BÀI 9. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

Học xong bài này, người học cần nắm được các nội dung sau.

- *Các khái niệm ánh xạ tuyến tính, nhân và ảnh của một một ánh xạ tuyến tính.*
- *Kiểm tra được một ánh xạ cho trước có phải là ánh xạ tuyến tính hay không.*
- *Viết được dạng ma trận của một ánh xạ tuyến tính trong một (cặp) cơ sở cho trước.*
- *Xác định được nhân và ảnh của một ánh xạ tuyến tính, tìm được cơ sở và số chiều của chúng*

9.1 ĐỊNH NGHĨA VÀ VÍ DỤ

9.1.1 Định nghĩa. Cho *X*, *Y* là các không gian véc-tơ trên cùng trường số $\mathbb{K}$. Một ánh xạ T đi từ X vào Y được gọi là *ánh xạ tuyến tính* nếu nó thỏa hai điều kiện sau

1) $T(\alpha x) = \alpha T(x); \quad \forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{K};$

2) $T(x + x') = T(x) + T(x'); \quad \forall x, x' \in X.$

Nhận xét. Dễ thấy hai điều kiện trên tương đương với điều kiện

$$\boxed{3)\ T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2);\ \ \forall x_1, x_2 \in X;\ \ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}.}$$

Đôi khi ta viết Tx thay cho T(x). Từ định nghĩa ta thấy

a) $T(0_X) = 0_Y$ (0_X và 0_Y là các véc-tơ không của X và Y tương ứng);

b) $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 T x_1 + \alpha_2 T x_2 + \ldots + \alpha_n T x_n,\ \forall x_1, \ldots, x_n \in X,\ \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K};$

c) $T(-x) = -Tx,\ \forall x \in X.$

Note 1- CM ÁNH TUYẾN TÍNH

B1: LẤY $x_1, x_2 \in X$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.

B2: TÍNH: A= $T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$ **; B =** $\alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2)$;

(có thể thay bằng x, y, anpha, bê ta,…)

B3: KẾT LUẬN:

- **NẾU: *A = B* THÌ T LÀ *ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH***
- **NẾU: *A ≠ B* THÌ T *KHÔNG* LÀ ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH**

-VD: Cho T: R^2 -> R^3 xác định bởi: $T(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, x_1, x_1 + x_2)$.

CMR T là AXTT ?

9.1.4 Ví dụ. Cho ánh xạ tuyến tính $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ biết ảnh của cơ sở chính tắc là

$$T(1,0,0) = (2,3);\ T(0,1,0) = (-3,1);\ T(0,0,1) = (0,2).$$

Khi đó, với $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ta có

$$Tx = T[\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1)]$$

$$= \alpha_1 T(1,0,0) + \alpha_2 T(0,1,0) + \alpha_3 T(0,0,1)$$

$$= \alpha_1(2,3) + \alpha_2(-3,1) + \alpha_3(0,2)$$

$$= (2\alpha_1 - 3\alpha_2,\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3).$$

Vậy $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2\alpha_1 - 3\alpha_2,\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3)$.

9.1.5 Ví dụ. Cho A là một ma trận thực kích thước $m \times n$. Khi ấy có thể định nghĩa các ánh xạ tuyến tính

$T_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bởi công thức $T_A x = Ax$;

$S_A: \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}_m$ bởi công thức $(S_A x) = xA^T$.

Rõ ràng T_A là một ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$, vì theo tính chất của ma trận ta có

$$T_A(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha T_A x + \beta T_A y.$$

Tương tự, S_A là một ánh xạ tuyến tính.

9.2 NHÂN VÀ ẢNH

9.2.1 Định nghĩa. Cho $T: X \to Y$ là ánh xạ tuyến tính. *Nhân* của ánh xạ T, được kí hiệu $N(T)$ hoặc $KerT$, là tập $\boxed{KerT = \{x \in X : Tx = 0\}.}$ *Ảnh* của ánh xạ T, được kí hiệu $R(T)$ hoặc ImT, là tập con của không gian Y được xác định bởi

$$\boxed{ImT = T(X) = \{Tx : x \in X\} = \{y \in Y : \exists\, x \in X, Tx = y\}.}$$

Định lí dưới đây nêu lên những tính chất cơ bản nhất của nhân và ảnh của một ánh xạ tuyến tính; trong đó nói rằng nhân và ảnh là các không gian véc-tơ con.

9.2.2 Định lí. *Cho T là ánh xạ tuyến tính từ không gian véc-tơ X vào không gian véc-tơ Y, khi đó*

1) $KerT$ là không gian con của X;

2) ImT là không gian con của Y;

3) Nếu E là tập sinh của X thì $T(E)$ là tập sinh của ImT;

4) T là đơn ánh khi và chỉ khi $KerT = \{0\}$.

Note 2: Nhân, Ảnh của AXTT.

1-Minh họa:

-Nhân: KerT = ?

-Ảnh: ImT = T(X) = ?

2-Nếu Tx có dạng Ax thì ImT cũng chính là KG cột của MT A.

3-Nếu X là KGVT n chiều, tức dimX = n, thì:

$$\dim(\mathrm{Ker}T) + \dim(\mathrm{Im}T) = n = \dim X$$

4-VD:

Note 3a- TÌM NHÂN (KerT) CỦA AXTT

B1: VIẾT Ker(T) DƯỚI DẠNG TỔNG QUÁT

B2: GIẢI HPT ĐIỀU KIỆN ĐỂ TÌM NGHIỆM TỔNG QUÁT

B3: THAY NGƯỢC VÀO Ker(T) VÀ RÚT GỌN

B4: KẾT LUẬN VỀ: ***Ker(T), CƠ SỞ, SỐ CHIỀU*** CỦA NÓ

-VD: Xét câu a của VD sau:

9.2.3 Ví dụ. Cho $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3 + 2x_4).$$

a) Tìm $KerT$, cơ sở và số chiều của nó.

b) Tìm ImT, cơ sở và số chiều của nó.

a) $KerT = \{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_1 - x_2 = 0, x_2 + x_3 = 0, \; x_1 + x_3 + 2x_4 = 0\}$.

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được $x_4 = 0; x_1 = \alpha; x_2 = \alpha; x_3 = -\alpha, \; \forall\alpha \in \mathbb{R}$. Vậy

$$KerT = \{\alpha\,(1, 1, -1, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Từ đó $dim\,(KerT) = 1$ và một cơ sở của $KerT$ là $(1, 1, -1, 0)$.

Note 3b- TÌM ẢNH (Im(T)) CỦA AXTT T

B1: VIẾT AXTT T DƯỚI DẠNG CHI TIẾT (…)

B2: SUY RA HỆ CÁC VÉC TƠ SINH RA Im(T)

B3: LẬP MA TRẬN A GỒM CÁC HÀNG CỦA CÁC VÉC TƠ TRÊN B2

B4: ĐƯA MT A VỀ DẠNG BẬC THANG D

B5: DỰA VÀO MT D ĐỂ KẾT LUẬN:

- ***SỐ CHIỀU CỦA ImT***
- ***CƠ SỞ CỦA ImT***

b) Ta có thể viết ánh xạ T ở dạng sau

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(1, 0, 1) + x_2(-1, 1, 0) + x_3(0, 1, 1) + x_4(0, 0, 2).$$

Vậy ImT sinh bởi 4 véc-tơ $e_1 = (1, 0, 1)$; $e_2 = (-1, 1, 0)$, $e_3 = (0, 1, 1)$ và $e_4 = (0, 0, 2)$. Sử dụng cách tìm cơ sở của bao tuyến tính như trong Ví dụ 7.1.6, biến đổi ma trận như sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vậy các véc-tơ $(1, 0, 1)$; $(0, 1, 1)$; $(0, 1, 1)$ tạo cơ sở của ImT (và $dim\ ImT = 3$, điều đó có nghĩa là ImT trùng với $\mathbb{R}^3$, T là toàn ánh).

9.2.4 Ví dụ. Cho A là một ma trận kích thước $m \times n$, và cho ánh xạ $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ xác định bởi $T_A x = Ax$. Khi đó

- T_A đơn ánh khi và chỉ khi phương trình $Ax = 0$ có nghiệm tầm thường duy nhất, tức là khi và chỉ khi $rank\, A = n$;

- T_A toàn ánh khi và chỉ khi $I_m T_A = \mathbb{R}^m$, mà $I_m T_A$ bằng bao tuyến tính các cột của ma trận A, điều đó có nghĩa là T_A toàn ánh khi và chỉ khi $rank\, A = m$;

- T_A song ánh khi và chỉ khi $rank A = n = m$. Khi đó tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}. Do đó nếu $T_A x = y$ thì $Ax = y$; $x = A^{-1}y = (T_A)^{-1} y$ (trong đó $(T_A)^{-1}$ *là ánh xạ ngược của* T_A, *dễ thấy nó cũng là một ánh xạ tuyến tính.*) Vậy $(T_A)^{-1} = A^{-1}$.

Định lí quan trọng sau đây cho biết quan hệ giữa số chiều giữa nhân và ảnh.

9.2.7 Ví dụ. Tìm cơ sở của không gian ảnh và nhân của ánh xạ $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cho bởi

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Dễ thấy ánh xạ có thể viết ở dạng ma trận sau như sau

$$Tx = Ax = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Trước tiên tìm nhân $KerT=\{x : Ax=0\}$. Ta giải hệ $Ax=0$ bằng phép biến đổi sơ cấp

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra $RankA=2$, nên ta có $\dim(KerT)=n-rank\,A=4-2=2$. Ta có hệ tương đương (với hệ $Ax=0$) là

$$\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ x_2+x_3+x_4=0. \end{cases}$$

Cho $x_3=\alpha;\ x_4=\beta$ ta được $x_2=-\alpha-\beta=x_1$. Vậy nên

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\alpha-\beta\\-\alpha-\beta\\\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Một cơ sở của $KerT$ là $(-1,-1,1,0)^T$ và $(-1,-1,0,1)^T$.

Như đã nói ở trên, không gian ảnh ImT bằng không gian cột của A. Theo biến đổi trên, ma trận A có hai cột (chẳng hạn như cột 1 và cột 2) độc lập tuyến tính. Vậy cơ sở của ImT là hai cột đó, tức là $(1,0,1)^T$ và $(-1,1,0)^T$.

Note 4: Biểu diễn MT của AXTT:

-Cho T: R^n -> R^m, là AXTT, khi đó:

Tồn tại MT A loại mxn sao cho: Tx = Ax, với mọi x thuộc R^n .

=> Liên quan đến MT => dùng kiến thức liên quan của MT để xử lý.

9.3.2 Ví dụ. Cho $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi

$$Tx = (2x_1 + x_2, x_1 - 5x_3)^T,$$

với $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

Dễ kiểm tra được T là một ánh xạ tuyến tính. Ta có

$$Te_1 = T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};\ Te_2 = T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ Te_3 = T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}.$$

Vậy $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Kiểm tra lại $Ax = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 5x_3 \end{pmatrix} = Tx.$

9.3.3 Định lí. *Cho E, F là các cơ sở sắp thứ tự tương ứng của X và Y. Khi ấy ta có*

1- *Với mọi ánh xạ tuyến tính T từ X vào Y, tồn tại duy nhất một ma trận A (loại $m \times n$), thỏa (9.1).*

2- *Ngược lại, với mọi ma trận A (loại $m \times n$), tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính T từ X vào Y thỏa (9.1).*

3- *Với T và A như trên ta có với mọi $x \in X$: $[Tx]_F = A[x]_E$.*

9.3.4 Ví dụ. Cho T: $\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ xác định bởi $Tf(t) = f'(t) + 3f''(t)$ và cơ sở thứ tự $E = \{1, t, t^2\}$; $F = \{1, t\}$ tương ứng trong $\mathbb{P}_2$ và $\mathbb{P}_1$.

a) Tìm ma trận A của T.

b) Tính $T(3t^2 + 5t - 2)$ trực tiếp và thông qua A.

a) Ta có $T(1) = 0 = 0.1 + 0t \Rightarrow [T(1)]_F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$T(t) = 1 = 1.1 + 0t \Rightarrow [T(t)]_F = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T(t^2) = 2t + 6 = 6.1 + 2t \Rightarrow \left[T(t^2)\right]_F = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

Vậy $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

b) Tính trực tiếp, ta có $T(3t^2 + 5t - 2) = 6t + 23$. Nếu tính thông qua A (theo Định lí 9.3.3-3), với $p(t) = 3t^2 + 5t - 2$, thì

$$[p(t)]_E = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Nếu $Tp(t) = q(t)$ thì

$$[q(t)]_{F} = A[p(t)]_{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Vậy $q(t) = 23.1 + 6.t = 6t + 23.$

9.3.5 Ví dụ. Cho $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi: $Tx = Ax$, với $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Xác định ma trận của ánh xạ T trong cặp cơ sở

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}; \; F = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ta có $Te_1 = T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -3\\0 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\7\end{pmatrix}$. Ta cần khai triển véc-tơ đó theo cơ sở F.

Giả sử

$$\begin{pmatrix}-2\\2\\7\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -2 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 7. \end{cases}$$

Giải hệ này ta có $\alpha_1 = 5$; $\alpha_2 = 2$; $\alpha_3 = -9$. Vậy $[Te_1]_{F'} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix}$.

Tiếp theo ta có

$$Te_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = -5 \\ \qquad \beta_2 \qquad\quad = 4 \\ \beta_1 + \beta_2 \qquad\quad = 10. \end{cases}$$

Cho nên $\beta_1 = 6$; $\beta_2 = 4$; $\beta_3 = -15$. Do đó $[Te_2]_F = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ -15 \end{bmatrix}$.

Vậy ma trận của T trong cặp cơ sở E, F có dạng $A' = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}$

Note 5a: Tìm MT A của AXTT: $R^n \to R^m$ trong cặp cơ sở E, F

B1: **Tính 2 MT S và Q như sau:**

$$S = [f_1, f_2, \ldots, f_m]; \qquad Q = [Te_1, Te_2, \ldots, Te_n],$$

B2: **Thiết lập MT mở rộng như sau:**

$$[S|Q] = [f_1, f_2, \ldots, f_m | Te_1, Te_2, \ldots, Te_n],$$

B3: **Dùng phép biến đổi sơ cấp đối với hàng để đưa MT mở rộng này về dạng:** ***bên trái là MT đơn vị***

B4: **Kết luận:** ***MT bên phải*** **chính là MT** ***A cần tìm*****.**

9.3.8 Ví dụ. Xét lại Ví dụ 9.3.5, ta có

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

Thực hiện các phép biến đổi sau

$$[S|Q] = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 7 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{h_3 \to h_3 - h_1} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_3 \to -h_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{h_1 \to h_1 - h_3} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -15 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{h_1 \to h_1 - h_2} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -15 \end{array}\right).$$

Vậy $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}$. Tức là ta có lại kết quả đã xét.

Note 5b: Tìm MT A của AXTT trong cặp cơ sở E, F đối với *KGVT hữu hạn chiều bất kỳ*

B1: Ta lấy thêm 1 cơ sở trung gian bất kỳ của Y là: $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$

B2: Tính 2 MT S và Q trong cơ sở G như sau:

$$S = \left[\,[f_1]_G, [f_2]_G, \ldots, [f_m]_G\,\right] \qquad Q = \left[\,[Te_1]_G, [Te_2]_G, \ldots, [Te_n]_G\,\right],$$

B3: Thiết lập MT mở rộng như sau:

$$[S|\;Q] = \left[[f_1]_G, [f_2]_G, \ldots, [f_m]_G \;\middle|\; [Te_1]_G, [Te_2]_G, \ldots, [Te_n]_G\right] \to [\,I|A\,].$$

B4: Dùng phép biến đổi sơ cấp đối với hàng để đưa MT mở rộng này về dạng: *bên trái là MT đơn vị*

B5: Kết luận: *MT bên phải* chính là MT *A cần tìm*.

9.3.10 Ví dụ. Cho $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ bởi $Tf(t) = f'(t)$. Tìm ma trận A của T trong cặp cơ sở

$E = \{t^2, t, 1\}$ của $\mathbb{P}_2$ và $F = \{t+1, t-1\}$ của $\mathbb{P}_1$.

Ta lấy cơ sở $G = \{t, 1\}$ của $\mathbb{P}_1$. Khi ấy ta được

$$[f_1]_G = [t+1]_G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [f_2]_G = [t-1]_G = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$[Te_1]_G = [2t]_G = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad [Te_2]_G = [1]_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad [Te_3]_G = [0]_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Thực hiện các phép biến đổi ma trận như sau

$$[S|Q]=\left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\to\left[\begin{array}{cc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1 & 0\end{array}\right]\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{array}\right).$$

Vậy A = $\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$.