

BÀI 7. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giải tam giác

Giải tam giác là tìm số đo các cạnh và các góc còn lại của tam giác đó khi ta biết được các yếu tố đủ để xác định tam giác đó.

2. Phương pháp giải tam giác

- Nếu biết 2 cạnh và góc xen giữa hai cạnh đó: Sử dụng định lí cosin.
- Nếu biết 1 cạnh và 2 góc bất kì của tam giác: Sử dụng định lí sin.
- Nếu biết 3 cạnh của tam giác: Sử dụng định lí cosin.
- Có thể dùng các công thức tính diện tích để hỗ trợ giải tam giác.

3. Áp dụng giải tam giác vào thực tế

Vận dụng giải tam giác giúp ta giải quyết rất nhiều bài toán trong thực tế, đặc biệt trong thiết kế và xây dựng.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Giải tam giác

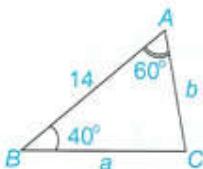
Phương pháp

- Nếu biết 2 cạnh và góc xen giữa hai cạnh đó: Sử dụng định lí cosin.
- Nếu biết 1 cạnh và 2 góc bất kì của tam giác: Sử dụng định lí sin.
- Nếu biết 3 cạnh của tam giác: Sử dụng định lí cosin.
- Có thể dùng các công thức tính diện tích để hỗ trợ giải tam giác.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Giải tam giác ABC , biết $c = 14$, $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$.

Lời giải



Ta có $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 80^\circ$.

Áp dụng Định lí sin ta có: $\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ} = \frac{14}{\sin 80^\circ}$

Suy ra $a = \frac{14 \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 12,31$, $b = \frac{14 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 9,14$.

Câu 2. Giải tam giác ABC và tính diện tích của tam giác đó, biết $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{B} = 130^\circ$, $c = 6$.

Lời giải

Ta có: $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{B} = 130^\circ \Rightarrow \hat{C} = 35^\circ$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C}; a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$$

Mà $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{B} = 130^\circ$, $\hat{C} = 35^\circ$, $c = 6$

$$\Rightarrow b = \frac{6 \cdot \sin 130^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 8; a = \frac{6 \cdot \sin 15^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 2,7$$

Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \sin 15^\circ \approx 6,212$.

Vậy $a \approx 2,7; b \approx 8; \hat{C} = 35^\circ; S \approx 6,212$.

Câu 3. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 45^\circ, \hat{C} = 30^\circ$ và $c = 12$.

- a) Tính độ dài các cạnh còn lại của tam giác.
- b) Tính độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác.
- c) Tính diện tích của tam giác.
- d) Tính độ dài các đường cao của tam giác.

Lời giải

- a) Áp dụng định lí sin, tính được $b = 6\sqrt{2}(\sqrt{3}+1), a = 12\sqrt{2}$.
- b) Đáp số: $R = 12$.
- c) Đáp số: $S = \frac{1}{2}bc \sin A = 36(\sqrt{3}+1)$.
- d) Đáp số: $h_a = 3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1), h_b = 6\sqrt{2}, h_c = 6(\sqrt{3}+1)$.

Câu 4. Tam giác ABC có $a = 19, b = 6$ và $c = 15$.

- a) Tính $\cos A$.
- b) Tính diện tích tam giác.
- c) Tính độ dài đường cao h_c .
- d) Tính độ dài bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác.

Lời giải

- a) Đáp số: $\cos A = -\frac{5}{9}$.
- b) Có thể tính diện tích theo công thức Heron hoặc công thức $S = \frac{1}{2}bc \sin A$.
Đáp số: $S = 10\sqrt{14}$.
- c) Đáp số: $h_c = \frac{4\sqrt{14}}{3}$.
- d) Sử dụng công thức $S = p \cdot r$. Đáp số: $r = \frac{\sqrt{14}}{2}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có $a = 4, \hat{C} = 60^\circ, b = 5$.

- a) Tính các góc và cạnh còn lại của tam giác.
- b) Tính diện tích của tam giác.
- c) Tính độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A của tam giác.

Lời giải

- a) Theo định lí cosin, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 21$. Suy ra $c = \sqrt{21}$.

Áp dụng định lí sin, ta được $\sin A = \frac{a}{c} \cdot \sin C = \frac{4}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{7}}$.

Suy ra $\hat{A} \approx 49^\circ 6' 24''$.

Cũng vậy, tính được $\sin B = \frac{b}{c} \cdot \sin C = \frac{5}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.

Suy ra $\hat{B} \approx 70^\circ 53' 36''$.

- b) Đáp số: $S = 5\sqrt{3}$.

- c) Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến (Ví dụ 3).

Đáp số: $m_a = \sqrt{19}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có các góc thoả mãn $\frac{\sin A}{1} = \frac{\sin B}{2} = \frac{\sin C}{\sqrt{3}}$. Tính số đo các góc của tam giác.

Lời giải

HD. Áp dụng định lí sin, ta có $a:b:c = 1:2:\sqrt{3}$.

Đáp số: $\hat{A} = 30^\circ, \hat{B} = 90^\circ, \hat{C} = 60^\circ$.

Câu 7. Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

- a) $AB = 85, AC = 95$ và $\hat{A} = 40^\circ$
- b) $AB = 15, AC = 25$ và $BC = 30$.

Lời giải

Đặt $a = BC, b = AC, c = AB$.

a) Ta cần tính cạnh a và hai góc \hat{B}, \hat{C} .

Áp dụng định lí cosin, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 95^2 + 85^2 - 2 \cdot 95 \cdot 85 \cdot \cos 40^\circ \approx 3878,38$$

Suy ra $a \approx \sqrt{3878,38} \approx 62,3$.

Áp dụng hệ quả định lí cosin, ta có:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx \frac{62,3^2 + 85^2 - 95^2}{2 \cdot 62,3 \cdot 85} \approx 0,197.$$

Suy ra $\hat{B} \approx 78^\circ 38', \hat{C} \approx 180^\circ - 40^\circ - 78^\circ 38' = 61^\circ 22'$.

b) Ta cần tính số đo ba góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

Áp dụng hệ quả của định lí cosin, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25^2 + 15^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 15} = -\frac{1}{15} \Rightarrow \hat{A} \approx 93^\circ 49'.$$

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{30}{\sin 93^\circ 49'} = \frac{25}{\sin B} \Rightarrow \sin B \approx 0,8315$

$$\Rightarrow \hat{B} \approx 56^\circ 15', \hat{C} \approx 180^\circ - 93^\circ 49' - 56^\circ 15' = 29^\circ 56'$$

Câu 8. Giải tam giác ABC trong các trường hợp sau:

- a) $AB = 14, AC = 23, \hat{A} = 125^\circ$.
- b) $BC = 22, 4; \hat{B} = 64^\circ; \hat{C} = 38^\circ$.
- c) $AC = 22, \hat{B} = 120^\circ, \hat{C} = 28^\circ$.
- d) $AB = 23, AC = 32, BC = 44$

Lời giải

a) $AB = 14, AC = 23, \hat{A} = 125^\circ$.

Ta cần tính cạnh BC và hai góc \hat{B}, \hat{C} .

Áp dụng định lí cosin, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \Leftrightarrow BC^2 = 14^2 + 23^2 - 2 \cdot 14 \cdot 23 \cdot \cos 125^\circ \Rightarrow BC \approx 33$$

Áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{33}{\sin 125^\circ} = \frac{23}{\sin B} = \frac{14}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{23 \cdot \sin 125^\circ}{33} \approx 0,57 \Rightarrow \hat{B} \approx 35^\circ \Rightarrow \hat{C} \approx 20^\circ$$

b) $BC = 22, 4; \hat{B} = 64^\circ; \hat{C} = 38^\circ$.

Ta cần tính góc A và hai cạnh AB, AC .

Ta có: $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - 64^\circ - 38^\circ = 78^\circ$

Áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{22}{\sin 78^\circ} = \frac{AC}{\sin 64^\circ} = \frac{AB}{\sin 38^\circ} \Rightarrow \begin{cases} AC = \sin 64^\circ \cdot \frac{22}{\sin 78^\circ} \approx 20,22 \\ AB = \sin 38^\circ \cdot \frac{22}{\sin 78^\circ} \approx 13,85 \end{cases}$$

c) $AC = 22, \hat{B} = 120^\circ, \hat{C} = 28^\circ$

Ta cần tính góc A và hai cạnh AB, BC .

Ta có: $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ - 120^\circ - 28^\circ = 32^\circ$

Áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{BC}{\sin 32^\circ} = \frac{22}{\sin 120^\circ} = \frac{AB}{\sin 28^\circ} \Rightarrow \begin{cases} BC = \sin 32^\circ \cdot \frac{22}{\sin 120^\circ} \approx 13,5 \\ AB = \sin 28^\circ \cdot \frac{22}{\sin 120^\circ} \approx 12 \end{cases}$$

d) $AB = 23, AC = 32, BC = 44$

Ta cần tính số đo ba góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Áp dụng hệ quả của định lí cosin, ta có:

$$\cos A = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}; \cos B = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot BA}$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{32^2 + 23^2 - 44^2}{2 \cdot 32 \cdot 23} = \frac{-383}{1472};$$

$$\cos B = \frac{44^2 + 23^2 - 32^2}{2 \cdot 44 \cdot 23} = \frac{131}{184}$$

$$\Rightarrow \hat{A} \approx 105^\circ, \hat{B} = 44^\circ 36' \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ 24'$$

Câu 9. Giải tam giác ABC , biết $AB = 75m, AC = 100m$ và $\hat{A} = 32^\circ$.

Lời giải

Đặt $a = BC, b = AC, c = AB$.

Ta cần tính cạnh a và hai góc \hat{B} và \hat{C} .

Áp dụng định lí cosin, ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 75^2 + 100^2 - 2 \cdot 75 \cdot 100 \cdot \cos 32^\circ \approx 2904,3$.

Suy ra $a \approx \sqrt{2904,3} \approx 53,9(m)$.

Áp dụng hệ quả định lí cosin, ta có: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \approx \frac{53,9^2 + 75^2 - 100^2}{2 \cdot 53,9 \cdot 75} \approx -0,182$.

Suy ra $\hat{B} \approx 100^\circ 29'10'', \hat{C} \approx 47^\circ 30'50''$.

Câu 10. Tính các góc chưa biết của tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $\hat{A} = 42^\circ, \hat{B} = 63^\circ$;

b) $BC = 10, AC = 20, \hat{C} = 80^\circ$;

c) $AB = 15, AC = 25, BC = 30$.

Lời giải

a) $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 180^\circ - 42^\circ - 63^\circ = 75^\circ$.

b) Áp dụng định lí cosin, ta có:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C \\ &= 10^2 + 20^2 - 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos 80^\circ \approx 430,54 \\ \Rightarrow AB &\approx 20,75 \end{aligned}$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin A} = \frac{20}{\sin B} = \frac{20,75}{\sin 80^\circ}.$$

$$\Rightarrow \sin A \approx 0,475, \sin B \approx 0,949 \Rightarrow \hat{A} \approx 28^\circ 21'34'', \hat{B} \approx 71^\circ 37'21''.$$

c) Áp dụng hệ quả định lí cosin, ta có:

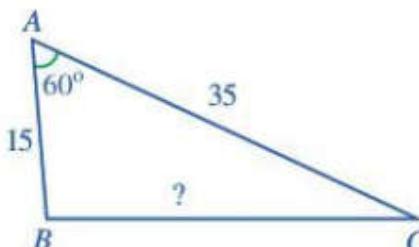
$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{15^2 + 25^2 - 30^2}{2 \cdot 15 \cdot 25} = -\frac{1}{15}$$

$$\Rightarrow \hat{A} \approx 93^\circ 49' 21''.$$

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{30}{\sin 93^\circ 49' 21''} = \frac{25}{\sin B} = \frac{15}{\sin C}. \Rightarrow \hat{C} \approx 29^\circ 55' 35''; \hat{B} \approx 56^\circ 15' 4''.$$

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AB = 15, AC = 35, \hat{A} = 60^\circ$.



Tính cạnh BC (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi) và góc B (làm tròn kết quả đến độ).

Lời giải

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC , ta có:

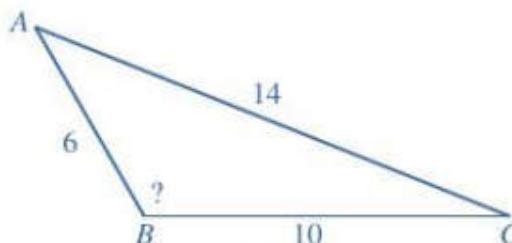
$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= 15^2 + 35^2 - 2 \cdot 15 \cdot 35 \cdot \cos 60^\circ = 925. \end{aligned}$$

Do đó $BC = \sqrt{925} \approx 30,4$.

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{15^2 + 925 - 35^2}{2 \cdot 15 \cdot \sqrt{925}}.$$

Do đó $\hat{B} \approx 95^\circ$.

Câu 12. Cho tam giác ABC có $AB = 6, BC = 10, CA = 14$.



Tính số đo góc B .

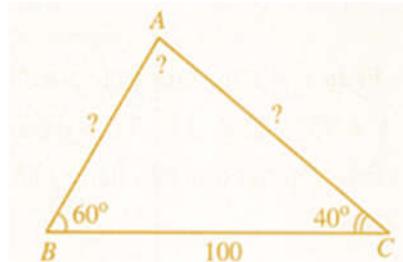
Lời giải

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC , ta có:

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} = -0,5$$

Do đó $\hat{B} = 120^\circ$.

Câu 13. Cho tam giác ABC có $BC = 100, \hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 40^\circ$.



Tính góc A và các cạnh AB, AC (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi) của tam giác đó.

Lời giải

Ta có:

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B}$.

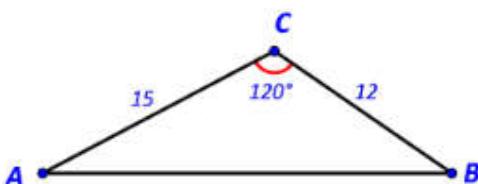
$$AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 65,3.$$

$$AC = \frac{BC \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{100 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 87,9.$$

Câu 14. Cho tam giác ABC có $BC = 12, CA = 15, \hat{C} = 120^\circ$. Tính:

- a) Độ dài cạnh AB .
- b) Số đo các góc A, B .
- c) Diện tích tam giác ABC .

Lời giải



a) Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C \Leftrightarrow AB^2 = 15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow AB^2 = 549 \Leftrightarrow AB \approx 23,43$$

b) Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{AB} \cdot \sin C = \frac{12}{23,43} \cdot \sin 120^\circ \approx 0,44 \Rightarrow \hat{A} \approx 26^\circ \text{ hoặc } \hat{A} \approx 154^\circ \text{ (Loại)}$$

Khi đó: $\hat{B} = 180^\circ - (26^\circ + 120^\circ) = 34^\circ$

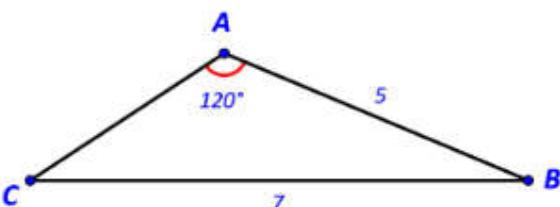
c)

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12 \cdot \sin 120^\circ = 45\sqrt{3}$$

Câu 15. Cho tam giác ABC có $AB = 5, BC = 7, \hat{A} = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh AC .

Lời giải



Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \sin C = \sin A \cdot \frac{AB}{BC} = \sin 120^\circ \cdot \frac{5}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\Rightarrow \hat{C} \approx 38,2^\circ \text{ hoặc } \hat{C} \approx 141,8^\circ \text{ (Loại)}$$

$$\text{Ta có: } \hat{A} = 120^\circ, \hat{C} = 38,2^\circ \Rightarrow \hat{B} = 180^\circ - (120^\circ + 38,2^\circ) = 21,8^\circ$$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:

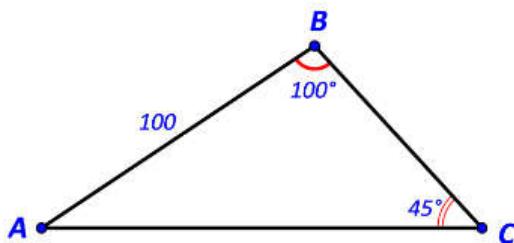
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B \Leftrightarrow AC^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos 21,8^\circ \Rightarrow AC^2 \approx 9 \Rightarrow AC = 3$$

Vậy độ dài cạnh AC là 3.

Câu 16. Cho tam giác ABC có $AB = 100, \hat{B} = 100^\circ, \hat{C} = 45^\circ$. Tính:

- a) Độ dài các cạnh AC, BC
 b) Diện tích tam giác ABC.

Lời giải



a)

Ta có: $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (100^\circ + 45^\circ) = 35^\circ$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \begin{cases} AC = \sin B \cdot \frac{AB}{\sin C} \\ BC = \sin A \cdot \frac{AB}{\sin C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AC = \sin 100^\circ \cdot \frac{100}{\sin 45^\circ} \approx 139,3 \\ BC = \sin 35^\circ \cdot \frac{100}{\sin 45^\circ} \approx 81,1 \end{cases}$$

b)

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 81,1 \cdot 139,3 \cdot \sin 45^\circ \approx 3994,2.$$

Câu 17. Cho tam giác ABC có $AB = 12, AC = 15, BC = 20$. Tính:

- a) Số đo các góc A, B, C.
 b) Diện tích tam giác ABC.

Lời giải

a) Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Thay $a = BC = 20; b = AC = 15; c = AB = 12$.

$$\Rightarrow \cos A = -\frac{31}{360}; \cos B = \frac{319}{480}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 94,9^\circ; \hat{B} = 48,3^\circ$$

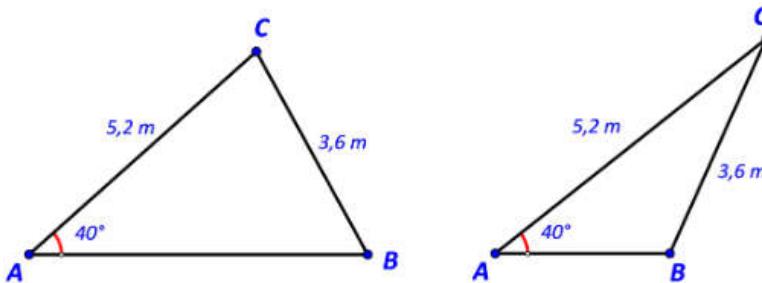
$$\Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (94,9^\circ + 48,3^\circ) = 36,8^\circ$$

b)

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12 \cdot \sin 94,9^\circ \approx 89,7$$

Câu 18. Tính độ dài cạnh AB trong mỗi trường hợp sau:



Lời giải

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{AC \cdot \sin A}{BC} = \frac{5,2 \cdot \sin 40^\circ}{3,6} \approx 0,93 \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} \approx 68,2^\circ \\ \hat{B} \approx 111,8^\circ \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\hat{B} \approx 68,2^\circ$

$$\text{Ta có: } \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (40^\circ + 68,2^\circ) = 71,8^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow AB = \sin C \cdot \frac{BC}{\sin A} = \sin 71,8^\circ \cdot \frac{3,6}{\sin 40^\circ} \approx 5,32$$

Trường hợp 2: $\hat{B} \approx 111,8^\circ$

Ta có:

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (40^\circ + 111,8^\circ) = 28,2^\circ$$

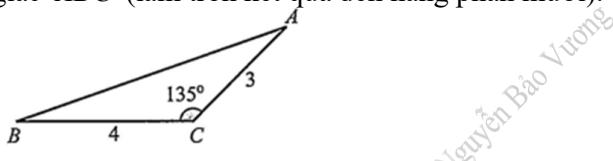
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\Rightarrow AB = \sin C \cdot \frac{BC}{\sin A} = \sin 28,2^\circ \cdot \frac{3,6}{\sin 40^\circ} \approx 2,65$$

Vậy $AB = 5,32$ hoặc $AB = 2,65$.

- Câu 19.** Cho tam giác ABC có $AC = 3, BC = 4, \hat{C} = 135^\circ$ (Hình 13). Tính độ dài cạnh AB và diện tích tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi).



Hình 13

Lời giải

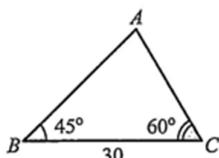
Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C \\ &= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 135^\circ = 25 + 12\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Suy ra $AB = \sqrt{25 + 12\sqrt{2}} \approx 6,5$.

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 135^\circ \approx 4,2.$$

- Câu 20.** Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 45^\circ, \hat{C} = 60^\circ$ và cạnh $BC = 30$ (Hình 14).



Hình 14

Tính độ dài các cạnh AB , AC và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi).

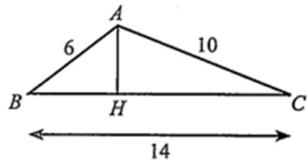
Lời giải

Xét tam giác ABC , ta có: $\hat{A} = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$. Áp dụng định lí sin ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2R.$$

Suy ra: $AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{30 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 26,9$; $AC = \frac{BC \sin B}{\sin A} = \frac{30 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 22,0$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{30}{2 \sin 75^\circ} \approx 15,5$.

- Câu 21.** Cho tam giác ABC có $AB = 6, AC = 10, BC = 14$. Tính số đo góc A và độ dài đường cao AH của tam giác ABC (Hình 15).



Hình 15

Lời giải

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} = -\frac{1}{2}.$$

Do đó, $\hat{A} = 120^\circ$. Diện tích tam giác ABC là:

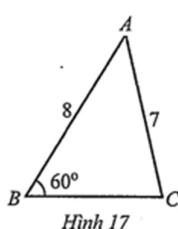
$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \sin 120^\circ = 15\sqrt{3}.$$

$$\text{Độ dài đường cao } AH \text{ là: } AH = \frac{2S}{BC} = \frac{2 \cdot 15\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{7}.$$

- Câu 22.** Cho tam giác ABC . Tính độ dài cạnh BC và số đo các góc A, C trong mỗi Hình 16, 17:



Hình 16



Hình 17

Lời giải

Đặt $BC = x (x > 0)$. Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B \Rightarrow 7^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ hoặc } x = 5. \text{ Vậy } BC = 3 \text{ hoặc } BC = 5.$$

Trường hợp 1. $BC = 3$ (hình 16).

$$\text{Áp dụng định lí sin ta có: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}. \text{ Suy ra } \sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{3 \sin 60^\circ}{7} = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

Do đó, $\hat{A} \approx 21,8^\circ$ và $\hat{C} \approx 180^\circ - 60^\circ - 21,8^\circ = 98,2^\circ$.

- Trường hợp 2: $BC = 5$ (Hình 17).

$$\text{Áp dụng định lí sin ta có: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}. \text{ Suy ra } \sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{5 \sin 60^\circ}{7} = \frac{5\sqrt{3}}{14}. \text{ Do đó,}$$

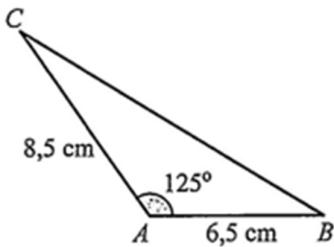
$\hat{A} \approx 38,2^\circ$ và $\hat{C} \approx 180^\circ - 60^\circ - 38,2^\circ = 81,8^\circ$.

- Câu 23.** Cho tam giác ABC có $AB = 6,5\text{cm}, AC = 8,5\text{cm}, \hat{A} = 125^\circ$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi theo đơn vị tương ứng):

- Độ dài cạnh BC ;
- Số đo các góc B, C ;
- Diện tích tam giác ABC .

Lời giải

Xét tam giác ABC (Hình 61) :



Hình 61

a) Áp dụng định lí cosin ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= 6,5^2 + 8,5^2 - 2 \cdot 6,5 \cdot 8,5 \cdot \cos 125^\circ \\ &\approx 177,88 \end{aligned}$$

Suy ra $BC \approx \sqrt{177,88} \approx 13,3 \text{ (cm)}$.

b) Áp dụng định lí sin ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.

$$\text{Suy ra: } \sin B = \frac{CA \sin A}{BC} \approx \frac{8,5 \sin 125^\circ}{13,3} \approx 0,52 \Rightarrow \hat{B} \approx 31,3^\circ$$

$$\Rightarrow C \approx 180^\circ - 31,3^\circ - 125^\circ = 23,7^\circ.$$

c) Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 8,5 \cdot \sin 125^\circ \approx 22,6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

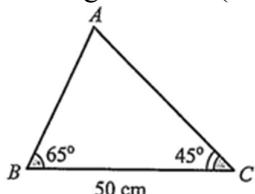
Câu 24. Cho tam giác ABC có $BC = 50 \text{ cm}$, $\hat{B} = 65^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi theo đơn vị xăng-ti-mét):

a) Độ dài các cạnh AB, AC ;

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Xét tam giác ABC (Hình 62):



Hình 62

Ta có: $\hat{A} = 180^\circ - 65^\circ - 45^\circ = 70^\circ$.

Áp dụng định lí sin ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R$.

a) Ta có:

$$AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{50 \sin 45^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 37,6 \text{ (cm)}$$

$$AC = \frac{BC \sin B}{\sin A} = \frac{50 \sin 65^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 48,2 \text{ (cm)}$$

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $R = \frac{50}{2 \sin 70^\circ} \approx 26,6 \text{ (cm)}$.

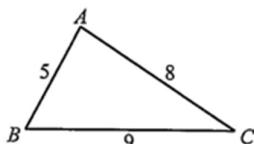
Câu 25. Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8, BC = 9$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi):

a) Số đo các góc A, B, C ;

b) Diện tích tam giác ABC .

Lời giải

Xét tam giác ABC (Hình 63):



Hình 63

a) Áp dụng định lí cosin ta có:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = 0,1$$

$$\Rightarrow A \approx 84,3^\circ.$$

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{5^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 9} = \frac{7}{15}$$

$$\Rightarrow B \approx 62,2^\circ.$$

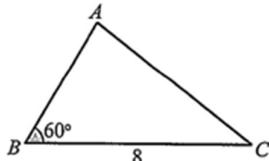
Do đó, $\hat{C} \approx 180^\circ - 84,3^\circ - 62,2^\circ = 33,5^\circ$.

b) Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A \approx \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 84,3^\circ \approx 19,9$.

Câu 26. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ$, $BC = 8$, $AB + AC = 12$. Tính độ dài các cạnh AB, AC .

Lời giải

Xét tam giác ABC (Hình 64):



Hình 64

Đặt $AB = x$ ($x > 0$). Khi đó, $AC = 12 - x$ ($x < 12$).

Áp dụng định lí cosin ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow (12-x)^2 = x^2 + 64 - 2x \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 144 - 24x + x^2 = x^2 + 64 - 8x \Rightarrow x = 5.$$

Vậy độ dài cạnh AB là 5, độ dài cạnh AC là $12 - 5 = 7$.

Vậy độ dài cạnh AB là 5, độ dài cạnh AC là $12 - 5 = 7$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 27. Giải tam giác ABC , biết

a) $c = 14$, $A = 60^\circ$, $B = 40^\circ$.

b) $b = 4,5$, $A = 30^\circ$, $C = 75^\circ$.

Lời giải

a) Ta có $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$.

Có $b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{14 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 9,1$ và $a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{14 \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 12,3$.

b) Ta có $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (30^\circ + 75^\circ) = 75^\circ$ vì $B = C$ nên tam giác cân tại A .

$$\text{Suy ra } c = b = 4,5 \text{ và } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{4,5 \sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 2,3.$$

Câu 28. Giải tam giác ABC , biết

a) $c = 35, A = 40^\circ, C = 120^\circ$.

b) $a = 137,5, B = 83^\circ, C = 57^\circ$.

Lời giải

a) Ta có $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (40^\circ + 120^\circ) = 20^\circ$.

Từ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, ta suy ra

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} \approx 26; a = \frac{c \sin B}{\sin C} \approx \frac{35.0,43}{0,87} \approx 13,8.$$

b) Ta có $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (83^\circ + 57^\circ) = 40^\circ$.

Từ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, ta suy ra

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \approx \frac{137,5.0,9925}{0,6427} \approx 212,3; c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx \frac{137,5.0,8387}{0,6427} \approx 179,4.$$

Câu 29. Giải tam giác ABC , biết $a = 6,3; b = 6,3; \hat{C} = 54^\circ$.

Lời giải

Ta có $a = b = 6,3$ nên tam giác ABC cân tại C .

$$\text{Suy ra } \hat{A} = \hat{B} = \frac{180^\circ - 54^\circ}{2} = 63^\circ.$$

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow c = \frac{a \sin C}{\sin A} \Leftrightarrow c = \frac{6,3 \cdot \sin 54^\circ}{\sin 63^\circ} \approx 5,72.$$

Vậy $\hat{A} = \hat{B} = 63^\circ, c \approx 5,72$.

Câu 30. Giải tam giác ABC , biết $b = 32; c = 45; \hat{A} = 87^\circ$.

Lời giải

Áp dụng định lí cos-sin, ta có

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{32^2 + 45^2 - 2 \cdot 32 \cdot 45 \cdot \cos 87^\circ} \approx 53,84.$$

Vì $b < c < a$ nên $\hat{B} < \hat{C} < \hat{A}$, suy ra tam giác ABC có ba góc nhọn. Áp dụng định lí sin, ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \sin B \approx \frac{32 \cdot \sin 87^\circ}{53,84} \approx 0,594.$$

Suy ra $\hat{B} \approx 36^\circ$, do đó $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 57^\circ$.

Vậy $a \approx 53,84$, $\hat{B} \approx 36^\circ$, $\hat{C} \approx 57^\circ$.

Câu 31. Giải tam giác ABC , biết $a = 7$; $b = 23$; $\hat{C} = 130^\circ$.

Lời giải

Áp dụng định lí cos-sin, ta có

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = \sqrt{7^2 + 23^2 - 2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot \cos 130^\circ} \approx 28,02.$$

Vì $\hat{C} = 130^\circ$ nên \hat{A} , \hat{B} là các góc nhọn.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \sin A = \frac{a \sin C}{c} \Leftrightarrow \sin A \approx \frac{7 \cdot \sin 130^\circ}{28,02} \approx 0,191.$$

Suy ra $\hat{A} \approx 11^\circ$, do đó $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) \approx 39^\circ$.

Vậy $c \approx 28,02$, $\hat{A} \approx 11^\circ$, $\hat{B} \approx 39^\circ$.

Câu 32. Giải tam giác ABC , biết $b = 14$; $c = 10$; $\hat{A} = 145^\circ$.

Lời giải

Áp dụng định lí cos-sin, ta có

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{14^2 + 10^2 - 2 \cdot 14 \cdot 10 \cdot \cos 145^\circ} \approx 22,92.$$

Vì $\hat{A} = 145^\circ$ nên \hat{C} , \hat{B} là các góc nhọn.

Áp dụng định lí sin ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Leftrightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} \Leftrightarrow \sin B \approx \frac{14 \cdot \sin 145^\circ}{22,92} \approx 0,35.$$

Suy ra $\hat{B} \approx 21^\circ$, do đó $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 14^\circ$.

Vậy $c \approx 22,92$, $\hat{B} \approx 21^\circ$, $\hat{C} \approx 14^\circ$.

Câu 33. Giải tam giác ABC , biết $a = 14$; $b = 18$; $c = 20$.

Lời giải

Ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{18^2 + 20^2 - 14^2}{2.18.20} = \frac{11}{15} \Rightarrow \hat{A} \approx 43^\circ.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{14^2 + 20^2 - 18^2}{2.14.18} = \frac{17}{35} \Rightarrow \hat{B} \approx 61^\circ.$$

Khi đó $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 76^\circ$.

Vậy $\hat{A} \approx 43^\circ$, $\hat{B} \approx 61^\circ$, $\hat{C} \approx 76^\circ$.

Câu 34. Giải tam giác ABC , biết $a = 6$; $b = 5$; $c = 7$.

Lời giải

Ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 7^2 - 4^2}{2.5.7} = \frac{29}{35} \Rightarrow \hat{A} \approx 34^\circ.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{4^2 + 7^2 - 5^2}{2.4.7} = \frac{5}{7} \Rightarrow \hat{B} \approx 44^\circ.$$

Khi đó $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 102^\circ$.

Vậy $\hat{A} \approx 34^\circ$, $\hat{B} \approx 44^\circ$, $\hat{C} \approx 102^\circ$.

Câu 35. Giải tam giác ABC , biết $a = 6$; $b = 7,3$; $c = 4,8$.

Lời giải

Ta có

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7,3^2 + 4,8^2 - 6^2}{2.7,3.4,8} = \frac{4033}{7008} \Rightarrow \hat{A} \approx 55^\circ.$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{6^2 + 4,8^2 - 7,3^2}{2.6.4,8} = \frac{115}{1152} \Rightarrow \hat{B} \approx 84^\circ.$$

Khi đó $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 41^\circ$.

Vậy $\hat{A} \approx 55^\circ$, $\hat{B} \approx 84^\circ$, $\hat{C} \approx 41^\circ$.

Câu 36. Giải tam giác ABC , biết $\hat{B} = 60^\circ$; $\hat{C} = 45^\circ$; $BC = a$.

Lời giải

Ta có $\hat{A} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$.

Áp dụng định lí sin, ta có

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} \Leftrightarrow b \approx 0,897a.$$

Tương tự ta có $c = \frac{a \sin C}{\sin A} \approx 0,732a$.

Vậy $\hat{A} = 75^\circ$, $b \approx 0,897a$, $c \approx 0,732a$.

Dạng 2. Nhận dạng tam giác

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 37.** Cho tam giác ABC có các góc thỏa mãn $\sin C = 2 \cdot \sin B \cdot \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC là một tam giác cân.

Lời giải

Áp dụng các định lí sin và cosin, ta có

$$\sin C = 2 \sin B \cos A \Leftrightarrow c = 2b \cos A \Leftrightarrow c = 2b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

- Câu 38.** Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$

b) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Lời giải

a) Từ định lí cosin và công thức tính diện tích của tam giác, suy ra

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}.$$

Tương tự cũng có $\cot B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$, $\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$.

Từ đó $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$

b) HD. Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến.

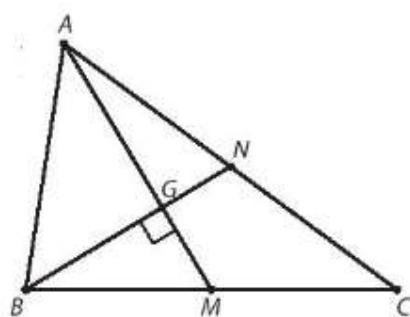
- Câu 39.** Cho tam giác ABC có hai trung tuyến kẻ từ A và B vuông góc. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 = 5c^2$

b) $\cot C = 2(\cot A + \cot B)$.

Lời giải

a) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA ; gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .



Khi đó $AG = \frac{2}{3}AM$, $BG = \frac{2}{3}BN$. Từ đó, theo định lí Pythagore ta có

$$c^2 = AB^2 = AG^2 + BG^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) = \frac{4}{9} \left(c^2 + \frac{a^2 + b^2}{4} \right).$$

Suy ra $5c^2 = a^2 + b^2$

b) Do $a^2 + b^2 = 5c^2$ nên $\cot C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} = \frac{c^2}{S}$. Mà

$$2(\cot A + \cot B) = 2 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} \right) = \frac{c^2}{S}.$$

Suy ra $\cot C = 2(\cot A + \cot B)$.

- Câu 40.** Cho tam giác ABC có $S = 2R^2 \sin A \sin B$. Chứng minh rằng tam giác ABC là một tam giác vuông.

Lời giải

Từ định lí sin và công thức tính diện tích, suy ra diện tích của tam giác bằng

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{(2R \sin A)(2R \sin B)(2R \sin C)}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

Từ đó, do $S = 2R^2 \sin A \sin B$, suy ra $\sin C = 1$ và do đó $\hat{C} = 90^\circ$.

Suy ra điều phải chứng minh.

- Câu 41.** Cho tam giác ABC với $BC = a; AC = b; AB = c$ và $a = b$. Chứng minh rằng: $c^2 = 2a^2(1 - \cos C)$.

Lời giải

Áp dụng định lí cosin ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

Do $a = b$ nên $c^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos C = 2a^2(1 - \cos C)$.

BÀI TẬP BỎ SUNG

- Câu 42.** Cho tam giác ABC . Chứng minh:

a) Góc A nhọn $\Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$;

b) Góc A tù $\Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$;

c) Góc A vuông $\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$;

Lời giải

a) Góc A nhọn $\Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$;

b) Góc A tù $\Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0 \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$;

c) Góc A vuông $\Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

- Câu 43.** Cho tam giác ABC thoả mãn $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh tam giác có ba góc nhọn.

Lời giải

Ta có $a^3 = b^3 + c^3$ nên a là cạnh lớn nhất, suy ra A là góc lớn nhất.

Ta chứng minh góc A nhọn là đủ. Thật vậy, ta có:

$$a^3 = b^3 + c^3 = b \cdot b^2 + c \cdot c^2 < a \cdot b^2 + a \cdot c^2 = a(b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A > 0$$

Vậy ta suy ra góc A nhọn, dẫn đến tam giác có ba góc nhọn.

Câu 44. Cho tam giác ABC thoả mãn $a^4 = b^4 + c^4$. Chứng minh ABC là tam giác nhọn.

Lời giải

Ta có $a^4 = b^4 + c^4$ nên a là cạnh lớn nhất, suy ra A là góc lớn nhất.

Ta chứng minh góc A nhọn là đủ. Thật vậy, ta có:

$$a^4 = b^4 + c^4 = (b^2 + c^2)^2 - 2b^2c^2 < (b^2 + c^2)^2 \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A > 0$$

Vậy ta suy ra góc A nhọn, dẫn đến ABC là tam giác nhọn.

Câu 45. Cho tam giác ABC thoả mãn $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$. Chứng minh ABC là tam giác cân.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin A = 2 \sin B \cdot \cos C \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c$$

Vậy ABC là tam giác cân tại A .

Câu 46. Cho tam giác ABC có cạnh $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$, $C = 30^\circ$. Chứng minh ABC là tam giác cân. Tính diện tích và chiều cao h_a của tam giác.

Lời giải

$$\text{Theo định lý cosin ta có } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 12 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4$$

Do đó $c = 2 = b$ nên tam giác ABC cân tại A có góc $B = C = 30^\circ$.

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}, h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1.$$

Câu 47. Xét dạng tam giác ABC thoả mãn $\frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}}$.

Lời giải

Ta

có

$$\begin{aligned} \frac{1+\cos B}{\sin B} = \frac{2a+c}{\sqrt{4a^2-c^2}} &\Leftrightarrow \frac{(1+\cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a+c)^2}{4a^2-c^2} \Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} = \frac{2a+c}{2a-c} \Leftrightarrow \frac{1+\cos B}{1-\cos B} - 1 = \frac{2a+c}{2a-c} - 1 \\ &\Leftrightarrow 2ac \cdot \cos B = c^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \end{aligned}$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

Câu 48. Cho tam giác ABC có chiều cao $h_a = \sqrt{p(p-a)}$. Chứng minh ABC là tam giác cân.

Lời giải

$$\text{Ta có } S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ nên}$$

$$h_a = \sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = a\sqrt{p(p-a)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(p-b)(p-c)} = a$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có $2\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq (p-b) + (p-c) = 2p - b - c = a$.

Do đó dấu đẳng thức xảy ra nên $p-b = p-c \Leftrightarrow b=c$.

Vậy tam giác ABC cân tại A .

Câu 49. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$.

Lời giải

Áp dụng định lý trung tuyến ta có:

$$\begin{aligned} 5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 &\Leftrightarrow 5\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \\ &\Leftrightarrow 5(2b^2 + 2c^2) - 5a^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2 \Leftrightarrow 9b^2 + 9c^2 = 9a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \end{aligned}$$

Vậy ABC là tam giác vuông tại A .

Câu 50. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn nội tiếp bằng r và các bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C tương ứng bằng r_a, r_b, r_c . Chứng minh rằng nếu $r = r_a - r_b - r_c$ thì góc A là góc vuông.

Lời giải

Ta có $r_a = \frac{S}{p-a}$, tương tự $r_b = \frac{S}{p-b}$, $r_c = \frac{S}{p-c}$.

Mặt khác từ công thức diện tích có $r = \frac{S}{p}$.

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \frac{1}{p-a} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \Rightarrow \frac{a}{p(p-a)} = \frac{2p-(b+c)}{(p-b)(p-c)}.$$

Vì

$$\begin{aligned} 2p-(b+c) &= a \Rightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c); \\ pa &= p(p+c) - bc \Rightarrow bc = p(b+c-a) = \frac{b+c+a}{2}(b+c-a) \\ &\Rightarrow 2bc = (b+c)^2 - a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \end{aligned}$$

Theo định lý Pitago ta có $\hat{A} = 90^\circ$.

Câu 51. Cho tam giác ABC thoả mãn $\frac{a^3 + b^3 - c^3}{a+b-c} = c^2$. Chứng minh góc $C = 60^\circ$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a^3 + b^3 - c^3}{a+b-c} = c^2 \Rightarrow a^3 + b^3 - c^3 = (a+b)c^2 - c^3$$

$$\text{Suy ra } a^3 + b^3 = (a+b)c^2 \Rightarrow a^2 - ab + b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 60^\circ$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

- Câu 52.** Cho tam giác ABC biết $a = 7$, $b = 8$, $c = 5$. Chứng minh tam giác ABC có góc 60°

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64 + 25 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ.$$

- Câu 53.** Cho tam giác ABC thoả mãn $c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + c^4 = 0$. Chứng minh tam giác ABC có góc 60° hoặc 120° .

Lời giải

Xét đẳng thức đã cho là phương trình bậc 2 theo $t = c^2$.

$$\text{Ta có: } \Delta' = (a^2 + b^2)^2 - (a^4 + a^2b^2 + c^4) = a^2b^2.$$

Do đó $c^2 = a^2 + b^2 \pm ab \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \cos C = a^2 + b^2 \pm 2ab$.

$$\text{Suy ra } \cos C = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow C = 60^\circ \text{ hay } 120^\circ.$$

- Câu 54.** Cho tam giác ABC thoả mãn $a + b + c = 2(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải

Ta có $a = b \cos C + c \cos B$, $b = c \cos A + a \cos C$, $c = a \cos B + b \cos A$ nên điều kiện đã cho tương đương với $(a - b)(\cos A - \cos B) + (b - c)(\cos B - \cos C) + (c - a)(\cos C - \cos A) = 0$.

Ta chứng minh $(a - b)(\cos A - \cos B) \leq 0$, dấu “=” khi $a = b$.

Xét $a = b$ thì bất đẳng thức đúng.

Xét $a > b$ thì $A > B \Rightarrow \cos A < \cos B \Rightarrow (a - b)(\cos A - \cos B) < 0$.

Xét $a < b$ thì $A < B \Rightarrow \cos A > \cos B \Rightarrow (a - b)(\cos A - \cos B) < 0$.

Tương tự thì $(b - c)(\cos B - \cos C) \leq 0$ và $(c - a)(\cos C - \cos A) \leq 0$.

Do đó dấu đẳng thức đồng thời xảy ra nên $a = b = c$. Vậy tam giác ABC đều.

- Câu 55.** Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $a = 10$, $r = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Chứng minh tam giác ABC đều.

Lời giải

Gọi M , N , P lần lượt là các tiếp điểm của BC , CA , AB với đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Ta có $AP = AN = r \cdot \cot 30^\circ = 5$ và $BP + NC = BM + MC = a = 10$.

Từ đó ta có $(b - AN) + (c - AP) = 10$ hay $b + c = 20$.

Theo định lý cô-sin ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ$ hay $a^2 = (b + c)^2 - 2bc - bc$.

$$\text{Suy ra } bc = \frac{(b+c)^2 - a^2}{3} = \frac{20^2 - 10^2}{3} = 100.$$

Mà $b + c = 20$ nên b, c là nghiệm của phương trình bậc hai $x^2 - 20x + 100 = 0$.

Phương trình này có nghiệm kép $b = c = 10$ nên ABC là tam giác đều.

Câu 56. Xét tam giác ABC thỏa mãn $\frac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2$ và $\sin A \cdot \sin C = \frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2 \Rightarrow a^3 + c^3 - b^3 = (a + c)b^2 - b^3.$$

$$\Rightarrow a^3 + c^3 = (a + c)b^2 \Rightarrow a^2 - ac + c^2 = b^2.$$

$$\Rightarrow a^2 - ac + c^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow B = 60^\circ$$

$$\text{Do đó } \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin^2 B = \frac{3}{4} \text{ nên } \sin A \cdot \sin C = \frac{3}{4} = \sin^2 B \Rightarrow \frac{a}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = \left(\frac{b}{2R} \right)^2$$

$$\Rightarrow ac = b^2 \Rightarrow ac = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - ac$$

$$\Rightarrow a^2 - 2ac + c^2 = 0 \Rightarrow (a - c)^2 = 0 \Rightarrow a = c.$$

Vậy ABC là tam giác cân và có góc 60° nên là tam giác đều.

Câu 57. Chứng minh điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là $m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2}R$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là một điểm tùy ý.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM})^2 \\ &= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2 - 2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3GM^2 + 3\overrightarrow{GM} \geq GA^2 + GB^2 + GC^2. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh, với mọi điểm M , ta có

$$(m_a + m_b + m_c)^2 = \frac{9}{4}(GA + GB + GC)^2 \leq \frac{9}{4} \cdot 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) \leq \frac{27}{4}(MA^2 + MB^2 + MC^2)$$

Thay M bởi tâm O của đường tròn ngoại tiếp, ta được

$$(m_a + m_b + m_c)^2 \leq \frac{27}{4} \cdot 3R^2 = \frac{81}{4} R^2.$$

Suy ra $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9}{2} R$.

Vậy nếu ABC là tam giác đều thì có $m_a + m_b + m_c = \frac{9}{2} R$. (1)

Ngược lại nếu giả sử tam giác ABC thỏa mãn điều kiện (1). Thay điểm M bằng tâm O của đường tròn ngoại tiếp ABC , ta có $3R^2 = \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + 3OG^2$.

Suy ra $\frac{81}{4} R^2 = 3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) + \frac{81}{4} OG^2 \geq (m_a + m_b + m_c)^2 + \frac{81}{4} OG^2$.

Do đó $\frac{81}{4} R^2 \geq \frac{81}{4} R^2 + \frac{81}{4} OG^2 \Rightarrow OG^2 = 0$ hay $O \equiv G$.

Vậy ABC là tam giác đều.

Câu 58. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin C = 2 \sin B \cos A$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Lời giải

Áp dụng định lí cô-sin và sin ta có

$$\sin C = 2 \sin B \cos A \Leftrightarrow \frac{c}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \Leftrightarrow c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Suy ra tam giác ABC cân tại đỉnh C .

Câu 59. Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Leftrightarrow \sin A(\cos B + \cos C) = \sin B + \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2R} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \frac{b+c}{2R} \Leftrightarrow b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2c + 2c^2b$$

$$\Leftrightarrow b^3 + c^3 + b^2c + bc^2 - a^2b - a^2c = 0$$

$$\Leftrightarrow (b+c)(b^2 + c^2) - a^2(b+c) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2.$$

Vậy tam giác ABC vuông tại A .

Câu 60. Nhận dạng tam giác ABC trong các trường hợp sau:

a) $a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c$.

b) $\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B).$

Lời giải

a) Áp dụng công thức diện tích ta có $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ah_a$ suy ra

$$a \sin A + b \sin B + c \sin C = h_a + h_b + h_c \Leftrightarrow a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ca} + c \cdot \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy tam giác ABC đều.

b) Ta có

$$\frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + \cot^2 B)$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 A + \cos^2 B + \sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}(\cot^2 A + 1 + \cot^2 B + 1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B}\right)$$
$$\Leftrightarrow (\sin^2 A + \sin^2 B)^2 = 4 \sin^2 A \sin^2 B$$
$$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a = b.$$

Vậy tam giác ABC cân tại C .

Dạng 3. Ứng dụng thực tế

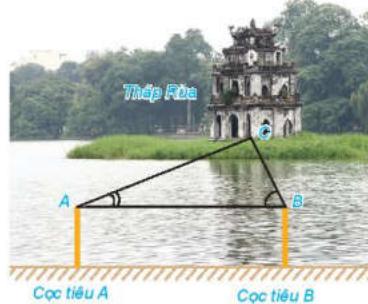
BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 61. Ngắm Tháp Rùa từ bờ, chỉ với những dụng cụ đơn giản, dễ chuẩn bị, ta cũng có thể xác định được khoảng cách từ vị trí ta đứng tới Tháp Rùa. Em có biết vì sao?



Lời giải

Theo các bước sau, ta có thể tiến hành đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ hồ Hoàn Kiếm đến Tháp Rùa



Bước 1. Trên bờ, đặt một cọc tiêu tại vị trí A và một cọc tiêu tại vị trí B nào đó. Đo khoảng cách AB .

Bước 2. Đứng tại A , ngắm Tháp Rùa và cọc tiêu B để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó.

Bước 3. Đứng tại B , ngắm cọc tiêu A và Tháp Rùa để đo góc tạo bởi hai hướng ngắm đó.

Bước 4. Gọi C là vị trí của Tháp Rùa. Áp dụng Định lí sin cho tam giác ABC để tính độ dài cạnh AC .

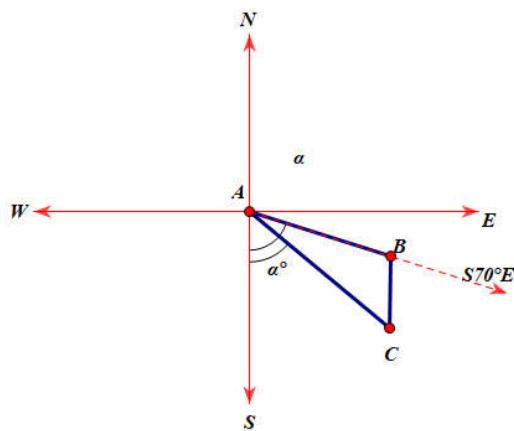
Câu 62. Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng A , đi theo hướng $S70^\circ E$ với vận tốc 70 km/h . Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8 km/h . Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

a) Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

b) Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

Lời giải

a) Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.



Trong đó: B là nơi động cơ bị hỏng, C là ví trí neo đậu của tàu trên hòn đảo. Khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là đoạn AC (hay b). Ban đầu tàu di chuyển theo hướng $S70^\circ E$ nên $\widehat{BAS} = 70^\circ$. Sau khi động cơ bị hỏng, tàu trôi theo hướng Nam do đó BC song song với AS . $\Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAS} = 110^\circ$. Quãng đường tàu đi được sau 90 phút hay $1,5$ giờ (ngay trước khi hỏng động cơ) là: $70.1,5 = 105(\text{km})$ hay $c = 105$. Quãng đường tàu trôi tự do là: $8.2 = 16$ (km) hay $a = 16$. Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$ $\Rightarrow b^2 = 16^2 + 105^2 - 2.16.105 \cdot \cos 110^\circ \approx 12150,632 \Rightarrow b \approx 110,23$. Vậy khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là khoảng $110,23 \text{ km}$.

b) Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

Theo sơ đồ, hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là $S\alpha^\circ E$ với $\alpha^\circ = \widehat{CAS}$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b}$$

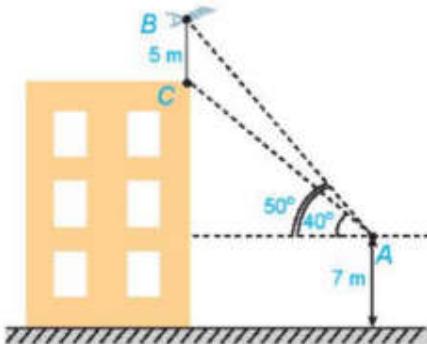
Mà $\hat{B} = 110^\circ$; $b \approx 110,23$; $a = 16$.

$$\Rightarrow \sin A = \frac{16 \cdot \sin 110^\circ}{110,23} \approx 0,136 \Rightarrow \hat{A} \approx 7,84^\circ \left(\text{do } \hat{A} < 90^\circ \right)$$

$$\Rightarrow \alpha^\circ \approx 70^\circ - 7,84^\circ = 62,16^\circ.$$

Vậy hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là $S62,16^\circ E$.

- Câu 63.** Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5m. Từ một vị trí quan sát A cao 7m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 50° và 40° so với phương nằm ngang (H.3.18)

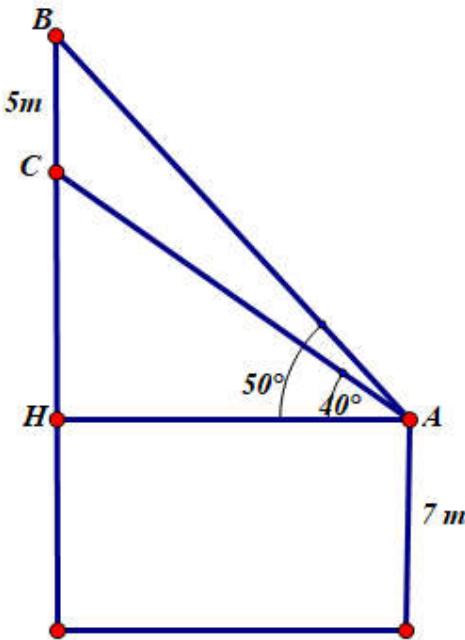


Hình 3.18

- a) Tính các góc của tam giác ABC .
b) Tính chiều cao của tòa nhà.

Lời giải

- a) Tính các góc của tam giác ABC .



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng BC.

$$\text{Ta có: } \widehat{HAB} = 50^\circ; \widehat{HAC} = 40^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ \quad (1)$$

Xét tam giác ABH , vuông tại H ta có:

$$\hat{H} = 90^\circ; \widehat{BAH} = 50^\circ \Rightarrow \widehat{HBA} = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ \text{ hay } \widehat{CBA} = 40^\circ.$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } \widehat{BCA} = 180^\circ - 40^\circ - 10^\circ = 130^\circ.$$

Vậy ba góc của tam giác ABC lần lượt là: $\hat{A} = 10^\circ$; $\hat{B} = 40^\circ$; $\hat{C} = 130^\circ$.

b) Tính chiều cao của tòa nhà.

Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC , ta được:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \cdot \sin C}{\sin A}$$

$$\text{Mà: } BC = 5(m); \quad \hat{C} = 130^\circ; \hat{A} = 10^\circ \Rightarrow AB = \frac{5 \cdot \sin 130^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 22(m)$$

Xét tam giác ABH , vuông tại H ta có:

$$\sin \widehat{BAH} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \sin \widehat{BAH}$$

$$\text{Mà: } AB \approx 22(m); \quad \widehat{BAH} = 50^\circ$$

$$\Rightarrow BH \approx 22 \cdot \sin 50^\circ \approx 16,85(m)$$

Vậy chiều cao của tòa nhà là: $BH - BC + 7 = 16,85 - 5 + 7 = 18,85(m)$

Câu 64. Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bờ rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được).



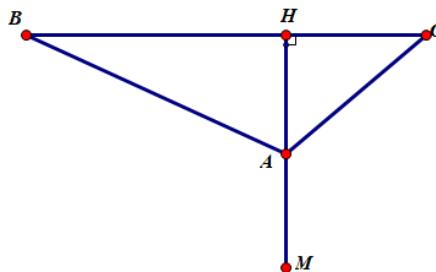
Lời giải

Bước 1:

Dán dấu vị trí quan sát tại điểm A , chiều rộng của hòn đảo kí hiệu là đoạn BC .

Gọi H là hình chiếu của A trên BC .

Trên tia đối của tia AH , lấy điểm M , ghi lại khoảng cách $AM = a$.



Bước 2:

Tại A , quan sát để xác định các góc $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{HAC} = \beta$.

Tiếp tục quan sát tại M , xác định góc $\widehat{HMC} = \gamma$.

Bước 3: Giải tam giác AMC , tính AC .

$$AM = a, \widehat{AMC} = \widehat{HMC} = \gamma \Rightarrow \widehat{MAC} = 180^\circ - \beta \Rightarrow \widehat{ACM} = 180^\circ - \gamma - (180^\circ - \beta) = \beta - \gamma$$

Áp dụng định lý sin trong tam giác AMC ta có:

$$\frac{AC}{\sin \widehat{AMC}} = \frac{AM}{\sin \widehat{ACM}} \Rightarrow AC = \sin \gamma \cdot \frac{a}{\sin(\beta - \gamma)}$$

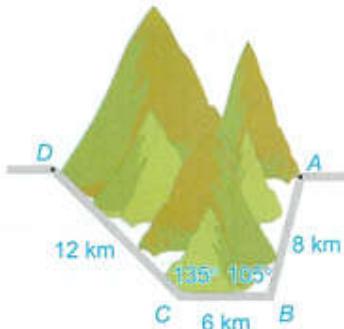
Bước 4:

$$\widehat{ABC} = 90^\circ - \widehat{HAB} = 90^\circ - (\alpha - \beta)$$

Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow BC = \sin \alpha \cdot \frac{\frac{a}{\sin(\beta - \gamma)}}{\sin(90^\circ - (\alpha - \beta))}.$$

- Câu 65.** Để tránh núi, giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong Hình. Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D . Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



Lời giải

Bước 1:

Áp dụng định lí cos trong tam giác ABC ta có:

$$AC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 105^\circ \Rightarrow AC \approx 11,2 \text{ (km)}$$

Bước 2:

Lại có: Theo định lí sin thì

$$\frac{AB}{\sin ACD} = \frac{AC}{\sin ABC} \Rightarrow \sin ACD = \frac{8 \cdot \sin 105^\circ}{11,2} \Rightarrow \widehat{ACB} \approx 43,6^\circ \Rightarrow \widehat{ACD} = 135^\circ - 43,6^\circ = 91,4^\circ$$

Bước 3:

Áp dụng định lí cos trong tam giác ACD ta có:

$$AD^2 = 12^2 + 11,2^2 - 2 \cdot 12 \cdot 11,2 \cos 91,4^\circ \Rightarrow AD \approx 16,6 \text{ (km)}$$

Bước 4:

Độ dài đường mới giảm số kilomet so với đường cũ là: $12 + 6 + 8 - 16,6 = 9,4 \text{ (km)}$

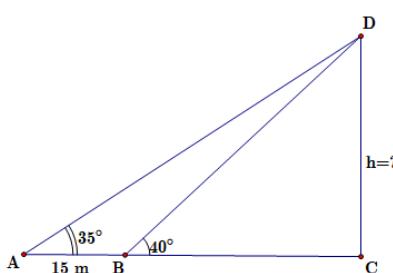
- Câu 66.** Để đo chiều cao của một tòa nhà, người ta chọn hai điểm A và B thẳng hàng với chân C của tòa nhà, cách nhau 15m. Sử dụng giàc kê, từ A và B tương ứng nhìn thấy đỉnh D của tòa nhà dưới các góc 35° và 40° so với phương nằm ngang. Hỏi chiều cao của tòa nhà đo được là bao nhiêu mét?

Lời giải

Do $\widehat{CBD} = 40^\circ$, $\widehat{BAD} = 35^\circ$ nên $\widehat{ADB} = 40^\circ - 35^\circ = 5^\circ$. Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD ta được $BD = \frac{AB}{\sin D} \cdot \sin A = \frac{15}{\sin 5^\circ} \cdot \sin 35^\circ$.

Từ đó suy ra chiều cao của tòa nhà bằng

$$h = CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD} = \frac{15}{\sin 5^\circ} \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 40^\circ \approx 63,45 \text{ (m)}.$$



Nhận xét. Việc sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác giúp ta có thể giải được những bài toán về đo đạc trong thực tế, như đo chiều cao của một vật thể, đo khoảng cách giữa hai điểm mà không thể đo trực tiếp được (xem bài tập 3.10, 3.11, 3.12).

- Câu 67.** Một tàu cá xuất phát từ đảo A , chạy 50 km theo hướng $N24^\circ E$ đến đảo B để lấy thêm ngư cụ, rồi chuyền hướng $N36^\circ W$ chạy tiếp 130 km đến ngư trường C .

a) Tính khoảng cách từ vị trí xuất phát A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị đo kilômét).

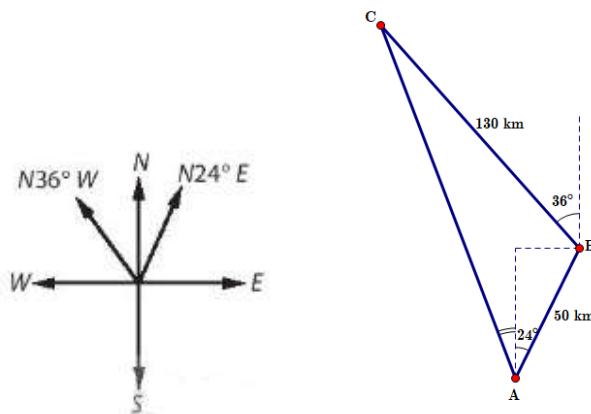
b) Tìm hướng từ A đến C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Từ giả thiết suy ra $\widehat{ABC} = (90^\circ - 24^\circ) + (90^\circ - 36^\circ) = 120^\circ$. Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta được

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 2500 + 16900 - 2 \cdot 50 \cdot 130 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 25900.$$

Suy ra $AC = 10\sqrt{259} \approx 161(\text{km})$.



b) Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta được $\sin \widehat{CAB} = \frac{BC}{AC} \cdot \sin \widehat{ABC} \approx 0,6993$.

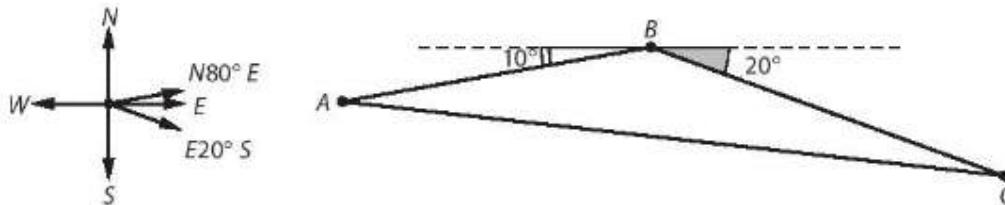
Suy ra $\widehat{CAB} = 44^\circ$ và do đó AC chênh về hướng tây một góc $44^\circ - 24^\circ = 20^\circ$ so với phương bắc. Vậy hướng từ A tới C là $N20^\circ W$.

- Câu 68.** Một tàu du lịch xuất phát từ bãi biển Đồ Sơn (Hải Phòng), chạy theo hướng $N80^\circ E$ với vận tốc 20 km/h . Sau khi đi được 30 phút , tàu chuyền sang hướng $E20^\circ S$ giữ nguyên vận tốc và chạy tiếp 36 phút nữa đến đảo Cát Bà. Hỏi khi đó tàu du lịch cách vị trí xuất phát bao nhiêu kilômét?

Lời giải

Coi điểm xuất phát là A , điểm tàu chuyền hướng là B và đích đến là C . Theo giả thiết

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - (10^\circ + 20^\circ) = 150^\circ$$



Do tàu chạy từ A tới B với vận tốc 20 km/h trong 30 phút , nên

$$AB = 20 \cdot \frac{30}{60} = 10(\text{km}).$$

Do tàu chạy từ B đến C với vận tốc 20 km/h trong 36 phút , nên

$$BC = 20 \cdot \frac{36}{60} = 12(\text{km}).$$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC , ta

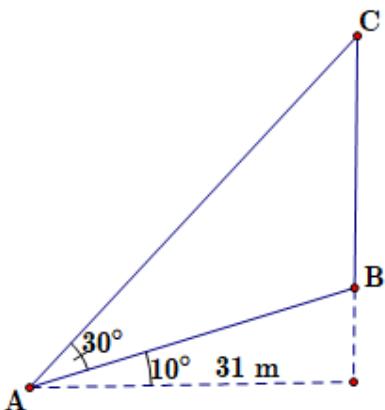
$$\text{được } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx 452$$

Suy ra $AC \approx \sqrt{452} \approx 21(km)$.

- Câu 69.** Một cây cỏ thụ mọc thẳng đứng bên lề một con dốc có độ dốc 10° so với phương nằm ngang. Từ một điểm dưới chân dốc, cách gốc cây $31m$ người ta nhìn đỉnh ngọn cây dưới một góc 40° so với phương nằm ngang. Hãy tính chiều cao của cây.

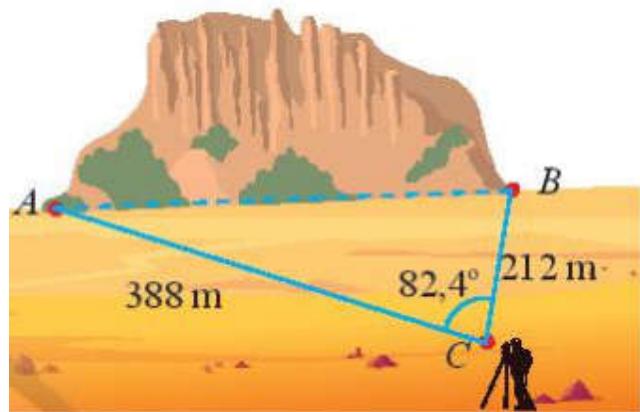
Lời giải

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC .



Đáp số: Chiều cao của cây là $h \approx 20,23(m)$.

- Câu 70.** Một đường hầm được dự kiến xây dựng xuyên qua một ngọn núi. Để ước tính chiều dài của đường hầm, một kĩ sư đã thực hiện các phép đo và cho ra kết quả như Hình. Tính chiều dài của đường hầm từ các số liệu đã khảo sát được.



Lời giải

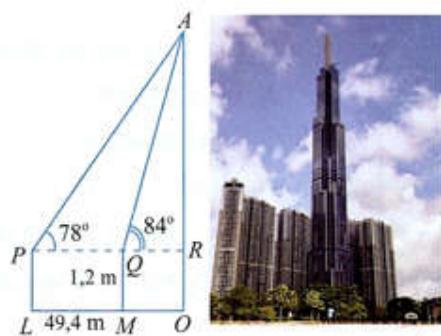
Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC , ta có:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos C = 388^2 + 212^2 - 2 \cdot 388 \cdot 212 \cdot \cos 82,4^\circ \approx 173730$$

Suy ra $AB \approx \sqrt{173730} \approx 417(m)$.

Vậy đường hầm dài khoảng $417m$.

- Câu 71.** Để xác định chiều cao của một toà nhà cao tầng, một người đứng tại điểm M , sử dụng giác kê nhìn thấu đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RQA} = 84^\circ$, người đó lùi ra xa một khoảng cách $LM = 49,4m$ thì nhìn thấu đỉnh toà nhà với góc nâng $\widehat{RPA} = 78^\circ$. Tính chiều cao của toà nhà, biết rằng khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kê đó là $PL = QM = 1,2m$ (Hình).



Giải thích: Góc nâng là góc tạo bởi tia ngắm nhìn lên và đường nằm ngang.

Lời giải

Ta có $\widehat{PAQ} = \widehat{AQR} - \widehat{APR} = 84^\circ - 78^\circ = 6^\circ$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác APQ , ta có:

$$\frac{AQ}{\sin P} = \frac{PQ}{\sin A} \Rightarrow \frac{AQ}{\sin 78^\circ} = \frac{PQ}{\sin 6^\circ} \Rightarrow AQ = \frac{PQ \cdot \sin 78^\circ}{\sin 6^\circ}.$$

Trong tam giác vuông AQR , ta có:

$$AR = AQ \cdot \sin 84^\circ = \frac{PQ \cdot \sin 78^\circ \cdot \sin 84^\circ}{\sin 6^\circ} = \frac{49,4 \cdot \sin 78^\circ \cdot \sin 84^\circ}{\sin 6^\circ} \approx 460(m)$$

Vậy chiều cao của toà nhà là: $AO = AR + RO \approx 460 + 1,2 = 461,2(m)$.

- Câu 72.** Hai trạm quan sát ở hai thành phố Đà Nẵng và Nha Trang đồng thời nhìn thấy một vệ tinh với góc nâng lần lượt là 75° và 60° (Hình). Vệ tinh cách trạm quan sát tại thành phố Đà Nẵng bao nhiêu kilômét? Biết rằng khoảng cách giữa hai trạm quan sát là 520 km .



Lời giải

Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn vị trí của thành phố Đà Nẵng, Nha Trang và vệ tinh.

Ta có: $\hat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có:

$$AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{520 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 637(\text{km}).$$

Vậy vệ tinh cách trạm quan sát tại thành phố Đà Nẵng khoảng 637 km .

- Câu 73.** Với số liệu đo được từ một bên bờ sông như hình vẽ bên, bạn hãy giúp nhân viên đo đạc tính khoảng cách giữa hai cái cây bên kia bờ sông.



Lời giải

Gọi vị trí của người đo đạc đứng là điểm A và gọi B, C lần lượt là vị trí hai cái cây bên kia sông.

Ta có tam giác ABC với $AC = 100\text{m}$; $AB = 75\text{m}$ và $\hat{A} = 32^\circ$.

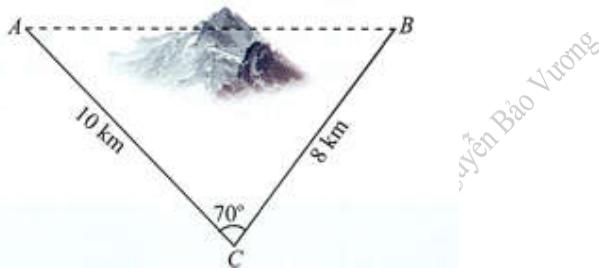
Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC , ta có:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos A = 100^2 + 75^2 - 2 \cdot 100 \cdot 75 \cdot \cos 32^\circ \approx 2904,3.$$

Suy ra $BC \approx \sqrt{2904,3} \approx 53,9(\text{m})$.

Vậy hai cái cây bên kia sông cách nhau khoảng 53,9 m.

- Câu 74.** Để lắp đường dây điện cao thế từ vị trí A đến vị trí B , do phải tránh một ngọn núi nên người ta phải nối đường dây từ vị trí A đến vị trí C dài 10 km , sau đó nối đường dây từ vị trí C đến vị trí B dài 8 km . Góc tạo bởi hai đoạn dây AC và CB là 70° . Tính chiều dài tăng thêm vì không thể nối trực tiếp từ A đến B .



Lời giải

Áp dụng định lí cosin, ta có:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 \cdot BC \cdot AC \cdot \cos C \Leftrightarrow AB^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 70^\circ \Rightarrow AB \approx 10,45$$

Vậy chiều dài tăng thêm vì không thể nối trực tiếp là:

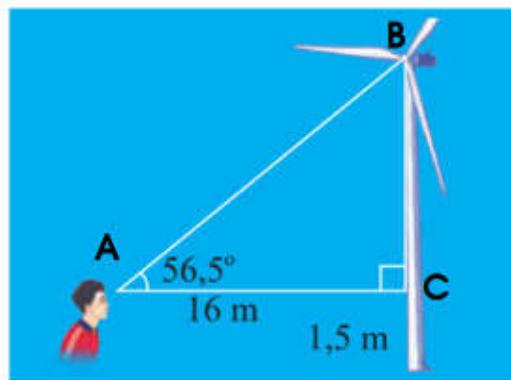
$$AC + CB - AB = 10 + 8 - 10,45 = 7,55(\text{km}).$$

- Câu 75.** Một người đứng cách thân một cát quạt gió 16 m và nhìn thấy tâm của cánh quạt với góc nâng $56,5^\circ$ (Hình). Tính khoảng cách từ tâm của cánh quạt đến mặt đất. Cho biết khoảng cách từ mắt của người đó đến mặt đất là $1,5\text{m}$.



Lời giải

Kí hiệu các điểm A, B, C như hình

**Cách 1:**

$$\text{Ta có: } \hat{B} = 90^\circ - 56,5^\circ = 33,5^\circ$$

$$\text{Áp dụng định lí sin, ta có: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\Rightarrow BC = \sin A \cdot \frac{AC}{\sin B} = \sin 56,5^\circ \cdot \frac{16}{\sin 33,5^\circ} \approx 24,2(m)$$

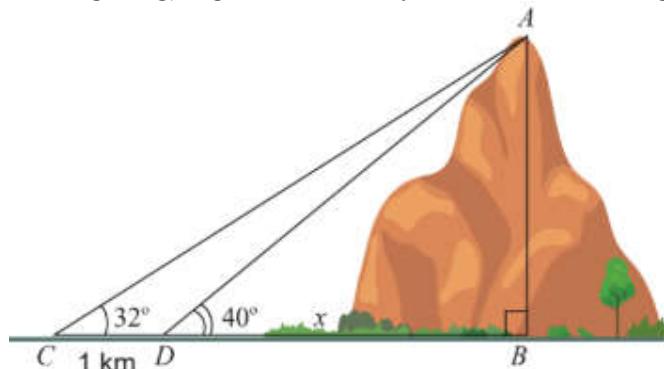
Vậy khoảng cách từ tâm của cánh quạt đến mặt đất là $24,2 + 1,5 = 15,7(m)$

Cách 2:

$$\tan A = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \cdot \tan A = 16 \cdot \tan 56,5^\circ \approx 24,2$$

Vậy khoảng cách từ tâm của cánh quạt đến mặt đất là $24,2 + 1,5 = 15,7(m)$

Câu 76. Tính chiều cao AB của một ngọn núi. Biết tại hai điểm C, D cách nhau 1 km trên mặt đất (B, C, D thẳng hàng), người ta nhìn thấy đỉnh A của núi với góc nâng lần lượt là 32° và 40° (Hình).

**Lời giải**

Tam giác ABC vuông tại B nên ta có:

$$\tan C = \frac{AB}{CB} \Leftrightarrow AB = \tan 32^\circ \cdot (1+x)$$

Tam giác ADB vuông tại B nên ta có:

$$\tan D = \frac{AB}{DB} \Leftrightarrow AB = \tan 40^\circ \cdot x$$

$$\Rightarrow \tan 32^\circ \cdot (1+x) = \tan 40^\circ \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (\tan 40^\circ - \tan 32^\circ) = \tan 32^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\tan 32^\circ}{\tan 40^\circ - \tan 32^\circ}$$

$$\Leftrightarrow x \approx 2,9(km)$$

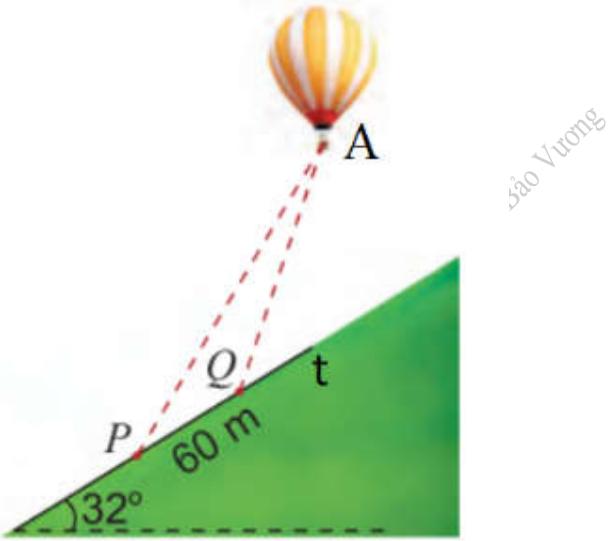
$$\Rightarrow AB \approx \tan 40^\circ \cdot 2,92 \approx 2,45(km)$$

Vậy chiều cao của ngọn núi là 2,45 km.

- Câu 77.** Hai người quan sát khinh khí cầu tại hai địa điểm P và Q nằm ở sườn đồi nghiêng 32° so với phương ngang, cách nhau 60 m (Hình 10). Người quan sát tại P xác định góc nâng của khinh khí cầu là 62° . Cùng lúc đó, người quan sát tại Q xác định góc nâng của khinh khí cầu đó là 70° . Tính khoảng cách từ Q đến khinh khí cầu.



Lời giải



Gọi A là vị trí của khinh khí cầu, Pt là đường sườn đồi như hình.

Ta có:

Tại P , góc nâng của khinh khí cầu là $62^\circ \Rightarrow \hat{P} = 62^\circ - 32^\circ = 30^\circ$

Tại Q , góc nâng của khinh khí cầu là 70°

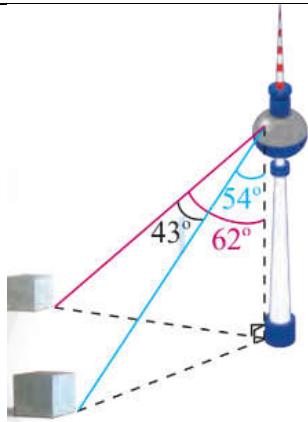
$$\Rightarrow \widehat{AQt} = 70^\circ - 32^\circ = 38^\circ \Rightarrow \widehat{AQP} = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ \text{ và } \hat{A} = 180^\circ - 142^\circ - 30^\circ = 8^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác APQ , ta có:

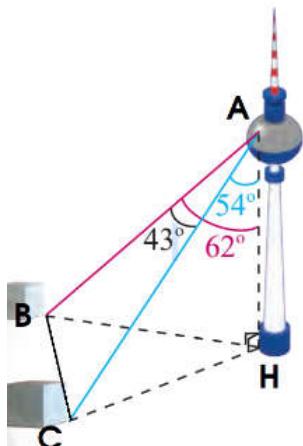
$$\frac{PQ}{\sin A} = \frac{QA}{\sin P} \Rightarrow QA = \sin P \cdot \frac{PQ}{\sin A} = \sin 30^\circ \cdot \frac{60}{\sin 8^\circ} \approx 215,56(\text{m})$$

Vậy khoảng cách từ Q đến khinh khí cầu là $215,56\text{ m}$.

- Câu 78.** Một người đứng ở trên một tháp truyền hình cao 352 m so với mặt đất, muốn xác định khoảng cách giữa hai cột mốc trên mặt đất bên dưới. Người đó quan sát thấy góc được tạo bởi hai đường ngắm tới hai mốc này là 43° , góc giữa phương thẳng đứng và đường ngắm tới một điểm mốc trên mặt đất là 62° và đến điểm mốc khác là 54° (Hình). Tính khoảng cách giữa hai cột mốc này.



Lời giải



Gọi các điểm A, B, C, H như hình trên.

Xét tam giác ABH ta có:

$$AH = 352, \widehat{BAH} = 62^\circ$$

$$\text{Mà } \cos \widehat{BAH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB = 352 \cdot \cos 62^\circ \approx 165,25$$

Tương tự, ta có:

$$\cos \widehat{CAH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AC = 352 \cdot \cos 54^\circ \approx 206,9$$

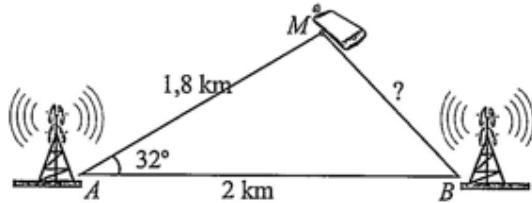
Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \Leftrightarrow BC^2 = 165,25^2 + 206,9^2 - 2 \cdot 165,25 \cdot 206,9 \cdot \cos 43^\circ$$

$$\Rightarrow BC \approx 141,8$$

Vậy khoảng cách giữa hai cột mốc này là 141,8 m.

- Câu 79.** Tính khoảng cách từ vị trí của một người đang gọi điện thoại di động đến trạm phát sóng B với số liệu đã cho trong Hình 2.



Hình 2

Lời giải

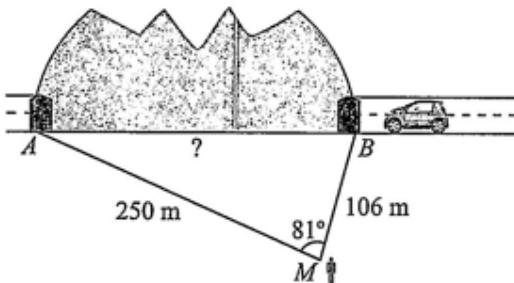
Áp dụng định lí cosin trong tam giác MAB , ta có:

$$MB^2 = AB^2 + AM^2 - 2 \cdot AB \cdot AM \cdot \cos A = 2^2 + 1,8^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1,8 \cdot \cos 32^\circ \approx 1,134.$$

$$\text{Suy ra } MB \approx \sqrt{1,134} \approx 1,065(\text{km}).$$

Vậy khoảng cách từ vị trí của người đó đến trạm phát sóng B là $1,065\text{ km}$.

Câu 80. Tính chiều dài của đường hầm AB với số liệu cho trong Hình 3.



Hình 3

Lời giải

Gọi vị trí của người quan sát là điểm M và gọi A, B lần lượt là hai đầu đường hầm. Ta có tam giác MAB với $MA = 250\text{ m}; MB = 106\text{ m}$ và $\hat{M} = 81^\circ$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác MAB , ta có:

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2 \cdot MA \cdot MB \cdot \cos M = 250^2 + 106^2 - 2 \cdot 250 \cdot 106 \cdot \cos 81^\circ \approx 65444,97.$$

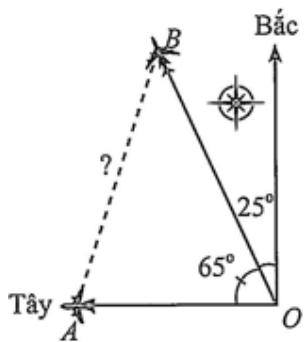
Suy ra $AB \approx \sqrt{65444,97} \approx 255,82(\text{m})$.

Vậy chiều dài của đường hầm AB khoảng $255,82\text{ m}$.

Câu 81. Hai máy bay cùng cất cánh từ một sân bay nhưng bay theo hai hướng khác nhau. Một chiếc di chuyển với tốc độ 450 km/h theo hướng tây và chiếc còn lại di chuyển theo hướng hợp với hướng bắc một góc 25° về phía tây với tốc độ 630 km/h . Hỏi sau 90 phút, hai máy bay cách nhau bao xa? Giả sử chúng đang ở cùng độ cao.

Lời giải

Gọi O, A, B lần lượt là vị trí sân bay và hai máy bay sau 90 phút.



Hình 4

Ta có:

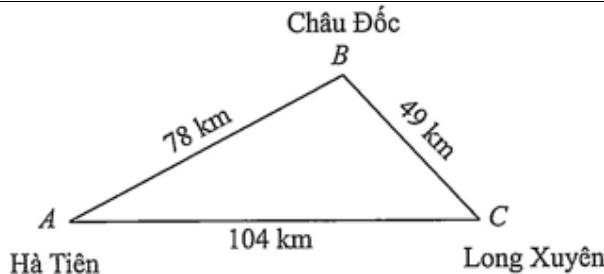
$$OA = 450 \cdot \frac{3}{2} = 675(\text{km}); OB = 630 \cdot \frac{3}{2} = 945(\text{km}); \widehat{AOB} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ.$$

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB} = 675^2 + 945^2 - 2 \cdot 675 \cdot 945 \cdot \cos 65^\circ \approx 809495.$$

Suy ra $AB \approx \sqrt{809495} \approx 900(\text{km})$.

Vậy sau 90 phút, hai máy bay cách nhau khoảng 900 km .

Câu 82. Người ta dự định làm hai đường cao tốc BA và BC từ Châu Đốc đến Hà Tiên và từ Châu Đốc đến Long Xuyên như Hình 5. Hãy tính góc tạo bởi hướng của hai cao tốc.



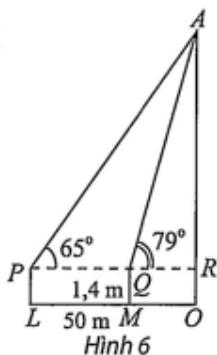
Hình 5

Lời giải

$$\cos B = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC} \approx \frac{78^2 + 49^2 - 104^2}{2 \cdot 78 \cdot 49} = \frac{-111}{364} \Rightarrow \hat{B} \approx 107^\circ 45' 18''.$$

Vậy góc tạo bởi hướng của hai cao tốc là $107^\circ 45' 18''$.

- Câu 83.** Để xác định chiều cao của một tòa nhà cao tầng, một người đứng tại điểm M , sử dụng giác kẽ nhìn thấy đỉnh tòa nhà với góc nâng $\widehat{RQA} = 79^\circ$, người đó lùi ra xa một khoảng cách $LM = 50m$ thì nhìn thấy đỉnh tòa nhà với góc nâng $\widehat{RPA} = 65^\circ$. Hãy tính chiều cao của tòa nhà, biết rằng khoảng cách từ mặt đất đến ống ngắm của giác kẽ đó là $PL = QM = 1,4 m$ (Hình 6).



Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Đặt $d = PQ = 50m; h = AR$ là chiều cao từ giác kẽ đến đỉnh tòa nhà.

Ta có: $\widehat{APR} = \alpha = 65^\circ, \widehat{AQR} = \beta = 79^\circ$.

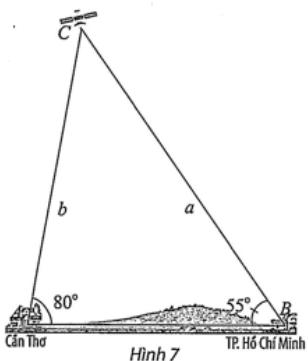
Gọi: $d_1 = PR = \frac{h}{\tan \alpha}; d_2 = QR = \frac{h}{\tan \beta}$; ta có:

$$d = d_1 - d_2 = \frac{h}{\tan \alpha} - \frac{h}{\tan \beta} = h \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta} \right).$$

$$\text{Suy ra } h = \frac{d}{\frac{1}{\tan \alpha} - \frac{1}{\tan \beta}} = \frac{50}{\frac{1}{\tan 65^\circ} - \frac{1}{\tan 79^\circ}} \approx 183,9(m).$$

Vậy chiều cao của tòa nhà là $AR + RO \approx 183,9 + 1,4 = 185,3(m)$.

- Câu 84.** Một vệ tinh quay quanh Trái Đất, đang bay phía trên hai trạm quan sát ở hai thành phố Hồ Chí Minh và Cần Thơ. Khi vệ tinh nằm giữa hai trạm này, góc nâng của nó được quan sát đồng thời là 55° tại thành phố Hồ Chí Minh và 80° tại Cần Thơ. Hỏi khi đó vệ tinh cách trạm quan sát tại Cần Thơ bao xa? Biết rằng, khoảng cách giữa hai trạm quan sát là 127 km



Hình 7

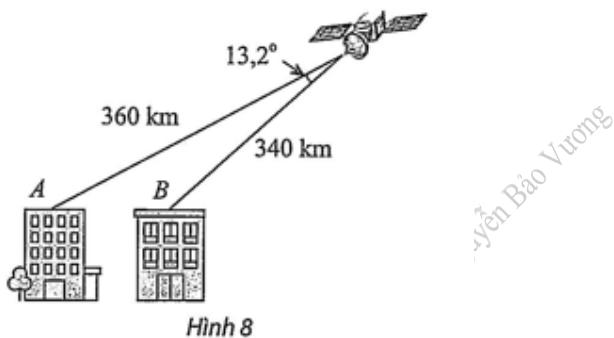
Lời giải

Ta có $\hat{C} = 180^\circ - (80^\circ + 55^\circ) = 45^\circ$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có: $AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{127 \cdot \sin 55^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 147(km)$.

Vậy vệ tinh cách trạm quan sát tại thành phố Cần Thơ khoảng 147 km.

- Câu 85.** Tính khoảng cách AB giữa nóc hai toà cao ốc. Cho biết khoảng cách từ hai điểm đó đến một vệ tinh viễn thông lần lượt là 360 km, 340 km và góc nhìn từ vệ tinh đến A và B là $13,2^\circ$ (Hình 8).



Hình 8

Lời giải

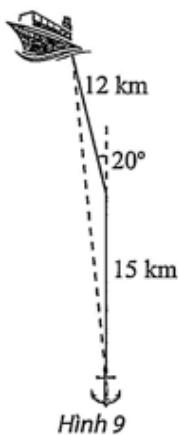
Áp dụng định lí cosin trong tam giác OAB , ta có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB} = 360^2 + 340^2 - 2 \cdot 360 \cdot 340 \cdot \cos 13,2^\circ \approx 6867,88.$$

Suy ra $AB \approx \sqrt{6867,88} \approx 82,87(km)$.

Vậy khoảng cách giữa nóc hai toà cao ốc khoảng 83 km.

- Câu 86.** Một chiếc tàu khởi hành từ bến cảng, đi về hướng bắc $15km$, sau đó bẻ lái 20° về hướng tây bắc và đi thêm $12km$ nữa (Hình 9). Tính khoảng cách từ tàu đến bến cảng.

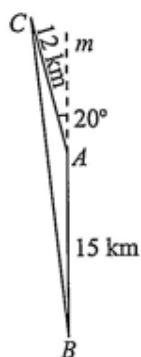


Hình 9

Lời giải

Ta có: $AB = 15 \text{ km}$, $AC = 12 \text{ km}$, $\widehat{C}Am = 20^\circ$.

$$\Rightarrow \widehat{CAB} = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ.$$

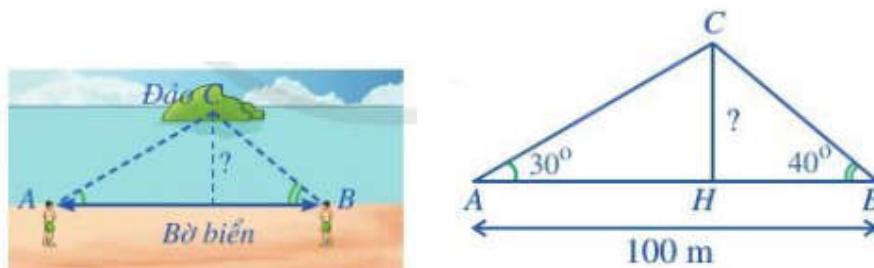


Hình 1

Áp dụng định lí cosin, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \Rightarrow BC \approx 26,59(\text{km})$.

Vậy con tàu cách bến cảng khoảng 27 km .

- Câu 87.** Đứng ở vị trí A trên bờ biển, bạn Minh đo được góc nghiêng so với bờ biển tới một vị trí C trên đảo là 30° . Sau đó di chuyển dọc bờ biển đến vị trí B cách A một khoảng 100m và đo được góc nghiêng so với bờ biển tới vị trí C đã chọn là 40° . Tính khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi).



Lời giải

Xét tam giác ABC (ở hình trên) ta có: $\hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 40^\circ) = 110^\circ$.

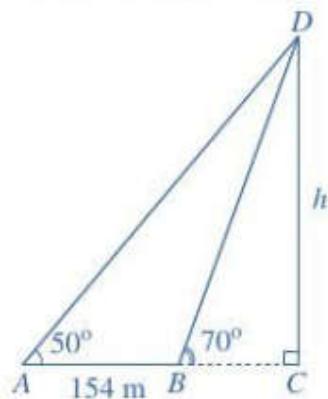
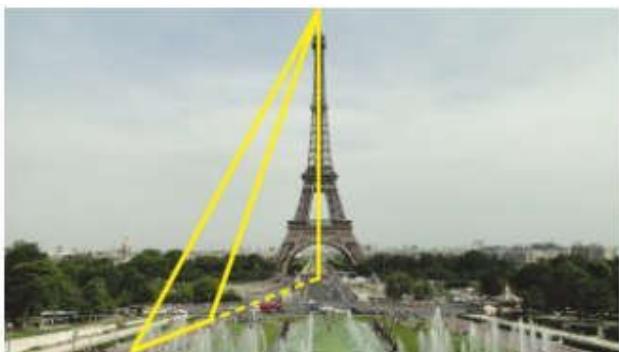
Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có: $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$.

$$\text{Do đó } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{100 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 110^\circ} \approx 68,4(m).$$

Xét tam giác vuông AHC , ta có: $CH = AC \cdot \sin 30^\circ \approx 68,4 \cdot 0,5 \approx 34,2(m)$.

Vậy khoảng cách từ vị trí C trên đảo tới bờ biển khoảng $34,2\text{m}$.

- Câu 88.** Trong lần đến thăm quan tháp Eiffel (ở Thủ đô Paris, Pháp), bạn Phương muốn ước tính độ cao của tháp. Sau khi quan sát, bạn Phương đã minh họa lại kết quả đo đạc ở hình dưới. Em hãy giúp bạn Phương tính độ cao h của tháp Eiffel (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Xét tam giác ABD , sử dụng tính chất góc ngoài, ta có: $\widehat{ADB} = 70^\circ - 50^\circ = 20^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD , ta có:

$$\frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ADB}}.$$

$$\text{Do đó } BD = \frac{154 \cdot \sin 50^\circ}{\sin 20^\circ} \approx 345(\text{m}).$$

Xét tam giác vuông BCD , ta có:

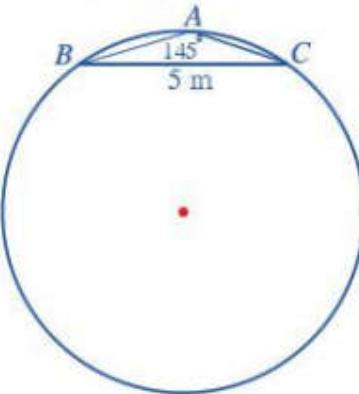
$$CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD} \approx 345 \cdot \sin 70^\circ \approx 324 (\text{m}).$$

Vậy chiều cao h của tháp Eiffel khoảng 324m.

- Câu 89.** Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước cổ có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí A, B, C trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5\text{ m}$, $\widehat{BAC} = 145^\circ$ hình dưới. Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Nguyễn Bảo Vương



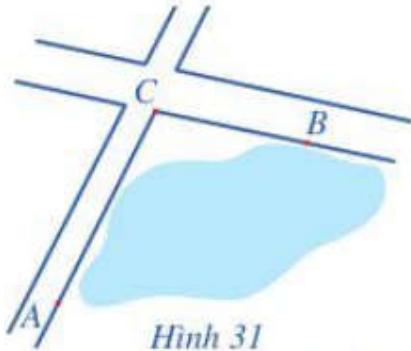
Lời giải

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC , ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

$$\text{Do đó } R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{5}{2 \cdot \sin 145^\circ} \approx 4,36(\text{m}).$$

Vậy diện tích của giếng là: $S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot 4,36^2 \approx 59,69 (\text{m}^2)$.

- Câu 90.** Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A và B mà ta không thể đi trực tiếp từ A đến B (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy,...), người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm C sao cho ta đo được các khoảng cách AC, CB và góc ACB . Sau khi đo, ta nhận được: $AC = 1\text{ km}, CB = 800\text{ m}$ và $\widehat{ACB} = 105^\circ$ (Hình 31). Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng phần mười đơn vị mét).

**Lời giải**

Đổi: 1 km = 1000 m. Do đó $AC = 1000$ m.

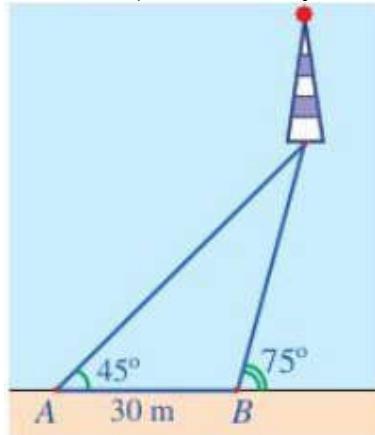
Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C \Rightarrow AB^2 = 1000^2 + 800^2 - 2 \cdot 1000 \cdot 800 \cdot \cos 105^\circ$$

$$\Rightarrow AB^2 \approx 2054110,5 \Rightarrow AB \approx 1433,2$$

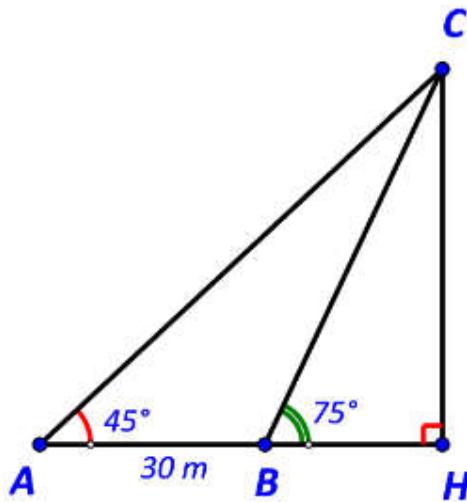
Vậy khoảng cách AB là 1433,2 m.

- Câu 91.** Một người đi dọc bờ biển từ vị trí A đến vị trí B và quan sát một ngọn hải đăng. Góc nghiêng của phương quan sát từ các vị trí A , B tới ngọn hải đăng với đường đi của người quan sát là 45° và 75° . Biết khoảng cách giữa hai vị trí A , B là 30m (Hình). Ngọn hải đăng cách bờ biển bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

**Lời giải**

Gọi C là vị trí ngọn hải đăng và H là hình chiếu của C trên AB .

Khi đó CH là khoảng cách từ ngọn hải đăng tới bờ biển.



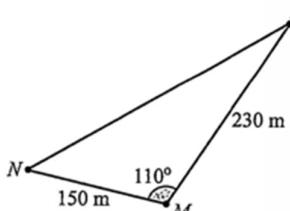
Ta có: $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{CBH} = 180^\circ - 75^\circ = 115^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{ACB}) = 180^\circ - (45^\circ + 115^\circ) = 20^\circ$ Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta
 có: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \sin B \cdot \frac{AB}{\sin C} = \sin 115^\circ \cdot \frac{30}{\sin 20^\circ} \approx 79,5$

Tam giác ACH vuông tại H nên ta có:

$$CH = \sin A \cdot AC = \sin 45^\circ \cdot 79,5 \approx 56$$

Vậy ngọn hải đăng cách bờ biển $56m$.

- Câu 92.** Gia đình bạn An sở hữu một mảnh đất hình tam giác. Chiều dài của hàng rào MN là $150m$, chiều dài của hàng rào MP là $230m$. Góc giữa hai hàng rào MN và MP là 110° (Hình 21).



Hình 21

- a) Diện tích mảnh đất mà gia đình bạn An sở hữu là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
 b) Chiều dài hàng rào NP là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

- a) Diện tích mảnh đất của gia đình bạn An (tam giác MNP) là:

$$S = \frac{1}{2} MN \cdot MP \cdot \sin M = \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 230 \cdot \sin 110^\circ \approx 16209,7 (m^2).$$

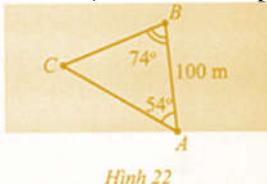
- b) Áp dụng định lí cosin ta có:

$$\begin{aligned} NP^2 &= MN^2 + MP^2 - 2MN \cdot MP \cdot \cos M = 150^2 + 230^2 - 2 \cdot 150 \cdot 230 \cdot \cos 110^\circ \\ &\approx 98999,39. \end{aligned}$$

Suy ra $NP \approx \sqrt{98999,39} \approx 314,6(m)$.

Vậy chiều dài hàng rào NP là khoảng $314,6m$.

- Câu 93.** Hai người A và B cùng quan sát một con tàu đang neo đậu ngoài khơi tại vị trí C . Người A đứng trên bờ biển, người B đứng trên một hòn đảo cách bờ một khoảng $AB = 100m$. Hai người tiến hành đo đạc và thu được kết quả: $\widehat{CAB} = 54^\circ$, $\widehat{CBA} = 74^\circ$ (Hình 22). Hỏi con tàu cách hòn đảo bao xa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét)?



Hình 22

Lời giải

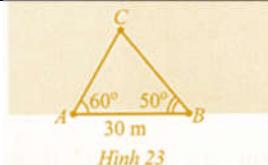
Xét tam giác ABC . Ta có: $\widehat{C} = 180^\circ - 54^\circ - 74^\circ = 52^\circ$.

Áp dụng định lí sin ta có: $\frac{BA}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$.

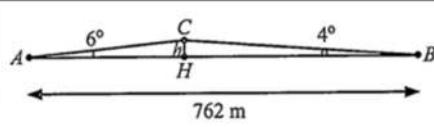
$$\text{Suy ra } BC = \frac{BA \sin A}{\sin C} = \frac{100 \sin 54^\circ}{\sin 52^\circ} \approx 102,7(m).$$

Vậy con tàu cách hòn đảo khoảng $102,7 m$.

- Câu 94.** Một người đi dọc bờ biển từ vị trí A đến vị trí B và quan sát một con tàu C đang neo đậu ngoài khơi. Người đó tiến hành đo đạc và thu được kết quả: $AB = 30m$, $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $\widehat{CBA} = 50^\circ$ (Hình 23). Tính khoảng cách từ vị trí A đến con tàu C (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).



Hình 23



Hình 24

Lời giải

Xét tam giác ABC . Ta có: $\hat{C} = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$.

Áp dụng định lí sin ta có: $\frac{BA}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$.

$$\text{Suy ra } AC = \frac{BA \sin B}{\sin C} = \frac{30 \sin 50^\circ}{\sin 70^\circ} \approx 24,5(m).$$

Vậy khoảng cách từ vị trí A đến con tàu C là khoảng $24,5 m$.

- Câu 95.** Lúc 6 giờ sáng, bạn An đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải leo lên và xuống một con dốc (Hình 24). Cho biết đoạn thẳng AB dài $762m$, $\hat{A}=6^\circ$, $\hat{B}=4^\circ$.

a) Tính chiều cao h của con dốc theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

b) Hỏi bạn An đến trường lúc mấy giờ? Biết rằng tốc độ trung bình lên dốc là $4 km/h$ và tốc độ trung bình khi xuống dốc là $19 km/h$.

Lời giải

a) Xét tam giác ABC ta có: $\widehat{ACB} = 180^\circ - 6^\circ - 4^\circ = 170^\circ$.

Áp dụng định lí sin ta có: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{AB \sin B}{\sin C} = \frac{762 \sin 4^\circ}{\sin 170^\circ} \approx 306(m)$.

Xét tam giác vuông AHC ta có $h = CH = AC \sin A \approx 306 \sin 6^\circ \approx 32(m)$.

Vậy chiều cao con dốc là khoảng $32 m$.

b) Áp dụng định lí sin ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{762 \sin 6^\circ}{\sin 170^\circ} \approx 459(m)$.

Ta có: $AC \approx 306 m = 0,306 km$; $CB \approx 459 m = 0,459 km$.

Như vậy, thời gian bạn An đi từ nhà đến trường là:

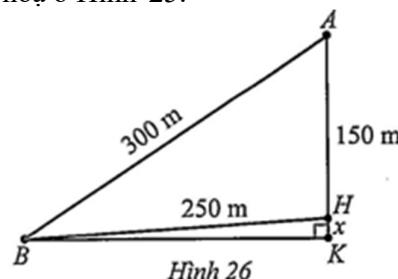
$$t = \frac{AC}{4} + \frac{CB}{19} \approx \frac{0,306}{4} + \frac{0,459}{19} \approx 0,1(\text{giờ}) = 6(\text{phút}).$$

Vậy bạn An đến trường lúc khoảng 6 giờ 6 phút.

- Câu 96.** Quan sát cây cầu dây văng minh họa ở Hình 25.



Hình 25



Hình 26

Tại tru cao nhất, khoảng cách từ đỉnh trụ (vị trí A) tới chân trụ trên mặt cầu (vị trí H) là $150m$, độ dài dây văng dài nhất nối từ đỉnh trụ xuống mặt cầu

(vị trí B) là $300m$, khoảng cách từ chân dây văng dài nhất tới chân trụ trên mặt cầu là $250m$ (Hình 26). Tính độ dốc của cầu qua trụ nối trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).

Lời giải

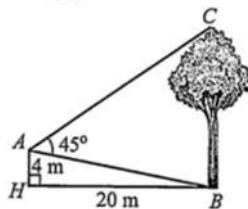
Độ dốc của cầu là góc nghiêng giữa đường cầu qua trụ và phương nằm ngang, tức là góc KBH .

Xét tam giác ABH , áp dụng định lí cosin ta có:

$$\cos \widehat{AHB} = \frac{BH^2 + AH^2 - AB^2}{2BH \cdot AH} = \frac{250^2 + 150^2 - 300^2}{2 \cdot 250 \cdot 150} = -\frac{1}{15} \Rightarrow \widehat{AHB} \approx 93,8^\circ.$$

Xét tam giác BHK ta có: $\widehat{HBK} \approx 93,8^\circ - 90^\circ = 3,8^\circ$ (tính chất góc ngoài tam giác). Vậy độ dốc của cầu qua trụ theo đề bài là khoảng $3,8^\circ$.

- Câu 97.** Một người đứng ở vị trí A trên nóc một ngôi nhà cao $4m$ đang quan sát một cây cao cách ngôi nhà $20m$ và đo được $\widehat{BAC} = 45^\circ$ (Hình 27). Tính chiều cao của cây đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).



Hình 27

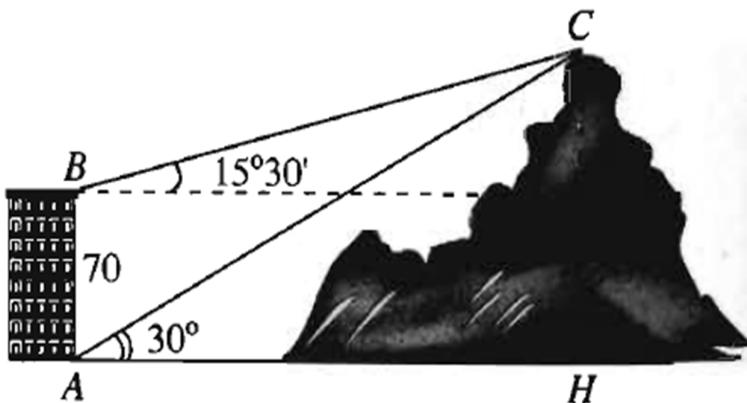
Lời giải

Xét tam giác vuông ABH ta có: $AB = \sqrt{4^2 + 20^2} = 4\sqrt{26}(m)$ (định lí Pythagore) và $\tan \widehat{ABH} = \frac{4}{20} = 0,2 \Rightarrow \widehat{ABH} \approx 11,3^\circ$. Do đó, $\widehat{ABC} \approx 90^\circ - 11,3^\circ = 78,7^\circ$. Suy ra $\widehat{ACB} \approx 180^\circ - 45^\circ - 78,7^\circ = 56,3^\circ$.

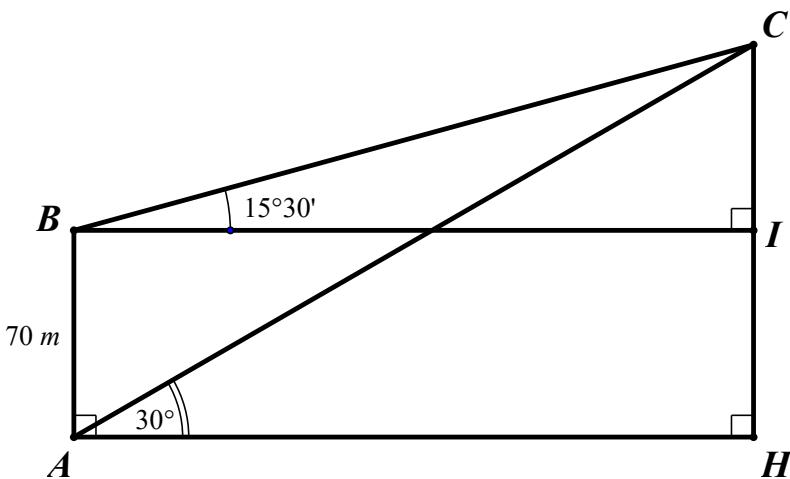
Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$
 $\Rightarrow BC = \frac{AB \sin A}{\sin C} \approx \frac{4\sqrt{26} \sin 45^\circ}{\sin 56,3^\circ} \approx 17,3(m)$. Vậy cây cao khoảng $17,3m$.

BÀI TẬP BÔ SUNG

- Câu 98.** Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc $15^\circ 30'$ (như hình vẽ). Tính độ cao CH của ngọn núi so với mặt đất.



Lời giải



Cách 1:

+ Ta có: $\tan \widehat{CAH} = \frac{CH}{AH} \Rightarrow AH = \frac{CH}{\tan 30^\circ}$.

+ Lại có: $\tan \widehat{CBI} = \frac{CI}{BI} \Rightarrow BI = \frac{CI}{\tan 15^\circ 30'} = \frac{CH - 70}{\tan 15^\circ 30'}$.

+ Do $AH = BI$ nên $\frac{CH}{\tan 30^\circ} = \frac{CH - 70}{\tan 15^\circ 30'} = \frac{70}{\tan 30^\circ - \tan 15^\circ 30'}$.

+ Vậy $CH = \frac{70 \cdot \tan 30^\circ}{\tan 30^\circ - \tan 15^\circ 30'} \approx 134,7 \text{ m}$.

Cách 2:

+ Ta có: $\widehat{ABC} = 90^\circ + 15^\circ 30' = 105^\circ 30'$.

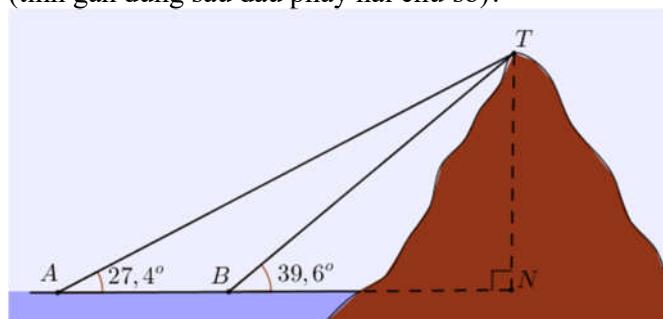
$\widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{BAC} = 180^\circ - 60^\circ - 105^\circ 30' = 14^\circ 30'$.

+ Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} \Rightarrow AC = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'}$$

+ Lại có: $\sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \cdot \sin 30^\circ \approx 134,7 \text{ m}$.

- Câu 99.** Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536 m thì ngọn núi cao bao nhiêu (tính gần đúng sau dấu phẩy hai chữ số)?



Lời giải

Ta có $\widehat{ATB} = \widehat{TBN} - \widehat{TAN} = 12,2^\circ$.

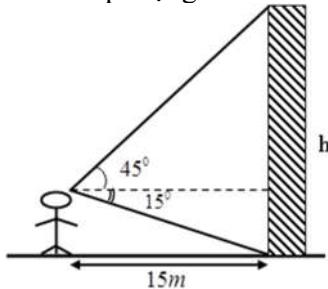
Áp dụng định lí sin cho tam giác TAB : $\frac{TB}{\sin \widehat{TAB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ATB}} \Rightarrow TB = \frac{AB \cdot \sin \widehat{TAB}}{\sin \widehat{ATB}}$.

Xét tam giác vuông TBN ta có:

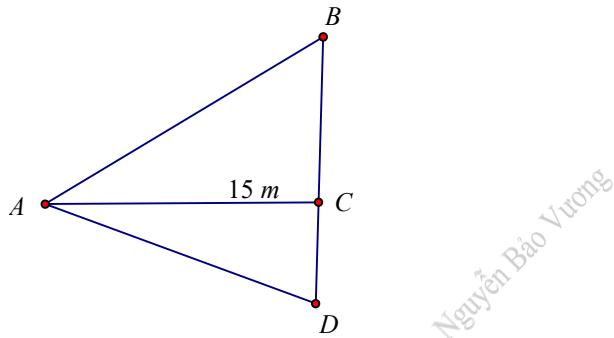
$$TN = TB \cdot \sin \widehat{TBN} = \frac{AB \cdot \sin \widehat{TAB} \cdot \sin \widehat{TBN}}{\sin \widehat{ATB}} = \frac{1536 \cdot \sin 27,4^\circ \cdot \sin 39,6^\circ}{\sin 12,2^\circ} \approx 2132,14.$$

Vậy chiều cao ngọn núi xấp xỉ $2132,14$ m.

- Câu 100.** Một người quan sát đứng cách một cái tháp $15m$, nhìn thấy đỉnh tháp một góc 45° và nhìn dưới chân tháp một góc 15° so với phương nằm ngang như trong hình vẽ. Tính chiều cao h của tháp.



Lời giải



Nguyễn Bảo Vương

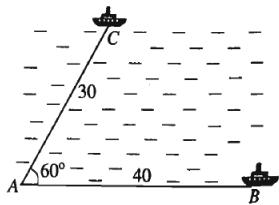
Ta có $BC = AC \cdot \tan \widehat{BAC} = 15 \cdot \tan 45^\circ = 15$ (m)

$CD = AC \cdot \tan \widehat{DAC} = 15 \cdot \tan 15^\circ = 15(2 - \sqrt{3})$ (m)

$h = BD = BC + CD = 45 - 15\sqrt{3}$ (m).

Vậy chiều cao của tháp là $45 - 15\sqrt{3}$ (m).

- Câu 101.** Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí?



Lời giải

Sau 2 giờ tàu B đi được 40 hải lí, tàu C đi được 30 hải lí. Vậy tam giác ABC có $AB = 40$, $AC = 30$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

Áp dụng định lí cosin vào tam giác ABC , ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 30^2 + 40^2 - 2 \cdot 30 \cdot 40 \cdot \cos 60^\circ = 900 + 1600 - 1200 = 1300.$$

Vậy $BC = \sqrt{1300} \approx 36$ (hải lí).

Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau khoảng 36 hải lí.

- Câu 102.** Vịnh Vân Phong – tỉnh Khánh Hòa nổi tiếng vì có con đường đi bộ xuyên biển nối từ Hòn Quạ đến đảo Điệp Sơn. Một du khách muốn chèo thuyền kayak từ vị trí C trên Hòn Quạ đến vị trí B trên Bè thay vì đi bộ xuyên qua con đường qua vị trí A rồi mới đến vị trí B . Nếu người đó chèo thuyền với vận tốc không đổi là 4 km/h thì sẽ mất bao nhiêu thời gian biết $AB = 0,4$ km, $AC = 0,6$ km và góc giữa AB và AC là 60° ?



Lời giải

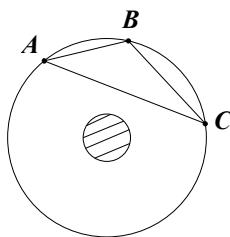
Áp dụng định lí Cô sin cho tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 0,28 \text{ km.}$$

Vậy thời gian du khách chèo thuyền từ C đến B là: $t = \frac{BC}{v} = \frac{0,28}{4} = 0,07$ giờ = 4,2 phút.

- Câu 103.** Trong một lần đi khảo sát các đảo thuộc quần đảo Trường Sa của Việt Nam, các nhà khoa học phát hiện có một đảo có dạng hình tròn, tâm của đảo này bị che bởi một bãi đá nhỏ mà các nhà khoa học không thể tới được. Các nhà khoa học muốn đo bán kính của đảo này, biết rằng các nhà khoa học chỉ có dụng cụ là thước thẳng dài. Nếu cách để các nhà khoa học tính được bán kính đảo?

Lời giải



Lấy ba điểm A, B, C khác nhau trên đường tròn (ở các điểm ngoài cùng của đảo). Đo độ dài các đoạn thẳng $BC = a, AC = b, AB = c$. Áp dụng công thức Hê-rông tính diện tích tam giác ABC .

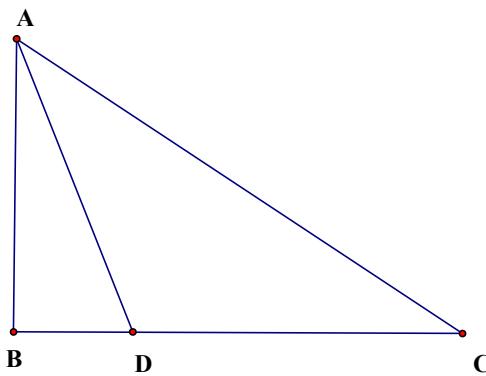
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\text{Lại có: } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$$

Vậy bán kính của đảo được tính theo công thức: $R = \frac{abc}{4S}$.

- Câu 104.** Giả sử chúng ta cần đo chiều cao AB của một tòa tháp với B là chân tháp và A là đỉnh tháp. Vì không thể đến chân tháp được nên từ hai điểm C và D có khoảng cách $CD = 30m$ sao cho ba điểm B, C, D thẳng hàng người ta đo các góc $\widehat{BCA} = 43^\circ$ và góc $\widehat{BDA} = 67^\circ$. Hãy tính chiều cao AB của tòa tháp

Lời giải



Trong tam giác ACD : có góc $\widehat{CAD} = 67^\circ - 43^\circ = 24^\circ$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ACD ta có:

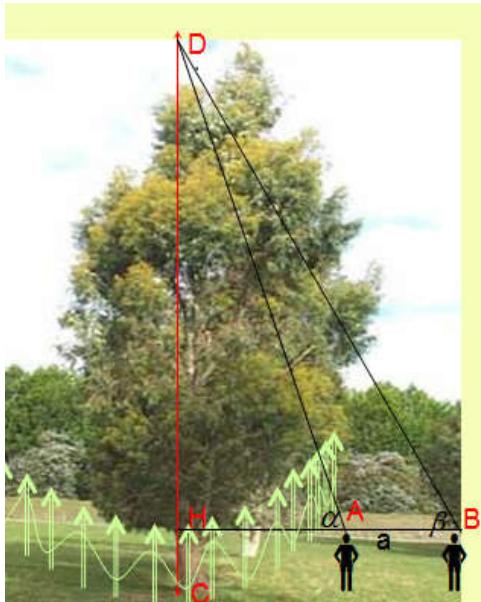
$$\frac{AD}{\sin 43^\circ} = \frac{CD}{\sin 24^\circ} \Rightarrow AD = \frac{30 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 24^\circ} \approx 50,30(m)$$

Trong tam giác vuông BAD ta có $\sin 67^\circ = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AB = 50,30 \cdot \sin 67^\circ = 46,30(m)$

Vậy chiều cao của tòa tháp là $46,30(m)$

Câu 105. Trong tam giác vuông AHC ta có $AH = AC \cdot \cos \widehat{HAC} \approx 6,30 \cdot \cos 35^\circ \approx 5,16$ (km).

Từ hai vị trí A, B người ta quan sát một cái cây (hình vẽ). Lấy C là điểm gốc cây, D là điểm ngọn cây. A, B cùng thẳng hàng với điểm H thuộc chiều cao CD của cây. Người ta đo được $AB = 10m$, $HC = 1,7m$, $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 48^\circ$. Tính chiều cao của cây đó.



Lời giải

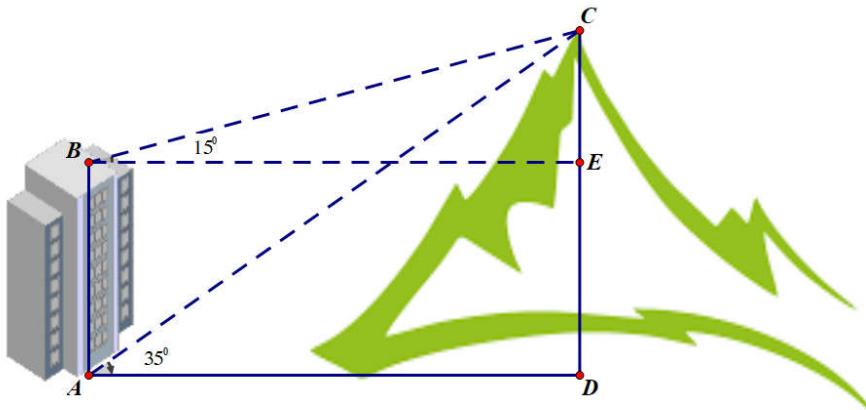
Ta có $\alpha = 63^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 117^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 180^\circ - (117^\circ + 48^\circ) = 15^\circ$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABD ta có: $\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{ADB}}$

Tam giác BHD vuông tại H nên có: $\sin \widehat{HBD} = \frac{HD}{BD} \Rightarrow HD = BD \cdot \sin \widehat{HBD}$

$$\text{Vậy } HD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD} \cdot \sin \widehat{HBD}}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{10 \cdot \sin 117^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} = 25,58m .$$

Câu 106. Một người quan sát đỉnh của một ngọn núi nhân tạo từ hai vị trí khác nhau của tòa nhà. Lần đầu tiên người đó quan sát đỉnh núi từ tầng trệt với phương nhìn tạo với phương nằm ngang 35° và lần thứ hai người này quan sát tại sân thượng của cùng tòa nhà đó với phương nằm ngang 15° (như hình vẽ). Tính chiều cao ngọn núi biết rằng tòa nhà cao $60(m)$.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \widehat{CBA} = \widehat{CBE} + \widehat{EBA} = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAD} - \widehat{CAD} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ \Rightarrow \widehat{BCA} = 180^\circ - (\widehat{CBA} + \widehat{BAC}) = 20^\circ$$

Áp dụng định lý hàm sin cho ΔCBA ta có

$$\frac{AB}{\sin(\widehat{BCA})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{CBA})} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin(\widehat{CBA})}{\sin(\widehat{BCA})} = \frac{60 \cdot \sin 105^\circ}{\sin 20^\circ} = 169,4506909(m)$$

$$\text{Xét } \Delta CAD \text{ vuông tại } D, \text{ ta có } CD = AC \cdot \sin(\widehat{CAD}) \approx 97,193(m).$$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $78^\circ 24'$. Biết $CA = 250m, CB = 120m$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

A. $266m$.

B. $255m$.

C. $166m$.

D. $298m$.

Lời giải**Chọn**

B.

$$\text{Ta có: } AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB \cdot CA \cdot \cos C = 250^2 + 120^2 - 2 \cdot 250 \cdot 120 \cdot \cos 78^\circ 24' \approx 64835 \Rightarrow AB \approx 255.$$

Câu 2. Hai chiếc tàu thuỷ cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $30km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $40km/h$. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km ?

A. 13 .

B. $20\sqrt{13}$.

C. $10\sqrt{13}$.

D. 15 .

Lời giải**Chọn**

B.

Ta có: Sau $2h$ quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30 \cdot 2 = 60km$.

Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40.2 = 80 \text{ km}$.

Vậy: sau 2h hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1.S_2.\cos 60^\circ} = 20\sqrt{13}$.

Câu 3. Từ một đỉnh tháp chiều cao $CD = 80 \text{ m}$, người ta nhìn hai điểm A và B trên mặt đất dưới các góc nhìn là $72^\circ 12'$ và $34^\circ 26'$. Ba điểm A, B, D thẳng hàng. Tính khoảng cách AB ?

- A. 71 m . B. 91 m . C. 79 m . D. 40 m .

Lời giải

Chọn

B.

Ta có: Trong tam giác vuông CDA : $\tan 72^\circ 12' = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\tan 72^\circ 12'} = \frac{80}{\tan 72^\circ 12'} \approx 25,7$.

Trong tam giác vuông CDB : $\tan 34^\circ 26' = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{CD}{\tan 34^\circ 26'} = \frac{80}{\tan 34^\circ 26'} \approx 116,7$.

Suy ra: khoảng cách $AB = 116,7 - 25,7 = 91 \text{ m}$.

Câu 4. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $56^\circ 16'$. Biết $CA = 200 \text{ m}$, $CB = 180 \text{ m}$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

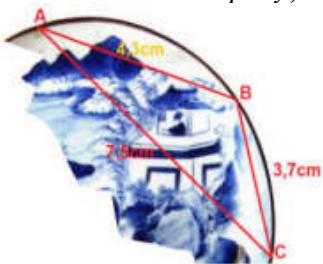
- A. 180 m . B. 224 m . C. 112 m . D. 168 m .

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CB.CA.\cos C = 200^2 + 180^2 - 2.200.180.\cos 56^\circ 16' \approx 32416 \Rightarrow AB \approx 180$.

Câu 5. Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ($AB = 4,3 \text{ cm}$; $BC = 3,7 \text{ cm}$; $CA = 7,5 \text{ cm}$). Bán kính của chiếc đĩa này bằng (*kết quả làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy*).



- A. $5,73 \text{ cm}$. B. $6,01 \text{ cm}$. C. $5,85 \text{ cm}$. D. $4,57 \text{ cm}$.

Lời giải

Chọn A

Bán kính R của chiếc đĩa bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Nửa chu vi của tam giác ABC là: $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = \frac{4,3 + 3,7 + 7,5}{2} = \frac{31}{4} \text{ cm}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - CA)} \approx 5,2 \text{ cm}^2$.

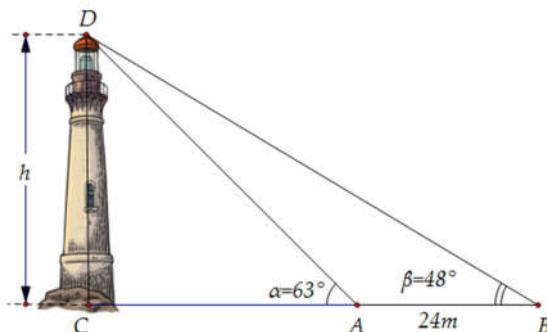
$$\text{Mà } S = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4S} \approx 5,73 \text{ cm.}$$

Câu 6. Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24m$, $\widehat{CAD} = 63^\circ$; $\widehat{CBD} = 48^\circ$. Chiều cao h của khối tháp gần với giá trị nào sau đây?

- A. 61,4 m. B. 18,5 m. C. 60 m. D. 18 m.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\widehat{CAD} = 63^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 117^\circ \Rightarrow \widehat{ADB} = 180^\circ - (117^\circ + 48^\circ) = 15^\circ$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABD ta có: $\frac{AB}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{ADB}}$

Tam giác BCD vuông tại C nên có: $\sin \widehat{CBD} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD}$

$$\text{Vậy } CD = \frac{AB \cdot \sin \widehat{BAD} \cdot \sin \widehat{CBD}}{\sin \widehat{ADB}} = \frac{24 \cdot \sin 117^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} = 61,4m$$

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ↗ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** ↗ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ↗ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: **Nguyễn Vương**

↗ https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

↗ Tải nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>