Bài 2 – MA TRẬN

A-ĐỊNH NGHĨA: GT

-Thực chiến 1.

1/ĐỊNH NGHĨA: GT

1-Ma trận cấp mxn

(m dòng, n cột):

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Các phần tử a_{ij} có thể là số thực, số phức, hàm số…

Kí hiệu $\boxed{A \in M_{mxn}(K);}$ $A = (a_{ij}); a_{ij} \in K;\ 1 \le i \le m;\ \ 1 \le j \le n;\ \ K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

2-Nếu m = n: MTV cấp n => $\boxed{A \in M_n(\mathbb{K})}$

-VD:

-Đường chéo chính-VD: B

-Đường chéo phụ-VD: C

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

3-MT hàng: A = (1 2 3)

4-MT cột:

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

5-MT chéo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

-MT chéo là MTV,

-Ngoài đường chéo thì = 0 hết.

6-MT không:

7-MT chuyển vị của MT A:

-Ký hiệu: A^T

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

8-MT có dạng bậc thang:

-Nếu thỏa:

1- Các hàng bằng không (nếu có) ở dưới các hàng khác không.

2- Phần tử cơ sở của một hàng nằm phía phải so với phần tử cơ sở của hàng trên.

-Nhớ:

Hàng(cột) = 0 (tất cả các phần tử của hàng(cột) = 0)

Hàng(cột) khác 0 (có ít nhất 1 phần tử của hàng(cột) khác 0)

Phần tử cơ sở (phần tử chính):

VD: MT nào không có dạng bậc thang thì gạch bỏ?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

9-MT có dạng bậc thang rút gọn:

-Là MT bậc thang

-Phần tử cơ sở = 1 và là phần tử duy nhất trong cột chứa nó khác 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10-MT đơn vị:

-Là MTV,
-Các phần tử trên đường chéo chính đều = 1,
-Còn lại đều = 0 hết.

-Note: Vậy MT đơn vị là:

MT chéo,

với các phần tử trên đường chéo chính đều = 1.

-VD:

-MT đơn vị cấp 2: I_2 = ?
-MT đơn vị cấp 3: I_3 = ?
-MT đơn vị cấp n: I_n = ?

ĐẾN ĐÂY, CẦN NHỚ 10 loại MT

1. **Ma trận cấp m x n (m dòng, n cột)**
2. **Ma trận vuông cấp n (tức m =n)**
3. **Ma trận hàng**
4. **Ma trận cột**
5. **Ma trận chéo**
6. **Ma trận Không**
7. **Ma trận chuyển vị**
8. **Ma trận bậc thang** ***(nhớ…Gauss)***
9. **Ma trận bậc thang rút gọn** ***(nhớ Gauss-jordan)***
10. ***Ma trận đơn vị*** *(là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1)*

Note: Ôn lại Thực chiến 1.

2/CÁC PHÉP TOÁN ĐỐI VỚI MT

A-ĐỊNH NGHĨA: GT

-Thực chiến 2

1-HAI MT BẰNG NHAU

2-TỔNG 2 MT

(HIỆU HAI MT ?)

3-TÍCH 1 SỐ VỚI 1 MT

4-TÍCH HAI MT:

-Ký hiệu: AB
-Số cột của A phải bằng số hàng của B

-Xác định (qua VD):

Note:

-Khi AB tồn tại thì BA chưa chắc đã tồn tại

=> tổng quát không có tính giao hoán.

-Khi AB = MT không thì A, B chưa chắc đã bằng MT không.

Cần nhớ ngay:

1. Hai MT bằng nhau
2. Cộng (trừ) hai MT cùng loại
3. Nhân 1 số với 1 MT
4. Nhân 2 MT.

Có phép chia 2 MT không?

B-TÍNH CHẤT: GT

Note: (Xem GT-các tính chất quen thuộc)

1) $\det(AB) = \det A.\det B$

2) $\det A = \det A^T$

3) $(A^T)^T = A$

4) $(A + B)^T = A^T + B^T$

5) $\mathbf{(AB)^T = B^T A^T}$ (dễ nhầm 1)

6) $\mathbf{(mA)^T = mA^T}$ (dễ nhầm 2)

3-Các Phép Biến đổi sơ cấp đối với hàng

A-Định nghĩa: GT

1) $h_i \to \alpha h_i$

2) $h_k \to \beta h_k \pm \alpha h_i$

3) $h_i \leftrightarrow h_j$

Tương tự: Phép biến đổi sơ cấp đối với cột

1) $c_i \to \alpha c_i$

2) $c_k \to \beta c_k \pm \alpha c_i$

3) $c_i \leftrightarrow c_j$

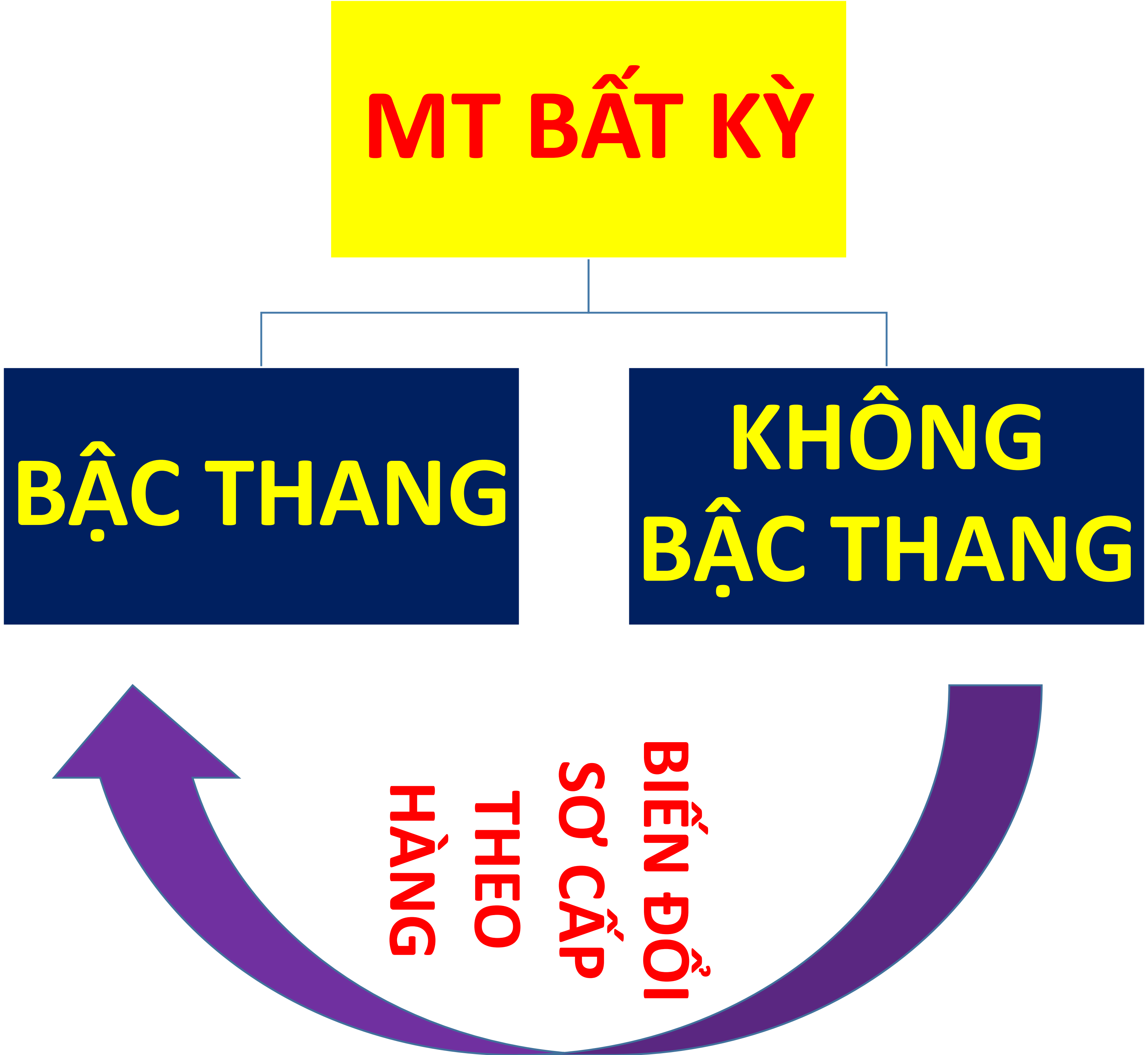
B-VD:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{h_2\to 3h_2}\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 6 & -9 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{h_2\to h_2-2h_1}\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & -11 & -6\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{h_2\leftrightarrow h_1}\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

C-Tính chất:

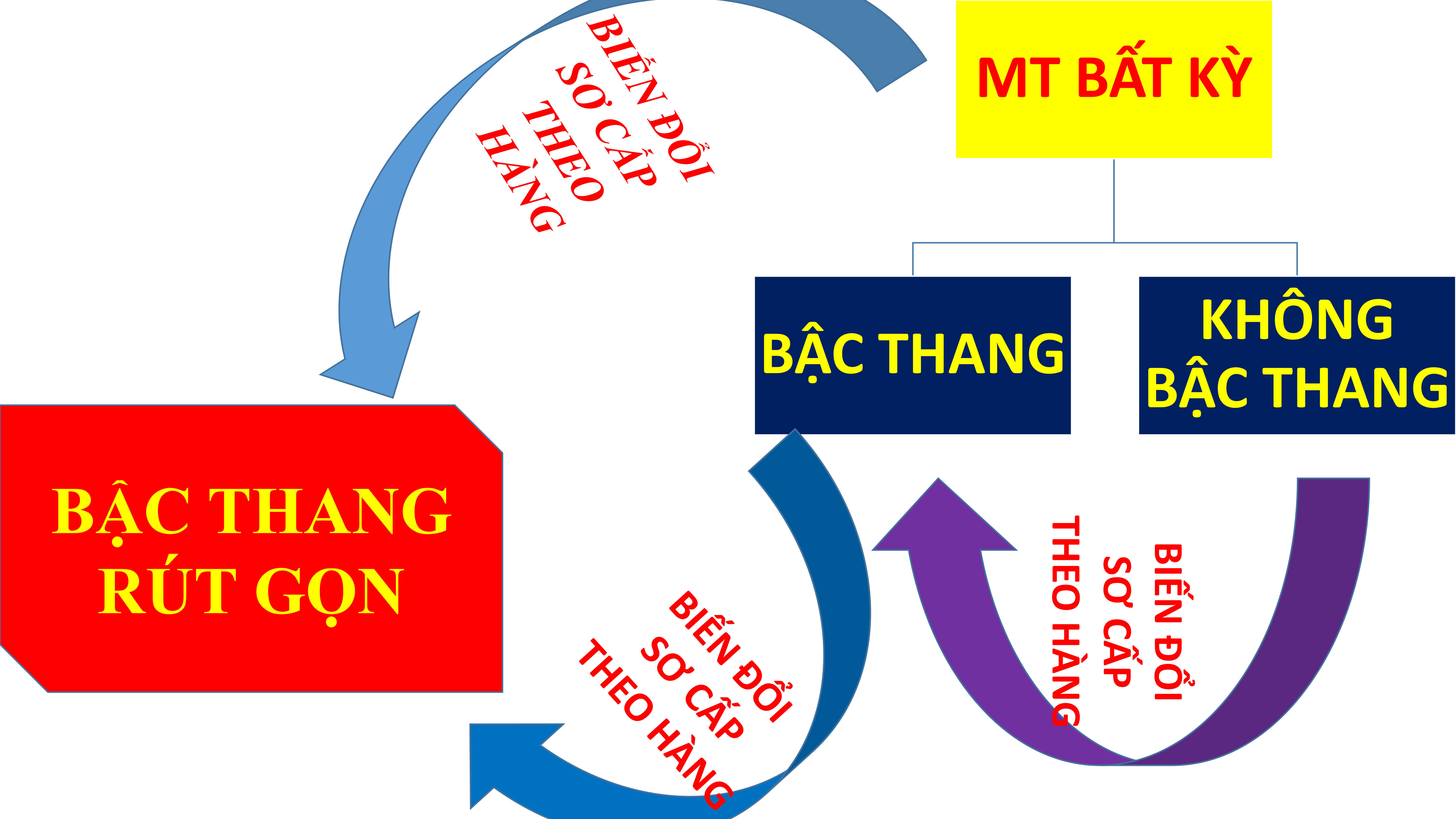

MT BẤT KỲ
BẬC THANG
KHÔNG BẬC THANG
BIẾN ĐỔI SƠ CẤP THEO HÀNG

VD: (PP Gauss)

-VD:

-**Note**: Hạng MT A:

r_A = rankA = Số dòng khác 0 của MT bậc thang.


MT BẤT KỲ
BẬC THANG
KHÔNG BẬC THANG
BẬC THANG RÚT GỌN
BIẾN ĐỔI SƠ CẤP THEO HÀNG
BIẾN ĐỔI SƠ CẤP THEO HÀNG
BIẾN ĐỔI SƠ CẤP THEO HÀNG

VD: (PP Gauss-Jordan)

-VD:

-Note:

-Hạng MT A: r_A = rankA = Số dòng khác 0 của MT bậc thang rút gọn.

-Nếu A là MTV cấp n thì r_A = n khi và chỉ khi detA khác 0.

-Và rankA = rankA^T.

4/MT nghịch đảo:

A-Định nghĩa:

-MT đơn vị: I_n = ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

-MT nghịch đảo, ký hiệu: A^{-1} = ?

B-Tính chất: (Phải nhớ)

1. Nếu A, B khả đảo thì tích AB khả đảo và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

2. Nếu A khả đảo thì A^T khả đảo và $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

3. Nếu A khả đảo thì A^{-1} khả đảo và $(A^{-1})^{-1} = A$.

2

A khả đảo khi và chỉ khi $\det A \neq 0$.

C-Cách tìm MT nghịch đảo

Cách 1: Biến đổi sơ cấp

Cách 2: Dùng Phần bù đại số

Cách 1: Tìm A^{-1} bằng pp biến đổi hàng:

B1: Viết ma trận mở rộng: $(A|I)$

B2: Dùng phép biến đổi sơ cấp theo hàng để biến đổi MT mở rộng thành: $(I|A^{-1})$

B3: Kết luận: **$B = A^{-1}$.**

-VD:

Cách 2: Dùng MT phụ hợp.

Nhớ các ký hiệu sau không ?

-Đúng nhận sai cũng "nhận" (^!^)-

a_{ik}

M_{ik}

$\det(M_{ik})$

A_{ik}

P_A

Chú ý: Xuất hiện thêm 2 loại MT nữa:

1. MT nghịch đảo
2. MT phụ hợp

-MT phụ hợp là gì?
-Cách tính:

-NX:

-Công thức: Tính MT nghịch đảo.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}.P_A = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{n2} \\ \dots & \\ A_{1n} & A_{2n} \dots A_{nn} \end{pmatrix}.$$

=>Cách tìm: Cách 2:

1)Tính det(A)

2)Tính các A_{ik}

3)Lập Ma trận P_A

4)Áp dụng công thức trên

-VD:

2.4.7 Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vì $\det A = -30 \neq 0$ nên tồn tại A^{-1}. Ta có

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -14;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4;\ A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8;\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -4;\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Vậy $P_A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 8 \\ -14 & 2 & -4 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{4}{15} \\ \frac{7}{15} & -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

5-Hạng của MT

-Đã gặp ở trên

-Xem GT

-Ký hiệu: r_A hay rankA

-Cách tìm:

Cách 1: Tìm r_A bằng Phép biến đổi sơ cấp

B1: Dùng phép biến đổi sơ cấp theo hàng biến MT A thành MT **bậc thang**.

B2: **Đếm** số hàng khác không của MT cuối cùng.

B3: Kết luận.

-VD:

NỘP BÀI TẬP 1, 2

1. BT TL: Làm nộp Online.
2. TN: Làm theo nhóm, làm trên giấy.
3. NỘP GV buổi tiếp theo.

=(^!^)=

CHÚC Vv…