

## BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

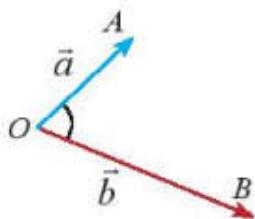
#### 1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ .

Góc  $\widehat{AOB}$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là **góc giữa hai vectơ**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

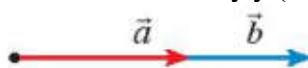
Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .



**Chú ý:**

- Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $0^\circ$ .
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $180^\circ$ .
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  hoặc  $\vec{b}$  là vectơ  $\vec{0}$  thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tuỳ ý (từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ ).



$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$$



$$(\vec{c}, \vec{d}) = 180^\circ$$

#### 2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$

**Tích vô hướng** của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})}$$

**Chú ý:**

- Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $\vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , ta có  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  thì tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ  $\vec{a}$ .

Ta có  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ . Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

#### 3. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$ , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ ;

#### 4. Một số ứng dụng

### Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm  $A, B$  phân biệt, ta có:  $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$ .

Do đó độ dài đoạn thẳng  $AB$  được tính như sau:  $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$ .

### Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vecto bất kì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vecto  $\vec{0}$ . Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .

Hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ .

Cũng như vậy, hai đường thẳng  $a$  và  $b$  vuông góc khi và chỉ khi  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , trong đó  $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , giá của vecto  $\vec{u}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $a$  và giá của vecto  $\vec{v}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $b$ .

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### Dạng 1. Tích tích vô hướng của hai vecto; góc của hai vecto

Phương pháp:

Tích vô hướng của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

Với hai vecto khác vecto  $\vec{0}$ , sử dụng công thức  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $\hat{B} = 30^\circ$ .

Tính  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ .

**Câu 2.** Tính  $(\vec{a}, \vec{b})$  biết rằng  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$ .

**Câu 3.** Cho hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thoả mãn  $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 8$  và  $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$ .

a) Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ .

b) Tính số đo của góc giữa hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$ .

**Câu 4.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các góc:

a)  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB})$

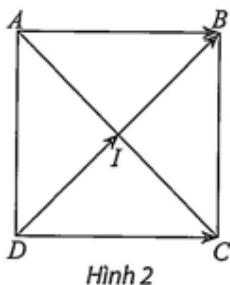
b)  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI})$

c)  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB})$

d)  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC})$

**Câu 5.** Cho hai vecto có độ dài lần lượt là 3 và 4 có tích vô hướng là  $-6$ . Tính góc giữa hai vecto đó.

**Câu 6.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $I$ . Tìm các góc:



Hình 2

a)  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}); (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$

b)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ .

**Câu 7.** Cho hai vecto  $\vec{i}, \vec{j}$  vuông góc có cùng độ dài bằng 1 và cho biết  $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và tính số đo góc  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Câu 8.** Cho hai vecto có độ dài lần lượt là 6 và 8 và có tích vô hướng là 24. Tính góc giữa hai vecto đó.

**Câu 9.** Tìm điều kiện của  $\vec{u}, \vec{v}$  để:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

- Câu 10.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $4$  và có đường cao  $AH$ . Tính các tích vô hướng:
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
  - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
  - $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- Câu 11.** Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  trong các trường hợp sau:

a)  $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=7, (\vec{a}, \vec{b})=45^\circ$ ;

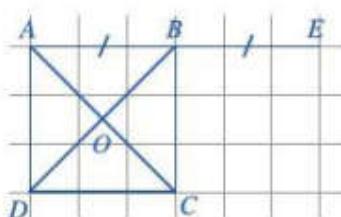
b)  $|\vec{a}|=8, |\vec{b}|=9, (\vec{a}, \vec{b})=150^\circ$

- Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và  $AB=4\text{ cm}$ .

a) Tính độ dài cạnh huyền  $BC$ .

b) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- Câu 13.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  có độ dài cạnh bằng  $a$ . Tính:

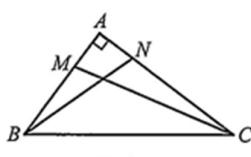


a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$

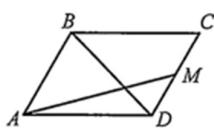
- Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB=3$ ,  $AC=4$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các cạnh  $AB$ ,  $AC$  thoả mãn  $AM=AN=1$  (Hình 49). Tính  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$ .



Hình 49

- Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=4, AC=6$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- Câu 16.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB=3$ ,  $AD=4$ ,  $\hat{A}=60^\circ$ .  $M$  là trung điểm của  $CD$  (Hình 50). Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$ .



Hình 50

- Câu 17.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Tính:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

- Câu 18.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ .

Tính các tích vô hướng của các cặp vectơ sau:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

- Câu 19.** Cho tam giác đều  $ABC$  tâm  $O$ , có độ dài các cạnh bằng  $1$ .

a) Xác định góc giữa các cặp vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{CB}$ .

b) Tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

$\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{CB}$

- Câu 20.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , có  $\hat{A}=120^\circ, AB=3$ .

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

b) Tính độ dài cạnh  $BC$ .

c) Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB=2MC$ . Tính  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ .

**Câu 21.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

**Câu 22.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$  và cho  $AD = a, AB = 2a$ . Tính:

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
- b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

**Câu 23.** Cho ba điểm  $O, A, B$  thẳng hàng và  $OA = a, OB = b$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  trong hai trường hợp:

- a) Điểm  $O$  nằm ngoài đoạn thẳng  $AB$ ;
- b) Điểm  $O$  nằm trong đoạn thẳng  $AB$

**Câu 24.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $2a$  và có đường cao  $AH$ . Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ .

**Câu 25.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ , có cạnh  $BC$  bằng  $\sqrt{2}$ . Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Câu 26.** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  có  $AB = AC = a$ .

Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

**Câu 27.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$  và cho  $AD = 2a, AB = a$ . Tính:

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
- b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

**Câu 28.** Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  trong mỗi trường hợp sau:

- a)  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ ;
- b)  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ ;
- c)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng;
- d)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

**Câu 29.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính các tích vô hướng sau:

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- b)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

**Câu 30.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  và  $\hat{A} = 120^\circ$ . Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 31.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Hãy tính:

- a).  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- b).  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- c).  $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
- d).  $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$

**Câu 32.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Hãy tính:

- a).  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}; (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}); (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
- b).  $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$  với  $N$  là điểm trên cạnh  $BC$ .
- c).  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$  với  $M$  nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

**Câu 33.** Cho hình thang  $ABCD$  có đáy lớn  $BC = 3a$ , đáy nhỏ  $AD = a$ , đường cao  $AB = 2a$

- a). Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- b). Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ . Hãy tính góc giữa  $AI$  và  $BD$ .

**Câu 34.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , đường cao  $AH$ . Tính:

- a).  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$ .

b).  $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$

**Câu 35.** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh bằng  $7$ , góc  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Tính:  
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}$ ;  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$

**Câu 36.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng  $1$  và thỏa mãn điều kiện  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Câu 37.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng  $1$  và góc tạo bởi hai vectơ bằng  $60^\circ$ . Xác định cosin góc giữa hai vec tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  với  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ .

**Câu 38.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Cho biết  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$ . Hãy tính các tích vô hướng  $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b})$ ,  $(3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b})$ .

**Câu 39.** Cho  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$

**Câu 40.** Cho hai vectơ đơn vị  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn điều kiện  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ;  $|\vec{a} + \vec{b}|$

### Dạng 2. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng

Phương pháp:

- Biến đổi từ biểu thức về này sang về kia.
- Chứng minh hai biểu thức cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Sử dụng các tính chất của phép toán vectơ, tính chất của tích vô hướng.
- Tách vectơ, biến đổi về các tích vô hướng khác.

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 41.** Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, chứng minh rằng:  $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ .

**Câu 42.** Cho hình thoi  $ABCD$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = 0$

**Câu 43.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Với mỗi điểm  $M$ , chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}$ .

**Câu 44.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Chứng minh rằng với mỗi điểm  $O$  ta có:

a)  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$

b)  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$ .

**Câu 45.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$ , ta có:  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

**Câu 46.** Cho tam giác  $ABC$  không cân. Gọi  $D, E, F$  theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ  $A, B, C$ ; gọi  $M, N, P$  tương ứng là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

**Câu 47.** Cho đoạn thẳng  $AB$  có  $O$  là trung điểm và cho điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$

**Câu 48.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh:

$$AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

**Câu 49.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , kẻ đường cao  $AH$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Câu 50.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

**Câu 51.** Cho tam giác  $ABC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác. Với mỗi điểm  $M$ , chứng minh rằng  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ .

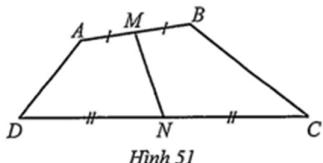
## BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 52.** Cho hình vuông  $ABCD$  có độ dài cạnh  $AC = a\sqrt{2}$ , gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .
- Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$  theo  $a$ .
  - Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$
- Câu 53.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $a\sqrt{3}$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AD$  và  $M$  là điểm bất kỳ.
- Tính  $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$
  - Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
- Câu 54.** Cho  $H$  là trung điểm của  $AB$  và  $M$  là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$
- Câu 55.** Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì  $A, B, C, D$  ta có:
- $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ (hệ thức O - le).}$$
- Câu 56.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
  - $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$
- Câu 57.** Cho tam giác  $ABC$  có  $I$  trung điểm của  $BC$ . Chứng minh:
- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$
  - $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$  (Với  $H$  là hình chiếu của  $A$  xuống  $BC$ ).
- Câu 58.** Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyén  $AM$ . Chứng minh rằng
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2$
  - $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$
- Câu 59.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $AB = c, BC = a, AC = b$ . Có trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng  $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$  (hệ thức Lep – nit).
- Câu 60.** Cho tam giác  $ABC$ , trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$ , ta có  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$
- Câu 61.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Chứng minh với điểm  $M$  bất kỳ ta luôn có:
- $$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$
- Câu 62.** Cho hai điểm  $M, N$  nằm trên đường tròn đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $I$  là giao điểm hai đường thẳng  $AM$  và  $BN$ . Chứng minh:
- $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$
  - $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = 4R^2$
- Câu 63.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$  và  $M$  là một điểm tùy ý. Chứng minh:
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
  - $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$
- Câu 64.** Cho tam giác  $ABC$  đều nội tiếp đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$ .
- Chứng minh  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$  khi và chỉ khi  $M$  thuộc  $(O)$ .
  - Chứng minh với mọi điểm  $M$ :
- $$AM^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$$

- Câu 65.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  theo thứ tự là trung điểm của  $AC, BD$ . Chứng minh rằng  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$
- Câu 66.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $AB = c, BC = a, CA = b$ , các đường trung tuyến tương ứng  $AA', BB', CC'$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng với mọi  $M$  bất kì, ta có  $2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$
- Câu 67.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $H$  là trực tâm,  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}^2$
- Câu 68.** Cho tam giác  $ABC$ , có  $AD, BE, CF$  lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

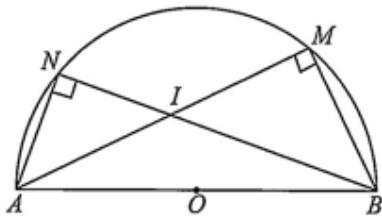
**Dạng 3. Tính khoảng cách giữa hai điểm, chứng minh đẳng thức độ dài***Phương pháp:* Sử dụng tính chất:Với hai điểm  $A, B$  phân biệt, ta có  $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$ , do đó  $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$ .**BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP**

- Câu 69.** (Định lí cosin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác  $ABC$ , ta có;  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$
- Câu 70.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  (Hình 51). Biết  $AD = 2, BC = 3, AD \perp BC$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$ .



Hình 51

- Câu 71.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Với mỗi điểm  $M$ , chứng minh rằng  $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + OA^2 + OB^2$ .
- Câu 72.** Chứng minh rằng với mọi tam giác  $ABC$ , ta có:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ .
- Câu 73.** Cho nửa đường tròn với đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho hai dây cung  $AM$  và  $BN$  cắt nhau tại một điểm  $I$ .
- Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ .
  - Tính  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$  theo  $R$ .
- Câu 74.** Cho tam giác đều  $ABC$  có độ dài các cạnh bằng 1.
- Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính tích vô hướng của các cặp vecto  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .
  - Gọi  $N$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $C$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ .
  - Lấy điểm  $P$  thuộc đoạn  $AN$  sao cho  $AP = 3PN$ . Hãy biểu thị các vecto  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{MP}$  theo hai vecto  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ . Tính độ dài đoạn  $MP$ .
- Câu 75.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho  $AM$  và  $BN$  cắt nhau tại  $I$  như Hình 5.



Hình 5

- a) Chứng minh  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$ .
- b) Tính  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$  theo  $R$ .

**Câu 76.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các tia  $BC$  và  $CA$  thoả mãn

$$BM = \frac{1}{3}BC, CN = \frac{5}{4}CA. \text{Tính:}$$

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}$
- b)  $MN$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 77.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Cho điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Tính độ dài  $AM$ .

**Câu 78.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = a\sqrt{2}, BC = 5a, \widehat{ABC} = 135^\circ$ . Gọi điểm  $M$  thuộc  $AC$  sao cho

$$AM = \frac{3}{2}MC$$

- a). Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- b). Tìm  $x, y$  sao cho  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$  và tính  $BM$ .

**Câu 79.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 120^\circ$

- a). Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và độ dài trung tuyến  $AM$ .
- b). Gọi  $AD$  là phân giác trong của góc  $A$  của tam giác  $ABC$ . Phân tích  $\overrightarrow{AD}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ . Suy ra độ dài đoạn  $AD$ .

**Câu 80.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a, BC = a\sqrt{7}, AC = 3a$ . Gọi  $M$  trung điểm của  $AB, N$  thuộc  $AC$  sao cho  $AN = 2NC$  và  $D$  thuộc  $MN$  sao cho  $2DM = DN$

- a). Tìm  $x, y$  sao cho  $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ .
- b). Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và độ dài đoạn  $AD$  theo  $a$ .

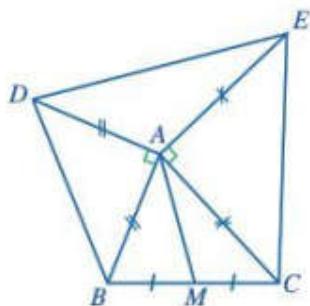
### Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

*Phương pháp:* Sử dụng các tính chất:

Hai đường thẳng  $a$  và  $b$  vuông góc khi và chỉ khi  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , trong đó  $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , giá của vectơ  $\vec{u}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $a$  và giá của vectơ  $\vec{v}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $b$ .

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

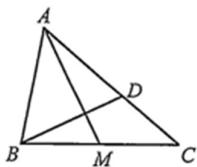
**Câu 81.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3, AC = 4, \widehat{A} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại  $A$  là  $ABD$  và  $ACE$



- a) Tính các tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ ;  
 b) Biểu diễn  $\overrightarrow{AM}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ . Từ đó chứng minh  $AM \perp DE$ .

**Câu 82.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .

Điểm  $D$  thuộc cạnh  $AC$  thỏa mãn  $AD = \frac{7}{12}AC$  (Hình 52).



Hình 52

Chứng minh  $AM \perp BD$ .

**Câu 83.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Trên các cạnh  $AB, AC$  lần lượt lấy các điểm  $P, Q$ . Chứng minh rằng  $\widehat{PMQ} = 90^\circ$  khi và chỉ khi  $BP + \sqrt{3}CQ = BC$ .

**Câu 84.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 1, BC = \sqrt{2}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AD$ .

- a) Chứng minh rằng các đường thẳng  $AC$  và  $BM$  vuông góc với nhau.  
 b) Gọi  $H$  là giao điểm của  $AC, BM$ . Gọi  $N$  là trung điểm của  $AH$  và  $P$  là trung điểm của  $CD$ .  
 Chứng minh rằng tam giác  $NBP$  là một tam giác vuông.

**Câu 85.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} < 90^\circ$ . Dựng ra phía ngoài tam giác hai tam giác vuông cân đỉnh  $A$  là  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm  $BC, BD, CE$ . Chứng minh rằng:

- a)  $AM$  vuông góc với  $DE$ ;  
 b)  $BE$  vuông góc với  $CD$ ;  
 c) Tam giác  $MNP$  là một tam giác vuông cân.

**Câu 86.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .

Điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$ .

- a) Tính  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .  
 b) Biểu diễn  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .  
 c) Chứng minh  $AM \perp BD$ .

**Câu 87.** Cho hình vuông  $ABCD, M$  là trung điểm của  $BC$ .  $N$  là điểm nằm giữa hai điểm  $A$  và  $C$ . Đặt  $x = \frac{AN}{AC}$ . Tìm  $x$  thỏa mãn  $AM \perp BN$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 88.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Gọi  $M, N$  là các điểm sao cho  $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}, 5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$ .

- a). Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$   
 b). Chứng minh  $AM$  vuông góc với  $BN$ .

**Câu 89.** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $A$  nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác vuông cân đỉnh  $A$  là  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $M$  trung điểm của đoạn  $BC$ . Chứng minh rằng  $AM$  vuông góc với  $DE$ .

- Câu 90.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AH$  và  $HC$ . Chứng minh  $BI \perp AJ$
- Câu 91.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn  $BC$ ,  $D$  là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên  $AC$ ,  $M$  trung điểm của đoạn  $HD$ . Chứng minh  $AM$  vuông góc với  $DB$ .
- Câu 92.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $E$  là giao của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$  và  $H, K$  là trực tâm của các tam giác  $ABE, CDE$ .
- Chứng minh  $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
  - Chứng minh  $HK \perp IJ$
- Câu 93.** Cho tứ giác  $ABC$  có hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau và cắt nhau tại  $M$ . Gọi  $P$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Chứng minh  $MP$  vuông góc với  $BC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
- Câu 94.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , vẽ  $BH \perp AC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AH$  và  $DC$ . Chứng minh  $BM \perp MN$ .
- Câu 95.** Cho hình vuông  $ABCD$ , điểm  $M$  thuộc đoạn thẳng  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ . Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Chứng minh rằng  $DMN$  là tam giác vuông cân.
- Câu 96.** Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trực tâm của các tam giác  $ABO$  và  $CDO$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh  $HK \perp IJ$ .
- Câu 97.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $3a$ . Lấy  $M, N, P$  lần lượt trên 3 cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = a, CN = 2a, AP = x$ . Tìm  $x$  để  $AM$  vuông góc với  $PN$ .
- Câu 98.** Tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn ( $O$ ).  $D$  là trung điểm của  $AB$ ,  $E$  là trọng tâm tam giác  $ACD$ . Chứng minh  $OE \perp CD$

#### Dạng 5. Bài toán thực tế

Trong Vật lí, tích vô hướng giúp tính công A sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ dịch chuyển là vectơ  $\vec{d}$ . Ta có công thức:  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ .

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 99.** Tính công sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ lớn  $20\text{ N}$  kéo một vật dịch chuyển theo một vectơ  $\vec{d}$  có độ dài  $50\text{ m}$  và cho biết  $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$ .
- Câu 100.** Tính công sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ lớn  $60\text{ N}$  kéo một vật dịch chuyển một vectơ  $\vec{d}$  có độ dài  $200\text{ m}$ . Cho biết  $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$ .
- Câu 101.** Cho ba điểm  $M, N, P$ . Nếu một lực  $\vec{F}$  không đổi tác động lên một chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, thì các công sinh bởi lực  $\vec{F}$  trong hai trường hợp sau có mối quan hệ gì với nhau?
- Chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ  $M$  đến  $N$  rồi tiếp tục từ  $N$  đến  $P$ .
  - Chất điểm chuyển động thẳng từ  $M$  đến  $P$ .
- Câu 102.** Một người dùng một lực  $\vec{F}$  có độ lớn là  $90\text{ N}$  làm một vật dịch chuyển một đoạn  $100\text{ m}$ . Biết lực hợp  $\vec{F}$  với hướng dịch chuyển là một góc  $60^\circ$ . Tính công sinh bởi lực  $\vec{F}$
- Câu 103.** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $700\text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $40\text{ km/h}$  (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



**Câu 104.** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $650 \text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $35 \text{ km/h}$ . Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị  $\text{km/h}$ ).

### Dạng 6. Tập hợp điểm

**Dạng 1:**  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$  (1) (A, B là hai điểm cố định).

-  $k = 0$  : Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.

-  $k \neq 0$  : Gọi I trung điểm của AB.

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

+ Nếu  $k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$  : Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính  $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$

+ Nếu  $k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4}$  : Tập hợp điểm M là điểm I.

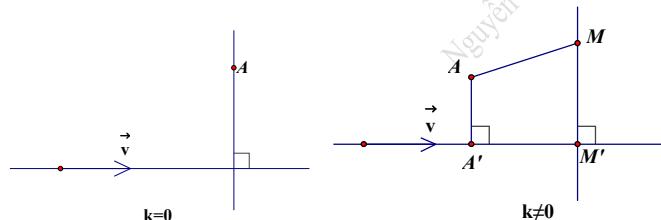
+ Nếu  $k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}$  : Tập hợp các điểm M là rỗng.

**Dạng 2:**  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k$  (2) (A cố định,  $\vec{v}$  có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$  : Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của  $\vec{v}$

$k \neq 0$  : Gọi  $\overrightarrow{A'M'}$  là hình chiếu của  $\overrightarrow{AM}$  trên giá của vectơ  $\vec{v}$ ; ta có:  $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{v} = k$  (định lí hình chiếu). A' cố định  $\Rightarrow M'$  cố định ( $M'$  nằm trên giá của  $\vec{v}$  định bởi  $\overrightarrow{A'M'} = \frac{k}{|\vec{v}|}$ ). Tập hợp các

điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vectơ  $\vec{v}$  tại M'.



**Dạng 3:**  $\alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 = k$  (3) (A, B cố định  $\alpha, \beta$  là hằng số và  $\alpha + \beta \neq 0$ ).

Gọi I là điểm thỏa  $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$  là điểm cố định.

$$(3) \Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 + 2(\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{MI} + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}$$

Nếu  $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2 + \beta IB^2$  : Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính

$$\sqrt{\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}}.$$

Nếu  $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2 + \beta IB^2$ : Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu  $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2 + \beta IB^2$ : Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

- Cho hai điểm A, B cố định  $\alpha, \beta$  là hằng số thỏa  $\alpha + \beta \neq 0$  thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho  $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ . Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có:  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MI}$ .
- Cho ba điểm A, B, C cố định  $\alpha, \beta, \gamma$  là hằng số thỏa  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho  $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ . Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có:  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MI}$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 105. Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Câu 106. Cho tam giác  $ABC$ , tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa:

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$
- $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$
- $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MB^2 + 4MC^2$

Câu 107. Cho tam giác  $ABC$ , tìm tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện sau:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$

Câu 108. Cho tam giác  $ABC$ , tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho:  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = AB^2$

Câu 109. Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $AB = AC = a, BC = 3a$ . Tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho

$$2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

Câu 110. Cho  $A, B, C, D$  là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho:

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0$$

Câu 111. Cho đoạn  $AB = a > 0$  và số  $k$ . Tìm tập hợp các điểm M sao cho  $MA^2 + MB^2 = k$

Câu 112. Cho tam giác  $ABC$ , tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho

- $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ ;
- $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ .

Câu 113. Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho:

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ;
- $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$ ;
- $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ ;
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$ .

Câu 114. Cho hai điểm  $A, B$  và  $k$  là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm  $M$  thoả điều kiện:  $MA^2 + MB^2 = k^2$ .

Câu 115. Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp điểm M sao cho  $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

Câu 116. Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho:

a).  $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$

b).  $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

**Câu 117.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định và số  $k$  cho trước. Tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

**Câu 118.** Cho tam giác  $ABC$ , tìm tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2$  (với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ).

**Câu 119.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ .

a). Xác định vị trí điểm  $P$  thỏa  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ .

b). Chứng minh  $C, G, P$  thẳng hàng.

c). Tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$

**Câu 120.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $BC$  và  $M$  là một điểm thay đổi:

a). Chứng minh  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$  không đổi.

b). Tìm quỹ tích điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k$  ( $k$  là số thực cho trước).

**Câu 121.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm quỹ tích điểm  $M$  thỏa mãn:

a).  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$

b).  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$

(với  $k$  là một số cho trước).

**Câu 122.** Cho tam giác  $ABC$  số  $a$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$ .

**Câu 123.** Cho tam giác  $ABC$  và số  $k$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$ .

### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Nếu hai điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$  thì độ dài đoạn thẳng  $MN$  bằng bao nhiêu?

A.  $MN = 4$

B.  $MN = 2$

C.  $MN = 16$ ;

D.  $MN = 256$ .

**Câu 2.** Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ;

B. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;

C. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;

D. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ .

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$  bằng:

A.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .

B.  $-AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .

C.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .

D.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ACB}$ .

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  bằng:

A.  $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .

B.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .

C.  $-AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .

D.  $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .

**Câu 5.** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Tập hợp các điểm  $M$  nằm trong mặt phẳng thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  là:

A. Đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AB$ .

B. Đường tròn tâm  $B$  bán kính  $AB$ .

- C. Đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .
- D. Đường tròn đường kính  $AB$ .

**Câu 6.** Nếu hai điểm  $M, N$  thoả mãn  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -9$  thì:

- A.  $MN = 9$ .
- B.  $MN = 3$ .
- C.  $MN = 81$ .
- D.  $MN = 6$ .

### BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 7.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vecto cùng hướng và đều khác vecto  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .
- B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ .
- D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Câu 8.** Cho hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khi  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

- A.  $\alpha = 180^\circ$ .
- B.  $\alpha = 0^\circ$ .
- C.  $\alpha = 90^\circ$ .
- D.  $\alpha = 45^\circ$ .

**Câu 9.** Cho hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thoả mãn  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- A.  $\alpha = 30^\circ$ .
- B.  $\alpha = 45^\circ$ .
- C.  $\alpha = 60^\circ$ .
- D.  $\alpha = 120^\circ$ .

**Câu 10.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .
- B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$
- C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$
- D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

**Câu 11.** Cho  $M, N, P, Q$  là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

- A.  $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$ .
- B.  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ .
- C.  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$ .
- D.  $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$ .

**Câu 12.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$
- B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$
- C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$
- D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$

**Câu 13.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ .
- B.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$ .
- C.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$ .
- D.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$ .

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thoả mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  là:

- A. một điểm.
- B. đường thẳng.
- C. đoạn thẳng.
- D. đường tròn.

**Câu 15.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a = 2$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{BC}$ .
- B.  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$ .
- C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$ .
- D.  $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$ .

**Câu 16.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $\hat{A} = 120^\circ$  và  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A.  $\frac{a^2}{2}$ .
- B.  $-\frac{a^2}{2}$ .
- C.  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .
- D.  $-\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 17.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .
- B.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$ .
- C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ .
- D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ .

**Câu 18.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$ .
- B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$ .

C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ . D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ .

**Câu 19.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ ;  $I$  là trung điểm của  $AD$ . Khi đó  $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$  bằng :

- A.  $\frac{9a^2}{2}$ . B.  $-\frac{9a^2}{2}$ . C. 0. D.  $9a^2$ .

**Câu 20.** Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có góc  $\hat{B} = 50^\circ$ . Hết thúc nào sau đây là sai?

- A.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$ . B.  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$ . C.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$ . D.  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$ .

**Câu 21.** Cho hình vuông  $ABCD$ , tính  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

- A.  $\frac{1}{2}$ . B.  $-\frac{1}{2}$ . C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . D.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 22.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$ . B.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$ . C.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . D.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$ .

**Câu 23.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

- A. 0. B.  $a$ . C.  $\frac{a^2}{2}$ . D.  $a^2$ .

**Câu 24.** Cho  $M$  là trung điểm  $AB$ , tìm biểu thức sai:

- A.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$ . B.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$ .  
C.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$ . D.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$ .

**Câu 25.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$  và  $H$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A.  $\frac{3a^2}{4}$ . B.  $-\frac{3a^2}{4}$ . C.  $\frac{3a^2}{2}$ . D.  $-\frac{3a^2}{2}$ .

**Câu 26.** Biết  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Câu nào sau đây đúng

- A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.  
B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc  $120^\circ$ .  
C.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.  
D. A, B, C đều sai.

**Câu 27.** Cho 2 vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 5$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A.  $\sqrt{21}$ . B.  $\sqrt{61}$ . C. 21. D. 61.

**Câu 28.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A.  $3a^2$ . B.  $-3a^2$ . C.  $3a$ . D. 0.

**Câu 29.** Cho 2 vectơ đơn vị  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ . Hãy xác định  $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$

- A. 7. B. 5. C. -7. D. -5.

**Câu 30.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ . Tính  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$

- A.  $-9a^2$ . B.  $15a^2$ . C. 0. D.  $9a^2$ .

**Câu 31.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  có  $AC = 9$ ,  $BC = 5$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. 9. B. 81. C. 3. D. 5.

**Câu 32.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$

A.  $\sqrt{7+\sqrt{3}}$ .      B.  $\sqrt{7-\sqrt{3}}$ .      C.  $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$ .      D.  $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$ .

- Câu 33.** Cho hai điểm  $B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$  là :
- A. Đường tròn đường kính  $BC$ .      B. Đường tròn  $(B; BC)$ .
- C. Đường tròn  $(C; CB)$ . D. Một đường khác.

- Câu 34.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  là :
- A. Đường tròn đường kính  $AB$ .
- B. Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .
- C. Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AC$ .
- D. Đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .

- Câu 35.** Cho hai điểm  $A(2, 2), B(5, -2)$ . Tìm  $M$  trên tia  $Ox$  sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$
- A.  $M(1, 6)$ .      B.  $M(6, 0)$ .      C.  $M(1, 0)$  hay  $M(6, 0)$ .      D.  $M(0, 1)$ .

- Câu 36.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?
- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left( |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right)$
- B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left( |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$
- C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left( |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$
- D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left( |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$

- Câu 37.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$       B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

- Câu 38.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$  và chiều cao  $AH$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?
- A.  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$       B.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

- Câu 39.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $AB = c, AC = b$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .
- A.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$       B.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$       C.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$       D.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

- Câu 40.** Cho ba điểm  $A, B, C$  thỏa  $AB = 2\text{cm}, BC = 3\text{cm}, CA = 5\text{cm}$  Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
- A.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$       B.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$       C.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$       D.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

- Câu 41.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$  Tính  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$
- A.  $P = b^2 - c^2$       B.  $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$       C.  $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$       D.  $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

- Câu 42.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$
- A.  $P = -1$       B.  $P = 3a^2$       C.  $P = -3a^2$       D.  $P = 2a^2$

- Câu 43.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$ .      B.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$ .

C.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ .      D.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ .

- Câu 44.** Cho ba điểm  $O, A, B$  không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng  $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  là
- A. tam giác  $OAB$  đều.      B. tam giác  $OAB$  cân tại  $O$ .
- C. tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$ .      D. tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$ .

- Câu 45.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 8$ ,  $AD = 5$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$ .      C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$ .
- Câu 46.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 8$  và  $BD = 6$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ .      C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$ .
- Câu 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$  là:  
 A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.
- Câu 48.** Tìm tập các hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$  với  $A, B, C$  là ba đỉnh của tam giác.  
 A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.
- Câu 49.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định có khoảng cách bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$  là:  
 A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.
- Câu 50.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định và  $AB = 8$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$  là:  
 A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.
- Câu 51.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$   
 A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4a^2$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2$ .
- Câu 52.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính giá trị của biểu thức  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$   
 A.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$ .      B.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$ .  
 C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$ .      D.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$ .
- Câu 53.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AB = BC = 2\sqrt{5}$ ,  $CD = BD = 5\sqrt{2}$ ,  $AD = 3\sqrt{10}$ ,  $AC = 10$ . Tìm cosin góc giữa hai vecto  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{DB}$   
 A.  $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$ .      B.  $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$ .      C.  $\frac{4}{5\sqrt{2}}$ .      D.  $\frac{3}{5\sqrt{2}}$ .
- Câu 54.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $DA, BC$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  biết  $AB = CD = 2a$ ,  $MN = a\sqrt{3}$ .  
 A.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 50^\circ$ .      B.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$ .      C.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 80^\circ$ .      D.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$ .
- Câu 55.** Cho tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$ , cạnh  $OA = 4$ . Tính  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ .  
 A.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$ .      B.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$ .  
 C.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$ .      D.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$ .
- Câu 56.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  vuông tại  $A, D$ ;  $AB \parallel CD$ ;  $AB = 2a$ ;  $AD = DC = a$ .  $O$  là trung điểm của  $AD$ . Độ dài vecto tổng  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  bằng  
 A.  $\frac{a}{2}$ .      B.  $\frac{3a}{2}$ .      C.  $a$ .      D.  $3a$ .
- Câu 57.** Cho  $ABC$  đều cạnh  $2a$  với  $M$  là trung điểm  $BC$ . Khẳng định nào đúng?  
 A.  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .      B.  $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$ .
- Câu 58.** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  với  $AB = AC = a$ . Khi đó  $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$  bằng  
 A.  $a\sqrt{3}$ .      B.  $a\sqrt{5}$ .      C.  $5a$ .      D.  $2a$ .

- Câu 59.** Cho hai véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}|=4; |\vec{b}|=3; |\vec{a}-\vec{b}|=4$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Chọn phát biểu đúng.
- A.  $\alpha = 60^\circ$ .      B.  $\alpha = 30^\circ$ .      C.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .      D.  $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ .
- Câu 60.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $4a$ . Tích vô hướng của hai vecto  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  là
- A.  $8a^2$ .      B.  $8a$ .      C.  $8\sqrt{3}a^2$ .      D.  $8\sqrt{3}a$ .
- Câu 61.** Cho  $\Delta ABC$  đều;  $AB = 6$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$  bằng
- A.  $-18$ .      B.  $27$ .      C.  $18$ .      D.  $-27$ .
- Câu 62.** Cho hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{3}$  và  $(\vec{a}, \vec{b})=30^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .
- A.  $\sqrt{11}$ .      B.  $\sqrt{13}$ .      C.  $\sqrt{12}$ .      D.  $\sqrt{14}$ .
- Câu 63.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B}=30^\circ, AC=2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ .
- A.  $P = -2$ .      B.  $P = 2\sqrt{3}$ .      C.  $P = 2$ .      D.  $P = -2\sqrt{3}$ .
- Câu 64.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB=2a, AD=3a, \widehat{BAD}=60^\circ$ . Điểm  $K$  thuộc  $AD$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$
- A.  $3a^2$ .      B.  $6a^2$ .      C.  $0$ .      D.  $a^2$ .
- Câu 65.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=5, AC=8, BC=7$  thì  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  bằng:
- A.  $-20$ .      B.  $40$ .      C.  $10$ .      D.  $20$ .
- Câu 66.** Cho hai vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  sao cho  $|\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{b}|=2$  và hai véc tơ  $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}, \vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$  vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- A.  $120^\circ$ .      B.  $60^\circ$ .      C.  $90^\circ$ .      D.  $30^\circ$ .
- Câu 67.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB=a$  và  $AD=a\sqrt{2}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .      B.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$ .      C.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$ .      D.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .
- Câu 68.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC=a\sqrt{3}$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$  và có  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$ . Tính cạnh  $AB, AC$ .
- A.  $AB=a, AC=a\sqrt{2}$ .      B.  $AB=a, AC=a$ .
- C.  $AB=a\sqrt{2}, AC=a$ .      D.  $AB=a\sqrt{2}, AC=a\sqrt{2}$ .
- Câu 69.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $M$  là trung điểm của  $AB, G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$
- A.  $\frac{21a^2}{4}$ .      B.  $\frac{11a^2}{4}$ .      C.  $\frac{9a^2}{4}$ .      D.  $\frac{a^2}{4}$ .
- Câu 70.** Cho các véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và thoả mãn điều kiện  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$
- A.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .      B.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$ .      C.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ .      D.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}$ .
- Câu 71.** Cho các véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc tơ bằng  $60^\circ$ . Xác định cosin góc giữa hai vecto  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  với  $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}, \vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$
- A.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{2}$ .      B.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{6}$ .      C.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{4}$ .      D.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{3}$ .

**Câu 72.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng  $3$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 1$ , trên cạnh  $CD$  lấy điểm  $N$  sao cho  $DN = 1$  và  $P$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $\cos \widehat{MNP}$ .

A.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$ .    B.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{4\sqrt{10}}$ .

C.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{\sqrt{10}}$ .    D.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$ .

**Câu 73.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 2$ .  $M$  là điểm được xác định bởi  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$

A.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$ .    B.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$ .    C.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$ .    D.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$ .

**Câu 74.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  và  $G$  là trọng tâm. Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

A.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$ .    B.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$ .

C.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$ .    D.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$ .

**Câu 75.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng  $2$ . Điểm  $M$  nằm trên đoạn thẳng  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ .

Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$ .    B.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ .    C.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$ .    D.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$ .

**Câu 76.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$  nằm trên một đường tròn  $(C)$  có bán kính  $R$ . Tính  $R$ .

A.  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .    B.  $R = \frac{a}{4}$ .    C.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .    D.  $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$ .

**Câu 77.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $18\text{cm}$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$  là

A. Tập rỗng.    B. Đường tròn cố định có bán kính  $R = 2\text{cm}$ .

C. Đường tròn cố định có bán kính  $R = 3\text{cm}$ .    D. Một đường thẳng.

**Câu 78.** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $J$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ ,  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , điểm  $K$  thỏa mãn  $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ .

Một điểm  $M$  thay đổi nhưng luôn thỏa mãn  $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$ .

Tập hợp điểm  $M$  là đường nào trong các đường sau.

A. Đường tròn đường kính  $IJ$ .    B. Đường tròn đường kính  $IK$ .

C. Đường tròn đường kính  $JK$ .    D. Đường trung trực đoạn  $JK$ .

**Câu 79.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Lấy  $M, N, P$  lần lượt nằm trên ba cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$ . Tìm  $x$  để  $AM$  vuông góc với  $NP$ .

A.  $x = \frac{5a}{12}$ .    B.  $x = \frac{a}{2}$ .    C.  $x = \frac{4a}{5}$ .    D.  $x = \frac{7a}{12}$ .

**Câu 80.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đường cao  $AB = 2a$ , các cạnh đáy  $AD = a$  và  $BC = 3a$ . Gọi  $M$  là điểm trên đoạn  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ . Tìm  $k$  để  $BM \perp CD$

A.  $\frac{4}{9}$ .    B.  $\frac{3}{7}$ .    C.  $\frac{1}{3}$ .    D.  $\frac{2}{5}$ .

Nguyễn Bảo Vương