GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH $f(x) = 0$. PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG.

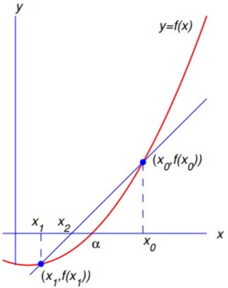
Gv: Ts. Đỗ Đức Tâm.

Nội dung phương pháp dây cung

Xét phương trình

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

trong đó (x_0, x_1) là một khoảng phân ly nghiệm.
Gọi $A(x_0, f(x_0))$ và $B(x_1, f(x_1))$. Phương pháp dây cung dựa trên việc thay thế cung AB của đồ thị hàm số bằng đường thẳng AB. Nghiệm của phương trình (1) xấp xỉ bởi hoành độ giao điểm của đường thẳng AB với trục Ox.



Nội dung phương pháp dây cung

Giả sử $f'(x)$ và $f''(x)$ không đổi dấu trên (x_0, x_1) và đặt $d = x_0$ nếu $f(x_0).f''(x) > 0$ và $d = x_1$ trong trường hợp ngược lại. Để cho xác định giả sử $d = x_0$.
Phương trình đường thẳng AB là

$$\frac{x - x_1}{d - x_1} = \frac{f(x) - f(x_1)}{f(d) - f(x_1)}.$$

Hoành độ giao điểm của AB với trục hoành là

$$x_2 = x_1 - \frac{d - x_1}{f(d) - f(x_1)} f(x_1)$$

được lấy làm xấp xỉ nghiệm tiếp theo. Khi đó $(x_2; d)$ là một khoảng phân ly nghiệm. Lặp lại quá trình trên ta nhận được công thức truy hồi

$$x_n = x_{n-1} - \frac{d - x_{n-1}}{f(d) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1}). \tag{2}$$

Nội dung phương pháp dây cung

Nếu dãy x_n xác định bởi công thức (2) hội tụ thì giới hạn này bằng α là nghiệm của phương trình (1). Thực vây, cho n tiến đến $+\infty$ ở công thức (2) ta nhận được

$$\alpha = \alpha - \frac{d-\alpha}{f(d)-f(\alpha)} f(\alpha).$$

Từ đây suy ra α là nghiệm của phương trình (1). Do đó có thể lấy x_n nào đó làm nghiệm xấp xỉ của phương trình (1) với độ chính xác cho trước.

Điều kiện hội tụ của phương pháp dây cung

Định lý

Giả sử (x_0, x_1) là khoảng phân ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Đạo hàm $f'(x)$ và $f''(x)$ liên tục, không đổi dấu, không triệt tiêu trên $[x_0, x_1]$. Khi đó dãy số xây dựng bởi công thức (2) hội tụ đơn điệu đến nghiệm đúng của phương trình $f(x) = 0$.

- Nếu $f'(x)$ và $f''(x)$ cùng dấu trên $[a, b]$ thì dãy hội tụ tăng đến nghiệm đúng của phương trình (1);
- Nếu $f'(x)$ và $f''(x)$ khác dấu trên $[a, b]$ thì dãy hội tụ giảm đến nghiệm đúng của phương trình (1).

Sai số của phương pháp

Nếu chọn phần tử x_n của dãy (2) làm xấp xỉ nghiệm thực α của phương trình (1) và tồn tại M_1 và m_1 sao cho

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \leq M_1 \qquad \forall x \in [x_0, x_1].$$

Khi đó ta có

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}| \tag{3}$$

Nhận xét: -Phương pháp dây hội tụ chậm hơn phương tiếp tuyến (hội tụ tuyến tính).
-Giả sử $f'(x)$ và $f''(x)$ cùng dấu trên (x_0, x_1) thì phương pháp tiếp tuyến cho dãy x_n hội tụ giảm đến nghiệm đúng α của phương trình (1) và phương pháp dây cung cho dãy y_n hội tụ tăng đến nghiệm đúng α của phương trình (1). Khi đó chọn $z_n = (x_n + y_n)/2$ làm nghiệm xấp xỉ của α sẽ đạt độ chính xác cao hơn. Phương pháp này gọi là **phương pháp kết hợp**.

Ví dụ

Tìm nghiệm: $x^3 + x - 5 = 0$ bằng phương pháp dây cung.

Lời giải: - Tách nghiệm: Bằng phương pháp đồ thị tìm được phương trình có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1, 2)$.

- Chính xác hóa nghiệm: $0 < 4 \leq f'(x) = 3x^2 + 1 \leq 13 \qquad \forall x \in [1, 2]$;
$f''(x) = 6x \qquad \forall x \in [1, 2]$.

Do $f(2)f''(x) > 0 \quad \forall x \in (1, 2)$ nên chọn $d = 2$ và $x_1 = 1$. Theo định lý về điều kiện hội tụ ta có dãy

$$x_n = x_{n-1} - \frac{2 - x_{n-1}}{f(2) - f(x_{n-1})} f(x_{n-1})$$

hội tụ đến nghiệm của phương trình đã cho.

Ví dụ

- Ta có bảng sau

n	x_n	$x_n - \dfrac{2 - x_n}{f(2) - f(x_n)} f(x_n)$
1	2	1.375
2	1.375	1.4813614
3	1.4813614	1.5077361
4	1.5077361	1.5140319
5	1.5155206	1.5158718
6	1.5158718	1.5159548
7	1.5159548	1.5159742
8	1.5159742	−

Chọn $x_8 = 1.5159742$ là nghiệm xấp xỉ thì sai số theo công thức (3) là

$$|x_8 - \alpha| \leq \frac{13 - 4}{4}|x_8 - x_7| = 4.365.10^{-5}$$

Suy ra nghiệm xấp xỉ $x_8 = 1.5159742$ có 5 chữ số tin tưởng.

Thuật toán - Khai báo hàm $f(x)$
- Nhập a, b
- Tính $x = a - (b-a)f(a)/(f(b)-f(a))$
- Nếu $f(x).f(a) < 0$

Lặp $b = x$

$$x = a - (b-a)f(a)/(f(b)-f(a))$$

trong khi $|x - b| > \varepsilon$

Ngược lại

Lặp $a = x$

$$x = a - (b-a)f(a)/(f(b)-f(a))$$

trong khi $|x - a| > \varepsilon$.

- Xuất nghiệm: x.

Thuật toán và sơ đồ khối