GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH $f(x) = 0$. PHƯƠNG PHÁP TIẾP TUYẾN (PHƯƠNG PHÁP NEWTON).

Gv: Ts. Đỗ Đức Tâm.

Nội dung phương pháp tiếp tuyến

Xét phương trình

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

trong đó $f(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục và khác 0 trên khoảng phân ly nghiệm (a, b).

a. Công thức lặp:

Chọn x_0 thuộc khoảng nghiệm (a, b).
Tiếp tuyến tại $A_0(x_0, f(x0))$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ x_1;
Tiếp tuyến tại $A1(x_1, f(x_1))$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ x_2;
Tiếp tuyến tại $A_n(x_n, f(x_n))$ cắt trục Ox tại điểm có hoành độ x_n;
Cứ tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy x_n. Nếu dãy x_n hội tụ đến giá trị μ thì μ là nghiệm của phương trình (1).

Nội dung phương pháp tiếp tuyến

a. Công thức lặp: Phương trình tiếp tuyến tại $A_n(x_n, f(x_n))$

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$$

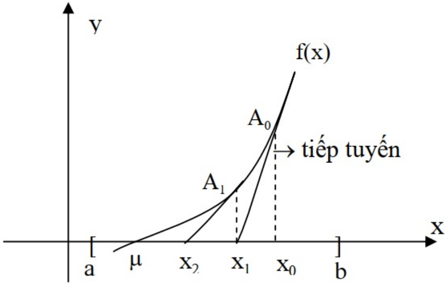
Tiếp tuyến cắt trục Ox tại điểm có toạ độ $(x_{n+1}, 0)$. Do vậy:

$$f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_{n+1})$$

hay

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2}$$

b. Ý nghĩa hình học:



Điều kiện hội tụ của phương pháp tiếp tuyến

Định lý 1

Giả sử $[a, b]$ là khoảng nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Đạo hàm $f'(x)$ và $f''(x)$ liên tục, không đổi dấu, không triệt tiêu trên $[a, b]$. Khi đó ta chọn xấp xỉ nghiệm ban đầu $x_0 \in [a, b]$ sao cho

$$f(x_0)f''(x) > 0$$

thì dãy số xây dựng bởi công thức (2) hội tụ đơn điệu đến nghiệm đúng của phương trình $f(x) = 0$.

- Nếu $f'(x)$ và $f''(x)$ cùng dấu trên $[a, b]$ thì dãy hội tụ giảm đến nghiệm đúng của phương trình (1);
- Nếu $f'(x)$ và $f''(x)$ khác dấu trên $[a, b]$ thì dãy hội tụ tăng đến nghiệm đúng của phương trình (1).

Sai số của phương pháp

Nếu chọn phần tử x_n của dãy (2) làm xấp xỉ nghiệm thực η của phương trình (1) và tồn tại M_2 và m_1 sao cho

$$|f'(x)| \geq m_1 > 0 \qquad \forall x \in [a, b];$$

$$|f''(x)| \leq M_2 \qquad \forall x \in [a, b].$$

Khi đó ta có

$$|x_n - \eta| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \tag{3}$$

Nhận xét: Phương pháp tiếp tuyến hội tụ nhanh hơn phương pháp lặp đơn và phương pháp chia đôi.

Ví dụ: Tìm nghiệm: $x^3 + x - 5 = 0$ bằng phương pháp tiếp tuyến.
Lời giải: - Tách nghiệm: Bằng phương pháp đồ thị tìm được phương trình có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1, 2)$.
- Chính xác hóa nghiệm: $f'(x) = 3x^2 + 1 \geq m_1 = 4 \quad \forall x \in [1, 2]$;
$0 < f''(x) = 6x \leq M_2 = 12 \quad \forall x \in (1, 2)$.
Do $f(2)f''(x) > 0 \quad \forall x \in (1, 2)$ nên chọn $x_0 = 2$ là xấp xỉ nghiệm ban đầu.
Theo định lý 1 ta có dãy

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

hội tụ đến nghiệm của phương trình đã cho.

- Ta có bảng sau

n	x_n	$x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	2	1.6153846
1	1.6153846	1.5212930
2	1.5212930	1.51599642
3	1.51599642	1.51598022
4	1.51598022	1.51598022

Chọn $x_4 = 1.51598022$ là nghiệm xấp xỉ thì sai số theo công thức (3) là

$$|x_4 - \eta| \leq \frac{12}{8}|x_4 - x_3|^2 = 0.4.10^{-10}.$$

Suy ra nghiệm xấp xỉ $x_4 = 1.51598022$ có tất cả các chữ số là chữ số tin tưởng.

c. Thuật toán

- Khai báo hàm $f(x), f'(x), M_2, m_1, \varepsilon, x$
- Nhập x
- Lặp $y = x$; $x = x - f(x)/f'(x)$ trong khi $\frac{M_2}{2m_1}|x - y| > \varepsilon$.
- Xuất nghiệm: x (hoặc y).

Thuật toán và sơ đồ khối