PHƯƠNG PHÁP DÂY CUNG GIẢI PT f(x)=0

Hà Thị Ngọc Yến

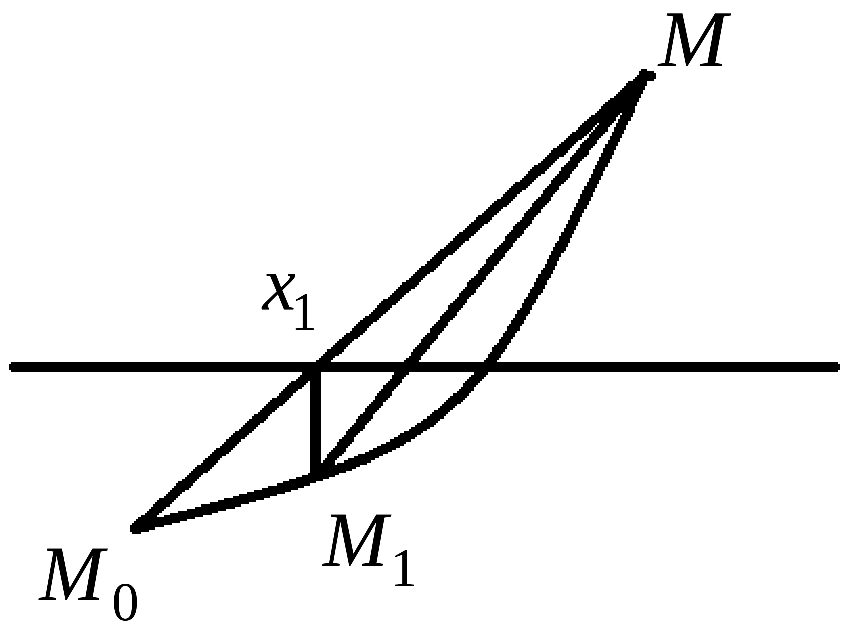
Hà nội, 01/2019

Ý tưởng phương pháp

- Thay thế đường cong $y = f\left(x\right)$ trên [a,b] bằng dây cung nối hai đầu mút

- Tìm giao điểm của dây cung với trục hoành thay cho giao điểm đường cong với trục hoành

Ý tưởng phương pháp



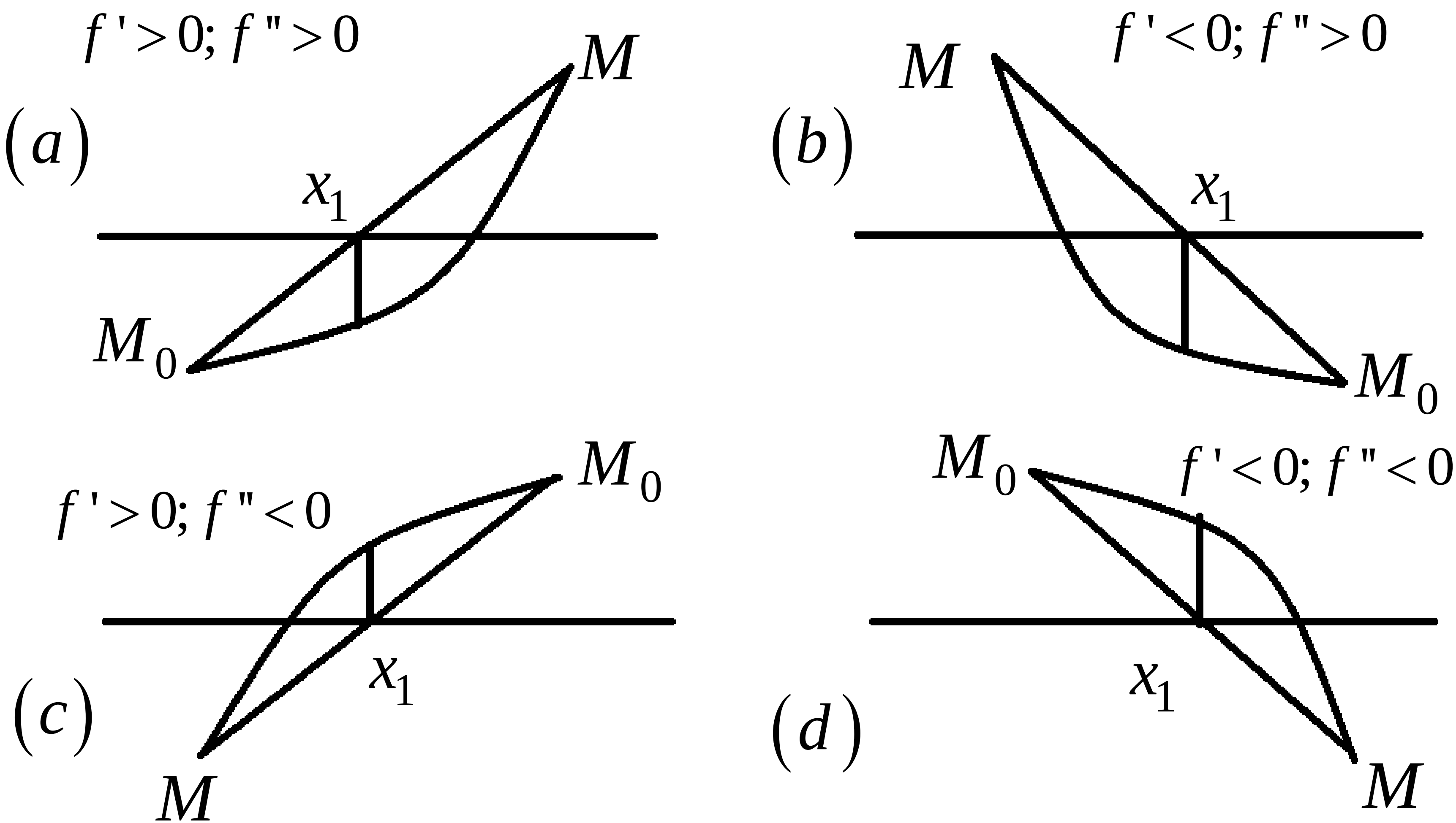
Xây dựng công thức

Xét phương trình $f(x)=0$ và k.c.l nghiệm (a,b).

Gọi $M(d, f(d))$ là điểm Fourie nếu $f(d)f''(d)>0$.

Chọn điểm Fourie là điểm mốc.
Chọn $x_0 : f(d)f(x_0)<0$ và đặt $M_0(x_0, f(x_0))$.

Chọn điểm M, M_0



Xây dựng công thức

$$\left[MM_0\right] \cap Ox \equiv \left(x_1, 0\right) \Rightarrow M_1\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$$

$$\left[MM_1\right] \cap Ox \equiv \left(x_2, 0\right) \Rightarrow M_2\left(x_2, f\left(x_2\right)\right)$$

....

$$\left[MM_{n-1}\right] \cap Ox \equiv \left(x_n, 0\right) \Rightarrow x_n \approx x^*$$

Xây dựng công thức

- Phương trình đường thẳng MM_k :

$$\frac{x - x_k}{x_k - d} = \frac{y - f(x_k)}{f(x_k) - f(d)} \qquad (*)$$

- Vì $[MM_k] \cap Ox \equiv (x_{k+1}, 0)$ nên ta có

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - d)}{f(x_k) - f(d)} \qquad (**)$$

Sự hội tụ của phương pháp

Điều kiện hội tụ:

- (a,b) là khoảng cách ly nghiệm
- f', f'' liên tục, xác định dấu không đổi trên [a,b]
- Chọn đúng điểm x_0, d

Định lý về sự hội tụ

Với các điều kiện đã nêu trên dãy lặp (**) hội tụ đến nghiệm đúng của phương trình theo đánh giá sau

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{\left|f\left(x_n\right)\right|}{m_1} \qquad (1)$$

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right| \qquad (2)$$

$$m_1 = \min_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|;\ M_1 = \max_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|$$

Định lý về sự hội tụ

- Các bước chứng minh:
  - ➢ Dãy $\left\{x_n\right\}$ đơn điệu và bị chặn.
  - ➢ Giới hạn của dãy là nghiệm của phương trình.
  - ➢ Chứng minh các công thức sai số

Dãy đơn điệu và bị chặn

- Xét trường hợp

$$f' > 0; f'' > 0 \Rightarrow f\left(x_0\right) < 0; f\left(d\right) > 0.$$

- Ta thấy $M\left(d; f\left(d\right)\right), M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ nằm hai phía của trục hoành nên

$$\left[MM_0\right] \cap Ox = \left(x_1, 0\right); \quad x_0 < x_1 < d$$

Dãy đơn điệu và bị chặn

- Gọi

$$h_0(x) := \frac{f(x_0) - f(d)}{x_0 - d}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= f'(c)(x - x_0) + f(x_0), \ \ c \in (x_0, d)$$

- Khi đó đồ thị hàm số $y = h_0(x)$ là đường thẳng chứa $[MM_0] \Rightarrow h_0(x_1) = 0$

Dãy đơn điệu và bị chặn

- Xét hàm số

$$u(x) = h_0(x) - f(x) = f'(c)(x - x_0) - f(x)$$

$$\Rightarrow u'(x) = f'(c) - f'(x)$$

$$\Rightarrow u''(x) = -f''(x) < 0$$

- Hàm số $u'(x)$ đơn điệu giảm chặt trên $[a,b]$

Dãy đơn điệu bị chặn

x	a		c		b
u'		$+$	0	$-$	
u	0	$\nearrow$	$u(c)$	$\searrow$	0

Dãy đơn điệu, bị chặn

- Từ bảng biến thiên, ta có

$$u(x) > 0 \;\forall x \in (a,b)$$

$$\Rightarrow h_0(x) > f(x) \;\forall x \in (a,b)$$

$$\Rightarrow 0 = h_0(x_1) > f(x_1)$$

Dãy đơn điệu, bị chặn

- Mặt khác, ta có

$$h_0\left(x_0\right) < 0 = h_0\left(x_1\right) < h_0\left(d\right)$$

$$\Rightarrow x_0 < x_1 < d$$

- Kết luận lại,

$$f\left(x_0\right) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0 < x_1 < d \\ f\left(x_1\right) < 0 \end{cases}$$

Dãy đơn điệu, bị chặn

- Tương tự, ta có

$$f\left(x_1\right) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 < d \\ f\left(x_2\right) < 0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$f\left(x_k\right) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x_k < x_{k+1} < d \\ f\left(x_{k+1}\right) < 0 \end{cases}$$

Giới hạn của dãy là nghiệm

- Từ công thức lặp của phương pháp, ta có

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{f\left(x_{n-1}\right)\left(x_{n-1} - d\right)}{f\left(x_{n-1}\right) - f\left(d\right)}$$

$$= -\frac{f\left(x_{n-1}\right)}{f'\left(c_{n-1}\right)},\ c_{n-1} \in \left(x_{n-1}, x_n\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x^*\right) = 0.$$

CT sai số mục tiêu

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x^*) = f'(c_n)(x_n - x^*)$$

$$\Rightarrow \qquad |x_n - x^*| \le \frac{|f(x_n)|}{m_1} \qquad (1)$$

CT sai số theo hai xấp xỉ liên tiếp

$$f\left(x_{n-1}\right) = -\frac{f\left(x_n\right) - f\left(d\right)}{x_n - d}\left(x_n - x_{n-1}\right)$$

$$= -f'\left(c_1\right)\left(x_n - x_{n-1}\right)$$

$$f\left(x_{n-1}\right) = f'\left(c_2\right)\left(x_{n-1} - x^*\right)$$

$$= f'\left(c_2\right)\left(x_{n-1} - x_n\right) + f'\left(c_2\right)\left(x_n - x^*\right)$$

CT sai số theo hai xấp xỉ liên tiếp

$$\left(f'(c_2) - f'(c_1)\right)\left(x_n - x_{n-1}\right) = f'(c_2)\left(x_n - x^*\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \left|x_n - x^*\right| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1}\left|x_n - x_{n-1}\right| \qquad (2)$$

- Bài 1: Xây dựng thuật toán tính số e và π với sai số ε cho trước. Viết code chạy thử theo thuật toán bạn đã xây dựng.
- Bài 2: Tìm thuật toán tính $\sqrt[n]{a}$ trong đó n là số tự nhiên, a là số thực cho trước, sai số cho trước.
- Bài 3: Viết thuật toán cho phương pháp dây cung (tự xác định input và output)
- Bài 4: Tìm thuật toán tìm nghiệm thực của đa thức bậc n cho trước.

- Bài 5: Xây dựng thuật toán tìm min, max của hàm cho trước với sai số cho trước
- Bài 6: Viết thuật toán tính đạo hàm của một hàm cho trước
- Bài 7: So sánh các phương pháp chia đôi, dây cung, tiếp tuyến, lặp đơn về tốc độ hội tụ và miền sử dụng. Thiết kế ví dụ minh họa cho các nhận xét đưa ra.
- Bài 8: Viết thuật toán kiểm tra điều kiện thực hiện của phương pháp dây cung và tiếp tuyến.

- Bài 9: Viết thuật toán cho phương pháp tiếp tuyến giải phương trình $f(x)=0$ trên khoảng (a,b)
- Bài 10: