

BÀI 9. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

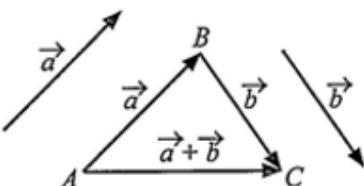
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. TỔNG CỦA HAI VECTO

1. Định nghĩa

Cho hai vecto \vec{a}, \vec{b} . Lấy một điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

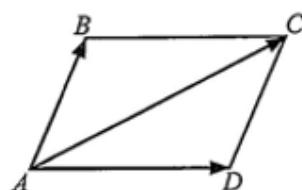
Vecto \overrightarrow{AC} được gọi là tổng của hai vecto \vec{a} và \vec{b} , kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Nhận xét: Công thức trên cho ta cách rút gọn tổng nhiều vecto liên tiếp mà điểm cuối của mỗi vecto trong tổng là điểm đầu của vecto liền sau nó (trừ vecto cuối cùng). Đồng thời, ta cũng phân tích được một vecto thành tổng của hai hoặc nhiều vecto khác. Ta cũng gọi công thức trên là quy tắc cộng.

2. Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Nhận xét: Công thức trên cho ta một cách rút gọn tổng của hai vecto có cùng điểm đầu.

3. Tính chất

Với ba vecto tuỳ ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vecto-không).

Chú ý: Tổng ba vecto $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ hoặc $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

II. HIỆU CỦA HAI VECTO

1. Hai vecto đối nhau

Vecto có cùng độ dài và ngược hướng với vecto \vec{a} được gọi là vecto đối của \vec{a} , kí hiệu là $-\vec{a}$.

Với hai điểm A, B bất kì ta có $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$.

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$.

2. Định nghĩa

Phép trừ vecto \vec{a} cho vecto \vec{b} là tổng của vecto \vec{a} và vecto đối của vecto \vec{b} , kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$. Như vậy $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Với ba điểm O, A, B bất kì ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Nhận xét: Công thức trên cho ta cách biểu thị một vecto thành hiệu hai vecto có cùng điểm đầu. Ta cũng gọi công thức trên là quy tắc trừ.

III. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG, TRỌNG TÂM CỦA TAM GIÁC

I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tìm tổng, hiệu của hai hay nhiều vecto

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Cho các điểm E, F, G, H, K . Thực hiện các phép cộng vecto:

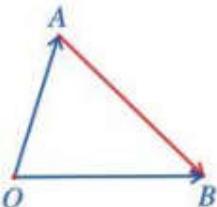
$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}; \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KG}; \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HE}$$

Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$. Thực hiện các phép cộng vecto sau:

- a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BC}$,
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

Câu 3. Cho các điểm M, N, P, Q . Thực hiện các phép trừ vecto sau: $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PQ}$.

Câu 4. Cho ba điểm A, B, O .



Vector $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ là vecto nào?

Câu 5. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, D . Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai vecto \overrightarrow{CD} và \overrightarrow{CM} .

Câu 8. Cho tứ giác $ABCD$, thực hiện cả phép cộng và trừ vecto sau:

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$
- b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$
- c) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$

Câu 9. Cho tứ giác $ABCD$, tìm các vecto sau:

- a) $\vec{m} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC}$
- b) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$
- c) $\vec{m} - \vec{n}$.

Câu 10. Cho tam giác MNQ , thực hiện các phép trừ vecto sau:

- a) $\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{QN}$
- b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QN}$.

Câu 11. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$;
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$
- c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

Câu 12. Cho đường tròn tâm O . Giả sử A, B là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vecto \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} đối nhau.

Câu 13. Cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, E là trung điểm của AD, G là giao điểm của BE và AC . Tính:

- a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}$.

BÀI TẬP BỎ SUNG

Câu 14. Cho hai véc-tor \vec{a} và \vec{b} sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

- a) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng O là trung điểm của AB .
- b) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng $B \equiv O$.

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Xác định tổng của hai véc-tor \overrightarrow{NC} và \overrightarrow{MC} , \overrightarrow{AM} và \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{AD} và \overrightarrow{NC} , \overrightarrow{AM} và \overrightarrow{AN} .

Câu 16. Cho tam giác ABC . Các điểm M , N và P lần lượt là trung điểm của AB , AC và BC . Xác định hiệu $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$.

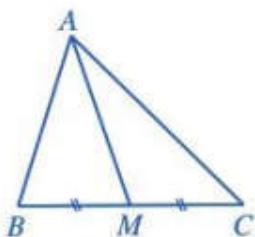
Dạng 2. Chứng minh một đẳng thức vecto

Phương pháp:

- Biến đổi từ biểu thức về này sang về kia.
- Chứng minh hai biểu thức vecto cùng bằng một vecto trung gian
- Chứng minh hai biểu thức vecto cùng bằng một biểu thức vecto trung gian bằng cách sử dụng quy tắc trừ với điểm đầu là điểm O bất kì.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 17. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM



Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$.

Câu 18. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm O bất kì. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Câu 19. a) Chứng minh rằng nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Câu 20. Cho $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ với mỗi điểm M trong mặt phẳng.

Câu 21. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 22. Cho tứ giác $ABCD, O$ là trung điểm của AB . Chứng minh: $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Câu 23. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

Câu 24. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$

Câu 25. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

Câu 26. Cho hai vecto \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Chứng minh rằng

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Câu 27. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm tuỳ ý thuộc cạnh BC , khác B và C . MO cắt cạnh AD tại N .

a) Chứng minh rằng O là trung điểm MN .

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tam giác MNC .

Câu 28. Cho tứ giác $ABCD$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 29. Cho tứ giác $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm của IJ .

Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Câu 30. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

Câu 31. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

Câu 32. Cho hình thoi $ABCD$ và M là trung điểm cạnh AB, N là trung điểm cạnh CD . Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}$.

Câu 33. Chứng minh rằng với tứ giác $ABCD$ bất kì, ta luôn có:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

Câu 34. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$;

c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$;

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Câu 35. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

Câu 36. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

Câu 37. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm của tam giác. M, N, P là ba điểm bất kì. Chứng minh $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$.

Câu 38. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F .

Chứng minh $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA}$.

Câu 39. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NB}$.

Câu 40. Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$. Chứng minh rằng nếu hai vectơ cùng hướng thì $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.

Câu 41. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm là G . Chứng minh $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Câu 42. Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh đôi một khác nhau. Gọi H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác, D là điểm đối xứng với H qua O . Chứng minh $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 43. Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Câu 44. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC . Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Câu 45. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Câu 46. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Câu 47. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Câu 48. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là một điểm bất kì trên đường chéo AC . Qua O kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt AB và DC lần lượt tại M và N , cắt AD và BC lần lượt tại E và F . Chứng minh

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$

Câu 49. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 50. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Câu 51. Cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Câu 52. Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn tâm O , và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}$.

Dạng 3. Tính độ dài của một vecto tổng; vecto hiệu

Phương pháp:

- Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính độ dài.
- Sử dụng tính chất của các tam giác đặc biệt: tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, tam giác vuông cân.
- Sử dụng tính chất của tứ giác đặc biệt: hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành,...

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 53. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Câu 54. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O , độ dài các cạnh bằng 1.

a) Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

b) Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$.

Câu 55. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính độ dài các vecto:

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

Câu 56. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và ba điểm G, H, K thỏa mãn

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}; \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}; \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

Tính độ dài các vecto $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{AG}$

Câu 57. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Tính độ dài của các vecto sau:

a) $\vec{a} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CB}$

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

Câu 58. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1 và M là trung điểm BC . Tính độ dài của các vecto sau:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

b) $\vec{b} = (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})$.

Câu 59. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

Câu 60. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và có cạnh bằng a . Cho 2 điểm M, N thoả mãn:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}; \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$$

Tìm độ dài các vecto $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NO}$.

Câu 61. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính độ dài của các vecto sau:

a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

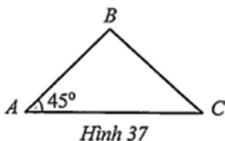
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ với O là giao điểm của AC và BD .

Câu 62. Cho ABC là tam giác đều cạnh a . Tính:

a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$,

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

Câu 63. Cho tam giác ABC có $AB = 2a, AC = 3a, \widehat{BAC} = 45^\circ$ (Hình 37). Tính:



Hình 37

a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Câu 64. Cho tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

Câu 65. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = 4a, AC = 5a$. Tính:

a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$;

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Câu 66. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính:

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$

b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$;

c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

Câu 67. Cho tam giác ABC thoả mãn $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .

Câu 68. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 69. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ và $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

Câu 70. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Trên cạnh $AC = b$ lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt trung tuyến AM tại N . Tính độ dài vecto $\vec{u} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN}$

Câu 71. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $BC = a\sqrt{5}$. Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Câu 72. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh b . Tính $|\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|, |\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}|$

Câu 73. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có O là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|, |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$ và $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

Câu 74. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có tâm O . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của các vec tơ sau $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MN}$.

- Câu 75.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có tâm O và M là trung điểm của AB . Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
- Câu 76.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ
- Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}|, |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|$
 - Tính độ dài vecto $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$
- Câu 77.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a và M là một điểm bất kỳ. Tính
- Tính $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AD}|$
 - Tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$
 - Tính $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

Dạng 4. Xác định một điểm thỏa một đẳng thức vecto cho trước**BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP**

- Câu 78.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a, AD = a\sqrt{2}$.
- Tính độ dài của vecto $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$.
 - Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$.
- Câu 79.** Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB .
- Xác định vecto $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$.
 - Xác định điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MA}$.
 - Chứng minh rằng $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.
- Câu 80.** Cho hai điểm A, B . Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}|$.
- Câu 81.** Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}|$

BÀI TẬP BỎ SUNG

- Câu 82.** Cho hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện sau đây:
- $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$
 - $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$
 - $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
 - $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM}$

- Câu 83.** Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

- Câu 84.** Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm m sao cho

- $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$
- $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|$

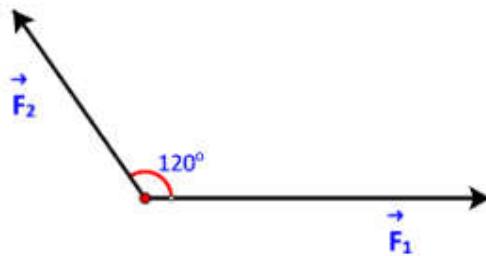
- Câu 85.** Cho 2 điểm A và B . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$

Dạng 5. Bài toán thực tế**BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP**

- Câu 86.** Một con tàu chuyền động từ bờ bên này sang bờ bên kia của một dòng sông với vận tốc riêng không đổi. Giả sử vận tốc dòng nước là không đổi và đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc thực tế của tàu. Nếu không quan tâm đến điểm đến thì cần giữ lái cho tàu tạo với bờ sông một góc bao nhiêu để tàu sang bờ bên kia được nhanh nhất?



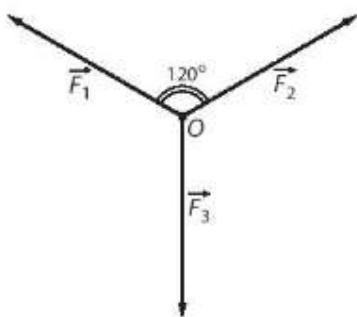
- Câu 87. Hình 4.19 biểu diễn hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 cùng tác động lên một vật, cho $|\vec{F}_1| = 3N, |\vec{F}_2| = 2N$. Tính độ lớn của hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$



- Câu 88. Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước.

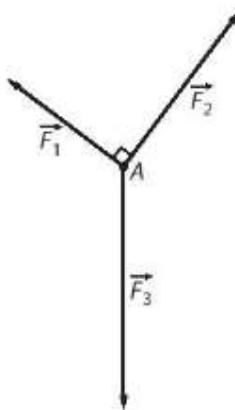


- Câu 89. Trên Hình biểu diễn ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng 0. Cho biết cường độ của \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều bằng $100N$ và góc tạo bởi \vec{F}_1 và \vec{F}_2 bằng 120° .

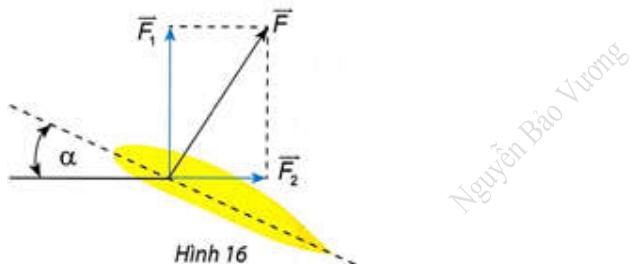


Tính cường độ của lực \vec{F}_3 .

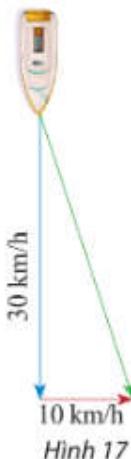
- Câu 90. Trên Hình biểu diễn ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng A. Cho biết $|\vec{F}_1| = 30N, |\vec{F}_2| = 40N$. Tính cường độ của lực \vec{F}_3 .



- Câu 91.** Trên mặt phẳng, chất điểm A chịu tác dụng của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ và ở trạng thái cân bằng. Góc giữa hai vectơ \vec{F}_1, \vec{F}_2 bằng 60° . Tính độ lớn của \vec{F}_3 , biết $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 2\sqrt{3} N$
- Câu 92.** Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều là $10 N$ và $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm độ lớn của lực \vec{F}_3 .
- Câu 93.** Khi máy bay nghiêng cánh một góc α , lực \vec{F} của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng \vec{F}_1 và lực cản \vec{F}_2 (Hình 16). Cho biết $\alpha = 30^\circ$ và $|\vec{F}| = a$. Tính $|\vec{F}_1|$ và $|\vec{F}_2|$ theo a .



- Câu 94.** Một con tàu có vectơ vận tốc chỉ theo hướng nam, vận tốc của dòng nước là một vectơ theo hướng đông như hình 17. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



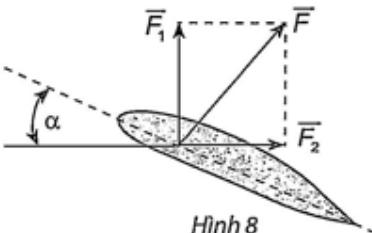
- Câu 95.** Một máy bay có vectơ vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vectơ theo hướng đông như Hình 7. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



Hình 7

Câu 96. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết độ lớn của \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều là 100 N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tính độ lớn của lực \vec{F}_3 .

Câu 97. Khi máy bay nghiêng cánh một góc α , lực \vec{F} của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng \vec{F}_1 và lực cản \vec{F}_2 (Hình 8). Cho biết $\alpha = 45^\circ$ và $|\vec{F}| = a$. Tính $|\vec{F}_1|$ và $|\vec{F}_2|$ theo a .



Hình 8

Câu 98. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{OC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm O và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều là 120 N và $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Xác định cường độ và hướng của lực \vec{F}_3 .

Câu 99. Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là 10 km/h . Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc 40 km/h so với mặt nước. Tính vận tốc của ca nô so với bờ sông.

C. BÀI TẬP TRÁC NGHIỆM

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Cho ba điểm M, N, P . Vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$ bằng vectơ nào sau đây?

- A. \overrightarrow{PN} ;
- B. \overrightarrow{PM}
- C. \overrightarrow{MP} ;
- D. \overrightarrow{NM} .

Câu 2. Cho ba điểm D, E, G . Vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG})$ bằng vectơ nào sau đây?

- A. \overrightarrow{EG}
- B. \overrightarrow{GE} ;
- C. \overrightarrow{GD} ;
- D. \overrightarrow{ED} .

Câu 3. Cho ba điểm M, N, P phân biệt. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
- B. $-\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
- C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.
- D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{MP}$.

Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$.

- B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$.
D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$.

Câu 5. Cho các điểm A, B, O . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.
B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

Câu 6. Cho ba điểm A, B, M phân biệt. Điều kiện cần và đủ để M là trung điểm của đoạn thẳng AB là:

- A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.
B. $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$.
C. $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng.
D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC . Điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm của tam giác ABC là:

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.
B. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$.
C. $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB}$.
D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

BÀI TẬP BỒ SUNG

Câu 8. Cho hình bình hành O . Kết quả nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ B. $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB}$

Câu 9. Cho ba vectơ \vec{a}, \vec{b} và \vec{c} khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. B. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
C. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. D. $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$.

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ tổng $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ bằng

- A. \overrightarrow{CA} . B. \overrightarrow{BD} . C. \overrightarrow{AC} . D. \overrightarrow{DB} .

Câu 11. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$. D. $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$.

Câu 12. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ bằng

- A. $\vec{0}$. B. \overrightarrow{AC} . C. \overrightarrow{BD} . D. \overrightarrow{BA} .

Câu 13. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Vectơ tổng $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng

- A. \overrightarrow{BP} . B. \overrightarrow{MN} . C. \overrightarrow{CP} . D. \overrightarrow{PA} .

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.
C. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IB}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$. B. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DI}$.
C. $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IA}$.

- Câu 16.** Cho các điểm phân biệt M, N, P, Q, R . Xác định vecto tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.
- A. \overrightarrow{MP} . B. \overrightarrow{MN} . C. \overrightarrow{MQ} . D. \overrightarrow{MR} .
- Câu 17.** Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?
- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
- C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$.
- Câu 18.** Cho tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?
- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.
- C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$.
- Câu 19.** Cho hình vuông $ABCD$, tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
- A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CA}$.
- C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$. D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.
- Câu 20.** Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?
- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$.
- C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$.
- Câu 21.** Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?
- A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.
- C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.
- Câu 22.** Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.
- A. \overrightarrow{BC} . B. \overrightarrow{DA} . C. $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$. D. \overrightarrow{AB} .
- Câu 23.** Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vecto $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$ bằng vecto nào?
- A. \overrightarrow{BA} . B. \overrightarrow{BC} . C. \overrightarrow{DC} . D. \overrightarrow{AC} .
- Câu 24.** Chọn khẳng định sai:
- A. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- B. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}$.
- C. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- D. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.
- Câu 25.** Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây là đúng:
- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$. B. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
- C. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.
- Câu 26.** Chỉ ra vecto tổng $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RN} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QR}$ trong các vecto sau
- A. \overrightarrow{MR} . B. \overrightarrow{MQ} . C. \overrightarrow{MP} . D. \overrightarrow{MN} .
- Câu 27.** Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$. B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$.
- C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.
- Câu 28.** Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vecto $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$ là:
- A. $\vec{u} = \vec{0}$. B. $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. C. $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$. D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.
- Câu 29.** Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vecto $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$ bằng:
- A. $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. B. $\vec{u} = \vec{0}$. C. $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$. D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.
- Câu 30.** Cho 4 điểm A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
- C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB}$.
- Câu 31.** Cho hình bình hành ABCD tâm O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

Câu 32. Cho Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EO} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OC}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.

Câu 33. Cho 4 điểm A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$.

Câu 34. Cho ΔABC , vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành $ABEF, ACPQ, BCMN$. Xét các mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}$

(II) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{MN}$

(III) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MC}$

Mệnh đề đúng là :

A. Chỉ (I).

B. Chỉ (III).

C. (I) và (II).

D. Chỉ (II).

Câu 35. Cho 5 điểm phân biệt M, N, P, Q, R . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP}$.

B. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$.

D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$.

Câu 36. Cho hình bình hành $ABCD$, đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 37. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$.

B. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$.

C. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$.

D. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD}$.

Câu 38. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

B. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

Câu 39. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.

Câu 40. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ bằng

A. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$.

B. \overrightarrow{AB} .

C. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$.

D. \overrightarrow{CD} .

Câu 41. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 42. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn BC và AD . Tính tổng $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC}$.

A. $\overrightarrow{AC}..$

B. $\overrightarrow{NM}..$

C. $\overrightarrow{CA}..$

D. $\overrightarrow{MN}..$

Câu 43. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Tổng véc to: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ bằng

A. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DF}$.

C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$. D. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF}$.

Câu 44. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây *sai*?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$.

C. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$.

Câu 45. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$. B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$.

C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$. D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 46. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt AM tại N . Chọn mệnh đề đúng:

A. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{EF}$.

Câu 47. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Hết thúc nào là đúng?

A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.

Câu 48. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = 6|\overrightarrow{AB}|$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Câu 49. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm BC , G_1 là điểm đối xứng của G qua M . Vectơ tổng $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}$ bằng

A. \overrightarrow{GA} . B. \overrightarrow{BC} . C. $\overrightarrow{G_1A}$. D. $\overrightarrow{G_1M}$.

Câu 50. Xét tam giác ABC có trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$;

2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân;

3) Tam giác ABC là tam giác đều;

4) Tam giác ABC là tam giác cân.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 51. Xét tam giác ABC nội tiếp có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$;

2) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HA}$;

3) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$, với H_1 là điểm đối xứng của H qua O ;

4) Nếu $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Câu 52. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Tìm đẳng thức sai:

A. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NC}$ D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DB}$

Câu 53. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F bất kì trên mặt phẳng. Tìm đẳng thức sai trong các đẳng thức sau:

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF}$ D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Câu 54. Cho ΔABC , các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Với O là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$ B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

C. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ D. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$

Câu 55. Cho 4 điểm M, N, P, Q bất kì. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng.

A. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN}$ B. $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$

C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$ D. $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$

Câu 56. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F phân biệt. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BF} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$ D. $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF}$

Câu 57. Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là A_1, A_2, \dots, A_n . Bạn Bình kí hiệu chúng là B_1, B_2, \dots, B_n ($A_1 \neq B_n$). Vectơ tổng $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n}$ bằng

A. $\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{A_1A_n}$.

C. $\overrightarrow{B_1B_n}$.

D. $\overrightarrow{A_1B_n}$.

Câu 58. Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

A. M ở vị trí bất kì

B. M là trung điểm của AB

C. Không tìm được M

D. M nằm trên đường trung trực của AB

Câu 59. Cho đoạn thẳng AB , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB . B. M trùng A .

C. M trùng B . D. A là trung điểm MB .

Câu 60. Cho ΔABC , B . Tìm điểm I để \overrightarrow{IA} và \overrightarrow{CB} cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. I là trung điểm AB . B. I thuộc đường trung trực của AB .

C. Không có điểm I . D. Có vô số điểm I .

Câu 61. Cho 2 điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB . B. M thuộc đường trung trực của AB .

C. Không có điểm M . D. Có vô số điểm M .

Câu 62. Cho tam giác ABC , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB . B. M là trọng tâm ΔABC .

C. M trùng B . D. A là trung điểm MB .

Câu 63. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D . B. M trùng A .

C. M trùng B . D. M trùng C .

Câu 64. Cho $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D . B. M trùng A .

C. M trùng B . D. M trùng C .

Câu 65. Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng O . B. M trùng A .

C. M trùng B . D. M trùng C .

Câu 66. Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D . B. M trùng A .

C. M trùng B . D. M trùng C .

Câu 67. Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng O . B. M trùng A .

C. M trùng B . D. M trùng C .

Câu 68. Cho tứ giác $PQRN$ có O là giao điểm 2 đường chéo, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{ON}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng P . B. M trùng Q .

C. M trùng O . D. M trùng R .

Câu 69. Cho ΔABC , tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB . B. M là trung điểm BC .

C. M là trung điểm CA . D. M là trọng tâm ΔABC .

Câu 70. Cho ΔDEF , tìm M thỏa $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ED}$. B. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}$. C. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DF}$. D. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$.

Câu 71. Cho ΔDEF , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF}$. B. $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EM}$. C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EM}$. D. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$.

Câu 72. Cho ΔABC có O là trung điểm BC , tìm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng A . B. M trùng B .

C. M trùng O . D. M trùng C .

Câu 73. Cho ΔABC , tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB . B. M là trung điểm BC .

C. M là trung điểm CA . D. M là trọng tâm ΔABC .

Câu 74. Cho ΔABC , điểm M thỏa $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng A . B. M trùng B .

C. $ACMB$ là hình bình hành. D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$.

Câu 75. Cho ΔABC , D là trung điểm AB , E là trung điểm BC , điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CM}$. B. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ED}$.

C. M là trung điểm BC . D. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$.

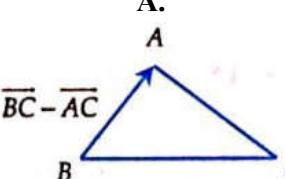
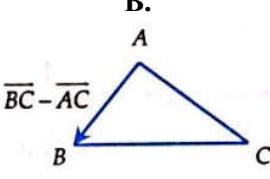
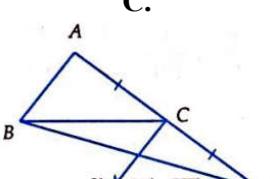
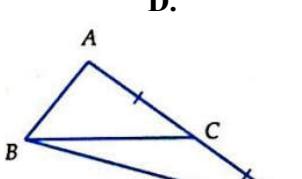
Câu 76. Cho tứ giác $ABCD$, điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB . B. M là trung điểm BC .

C. D là trung điểm BM . D. M là trung điểm DC .

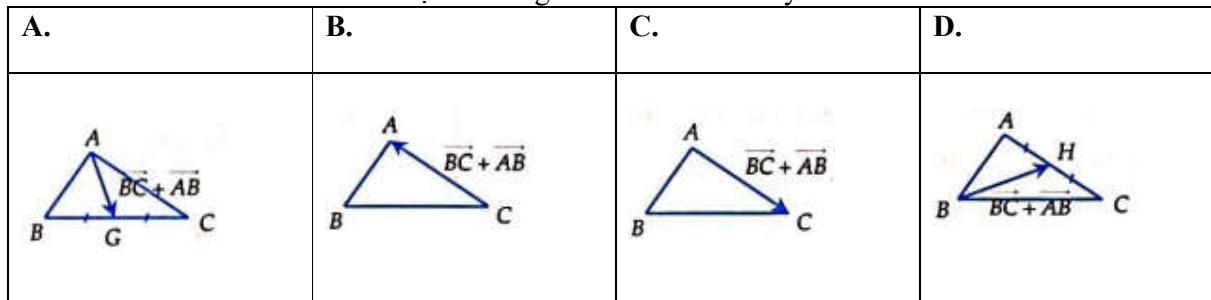
Câu 77. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm N thỏa mãn:

$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

- A. Điểm N là trung điểm cạnh AB
C. Điểm C là trung điểm cạnh AM
- B. Điểm C là trung điểm cạnh BN
D. Điểm B là trung điểm cạnh NC
- Câu 78.** Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$.
- A. Điểm M là trung điểm cạnh AC
C. Điểm C là trung điểm cạnh AM
- B. Điểm M là trung điểm cạnh BD
D. Điểm B là trung điểm cạnh MC
- Câu 79.** Trên đường tròn $C(O; R)$ lấy điểm cố định A ; B là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi M là điểm di động sao cho $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Khi đó tập hợp điểm M là:
- A. đường tròn tâm O bán kính $2R$
C. đường thẳng song song với OA
- B. đường tròn tâm A bán kính R
D. đường tròn tâm C bán kính $R\sqrt{3}$
- Câu 80.** Cho ΔABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}|$ là:
- A. một đường tròn tâm C
C. một đường thẳng song song với AB
- B. đường tròn tâm I (I là trung điểm của AB)
D. là đường thẳng trung trực của BC
- Câu 81.** Cho ΔABC . Vecto $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?
- A. 
B. 
C. 
D. 

- Câu 82.** Cho tam giác ΔABC vuông tại A có $AB = 3cm$, $BC = 5cm$. Khi đó độ dài $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ là:
- A. 4
B. 8
C. $2\sqrt{13}$
D. $\sqrt{13}$
- Câu 83.** Cho hình thang cân $ABCD$, có đáy nhỏ và đường cao cùng bằng $2a$ và $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Tính $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}|$.
- A. $a\sqrt{3}$
B. $2a\sqrt{5}$
C. $a\sqrt{5}$
D. $a\sqrt{2}$
- Câu 84.** Cho 2 vecto \vec{a} và \vec{b} tạo với nhau góc 60° . Biết $|\vec{a}| = 6$; $|\vec{b}| = 3$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$
- A. $3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$
B. $3(\sqrt{7} + \sqrt{3})$
C. $6(\sqrt{5} + 3)$
D. $\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{51})$
- Câu 85.** Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD . Cho $AB = 2a$, $CD = a$. Gọi O là trung điểm của AD . Khi đó:
- A. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$
B. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$
C. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{3a}{2}$
D. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 0$

- Câu 86.** Cho ΔABC . Vecto $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?



- Câu 87.** Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và cạnh là a . Tính độ dài $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

A. $a\sqrt{3}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $a\sqrt{2}$

D. $2a$

Câu 88. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a . O là giao điểm của hai đường chéo. Tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$.

A. $a\sqrt{3}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $a\sqrt{2}$

Câu 89. Với \vec{a}, \vec{b} độ dài $|\vec{a} + \vec{b}|$:

A. Bao giờ cũng lớn hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

B. Không nhỏ hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

C. Bao giờ cũng nhỏ hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

D. Không lớn hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

Câu 90. Cho ΔABC đều cạnh a . Khi đó $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}|$ bằng:

A. 0

B. $3a$

C. a

D. $a(\sqrt{3}-1)$

Câu 91. Cho tam giác ABC đều cạnh a , trọng tâm G . Tính độ dài vecto $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$.

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{a}{3}$

C. $\frac{2a}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 92. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là 3. Tính độ dài $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$:

A. 6

B. $6\sqrt{2}$

C. 12

D. 0

Câu 93. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O và M là trung điểm AB . Tính độ dài $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$.

A. a

B. $3a$

C. $\frac{a}{2}$

D. $2a$

Câu 94. Cho ΔABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$, M là trung điểm BC . Tính độ dài vecto $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}|$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Câu 95. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 3. H là trung điểm của BC . Tìm mệnh đề sai.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{3}$

B. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}| = \frac{\sqrt{63}}{2}$

C. $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = 3$

D. $|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}| = \sqrt{3}$

Câu 96. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Độ dài $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$ bằng

A. $2a$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $a\sqrt{2}$

Câu 97. Cho tam giác đều ABC cạnh a , mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{BC}$.

B. $|\overrightarrow{AC}| = a$.

C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

D. $|\overrightarrow{AB}| = a$.

Câu 98. Cho \overrightarrow{AB} khác $\vec{0}$ và cho điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

A. Vô số.

B. 1 điểm.

C. 2 điểm.

D. Không có điểm nào.

Câu 99. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

A. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vecto.

B. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vecto.

C. $|\overrightarrow{AA}| = |\vec{0}|$.

D. $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Câu 100. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I ; G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}|$.

B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = 3|\overrightarrow{AG}|$.

C. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$.

D. $|\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}| = \vec{0}$.

Câu 101. Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB = 5$, H là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$.

- A. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. B. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 5$.
 C. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$. D. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

Câu 102. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. D. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

Câu 103. Có hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

- A. 100 (N). B. $50\sqrt{3}$ (N).
 C. $100\sqrt{3}$ (N). D. Đáp án khác.

Câu 104. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. B. $ABCD$ là hình thoi.
 C. $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$. D. $ABCD$ là hình thang cân.

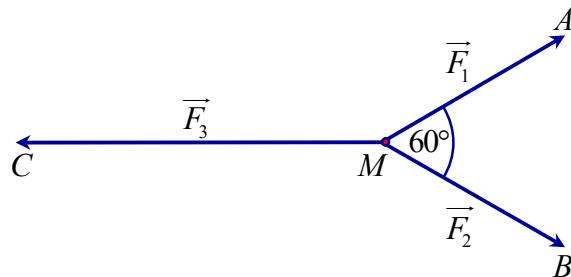
Câu 105. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

- A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$. B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
 C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$. D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$.

Câu 106. Cho tam giác ABC đều cạnh a , có AH là đường trung tuyến. Tính $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}|$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $2a$. C. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 107. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của \vec{F}_3 là



- A. $25\sqrt{3}$ N. B. $50\sqrt{3}$ N. C. $50\sqrt{2}$ N. D. $100\sqrt{3}$ N.

Câu 108. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Tìm khẳng định sai.

- A. $|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}| = IA$. B. $|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}| = BC$.
 C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2AI$. D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3GA$.

Câu 109. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. B. $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$.
 C. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$. D. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Câu 110. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

- A. $4a\sqrt{2}$. B. $4a$. C. $2a\sqrt{2}$. D. $2a$.

Câu 111. Cho tam giác ABC đều, cạnh $2a$, trọng tâm G . Độ dài vecto $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}$ là

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 112. Tam giác ABC thỏa mãn: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ thì tam giác ABC là

- A. Tam giác vuông A . B. Tam giác vuông C .
C. Tam giác vuông B . D. Tam giác cân tại C .

Câu 113. Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 lần lượt là $300(N)$ và $400(N)$. $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A. $0(N)$. B. $700(N)$. C. $100(N)$. D. $500(N)$.

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ↗ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Bảo Vương** ↗ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: Nhóm **Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ↗ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: **Nguyễn Bảo Vương**

↗ https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

↗ **Tải nhiều tài liệu hơn tại:** <https://www.nbv.edu.vn/>

BÀI 9. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

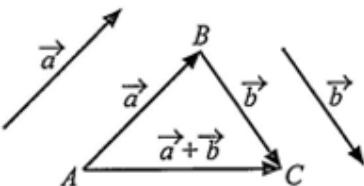
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. TỔNG CỦA HAI VECTO

1. Định nghĩa

Cho hai vecto \vec{a}, \vec{b} . Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

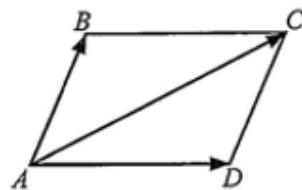
Vecto \overrightarrow{AC} được gọi là tổng của hai vecto \vec{a} và \vec{b} , kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Nhận xét: Công thức trên cho ta cách rút gọn tổng nhiều vecto liên tiếp mà điểm cuối của mỗi vecto trong tổng là điểm đầu của vecto liền sau nó (trừ vecto cuối cùng). Đồng thời, ta cũng phân tích được một vecto thành tổng của hai hoặc nhiều vecto khác. Ta cũng gọi công thức trên là quy tắc cộng.

2. Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Nhận xét: Công thức trên cho ta một cách rút gọn tổng của hai vecto có cùng điểm đầu.

3. Tính chất

Với ba vecto tùy ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vecto-không).

Chú ý: Tổng ba vecto $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ hoặc $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

II. HIỆU CỦA HAI VECTO

1. Hai vecto đối nhau

Vecto có cùng độ dài và ngược hướng với vecto \vec{a} được gọi là vecto đối của \vec{a} , kí hiệu là $-\vec{a}$.

Với hai điểm A, B bất kì ta có $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$.

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$.

2. Định nghĩa

Phép trừ vecto \vec{a} cho vecto \vec{b} là tổng của vecto \vec{a} và vecto đối của vecto \vec{b} , kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$. Như vậy $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Với ba điểm O, A, B bất kì ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Nhận xét: Công thức trên cho ta cách biểu thị một vecto thành hiệu hai vecto có cùng điểm đầu. Ta cũng gọi công thức trên là quy tắc trừ.

III. TRUNG ĐIỂM CỦA ĐOẠN THẲNG, TRỌNG TÂM CỦA TAM GIÁC

I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tìm tổng, hiệu của hai hay nhiều vecto

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Cho các điểm E, F, G, H, K . Thực hiện các phép cộng vecto:

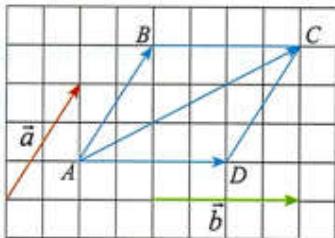
$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}; \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KG}; \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HE}$$

Lời giải

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{EH}; \quad \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KG} = \overrightarrow{FG}; \quad \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$$

Tìm tổng của hai vecto \vec{a} và \vec{b} trong Hình.



Ta có: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}$, suy ra $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$. Thực hiện các phép cộng vecto sau:

- a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BC}$,
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng vecto, ta có:

$$a) (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}.$$

$$b) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

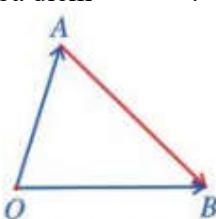
Câu 3. Cho các điểm M, N, P, Q . Thực hiện các phép trừ vecto sau: $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PQ}$.

Lời giải

Ta có:

$$\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{QM}$$

Câu 4. Cho ba điểm A, B, O .



Vecto $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ là vecto nào?

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$.

Câu 5. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, D . Chứng minh

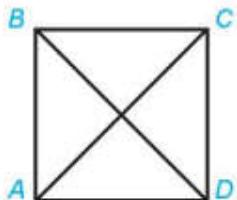
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

Lời giải

Tacó: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$.

Lời giải



Do $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$.

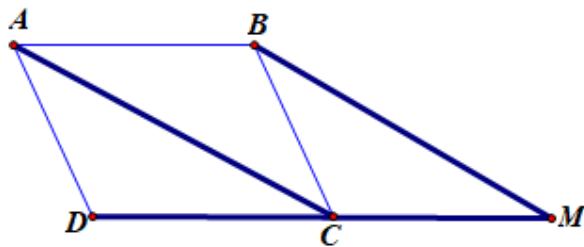
Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = \sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

Do đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}| = |AC| = \sqrt{2}$.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai vecto \overrightarrow{CD} và \overrightarrow{CM}

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (do $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

\Rightarrow Tứ giác ABMC là hình bình hành.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM} \cdot \text{M} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CM}$

$\Rightarrow C$ là trung điểm DM.

Nói cách khác: $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ hay hai vecto \overrightarrow{CD} và \overrightarrow{CM} đối nhau.

Câu 8. Cho tứ giác $ABCD$, thực hiện cả phép cộng và trừ vecto sau:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$

Câu 9. Cho tứ giác $ABCD$, tìm các vecto sau:

a) $\vec{m} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC}$

b) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$

c) $\vec{m} - \vec{n}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng vecto, ta có:

a) $\vec{m} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

b) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AC} + \vec{0} = \overrightarrow{AC}$

c) $\vec{m} - \vec{n} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}$.

Câu 10. Cho tam giác MNQ , thực hiện các phép trừ vectơ sau:

- a) $\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{QN}$
- b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QN}$.

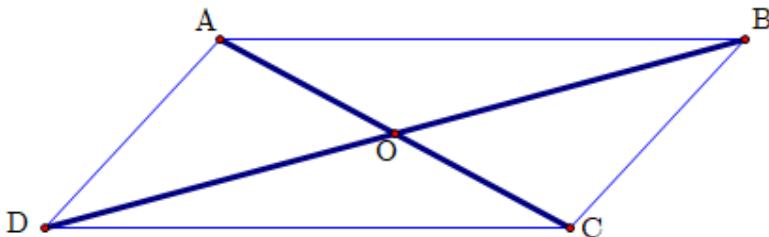
Lời giải

- a) $\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{NM}$
- b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ}$.

Câu 11. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$;
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$
- c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

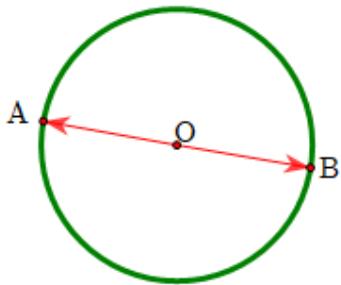
Lời giải



- a) Theo quy tắc hình bình hành nên a) đúng
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{CB}$ nên b) sai
- c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} \neq \vec{0}$ nên c) sai

Câu 12. Cho đường tròn tâm O . Giả sử A, B là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vectơ \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} đối nhau.

Lời giải



Hai vectơ đối nhau khi chúng cùng phương, ngược hướng và có độ lớn bằng nhau

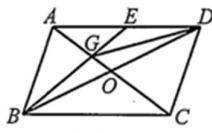
Do đó, để hai vectơ \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} đối nhau khi và chỉ khi AB là đường kính của đường tròn tâm O .

Câu 13. Cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, E là trung điểm của AD, G là giao điểm của BE và AC . Tính:

- a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$
- b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}$.

Lời giải

- a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của cả hai đoạn thẳng AC và BD . Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$
- b) Vì tam giác ABD (Hình 68) có hai đường trung tuyến AO và BE cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác. Do đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.



Hình 68

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 14. Cho hai véc-tor \vec{a} và \vec{b} sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

- a) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng O là trung điểm của AB .
- b) Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng $B \equiv O$.

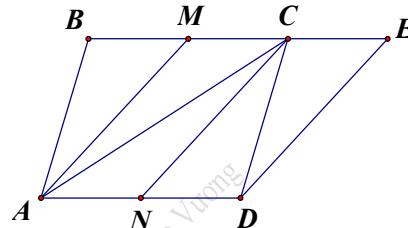
Lời giải.

- a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} \Rightarrow O$ là trung điểm của AB .
- b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Rightarrow B \equiv O$.

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Xác định tông của hai véc-tor \overrightarrow{NC} và \overrightarrow{MC} , \overrightarrow{AM} và \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{AD} và \overrightarrow{NC} , \overrightarrow{AM} và \overrightarrow{AN} .

Lời giải.

Vì $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}$ nên $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}$.



Vì $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$.

Vì $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM}$ nên $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE}$,
với E là đỉnh của hình bình hành $DAME$.

Vì tứ giác $AMCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 16. Cho tam giác ABC . Các điểm M , N và P lần lượt là trung điểm của AB , AC và BC . Xác định hiệu $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$; $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP}$.

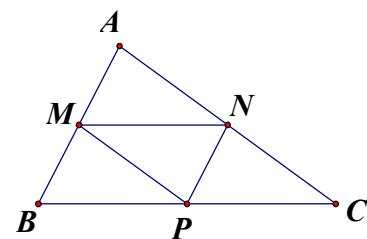
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$.

Vì $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$ nên $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$.

Vì $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP}$ nên $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

Vì $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PC}$ nên $\overrightarrow{BP} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC}$.



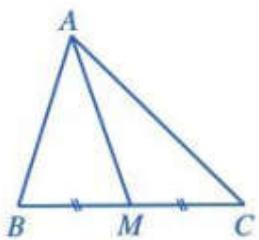
Dạng 2. Chứng minh một đẳng thức vectơ

Phương pháp:

- Biến đổi từ biểu thức về này sang về kia.
- Chứng minh hai biểu thức vectơ cùng bằng một vectơ trung gian
- Chứng minh hai biểu thức vectơ cùng bằng một biểu thức vectơ trung gian bằng cách sử dụng quy tắc trừ với điểm đầu là điểm O bất kì.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 17. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM



Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$.

Lời giải

$$\text{Vì } \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$$

- Câu 18. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm O bất kì. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Lời giải

Áp dụng quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

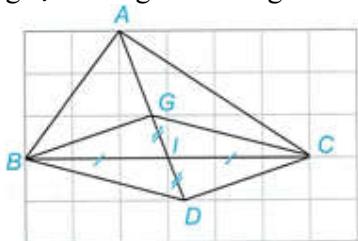
- Câu 19. a) Chứng minh rằng nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Lời giải

a) Khi I là trung điểm của AB , thì hai vecto \overrightarrow{IA} và \overrightarrow{IB} có cùng độ dài và ngược hướng. Do đó, \overrightarrow{IA} và \overrightarrow{IB} đối nhau, suy ra $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

b) Trọng tâm G của tam giác ABC thuộc trung tuyến AI và $GA = 2GI$. Lấy điểm D đối xứng với G qua I . Khi đó tứ giác $GBDC$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là một hình bình hành. Ta có $GA = 2GI = GD$. Hai vecto \overrightarrow{GA} và \overrightarrow{GD} có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vecto đối nhau, do đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

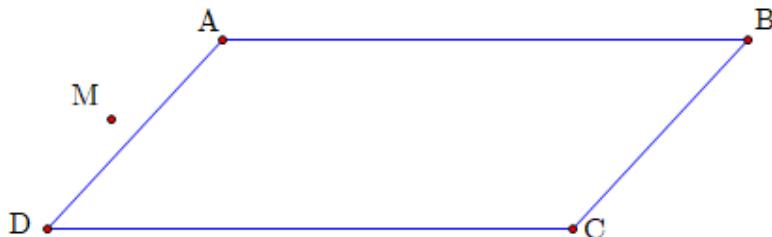


Trong hình bình hành $GBDC$, ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

Vậy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

- Câu 20. Cho $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ với mỗi điểm M trong mặt phẳng.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC} \end{cases}$

Mà $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên được điều phải chứng minh

- Câu 21. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

Từ các đẳng thức trên, ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$.

- Câu 22.** Cho tứ giác $ABCD, O$ là trung điểm của AB . Chứng minh: $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Lời giải

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

- Câu 23.** Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

- Câu 24.** Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng:

- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$

Lời giải

$$\text{a)} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$\text{b)} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$$

- Câu 25.** Cho hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

Lời giải

$$\text{Theo quy tắc hình bình hành, ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC, |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = BD.$$

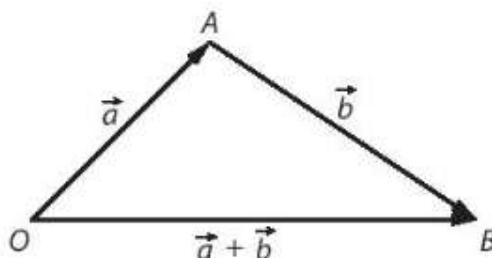
$$\text{Do } AC = BD \text{ nên } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|.$$

- Câu 26.** Cho hai vecto \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Chứng minh rằng

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Lời giải

Từ một điểm O bất kì, ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ rồi vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.



Vì \vec{a}, \vec{b} không cùng phương nên O, A, B không thẳng hàng. Khi đó, trong tam giác OAB , ta có $OA - AB < OB < OA + AB$ hay là $|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

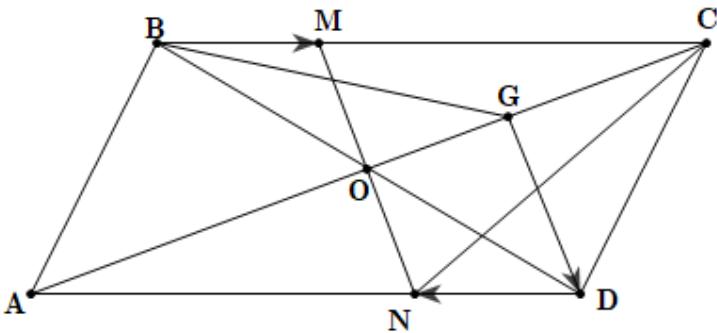
- Câu 27.** Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm tùy ý thuộc cạnh BC , khác B và C . MO cắt cạnh AD tại N .

a) Chứng minh rằng O là trung điểm MN .

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tam giác MNC .

Lời giải

a) HD. Chứng minh hai tam giác BOM và DON bằng nhau.



b) Do O là trung điểm của BD và MN nên $BMDN$ là một hình bình hành.

Suy ra $\vec{BM} + \vec{DN} = \vec{0}$. (1)

Do G là trọng tâm tam giác BCD nên $\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$. (2)

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\vec{GM} = \vec{GB} + \vec{BM}$ và $\vec{GN} = \vec{GD} + \vec{DN}$. Từ đó và (1), (2) suy ra $\vec{GC} + \vec{GM} + \vec{GN} = \vec{GC} + (\vec{GB} + \vec{BM}) + (\vec{GD} + \vec{DN}) = (\vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) + (\vec{BM} + \vec{DN}) = \vec{0}$

Suy ra G là trọng tâm tam giác MNC .

Câu 28. Cho tứ giác $ABCD$.

a) Chứng minh rằng $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD} + \vec{CB}$.

Lời giải

a) Theo tính chất kết hợp của phép cộng vectơ, ta có

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} &= (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DA} = (\vec{AC} + \vec{CD}) + \vec{DA} \\ &= \vec{AD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0} \end{aligned}$$

b) Do $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$ nên $(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA}) + \vec{AD} = \vec{AD}$.

Do tính kết hợp của phép cộng, ta được $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AD}$.

Từ đó $(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}) + \vec{CB} = \vec{AD} + \vec{CB}$.

Do tính kết hợp, giao hoán của phép cộng vectơ, tính chất của vectơ $\vec{0}$, nên

$$\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{CB} = \vec{AB} + \vec{CD} + (\vec{BC} + \vec{CB}) = \vec{AB} + \vec{CD}.$$

Câu 29. Cho tứ giác $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm của IJ .

Chứng minh $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$.

Lời giải

Do I, J, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và IJ nên:

$$\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}; \vec{JC} + \vec{JD} = \vec{0}; \vec{OI} + \vec{OJ} = \vec{0}$$

$$\text{Ta có: } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = (\vec{OI} + \vec{IA}) + (\vec{OI} + \vec{IB}) + (\vec{OJ} + \vec{JC}) + (\vec{OJ} + \vec{JD})$$

$$= (\vec{OI} + \vec{OJ}) + (\vec{IA} + \vec{IB}) + (\vec{OI} + \vec{OJ}) + (\vec{JC} + \vec{JD}) = \vec{0}$$

Câu 30. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $\vec{BA} + \vec{DC} = \vec{0}$

b) $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$

Lời giải

a) $ABCD$ là hình bình hành nên $\vec{DC} = \vec{AB}$

$$\Rightarrow \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{BB} = \vec{0}$$

$$\text{b) } \vec{MA} + \vec{MC} = (\vec{MB} + \vec{BA}) + (\vec{MD} + \vec{DC})$$

$$= (\vec{MB} + \vec{MD}) + (\vec{BA} + \vec{DC})$$

$$= \vec{MB} + \vec{MD} \quad (\vec{BA} + \vec{DC} = \vec{0})$$

Câu 31. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

Lời giải

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ Suy ra, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

- Câu 32.** Cho hình thoi $ABCD$ và M là trung điểm cạnh AB, N là trung điểm cạnh CD . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}.$$

Lời giảiGọi O là tâm của hình thoi. Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}$.

- Câu 33.** Chứng minh rằng với tứ giác $ABCD$ bất kỳ, ta luôn có:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

Lời giảia) Theo quy tắc ba điểm của phép cộng vectơ, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$.Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.b) Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$.Suy ra $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

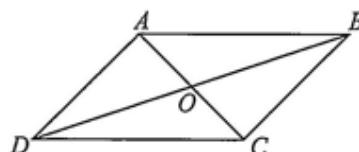
- Câu 34.** Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$;

c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$;

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Lời giảia) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm AC, BD .

Hình 2

Do đó $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$$
.

c) Ta có $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$.

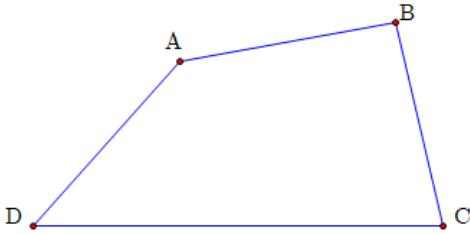
Mà $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (do $ABCD$ là hình bình hành) $\Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.d) Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.Do đó $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

- Câu 35.** Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

Lời giải



- a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$
 b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Câu 36. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

Lời giải

Cách 1: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$.

Cách 2: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$
 $= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

Cách 3: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$
 $= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AE}$.

Câu 37. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm của tam giác. M, N, P là ba điểm bất kì. Chứng minh $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$.

Lời giải

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP}$
 $= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$.

Nhận xét: Ta đã sử dụng quy tắc cộng để tách mỗi vectơ ở vé trái bằng tổng một vectơ ở vé phải cộng với một vectơ khác.

Câu 38. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F .

Chứng minh $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA}$.

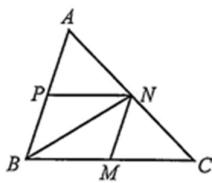
Lời giải

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}) \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OF}) \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE}\end{aligned}$$

Từ hai đẳng thức trên, ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA}$. 88

Câu 39. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NB}$.

Lời giải



Hình 35

Ta biến đổi tổng của hai vectơ không cùng điểm đầu về tổng của hai vectơ cùng điểm đầu và dùng quy tắc hình bình hành.

Vì NP là đường trung bình của tam giác ABC (Hình 35) nên $NP \parallel BC, NP = \frac{1}{2}BC$. Suy ra

$NP \parallel BM, NP = BM$ và tứ giác $BMNP$ là hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$.

Suy ra $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB}$

Câu 40. Cho hai vecto \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$. Chứng minh rằng nếu hai vecto cùng hướng thì $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.

Lời giải

Từ một điểm A trong mặt phẳng, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Nếu hai vecto \vec{a}, \vec{b} cùng hướng thì ba điểm A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C . Suy ra $AB + BC = AC$. Vậy $|\vec{a}| + |\vec{b}| = AB + BC = AC = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.

Câu 41. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm là G . Chứng minh $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

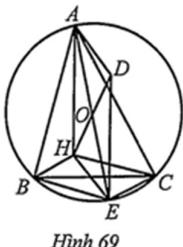
Lời giải

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC'} \\ &= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}) \\ &= -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}) = -\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.\end{aligned}$$

Câu 42. Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh đối một khác nhau. Gọi H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác, D là điểm đối xứng với H qua O . Chứng minh $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

Lời giải

Kẻ đường kính AE . Ta có $BH \parallel EC, CH \parallel BE$. Suy ra $BHCE$ là hình bình hành. Tứ giác $AHED$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên cũng là hình bình hành. Ta có: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HD}$



BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 43. Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Lời giải.

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $IA = IB$ và hai véc-tơ $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ ngược hướng. Vậy $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

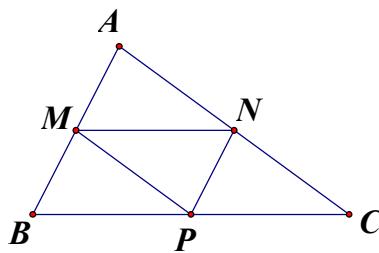
Ngược lại, nếu $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ thì $IA = IB$ và hai véc-tơ $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ ngược hướng.

Do đó A, I, B thẳng hàng. Vậy I là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Câu 44. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC . Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Lời giải.

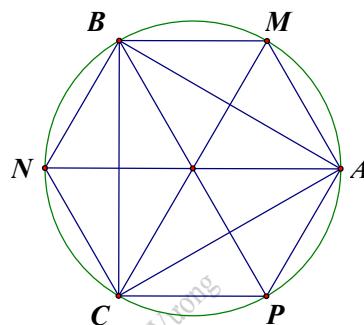
Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}$



$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{NC} \\
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AN} \\
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} \\
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \vec{0} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}.
 \end{aligned}$$

Câu 45. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Lời giải.



Vẽ lục giác đều $AMBNCP$ nội tiếp đường tròn (O).

Vì $BOCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ON}$.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.

Câu 46. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng

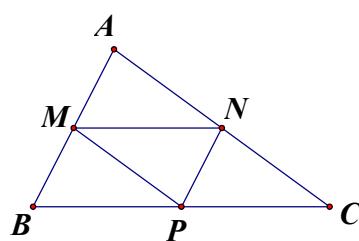
a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kỳ.

Lời giải.

a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $PN \parallel BM, MN \parallel BP$ suy ra tứ giác $BMPN$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$.



Vì N là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$.

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}.$$

b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$, kết hợp với quy tắc trừ $\Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$.

Mà $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC . Vậy $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}) \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) - (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP}).\end{aligned}$$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Câu 47. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$.

Tương tự: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$
 $= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Câu 48. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là một điểm bất kì trên đường chéo AC . Qua O kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt AB và DC lần lượt tại M và N , cắt AD và BC lần lượt tại E và F . Chứng minh

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

b) Tứ giác $AMOE$ và tứ giác $OFCN$ là hình bình hành nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FO}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FC}) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}) \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Câu 49. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

a) Biến đổi về trái ta có

$$VT = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA}$$

$$= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = VP \text{ (đpcm).}$$

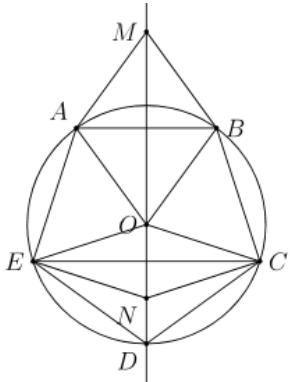
b) Đẳng thức tương đương với $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$ (đúng).

Câu 50. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Lời giải

Ta chứng minh $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ có hai giá khác nhau.

Gọi d là đường thẳng chứa OD thì d là một trục đối xứng của ngũ giác đều.



Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, trong đó M là đỉnh của hình thoi $OAMB$ và thuộc d .

Tương tự $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{ON}$, trong đó N thuộc d .

Do đó $\vec{v} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}) + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OD}$ có giá là d .

Ta ghép $\vec{v} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OE}$ thì \vec{v} có giá là đường thẳng OE .

Vì \vec{v} có $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ giá khác nhau nên $\vec{v} = \vec{0}$.

Câu 51. Cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Cách 1. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BF}) + (\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} = \vec{0} \text{ (đúng).}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2. } VT &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}) \\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = VP. \end{aligned}$$

Câu 52. Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn tâm O , và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}$.

Lời giải

a) Tâm O của lục giác đều là tâm đối xứng của lục giác nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}) = \vec{0}$.

b)

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FE}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FE})$$

$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \\ = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + \vec{0} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} .$$

Dạng 3. Tính độ dài của một vectơ tổng; vectơ hiệu

Phương pháp:

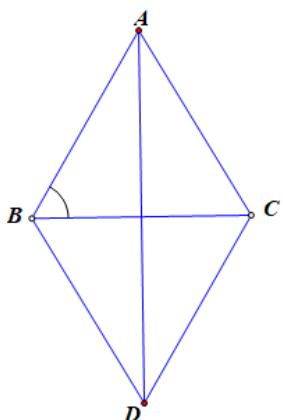
- Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính độ dài.
 - Sử dụng tính chất của các tam giác đặc biệt: tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, tam giác vuông cân.
 - Sử dụng tính chất của tứ giác đặc biệt: hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành,...

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 53. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Dung hình bình hành $ABDC$ tâm O nhu hình vẽ.



Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD$$

Vì tú giác $ABDC$ là hình bình hành, lai có $AB = AC = BD = CD = a$ nên $ABDC$ là hình thoi.

$$\Rightarrow AD = 2AO = 2 \cdot AB \cdot \sin B = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a$ và $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$

Câu 54. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O , độ dài các cạnh bằng 1.

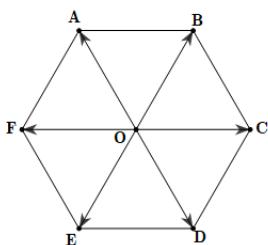
a) Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

b) Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$.

Lời giải

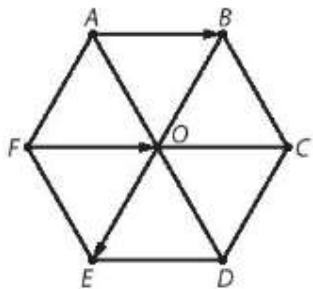
a) Do O là tâm của lục giác đều $ABCDEF$ nên O là trung điểm của các đường chéo AD, BE, CF .



Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

b) Theo kết quả của bài tập 4.4, ta được $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FE}$



Từ đó, do độ dài các cạnh của lục giác $ABCDEF$ bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}| = |\overrightarrow{EF}| = 1$.

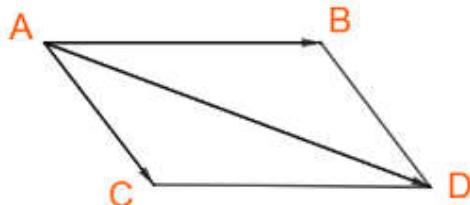
Câu 55. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính độ dài các vecto:

- a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- c) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

Lời giải

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = BC = a$

b) Dựng hình bình hành $ABDC$, giao điểm của hai đường chéo là O ta có:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = AD = a\sqrt{3}$$

c) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = a$$

Câu 56. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và ba điểm G, H, K thỏa mãn

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}; \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}; \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

Tính độ dài các vecto $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{AG}$

Lời giải

Ta có $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

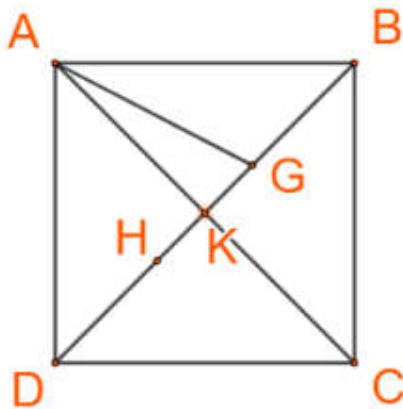
+) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Suy ra K là trung điểm $AC \Rightarrow AK = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

+) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$, suy ra H là trọng tâm của tam giác ADC

$$\Rightarrow DH = \frac{2}{3} DK = \frac{1}{3} DB(1)$$

+) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC



$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3} BK = \frac{1}{3} BD(2)$$

Từ (1,2) $\Rightarrow HG = \frac{1}{3} BD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

Mà $KG = KH = \frac{1}{2} HG = \frac{a\sqrt{2}}{6}$

$$\Rightarrow AG = \sqrt{AK^2 + GK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3} \Rightarrow |\overrightarrow{AG}| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

Vậy $|\overrightarrow{KA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|\overrightarrow{GH}| = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, $|\overrightarrow{AG}| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$.

Câu 57. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CB}$

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

a) $\vec{a} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

Suy ra $|\vec{a}| = AD = 1$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$.

Suy ra $|\vec{b}| = AC = \sqrt{2}$.

Câu 58. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1 và M là trung điểm BC . Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

b) $\vec{b} = (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})$.

Lời giải

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Suy ra $|\vec{a}| = CB = 1$.

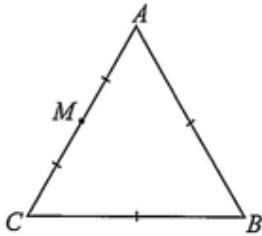
b) $\vec{b} = (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}) = 2\overrightarrow{AM}$.

Suy ra $|\vec{b}| = 2AM = \sqrt{3}$.

Câu 59. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AC .



Hình 1

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = -2\overrightarrow{BM}$.

Khi đó: $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{BM}| = 2BM = a\sqrt{3}$.

- Câu 60.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và có cạnh bằng a . Cho 2 điểm M, N thoả mãn:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}; \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$$

Tìm độ dài các vectơ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NO}$.

Lời giải

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ suy ra M là trung điểm của AD . Khi đó $MA = \frac{a}{2}$.

$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ suy ra N là trọng tâm của tam giác BDC . Ta có $NO = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

- Câu 61.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính độ dài của các vectơ sau:

a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

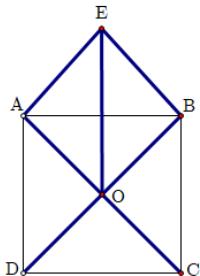
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ với O là giao điểm của AC và BD .

Lời giải

a) $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = a\sqrt{2}$

b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = a\sqrt{2}$

c) Vẽ hình bình hành $OAEB$ vì góc $\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow OAEB$ là hình vuông nên ta có



$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}| = a\sqrt{2}$$

- Câu 62.** Cho ABC là tam giác đều cạnh a . Tính:

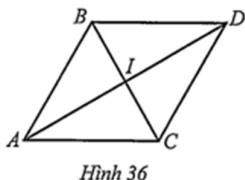
a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$,

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC = a$.

b) Dựng hình bình hành $ABDC$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Gọi I là giao điểm của AD và BC , ta có I là trung điểm của BC và AD (Hình 36).

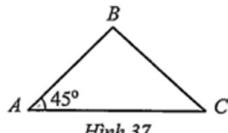


Hình 36

Vì tam giác ABC đều nên $AI \perp BC \Rightarrow AI = AB \cdot \sin B = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AI = a\sqrt{3}$.

Câu 63. Cho tam giác ABC có $AB = 2a, AC = 3a, \widehat{BAC} = 45^\circ$ (Hình 37). Tính:



Hình 37

- $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$
- $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

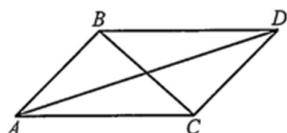
a) Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC$.

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= (2a)^2 + (3a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 45^\circ = (13 - 6\sqrt{2})a^2. \end{aligned}$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$.

b) Dụng hình bình hành $ABDC$ (Hình 38), ta có:



Hình 38

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 135^\circ, BD = AC = 3a.$$

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABD ta có:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD} \\ &= (2a)^2 + (3a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 135^\circ = (13 + 6\sqrt{2})a^2. \end{aligned}$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$.

Câu 64. Cho tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có: $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = BD = AC$.

Vì $ABCD$ cũng là một hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Từ đó suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

Câu 65. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = 4a, AC = 5a$. Tính:

- $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$;
- $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

$$\text{a)} |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{41} \quad \text{b)} |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{41}$$

Câu 66. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính:

- a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$
- b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$;
- c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

Lời giải

$$\text{a)} |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = a . \text{b)} |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a \text{ c)} |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3} .$$

Câu 67. Cho tam giác ABC thỏa mãn $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .

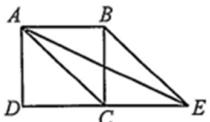
Lời giải

Dựng hình bình hành $ABDC$. Từ giả thiết suy ra $AD = BC$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật. Do đó tam giác ABC vuông tại A .

Câu 68. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Dựng hình bình hành $ABEC$ (Hình 67).



Hình 67

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = AE .$$

Vì $CD // AB, CE // AB$ nên C, D, E thẳng hàng.

$$\text{Ta có: } DE = DC + CE = 2a .$$

Tam giác ADE vuông tại D , suy ra

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5} .$$

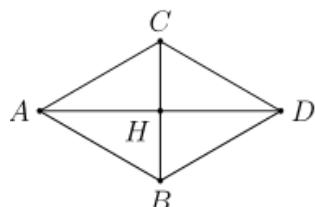
$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = a\sqrt{5} .$$

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 69. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ và $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Từ tam giác đều ABC cạnh a , vẽ hình thoi $BACD$ thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ nên $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = AD$



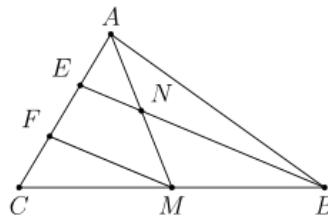
$$= 2AH = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} .$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \text{ nên } |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a .$$

Câu 70. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Trên cạnh $AC = b$ lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt trung tuyến AM tại N . Tính độ dài vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FC} . \text{ Vì } MF // BE \text{ nên } N \text{ là trung điểm của } AM . \text{ Suy ra } \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN} = \vec{0} .$$

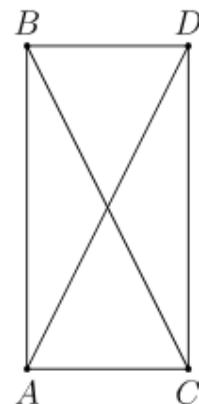


Do đó $\vec{u} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC}$ nên $|\vec{u}| = AC = b$.

- Câu 71.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $BC = a\sqrt{5}$. Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Mà $\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin \widehat{ABC} = a\sqrt{5} \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Do đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$; $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.

Ta có: $AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vì vậy $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}| = AB = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

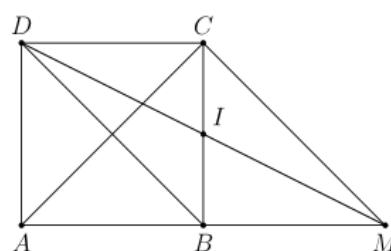
Vì tam giác ABC vuông tại A nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra $AD = BC = a\sqrt{5}$.

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = a\sqrt{5}$.

- Câu 72.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh b . Tính $|\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|, |\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}|$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA}$ nên $|\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = b\sqrt{2}$.



Ta có $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$ nên $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = b\sqrt{2}$.

Vẽ hình bình hành $CDBM$ thì DM cắt BC tại trung điểm I của mỗi đường.

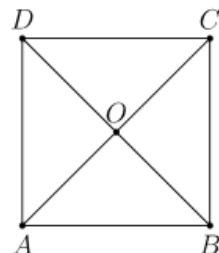
Ta có $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM}$ nên $|\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DM}| = DM = 2DI$.

Mà $DI^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}b^2 \Rightarrow |\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}| = b\sqrt{5}$.

- Câu 73.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có O là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|, |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$ và $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

Lời giải

Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}, \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BO}$. Do đó $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}| = 2a$.

Ta có $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$. Do đó $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = BD = a\sqrt{2}$.

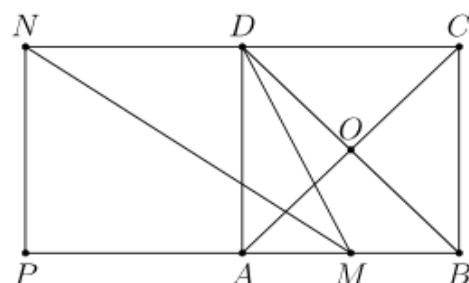
- Câu 74.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có tâm O . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của các vecto sau $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD ta có

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}. \text{ Suy ra } |\overrightarrow{MD}| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P .



Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.

Áp dụng định lý Pythagoras trong tam giác vuông NPM ta có

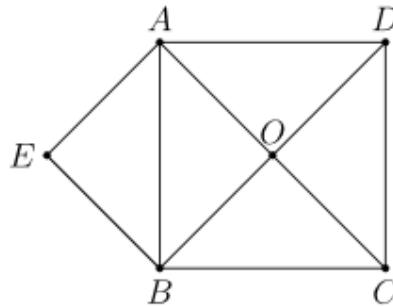
$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{13}}{2}. \text{ Suy ra } |\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

- Câu 75.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có tâm O và M là trung điểm của AB . Tính độ dài của các vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Lời giải

Ta có $|\overrightarrow{AB}| = AB = a$. $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

$$|\overrightarrow{OA}| = OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |\overrightarrow{OM}| = OM = \frac{a}{2}.$$



Gọi E là điểm sao cho tứ giác $OBEA$ là hình bình hành. Khi đó nó cũng là hình vuông.

Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE} \Rightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}| = OE = AB = a$.

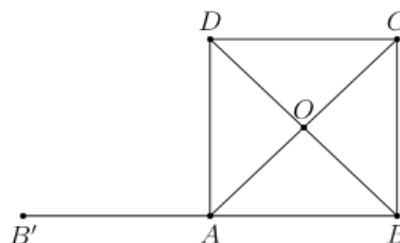
Câu 76. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ

a) Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}|$, $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|$

b) Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}| = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Ta có: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$. Suy ra

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| = 0.$$

b) Áp dụng quy tắc trừ ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) - (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC}$.

Lấy B' là điểm đối xứng của B qua A . Khi đó $-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB'} \Rightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BB'}$

Suy ra $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = |\overrightarrow{BB'}| = BB' = 2a$.

Câu 77. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a và M là một điểm bất kỳ. Tính

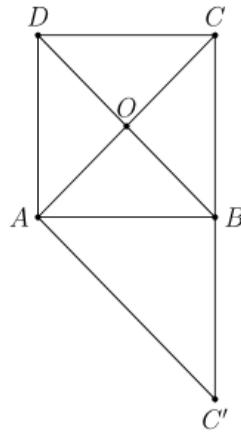
a) Tính $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AD}|$

b) Tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$

c) Tính $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

Lời giải

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.



Áp dụng định lý Pitago ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{2}$.

b) Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. Suy ra $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$. Vậy $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BC}| = a$.

c) Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Suy ra $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$
Mà $|\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$. Suy ra $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = BD = a\sqrt{2}$.

Dạng 4. Xác định một điểm thỏa một đẳng thức vectơ cho trước

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

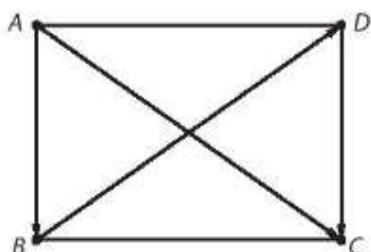
Câu 78. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a, AD = a\sqrt{2}$.

a) Tính độ dài của vecto $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$.

b) Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$.

Lời giải

a) Do hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ nên độ dài hai đường chéo AC, BD bằng $\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$.



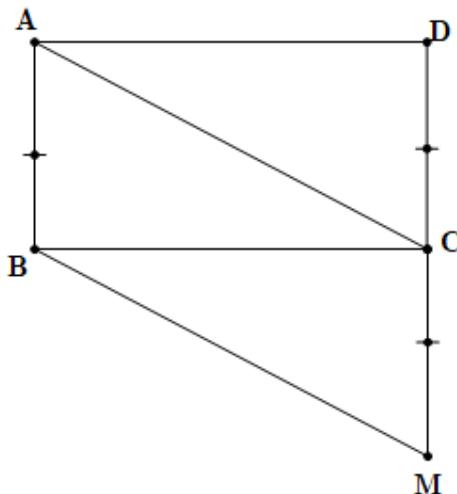
Theo tính chất giao hoán và kết hợp phép cộng vecto, ta có

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

Do đó $|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

b) Do $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$.



Theo kết quả bài tập 4.3, SGK Toán 10 tập 1, đẳng thức $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$ tương đương với tứ giác $ABMC$ là một hình bình hành. Từ đó $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Vậy điểm M cần tìm là điểm đối xứng với D qua C .

Câu 79. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB .

- Xác định vectơ $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$.
- Xác định điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MA}$.
- Chứng minh rằng $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

a) Do D là trung điểm của BC, E là trung điểm của CA, F là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$.

Do $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$ nên tứ giác $CEFD$ là hình bình hành.

Từ đó $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF}$.

Suy ra $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{CB}$

b) Giả sử tìm được điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MA}$. Khi đó, theo kết quả câu a, ta được $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MA}$. Suy ra tứ giác $ABCM$ là hình bình hành. Và do đó điểm M cần tìm đối xứng với B qua E .

c) Do $ABCM$ là một hình bình hành, nên $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

Câu 80. Cho hai điểm A, B . Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thoả mãn $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}|$.

Lời giải

$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow AM = AB.$$

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A bán kính AB .

Câu 81. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thoả mãn $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}|$

Lời giải

Tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng AC .

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 82. Cho hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thoả mãn điều kiện sau đây:

- $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM}$

Lời giải

- a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$. Vậy mọi điểm M đều thỏa mãn.
- b) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A \equiv B$. Vậy không có điểm M nào thỏa mãn
- c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$. Vậy M là trung điểm của đoạn thẳng AB .
- d) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow M \equiv A$.

Câu 83. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$.

Vậy M là điểm xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$ hay M là đỉnh thứ tư trong hình bình hành $ABCM$

Câu 84. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm m sao cho

a) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

b) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|$

Lời giải.

a) Ta có $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MA = BC$

Vậy M cách điểm A một đoạn bằng BC không đổi nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = BC$.

b) Ta có $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow MA = MC$

Vậy M cách đều 2 điểm A và C nên tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn AC .

Câu 85. Cho 2 điểm A và B . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$

Lời giải.

Vẽ hình bình hành $AMBN$. Gọi O là giao điểm 2 đường chéo, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = MN = 2MO$$

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = AB$$

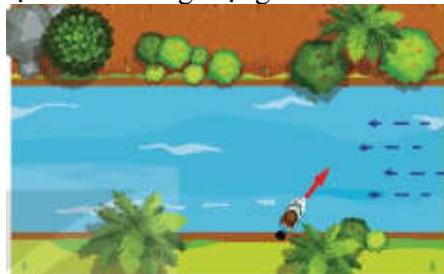
$$\text{Điều kiện tương đương } 2MO = AB \Rightarrow MO = \frac{1}{2}AB$$

Tập hợp các điểm M có tính chất $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là đường tròn đường kính AB

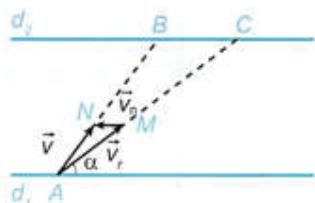
Dạng 5. Bài toán thực tế

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 86. Một con tàu chuyển động từ bờ bên này sang bờ bên kia của một dòng sông với vận tốc riêng không đổi. Giả sử vận tốc dòng nước là không đổi và đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc thực tế của tàu. Nếu không quan tâm đến điểm đến thì cần giữ lái cho tàu tạo với bờ sông một góc bao nhiêu để tàu sang bờ bên kia được nhanh nhất?



Lời giải

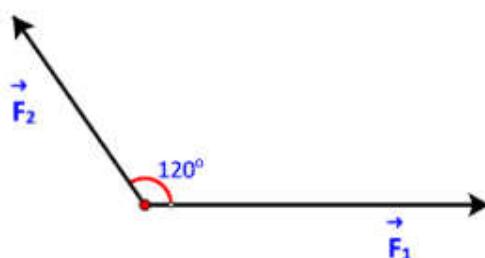


Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Giả sử tàu xuất phát từ $A \in d_1$ và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ góc α . Gọi \vec{v}_r và \vec{v}_n lần lượt là vectơ vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi M, N là các điểm sao cho $\vec{v}_r = \overrightarrow{AM}, \vec{v}_n = \overrightarrow{MN}$.

Khi đó tàu chuyển động với vectơ vận tốc thực tế là $\vec{v} = \vec{V}_r + \vec{V}_n = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$.

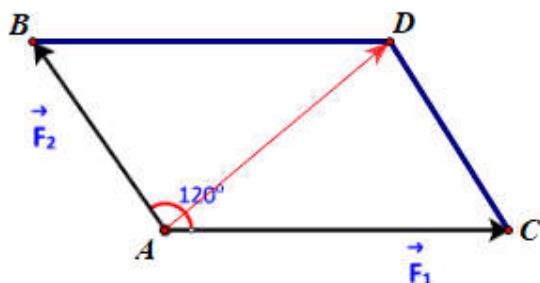
Gọi B, C tương ứng là giao điểm của AN, AM với d_2 . Tàu chuyển động thẳng từ A đến B với vectơ vận tốc thực tế \overrightarrow{AN} , do đó thời gian cần thiết để tàu sang được bờ d_2 là $\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM}$. Mặt khác, $AM = |\vec{v}_r|$ không đổi nên $\frac{AC}{AM}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC \perp d_2 \Leftrightarrow AM \perp d_2$. Vậy để tàu sang được bờ bên kia nhanh nhất, ta cần giữ bánh lái đè tàu luôn vuông góc với bờ.

- Câu 87.** Hình 4.19 biểu diễn hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 cùng tác động lên một vật, cho $|\vec{F}_1| = 3N, |\vec{F}_2| = 2N$. Tính độ lớn của hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$



Lời giải

Dựng hình bình hành $ABDC$ với hai cạnh là hai vectơ \vec{F}_1, \vec{F}_2 như hình vẽ



Ta có:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\overrightarrow{AD}| = AD$$

Xét ΔABD ta có:

$$BD = AC = |\vec{F}_1| = 3, AB = |\vec{F}_2| = 2.$$

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Theo định lí cosin ta có:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD} \\ \Leftrightarrow AD^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow AD^2 = 19 \\ \Leftrightarrow AD &= \sqrt{19} \text{ V?y } |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{19} \end{aligned}$$

- Câu 88.** Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuồng hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước.



Lời giải

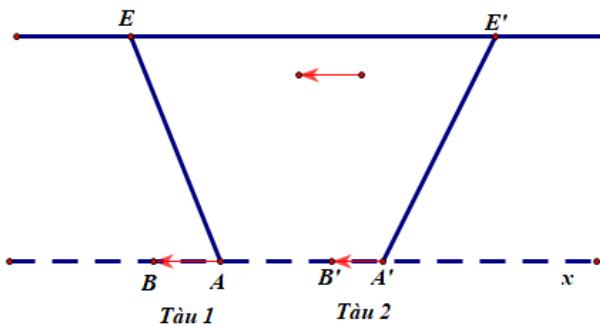
Ta đã biết vectơ dòng nước và hướng di chuyển (tức là vectơ vận tốc thực của hai tàu).

Ta cần xác định vectơ vận tốc của mỗi tàu, chỉ biết chúng có độ lớn bằng nhau.

Giả sử tàu 1 là tàu đi về phía hạ lưu còn tàu 2 là tàu đi về phía thượng nguồn.

Tàu 1 và tàu 2 bắt đầu di chuyển từ điểm A và A' ở bờ bên này đến điểm E, E' ở bờ bên kia.

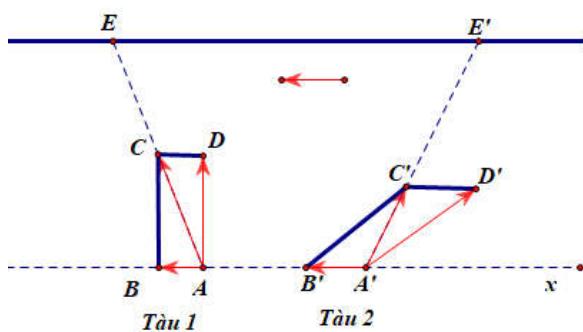
Vectơ vận tốc dòng nước tác động lên tàu là như nhau, biểu diễn bởi các vectơ \overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{A'B'}$



Gọi vectơ vận tốc riêng của hai tàu lần lượt là các vectơ \overrightarrow{AD} và $\overrightarrow{A'D'}$. Vectơ vận tốc thực của hai tàu là vectơ \overrightarrow{AC} và $\overrightarrow{A'C'}$.

Với tàu 1, để xác định các điểm C, D:

Từ B ta kẻ đường vuông góc với bờ, cắt AE tại một điểm, kí hiệu là C . Tiếp theo, dựng hình bình hành $ABCD$ ta được điểm D .



Với tàu 2, để xác định các điểm C', D'

Trên $A'E'$ lấy điểm C' sao cho $B'C' = AD$. Dựng hình bình hành $A'B'C'D'$, ta được điểm D' .

Giải thích:

Tàu 1: Được dòng nước đẩy theo vectơ \overrightarrow{AB} , và đi với vận tốc thực là vectơ \overrightarrow{AD} , khi ấy hướng di chuyển là vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ chính là vectơ \overrightarrow{AC}

Tàu 2: Bị dòng nước đẩy theo vectơ $\overrightarrow{A'B'}$, và đi với vận tốc thực là vectơ $\overrightarrow{A'D'}$, khi ấy hướng di chuyển là vectơ tổng $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$ chính là vectơ $\overrightarrow{A'C'}$

Các vecto \overrightarrow{AD} và $\overrightarrow{A'D'}$ có độ dài bằng nhau (cùng bằng $B'C'$).

Do hai tàu chuyển động theo hướng tạo với bờ cùng một góc nhọn nên quãng đường đi khi chạm bờ bên kia là như nhau. Hay $AE = A'E'$.

Tàu nào có độ lớn vận tốc thực lớn hơn thì tàu đó sang bờ bên kia trước.

Xét tam giác $A'B'C'$, theo định lí cosin ta có:

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 - 2A'B' \cdot B'C' \cdot \cos B'$$

$$\text{Mà } 0^\circ < \widehat{B'} < \widehat{C'A'x} < 90^\circ$$

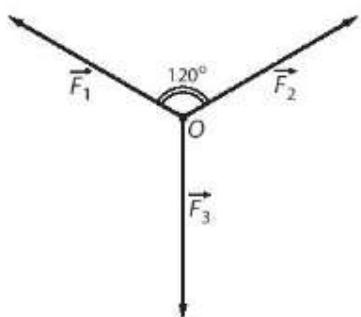
$$\Rightarrow \cos B' > 0 \Rightarrow A'C'^2 < A'B'^2 + B'C'^2$$

Mặt khác, tam giác ABC vuông tại B nên:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow A'C'^2 < AC^2 \text{ hay } A'C' < AC$$

Vậy vận tốc của tàu 1 lớn hơn, nói cách khác tàu đi hướng xuống hạ lưu sẽ sang bờ bên kia trước.

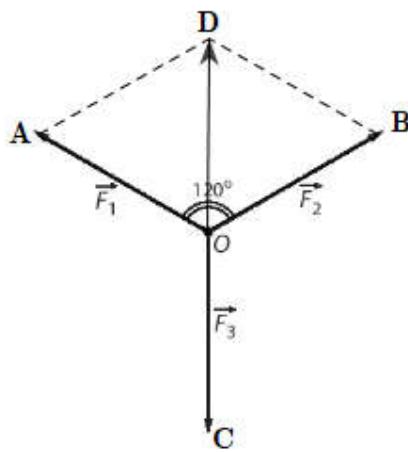
- Câu 89.** Trên Hình biểu diễn ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng 0. Cho biết cường độ của \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều bằng 100 N và góc tạo bởi \vec{F}_1 và \vec{F}_2 bằng 120° .



Tính cường độ của lực \vec{F}_3 .

Lời giải

Ta sử dụng các vecto $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ và \overrightarrow{OD} lần lượt biểu diễn cho các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ và hợp lực \vec{F} của \vec{F}_1, \vec{F}_2 .

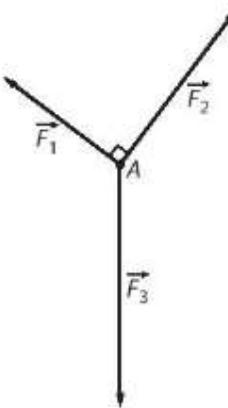


Khi đó, do $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 100$, nên tứ giác $AOBD$ là hình thoi. Từ đó, do $\widehat{AOB} = 120^\circ$, suy ra $\widehat{OAD} = 60^\circ$, do đó tam giác AOD đều. Bởi vậy $|\vec{F}| = OD = OA = 100$.

Do vật ở vị trí cân bằng nên hai lực \vec{F} và \vec{F}_3 ngược hướng và có cường độ bằng nhau, tức là hai vecto \overrightarrow{OD} và \overrightarrow{OC} là hai vecto đối nhau. Suy ra cường độ của lực \vec{F}_3 bằng

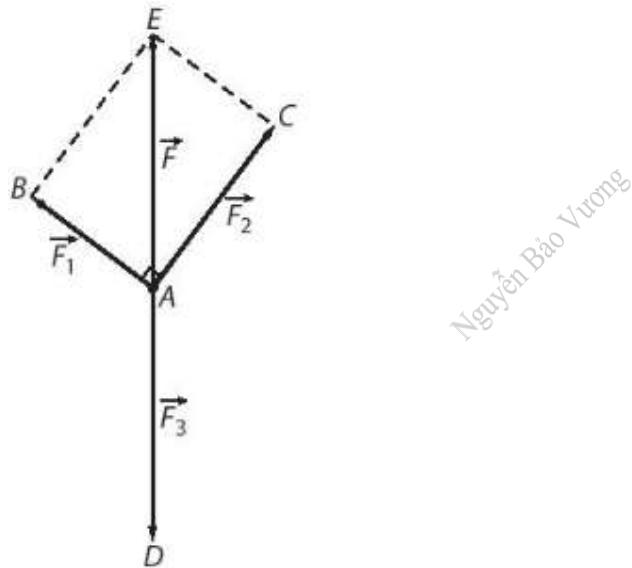
$$|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = 100(\text{N}).$$

- Câu 90.** Trên Hình biểu diễn ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng A . Cho biết $|\vec{F}_1| = 30N, |\vec{F}_2| = 40N$. Tính cường độ của lực \vec{F}_3 .



Lời giải

Ta sử dụng các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ lần lượt biểu thị cho các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ và vectơ \overrightarrow{AE} biểu thị cho hợp lực \vec{F} của \vec{F}_1, \vec{F}_2 .



Nguyễn Bảo Vương

Khi đó, do $\widehat{BAC} = 90^\circ$, nên tứ giác $ABEC$ là hình chữ nhật. Từ đó, do $AB = 30(N)$, $AC = 40(N)$, suy ra

$$|\vec{F}| = AE = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50(N).$$

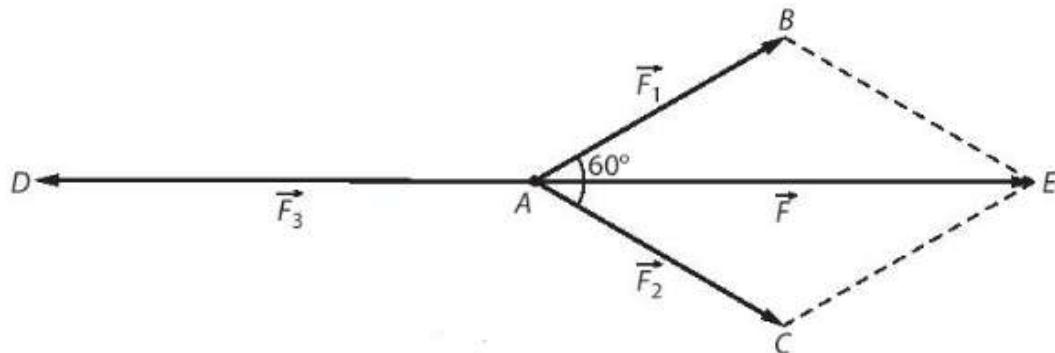
Do vật ở vị trí cân bằng, nên hai lực \vec{F} và \vec{F}_3 có cùng cường độ và ngược hướng, tức là các vectơ \overrightarrow{AE} và \overrightarrow{AD} là các vectơ có cùng độ dài và ngược hướng. Bởi vậy, cường độ của lực \vec{F}_3 bằng $|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = AE = 50(N)$.

- Câu 91.** Trên mặt phẳng, chất điểm A chịu tác dụng của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ và ở trạng thái cân bằng. Góc giữa hai vectơ \vec{F}_1, \vec{F}_2 bằng 60° . Tính độ lớn của \vec{F}_3 , biết $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 2\sqrt{3} N$

Lời giải

Ta sử dụng các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ lần lượt biểu thị cho các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ và vectơ \overrightarrow{AE} để biểu thị cho hợp lực \vec{F} của hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 . Khi đó, tứ giác $BACE$ là một hình bình hành. Từ đó, do

$AB = AC = 2\sqrt{3}$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $BACE$ là một hình thoi và tam giác ABC là một tam giác đều.



$$\text{Do đó } AE = 2 \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6$$

Do A ở vị trí cân bằng nên hai lực \vec{F} và \vec{F}_3 có cùng cường độ và ngược hướng, tức là các vecto \overrightarrow{AD} và \overrightarrow{AE} đối nhau. Bởi vậy, cường độ của lực \vec{F}_3 bằng $|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = AE = 6(N)$.

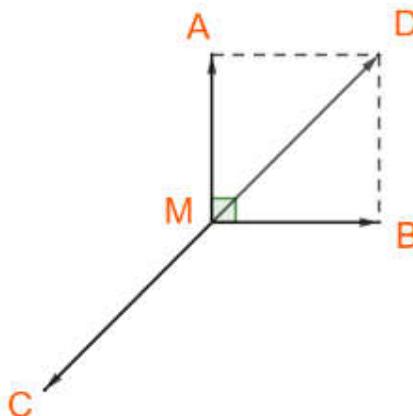
- Câu 92.** Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều là $10N$ và $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm độ lớn của lực \vec{F}_3 .

Lời giải

Ba lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 cùng tác dụng vào M và vật đứng yên nên hợp lực của chúng có giá trị bằng không, hay:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Dựng hình bình hành $MADB$, khi đó: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}$



$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC} \quad (\text{hai vecto đối nhau})$$

$$\Rightarrow MD = MC$$

Xét hình bình hành $MADB$, ta có:

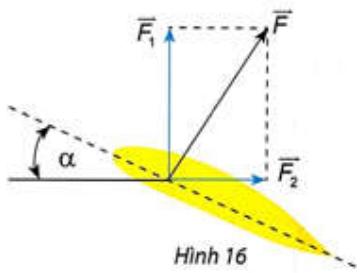
$$AM = AB \text{ và } \widehat{AMB} = 90^\circ$$

\Rightarrow $MADB$ là hình vuông, cạnh $AB = 10$

$$\Rightarrow MC = MD = AB \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

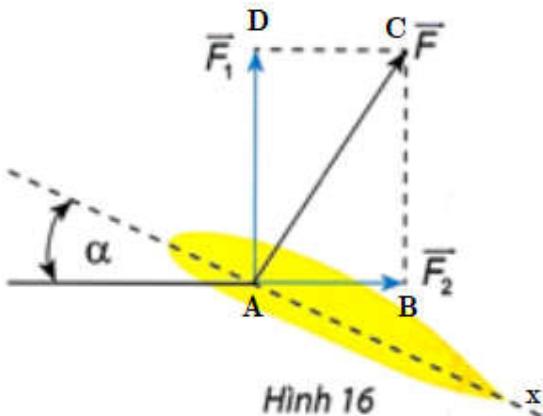
Vậy độ lớn của lực \vec{F}_3 là $|\vec{F}_3| = |\overrightarrow{MC}| = MC = 10\sqrt{2}$ (N)

- Câu 93.** Khi máy bay nghiêng cánh một góc α , lực \vec{F} của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng \vec{F}_1 và lực cản \vec{F}_2 (Hình 16). Cho biết $\alpha = 30^\circ$ và $|\vec{F}| = a$. Tính $|\vec{F}_1|$ và $|\vec{F}_2|$ theo a .



Kí hiệu các điểm như hình dưới

Lời giải



Khi đó các lực $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ lần lượt là $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ $\alpha = \widehat{BAX} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} = 60^\circ$

$$AB = AC \cdot \cos \widehat{CAB} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_2| = |AB| = \frac{a}{2} AD = BC = AC \cdot \sin \widehat{CAB} = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_1| = |AD| = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

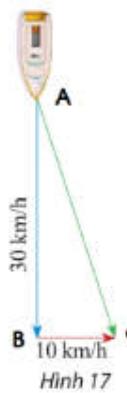
$$\text{Vậy } |\vec{F}_1| = \frac{a\sqrt{3}}{2}; |\vec{F}_2| = \frac{a}{2}$$

- Câu 94.** Một con tàu có vectơ vận tốc chỉ theo hướng nam, vận tốc của dòng nước là một vectơ theo hướng đông như hình 17. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



Lời giải

Gọi vectơ vận tốc của tàu là \overrightarrow{AB} , vectơ vận tốc của dòng nước là vectơ \overrightarrow{BC}



Hình 17

Ta có vectơ tổng là $\vec{F} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Độ dài vectơ tổng là

$$|\vec{F}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{30^2 + 10^2} = 10\sqrt{10} (\text{km/h})$$

Vậy độ dài vectơ tổng là $10\sqrt{10} (\text{km/h})$.

- Câu 95.** Một máy bay có vectơ vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vectơ theo hướng đông như Hình 7. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



Hình 7

Lời giải

Gọi \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BC} lần lượt là vectơ vận tốc của máy bay và vận tốc của gió. Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

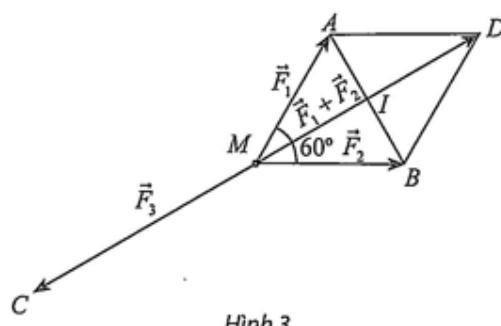
$$\text{Suy ra } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{200^2 + 60^2} \approx 209 (\text{km/h}).$$

Vậy độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên là khoảng 209 km/h .

- Câu 96.** Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết độ lớn của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều là 100 N và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực \vec{F}_3 .

Lời giải

$$M \text{ đứng yên} \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2).$$



Hình 3

Ta cần tính $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

$$\text{Cường độ } \vec{F}_1 \text{ và } \vec{F}_2 \text{ đều là } 100 \text{ N} \Rightarrow |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 100.$$

Dựng hình bình hành $MADB$.

Gọi I là giao điểm của AB và MD , khi đó I là trung điểm của AB và MD .

Mặt khác $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên tam giác ABM đều.

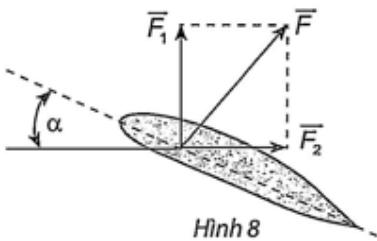
Khi đó $MI \perp AB \Rightarrow \Delta AIM$ vuông tại I .

$$\Rightarrow MI = AM \sin \widehat{MAI} = 100 \cdot \sin 60^\circ = 50\sqrt{3} \Rightarrow MD = 2MI = 2.50\sqrt{3} = 100\sqrt{3}.$$

$$\text{Mà } \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = -\overrightarrow{MD}.$$

Do đó \vec{F}_3 có hướng ngược với hướng của \overrightarrow{MD} và có độ lớn $|\vec{F}_3| = |\overrightarrow{MD}| = 100\sqrt{3}$.

- Câu 97.** Khi máy bay nghiêng cánh một góc α , lực \vec{F} của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng \vec{F}_1 và lực cản \vec{F}_2 (Hình 8). Cho biết $\alpha = 45^\circ$ và $|\vec{F}| = a$. Tính $|\vec{F}_1|$ và $|\vec{F}_2|$ theo a .



Lời giải

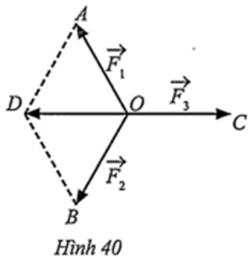
$$\text{Ta có } \cos 45^\circ = \frac{|\vec{F}_2|}{a} \Rightarrow |\vec{F}_2| = |\vec{F}| \cdot \cos 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin 45^\circ = \frac{|\vec{F}_1|}{a} \Rightarrow |\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

- Câu 98.** Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{OC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm O và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều là 120 N và $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Xác định cường độ và hướng của lực \vec{F}_3 .

Lời giải

Dụng hình bình hành $OADB$ (Hình 40), ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$. Vì vật đứng yên nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$, tức là $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.



Suy ra $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ hay O là trung điểm của CD . Như vậy \overrightarrow{OD} ngược hướng với \overrightarrow{OC} hay hướng của lực \vec{F}_3 ngược hướng với tổng hợp hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 .

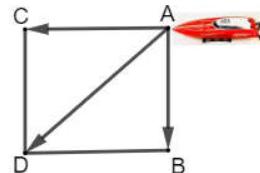
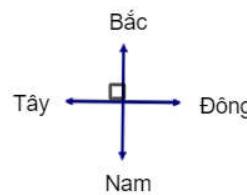
Hình bình hành $OADB$ có $OA = OB$ nên là hình thoi.

Suy ra $\widehat{AOD} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 60^\circ$ nên tam giác OAD là tam giác đều, do đó $OD = OA$.

Vậy ta có $OC = OA$ và cường độ của lực \vec{F}_3 bằng cường độ của lực \vec{F}_1 và bằng 120 N .

- Câu 99.** Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là 10 km/h . Một chiếc ca nô chuyền động từ phía đông sang phía tây với vận tốc 40 km/h so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

Lời giải



Ca nô chuyển từ đông sang tây, giả sử ca nô đi theo hướng A sang C , khi đó vận tốc so với mặt nước của ca nô được biểu thị bởi $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AC}$ và có độ lớn $|\vec{v}_1| = 40 \text{ km/h}$, vận tốc dòng chảy được biểu thị bởi $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AB}$ và có độ lớn $|\vec{v}_2| = 10 \text{ km/h}$.

Khi đó vận tốc của ca nô so với bờ sông được biểu thị bởi $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Ta cần tính độ lớn của vectơ \vec{v} , hay chính là $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$

Dựng hình bình hành $ACDB$ như hình vẽ.

Do hướng nam bắc vuông góc với hướng đông tây nên AB và AC vuông góc với nhau.

Suy ra $ACDB$ là hình chữ nhật.

Nên $AB = CD = 10, AC = BD = 40$.

Sử dụng định lí Pythagore trong tam giác vuông ACD , ta có:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 40^2 + 10^2 = 1700 \Rightarrow AD = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$$

Lại có do $ACDB$ là hình bình hành nên: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ Do đó: $\vec{v} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\vec{v}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 10\sqrt{17}$

Vậy vận tốc của ca nô so với bờ sông là $10\sqrt{17} \text{ km/h}$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Cho ba điểm M, N, P . Vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$ bằng vectơ nào sau đây?

- A. \overrightarrow{PN} ;
- B. \overrightarrow{PM}
- C. \overrightarrow{MP} ;
- D. \overrightarrow{NM} .

Lời giải

Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$. Chọn C

Câu 2. Cho ba điểm D, E, G . Vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG})$ bằng vectơ nào sau đây?

- A. \overrightarrow{EG}
- B. \overrightarrow{GE} ;
- C. \overrightarrow{GD} ;
- D. \overrightarrow{ED} .

Lời giải

Ta có $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG}) = \vec{v} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GE}$. Chọn B

Câu 3. Cho ba điểm M, N, P phân biệt. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
- B. $-\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

- C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.
- D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$.
- B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
- C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$.
- D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 5. Cho các điểm A, B, O . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.
- B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
- C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
- D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 6. Cho ba điểm A, B, M phân biệt. Điều kiện cần và đủ để M là trung điểm của đoạn thẳng AB là:

- A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.
- B. $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$.
- C. $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng.
- D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 7. Cho tam giác ABC . Điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm của tam giác ABC là:

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.
- B. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$.
- C. $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB}$.
- D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B

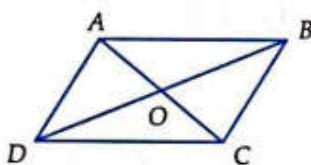
BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 8. Cho hình bình hành tâm O . Kết quả nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$
- B. $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$
- C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
- D. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB}$

Lời giải

Đáp án B



$$\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

Câu 9. Cho ba vectơ \vec{a} , \vec{b} và \vec{c} khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- B. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- C. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
- D. $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

- Câu 10.** Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ tổng $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ bằng
A. \overrightarrow{CA} . **B.** \overrightarrow{BD} . **C.** \overrightarrow{AC} . **D.** \overrightarrow{DB} .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}.$$

- Câu 11.** Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$.
C. $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$. **D.** $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.$$

- Câu 12.** Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ bằng

- A.** $\vec{0}$. **B.** \overrightarrow{AC} . **C.** \overrightarrow{BD} . **D.** \overrightarrow{BA} .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

- Câu 13.** Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Vectơ tổng $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$ bằng

- A.** \overrightarrow{BP} . **B.** \overrightarrow{MN} . **C.** \overrightarrow{CP} . **D.** \overrightarrow{PA} .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BP}.$$

- Câu 14.** Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.** $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.
C. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IB}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB}.$$

- Câu 15.** Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.** $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DI}$.
C. $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$. **D.** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IA}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI}.$$

- Câu 16. Cho các điểm phân biệt M, N, P, Q, R . Xác định vecto tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

A. \overrightarrow{MP} .

B. \overrightarrow{MN} .

C. \overrightarrow{MQ} .

D. \overrightarrow{MR} .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{MP}.$$

- Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$.

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$.

D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$.

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

- Câu 18. Cho tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PM}.$$

- Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$, tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$.

B. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CA}$.

C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$.

D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}.$$

- Câu 20. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?.

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$.

C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA}.$$

- Câu 21. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$.

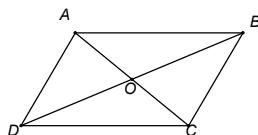
B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.

C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B



Xét các đáp án:

- Đáp án A. Ta có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Vậy A đúng.
- Đáp án B. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$. Vậy B sai.
- Đáp án C. Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. Vậy C đúng.
- Đáp án D. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$. Vậy D đúng

Câu 22. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

- A. \overrightarrow{BC} . B. \overrightarrow{DA} . C. $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$. D. \overrightarrow{AB} .

Lời giải

Chọn B

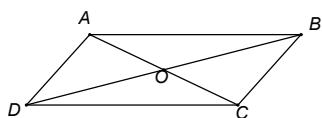
$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}.$$

Câu 23. Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$ bằng vectơ nào?

- A. \overrightarrow{BA} . B. \overrightarrow{BC} . C. \overrightarrow{DC} . D. \overrightarrow{AC} .

Lời giải

Chọn B



$$\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Câu 24. Chọn khẳng định sai:

- A. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- B. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}$.
- C. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- D. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA} \neq \vec{0}.$$

Câu 25. Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây là đúng:

- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$. B. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
- C. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Câu 26. Chỉ ra vecto tổng $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RN} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QR}$ trong các vecto sau

- A. \overrightarrow{MR} . B. \overrightarrow{MQ} . C. \overrightarrow{MP} . D. \overrightarrow{MN} .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}.$$

Câu 27. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$. B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$.
 C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}. (\text{đúng}).$$

Câu 28. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vecto $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$ là:

- A. $\vec{u} = \vec{0}$. B. $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. C. $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$. D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn D

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Câu 29. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vecto $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$ bằng:

- A. $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. B. $\vec{u} = \vec{0}$. C. $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$. D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}.$$

Câu 30. Cho 4 điểm A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Câu 31. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}.$$

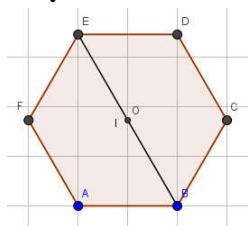
Do $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CO}$ đối nhau, $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DO}$ đối nhau.

Câu 32. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là **đẳng thức sai**?

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EO} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.
 C. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OC}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{AO} \neq \vec{0}$.

Câu 33. Cho 4 điểm A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}.$$

Câu 34. Cho ΔABC , vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành ABEF, ACPQ, BCMN. Xét các mệnh đề:

$$(I) \quad \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}$$

$$(II) \quad \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{MN}$$

$$(III) \quad \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MC}$$

Mệnh đề đúng là :

- A. Chỉ (I). B. Chỉ (III). C. (I) và (II). D. Chỉ (II).

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}.$$

Câu 35. Cho 5 điểm phân biệt M, N, P, Q, R . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP}$. B. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
 C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$. D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Chọn

D.

Ta có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}$.

Câu 36. Cho hình bình hành $ABCD$, đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
 C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn#A.

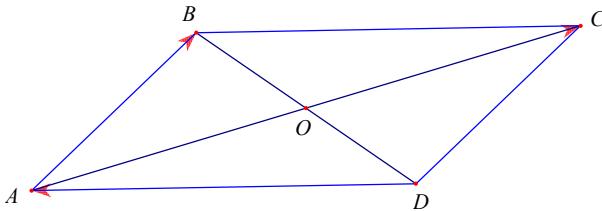
Đẳng thức vectơ $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$ đúng theo quy tắc cộng hình bình hành.

Câu 37. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Khẳng định nào sau đây là đúng:

- A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$. B. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$.
 C. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Do ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ nên $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$.

Câu 38. Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$.
 C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA} \text{ nên A sai}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{CO} \text{ nên B đúng.}$$

Câu 39. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}.$$

Câu 40. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ bằng

- A. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$. B. \overrightarrow{AB} . C. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$. D. \overrightarrow{CD} .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}.$$

Câu 41. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$.
 B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
 D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0} \end{aligned}$$

Câu 42. Cho hình bình hành ABCD, gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn BC và AD. Tính tổng $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC}$.

A. \overrightarrow{AC} .B. \overrightarrow{NM} .C. \overrightarrow{CA} .D. \overrightarrow{MN} .**Lời giải****Chọn A**

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}.$$

Câu 43. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Tổng véc tơ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ bằngA. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DB}$.B. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DF}$.C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$.D. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF}$.**Lời giải****Chọn C**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}.$$

Câu 44. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây sai?A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$.B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$.C. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC}$.D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$.**Lời giải****Chọn A**

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$ (vô lý).

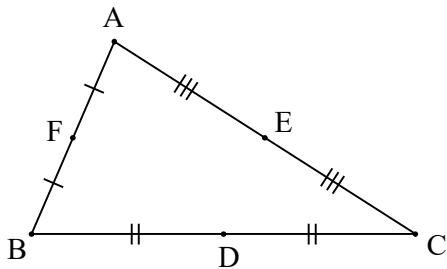
Câu 45. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây đúng?A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$.C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$.D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.**Lời giải****Chọn D**

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Câu 46. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt AM tại N . Chọn mệnh đề đúng:A. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.B. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.C. $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} = \vec{0}$.D. $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{EF}$.**Lời giải****Chọn A**

Trong tam giác BCE có MF là đường trung bình nên $MF // BE \Rightarrow MF // NE$
 N là trung điểm của AM nên $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

Câu 47. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Hết thúc nào là đúng?A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$.B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.D. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.**Lời giải**



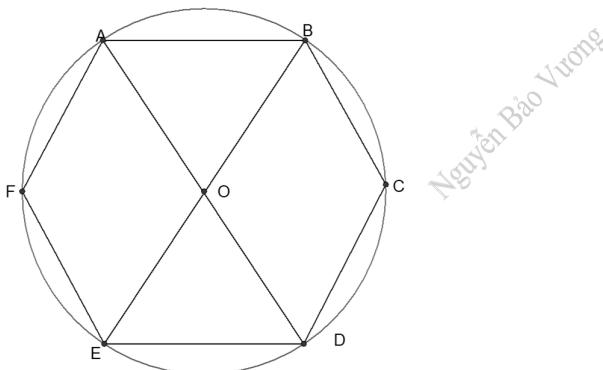
Chọn A

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } & \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} \\
 & = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} \\
 & = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FF} \\
 & = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \vec{0} \\
 & = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}.
 \end{aligned}$$

Câu 48. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = 6|\overrightarrow{AB}|$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Lời giải



Chọn A

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.$$

Câu 49. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm BC , G_1 là điểm đối xứng của G qua M . Vectơ tổng $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}$ bằng

- A. \overrightarrow{GA} . B. \overrightarrow{BC} . C. $\overrightarrow{G_1A}$. D. $\overrightarrow{G_1M}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \overrightarrow{G_1G} = \overrightarrow{GA}.$$

Câu 50. Xét tam giác ABC có trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

- 1) $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$;
- 2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân;
- 3) Tam giác ABC là tam giác đều;

4) Tam giác ABC là tam giác cân.

A. 3 .

B. 1 .

C. 2 .

D. 4 .

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} = \vec{0} \Rightarrow O \equiv G$. Do đó tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 51. Xét tam giác ABC nội tiếp có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$;

2) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HA}$;

3) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$, với H_1 là điểm đối xứng của H qua O ;

4) Nếu $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

A. 3 .

B. 1 .

C. 2 .

D. 4 .

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD} \Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$.

Nếu $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ thì $\overrightarrow{HH_1} = \vec{0}$, suy ra $H \equiv O$.

Câu 52. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Tìm đẳng thức sai:

A. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$ B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NC}$ D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DB}$

Lời giải

+ Tứ giác $AMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow A$ đúng.

+ $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \Rightarrow B$ đúng.

+ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NC} \Rightarrow C$ đúng.

Đáp án

D.

Câu 53. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F bất kì trên mặt phẳng. Tìm đẳng thức sai trong các đẳng thức sau:

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF}$ D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Lời giải

Đáp án D

Ta có:

$$(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow B \equiv A. Vì A, B bất kì \Rightarrow D sai.$$

Câu 54. Cho ΔABC , các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Với O là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$

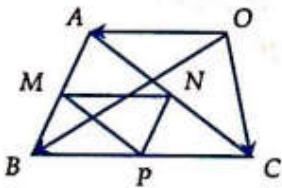
B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

C. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

D. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$

Lời giải

Đáp án B



$$\begin{aligned}
 VT &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC} \text{ Mà } \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} \\
 \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Rightarrow VT = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}
 \end{aligned}$$

Câu 55. Cho 4 điểm M, N, P, Q bất kì. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng.

- A. $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN}$ B. $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$
 C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$ D. $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$

Lời giải

Đáp án B

Ta có:

$$\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ} + (\overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{QN}) = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ} = VP$$

Câu 56. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F phân biệt. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BF} = \vec{0}$
 C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$ D. $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF}$

Lời giải

+ Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \Rightarrow A$ đúng.

+ $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow B$ đúng.

+ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AF}$
 $\Rightarrow C$ đúng.

+ $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow F \equiv C$ (mâu thuẫn giả thiết)
 $\Rightarrow D$ sai.

Đáp án **D.**

Câu 57. Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là A_1, A_2, \dots, A_n . Bạn Bình kí hiệu chúng là B_1, B_2, \dots, B_n ($A_1 \neq B_n$). Vectơ tổng $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n}$ bằng

- A. $\vec{0}$. B. $\overrightarrow{A_1A_n}$. C. $\overrightarrow{B_1B_n}$. D. $\overrightarrow{A_1B_n}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy điểm O bất kì. Khi đó

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n} = (\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{A_2O} + \dots + \overrightarrow{A_nO}) + (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_n})$$

Vì $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ nên

$$\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n} = (\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_2}) + \dots + (\overrightarrow{A_nO} + \overrightarrow{OA_n}) = \vec{0}.$$

Câu 58. Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

- A. M ở vị trí bất kì
- B. M là trung điểm của AB
- C. Không tìm được M
- D. M nằm trên đường trung trực của AB

Lời giải**Đáp án B**

- Câu 59.** Cho đoạn thẳng AB , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. M là trung điểm AB .
 - B. M trùng A .
 - C. M trùng B .
 - D. A là trung điểm MB .

Lời giải**Chọn D**

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow A \text{ là trung điểm } MB.$$

- Câu 60.** Cho ΔABC , B . Tìm điểm I để \overrightarrow{IA} và \overrightarrow{CB} cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. I là trung điểm AB .
 - B. I thuộc đường trung trực của AB .
 - C. Không có điểm I .
 - D. Có vô số điểm I .

Lời giải**Chọn D**

\overrightarrow{IA} và \overrightarrow{CB} cùng phương nên $AI \parallel CB$. Suy ra có vô số điểm I .

- Câu 61.** Cho 2 điểm phân biệt A , B . Tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. M là trung điểm AB .
 - B. M thuộc đường trung trực của AB .
 - C. Không có điểm M .
 - D. Có vô số điểm M .

Lời giải**Chọn C**

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{O} \text{ (vô lý).}$$

- Câu 62.** Cho tam giác ABC , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. M là trung điểm AB .
 - B. M là trọng tâm ΔABC .
 - C. M trùng B .
 - D. A là trung điểm MB .

Lời giải**Chọn B**

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$ nên M là trọng tâm ΔABC .

- Câu 63.** Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. M trùng D .
 - B. M trùng A .
 - C. M trùng B .
 - D. M trùng C .

Lời giải**Chọn D**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

- Câu 64.** Cho $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. M trùng D .
 - B. M trùng A .

- C. M trùng B . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

- Câu 65.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng O . B. M trùng A .
C. M trùng B . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC} \text{ suy ra } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} (\text{ } O \text{ là trung điểm } AC) \text{ nên } M \text{ trùng } O.$$

- Câu 66.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng D . B. M trùng A .
C. M trùng B . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}, \text{ suy ra } M \text{ trùng } D.$$

- Câu 67.** Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng O . B. M trùng A .
C. M trùng B . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}.$$

- Câu 68.** Cho tứ giác $PQRN$ có O là giao điểm 2 đường chéo, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{ON}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng P . B. M trùng Q .
C. M trùng O . D. M trùng R .

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO}.$$

- Câu 69.** Cho ΔABC , tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm AB . B. M là trung điểm BC .
C. M là trung điểm CA . D. M là trọng tâm ΔABC .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra M là trọng tâm ΔABC .

Câu 70. Cho ΔDEF , tìm M thỏa $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ED}$. B. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}$. C. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DF}$. D. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}.$$

Suy ra M là điểm cuối của vec tơ có điểm đầu là F sao cho $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}$.

Câu 71. Cho ΔDEF , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF}$. B. $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EM}$. C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EM}$. D. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}.$$

Suy ra $DEFM$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF}$.

Câu 72. Cho ΔABC có O là trung điểm BC , tìm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng A . B. M trùng B .
C. M trùng O . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra M trùng C .

Câu 73. Cho ΔABC , tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm AB . B. M là trung điểm BC .
C. M là trung điểm CA . D. M là trọng tâm ΔABC .

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra M là trung điểm AC .

Câu 74. Cho ΔABC , điểm M thỏa $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng A . B. M trùng B .
C. $ACMB$ là hình bình hành. D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$$

Suy ra M là điểm thỏa $ACBM$ là hình bình hành. Nên $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$.

Câu 75. Cho ΔABC , D là trung điểm AB , E là trung điểm BC , điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CM}$. B. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ED}$.

C. M là trung điểm BC .

D. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra M là trung điểm AC . Suy ra $BEMD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$.

Câu 76. Cho tứ giác $ABCD$, điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB .

B. M là trung điểm BC .

C. D là trung điểm BM .

D. M là trung điểm DC .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BD}.$$

Câu 77. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm N thỏa mãn:

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.$$

A. Điểm N là trung điểm cạnh AB

B. Điểm C là trung điểm cạnh BN

C. Điểm C là trung điểm cạnh AM

D. Điểm B là trung điểm cạnh NC

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{ND} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DN}$$

$\Rightarrow ACND$ là hình bình hành $\Rightarrow C$ là trung điểm cạnh BN .

Đáp án B.

Câu 78. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$.

A. Điểm M là trung điểm cạnh AC

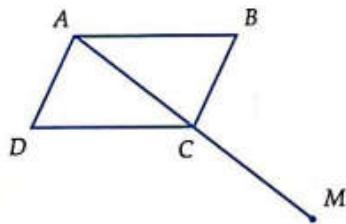
B. Điểm M là trung điểm cạnh BD

C. Điểm C là trung điểm cạnh AM

D. Điểm B là trung điểm cạnh MC

Lời giải

Đáp án C



$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

Vậy C là trung điểm của AM

- Câu 79.** Trên đường tròn $C(O; R)$ lấy điểm cố định A ; B là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi M là điểm di động sao cho $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Khi đó tập hợp điểm M là:
- A. đường tròn tâm O bán kính $2R$.
 - B. đường tròn tâm A bán kính R
 - C. đường thẳng song song với OA
 - D. đường tròn tâm C bán kính $R\sqrt{3}$

Lời giải

Từ giả thiết $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow O, A, M, B$ theo thứ tự là các đỉnh của hình bình hành. Do $AM = OB = R \Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm A bán kính R .

Đáp án B.

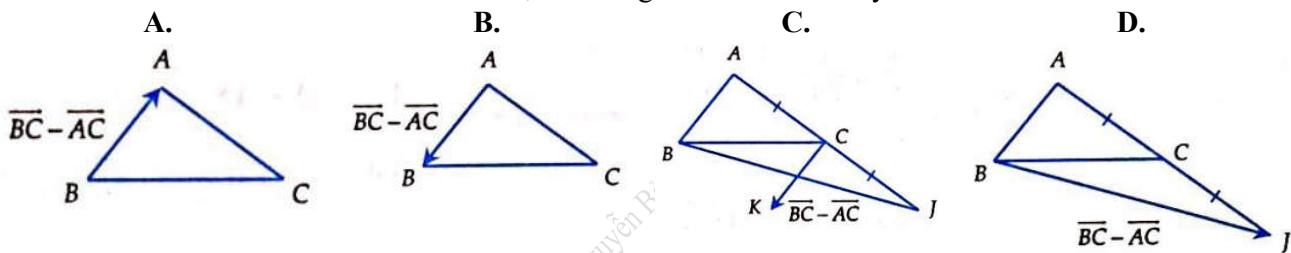
- Câu 80.** Cho ΔABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}|$ là:
- A. một đường tròn tâm C
 - B. đường tròn tâm I (I là trung điểm của AB)
 - C. một đường thẳng song song với AB
 - D. là đường thẳng trung trực của BC

Lời giải**Đáp án A**

$$|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{MC}|$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm C bán kính AB .

- Câu 81.** Cho ΔABC . Vectơ $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?

**Lời giải**

$$\text{Vì } \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

Đáp án A.

- Câu 82.** Cho tam giác ΔABC vuông tại A có $AB = 3cm$, $BC = 5cm$. Khi đó độ dài $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ là:

- A. 4
- B. 8
- C. $2\sqrt{13}$
- D. $\sqrt{13}$

Lời giải

Ta có:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4 \Rightarrow AI = 2; |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{BI}| = 2\sqrt{AB^2 + AI^2} = 2\sqrt{13}.$$

Đáp án C.

- Câu 83.** Cho hình thang cân $ABCD$, có đáy nhỏ và đường cao cùng bằng $2a$ và $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Tính $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}|$.

- A. $a\sqrt{3}$
- B. $2a\sqrt{5}$
- C. $a\sqrt{5}$
- D. $a\sqrt{2}$

Lời giải

$$|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{BH^2 + DH^2} = 2a\sqrt{5}$$

Đáp án B.

- Câu 84.** Cho 2 vectơ \vec{a} và \vec{b} tạo với nhau góc 60° . Biết $|\vec{a}| = 6$; $|\vec{b}| = 3$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$

- A. $3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$ B. $3(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ C. $6(\sqrt{5} + 3)$ D. $\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{51})$

Lời giải

Dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}; \overrightarrow{OB} = \vec{b}$

Dựng hình bình hành $OACB \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}; \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$

$$\Rightarrow \Delta OAB \text{ vuông tại } B \Rightarrow IB = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$OI = \sqrt{OB^2 + IB^2} = \frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow OC = \sqrt{63} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{63} + 3\sqrt{3}.$$

Đáp án B.

- Câu 85. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD . Cho $AB = 2a$, $CD = a$. Gọi O là trung điểm của AD . Khi đó:

- A. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$ B. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$ C. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{3a}{2}$ D. $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 0$

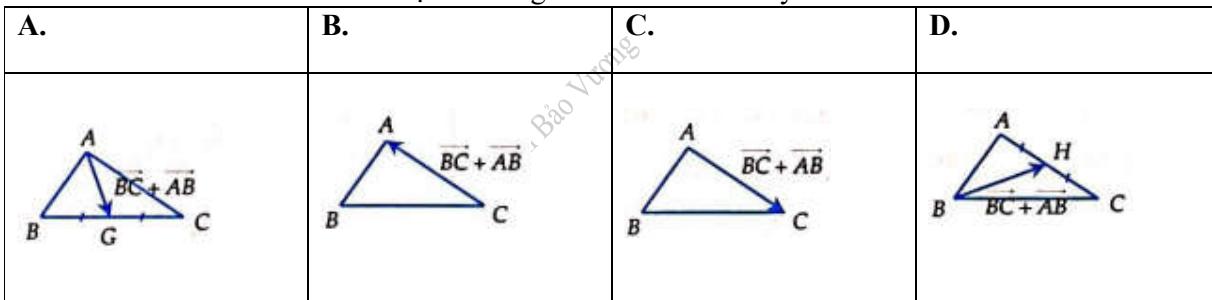
Lời giải

$$|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}| = 3a$$

(vì \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{DC} cùng hướng)

Đáp án A.

- Câu 86. Cho ΔABC . Vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$ được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?



Lời giải

Đáp án C

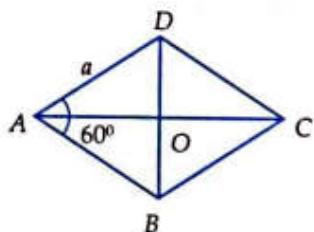
Vì theo quy tắc 3 điểm $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

- Câu 87. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và cạnh là a . Tính độ dài $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

- A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $a\sqrt{2}$ D. $2a$

Lời giải

Đáp án A



Gọi O là giao của 2 đường chéo $\Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = 2AD = a\sqrt{3}$

Câu 88. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a . O là giao điểm của hai đường chéo. Tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$.

A. $a\sqrt{3}$

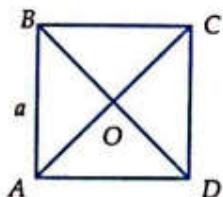
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

D. $a\sqrt{2}$

Lời giải

Đáp án C



$$|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{OD}| = \frac{|BD|}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Câu 89. Với $\forall \vec{a}, \vec{b}$ độ dài $|\vec{a} + \vec{b}|$:

A. Bao giờ cũng lớn hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

B. Không nhỏ hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

C. Bao giờ cũng nhỏ hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

D. Không lớn hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

Lời giải

Đáp án D

Theo quy tắc 3 điểm độ dài vectơ tổng bao giờ cũng nhỏ hơn hoặc bằng tổng độ dài 2 vectơ thành phần.

Câu 90. Cho ΔABC đều cạnh a . Khi đó $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}|$ bằng:

A. 0

B. $3a$

C. a

D. $a(\sqrt{3}-1)$

Lời giải

Đáp án A

$$|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AA}| = 0$$

Câu 91. Cho tam giác ABC đều cạnh a , trọng tâm G . Tính độ dài vectơ $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$.

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$

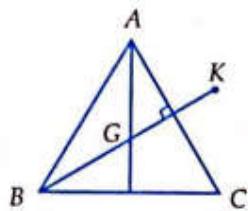
B. $\frac{a}{3}$

C. $\frac{2a}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Đáp án A



Gọi K là điểm đối xứng với G qua AC thì $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{GC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$

$$= |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AK}| = |\overrightarrow{KB}| = 2BG = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 92. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là 3. Tính độ dài $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$:

A. 6

B. $6\sqrt{2}$

C. 12

D. 0

Lời giải

Đáp án A

$$|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = |2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OD}| = 2|\overrightarrow{AD}| = 6$$

Câu 93. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O và M là trung điểm AB . Tính độ dài $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$.

A. a

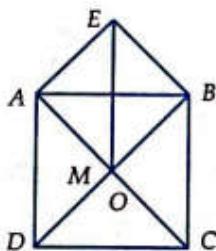
B. $3a$

C. $\frac{a}{2}$

D. $2a$

Lời giải

Đáp án A



$$\text{Ta có: } AC = a\sqrt{2} \text{ và } OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{a}{2}. \text{ Gọi } E \text{ là điểm sao cho } OBEA \text{ là hình bình hành} \Rightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}| = AB = a$$

Câu 94. Cho ΔABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$, M là trung điểm BC . Tính độ dài vectơ $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}|$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

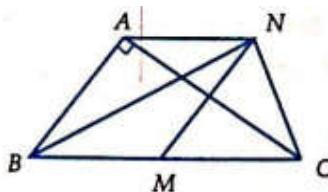
B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Lời giải

Đáp án D



$$\text{Dụng hình bình hành } ABMN \Rightarrow |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{BN}| = BN$$

$$\text{Ta có: } NC = AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BN = \sqrt{BC^2 + NC^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

Câu 95. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 3. H là trung điểm của BC . Tìm mệnh đề sai.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{3}$

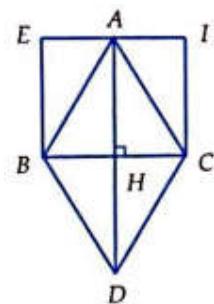
B. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}| = \frac{\sqrt{63}}{2}$

C. $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = 3$

D. $|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}| = \sqrt{3}$

Lời giải

Đáp án D



$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 3\sqrt{3} \Rightarrow A \text{ đúng.}$$

$$|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{HE}| = |\overrightarrow{AB}| = 3 \Rightarrow B \text{ đúng.}$$

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}| = |\overrightarrow{BI}| = \frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow C \text{ đúng.}$$

$$|\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{BA}| = 3 \Rightarrow D \text{ sai.}$$

Câu 96. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Độ dài $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$ bằng

A. $2a$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Theo quy tắc đường chéo hình bình hành, ta có

$$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

Câu 97. Cho tam giác đều ABC cạnh a , mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|\overrightarrow{AC}| = \overrightarrow{BC}$.

B. $|\overrightarrow{AC}| = a$.

C. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$.

D. $|\overrightarrow{AB}| = a$.

Lời giải

Chọn D.

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = a.$$

Câu 98. Cho \overrightarrow{AB} khác $\vec{0}$ và cho điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

A. Vô số.

B. 1 điểm.

C. 2 điểm.

D. Không có điểm nào.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow AB = CD$.

Suy ra tập hợp các điểm D là đường tròn tâm C bán kính AB .

Câu 99. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ.

B. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.

C. $|\overrightarrow{AA}| = \vec{0}$.

D. $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Lời giải

Chọn D.

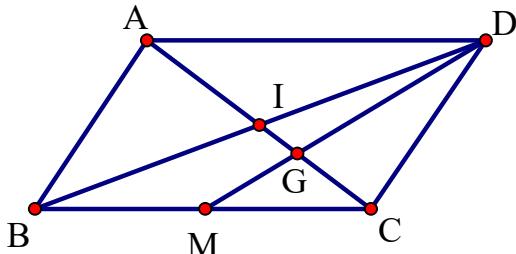
Mệnh đề $|\overrightarrow{AB}| > 0$ là mệnh đề **sai**, vì khi $A \equiv B$ thì $|\overrightarrow{AB}| = 0$.

Câu 100. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I ; G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.
 C. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$. D. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$ (vô lý) \rightarrow A sai.

G là trọng tâm tam giác BCD ; A là một điểm nằm ngoài tam giác BCD \rightarrow đẳng thức ở đáp án B đúng.

Ta có $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}|$ và $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}|$. Mà $|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{BD}|$ \rightarrow đáp án C đúng.

Ta có \overrightarrow{IA} và \overrightarrow{IC} đối nhau, có độ dài bằng nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$; tương tự $\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ \rightarrow đáp án D là đúng.

Câu 101. Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB = 5$, H là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$.

- A. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. B. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 5$.
 C. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$. D. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

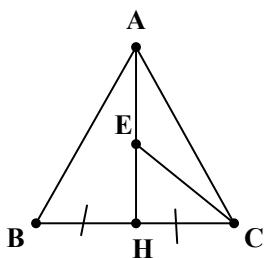
Lời giải

Chọn D.

Gọi M là điểm sao cho $CHMA$ là hình bình hành.

Ta có: $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}| = |\overrightarrow{CM}| = CM = 2CE$ (E là tâm của hình bình hành $CHMA$).

Ta lại có: $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ (ΔABC đều, AH là đường cao).



Trong tam giác HEC vuông tại H , có:

$$EC = \sqrt{CH^2 + HE^2} = \sqrt{2.5^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \Rightarrow |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 2CE = \frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

Câu 102. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. D. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

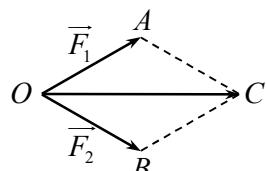
Lời giải

Chọn C.

Ta có O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$.

Câu 103. Có hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

- A. 100 (N). B. $50\sqrt{3}$ (N).
 C. $100\sqrt{3}$ (N). D. Đáp án khác.

Lời giải**Chọn B.**

Giả sử $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$.

Theo quy tắc hình bình hành, suy ra $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{OC}$, như hình vẽ.

Ta có $\widehat{AOB} = 60^\circ$, $OA = OB = 50$, nên tam giác OAB đều, suy ra $OC = 50\sqrt{3}$.

Vậy $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\overrightarrow{OC}| = 50\sqrt{3}$ (N).

Câu 104. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. B. $ABCD$ là hình thoi.
 C. $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$. D. $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải**Chọn D.**

Tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành (1), nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

Mà $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $ABCD$ là hình thoi nên $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Câu 105. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

- A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$. B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
 C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$. D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$.

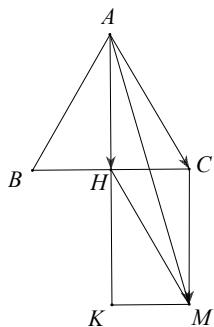
Lời giải**Chọn A.**

Gọi D là điểm thỏa $ABDC$ là hình bình hành. Tam giác ABC vuông cân tại A suy ra $ABDC$ là hình vuông. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 2AM = BC = a\sqrt{2}$.

Câu 106. Cho tam giác ABC đều cạnh a , có AH là đường trung tuyến. Tính $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}|$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $2a$. C. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải**Chọn C.**



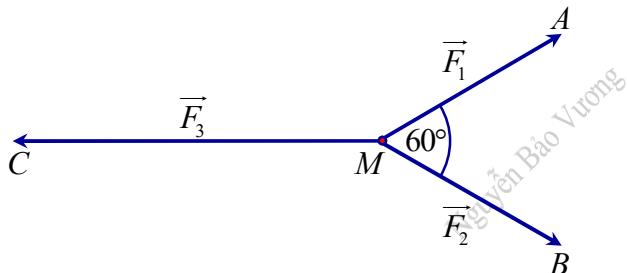
Dụng $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AH}$ $\Rightarrow AHMC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}| = AM$.

Gọi K đối xứng với A qua $BC \Rightarrow \Delta AKM$ vuông tại K .

$$AK = 2AH = a\sqrt{3}; KM = CH = \frac{a}{2}.$$

$$AM = \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Câu 107. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của \vec{F}_3 là

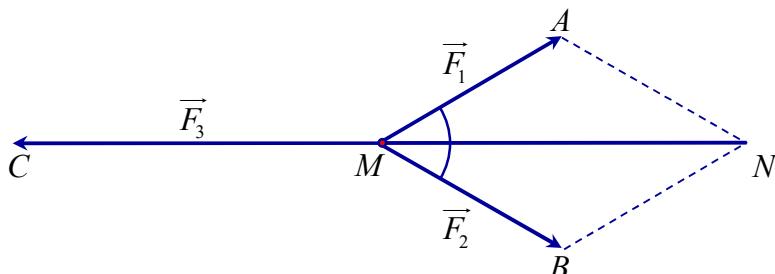


- A. $25\sqrt{3} N$. B. $50\sqrt{3} N$. C. $50\sqrt{2} N$. D. $100\sqrt{3} N$.

Lời giải

Chọn A.

Vật đứng yên nên ba lực đã cho cân bằng. Ta được $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$.



Dụng hình bình hành $AMBN$. Ta có $-\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MN}$.

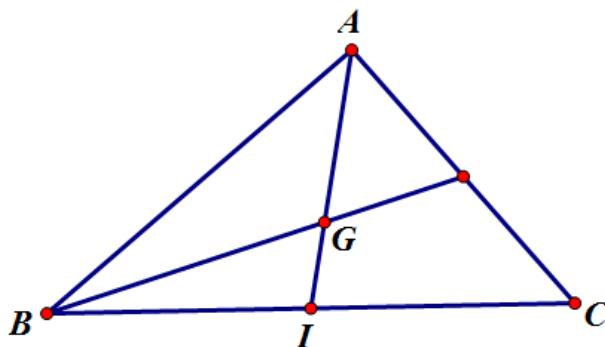
$$\text{Suy ra } |\vec{F}_3| = |-\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{2\sqrt{3}MA}{2} = 25\sqrt{3}.$$

Câu 108. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Tìm khẳng định sai.

- A. $|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}| = IA$. B. $|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}| = BC$.
 C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2AI$. D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3GA$.

Lời giải

Chọn B.



$|\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA}| = |\vec{0} + \vec{IA}| = |\vec{IA}| = IA$ (Do I là trung điểm BC) nên khẳng định ở A đúng.

$|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = 2AI$ (Gọi D là điểm thỏa ABDC là hình bình hành, I là trung điểm BC) nên khẳng định ở C đúng.

$|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2AI = 3GA$ (Do G là trọng tâm tam giác ABC) nên khẳng định ở D đúng.

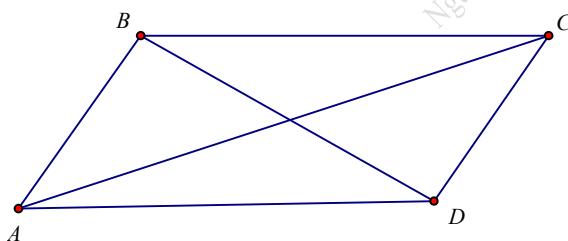
$|\vec{IB} + \vec{IC}| = |\vec{0}| = 0$ (Do I là trung điểm BC) nên khẳng định ở B sai.

Câu 109. Cho hình bình hành ABCD. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A. $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$.
- B. $|\vec{BC}| = |\vec{DA}|$.
- C. $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$.
- D. $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$.

Lời giải

Chọn A.



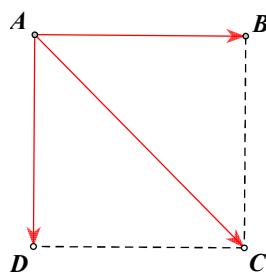
Ta có $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ là đẳng thức sai vì độ dài hai đường chéo của hình bình hành không bằng nhau.

Câu 110. Cho hình vuông ABCD cạnh $2a$. Tính $|\vec{AB} + \vec{AD}|$.

- A. $4a\sqrt{2}$.
- B. $4a$.
- C. $2a\sqrt{2}$.
- D. $2a$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}| = AC = 2a\sqrt{2}$.

Câu 111. Cho tam giác ABC đều, cạnh $2a$, trọng tâm G . Độ dài vecto $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}$ là

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{GB} - (-\overrightarrow{GB})$ vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Khi đó $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{GE}| = 2GB = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$ (E đối xứng với G qua M).

Câu 112. Tam giác ABC thỏa mãn: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ thì tam giác ABC là

- A. Tam giác vuông A . B. Tam giác vuông C .
C. Tam giác vuông B . D. Tam giác cân tại C .

Lời giải

Chọn A.

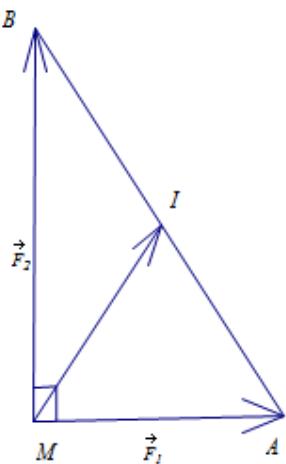
Gọi E là trung điểm BC , M là điểm thỏa $ABCM$ là hình bình hành. Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow AE = \frac{1}{2}BC$. Trung tuyến kẻ từ A bằng một nửa cạnh BC nên tam giác ABC vuông tại A .

Câu 113. Cho hai lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 lần lượt là $300(\text{N})$ và $400(\text{N})$. $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tính cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A. $0(\text{N})$. B. $700(\text{N})$. C. $100(\text{N})$. D. $500(\text{N})$.

Lời giải

Chọn D.



Cường độ lực tổng hợp của $|\vec{F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MI}| = AB$ (I là trung điểm của AB).

Ta có $AB = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 500$ suy ra $|\vec{F}| = 500(\text{N})$.