GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH $f(x) = 0$. PHƯƠNG PHÁP CHIA ĐÔI.

Gv: Ts Đỗ Đức Tâm.

Xét phương trình

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$.

Xét phương trình

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$.
Để tìm nghiệm gần đúng của phương trình (1) ta tiến hành qua 2 bước:

Xét phương trình

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$.
Để tìm nghiệm gần đúng của phương trình (1) ta tiến hành qua 2 bước:
- Tách nghiệm: xét tính chất nghiệm của phương trình, phương trình có nghiệm hay không, có bao nhiêu nghiệm, các khoảng chứa nghiệm nếu có. Đối với bước này, ta có thể dùng phương pháp đồ thị, kết hợp với các định lý mà toán học hỗ trợ.

Xét phương trình
$$f(x) = 0 \tag{1}$$
trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a, b]$.
Để tìm nghiệm gần đúng của phương trình (1) ta tiến hành qua 2 bước:
- Tách nghiệm: xét tính chất nghiệm của phương trình, phương trình có nghiệm hay không, có bao nhiêu nghiệm, các khoảng chứa nghiệm nếu có. Đối với bước này, ta có thể dùng phương pháp đồ thị, kết hợp với các định lý mà toán học hỗ trợ.
- Chính xác hoá nghiệm: thu hẹp dần khoảng chứa nghiệm để hội tụ được đến giá trị nghiệm gần đúng với độ chính xác cho phép. Trong bước này ta có thể áp dụng một trong các phương pháp:
+ Phương pháp chia đôi
+ Phương pháp lặp
+ Phương pháp tiếp tuyến
+ Phương pháp dây cung

Phương pháp đồ thị:
Trường hợp hàm f(x) đơn giản
- Vẽ đồ thị f(x)
- Nghiệm phương trình là hoành độ giao điểm của f(x) với trục x, từ đó suy ra số nghiệm, khoảng nghiệm.

Trường hợp f(x) phức tạp
- Biến đổi tương đương $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = h(x)$
- Vẽ đồ thị của $g(x), h(x)$
- Hoành độ giao điểm của $g(x)$ và $h(x)$ là nghiệm phương trình, từ đó suy ra số nghiệm, khoảng nghiệm.

Tách nghiệm

Khoảng phân ly nghiệm:

Định nghĩa

Khoảng (a, b) được gọi là một khoảng phân ly nghiệm α của phương trình (1) nếu trong khoảng đó phương trình (1) chỉ chứa một nghiệm thực α duy nhất.

Tách nghiệm

Khoảng phân ly nghiệm:

Định nghĩa

Khoảng (a, b) được gọi là một khoảng phân ly nghiệm α của phương trình (1) nếu trong khoảng đó phương trình (1) chỉ chứa một nghiệm thực α duy nhất.

Định lý

Khoảng (a, b) được gọi là một khoảng phân ly nghiệm α của phương trình (1) nếu $f(a)f(b) < 0$ và $f(x)$ là hàm số đơn điệu liên tục trong $[a, b]$.

Tách nghiệm

Khoảng phân ly nghiệm:

Định nghĩa

Khoảng (a, b) được gọi là một khoảng phân ly nghiệm α của phương trình (1) nếu trong khoảng đó phương trình (1) chỉ chứa một nghiệm thực α duy nhất.

Định lý

Khoảng (a, b) được gọi là một khoảng phân ly nghiệm α của phương trình (1) nếu $f(a)f(b) < 0$ và $f(x)$ là hàm số đơn điệu liên tục trong $[a, b]$.

Định lý

Khoảng (a, b) được gọi là một khoảng phân ly nghiệm α của phương trình (1) nếu $f(a)f(b) < 0$ và $f'(x)$ giữ nguyên dấu trong đoạn $[a, b]$.

Ví dụ: Tách nghiệm cho phương trình $x^3 - x + 5 = 0$.
Giải Ta có $f'(x) = 3x^2 - 1$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

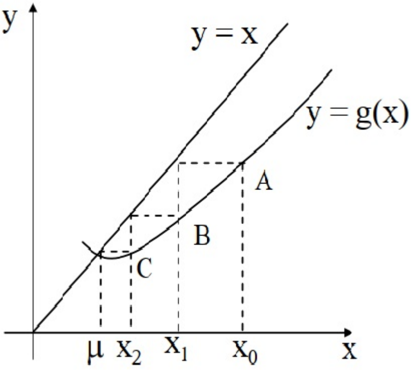
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5.385	$\searrow$	4.615	$\nearrow$	$+\infty$

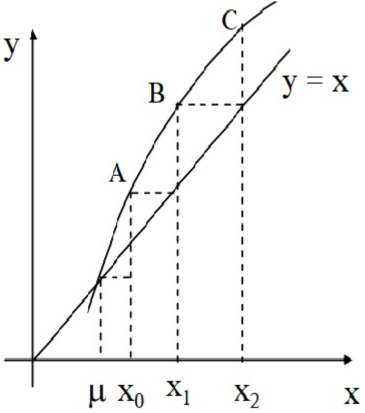
Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có một nghiệm duy nhất $\alpha < -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Mặt khác $f(-2)f(-1) < 0$ nên $\alpha \in (-2, -1)$.

Ví dụ: Tách nghiệm cho phương trình $2^x + x - 4 = 0$.

Giải Ta có $2^x + x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = -x + 4$. Áp dụng phương pháp đồ thị:



Hình a



Hình b

Từ đồ thị suy ra phương trình có 1 nghiệm $\alpha \in (1, 2)$.

Phương pháp chia đôi

Ý tưởng

Cho phương trình $f(x) = 0$, $f(x)$ liên tục và trái dấu tại 2 đầu $[a, b]$. Giả sử $f(a) < 0, f(b) > 0$ (nếu ngược lại thì xét $-f(x) = 0$). Theo định lý 1, trên $[a, b]$ phương trình có ít nhất 1 nghiệm α.

Ý tưởng

Cho phương trình $f(x) = 0$, $f(x)$ liên tục và trái dấu tại 2 đầu $[a, b]$. Giả sử $f(a) < 0, f(b) > 0$ (nếu ngược lại thì xét $-f(x) = 0$). Theo định lý 1, trên $[a, b]$ phương trình có ít nhất 1 nghiệm α.

Cách tìm nghiệm α:

Đặt $[a_0, b_0] = [a, b]$ và lập các khoảng lồng nhau $[a_i, b_i]$, $(i = 1, 2, 3, \dots)$

$$[a_i, b_i] = \begin{cases} [a_{i-1}, (a_{i-1} + b_{i-1})/2] \text{ nếu } f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) > 0 \\ [(a_{i-1} + b_{i-1})/2, b_{i-1}] \text{ nếu } f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) < 0 \end{cases}$$

Như vậy:
- Hoặc nhận được nghiệm đúng ở một bước nào đó: $\alpha = (a_{i-1} + b_{i-1})/2$ nếu $f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) = 0$.
- Hoặc nhận được 2 dãy a_n và b_n, trong đó:
a_n: là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên;
b_n: là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới;
ngoài ra do $|b_n - a_n| = (b - a)/2^n$ nên tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \alpha$$

là nghiệm phương trình (1). Có thể chọn $\alpha = \frac{a_n+b_n}{2}$ làm nghiệm xấp xỉ tại bước thứ n.

Sai số

Sai số của phương pháp chia đôi theo đạo hàm hàm số:
Nếu $m = min(|f'(x)| > 0)$ trên đoạn $[a, b]$ thì

$$|x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{2}$$

Sai số

Sai số của phương pháp chia đôi theo đạo hàm hàm số:
Nếu $m = min(|f'(x)| > 0)$ trên đoạn $[a, b]$ thì

$$|x_n - \alpha| < \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{2}$$

Sai số theo độ dài đoạn $[a, b]$:

$$|x_n - \alpha| < \frac{b - a}{2^n}. \tag{3}$$

Ví dụ: Tìm nghiệm phương trình: $2^x + x - 4 = 0$ bằng ppháp chia đôi.
Giải:
- Tách nghiệm: phương trình có 1 nghiệm $x \in (1, 2)$.
- Chính xác hoá nghiệm: áp dụng phương pháp chia đôi ($f(1) < 0$). Bảng kết quả:

n	a_n	b_n	$f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$
0	1	2	+
1	1	1.5	-
2	1.25	1.5	-
3	1.375	1.5	+
4	1.375	1.438	+
5	1.375	1.406	+
6	1.375	1.391	-
7	1.383	1.391	+
8	1.383	1.387	-
9	1.385	1.387	-
10	1.386	1.387	

Kết luận: Nghiệm của phương trình: $x \approx 1.386$ với sai số là $9,76.10^{-4}$.

Sơ đồ giải thuật