BÀI 5. CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VÉC-TƠ

Học xong bài này, người học cần nắm được các nội dung sau.

- Khái niệm và cách xác định một hệ véc-tơ là độc lập tuyến tính hay là phụ thuộc tuyến tính.
- Khái niệm cơ sở và số chiều của một không gian véc-tơ.
- Cách kiểm tra một tập có là cơ sở của một không gian véc-tơ hay không và xác định số chiều của một không gian hữu hạn chiều.
- Cách xây dựng một cơ sở cho một không gian véc-tơ từ một tập độc lập tuyến tính hoặc từ một tập sinh.

5.1 TẬP VÉC-TƠ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH

5.1.1 Định nghĩa. Tập các véc-tơ $\{v_1, v_2, \ldots v_m\}$ trong một không gian véc-tơ được gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu tồn tại các số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ không đồng thời bằng không sao cho

$$\boxed{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = \mathbf{0}.} \quad (*)$$

Ngược lại, tập $\{v_1, v_2, \ldots v_m\}$ được gọi là *độc lập tuyến tính* (hay còn gọi các véc-tơ $v_1, v_2, \ldots v_m$ độc lập tuyến tính).

Vậy tập $\{v_1, v_2, \ldots v_m\}$ độc lập tuyến tính có nghĩa là hệ thức (*) chỉ đúng trong một trường hợp duy nhất là $\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0.}$

Note 1-- Nhớ ngay

1-Tập véc tơ: Phụ thuộc tuyến tính.

-VD: 2 véc tơ,…

2-Tập véc tơ: Độc lập tuyến tính.

-VD: 2 véc tơ,…

NX: 2 véc tơ trong R^n :

- Cùng phương: PTTT => VD:
- K cùng phương: ĐLTT => VD:

Note 2-- Xét nhanh 2 véc tơ trong R^2, 3 véc tơ trong R^3 có ĐLTT hay không?

- **B1- Xếp các véc tơ thành ma trận A.**
- **B2- Tính định thức: detA = L**
- **B3 - Nếu L khác 0 thì hệ véc tơ độc lập tuyến tính**

  - Nếu L = 0 thì hệ véc tơ phụ thuộc tuyến tính

VD: Xét 2 VD,…

5.1.4 Định lí. *Trong không gian véc-tơ X, các mệnh đề sau đúng.*

a) *Tập véc-tơ* $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ *của X là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi có một véc-tơ trong chúng là tổ hợp tuyến tính của các véc-tơ còn lại.*

b) *Nếu trong các véc-tơ* $\{v_1, v_2, \ldots v_m\}$ *có véc-tơ* **0** *thì chúng phụ thuộc tuyến tính.*

c) *Khi thêm véc-tơ vào một tập phụ thuộc tuyến tính ta được tập phụ thuộc tuyến tính.*

d) *Khi loại véc-tơ ra khỏi một tập độc lập tuyến tính ta được tập độc lập tuyến*

☞ Về mặt hình học, trong $\mathbb{R}^3$, ba véc-tơ đồng phẳng thì phụ thuộc tuyến tính, ngược lại, ba véc-tơ không đồng phẳng thì độc lập tuyến tính.

5.1.5 Định lí *(bổ đề cơ bản)*. *Cho m véc-tơ $y_1, y_2,..., y_m$ là tổ hợp tuyến tính của k véc-tơ $v_1, v_2, ..., v_k$. Nếu $m>k$ thì các véc-tơ $y_1, y_2, ..., y_m$ phụ thuộc tuyến tính.*

Ta chấp nhận kết quả này.

5.2 CƠ SỞ VÀ SỐ CHIỀU

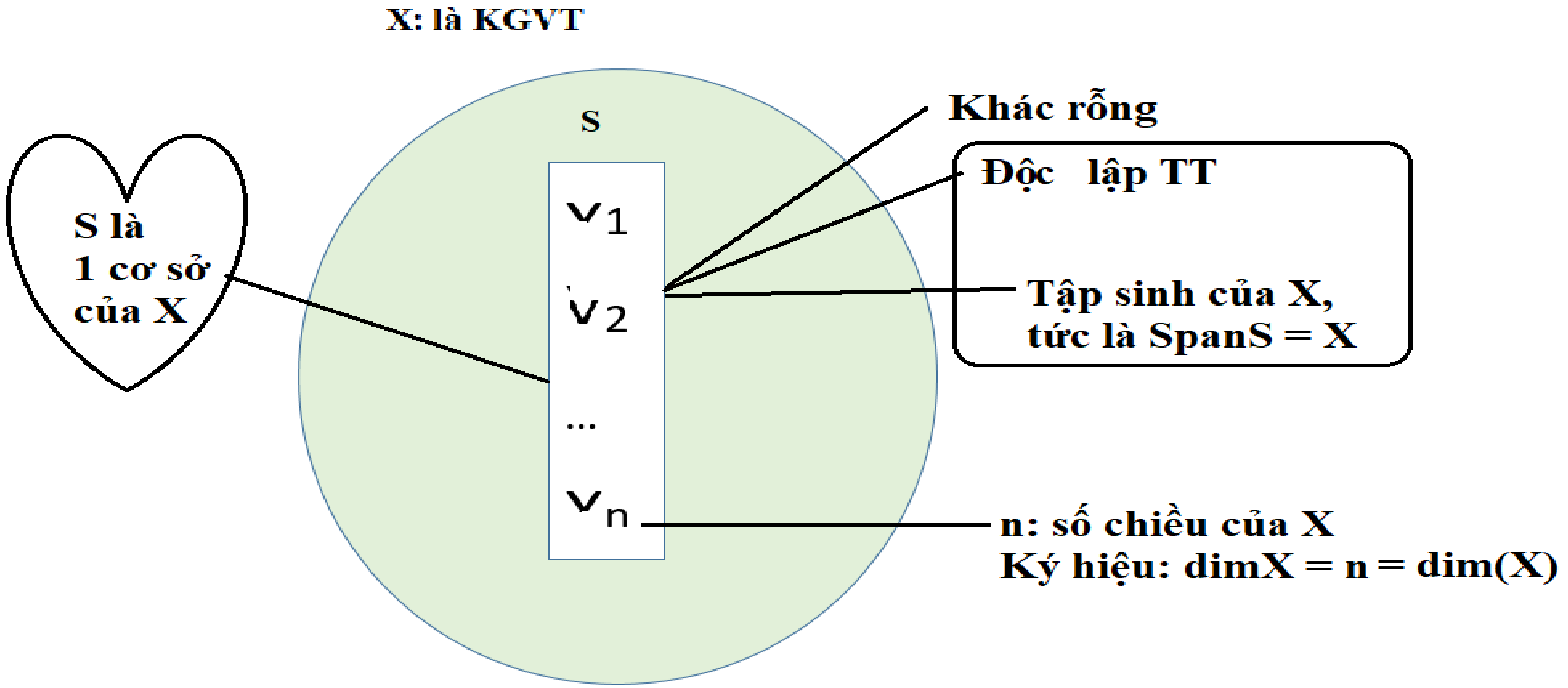
5.2.1 Định nghĩa. Tập $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ trong không gian véc-tơ X được gọi là một cơ sở của X nếu

(1) tập S độc lập tuyến tính, và

(2) tập S là tập sinh của X, nghĩa là $X = Span(S)$.

Lưu ý rằng mỗi không gian véc-tơ có thể có vô số cơ sở.

Note 3--Cơ sở và Số chiều.



Note 4 -- Cơ sở, số chiều

1-Cơ sở khác Tập sinh (Cơ sở cũng là tập sinh, nhưng tập sinh chưa chắc là cơ sở, vì tập sinh có thể PTTT).

-Trong tập sinh sẽ tìm được 1 cơ sở.

2-KG Hữu hạn chiều: dimX = dim(X) = n (hữu hạn), như vậy, nếu biết cơ sở => tìm được số chiều).

(=> số phần tử của tập sinh >= n)

3-KGVT X có thể có nhiều cơ sở nhưng số phần tử trong cơ sở thì bằng nhau và = số chiều

= dimX = dim(X) = n.

4-KG vô hạn chiều: trong X luôn tìm được số Véc tơ ĐLTT tùy ý.

5.2.10 Định lí. *Trong không gian véc-tơ n chiều:*

(1) *Bất kỳ tập có số véc-tơ lớn hơn n đều phụ thuộc tuyến tính;*

(2) *Bất kỳ tập có số véc-tơ nhỏ hơn n đều không là tập sinh của không gian;*

(3) *Mọi tập n véc-tơ độc lập tuyến tính đều là cơ sở;*

(4) *Mọi tập n véc-to sinh không gian đều là cơ sở.*

Từ định lí này ta có hệ quả sau đây.

5.2.11 Hệ quả. *Trong không gian véc-tơ n chiều:*

(1) *Số chiều là số tối đại các véc-tơ độc lập tuyến tính;*

(2) *Số chiều là số tối thiểu các véc-tơ của các tập sinh;*

(3) *Số chiều của không gian con không vượt quá n.*

5.2.12 Định lí. *Cho không gian véc-tơ n chiều X. Khi đó, một tập k véc-tơ độc lập tuyến tính bất kì trong X đều có thể được bổ sung (n – k) véc-tơ để trở thành một cơ sở của X.*

Note 5 -- Số chiều cụ thể

TT	Ký hiệu	Số chiều	Ghi chú
1	R^n	n	Không gian R^n
2	$P_n[t]$	n+1	Tập tất cả các đa thức có bậc <= n
3	$M_n[K]$	$n*n = n^2$	Tập tất cả các ma trận vuông cấp n
4	$M_{mxn}[K]$	m*n	Tập tất cả các ma trận cấp mxn

Hãy viết ra 1 cơ sở cho mỗi KGVT trên ?

Note 6 -- Cách CM tập E là cơ sở của X

B1- CM: E sinh ra X, tức là: X = span(E)

(Mọi véc tơ trong X đều biểu diễn được qua các véc tơ trong E – Xem lại các VD trong giáo trình + vở)

B2- CM: E độc lập tuyến tính

B3- Kết luận: E là cơ sở của X

Bài Tập Bài học 5

- Đã có, Làm và nộp Online,
- Sẽ tính điểm vào cột hoặc điểm thưởng,…

****

Quan trọng:

Buổi sau Kiểm tra ½ HK

Từ bài 1 – 5

(yêu cầu làm hết BT TL, TN, Làm thêm)

Có nên có 1 buổi live để sửa BT không?