96 BÀI 6. TỌA ĐỘ CỦA VÉC-TƠ VÀ HẠNG CỦA HỆ VÉC-TƠ

Học xong bài này, người học cần nắm được các nội dung sau.

- Khái niệm và cách tìm tọa độ của véc-tơ theo cơ sở.
- Khái niệm hạng của hệ véc-tơ.
- Cách tìm hạng của hệ véc-tơ và dùng nó để xét tính độc lập tuyến tính của một hệ véc-tơ. Từ đó có thể áp dụng cho việc xác định cơ sở và số chiều của một không gian véc-tơ.
- Cách tìm ma trận chuyển cơ sở và biến đổi tọa độ của một véc-tơ.

Note 0: Nhắc lại.

-Tọa độ trong R^2 (mặt phẳng Oxy):

-Tọa độ trong R^3 (Không gian Oxyz):

6.1 TỌA ĐỘ CỦA VÉC-TƠ THEO CƠ SỞ

6.1.1 Định nghĩa. Cho không gian véc-tơ *n* chiều *X* với một cơ sở được sắp thứ tự $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Bất kì véc-tơ *x* trong *X* đều có biểu diễn dạng tổ hợp tuyến tính (duy nhất) của các véc-tơ trong *B là*

$$\boxed{x = x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_nb_n.}$$

Khi đó, các số $x_1, x_2, \ldots, x_n$ của biểu diễu này được gọi là các *tọa độ của véc-tơ x* trong cơ sở được sắp thứ tự *B*, và được kí hiệu là

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$ Ta cũng gọi là *dạng tọa độ* của véc-tơ *x*.

6.1.2 Lưu ý. Khi cộng hai véc-tơ thì các tọa độ tương ứng cộng với nhau. Khi nhân véc-tơ với một số thì các tọa độ tương ứng cũng nhân cho số ấy.

Vậy, với *B* là một cơ sở của không gian *X*, *x* và *y* là hai véc-tơ trong *X* và λ là một đại lượng vô hướng, ta có

$$[x+y]_B = [x]_B + [y]_B;$$

$$[\lambda x]_B = \lambda[x]_B;$$

$$x = y \Leftrightarrow [x]_B = [y]_B.$$

Note 1: Các bước tìm tọa độ của véc tơ x theo cơ sở B cho trước

B1- Viết

$$x = x_1b_1 + x_2b_2 + \dots + x_nb_n.$$

B2- Giải hệ PT TT trên để tìm $x_1, x_2, \dots x_n$

B3- Kết luận: Tọa độ của véc tơ x theo cơ sở B là:

(viết theo dạng cột như sau)

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

-VD1: Cho B = {(1;2); (3;4)}. Tìm tọa độ véc tơ x = (5; 6) ?

6.1.3 Ví dụ. Tìm tọa độ của véc-tơ $x = (6, 5, 4)$ theo cơ sở B của $\mathbb{R}^3$, với

$$B = \{b_1 = (1, 1, 0); b_2 = (2, 1, 3); b_3 = (1, 0, 2)\}.$$

⌈ Ta cần tìm x_1, x_2, x_3 để

$$x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3$$

$$\Leftrightarrow (6, 5, 4) = x_1(1, 1, 0) + x_2(2, 1, 3) + x_3(1, 0, 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Giải hệ này ta được $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; $x_3 = -1$.

Vậy tọa độ của véc-tơ x theo cơ sở B đã cho là $[x]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

6.1.4 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{P}_2[t]$, cho cơ sở được sắp thứ tự

$$B = \{f_1 = 1 + t;\ f_2 = 1 - t;\ f_3 = t^2 + t\}.$$

Tìm tọa độ véc-tơ $f = t^2 + 7t - 2$ theo cơ sở B.

Γ Ta cần tìm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ để

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3$$

$$\Leftrightarrow \quad t^2 + 7t - 2 = \alpha_1(1 + t) + \alpha_2(1 - t) + \alpha_3(t^2 + t).$$

Đồng nhất hai biểu thức này, ta được

$$\begin{cases} \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 7 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = -2. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được nghiệm $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = -4$; $\alpha_3 = 1$

Vậy tọa độ của f theo cơ sở B đã cho là $[f]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$. ⌋

6.1.5 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, hãy tìm tọa độ của véc-tơ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

trong cơ sở chính tắc *E* được sắp thứ tự

$$E = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

⌈ Ta cần tìm $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ để

$$A = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4.$$

Ta giải được $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_4 = 0$.

Vậy tọa độ của véc-tơ *A* theo cơ sở *E* là

$$[\mathcal{A}]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6.2 HẠNG CỦA HỆ VÉC-TƠ

6.2.1 Định nghĩa. Trong không gian véc-tơ X, cho một hệ véc-tơ

$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}.$$

Ta nói hệ S có *hạng* là r nếu trong S tồn tại r véc-tơ độc lập tuyến tính và bất kì $(r + 1)$ véc-tơ nào của S cũng đều phụ thuộc tuyến tính.

Nói cách khác, hạng của hệ véc-tơ là số tối đa các véc-tơ độc lập tuyến tính của hệ ấy.

Note 2: Hạng của hệ véc tơ : r = ?

==Hạng của hệ véc tơ: là số tối đa các véc tơ Độc lật tuyến tính của hệ ấy, ký hiệu là r. VD:

-Hệ có 4 véc tơ, trong đó tìm được 3 véc tơ ĐLTT, còn 4 véc tơ thì PTTT, ta nói hạng của hệ véc tơ này là: r = 3.

-Hệ có 5 véc tơ, trong đó tìm được 2 véc tơ ĐLTT, còn lấy ra 3 véc tơ bất kỳ trở lên đều PTTT, ta nói hạng của hệ véc tơ này là: r = 2.

-Tổng quát:

Hệ có n véc tơ, trong đó tìm được r véc tơ ĐLTT, còn lấy ra r+1 véc tơ bất kỳ trở lên đều PTTT, ta nói hạng của hệ véc tơ này là r.

☞ Nhận xét rằng việc tìm hạng của một hệ véc-tơ theo Định nghĩa 6.2.1 thường phải tính toán nhiều. Khi cần tìm hạng của hệ véc-tơ trong không gian véc-tơ thực (hoặc phức), người ta tìm hạng của hệ véc-tơ thông qua tìm hạng của ma trận, kết quả được phát biểu trong định lí sau.

6.2.3 Định lí. *Cho ma trận A cấp m×n, $A=(a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$, gọi A_{i*} là véc-tơ được xây dựng từ hàng thứ i ($1\le i\le m$) của ma trận A và A_{*j} là véc-tơ được xây dựng từ cột thứ j ($1\le j\le n$) của ma trận A. Khi đó, hạng của ma trận A bằng hạng của hệ các véc-tơ hàng $\{A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{m*}\}$ và bằng hạng của hệ các véc-tơ cột $\{A_{*1}, A_{*2}, \dots, A_{*n}\}$.*

Note 3: Các bước tìm hạng của hệ véc tơ

B1- Xếp … các véc tơ thành "dạng ma trận" A.

(nếu chưa có sẵn thì tìm tọa độ của nói rồi xếp,…)

B2- Tìm hạng của Ma trận A.

B3- Kết luận: Hạng của ma trận A cũng là hạng của hệ véc tơ.

(Mà

-hạng ma trận chính là số dòng khác không của ma trận bậc thang.

-dùng phép biến đổi sơ cấp để đưa MT bất kỳ về dạng bậc thang – xem lại giáo trình + vở ghi,…

)

-VD: Trong Kg R^2 tìm hạng của hệ véc tơ sau: (Cho 3 véc tơ,…)

6.2.4 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^4$, hãy tìm hạng của hệ véc-tơ

$$\{v_1 = (1, 2, 4, 0);\ v_2 = (3, 2, 1, 2);\ v_3 = (2, 0, -1, 4);$$
$$v_4 = (1, -2, -5, 4);\ v_5 = (5, 2, 0, 6)\}.$$

⌈ Lập ma trận A có hàng thứ i là véc-tơ v_i trong hệ trên,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tìm hạng của A bằng các phép biến đổi sơ cấp

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & -4 & -9 & 4 \\ 0 & -4 & -9 & 4 \\ 0 & -8 & -20 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -11 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vì $rank(A) = 3$ nên hạng của hệ các véc-tơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_5\}$ cũng bằng 3.

☞ Sau đây ta xét một tính chất quan trọng, dẫn việc tìm hạng của một hệ véc-tơ trong một không gian véc-tơ bất kì về tìm hạng của của ma trận thực.

6.2.5 Định lí. *Cho không gian véc-tơ X với B là một cơ sở của X. Khi đó, hạng của hệ véc-tơ* $M=\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ *trong X bằng hạng của hệ véc-tơ tọa độ* $\{[v_1]_B, [v_2]_B, \ldots, [v_m]_B\}$ *trong không gian* $\mathbb{R}^n$.

Ta chấp nhận kết quả này.

Như vậy, việc tìm hạng của hệ véc-tơ có thể tìm được bằng việc xét hạng của ma trận có cột thứ *i* là tọa độ của véc-tơ v_i trong cơ sở *B*

$$[[v_1]_B \quad [v_2]_B \quad \ldots \quad [v_m]_B].$$

6.2.6 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{P}_3[t]$, tìm hạng của hệ véc-tơ

$$\{ f_1 = t^3 - 2t^2 + 1;\ f_2 = 2t^3 - t - 2\ ;\ f_3 = t^3 + t^2 + t + 1;\ f_4 = t^3 - t^2 - 3\}.$$

⌈Lấy cơ sở chính tắc B trong $\mathbb{P}_3[t]$, $B = \{e_1 = 1;\ e_2 = t;\ e_3 = t^2;\ e_4 = t^3\}$.

Khi đó, ta có biểu diễn tọa độ của từng véc-tơ f_i theo cơ sở B như sau

$$[f_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix};\quad [f_2]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix};\quad [f_3]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};\quad [f_4]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lập ma trận A thực nhận cột thứ i là tọa độ của f_i theo cơ sở B

$$A = \left[[f_1]_B\ \ [f_2]_B\ \ [f_3]_B\ \ [f_4]_B\right].$$

Biến đổi ma trận A, dùng phép biến đổi sơ cấp để tìm hạng ta được

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[h_4 \to h_4 - h_1]{h_3 \to h_3 + 2h_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4 \to h_4 - 4h_2]{h_3 \to h_3 + 4h_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{h_4 \to h_4 + \frac{4}{7}h_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Như vậy, hạng của ma trận *A* bằng 3, nên hạng hệ véc-tơ $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ cũng bằng 3.⌋

6.2.7 Nhận xét. Cho tập $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ trong không gian véc-tơ X, ta có nhận xét từ Định nghĩa 6.2.1, như sau.

(1) Tập S có hạng bằng $r < m$ khi và chỉ khi S phụ thuộc tuyến tính.

(2) Tập S có hạng đúng bằng m khi và chỉ khi S độc lập tuyến tính.

Note 4: Mối quan hệ giữa số véc tơ của hệ véc tơ và hạng của nó.

-Liên quan đến ĐLTT hay PTTT?

-VD:

a) Hệ có $n = 5$ véc tơ, nhưng:

-hạng của hệ này $r = 3 < n = 5$ thì hệ này PTTT.

-hạng của hệ này $r = n = 5$ luôn thì hệ này là ĐLTT.

b) Hệ có $n = 7$ véc tơ, nhưng:

-hạng của hệ này $r = 4 < n = 7$ thì hệ này PTTT.

-hạng của hệ này $r = n = 7$ luôn thì hệ này là ĐLTT.

c) Tổng quát: Hệ có n véc tơ, nhưng:

-hạng của hệ này $= r < n$ thì hệ này PTTT.

-hạng của hệ này $= r = n$ luôn thì hệ này là ĐLTT.

Note 5: Tìm hạng của hệ n véc tơ => Có ĐLTT hay không?

B1-Xếp ... thành ma trận

B2-Tìm hạng r của ma trận (=hạng của hệ véc tơ).

B3-KL:

-Nếu r < n: PTTT

-Nếu r = n: ĐLTT

VD: Cho hệ gồm 3 véc tơ?

6.2.8 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho tập

$$S = \{v_1 = (1,0,2);\ v_2 = (2,1,-2);\ v_3 = (4,2,3)\}.$$

Hãy tìm hạng của hệ véc-tơ S, rồi cho biết S có độc lập tuyến tính hay không.

⌈Lập ma trận $A = [v_1\ \ v_2\ \ v_3]$ có các cột là các véc-tơ của S,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tìm hạng của A bằng các phép biến đổi sơ cấp

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Vì $rank(A) = 3$ nên hạng của hệ các véc-tơ S cũng bằng 3. Trong S cũng có đúng ba véc-tơ nên S là tập độc lập tuyến tính. ⌋

6.3 MA TRẬN CHUYỂN CƠ SỞ

Trong phần này ta xác định mối liên hệ giữa tọa độ của véc-tơ trong những cơ sở khác nhau. Ta có một định lí quan trọng sau.

6.3.1 Định lí. *Cho $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ và $C = \{c_1, c_2, ..., c_n\}$ là hai cơ sở được sắp của một không gian véc-tơ n chiều X và véc-tơ x bất kì trong X. Khi đó, tồn tại một ma trận vuông cấp n khả nghịch P sao cho*

$$\boxed{[x]_C = P[x]_B.}$$

Hơn nữa, cột thứ i của ma trận P là tọa độ của véc-tơ b_i theo cơ sở C,

$$P = [[b_1]_C \ \ [b_2]_C \ \ ...[b_n]_C].$$

Hơn nữa, do *n* cột của P là *n* véc-tơ tọa độ của cơ sở *B* độc lập tuyến tính nên chúng độc lập tuyến tính, và như vậy hạng của ma trận vuông P cấp *n* bằng đúng *n*, nghĩa là ma trận P khả nghịch. □

6.3.2 Lưu ý. Ma trận P trong Định lí 6.3.1 được gọi là *ma trận chuyển cơ sở* từ *B* sang *C*, và được kí hiệu: $P_{B\to C}$, như vậy biểu thức được viết lại dưới dạng

$$\boxed{[X]_C = P_{B\to C}[X]_B.}$$

6.3.3 Nhận xét. Biểu thức trong Định lí 6.3.1 tương đương với

$$\boxed{(P_{B\to C})^{-1}[X]_C = [X]_B.}$$

Mặt khác, với vai trò của cơ sở *B* và *C* là như nhau, nên ta cũng có

$$\boxed{[X]_B = P_{C\to B}[X]_C.}$$

Như vậy, $\boxed{(P_{B\to C})^{-1} = P_{C\to B}, \text{ hay } (P_{C\to B})^{-1} = P_{B\to C}.}$

Note 6: MT chuyển cơ sở

a) Vấn đề:

-KGVT X: n chiều, tức dimX = n.

-Trong X, xét 2 cơ sở B và C khác nhau, mỗi cơ sở có n véc tơ ĐLTT.

-Lấy x trong X thì:

Tọa độ của x trong cơ sở B: $[x]_B$

Tọa độ của x trong cơ sở C: $[x]_C$

$$\boxed{[X]_C = P_{B\to C}[X]_B.}$$

$$\boxed{(P_{B\to C})^{-1}[X]_C = [X]_B.}$$

-Vậy mối quan hệ của chúng ntn?

b) MT chuyển cơ sở từ B sang C: (Phải sang trái)

-MT chuyển cơ sở từ C sang B? (Trái sang phải)

-Mối quan hệ giữa 2 Ma trận này ntn?

$$\boxed{(P_{B\to C})^{-1} = P_{C\to B},\ \text{hay}\ (P_{C\to B})^{-1} = P_{B\to C}.}$$

6.3.6 Nhận xét. Tổng quát hóa từ Ví dụ 6.3.5, ta có cách tìm ma trận chuyển cơ sở $P_{B \to C}$, với

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \text{ và } C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$$

trong $\mathbb{R}^n$ như sau.

(1) Lập ma trận bổ sung [C | B], có các cột phía trái là các véc-tơ trong cơ sở của C, còn các cột phía phải là các véc-tơ trong cơ sở của B.

(2) Dùng phép biến đổi sơ cấp theo hàng, đưa C về ma trận đơn vị (luôn làm được vì C độc lập tuyến tính), thì đồng thời vế phải nhận được chính là ma trận P cần tìm,

$$\boxed{[C \mid B] \to [I_n \mid P_{B \to C}].}$$

Note 7: MT $P_{B->C}$ xác định ntn?

$$[[b_1]_C \ [b_2]_C \ \ldots [b_n]_C].$$

B1-Lập MT bổ sung: (C|B)

(chú ý: cách viết ngược lại cái cần tìm)

B2-Dùng biến đổi sơ cấp theo hàng đưa về dạng:

$(C|B) \rightarrow (I_n|P_{B->C})$

(Quen thuộc, bên trái là MT đơn vị, bên phải là MT cần tìm)

B3-Kết luận: $P_{B->C}$ chính là MT chuyển cơ sở từ B sang C.

-VD: Cho 2 cơ sở trong R^2 ? Tìm MT chuyển cơ sở B->C và C->B ?

6.3.7 Ví dụ. Trong không gian $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở

$$B = \{(1,1,0); (0,1,1); (1,0,1)\},$$

$$C = \{(0,0,1); (1,-1,0); (1,1,1)\}.$$

Tìm ma trận chuyển cơ sở từ C sang B.

⌈ Để tìm $P_{C\to B}$, ta xét ma trận bổ sung $[B|C]$ rồi dùng phép biến đổi sơ cấp đưa vế trái về ma trận đơn vị cấp 3.

$$[B|C]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&1\\1&1&0&0&-1&1\\0&1&1&1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&1\\0&1&-1&0&-2&0\\0&1&1&1&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\boxed{\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/2&0&1/2\\0&1&0&1/2&1&1/2\\0&0&1&1/2&1&1/2\end{array}\right]}.$$

Vế trái là ma trận đơn vị cấp 3, vậy vế phải chính là ma trận cần tìm

$$\boxed{P_{C\to B}=\begin{bmatrix}-1/2&0&1/2\\1/2&1&1/2\\1/2&1&1/2\end{bmatrix}}$$

Bài học 6, cần nhớ:

1-Tọa độ của véc tơ + cách tìm

2-Hạng của hệ véc tơ + Cách tìm

3-MT chuyển cơ sở + cách tìm

(Hiểu + Nhớ 7 cái note + làm BT nhiều == OK)

4-Nộp BT online: Theo hạn làm bài.

5-Tiếp tục ôn bài để kiểm tra bất kỳ khi nào.