Note: Luôn mang theo GT

A-Lý thuyết:

-Ghi vào vở Lý thuyết: Phương pháp, VD, Ghi chú,...

-Đánh dấu trong giáo trình: Lý thuyết, ĐL, Tính chất, VD...

-Nên xem lại ngay khi về nhà,...

B-BTVN: Làm BT nhóm, làm BT cá nhân trên vở, web, ...

C-Nên đọc trước bài học mới trước khi đến lớp.

D-"Khi học toán: Không có gì quý bằng Ví dụ".

E-"Tự học cảnh giới cao nhất của việc học".

Bài 1 – ĐỊNH THỨC

1-Định nghĩa: GT

-Ma trận vuông cấp n (n = 2,3….) (số dòng = số cột).

-Định thức là 1 số, ký hiệu: |A|, det(A), detA.

-Xác định?

a) n = 2:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

-Note: "Đường chéo chính – đường chép phụ".

-VD:

-Thực chiến 1.

b) n = 3:

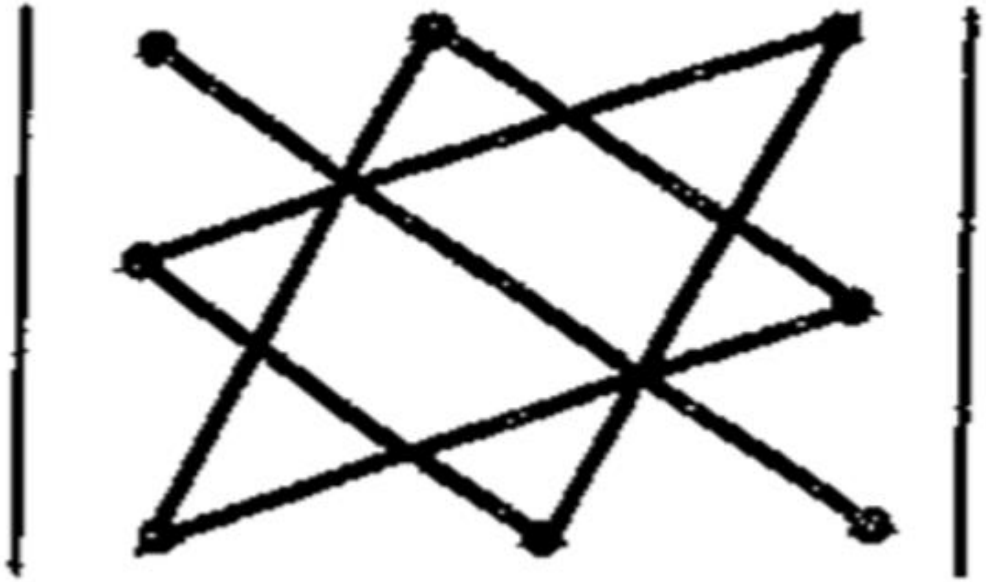
$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

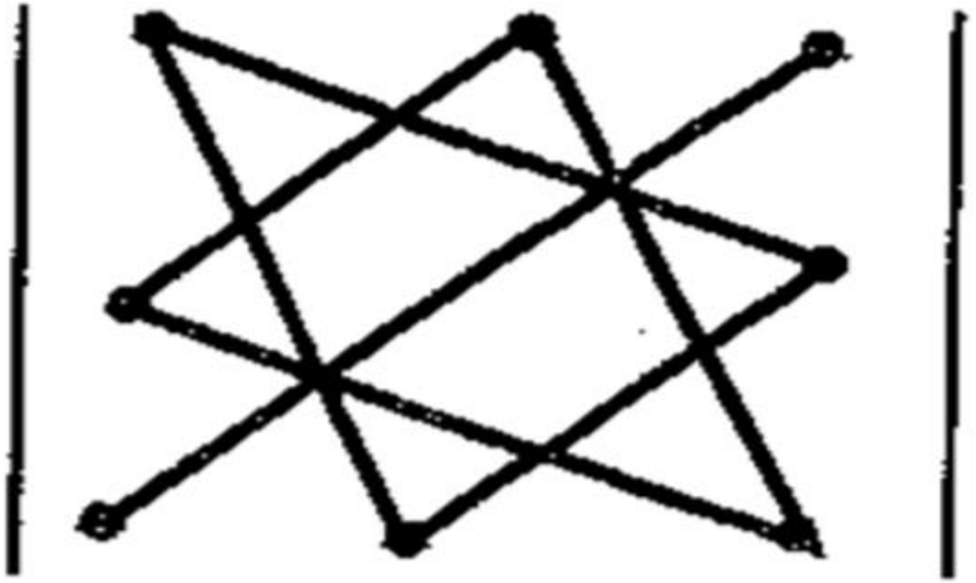
-Note: Đưa từ ĐT MTV cấp 3 về ĐT MTV cấp 2 => chắc chắn tính được.

-VD:

-Cách nhớ: Chéo chính (+), chéo phụ (-)



Lấy dấu +



Lấy dấu -

-Thực chiến 2.

Note: detA = ?

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

-Các ký hiệu:

M_{11} = ? (Ma trận vuông thu được từ A bằng cách bỏ dòng 1, cột 1).

$\det(M_{11})$: định thức con bù của a_{11}.

$A_{11} = (-1)^{1+1} . \det(M_{11})$: phần bù đại số của a_{11}.

...Tương tự: M_{12},... => Tổng quát: M_{ik} = ?

Viết lại gọn hơn: **detA =**

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11}\det(M_{11}) - a_{12}\det(M_{12}) + a_{13}\det(M_{13})$$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

c) Với n = 4, 5,... thì sao? Tổng quát: detA = ?

-Trước hết, cần nhớ:

1) a_{ik}: phần tử của ma trận ở dòng i cột k.

2) M_{ik}: là ma trận thu được từ A: bỏ đi dòng i và cột k.

3) $\det(M_{ik})$: định thức con bù của a_{ik}.

4) $A_{ik} = (-1)^{i+k}\det(M_{ik})$: phần bù đại số của a_{ik} .

- -Khi đó:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n},$$

Note:

1-Tính ĐT MTV cấp n thông qua ĐT MTV cấp n-1.

2-Có thể khai triển theo hàng hoặc cột (Xem GT, VD,…) => Chọn hàng hoặc cột nào nhiều số 0 khai triển thì sẽ ngắn hơn.

3-Tìm cách tính định thức cấp 2, 3 bằng Máy tính => hỗ trợ làm nhanh khi thi trắc nghiệm.

2-Tính chất:

1-Khi nhân 1 số m cho 1 hàng (cột) nào đó thì định thức cũng được nhân cho số m đó.

a) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ta có $|A| = -1$, $|B| = -2$ và $|B| = 2|A|$.

-Nhân số 2 vào hàng 1 của A thì được B, nên |B| = 2|A|.

b) Cho $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ta có $|B| = 6|A|$.

-Nhân số 2 vào hàng 2 của A được Ma trận C, thì:

$|C| = 2|A|$.

-Nhân số 3 vào cột 3 của C được Ma trận D, thì:

$|D| = 3|C| = 3.\ 2|A| = 6|A|$.

2- *Nếu ma trận có một hàng (cột) bằng không thì định thức của nó bằng 0.*

Nếu ma trận có hai hàng (cột) bằng nhau thì định thức của nó bằng 0.

Nếu ma trận có hai hàng (cột) tỉ lệ nhau thì định thức của nó bằng 0.

-VD: Xét MT vuông cấp 2 => minh họa.

3- *Định thức không đổi nếu ta cộng vào một hàng (cột) nào đó một hàng (cột) khác đã được nhân cho một số.*

4- *Cho A là ma trận vuông cấp n mà mỗi phân tử của hàng (cột) thứ i biểu diễn ở dạng* $\boxed{a_{ik} = a_{ik}^{(1)} + a_{ik}^{(2)}}$ *Kí hiệu A_1 là ma trận nhận từ A bằng cách thay hàng thứ i bằng các phần tử $a_{ik}^{(1)}$, và A_2 là ma trận nhận từ A bằng cách thay hàng thứ i bằng các phân tử $a_{ik}^{(2)}$. Khi ấy, ta có*

$$\boxed{\det A = \det A_1 + \det A_2.}$$

5- Nếu ma trận A vuông cấp n có dạng tam giác thì định thức của nó bằng tích các số nằm trên đường chéo chính, tức là

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.}$$

-VD:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = 1.1.(-5) = -5.$$

6-Định thức đổi dấu,
nếu ta đổi vị trí hai hàng(cột).

-VD:

-Go end.

1.2.16 Khai triển Laplace. Khai triển định thức theo r hàng (cột).

Trong phần này ta mở rộng định lí về khai triển định thức theo một hàng hoặc một cột.

Cho ma trận vuông A cấp *n*, xét k hàng $i_1<i_2<\dots<i_k$ và k cột $j_1<j_2<\dots<j_k$ của A. Kí hiệu δ là định thức của ma trận vuông cấp *k* gồm các phần tử nằm trên giao của *k* hàng và *k* cột đó,

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}.$$

Định thức β của ma trận vuông cấp $(n - k)$ nhận được từ A bằng cách bỏ đi k hàng và k cột như trên được gọi là *định thức con bù* của δ. Đại lượng $\beta(-1)^{i_1+i_2+\dots+i_k+j_1+j_2+\dots+j_k}$ được gọi là phần bù đại số của định thức δ.

1.2.17 Ví dụ. Cho ma trận vuông cấp 5,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Lấy hai hàng gồm hàng thứ hai và thứ tư, lấy hai cột gồm cột thứ nhất và thứ tư. Kí hiệu δ là định thức của ma trận nằm trên giao của hàng hai, hàng bốn với cột một, cột bốn

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Bỏ hàng thứ hai, thứ tư và cột thứ nhất, thứ tư từ A, ta được một ma trận vuông cấp 3 có định thức (bù của δ) là

$$\beta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 36.$$

Phần bù đại số của định thức δ là đại lượng $\beta.(-1)^{2+4+1+4} = -\beta = -36.$

1.2.18 Định lí (Laplace). *Định thức của ma trận vuông cấp n bằng tổng các tích của mọi định thức con rút ra từ k hàng (cột) với bù đại số tương ứng của chúng.*

1.2.19 Ví dụ. Tính định thức cấp 4

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Ta chọn hai hàng: hàng thứ hai và thứ tư. Từ hai hàng đó ta có thể thiết lập các định thức con sau.

$$\delta_1=\begin{vmatrix}0&2\\6&3\end{vmatrix};\quad \delta_2=\begin{vmatrix}0&0\\6&0\end{vmatrix};\quad \delta_3=\begin{vmatrix}0&4\\6&6\end{vmatrix};$$

$$\delta_4=\begin{vmatrix}2&0\\3&0\end{vmatrix};\quad \delta_5=\begin{vmatrix}2&4\\3&6\end{vmatrix};\quad \delta_6=\begin{vmatrix}0&4\\0&6\end{vmatrix}.$$

Các phần bù đại số tương ứng của các định thức con trên là

$$A_1=\begin{vmatrix}3&5\\5&0\end{vmatrix}(-1)^{2+4+1+2};\qquad A_2=\begin{vmatrix}1&5\\1&0\end{vmatrix}(-1)^{2+4+1+3};$$

$$A_3=\begin{vmatrix}1&3\\1&5\end{vmatrix}(-1)^{2+4+1+4};\qquad A_4=\begin{vmatrix}2&5\\3&0\end{vmatrix}(-1)^{2+4+2+3};$$

$$A_5=\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}(-1)^{2+4+2+4};\qquad A_6=\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}(-1)^{2+4+3+4}.$$

Ta được

$$\boxed{\delta = \delta_1\Delta_1 + \delta_2\Delta_2 + \delta_3\Delta_3 + \delta_4\Delta_4 + \delta_5\Delta_5 + \delta_6\Delta_6} = -12.25 + (-24)(-2) = -252.$$

1.2.20 Ví dụ. Tính định thức cấp 5

$$\left|\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 6 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 6 & 2 \end{array}\right|.$$

⌈ Ta khai triển theo hai hàng đầu tiên. Từ hai hàng đó chỉ có một định thức con $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$ khác 0, vì vậy ta được

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+2} = 118.$$

Như là một hệ quả ta thấy rằng nếu ma trận có dạng khối bậc thang

$$A = \left|\begin{array}{c|c} B & O \\ \hline C & D \end{array}\right|$$

trong đó B và D là các ma trận vuông thì

$$\boxed{\det A = (\det B)(\det D)}.$$

BT BÀI 1

1-TN: Làm trên giấy theo nhóm

(Chọn đáp án + giải thích chi tiết: VD: Chọn A, vì:….)

2-Tự luận: Làm cá nhân, nộp online

3-LT THU ĐẦY ĐỦ=> Nộp vào buổi Kế tiếp,…

4-Phân công BT TL + TN.

========(^!^)========

See you again….