dạng

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p,$$

với một bộ p số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ nào đó.

4.3.4 Định nghĩa

(1) Tập V chứa tất cả các tổ hợp tuyến tính của các véc-tơ trong tập S được gọi là *tập sinh* bởi S hay còn gọi là *bao tuyến tính* của S, được kí hiệu là: *Span(S) hay Span S*, tức là

$$\boxed{V = \text{Span } S = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p : \forall v_i \in S, \forall \alpha_i \in \mathbb{K}, 1 \le i \le p\}.}$$

(2) Cho không gian véc-tơ X và tập con S của X, nếu bất kì véc-tơ nào của X cũng có thể biểu diễn được dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các véc-tơ thuộc S thì S được gọi là tập sinh của X.

4.3.5 Định lí. *Cho một tập V sinh bởi một tập S, V=Span S, trong không gian véc-tơ X. Khi đó*

(1) V là một không gian con của X;

(2) V là không gian véc-tơ con nhỏ nhất của X chứa S, nghĩa là bất kì không gian con M nào của X có chứa S thì M cũng chứa V.

Làm BT Bài 4

Nộp: Online

TG: Theo hạn làm bài