Bài 8 – KG Tích vô hướng (TVH)

Note:

1-In phần này ra học kèm với giáo trình

2-Đọc trước phần này + Giáo trình (Đọc kỷ Các ví dụ)

3-Chuẩn bị ôn thi

-Học bài + Làm bài đầy đủ

-Note các vấn đề chưa hiểu lại để hỏi Bạn + Giáo viên.

8.1 KHÔNG GIAN VÉC-TƠ VỚI TÍCH VÔ HƯỚNG

8.1.1 Định nghĩa. Cho X là một không gian véc-tơ, x và y trong X. Một qui tắc cho ứng hai véc-tơ x và y với một số, kí hiệu là $\langle x, y\rangle$, thỏa các tính chất sau.

(1) $\langle x, x\rangle \geq 0$ và $\langle x, x\rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = \mathbf{0}$.

(2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (số phức liên hợp).

(3) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, với $\forall x, y, z \in X$.

(4) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$, với $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Khi đó, ta gọi $\langle \cdot,\cdot \rangle$ là một *tích vô hướng* và gọi X là *không gian véc-tơ với tích vô hướng* (đôi khi được gọi tắt là *không gian tích vô hướng*).

Khi X là không gian véc-tơ thực hữu hạn chiều, tính chất (2) trở thành $\boxed{\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle,}$ thì X còn được gọi là *không gian Euclid*.

Note 0: Nhắc lại

1-Nhắc lại Tích vô hướng ở PT:

2-Hàm số:

3-Số phức liên hợp:

4-Số phức: Không xác định dấu.

- -Cho 2 số thực: có 3 TH
- -Cho 2 phức: có 2 TH

5-Nhân 1 số với 1 véc tơ (biểu thức tọa độ), chú ý về sự khác nhau với tích vô hướng.

Note 1: Hiểu về tích vô hướng

1-Tích vô hướng (TVH):

X: KGVT

Ký hiệu: <x, y> => thỏa 4 tính chất => TVH

KG Tích vô hướng.

Hình vẽ minh họa.

2-Tích vô hướng chính tắc trên R^n:

-Cái quen thuộc: hoành nhân hoành + Tung nhân tung + …

-Cái quen thuộc này trên C^n thì không phải TVH.

Note 2: Tính chất

2-Tính chất:

$$(1)\ \langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle \text{ với } \forall x, y, z \in X.$$

$$(2)\ \langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle \text{ với } \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

(3) Nếu X là KGVT thực (trên R) hữu hạn chiều thì X: KG Euclid

-VD: R^n với TVH chính tắc => là KG Euclid.

(4) C^n với TVH:

$$\langle x, y\rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \dots + x_n\bar{y}_n.$$

=> KG Unita (là KG tích vô hướng, với TVH trên)

8.1.5 Định nghĩa. Cho X là một không gian véc-tơ với tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle$ và x, y thuộc X.

(1) Đại lượng $\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}}$ được gọi là *chuẩn* hay *độ dài* của véc-tơ x.

(2) Đại lượng $\boxed{d(x,y) = \|x-y\|}$ được gọi là *khoảng cách* giữa hai véc-tơ x và y.

(3) Khi $\|x\|=1$, ta gọi x là *véc-tơ định chuẩn* hay *véc-tơ đơn vị*.

8.1.6 Tính chất. *Cho X là một không gian véc-tơ với tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle$ và x, y thuộc X. Khi đó, ta có*

$\boxed{(1)\ |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|\ ;}$ *(Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz)*

$\boxed{(2)\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.}$ *(Bất đẳng thức tam giác)*

8.1.7 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^2$, xét phép ứng hai véc-tơ $x=(x_1, x_2)$ và $y=(y_1, y_2)$ với một số

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

a) Hãy kiểm tra phép toán $\langle\cdot,\cdot\rangle$ xác định như trên là một tích vô hướng.

b) Với tích vô hướng này, hãy tìm $|v|$, là độ dài của véc-tơ v, với $v = (0,1)$.

c) Hãy tìm khoảng cách giữa véc-tơ v và véc-tơ $u = (1,0)$.

a) Với bất kì $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$$

$$= y_1x_1 - 2y_1x_2 - 2y_2x_1 + 5y_2x_2 = \langle y, x\rangle,$$

$$\langle \lambda x, y\rangle = (\lambda x_1)y_1 - 2(\lambda x_1)y_2 - 2(\lambda x_2)y_1 + 5(\lambda x_2)y_2$$

$$= \lambda\,[x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2] = \lambda\langle x, y\rangle,$$

$$\langle x + y, z\rangle = (x_1 + y_1)z_1 - 2(x_1 + y_1)z_2 - 2(x_2 + y_2)z_1 + 5(x_2 + y_2)z_2$$

$$= (x_1z_1 - 2x_1z_2 - 2x_2z_1 + 5x_2z_2) + (y_1z_1 - 2\,y_1z_2 - 2y_2z_1 + 5y_2z_2)$$

$$= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,$$

$$\langle x, x\rangle = x_1x_1 - 2x_1x_2 - 2x_2x_1 + 5x_2x_2$$

$$= x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

$$= (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 \geq 0.$$

Do đó

$$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ \quad\;\; x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 0 = x_2,$$ nghĩa là $x = \boldsymbol{0} \in \mathbb{R}^2$.

Vậy, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ đã cho là một tích vô hướng.

b) Độ dài của véc-tơ $v = (1, 1)$ theo tích vô hướng trên là

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\langle (0,1), (0,1)\rangle} = \sqrt{0 - 2(0)(1) - 2(1)(0) + 5(1)(1)} = \sqrt{5}.$$

c) Khoảng cách giữa hai véc-tơ u và v là

$$d(u,v) = \|u - v\| = \|(1,0) - (0,1)\| = \|(1,-1)\| = \sqrt{\langle (1,-1),(1,-1)\rangle} = \sqrt{10};$$

8.2 TÍNH TRỰC GIAO

8.2.1 Định nghĩa. Cho X là một không gian véc-tơ với tích vô hướng $\langle\cdot,\cdot\rangle$, tập M trong X và véc-tơ x, y thuộc X.

(1) Hai véc-tơ x và y được gọi là *trực giao* (hay vuông góc), viết là $x\perp y$, nếu $\langle x,y\rangle=0$.

(2) Nếu hai véc-tơ phân biệt bất kỳ của M đều trực giao nhau

$$u\perp v,\ \forall u,v\in M \text{ và } u \neq v,$$

thì M được gọi là một *tập (hay hệ) trực giao*.

(3) Nếu M là một tập trực giao và tất cả các véc-tơ của M đều là véc-tơ định chuẩn $\|v\|=1, \forall v \in M$, thì M được gọi là một *tập (hay hệ) trực chuẩn*.

(4) Tập các phần tử vuông góc với tập M, kí hiệu là $M^{\perp}$, được gọi là *phần bù vuông góc* của M.

Note 3:

1-Hai véc tơ trực giao (vuông góc):

2-Hệ(Tập) trực giao:

-Lấy ra 2 véc tơ bất kỳ thì 2 véc tơ đó vuông góc.

3-Hệ(tập) trực chuẩn:

-Hệ trực giao

-Chuẩn của từng véc tơ = 1

4-Hệ trực giao hoặc trực chuẩn thì chắc chắn độc lập tuyến tính.

5-Phần bù vuông góc của M, ký hiệu:

6-Xem kỷ các tính chất quan trọng ở slide sau.

8.2.2 Tính chất. *Từ định nghĩa, ta suy ra một số tính chất sau.*

(1) *Nếu véc-tơ u và v cùng trực giao với x thì tổ hợp tuyến tính của u và v cũng trực giao với x, nghĩa là*

$$\boxed{x \perp u,\ x \perp v \Rightarrow x \perp \alpha_1 u + \alpha_2 v,\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.}$$

(2) *Nếu x trực giao với mọi phần tử của M, ta viết là $x \perp M$, thì x trực giao với Span(M),* hay *$x \perp Span(M)$.*

(3) *Nếu x trực giao với không gian X thì $x = \mathbf{0}$.*

(4) *$M^{\perp}$ là một không gian con của X.*

(5) *Nếu M là không gian con của X, thì x trực giao với M khi và chỉ khi nó trực giao với cơ sở của M.*

8.2.3 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho không gian con

$$W = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

Xác định m để véc-tơ $v = (1, 1, m)$ trực giao với không gian W.

⌈ Trong Ví dụ 7.3.7, ta đã chỉ ra một cơ sở của W có thể lấy là

$$w_1=(-1, 1, 0);\ w_2=(-1, 0, 1).$$

Vậy để véc-tơ v trực giao với W, theo Tính chất 8.2.2-(5), thì v phải trực giao với cơ sở của W, nghĩa là v trực giao với véc-tơ w_1 và w_2.

Do đó

$$\begin{cases} \langle v, w_1 \rangle = 0 \\ \langle v, w_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m - 1 = 0.$$

Vậy $m = 1$. ⌋

8.2.4 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc. Hãy tìm phần bù trực giao của tập

$$M = \{v_1 = (1, 0, 0);\ v_2 = (1, 1, 0)\}.$$

⌈ Gọi $M^\perp$ là bù trực giao của M, và véc-tơ $x = (x_1, x_2, x_3) \in M^\perp$. Khi đó, x phải trực giao với các véc-tơ trong M, nghĩa là

$$\begin{cases} \langle x, v_1 \rangle = 0 \\ \langle x, v_2 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \qquad = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Hay véc-tơ x có dạng $x = (0, 0, x_3)$; $\forall x_3 \in \mathbb{R}$.

Như vậy, $M^{\perp} = \{x = a(0, 0, 1); a \in \mathbb{R}\} = Span\{(0, 0, 1)\}$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$.

Ta cũng suy ra được một cơ sở của $M^{\perp}$ là $\{(0, 0, 1)\}$ và $dim\ M^{\perp} = 1$. ⌋

Tiếp theo là một số tính chất của không gian tích vô hướng, các kết quả được phát biểu mà bỏ qua phần chứng minh. Đặc biệt là quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt cho phép xây dựng một tập trực giao hay cơ sở trực giao từ một tập véc-tơ cho trước mà không gian sinh của chúng vẫn là một.

8.2.5 Định lí *Cho $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là hệ trực giao gồm các véc-tơ khác không trong không gian tích vô hướng, khi ấy chúng độc lập tuyến tính.*

Chứng minh

Xét

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = 0.$$

Lấy tích vô hướng hai vế của phương trình trên với véc-tơ v_i, $1 \leq i \leq n$, thì

$$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n, v_i \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle = 0.$$

Vì $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, nên $\alpha_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, do đó $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là tập độc lập tuyến tính.

8.2.6 Định lí. *Cho X là không gian Euclid n chiều với cơ sở trực chuẩn* $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ *và*

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n;\ y = y_1e_1 + y_2e_2 + \dots + y_ne_n.$$

Khi ấy, ta có

(1) $x_i = \langle x, e_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$,

(2) $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$,

(3) $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. *(Đẳng thức Parseval)*

8.2.7 Định lí (Trực giao hóa Gram – Schmidt). *Cho X là không gian véc-tơ với tích vô hướng, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một tập độc lập tuyến tính trong X. Hệ các véc-tơ trực giao $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ được xây dựng như sau.*

$$w_1 = v_1,$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1,$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle w_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle w_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1,$$

$$, \ldots$$

$$\boxed{w_n = v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle w_n, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k.}$$

Khi đó, $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ là một tập trực giao trong X. Hơn nữa, gọi $V=Span\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ thì $V=Span\{w_1, w_2, ..., w_n\}$. Và như vậy $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ là một cơ sở trực giao của V.

Note 4: Vấn đề?

1- Cho X: KG TVH

2- Gọi S là tập ĐLTT trong X, thì S có thể là:

*Tập ĐLTT bình thường.

*Nó là hệ trực giao (... đẹp vừa)

*Nó là hệ trực chuẩn (... đẹp nhất)

➔Vậy có thể đưa S từ bình thường về “đẹp vừa” không? Từ “đẹp vừa” qua “đẹp nhất” thì làm thế nào?

Note 5: Trực giao hóa Gram-Schmidt.

1-Nhớ công thức:

$$W_1 = V_1,$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle v_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1,$$

$$W_2 = V_2 - \frac{\langle V_2; V_1\rangle}{\|V_1\|^2} V_1,$$

, ...

$$\boxed{w_n = v_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\langle v_n, v_k\rangle}{\|v_k\|^2} v_k.}$$

2-VD: Trong R^3, với TVH chính tắc, cho hệ

$S = \{ v_1 = (0;1;2);\ v_2 = (1;2;0);\ v_3 = (2;1;0) \}$ độc lập tuyến tính.

Hãy xây dựng hệ trực giao từ hệ trên?

Note 6: Cơ sở trực chuẩn

1- Trực giao hóa Gram-Schmidt:

Đưa từ bình thường về đẹp vừa (trực giao).

2- Vậy để đưa từ đẹp vừa (trực giao) về đẹp nhất (trực chuẩn), chỉ cần lấy từng véc tơ nhân với 1 phần chuẩn của nó.

-VD: tiếp theo từ VD vừa làm,...

3- Nếu ngay từ đầu yêu cầu xây dựng cơ sở trực chuẩn luôn thì sao?

B1- Xây dựng cơ sở trực giao

B2- Trực chuẩn

B3- Kết luận

8.2.8 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho tập độc lập tuyến tính

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Hãy xây dựng một hệ trực giao từ hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ trên.

Γ Theo quá trình Gram – Schmidt được trình bày ở Định lí 8.2.7, gọi

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle w_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \frac{\langle w_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{5/2}{9/2} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -1/2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/9 \\ -1/9 \\ -2/9 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Tập $\{w_1, w_2, w_3\}$ là hệ trực giao cần tìm.

Ngoài ra, ta có nhận xét rằng hệ $\{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ (do có số véc-tơ độc lập tuyến tính bằng với số chiều của không gian), theo Định lí 8.2.5 và 8.2.7, ta suy ra hệ $\{w_1, w_2, w_3\}$ là một cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^3$. ⌋

8.2.10 Ví dụ. Trong $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad H = Span\{v_1, v_2\}.$$

Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn cho H.

Trước tiên, ta có nhận xét rằng $\{v_1, v_2\}$ là hệ độc lập tuyến tính nên là một cơ sở của H. Do đó, ta có thể xây dựng một cơ sở trực giao cho H theo phương pháp Gram – Schmidt. Gọi

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, tập $\{w_1, w_2\}$ là một cơ sở trực giao của H. Đặt

$$u_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad u_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ta được $\{u_1, u_2\}$ là một cơ sở trực chuẩn của H. ⌋

8.2.11 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc, cho hệ

$$M = \{v_1=(1, -2, 1, 3);\ v_2=(2, 1, -3, 1);\ v_3=(1, 1, 1, 0)\}.$$

Hãy bổ sung thêm một véc-tơ vào M để được một cơ sở trực giao của $\mathbb{R}^4$.

⌈Ta dễ dàng kiểm được M là hệ trực giao.

Gọi véc-tơ cần bổ sung vào M là $x=(x_1, x_2, x_3, x_4)$, thì x phải trực giao với cả ba véc-tơ v_1, v_2 và v_3. Nghĩa là

$$\begin{cases} \langle x, v_1 \rangle = 0 \\ \langle x, v_2 \rangle = 0 \\ \langle x, v_3 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $x_1 = -x_4$, $x_2 = x_4$, $x_3 = 0$, hay véc-tơ x có dạng

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4(-1, 1, 0, 1),\ x_4 \in \mathbb{R}.$$

Nghĩa là có vô số véc-tơ x trực giao với cả ba véc-tơ v_1, v_2 và v_3.

Ta chọn một véc-tơ là $(-1, 1, 0, 1)$ bổ sung vào M để thỏa yêu cầu đề bài.

8.2.12 Định lí. *Cho H là không gian con của không gian Euclid X, khi ấy ta có:*

(1) Nếu $H \neq X$ thì $\exists x \in X$, $x \neq 0$ và $x \perp H$ (tức là $H^{\perp} \neq \{\mathbf{0}\}$).

(2) $\dim X = \dim H + \dim H^{\perp}$.

(3) $(H^{\perp})^{\perp} = H$.

(4) Nếu $x = h + v$; $h \in H$; $v \in H^{\perp}$ thì $\|x\|^2 = \|h\|^2 + \|v\|^2$.

8.2.13 Chú ý. Phần tử *h* trong khai triển

$$\boxed{x = h + v,\ \ h \in H \text{ và } v \in H^{\perp},}$$

được gọi là *hình chiếu vuông góc* của *x* xuống không gian con *H*, kí hiệu là $pr_H x$ hay $P_H x$.

8.2.14 Định lí. *Cho X là không gian Euclid, H là không gian con của X, $x \in X$ và $h = pr_H x$. Khi đó*

(1) h là phần tử trong H gần X nhất, nghĩa là

$$\boxed{\|x - h\| = \min_{y \in H} \|x - y\|.}$$

(2) Nếu $\{e_1, e_2, ..., e_r\}$ là một cơ sở trực chuẩn của H thì

$$\boxed{h = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 + ... + \langle x, e_r\rangle e_r.}$$

8.2.15 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc, cho

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad H = Span\{v_1, v_2\}.$$

Hãy tìm véc-tơ h và v để có biểu diễn dạng $x = h + v$, với $h \in H$, $v \in H^{\perp}$.

[Theo Ví dụ 8.2.10, ta đã xây dựng được một cơ sở trực chuẩn của H là

$$\left\{u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}; u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

Theo Định lí 8.2.14-(2), véc-tơ h là véc-tơ hình chiếu của x xuống H,

$$h = pr_H x = \langle x, u_1\rangle u_1 + \langle x, u_2\rangle u_2$$
$$= \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}10\\7\\13\end{bmatrix}.$$

Để có biểu diễn $x = h + v$, với $v \in H^{\perp}$, thì ta phải có

$$v = x - h = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Chú ý: Các loại không gian đã học

1. Không gian véc tơ
2. Không gian con
3. Không gian với tích vô hướng
4. Không gian Euclid
5. Không gian Unita

TÓM TẮT

Trong bài này, học viên làm quen với một số khái niệm về tích vô hướng, không gian với tích vô hướng, tập trực giao, bù trực giao, hình chiếu vuông góc,...

1. Tích vô hướng giữa hai véc-tơ x và y là phép ứng cặp véc-tơ này với một số, kí hiệu là $\langle x,y\rangle$, thỏa đủ bốn tính chất như đã nêu trong Định nghĩa 8.1.1.

2. Không gian véc-tơ X có trang bị một tích vô hướng được gọi là không gian véc-tơ với tích vô hướng, còn được gọi tắt là không gian tích vô hướng.

   Không gian Euclid là không gian véc-tơ thực hữu hạn chiều với tích vô hướng.

3. Chuẩn hay độ dài của véc-tơ x là đại lượng $\boxed{\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}}$. Véc-tơ định chuẩn là

véc-tơ có chuẩn (độ dài) bằng 1.

4. Với bất kì véc-tơ x, y trong không gian tích vô hướng, ta có

- Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz: $\boxed{|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|;}$

- Bất đẳng thức tam giác: $\boxed{\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.}$

5. Trong không gian tích vô hướng, ta nói

- Hai véc-tơ x và y là *trực giao*, $\boxed{x \perp y, \text{ nếu } \langle x, y\rangle = 0.}$

- M là một tập (hay hệ) trực giao nếu $u \perp v$, $\forall u, v \in M$ và $u \neq v$.

- M là một tập trực chuẩn nếu M là tập trực giao và $\|v\|=1$, $\forall v \in M$.

- Bù vuông góc của M, kí hiệu là $M^{\perp}$, là tập chứa các phần tử vuông góc với tập M.

6. Quá trình trực giao hóa Gram-Schmidt đối với tập $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính trong không gian X như sau.

$$\text{Gọi } w_1 = v_1,\ w_j = v_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\langle w_j, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k,\ 2 \le j \le n,$$

và $u_j = \dfrac{1}{\|w_j\|} w_j, 1 \le j \le n.$

Khi đó

- $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ là tập trực giao trong X,
- $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ là tập trực chuẩn trong X,
- $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = Span\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} = Span\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$,
- $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ là một cơ sở trực giao của $Span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$,

7. Cho H là không gian con của không gian Euclid X, bất kì x trong X đều có thể biểu diễn ở dạng

$$\boxed{x = h + v,\ \ h \in H \text{ và } v \in H^{\perp}.}$$

Khi đó h gọi hình chiếu vuông góc của x xuống H, kí hiệu $h = pr_H x$ hay $P_H x$.

Ngoài ra, h là phần tử trong H gần X nhất: $\boxed{\|x - h\| = \min\limits_{y \in H} \|x - y\|.}$

Véc-tơ h còn được biểu diễn ở dạng

$$h = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 + \dots + \langle x, e_r\rangle e_r,$$

với $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ là một cơ sở trực chuẩn của H.

Nộp BT bài 8

-Nộp online

-Chuẩn bị ôn tập kiểm tra

-Làm hết các bt đã cho + trong giáo trình,...