BÀI 3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Học xong bài này người học cần nắm được các nội dung sau.

- *Phương pháp khử Gauss để giải hệ phương trình tuyến tính tổng quát.*
- *Dùng định thức để giải hệ Cramer.*
- *Giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.*

1-Định nghĩa: GT (Luôn học kèm với giáo trình)

A-Dạng: m phương trình (m hàng), n ẩn (...)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

B-Dạng ma trận: $\boxed{AX = b.}$

-Với: A ma trận hệ số.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

-và X là ma trận cột ẩn số: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ và b là MT cột hệ số tự do: $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$

Note: Ma trận hệ số mở rộng:

$$\tilde{A} = (A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

C-Nghiệm của hpt trên: Là ? $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$

thỏa hệ.

D-Hai hpt có cùng số ẩn: **tương đương** khi nào ?

E-NX: 3 phép biến đổi (sơ cấp): chuyển 1 hpt tuyến tính => hpt tương đương:

1- *Nhân cả hai vế của một phương trình cho một số khác 0.*

2- *Cộng một phương trình đã được nhân cho một số vào một phương trình khác.*

3- *Đổi vị trí hai phương trình.*

F-Ví dụ: a) Giải hpt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = -5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_2 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + 3x_3 = -9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_3 = -10. \end{cases}$$

Cách 1: Khử trực tiếp các ẩn:

B1-Khử x_1 ở PT thứ 2 và 3:

B2-Khử x_2 (nếu có) ở PT thứ 3

B3-Giải ngược từ dưới lên

$$\boxed{x_3 = -2;\ x_2 = 3;\ x_1 = 1.}$$

B4: Kết luận:

Vậy nghiệm của hpt là:

$x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = -2$.

Bước 1: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & -5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -9 \end{array}\right)$$

Bước 2: $$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right).$$

Cách 2:

Dùng biến đổi MT

B1-Viết MT hệ số mở rộng: (A|b)

B2-Biến đổi về MT bậc thang bằng phép biến đổi sơ cấp đối với hàng.

B3-Thay ẩn số vào, và giải ngược từ dưới lên (nếu có)

B4-Kết luận.

NX: Cách này viết gọn hơn => nhiều ưu điểm,...

b)Giải hpt: $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

-Dùng Ma trận:,…

-KL: Nghiệm là: (1; 1; 3)

-Kiểm tra lại bằng Máy tính.

2-Vấn đề: HPT tuyến tính tổng quát:
AX = b có nghiệm khi nào?

A-Định lý Kroneker-Capeli:

Hệ phương trình tuyến tính tổng quát có nghiệm khi và chỉ khi

$$\operatorname{rank}(A|b) = \operatorname{rank} A.$$

B-NX quan trọng: *Cho hệ phương trình $AX = b$. Khi ấy*

1- Nếu $r_{(A/b)} \neq r_A$ thì hệ vô nghiệm.

2- Nếu $r_{(A/b)} = r_A$ $(= r)$ thì hệ có nghiệm.

Nếu $r = n$ (số ẩn) thì hệ có một nghiệm duy nhất.

Nếu $r < n$, hệ có vô số nghiệm phụ thuộc $n - r$ tham số.

C- 4 bước giải HPT *(phương pháp Gauss)*:

1. Lập MT mở rộng (A|b)
2. *Đưa ma trận mở rộng về MT bậc thang bằng phép biến đổi hàng*
3. Giải ngược từ dưới lên *(sau khi chú ý đến hạng của MT A và (A|b))*
4. Kết luận.

D-VD: Đúng hay sai?

a) Hệ pt có nghiệm duy nhất?

$$\boxed{r_A = r_{(A|b)} = 3}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

b) Hệ pt vô nghiệm?

$$r_A = 1;\ r_{(A|b)} = 2.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

c) Hệ PT có Vô số nghiệm?

$$\boxed{r_{(A|b)} = r_A = 3;\ n = 5,}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

3-HPT Tuyến tính thuần nhất: AX = 0.

A-Định nghĩa:

-Cột b là MT cột toàn số 0.

-Bộ số: (0; 0;…; 0): nghiệm tầm thường.

-Thế nào là nghiệm không tầm thường?

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

B-Định lý: HPT AX = 0 (1) có nghiệm không tầm thường khi: rankA < n (số ẩn số).

-NX: Nếu hệ (1) có số phương trình ít hơn số ẩn thì hệ (1) có nghiệm không tầm thường.

-VD1: Hệ có 2 PT và 3 ẩn?

-VD2: Giải: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

Ta có $(A/b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_3 \to h_3 - 3h_1]{h_2 \to h_2 - 3h_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[h_3 \leftrightarrow h_2]{h_3 \to -h_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_3 \to h_3 + 4h_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Chọn ẩn cơ sở là x_1, x_2, x_3 và ẩn tự do là $x_4 = \alpha, x_5 = \beta$

Hệ phương trình trên tương đương với

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4-x_5=0 \\ x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ -x_3+3x_4-8x_5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_2-2x_3-x_4+x_5 \\ x_2=-x_3-x_4+3x_5 \\ x_3=3x_4-8x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=4\alpha-11\beta-2(3\alpha-8\beta)-\alpha+\beta \\ x_2=-3\alpha+8\beta-\alpha+3\beta=-4\alpha+11\beta \\ x_3=3\alpha-8\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-3\alpha+6\beta \\ x_2=-2\alpha+11\beta \\ x_3=3\alpha-8\beta \end{cases} \Rightarrow \boxed{X=(-5\alpha+6\beta,-2\alpha+11\beta,3\alpha-8\beta,\alpha,\beta);} \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}.$$

4-Hệ Cramer - PP Định thức.

A-Xét hpt: AX = b (1) gồm: n phương trình, n ẩn (lúc này A là MT vuông). Khi detA khác 0, thì (1) được gọi là HPT Cramer.

-NX: Nhân A^{-1} vào bên trái (thứ tự rất quan trọng vì phép nhân MT không có tính giao hoán) của (1) ta có:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}.b \Rightarrow X = A^{-1}.b$$

=> Hệ Cramer có nghiệm duy nhất.

⇒Cách giải hệ (1) bằng PP MT nghịch đảo:

B1-Tính A^{-1}

B2-Tính $A^{-1}.b$

B3-Kết luận

Giải: $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7. \end{cases}$$

Với $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}$, ta có ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \dfrac{1}{29}\begin{pmatrix} 29 & 5 & -11 \\ -29 & 2 & 13 \\ 29 & -6 & 10 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}b} = \frac{1}{29}\begin{pmatrix} 29 & 5 & -11 \\ -29 & 2 & 13 \\ 29 & -6 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tức là $\boxed{x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = 2.}$

B-Công thức Cramer:

-Note: A^{-1} = ?

-Suy ra Công thức:

$$X = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Vậy $\boxed{x_k = \dfrac{1}{\det A}(A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \ldots + A_{nk}b_n)}$, $k = 1, 2, \ldots, n.$

Xét định thức Δ_k nhận được từ định thức của A bằng cách thay cột thứ k bởi cột vế phải

$$\Delta_k = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & \uparrow & & \phantom{a_{1n}} \\ & & & \text{cột thứ k} & & \end{array} \end{array}.$$

Chú ý rằng phần bù đại số của b_i là phần bù đại số của a_{ik}. Ta khai triển định thức Δ_k theo cột thứ k,

$$\boxed{\Delta_k = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \ldots + b_nA_{nk}.}$$

Cho nên ta được $\boxed{x_k = \dfrac{\Delta_k}{\det A}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Vậy nếu kí hiệu $\boxed{\Delta := \det A}$, ta có Định lí 3.3.5 sau.

3.3.5 Định lí (Cramer).

Nếu hệ n phương trình n ẩn AX = b có định thức $\Delta = \det A \neq 0$ thì hệ có một nghiệm duy nhất được xác định bởi công thức

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \dots;\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

trong đó Δ_k là định thức nhận được từ Δ bằng cách thay cột thứ k bởi cột vế phải.

VD: Giải:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = -1 \\ y + z = 1 \\ -x + y + z = -1. \end{cases}$$

Ta có

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Vậy $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2,\ y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 4,\ z = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -3,$

NX: Quan trọng.

HPT tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ (nếu A là MTV)

có nghiệm không tầm thường

(có ít nhất 1 số khác 0)

khi và chỉ khi $\det A = 0$.

NX: detA khác 0 thì có nghiệm tầm thường.

BT: Bài học 3

Đã có => Nộp Online

Good luck…

*****

Buổi sau: Học bài 4,5