BÀI 11. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Học xong bài này, người học cần nắm được các nội dung sau.

- *Dạng toàn phương, dấu của dạng toàn phương, đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao và phương pháp Lagrange.*
- *Luật quán tính, Định lí Sylvester về dấu của dạng toàn phương.*

11.1 DẠNG TOÀN PHƯƠNG

11.1.1 Định nghĩa. Một *dạng toàn phương* n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là một hàm bậc 2 có dạng

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n, \end{aligned}}$$

với các hệ số a_{ik} là các số thực và các biến x_i là các biến thực.

Vậy, nếu kí hiệu

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad a_{lk} = a_{kl},$$

thì ta có thể viết dạng toàn phương ở dạng ma trận $\boxed{f(x) = x^T A x.}$

Ma trận A được gọi là *ma trận của dạng toàn phương*, lưu ý rằng A là ma trận đối xứng.

Note 1: Dạng toàn phương n biến

1-ĐN: … Là một hàm bậc hai.

-Dạng 1: Dạng khai triển: $f(x) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \ldots$ (viết chi tiết ra)

-Dạng 2: Dạng ma trận: $f(x) = x^TAx$, với:

*x là ma trận cột => $x^T = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ là ma trận hàng.

*A là MTV cấp n: MT của dạng toàn phương và A là MT đối xứng ($A = A^T$)

-Dạng 3: Dạng chính tắc (không duy nhất):

$f(x) = \ldots$(đổi biến)$\ldots = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \ldots + a_n y_n^2$

(chỉ có số mũ = 2 ở từng số hạng, a_i có thể = 0 hoặc khác 0)

-Dạng 4: Dạng chuẩn(không duy nhất): Tương tự dạng 3 nhưng các hệ số chỉ = 1, hoặc -1 hoặc 0.

2-VD: a) Viết dạng toàn phương 2, 3 biến của từng dạng trên

b) Cho trước dạng toàn phương => viết ma trận của nó

11.1.2 Ví dụ. a) *Hàm* $f(x) = f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_1x_2$ là một dạng toàn phương hai biến. Ma trận A của nó có dạng

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Hàm $g(x) = g(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 4x_2^2 + x_1x_2 - 8x_2x_3$ là một dạng toàn phương 3 biến với ma trận

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -4 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

11.1.3 Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp ma trận trực giao

Cấu trúc của dạng toàn phương sẽ rõ ràng và dễ nghiên cứu hơn nếu ta đổi biến sao cho trong biểu thức không chứa các tích hỗn hợp $x_i x_j$ mà chỉ còn các số hạng chứa bình phương x_i^2.

Cho dạng toàn phương $f(x) = x^T A x$, với A là ma trận vuông đối xứng cấp n với các trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ và U là ma trận trực giao làm chéo hóa A, tức là $U^{-1}AU = D$. Bằng cách đổi biến $x = Uy$, ta đưa được dạng toàn phương về dạng chính tắc

$$f(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Thật vậy, đặt $x = Uy$ (ta cũng suy ra được $y = U^{-1}x$) ta có

$$f(x) = x^T Ax = (Uy)^T A(Uy) = y^T U^T AUy = y^T Dy \text{ (do } U^T = U^{-1})$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Note 2: Đưa Dạng Toàn Phương Về Dạng Chính Tắc Bằng Pp MT Trực Giao

B1: Lập MT A của f

B2: Tìm các giá trị riêng của A, bằng cách giải PT đặc trưng của MT A

B3: Kết luận: Dạng chính tắc dựa vào các giá trị riêng của A ở B2

11.1.4 Ví dụ. Cho dạng toàn phương

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Ma trận của f là

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma trận A có các trị riêng $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$; $\lambda_3 = 5$. Vậy dạng chính tắc là

$$f(x) = y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2.$$

Biểu thức liên hệ giữa x và y có thể xác định như sau.

Với $\lambda = -1$ ta có hai véc-tơ riêng $(0, 1, 1)^T$ và $(1, 0, 1)^T$, sau khi trực chuẩn hóa ta được $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ và $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$.

Với $\lambda = 5$ ta có véc-tơ riêng đơn vị $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$. Vậy ma trận U có dạng

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Ta có $y = U^T x$. Cho nên

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_3),$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-x_1 + x_2 + x_3),$$

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + 2x_2 - x_3).$$

Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc = Pp Lagrange

-Chỉ dùng đổi biến

-Biến đổi đơn giản, quen thuộc

-Không cần tìm giá trị riêng

=>Dễ làm (nhưng cũng dễ nhầm),…

-Xem Cách làm,…

Note 3: Đưa Dạng Toàn Phương Về Dạng Chính Tắc Bằng Pp Lagrange

B1: Gom các số hạng một cách thích hợp, hoặc đổi biến,…

B2: Thêm bớt các số hạng để tạo ra hằng đẳng thức,…

B3: Kết luận: Dạng chính tắc và Công thức biến đổi,…

11.1.6 Ví dụ. Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc

$$Q(x) = -x_2^2 - 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Trước tiên dùng biến đổi $x_1' = x_2$; $x_2' = x_1$; $x_3' = x_3$ để được

$$Q(x) = x_1'^2 - 8x_3'^2 + 2x_1'x_2' + 4x_2'x_3'$$

$$= -x_1'^2 + x_1'x_2' - 8x_3'^2 + 4x_2'x_3'$$

$$= -(x'_1 - x'_2)^2 + x'^2_2 - 8x'^2_3 + 4x'_2x'_3.$$

Tiếp theo, đặt $x''_1 = x'_1 - x'_2$; $x''_2 = x'_2$; $x''_3 = x'_3$, ta có

$$Q(x) = -x''^2_1 + x''^2_2 - 8x''^2_3 + 4x''_1x''_3 = -x''^2_1 + (x''_2 + x''_3)^2 - 12x''^2_3,$$

Cuối cùng, đặt $x'''_1 = x''_1$; $x'''_2 = x''_2 + 2x''_3$; $x'''_3 = x''_3$, ta có

$$Q(x) = -x'''^2_1 + x'''^2_2 - 12x'''^2_3.$$

Kết hợp cà ba công thức đổi biến ở trên, ta có công thức biến đổi

$$\begin{cases} x_1''' = x_2 - x_1 \\ x_2''' = x_1 + 2x_3 \\ x_3''' = x_3, \end{cases}$$

11.2 DẠNG CHUẨN, LUẬT QUÁN TÍNH, DẠNG TOÀN PHƯƠNG XÁC ĐỊNH DẤU

11.2.1 Dạng chuẩn, luật quán tính

Cho dạng toàn phương đã đưa về dạng chính tắc

$$\boxed{G = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2,}$$

trong đó, các hệ số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ có thể có hệ số dương, hệ số âm hoặc bằng 0.

Nếu kí hiệu $y_k^2 = |\lambda_k| x_k^2$ thì ta có *dạng chuẩn*

$$\boxed{G = \varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2 + \ldots + \varepsilon_n y_n^2.}$$

Ở đây $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ có thể bằng 1, −1 hoặc 0. Số các hệ số dương được gọi là chỉ số dương quán tính. Tương tự ta có chỉ số âm quán tính. Dạng chính tắc hoặc dạng chuẩn không duy nhất, tuy nhiên ta có *luật quán tính* sau đây.

Chỉ số dương quán tính, chỉ số âm quán tính của dạng toàn phương là những đại lượng bất biến không phụ thuộc vào phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chuẩn.

Từ phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng ma trận trực giao ta thấy rằng *chỉ số dương quán tính, chỉ số âm quán tính chính là số các trị riêng dương, số các trị riêng âm tương ứng của ma trận toàn phương.*

Note 4: Luật quán tính

1-ĐN: Xét dạng toàn phương có dạng chuẩn: f(x) = …..

-Chỉ số dương quán tính: Số các hệ số dương (cũng = số các giá trị riêng dương).

-Chỉ số âm quán tính: Số các hệ số âm (= số các giá trị riêng âm).

$\Rightarrow$VD:….

2-Luật quán tính: Chỉ số dương quán tính, chỉ số âm quán tính không phụ thuộc (bất biến) vào cách đưa dạng toàn phương ban đầu về dạng chuẩn.

11.2.2 Dạng toàn phương xác định dấu

Dạng toàn phương $g(x)$ được gọi là

a) *xác định dương* nếu $g(x) > 0, \ \forall x \neq 0$;

b) *xác định âm* nếu $g(x) < 0, \ \forall x \neq 0$;

c) *bán xác định dương* nếu $g(x) \geq 0, \ \forall x$ và $\exists x_0 \neq 0: g(x_0) = 0$;

d) *bán xác định âm* nếu $g(x) \leq 0 \ \forall x$ và $\exists x_0 \neq 0: g(x_0) = 0$;

e) *không xác định dấu* nếu $\exists x_1, x_2: g(x_1) < 0; g(x_2) > 0$.

TT	Dạng toàn phương	g(x)	Điều kiện 1	Điều kiện 2	Note
1	Xác định dương	> 0	x khác 0		
2	Xác định âm	< 0	x khác 0		
3	Bán xác định dương	>= 0		Có x_0 khác 0: $g(x_0) = 0$	g(x) = 0 thì có nghiệm khác 0
4	Bán xác định âm	<= 0		Có x_0 khác 0: $g(x_0) = 0$	g(x) = 0 thì có nghiệm khác 0
5	Không xác định dấu			Có x_1, x_2 để: $g(x_1) < 0$ và $g(x_2) > 0$	Có khi âm, có khi dương

11.2.3 Ví dụ. a) Dạng toàn phương $g = x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_2x_3$ có thể đưa về dạng $G = (x_1 - 2x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 3x_2^2$. Rõ ràng $g(x) \geq 0$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy dạng toàn phương *g* là xác định dương.

b) Dạng toàn phương $g = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$ có thể được viết lại dưới dạng $g = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + x_1^2 \geq 0$. Ta có $g(x) = 0$ khi

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Nếu lấy $x = (0, 2, 1) \neq (0,0,0)$ thì $g(x) = 0$. Vậy g là dạng toàn phương bán xác định dương.

11.2.4 Chú ý. Rõ ràng dạng toàn phương g(x) xác định âm khi và chỉ khi dạng toàn phương -g(x) xác định dương. Tương tự g(x) bán xác định âm và chỉ khi -g(x) bán xác định dương.

Từ dạng chính tắc, dạng chuẩn và luật quán tính ta thấy các mệnh đề sau tương đương với nhau.

1) *Dạng toàn phương xác định dương;*

2) *Tất cả các trị riêng của ma trận toàn phương đều dương;*

3) *Chỉ số dương quán tính bằng số chiều của không gian.*

Tương tự ta cũng thấy rằng *dạng toàn phương là bán xác định dương khi và chỉ khi có trị riêng bằng không và các trị riêng còn lại đều dương.*

Đối với tính xác định âm, bán xác định âm ta cũng có những phát biểu tương tự.

Dưới đây, ta sẽ phát biểu một tiêu chuẩn xác định dương rất dễ kiểm tra. Cho dạng toàn phương Q(x) trong cơ sở $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ có ma trận B,

$$\boxed{Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j .}$$

Các định thức

$$\Delta_1 = b_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}; \ \dots ; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

được gọi là các *định thức con chính* của ma trận B.

11.2.5 Định lí Sylvester. Dạng toàn phương Q(x) xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính đều dương, tức là

$$\boxed{\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0; \ldots ; \Delta_n > 0.}$$

Một hệ quả của Định lí Sylvester là: *Dạng toàn phương Q(x) xác định âm khi và chỉ khi các định thức con chính đan dấu với* $\Delta_1 < 0$*, nói cách khác là* $(-1)^k\Delta_k > 0;\ k = 1, 2, \ldots, n$.

Note 5: Xem *dạng toàn phương* là *xác định dương* hay *xác định âm* dựa vào ĐL *Sylvester*

B1: **Viết MT A của dạng toàn phương Q(x)**

B2: **Tính các định thức con chính của MT A:**

$$\Delta_1 = b_{11};\qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix};\qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

B3: **Kết luận:**

- **Nếu tất cả các delta đều dương: Q(x) xác định dương**
- **Nếu dấu của delta là đan dấu và delta1 là âm: Q(x) xác định âm**

11.2.6 Ví dụ. Xét dạng toàn phương ba biến

$$Q(x) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10\,x_1x_3 - 2\,x_2x_3.$$

Ma trận của nó có dạng

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -5 \\ 6 & 6 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tính các định thức con chính

$$\Delta_1 = 9 > 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 18 > 0;\ \ \Delta_3 = |B| = 9 > 0.$$

Vậy ta có dạng toàn phương xác định dương.

Note 6: Chuẩn bị kiểm tra bổ sung

1-Kiểm tra bổ sung

- -Nội dung: Bài 1- 10
- -Số câu: 10 câu: Mỗi bài 1 câu
- -Hình thức: TN + TL(nếu có)
- -Lấy 1 cột điểm bổ sung.
- -In phiếu làm bài như lần trước.
- -Thời gian: Buổi cuối.

2-Đi học đầy đủ để chốt điểm giữa kỳ.

- -Điểm các loại + chuyên cần,...
- -Điểm bài kiểm tra,...

3-Còn 1 buổi nữa thôi, các bạn gắng chút nữa nhé....