

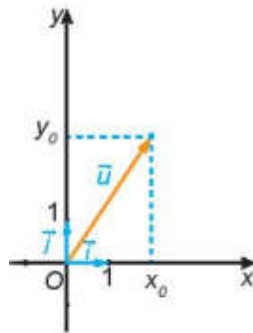
BÀI 12. TỌA ĐỘ VECTO

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tọa độ của véc tơ

Với mỗi vectơ \vec{u} trên mặt phẳng Oxy , có duy nhất cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. Ta nói vectơ \vec{u} có tọa độ $(x_0; y_0)$ và viết $\vec{u} = (x_0; y_0)$ hay $\vec{u}(x_0; y_0)$. Các số x_0, y_0 tương ứng được gọi là hoành độ, tung độ của \vec{u} .



Nhận xét. Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng tọa độ $\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

2. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho $\vec{a} = (x; y), \vec{b} = (x'; y'); k \in \mathbb{R}$,

$$+) \vec{a} \pm \vec{b} = (x \pm x'; y \pm y')$$

$$+) k \cdot \vec{a} = (kx; ky)$$

Nhận xét: \vec{b} cùng phương với $\vec{a} \neq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : x' = kx \text{ và } y' = ky \Leftrightarrow \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} \text{ (nếu } x \neq 0, y \neq 0 \text{)}.$

Nếu điểm M có tọa độ $(x; y)$ thì vectơ \overrightarrow{OM} có tọa độ $(x; y)$ và độ dài $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Với hai điểm $M(x; y)$ và $N(x'; y')$ thì $\overrightarrow{MN} = (x' - x; y' - y)$ và khoảng cách giữa hai điểm M, N

$$\text{là } MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$$

- Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Nếu $M(x_M; y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

- Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$. Nếu $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

3. Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$ và hai điểm $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$. Ta có:

$$- \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0;$$

$$- \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$$

$$- |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$- \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} (\vec{a}, \vec{b} \text{ khác } \vec{0}).$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

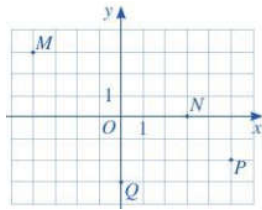
Dạng 1. Tìm tọa độ của vector

Phương pháp

Ta thường tìm những hệ thức về vector liên hệ giữa vector \vec{a} với các vector đã biết. Từ đó lập hệ phương trình mà hai ẩn là tọa độ của vector \vec{a} . Giải hệ phương trình ta tìm được tọa độ của vector \vec{a} .

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm M, N, P, Q . Tìm tọa độ các vector $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$.

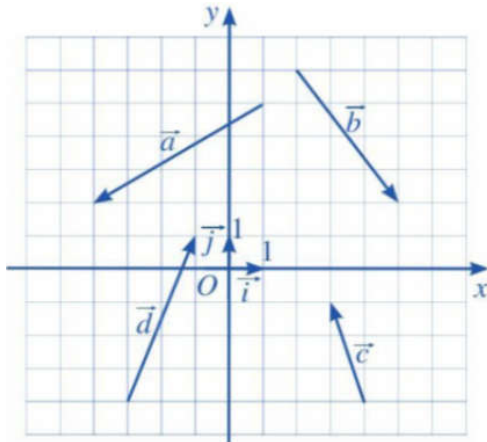


Lời giải

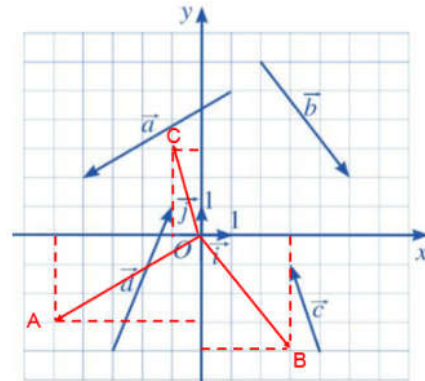
Từ hình trên ta có: $M(-4; 3), N(3; 0), P(5; -2), Q(0; -3)$.

Do đó: $\overrightarrow{OM} = (-4; 3), \overrightarrow{ON} = (3; 0), \overrightarrow{OP} = (5; -2), \overrightarrow{OQ} = (0; -3)$

Câu 2. Tìm tọa độ của các vector trong Hình và biểu diễn mỗi vector đó qua hai vector \vec{i} và \vec{j}



Lời giải



- $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ và $A(-5; -3)$; tọa độ vector \overrightarrow{OA} chính là tọa độ điểm A nên $\vec{a} = (-3; -3)$

$$\Rightarrow \vec{a} = -3\vec{i} - 3\vec{j}$$

- $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ và $B(3; -4)$; tọa độ vector \overrightarrow{OB} chính là tọa độ điểm B nên $\vec{b} = (3; -4)$

$$\Rightarrow \vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$$

- $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ và $C(-1;3)$; tọa độ vector \overrightarrow{OC} chính là tọa độ điểm C nên $\vec{c} = (-1;3)$

$$\Rightarrow \vec{c} = -\vec{i} + 3\vec{j}$$

Câu 3. Tìm tọa độ của các vector sau:

a. $\vec{a} = 3\vec{i}$

b. $\vec{b} = -\vec{j}$

c. $\vec{c} = \vec{i} - 4\vec{j}$

d. $\vec{d} = 0,5\vec{i} + \sqrt{6}\vec{j}$

Lời giải

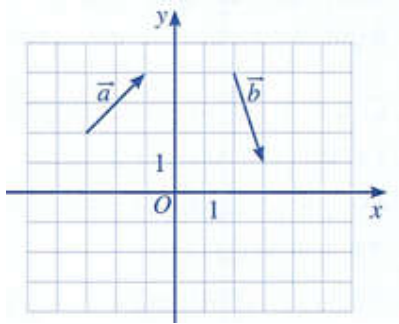
a. $\vec{a} = (3;0)$

b. $\vec{b} = (0;-1)$

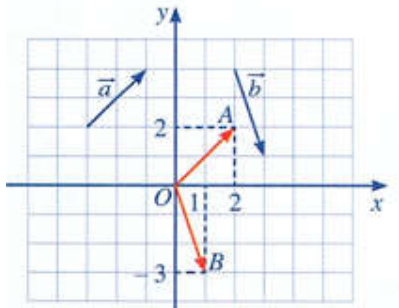
c. $\vec{c} = (1;-4)$

d. $\vec{d} = (0,5;\sqrt{6})$

Câu 4. Tìm tọa độ của các vector \vec{a}, \vec{b} ở hình



Trong hình, ta có:

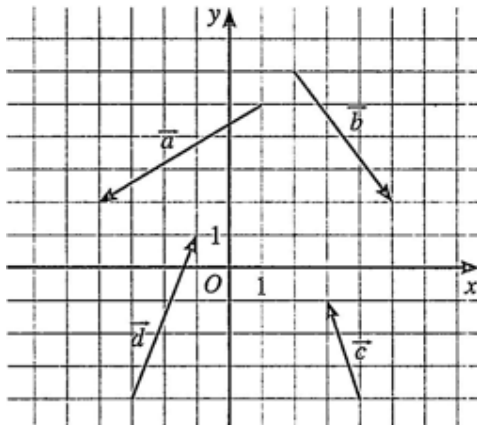


Lời giải

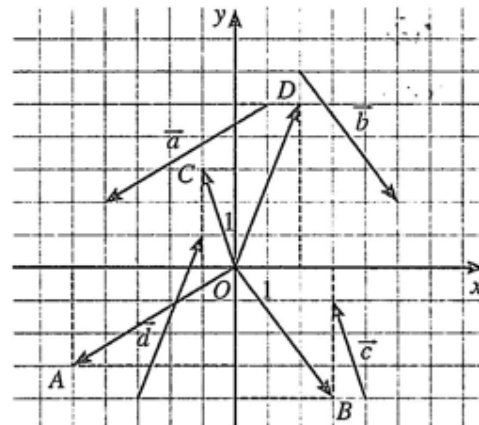
+) $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ và $A(2;2)$; tọa độ vector \overrightarrow{OA} chính là tọa độ điểm A nên $\vec{a} = (2;2)$.

+) $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ và $B(1;-3)$; tọa độ vector \overrightarrow{OB} chính là tọa độ điểm B nên $\vec{b} = (1;-3)$.

Câu 5. Tìm tọa độ của các vector trong Hình 2.



Hình 2



Hình 3

Lời giải

Trong Hình 3, ta có:

- Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, ta có: $A(-5; -3)$ nên $\vec{a} = (-5; -3)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, ta có: $B(3; -4)$ nên $\vec{b} = (3; -4)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, ta có: $C(-1; 3)$ nên $\vec{c} = (-1; 3)$.
- Vẽ $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, ta có: $D(2; 5)$ nên $\vec{d} = (2; 5)$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $A(1; 2)$ và vector $\vec{u} = (3; -4)$.

- a) Biểu diễn vector \overrightarrow{OA} qua vector \vec{i} và \vec{j} .
- b) Biểu diễn vector \vec{u} qua vector \vec{i} và \vec{j} .

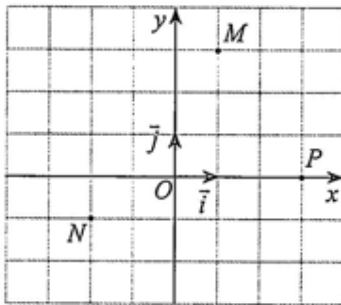
Lời giải

a) Vì điểm A có tọa độ là $(1; 2)$ nên $\overrightarrow{OA} = (1; 2)$. Do đó:

$$\overrightarrow{OA} = 1\vec{i} + 2\vec{j} = \vec{i} + 2\vec{j}.$$

b) Vì $\vec{u} = (3; -4)$ nên $\vec{u} = 3\vec{i} + (-4)\vec{j} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm M, N, P được biểu diễn như Hình 5.



Hình 5

- a) Tìm tọa độ của các điểm M, N, P .
- b) Hãy biểu thị các vector $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$ qua hai vector \vec{i} và \vec{j} .
- c) Tìm tọa độ các vector $\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{PO}, \overrightarrow{NM}$.

Lời giải

a) Theo Hình 5 ta có tọa độ các điểm M, N, P lần lượt là: $M(1; 3), P(3; 0), N(-2; -1)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{OM} = \vec{i} + 3\vec{j}; \overrightarrow{ON} = -2\vec{i} - \vec{j}; \overrightarrow{OP} = 3\vec{i} + 0\vec{j}$.

c) Ta có:

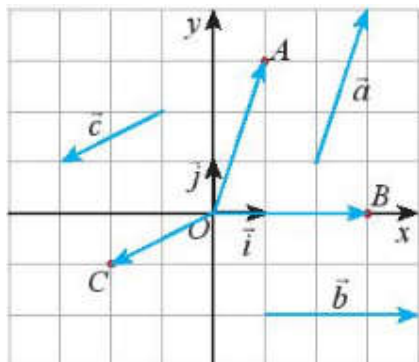
$$\overrightarrow{PM} = (x_M - x_P; y_M - y_P) = (1 - 3; 3 - 0) = (-2; 3)$$

$$\overrightarrow{PN} = (x_N - x_P; y_N - y_P) = (-2 - 3; -1 - 0) = (-5; -1)$$

$$\overrightarrow{PO} = (x_O - x_P; y_O - y_P) = (0 - 3; 0 - 0) = (-3; 0)$$

$$\overrightarrow{NM} = (x_M - x_N; y_M - y_N) = (1 - (-2); 3 - (-1)) = (3; 4)$$

Câu 8. Trong mặt phẳng Oxy , cho ba điểm A, B, C được biểu diễn như Hình.



a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ qua hai vectơ \vec{i} và \vec{j} .

b) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ và các điểm A, B, C .

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 3\vec{j}, \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 0\vec{j}, \overrightarrow{OC} = -2\vec{i} - \vec{j}$.

b) Từ kết quả trên, suy ra: $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (1; 3), \vec{b} = \overrightarrow{OB} = (3; 0), \vec{c} = \overrightarrow{OC} = (-2; -1)$.

Do đó $A(1; 3), B(3; 0), C(-2; -1)$.

Câu 9. Tìm tọa độ các vectơ sau:

a. $\vec{a} = 2\vec{i} + 7\vec{j}$

b. $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$

c. $\vec{c} = 4\vec{i}$

d. $\vec{d} = -9\vec{j}$

Lời giải

a. $\vec{a} = (2; 7);$

b. $\vec{b} = (-1; 3)$

c. $\vec{c} = (4; 0);$

d. $\vec{d} = (0; -9)$

Câu 10. Cho $M(1; 2), N(-3; 4), P(5; 0)$. Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{NP}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M) = (-3 - 1; 4 - 2) = (-4; 2)$$

$$\overrightarrow{PM} = (x_M - x_P; y_M - y_P) = (1 - 5; 2 - 0) = (-4; 2)$$

$$\overrightarrow{NP} = (x_P - x_N; y_P - y_N) = (5 + 3; 0 - 4) = (8; -4)$$

Câu 11. Tìm tọa độ của các vectơ sau:

a) $\vec{a} = -2\vec{i}$

b) $\vec{b} = 3\vec{j};$

c) $\vec{c} = -4\vec{i} + \vec{j}$

d) $\vec{d} = \sqrt{5}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}.$

Lời giải

a) $\vec{a} = (-2; 0);$

b) $\vec{b} = (0; 3)$

c) $\vec{c} = (-4; 1);$

d) $\vec{d} = \left(\sqrt{5}; \frac{1}{2}\right).$

Câu 12. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{u} = (1; -2), \vec{v} = (-2; -3)$.

Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}, -2\vec{u}$ và $3\vec{u} - 4\vec{v}$.

Lời giải

Ta có: $\vec{u} + \vec{v} = (-1; -5), \vec{u} - \vec{v} = (3; 1), -2\vec{u} = (-2; 4)$.

Với $3\vec{u} = (3; -6), 4\vec{v} = (-8; -12)$ ta có: $3\vec{u} - 4\vec{v} = (11; 6)$.

Câu 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (-1; 2), \vec{b} = (3; 1), \vec{c} = (2; -3)$.

a) Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$.

b) Tìm tọa độ của vectơ \vec{x} sao cho $\vec{x} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$.

Lời giải

a) Ta có: $2\vec{a} = (-2; 4)$ nên $2\vec{a} + \vec{b} = (1; 5)$. Mà $3\vec{c} = (6; -9)$.

Suy ra $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} = (-5; 14)$.

b) Ta có: $\vec{x} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b}$. Mà $\vec{a} + \vec{c} = (1; -1)$, $2\vec{b} = (6; 2)$.

Suy ra $\vec{x} = \vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b} = (-5; -3)$.

Câu 14. Cho $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = \left(\frac{3}{2}; 3\right)$.

a) Tìm tọa độ của $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$.

b) Hỏi \vec{a} và \vec{b} có cùng phương hay không?

Lời giải

a) Vì $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = \left(\frac{3}{2}; 3\right)$ nên $\vec{a} + \vec{b} = \left(\frac{5}{2}; 5\right)$.

Ta có $2\vec{b} = (3; 6)$ nên $\vec{a} - 2\vec{b} = (-2; -4)$.

b) Do $\frac{3}{2}\vec{a} = \left(\frac{3}{2}; 3\right) = \vec{b}$ nên hai vector \vec{a} và \vec{b} cùng phương.

Câu 15. Cho hai vector $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (3; 0)$.

a) Tìm tọa độ của vector $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

b) Tính các tích vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(3\vec{a}) \cdot (2\vec{b})$.

Lời giải

a) Ta có: $2\vec{a} + 3\vec{b} = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 3; 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0) = (11; 4)$.

b) Ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 3;$$

$$3\vec{a} = (3; 6) \text{ và } 2\vec{b} = (6; 0) \text{ nên } (3\vec{a}) \cdot (2\vec{b}) = 3 \cdot 6 + 6 \cdot 0 = 18.$$

Câu 16. Cho ba vector $\vec{m} = (1; 1)$, $\vec{n} = (2; 2)$, $\vec{p} = (-1; -1)$. Tìm tọa độ của các vector:

a) $\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$

b) $(\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{m}$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p} = (1 + 2 \cdot 2 - 3(-1); 1 + 2 \cdot 2 - 3(-1)) = (8; 8)$.

b) Ta có $(\vec{p} \cdot \vec{n})\vec{m} = [-1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2]\vec{m} = -4\vec{m} = (-4; -4)$.

Câu 17. Cho $\vec{u} = (2; -1)$, $\vec{v} = (1; 5)$. Tìm tọa độ của mỗi vector sau:

a) $\vec{u} + \vec{v}$;

b) $\vec{u} - \vec{v}$.

Lời giải

Do $\vec{u} = (2; -1)$, $\vec{v} = (1; 5)$ nên ta có:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (2 + 1; -1 + 5)$. Vậy $\vec{u} + \vec{v} = (3; 4)$.

b) $\vec{u} - \vec{v} = (2 - 1; -1 - 5)$. Vậy $\vec{u} - \vec{v} = (1; -6)$.

Câu 18. Cho $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (2; 1)$, $\vec{c} = (1; 2)$. Tính tọa độ của mỗi vector sau: $3\vec{a}$; $2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c}$.

Lời giải

Do $\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (2; 1)$, $\vec{c} = (1; 2)$ nên ta có:

+) $3\vec{a} = (3 \cdot (-2); 3 \cdot 3)$. Vậy $3\vec{a} = (-6; 9)$.

+) $2\vec{a} = (-4; 6)$.

Do đó $2\vec{a} - \vec{b} = (-4 - 2; 6 - 1)$, vì vậy $2\vec{a} - \vec{b} = (-6; 5)$.

+) $2\vec{b} = (4; 2)$, $\vec{a} + 2\vec{b} = (2; 5)$ và $-\frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{3}{2}; -3\right)$.

Do đó $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $\vec{a} = (-1; 2)$; $\vec{b} = (3; 1)$; $\vec{c} = (2; -3)$

a. Tìm tọa độ vector \vec{u} sao cho $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$

b. Tìm tọa độ vector \vec{x} sao cho $\vec{x} + 2\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$

Lời giải

Có: $\vec{a} = (-1; 2); \vec{b} = (3; 1); \vec{c} = (2; -3)$

a. $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} = (2 \cdot (-1) + 3 - 3 \cdot 2; 2 \cdot 2 + 1 - 3 \cdot (-3))$ hay $\vec{u} = (-5; 14)$

b. $\vec{x} = \vec{a} + \vec{c} - 2\vec{b} = (-1 + 2 - 2 \cdot 3; 2 - 3 - 2 \cdot 1)$ hay $\vec{x} = (-5; -3)$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 20. Viết tọa độ của các vector sau:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}; \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}; \vec{c} = 3\vec{i}; \vec{d} = -2\vec{j}$.

b) $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}; \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}; \vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}; \vec{d} = -4\vec{j}; \vec{e} = 3\vec{i}$

Lời giải

a) $\vec{a} = (2; 3); \vec{b} = \left(\frac{1}{3}; -5\right); \vec{c} = (3; 0); \vec{d} = (0; -2)$

b) $\vec{a} = (1; -3); \vec{b} = \left(\frac{1}{2}; 1\right); \vec{c} = (-1; \frac{3}{2}); \vec{d} = (0; -4); \vec{e} = (3; 0)$

Câu 21. Viết dưới dạng $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ khi biết tọa độ của vector \vec{u} là:

a) $\vec{u} = (2; -3); \vec{u} = (-1; 4); \vec{u} = (2; 0); \vec{u} = (0; -1)$.

b) $\vec{u} = (1; 3); \vec{u} = (4; -1); \vec{u} = (1; 0); \vec{u} = (0; 0)$.

Lời giải

a) Ta có:

$\vec{u} = (2; -3) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}; \vec{u} = (-1; 4) \Rightarrow \vec{u} = -\vec{i} + 4\vec{j}; \vec{u} = (2; 0) \Rightarrow \vec{u} = 2\vec{i} + 0\vec{j}; \vec{u} = (0; -1) \Rightarrow \vec{u} = 0\vec{i} - \vec{j}$

b) Ta có: $\vec{u} = (1; 3) \Rightarrow \vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}; \vec{u} = (4; -1) \Rightarrow \vec{u} = 4\vec{i} - \vec{j}; \vec{u} = (1; 0) \Rightarrow \vec{u} = \vec{i} + 0\vec{j}; \vec{u} = (0; 0) \Rightarrow \vec{u} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$

Câu 22. Cho $\vec{a} = (1; -2); \vec{b} = (0; 3)$ tìm tọa độ của các vector sau:

a) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}; \vec{y} = \vec{a} - \vec{b}; \vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

b) $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b}; \vec{v} = 2 + \vec{b}; \vec{w} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

a) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} = (1 + 0; -2 + 3) = (1; 1), \vec{y} = \vec{a} - \vec{b} = (1 - 0; -2 - 3) = (1; -5),$

$\vec{z} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (3 \cdot 1 + 3 \cdot 0; 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 3) = (2; -13).$

b) $\vec{u} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (3; -12), \vec{u} = 2\vec{a} + \vec{b} = (2; -1), \vec{w} = 4\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = 4\left(3; -\frac{11}{2}\right)$

Câu 23. Cho $\vec{a} = (2; 0); \vec{b} = \left(-1; \frac{1}{2}\right); \vec{c} = (4; -6)$.

a) Tìm tọa độ của vector $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$.

b) Tìm 2 số m, n sao cho $m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0}$.

c) Biểu diễn vector \vec{c} theo \vec{a}, \vec{b} .

Lời giải

$$a) \vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c} = \left(2.2 - 3.(-1) + 5.4; 2.0 - 3.\frac{1}{2} + 5.(6) \right) = \left(27; -\frac{63}{2} \right)$$

$$b) \text{Ta có: } m\vec{a} + \vec{b} - n\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow m.2\vec{i} + \left(-\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \right) - n(4\vec{i} - 6\vec{j}) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 - 4n = 0 \\ \frac{1}{2} + 6n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{3} \\ n = -\frac{1}{12} \end{cases}$$

$$c) \text{Giả sử: } \vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \ (x, y \in \mathbb{R}) \text{ ta có: } \begin{cases} 4 = x.2 + y.(-1) \\ -6 = x.0 + y.\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -12 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \vec{c} = 8\vec{a} - 12\vec{b}$$

Dạng 2. Tìm điều kiện để hai vector bằng nhau, ba điểm thẳng hàng

$$\text{Phương pháp: Với } \vec{a} = (x_1; y_1); \vec{b} = (x_2; y_2), \text{ ta có } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

$$A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \text{Tồn tại } k \in \mathbb{R} \text{ sao cho } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}.$$

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 24. Cho ba điểm $A(-1; -3), B(2; 3)$ và $C(3; 5)$. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; 6), \overrightarrow{BC} = (1; 2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{BC}$. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Câu 25. Cho tam giác ABC có $A(-2; 1), B(2; 5), C(5; 2)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

Do $M(x_M; y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB nên

$$x_M = \frac{-2+2}{2} = 0; y_M = \frac{1+5}{2} = 3.$$

Vậy $M(0; 3)$.

Do $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC nên $x_G = \frac{(-2)+2+5}{3}; y_G = \frac{1+5+2}{3}$. Vậy $G\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Câu 26. Tìm các số thực a và b sao cho mỗi cặp vector sau bằng nhau:

a. $\vec{u} = (2a-1; -3)$ và $\vec{v} = (3; 4b+1)$

b. $\vec{x} = (a+b; -2a+3b)$ và $\vec{y} = (2a-3; 4b)$.

Lời giải

a. $\vec{u} = (2a-1; -3) = \vec{v} = (3; 4b+1)$

$$\begin{cases} 2a-1=3 \\ -3=4b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Vậy $a=2$ và $b=-1$ thì $\vec{u} = (2a-1; -3) = \vec{v} = (3; 4b+1)$

b. $\vec{x} = (a+b; -2a+3b) = \vec{y} = (2a-3; 4b)$

$$\begin{cases} a+b=2a-3 \\ -2a+3b=4b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a-3 \\ -2a+3(a-3)=4(a-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=1 \end{cases}$$

Vậy $a=1$ và $b=-2$ thì $\vec{x} = (a+b; -2a+3b) = \vec{y} = (2a-3; 4b)$.

Câu 27. Chứng minh rằng:

a. $\vec{a} = (4; -6)$ và $\vec{b} = (-2; 3)$ là hai vector ngược hướng.

b. $\vec{a} = (-2; 3)$ và $\vec{b} = (-8; 12)$ là hai vector cùng hướng.

c. $\vec{a} = (0; 4)$ và $\vec{b} = (0; -4)$ là hai vector đối nhau.

Lời giải

a. Nhận thấy: $\vec{a} = -2\vec{b} \Rightarrow \vec{a}$ và \vec{b} ngược hướng

b. Nhận thấy: $\vec{a} = 4\vec{b} \Rightarrow \vec{a}$ và \vec{b} cùng hướng.

c. Ta có: $|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4; |\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$

Nhận thấy: $\vec{a} = -\vec{b}$ mà $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$

$\Rightarrow \vec{a}$ và \vec{b} là hai vector đối nhau.

Câu 28. Tìm các số thực a và b sao cho mỗi cặp vector sau bằng nhau:

a) $\vec{m} = (3a-1; 2b+1)$ và $\vec{n} = (-4; 2)$;

b) $\vec{u} = (2a-1; -3)$ và $\vec{v} = (3; 4b+1)$;

c) $\vec{x} = (a+b; -2a+3b)$ và $\vec{y} = (2a-3; 4b)$.

Lời giải

$$\text{a) } \vec{m} = \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-1 = -4 \\ 2b+1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{b) } \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-1 = 3 \\ -3 = 4b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 2a-3 \\ -2a+3b = 4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = 3 \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ b = -2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Câu 29. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho điểm $A(-1; 2), B(2; 3), C(-4; m)$. Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3; 1), \overrightarrow{AC} = (-3; m-2)$.

A, B, C thẳng hàng \Leftrightarrow Tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

$$\text{Từ } \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \text{ ta có: } \begin{cases} 3 = k \cdot (-3) \\ 1 = k(m-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 \\ m = 1 \end{cases}$$

Suy ra với $m = 1$ thì tồn tại $k \in \mathbb{R}$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ hay A, B, C thẳng hàng.

Câu 30. Cho tam giác ABC có toạ độ các đỉnh là $A(1; 1), B(7; 3), C(4; 7)$ và cho các điểm $M(2; 3), N(3; 5)$.

a) Chứng minh bốn điểm A, M, N, C thẳng hàng.

b) Chứng minh trọng tâm của các tam giác ABC và MNB trùng nhau.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AC} = (3; 6); \overrightarrow{AM} = (1; 2); \overrightarrow{AN} = (2; 4)$;

$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AN}$, suy ra bốn điểm A, M, N, C thẳng hàng.

b) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và MNB , ta có:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1+7+4}{3} = 4 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1+3+7}{3} = \frac{11}{3} \end{cases}, \begin{cases} x_{G'} = \frac{x_M + x_N + x_B}{3} = \frac{2+3+7}{3} = 4 \\ y_{G'} = \frac{y_M + y_N + y_B}{3} = \frac{3+5+3}{3} = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Suy ra G và G' trùng nhau.

Câu 31. Tìm các số thực a và b sao cho mỗi cặp vector sau bằng nhau:

a) $\vec{m} = (2a+3; b-1)$ và $\vec{n} = (1; -2)$;

b) $\vec{u} = (3a-2; 5)$ và $\vec{v} = (5; 2b+1)$;

c) $\vec{x} = (2a + b; 2b)$ và $\vec{y} = (3 + 2b; b - 3a)$.

Lời giải

a) $a = -1, b = -1$.

b) $a = \frac{7}{3}, b = 2$.

c) $a = \frac{3}{5}, b = \frac{-9}{5}$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 32. Cho ba điểm $A(-1;1), B(1;3), C(-2;0)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm các tỉ số mà điểm A chia đoạn BC , điểm B chia đoạn AC , điểm C chia đoạn AB .

Lời giải:

a) Từ tọa độ các điểm ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;2) \\ \overrightarrow{BC} = (-3;-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ nên 3 điểm A, B và C thẳng hàng.

b) Ta có:

$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2;2) \\ \overrightarrow{AC} = (-1;-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} \Rightarrow A$ chia đoạn BC theo tỉ số $k = -2$.

$\begin{cases} \overrightarrow{BA} = (-2;-2) \\ \overrightarrow{BC} = (-3;-3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \Rightarrow B$ chia đoạn AC theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$.

$\begin{cases} \overrightarrow{CA} = (1;1) \\ \overrightarrow{CB} = (3;3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{CA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \Rightarrow C$ chia đoạn AB theo tỉ số $k = \frac{1}{3}$.

Dạng 3. Tìm tọa độ của một điểm M thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp

Ta thường tìm những hệ thức về vectơ liên hệ giữa M với các điểm đã biết. Từ đó lập hệ phương trình mà hai ẩn là tọa độ của M . Giải hệ phương trình ta tìm được tọa độ của M .

-Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Nếu $M(x_M; y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB thì

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

-Cho tam giác ABC có $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$. Nếu $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 33. Cho bốn điểm $A(3;5), B(4;0), C(0;-3), D(2;2)$. Trong các điểm đã cho, hãy tìm điểm:

- Thuộc trục hoành;
- Thuộc trục tung;
- Thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất

Lời giải

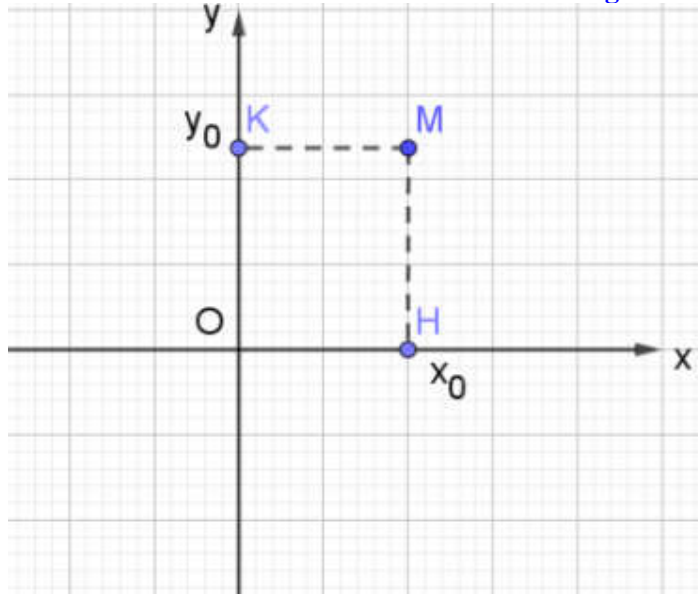
- Điểm $B(4;0)$ thuộc trục hoành.
- Điểm $C(0;-3)$ thuộc trục tung.
- Điểm $D(2;2)$ thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Câu 34. Cho điểm $M(x_0; y_0)$. Tìm tọa độ:

- Điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox ;

- b. Điểm M' đối xứng với M qua trục Ox ;
 c. Điểm K là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy ;
 d. Điểm M'' đối xứng với M qua trục Oy .
 e. Điểm C đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ.

Lời giải



a. $H(x_0; 0)$

b. M' đối xứng với M qua trục $Ox \Rightarrow H$ là trung điểm của MM'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M'} = 2x_0 - x_0 \\ y_{M'} = 2 \cdot 0 - y_0 \end{cases} \begin{cases} x_{M'} = x_0 \\ y_{M'} = -y_0 \end{cases}$$

Vậy $M'(x_0; -y_0)$.

c. $K(0; y_0)$

d. M'' đối xứng với M qua trục $Oy \Rightarrow K$ là trung điểm của MM''

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{M''} = 2x_K - x_M \\ y_{M''} = 2y_K - y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{M''} = 2 \cdot 0 - x_0 \\ y_{M''} = 2y_0 - y_0 \end{cases} \begin{cases} x_{M''} = -x_0 \\ y_{M''} = y_0 \end{cases}$$

Vậy $M''(-x_0; y_0)$.

e. C đối xứng với M qua gốc tọa độ O nên O là trung điểm của CM .

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_O - x_M \\ y_C = 2y_O - y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2 \cdot 0 - x_0 \\ y_C = 2 \cdot 0 - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -x_0 \\ y_C = -y_0 \end{cases}$$

Vậy $C(-x_0; -y_0)$.

Câu 35. Cho tam giác DEF có tọa độ các đỉnh là $D(2; 2)$, $E(6; 2)$ và $F(2; 6)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm M của cạnh EF .

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác DEF .

Lời giải

a) Ta có: $x_M = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{6 + 2}{2} = 4$, $y_M = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4$.

Vậy tọa độ trung điểm M của cạnh EF là $M(4; 4)$.

b) Ta có: $x_G = \frac{x_D + x_E + x_F}{3} = \frac{2 + 6 + 2}{3} = \frac{10}{3}$, $y_G = \frac{y_D + y_E + y_F}{3} = \frac{2 + 2 + 6}{3} = \frac{10}{3}$.

Vậy tọa độ trọng tâm G của tam giác DEF là $G\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Câu 36. Cho tam giác MNP có tọa độ các đỉnh là $M(3;3), N(7;3)$ và $P(3;7)$.

- Tìm tọa độ trung điểm E của cạnh MN .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác MNP .

Lời giải

a) Ta có: $x_E = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{3+7}{2} = 5, y_E = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$. Vậy $E(5;3)$.

b) Ta có: $x_G = \frac{x_M + x_N + x_P}{3} = \frac{3+7+3}{3} = \frac{13}{3}, y_G = \frac{y_M + y_N + y_P}{3} = \frac{3+3+7}{3} = \frac{13}{3}$. Vậy $G\left(\frac{13}{3}; \frac{13}{3}\right)$.

Câu 37. Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(1;3), B(3;1)$ và $C(6;4)$.

- Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC và số đo của góc B .
- Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{BA} = (-2;2); \overrightarrow{BC} = (3;3); \overrightarrow{AC} = (5;1)$;

$AB = 2\sqrt{2}; BC = 3\sqrt{2}; AC = \sqrt{26}$
 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -6 + 6 = 0 \Rightarrow \widehat{ABC} = 90^\circ$.

b) Tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm AC .

Vậy ta có $I\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

Câu 38. Cho năm điểm $A(2;0), B(0;-2), C(3;3), D(-2;-2), E(1;-1)$. Trong các điểm đã cho, hãy tìm điểm:

- Thuộc trục hoành;
- Thuộc trục tung;
- Thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Lời giải

- A thuộc trục hoành;
- B thuộc trục tung;
- C, D thuộc đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.

Câu 39. Cho điểm $M(4;5)$. Tìm tọa độ:

- Điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox ;
- Điểm M' đối xứng với M qua trục Ox ;
- Điểm K là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy ;
- Điểm M'' đối xứng với M qua trục Oy ;
- Điểm C đối xứng với M qua gốc O .

Lời giải

- Điểm $H(4;0)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Ox ;
- Điểm $M'(4;-5)$ đối xứng với M qua trục Ox ;
- Điểm $K(0;5)$ là hình chiếu vuông góc của điểm M trên trục Oy ;
- Điểm $M''(-4;5)$ đối xứng với M qua trục Oy ;
- Điểm $C(-4;-5)$ đối xứng với M qua gốc O .

Câu 40. Cho ba điểm $A(1;1), B(2;4), C(4;4)$.

- Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là một hình bình hành.
- Tìm tọa độ giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

a) $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Đặt tọa độ của $D(x_D; y_D)$, ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-1=4-x_D \\ 4-1=4-y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=3 \\ y_D=1 \end{cases}$. Vậy $D(3;1)$.

b) Gọi M là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành $ABCD$.

Ta có M là trung điểm AC , suy ra $M(2,5; 2,5)$.

Câu 41. Cho ba điểm $A(2;2); B(3;5), C(5;5)$.

- Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

- b. Tìm tọa độ giao điểm hai đường chéo của hình bình hành.
c. Giải tam giác ABC.

Lời giải

a. Xét $D(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 3); \overrightarrow{DC} = (5 - x; 5 - y)$

Để ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x = 1 \\ 5 - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy $D(4; 2)$

b. Gọi M là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{2 + 5}{2} \\ y_M = \frac{2 + 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{7}{2} \\ y_M = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Vậy $M\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$

c. Ta có: $\overrightarrow{AC} = (3; 3); \overrightarrow{BC} = (2; 0)$

Suy ra: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$

$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

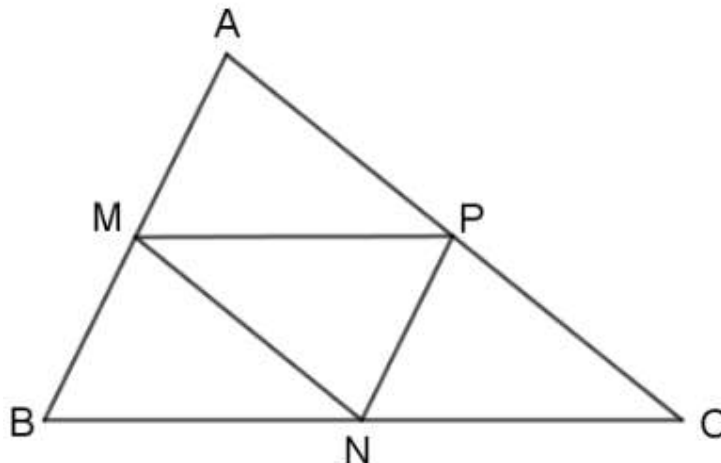
$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 3}{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{A} \approx 26^\circ 34'$$

$$\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC} = \frac{(-1) \cdot 2 + (-3) \cdot 0}{\sqrt{10} \cdot 2} = \frac{-\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \hat{B} \approx 108^\circ 26'$$

$$\cos C = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \cdot CB} = \frac{(-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot 0}{3\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ$$

Câu 42. Cho tam giác ABC có các điểm $M(2; 2), N(3; 4), P(5; 3)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và CA.

- a. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.
b. Chứng minh rằng trọng tâm của tam giác ABC và MNP trùng nhau.
c. Giải tam giác ABC

Lời giải

a. $\overrightarrow{MP} = (3; 1); \overrightarrow{BN} = (3 - x_B; 4 - y_B)$

Có M là trung điểm cạnh AB , P là trung điểm cạnh AC nên MP là đường trung bình của tam giác ABC

$$\Rightarrow MP \parallel BC; MP = \frac{1}{2}BC = BN \Rightarrow MPNB \text{ (hbh)}$$

$$\Rightarrow \overline{MP} = \overline{BN}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = 3 - x_B \\ 1 = 4 - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 0 \\ y_B = 3 \end{cases} \Rightarrow B(0;3)$$

$$\text{Ta có: } N \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } \begin{cases} x_C = 2x_N - x_B \\ y_C = 2y_N - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2.3 - 0 \\ y_C = 2.4 - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 6 \\ y_C = 5 \end{cases} \Rightarrow C(6;5)$$

$$\text{Ta có: } M \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên } \begin{cases} x_A = 2x_M - x_B \\ y_A = 2y_M - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2.2 - 0 \\ y_A = 2.2 - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 4 \\ y_A = 1 \end{cases} \Rightarrow A(4;1)$$

Vậy $A(4;1), B(0;3), C(6;5)$

b. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{4+0+6}{3} \\ y_G = \frac{1+3+5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{10}{3} \\ y_G = 3 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{10}{3}; 3\right)$$

Gọi G' là trọng tâm tam giác MNP , ta có:

$$\begin{cases} x_{G'} = \frac{x_M + x_N + x_P}{3} \\ y_{G'} = \frac{y_M + y_N + y_P}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{G'} = \frac{2+3+5}{3} \\ y_{G'} = \frac{2+4+3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{G'} = \frac{10}{3} \\ y_{G'} = 3 \end{cases} \Rightarrow G'\left(\frac{10}{3}; 3\right)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow G \equiv G'$

Vậy trọng tâm tam giác ABC trùng với trọng tâm tam giác MNP .

c. Ta có: $\overline{AB} = (-4; 2); \overline{AC} = (2; 4); \overline{BC} = (6; 2)$

$$\text{Suy ra: } AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$AC = |\overline{AC}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$BC = |\overline{BC}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\cos A = \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{(-4) \cdot 2 + 2 \cdot 4}{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

Xét tam giác ABC có $AB = AC (= 2\sqrt{5})$ và $\hat{A} = 90^\circ$

\Rightarrow Tam giác ABC vuông cân tại $A \Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$

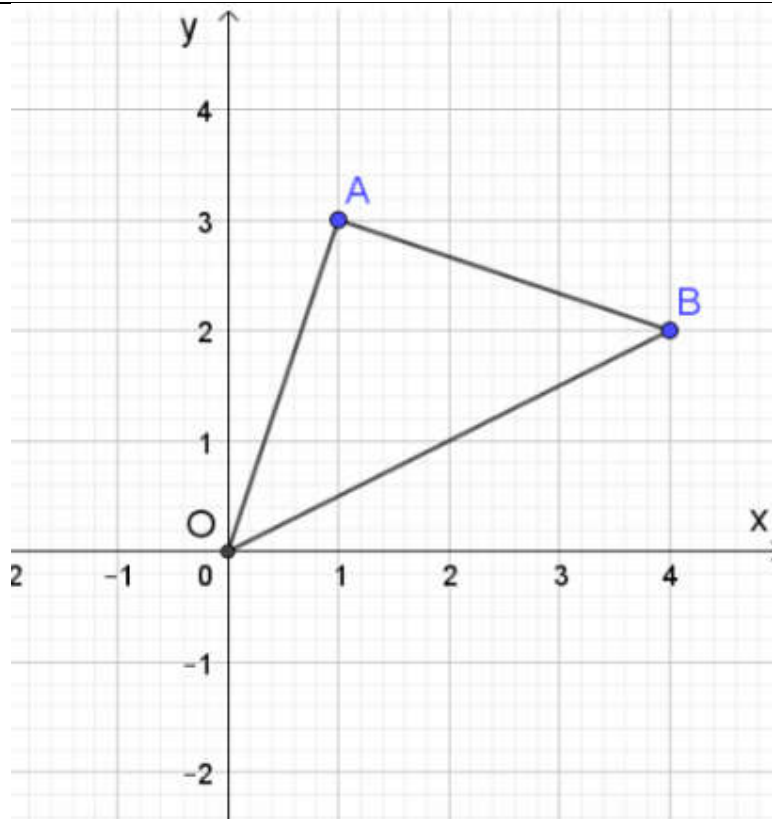
Câu 43. Cho hai điểm $A(1;3), B(4;2)$.

a. Tìm tọa độ điểm D nằm trên trục Ox sao cho $DA = DB$

b. Tính chu vi tam giác OAB .

c. Chứng minh rằng OA vuông góc với AB và từ đó tính diện tích tam giác OAB .

Lời giải



a. D nằm trên trục Ox nên $D(x; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (x-1; -3); \overrightarrow{BD} = (x-4; -2)$

Ta có: $DA = DB \Rightarrow (x-1)^2 + (-3)^2 = (x-4)^2 + (-2)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + 9 = x^2 - 8x + 16 + 4 \Leftrightarrow 6x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$

Vậy $D\left(\frac{5}{3}; 0\right)$

b. Ta có: $\overrightarrow{OA} = (1; 3); \overrightarrow{OB} = (4; 2); \overrightarrow{AB} = (3; -1)$

Suy ra: $OA = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$OB = |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$

\Rightarrow Chu vi tam giác OAB là: $OA + OB + AB = \sqrt{10} + 2\sqrt{5} + \sqrt{10} = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5}$

c. Ta có: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5$

Câu 44. Cho tam giác MNP có tọa độ các đỉnh là $M(2; 2), N(6; 3)$ và $P(5; 5)$.

a) Tìm tọa độ trung điểm E của cạnh MN .

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác MNP .

Lời giải

a) Ta có: $x_E = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{2+6}{2} = 4, y_E = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$. Vậy $E\left(4; \frac{5}{2}\right)$.

b) Ta có: $x_G = \frac{x_M + x_N + x_P}{3} = \frac{2+6+5}{3} = \frac{13}{3}, y_G = \frac{y_M + y_N + y_P}{3} = \frac{2+3+5}{3} = \frac{10}{3}$.

Vậy $G\left(\frac{13}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2;3), B(-1;1), C(3;-1)$.

a) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

b) Tìm tọa độ trung điểm N của đoạn thẳng AC . Chứng minh $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}$.

Lời giải

a) Giả sử $M(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (x-2; y-3), \overrightarrow{BC} = (4; -2)$.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=4 \\ y-3=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases} \text{ Vậy } M(6;1).$$

b) Giả sử $N(x; y)$. Ta có: $\overrightarrow{AN} = (x-2; y-3), \overrightarrow{NC} = (3-x; -1-y)$.

Vì N là trung điểm của đoạn thẳng AC nên ta có:

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BN} = \left(\frac{7}{2}; 0\right), \overrightarrow{NM} = \left(\frac{7}{2}; 0\right). \text{ Suy ra } \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}.$$

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Các điểm $M(1;-2), N(4;-1)$ và $P(6;2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Tìm tọa độ của các điểm A, B, C .

Lời giải

Vì M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB nên tứ giác $ANMP$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{PM}$. Giả sử $A(x_A; y_A)$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AN} = (4-x_A; -1-y_A); \overrightarrow{PM} = (-5; -4).$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} 4-x_A=-5 \\ -1-y_A=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=9 \\ y_A=3 \end{cases} \text{ Vậy } A(9;3).$$

Tương tự, từ $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NP}$, ta tính được $B(3;1), C(-1;-5)$.

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;-2), B(3;2), C(7;4)$.

a) Tìm tọa độ của các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$. So sánh các khoảng cách từ B tới A và C .

b) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?

c) Tìm điểm $D(x; y)$ để $ABCD$ là một hình thoi.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{AB} = (3-1; 2-(-2)) = (2; 4), \overrightarrow{BC} = (7-3; 4-2) = (4; 2).$$

Các khoảng cách từ B tới A và C lần lượt là:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}; BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Do đó các khoảng cách này bằng nhau.

b) Hai vector $\overrightarrow{AB} = (2; 4), \overrightarrow{BC} = (4; 2)$ không cùng phương (vì $\frac{2}{4} \neq \frac{4}{2}$). Do đó các điểm A, B, C

không cùng nằm trên một đường thẳng. Vậy chúng không thẳng hàng.

c) Các điểm A, B, C không thẳng hàng và $BA = BC$ nên $ABCD$ là một hình thoi khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\text{Do } \overrightarrow{AD} = (x-1; y+2), \overrightarrow{BC} = (4; 2) \text{ nên}$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=4 \\ y+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=0 \end{cases}.$$

Vậy điểm cần tìm là $D(5;0)$.

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các vector $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}, \vec{b} = (4; -1)$ và các điểm $M(-3;6), N(3;-3)$.

a) Tìm mối liên hệ giữa các vector \overrightarrow{MN} và $2\vec{a} - \vec{b}$.

b) Các điểm O, M, N có thẳng hàng hay không?

c) Tìm điểm $P(x; y)$ để $OMNP$ là một hình bình hành.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{b} = (4; -1)$ và $\vec{a} = 3 \cdot \vec{i} - 2 \cdot \vec{j} \Rightarrow \vec{a}(3; -2)$

$$\Rightarrow 2\vec{a} - \vec{b} = (2 \cdot 3 - 4; 2 \cdot (-2) - (-1)) = (2; -3)$$

Lại có: $M(-3; 6), N(3; -3)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (3 - (-3); -3 - 6) = (6; -9)$$

Để thấy: $(6; -9) = 3 \cdot (2; -3) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = 3(2\vec{a} - \vec{b})$

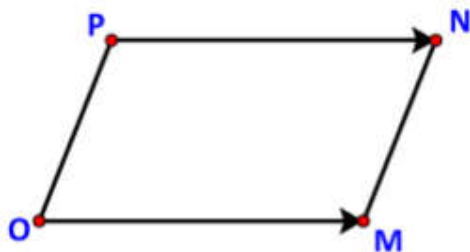
b) Ta có: $\overrightarrow{OM} = (-3; 6)$ (do $M(-3; 6)$) và $\overrightarrow{ON} = (3; -3)$ (do $N(3; -3)$).

Hai vector này không cùng phương (vì $\frac{-3}{3} \neq \frac{6}{-3}$).

Do đó các điểm O, M, N không cùng nằm trên một đường thẳng.

Vậy chúng không thẳng hàng.

c) Các điểm O, M, N không thẳng hàng nên OMNP là một hình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PN}$.



Do $\overrightarrow{OM} = (-3; 6), \overrightarrow{PN} = (3 - x; -3 - y)$ nên

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PN} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3 - x \\ 6 = -3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -9 \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $P(6; -9)$.

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $A(1; 3), B(2; 4), C(-3; 2)$.

a) Hãy giải thích vì sao các điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB .

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

d) Tìm điểm $D(x; y)$ để $O(0; 0)$ là trọng tâm của tam giác ABD .

Lời giải

a)

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1; 4 - 3) = (1; 1), \overrightarrow{AC} = (-3 - 1; 2 - 3) = (-4; -1)$$

Hai vector này không cùng phương (vì $\frac{1}{-4} \neq \frac{1}{-1}$).

Do đó các điểm A, B, C không cùng nằm trên một đường thẳng.

Vậy chúng không thẳng hàng.

b) Trung điểm M của đoạn thẳng AB có tọa độ là $\left(\frac{1+2}{2}; \frac{3+4}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$

c) Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là $\left(\frac{1+2+(-3)}{3}; \frac{3+4+2}{3}\right) = (0; 3)$

d) Để $O(0; 0)$ là trọng tâm của tam giác ABD thì

$$(0; 0) = \left(\frac{x_A + x_B + x_D}{3}; \frac{y_A + y_B + y_D}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow (0; 0) = \left(\frac{1+2+x}{3}; \frac{3+4+y}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow (0; 0) = (1+2+x; 3+4+y)$$

$$\Leftrightarrow (0; 0) = (x+3; y+7)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x + 3 \\ 0 = y + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -7 \end{cases}$$

Vậy tọa độ điểm D là $(-3; -7)$.

- Câu 50.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(-2; 3), B(4; 5), C(2; -3)$.
- Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
 - Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng BC .
 - Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (6; 2), \overrightarrow{AC} = (4; -6)$.

Do $\frac{6}{4} \neq \frac{2}{-6}$ nên không tồn tại $k \in \mathbb{R}$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Vì vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Do $M(x_M; y_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng BC nên ta có:

$$x_M = \frac{4+2}{2} = 3; y_M = \frac{5+(-3)}{2} = 1. \text{ Vậy } M(3; 1).$$

c) Do $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$x_G = \frac{-2+4+2}{3} = \frac{4}{3}; y_G = \frac{3+5+(-3)}{3} = \frac{5}{3}. \text{ Vậy } G\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right).$$

- Câu 51.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm không thẳng hàng: $A(1; 3), B(-2; 6), C(5; 1)$.

- Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

a) Điểm $I(x; y)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Mặt khác $\overrightarrow{IA} = (1-x; 3-y), \overrightarrow{IB} = (-2-x; 6-y), \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = (-1-2x; 9-2y)$.

$$\text{Do đó, (*) tương đương với } \begin{cases} -1-2x=0 \\ 9-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{9}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } I\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right).$$

b) Điểm $G(x; y)$ là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (**)

Mặt khác

$$\overrightarrow{GA} = (1-x; 3-y), \overrightarrow{GB} = (-2-x; 6-y), \overrightarrow{GC} = (5-x; 1-y)$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = (4-3x; 10-3y).$$

$$\text{Do đó, (**) tương đương với } \begin{cases} 4-3x=0 \\ 10-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3} \\ y=\frac{10}{3} \end{cases}.$$

- Câu 52.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(3; -4)$.

- Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn AB .
- Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NB}$.

Lời giải

$$\text{a) Gọi } M(x; y) \text{ là trung điểm của } AB. \text{ Khi đó } \begin{cases} x = \frac{1+3}{2} = 2 \\ y = \frac{2+(-4)}{2} = -1 \end{cases}. \text{ Suy ra } M(2; -1).$$

b) Do $\overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NB}$ nên $\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} = (1-2)\overrightarrow{ON} = -\overrightarrow{ON}$, suy ra $\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Từ đó, do $\overrightarrow{OA} = (1; 2), \overrightarrow{OB} = (3; -4)$ nên $\overrightarrow{ON} = (5; -10)$. Vậy $N(5; -10)$.

Nhận xét

Một cách khái quát, với hai điểm $A(a_1; a_2), B(b_1; b_2)$ thì điểm P thoả mãn $\overline{PA} = k\overline{PB} (k \neq 1)$ có toạ độ $\left(\frac{a_1 - kb_1}{1-k}; \frac{a_2 - kb_2}{1-k}\right)$.

Câu 53. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(2; -1), B(1; 4)$ và $C(-2; 3)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

a) Từ giả thiết suy ra $\overline{AB} = (-1; 5), \overline{AC} = (-4; 4)$. Do $\frac{-1}{-4} \neq \frac{5}{4}$ nên các vector \overline{AB} và \overline{AC} không cùng phương. Suy ra A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) Gọi $G(x; y)$ là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó
$$\begin{cases} x = \frac{2+1+(-2)}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{(-1)+4+3}{3} = 2 \end{cases}$$

Suy ra $G\left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

Câu 54. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm A, B thoả mãn $\overline{OA} = 2\vec{i} - 3\vec{j}, \overline{OB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

a) Chứng minh rằng O, A, B không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ của điểm C sao cho tứ giác $ABCO$ là hình bình hành.

c) Tìm toạ độ của điểm D thuộc trục hoành sao cho $DA = DB$.

Lời giải

a) Từ giả thiết suy ra $\overline{OA} = (2; -3)$ và $\overline{OB} = (3; 2)$. Vì $\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{2}$ nên hai vector \overline{OA} và \overline{OB} không cùng phương, hay O, A, B không thẳng hàng.

b) Từ giả thiết suy ra $\overline{AB} = (1; 5)$. Giả sử tìm được điểm C sao cho tứ giác $ABCO$ là hình bình hành. Khi đó do $\overline{OC} = \overline{AB}$ nên $\overline{OC} = (1; 5)$. Suy ra $C(1; 5)$.

c) Xét điểm $D(d; 0) \in Ox$. Khi đó $DA = \sqrt{(2-d)^2 + 9}, DB = \sqrt{(3-d)^2 + 4}$.

Suy ra $DA = DB \Leftrightarrow DA^2 = DB^2 \Leftrightarrow (2-d)^2 + 9 = (3-d)^2 + 4 \Leftrightarrow d = 0$. Vậy điểm D cần tìm trùng với gốc toạ độ $O(0; 0)$.

Câu 55. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm $A(1; 2)$ và $B(3; -4)$. Tìm toạ độ của điểm C thuộc trục tung sao cho vector $\overline{CA} + \overline{CB}$ có độ dài ngắn nhất.

Lời giải

Xét điểm $C(0; c) \in Oy$. Khi đó $\overline{CA} = (1; 2-c)$ và $\overline{CB} = (3; -4-c)$.

Do đó $\overline{CA} + \overline{CB} = (4; -2-2c)$, suy ra $|\overline{CA} + \overline{CB}| = \sqrt{16 + 4(1+c)^2}$.

Do $(1+c)^2 \geq 0 \forall c$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = -1$, nên $|\overline{CA} + \overline{CB}| \geq 4$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = -1$. Vậy với điểm $C(0; -1) \in Oy$ thì vector $\overline{CA} + \overline{CB}$ có độ dài ngắn nhất.

Nhận xét

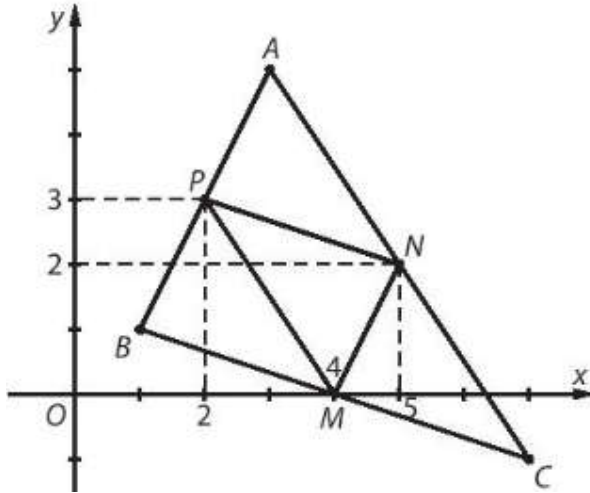
- Với mỗi điểm C đều có $\overline{CA} + \overline{CB} = 2\overline{CI}$, với I là trung điểm AB . Suy ra vector $\overline{CA} + \overline{CB}$ có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi vector \overline{CI} có độ dài ngắn nhất. Từ đó, do C thuộc trục tung, nên C là hình chiếu vuông góc của I trên trục tung.

- Khái quát, ta có bài toán tìm được điểm C thuộc đường thẳng Δ sao cho vector $\alpha\overline{CA} + \beta\overline{CB}$ có độ dài ngắn nhất, với α, β là hai hằng số cho trước.

Câu 56. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $M(4; 0), N(5; 2)$ và $P(2; 3)$. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác ABC , biết M, N, P theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB .

Lời giải

Do M là trung điểm của BC , N là trung điểm của CA , P là trung điểm của AB , nên MN, NP, PM là các đường trung bình của tam giác ABC và do đó $MN \parallel AB, NP \parallel BC, PM \parallel CA$.



Do $MN \parallel AB$ và $MP \parallel AC$ nên tứ giác $APMN$ là hình bình hành, và do đó $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{OA} = (3; 5)$, do đó A có tọa độ là $(3; 5)$. Bằng lập luận tương tự, tìm được $B(1; 1)$ và $C(7; -1)$.

Câu 57. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(2; -1)$, $B(1; 4)$ và $C(7; 0)$.

- Tính độ dài các đoạn thẳng AB, BC và CA . Từ đó suy ra tam giác ABC là một tam giác vuông cân.
- Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $ABDC$ là một hình vuông.

Lời giải

a) Đáp số: $AB = \sqrt{26}, BC = \sqrt{52}, CA = \sqrt{26}$. Tam giác ABC vuông cân tại A .

b) HD. Hình vuông $ABDC$ là một hình bình hành.

Đáp số: $D(6; 5)$.

Câu 58. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(-2; 1)$ và $N(4; 5)$.

- Tìm tọa độ của điểm P thuộc Ox sao cho $PM = PN$.
- Tìm tọa độ của điểm Q sao cho $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{PN}$.
- Tìm tọa độ của điểm R thỏa mãn $\overrightarrow{RM} + 2\overrightarrow{RN} = \vec{0}$. Từ đó suy ra P, Q, R thẳng hàng.

Lời giải

a) Đáp số: $P(3; 0)$.

b) Đáp số: $Q(0; 11)$.

c) Giả sử tìm được điểm R thỏa mãn yêu cầu. Do $\overrightarrow{RM} + 2\overrightarrow{RN} = \vec{0}$ nên

$$\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = (1+2)\overrightarrow{OR} \text{ hay } \overrightarrow{OR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$$

và do đó R có tọa độ $\left(2; \frac{11}{3}\right)$.

Do $\overrightarrow{PQ} = (-3; 11), \overrightarrow{PR} = \left(-1; \frac{11}{3}\right)$. Do $\frac{-1}{-3} = \frac{\frac{11}{3}}{11}$ nên hai vectơ \overrightarrow{PQ} và \overrightarrow{PR} cùng phương và do đó P, Q, R thẳng hàng.

Câu 59. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(-3; 2)$ và $N(2; 7)$.

- Tìm tọa độ của điểm P thuộc trục tung sao cho M, N, P thẳng hàng.

- b) Tìm tọa độ của điểm Q đối xứng với N qua Oy .
 c) Tìm tọa độ của điểm R đối xứng với M qua trục hoành.

Lời giải

- a) Đáp số: $P(0;5)$.
 b) Đáp số: $Q(-2;7)$.
 c) Đáp số: $R(-3;-2)$.

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $C(1;6)$ và $D(11;2)$.

- a) Tìm tọa độ của điểm E thuộc trục tung sao cho vector $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}$ có độ dài ngắn nhất.
 b) Tìm tọa độ của điểm F thuộc trục hoành sao cho $|2\overrightarrow{FC} + 3\overrightarrow{FD}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 c) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = CD$.

Lời giải

- a) Đáp số: $E(0;4)$.
 b) Đáp số: $F(7;0)$.

c) Do $C(1;6), D(11;2)$, nên $CD = \sqrt{(11-1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$.

Gọi I là trung điểm CD , thế thì $I(6;4)$ và với mỗi điểm M đều có $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$. Suy ra $|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = CD \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{MI}| = 2\sqrt{29} \Leftrightarrow IM = \sqrt{29}$.

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I bán kính $\frac{CD}{2} = \sqrt{29}$.

Câu 61. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(1;2), B(3;4)$ và $C(2;-1)$.

- a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác đó.
 b) Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp và trục tâm H của tam giác ABC .

Lời giải

a) HD. Chứng minh các vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} không cùng phương. Trọng tâm của tam giác là $G\left(2; \frac{5}{3}\right)$.

b) HD. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp và H là trục tâm của tam giác ABC .

Thế thì $IA = IB = IC$ và $\overrightarrow{HH} = 3\overrightarrow{IG}$.

Đáp số: $I\left(\frac{15}{4}; \frac{5}{4}\right), H\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2;1)$ và $B(4;3)$.

- a) Tìm tọa độ của điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại A . Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC .
 b) Tìm tọa độ của điểm D sao cho tam giác ABD vuông cân tại A .

Lời giải

a) Đáp số: $C(3;0)$. Chu vi tam giác ABC bằng $3\sqrt{2} + \sqrt{10}$.

Diện tích tam giác ABC bằng 2.

b) HD. Điểm D thỏa mãn đồng thời hai điều kiện vector \overrightarrow{AD} cùng phương với vector \overrightarrow{AC} và $AD = AB = 2\sqrt{2}$.

Đáp số: Có hai điểm D thỏa mãn là $D_1(0;3)$ và $D_2(4;-1)$.

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;4)$ và $C(9;2)$ là hai đỉnh của hình vuông $ABCD$. Tìm tọa độ các đỉnh B, D , biết rằng tung độ của B là một số âm.

Lời giải

HD. Do $ABCD$ là hình vuông nên hai đường chéo AC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm chung I của chúng.

Đáp số: $B(4;-1), D(6;7)$.

Câu 64. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;1)$ và $B(7;5)$.

- a) Tìm tọa độ của điểm C thuộc trục hoành sao cho C cách đều A và B .
 b) Tìm tọa độ của điểm D thuộc trục tung sao cho vector $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất.

Lời giải

a) Xét điểm $C(c;0) \in Ox$. Khi đó $CA^2 = (c-1)^2 + 1, CB^2 = (c-7)^2 + 25$. Vậy C cách đều A, B khi và chỉ khi

$$CA^2 = CB^2 \Leftrightarrow (c-1)^2 - (c-7)^2 = 25 - 1 \Leftrightarrow c = 6.$$

Vậy $C(6;0)$ là điểm cần tìm.

b) Gọi M là trung điểm AB . Khi đó $M(4;3)$. Với mọi điểm D ta có $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DM}$.

Suy ra vector $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi vector $2\overrightarrow{DM}$ có độ dài ngắn nhất.

Từ đó điểm D thuộc trục tung sao cho vector $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}$ có độ dài ngắn nhất khi và chỉ khi D là hình chiếu vuông góc của M trên Oy , tức là $D(0;3)$.

Câu 65. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(-3;2), B(1;5)$ và $C(3;-1)$.

- a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ấy.
 b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .
 c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tìm tọa độ của I .

Lời giải

a) HD. Chứng minh hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Đáp số: $G\left(\frac{1}{3}; 2\right)$.

b) Từ giả thiết, suy ra $\overrightarrow{AB} = (4;3), \overrightarrow{BC} = (2;-6)$. Gọi $H(x;y)$ là trực tâm của tam giác ABC . Khi đó $\overrightarrow{AH} = (x+3; y-2), \overrightarrow{CH} = (x-3; y+1)$.

Do $AH \perp BC, CH \perp AB$ nên

$$\begin{cases} 2(x+3) - 6(y-2) = 0 \\ 4(x-3) + 3(y+1) = 0 \end{cases}$$

Từ đó tìm được $x=0, y=3$. Vậy trực tâm của tam giác ABC là điểm $H(0;3)$.

c) HD. Sử dụng kết quả của bài tập 4.15.

Đáp số: $I\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Câu 66. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(1;1), B(5;2)$ và $C(4;4)$.

- a) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A .
 b) Giải tam giác ABC .

Lời giải

a) Xét điểm $H(x;y)$, ta có: $\overrightarrow{AH} = (x-1; y-1), \overrightarrow{BH} = (x-5; y-2), \overrightarrow{BC} = (-1; 2)$.

$H(x;y)$ là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A , nên ta có:

$$- \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x-1) \cdot (-1) + (y-1) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y - 1 = 0 \quad (1)$$

$$- \text{Hai vector } \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow (x-5) \cdot 2 - (y-2) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 12 = 0. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + y - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{23}{5} \\ y = \frac{14}{5} \end{cases}$$

Vậy $H\left(\frac{23}{5}; \frac{14}{5}\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;1), \overrightarrow{BC} = (-1;2), \overrightarrow{AC} = (3;3)$.

$$\text{Suy ra: } AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}, BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}. \cos A = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{4 \cdot 3 + 1 \cdot 3}{\sqrt{17} \cdot 3\sqrt{2}} \approx 0,857 \Rightarrow \hat{A} \approx 30^\circ 57'.$$

$$\cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC} = \frac{(-4) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{5}} \approx 0,217 \Rightarrow \hat{B} \approx 77^\circ 28'.$$

$$\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \approx 180^\circ - 30^\circ 57' - 77^\circ 28' = 71^\circ 35'.$$

Câu 67. Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A(2;2)$, $B(6;3)$ và $C(5;5)$.

a) Tìm tọa độ điểm H là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A .

b) Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC và số đo của góc C .

Lời giải

a) Xét điểm $H(x; y)$, ta có: $\overrightarrow{AH} = (x-2; y-2)$, $\overrightarrow{BH} = (x-6; y-3)$, $\overrightarrow{BC} = (-1; 2)$.

$H(x; y)$ là chân đường cao của tam giác ABC kẻ từ A nên ta có:

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x-2) \cdot (-1) + (y-2) \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow -x + 2y - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Hai vector } \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow (x-6) \cdot 2 - (y-3) \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 15 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được hệ phương trình } \begin{cases} -x + 2y - 2 = 0 \\ 2x + y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{28}{5} \\ y = \frac{19}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } H\left(\frac{28}{5}; \frac{19}{5}\right).$$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;1)$, $\overrightarrow{CB} = (1;-2)$, $\overrightarrow{CA} = (-3;-3)$.

$$\text{Suy ra: } AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}, BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}. \cos \hat{C} = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \cdot CB} = \frac{(-3) \cdot 1 + (-3) \cdot (-2)}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{Vậy } \hat{C} \approx 71^\circ 34'.$$

Câu 68. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1;1)$, $B(4;3)$, $C(-1;-2)$ không thẳng hàng.

a) Tìm tọa độ của vector \overrightarrow{AB} .

b) Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4-1; 3-1)$. Vậy $\overrightarrow{AB} = (3;2)$.

b) Gọi tọa độ của điểm D là $(x_D; y_D)$, ta có: $\overrightarrow{DC} = (-1-x_D; -2-y_D)$. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = (3;2) \Leftrightarrow \begin{cases} -1-x_D = 3 \\ -2-y_D = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -4 \\ y_D = -4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } D(-4; -4).$$

Câu 69. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2;3)$, $B(-1;1)$, $C(3;-1)$.

a. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.

b. Tìm tọa độ trung điểm N của đoạn thẳng AC . Chứng minh $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}$.

Lời giải

a. Gọi $M(x_M; y_M) = \overrightarrow{AM} = (x_M-2; y_M-3)$; $\overrightarrow{BC} = (4;-2)$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

$$\begin{cases} x_M - 2 = 4 \\ y_M - 3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 6 \\ y_M = 1 \end{cases}$$

b. Có N là trung điểm của đoạn thẳng $AC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$

$$\text{Có: } \overrightarrow{AN} = (x_N-2; y_N-3); \overrightarrow{NC} = (3-x_N; -1-y_N)$$

$$\begin{cases} x_N - 2 = 3 - x_N \\ y_N - 3 = -1 - y_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{5}{2} \\ y_N = 1 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}; 1\right).$$

$$\overrightarrow{BN} = \left(\frac{7}{2}; 0\right); \overrightarrow{NM} = \left(\frac{7}{2}; 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NM}$$

Câu 70. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(-1; 3)$.

- Tìm tọa độ điểm A đối xứng với điểm M qua gốc O .
- Tìm tọa độ điểm B đối xứng với điểm M qua trục Ox .
- Tìm tọa độ điểm C đối xứng với điểm M qua trục Oy .

Lời giải

a. Vì A đối xứng với M qua gốc $O \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OM}$

Có: $\overrightarrow{AO} = (-x_A; -y_A); \overrightarrow{OM} = (-1; 3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x_A = -1 \\ -y_A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 1 \\ y_A = -3 \end{cases}$$

Vậy $A(1; -3)$

b. Vì B đối xứng với M qua trục $Ox \Rightarrow B(-1; -3)$

c. Vì C đối xứng với M qua trục $Oy \Rightarrow C(1; 3)$

Câu 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm không thẳng hàng $A(-3; 1), B(-1; 3), I(4; 2)$. Tìm tọa độ của hai điểm C, D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nhận I làm tâm đối xứng.

Lời giải

$A(-3; 1), B(-1; 3), I(4; 2)$

Có: $\overrightarrow{AB} = (2; 2); \overrightarrow{AI} = (7; 1); \overrightarrow{BI} = (5; -1); \overrightarrow{IC} = (x_C - 4; y_C - 2); \overrightarrow{ID} = (x_D - 4; y_D - 2)$

Vì hình bình hành $ABCD$ nhận I làm tâm đối xứng $\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C - 4 = 7 \\ y_C - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 11 \\ y_C = 3 \end{cases} \Rightarrow C(11; 3)$$

$$\overrightarrow{DC} = (11 - x_D; 3 - y_D)$$

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = (2; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - x_D = 2 \\ 3 - y_D = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow D(9; 1)$

Câu 72. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC . Các điểm $M(1; -2), N(4; -1)$ và $P(6; 2)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Tìm tọa độ của các điểm A, B, C .

Lời giải

$M(1; -2); N(4; -1)$ và $P(6; 2)$

- Vì M là trung điểm của $BC \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}$

$$\Leftrightarrow (1 - x_B; -2 - y_B) = (x_C - 1; y_C + 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_B = x_C - 1 \\ -2 - y_B = y_C + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B + x_C = 2 \\ y_B + y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 - x_B \\ y_C = -4 - y_B \end{cases}$$

Vì N là trung điểm của $AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NC}$

$$\Leftrightarrow (4 - x_A; -1 - y_A) = (x_C - 4; y_C + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x_A = x_C - 4 \\ -1 - y_A = y_C + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = 8 \\ y_A + y_C = -2 \end{cases}$$

- Vì P là trung điểm của AB

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$$

$$\Leftrightarrow (6 - x_A; 2 - y_A) = (x_B - 6; y_B - 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x_A = x_B - 6 \\ 2 - y_A = y_B - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 12 \\ y_A + y_B = 4 \end{cases}$$

$$\text{Thay (1) vào (2) được: } \Rightarrow \begin{cases} x_A + 2 - x_B = 8 \\ y_A - 4 - y_B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_B = 6 \\ y_A - y_B = 2 \end{cases}$$

$$\text{Từ (3) và (4) } \Rightarrow \begin{cases} x_A = 9 \\ y_A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B = 3 \\ y_B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = -5 \end{cases}$$

Vậy $A(9;3); B(3;1); C(-1;-5)$

Câu 73. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có trung điểm các cạnh BC, CA, AB tương ứng là $M(2;0); N(4;2); P(1;3)$

a. Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

b. Trọng tâm hai tam giác ABC và MNP có trùng nhau không? Vì sao?

Lời giải

a. Có: $M(2;0)$ là trung điểm của $BC \Rightarrow x_B + x_C = 2 \cdot 2 = 4; y_B + y_C = 2 \cdot 0 = 0$ (1)

$N(4;2)$ là trung điểm của $CA \Rightarrow x_A + x_C = 2 \cdot 4 = 8; y_A + y_C = 2 \cdot 2 = 4$ (2)

$P(1;3)$ là trung điểm của $AB \Rightarrow x_A + x_B = 2 \cdot 1 = 2; y_A + y_B = 2 \cdot 3 = 6$

(2) - (1) ta được: $x_A - x_B = 4; y_A - y_B = 4$ (4)

(3) + (4) ta được: $x_A = 3; y_A = 5$ thay vào (4) được:

$x_B = -1; y_B = 1$ thay vào (1) được:

$x_C = 5; y_C = -1$

b. Gọi $G; G'$ lần lượt là trọng tâm hai tam giác ABC và MNP

$$\Rightarrow x_G = \frac{3 - 1 + 5}{3}; y_G = \frac{5 + 1 - 1}{3} \Rightarrow G\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

$$x_{G'} = \frac{2 + 4 + 1}{3}; y_{G'} = \frac{5 + 1 - 1}{3} \Rightarrow G'\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

Từ (i) và (ii) \Rightarrow Trọng tâm G của tam giác ABC và trọng tâm G' của tam giác MNP trùng nhau.

Câu 74. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;4); B(-1;1); C(-8;2)$

a. Tính số đo góc ABC (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ)

b. Tính chu vi của tam giác ABC .

c. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng BC sao cho diện tích của tam giác ABC bằng hai lần diện tích của tam giác ABM .

Lời giải

a. Có: $\overrightarrow{BA} = (3;3); \overrightarrow{CB} = (7;-1); \overrightarrow{CA} = (10;2)$

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{10^2 + 2^2} = 2\sqrt{26}$$

$$-\cos \widehat{ACB} = \cos(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{68}{2\sqrt{26} \cdot 5\sqrt{2}} \approx 0,943$$

$$\widehat{ACB} = 19,44^\circ$$

Có: $\overrightarrow{BA} = (3;3); \overrightarrow{BC} = (-7;1)$

$$- \cos \widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-18}{3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = -0,6$$

$$\widehat{ABC} = 126,87^\circ$$

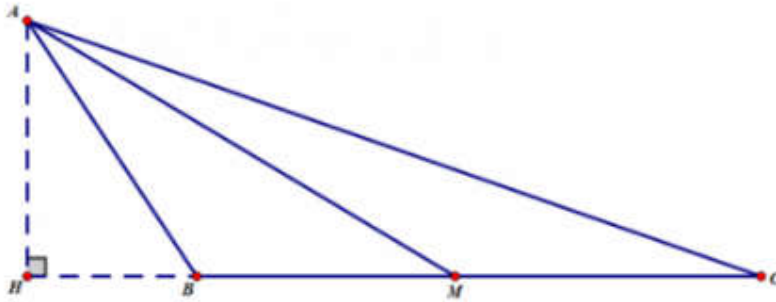
Xét tam giác ABC có: $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ (ĐL tổng ba góc trong tam giác)

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 33,69^\circ$$

b. Chu vi của tam giác ABC là:

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{26} \approx 21,5$$

c.



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC$$

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BM$$

$$S_{ABC} = 2S_{ABM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BM \Leftrightarrow BC = 2BM$$

$$\Leftrightarrow BM = \frac{1}{2} BC$$

hay M là trung điểm của BC .

Câu 75. Cho ba điểm $A(1;1)$; $B(4;3)$ và $C(6;-2)$

a. Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $CD = 2AB$

Lời giải

$$a. \overrightarrow{AB} = (3;2); \overrightarrow{BC} = (2;-5)$$

$$\frac{3}{2} \neq \frac{2}{-5}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{BC}$$

Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b. Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $CD = 2AB$.

$$\text{Goi } D(x_D; y_D) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (x_D - 6; y_D + 2); \overrightarrow{AB} = (3;2)$$

$$- CD = 2AB \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow x_D - 6 = 2 \cdot 3; y_D + 2 = 2 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow x_D = 12; y_D = 2$$

$$\Rightarrow D(12;2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = (6;4); \overrightarrow{AB} = (3;2)$$

$$- AB \parallel CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{3} = \frac{4}{2} \text{ (đúng)}$$

Vậy $D(12; 2)$ thì tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB // CD$ và $CD = 2AB$

Câu 76. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4; 2), B(2; 4), C(8; -2)$. Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Suy ra $D(2; -4)$.

Câu 77. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm không thẳng hàng $M(1; -2), N(3; 1), P(-1; 2)$. Tìm tọa độ điểm Q sao cho tứ giác $MNPQ$ là hình thang có $MN // PQ$ và $PQ = 2MN$.

Lời giải

Gọi $A(a; b)$ là trung điểm PQ . Ta có: $\overrightarrow{MN} = (2; 3)$. Vì $MN // PQ$ và $PQ = 2MN$ nên

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -1 - a \\ 3 = 2 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Suy ra $A(-3; -1)$.

Lại có $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} \Rightarrow Q(-5; -4)$.

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(1; 5), B(-1; -1), C(2; -5)$.

a) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

c) Tìm tọa độ điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có $AB // CD$ và $CD = \frac{3}{2}AB$

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB} = (-2; -6), \overrightarrow{AC} = (1; -10)$. Do $\frac{-2}{1} \neq \frac{-6}{-10}$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) $G\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. c) $D(5; 4)$.

Câu 79. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(4; -2), B(10; 4)$ và điểm M nằm trên trục Ox . Tìm tọa độ điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Vì M nằm trên trục Ox nên có tọa độ $(m; 0)$ (m là số thực). Khi đó, $\overrightarrow{MA} = (4 - m; -2), \overrightarrow{MB} = (10 - m; 4)$ suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (14 - 2m; 2)$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = \sqrt{(14 - 2m)^2 + 2^2} \geq 2$ (Vì $(14 - 2m)^2 \geq 0$). Dấu bằng xảy ra khi $m = 7$. Vậy $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi M có tọa độ là $(7; 0)$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 80. Cho hai điểm $A(3; -5), B(1; 0)$.

a) Tìm tọa độ điểm C sao cho: $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$.

b) Tìm điểm D đối xứng với A qua C .

c) Tìm điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -3$.

Lời giải.

a) Gọi $C(x_C; y_C)$.

Theo bài $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (x_C; y_C) = -3(-2; 5) = (6; -15) \Rightarrow C(6; -15)$

$$\text{b) } D \text{ đối xứng với } A \text{ qua } C \text{ hay } C \text{ là trung điểm của } AD \Rightarrow \begin{cases} x_C = \frac{x_A + x_D}{2} \\ y_C = \frac{y_A + y_D}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_C - x_A = 2 \cdot 6 - 3 = 9 \\ y_D = 2y_C - y_A = 2(-15) - (-5) = -25 \end{cases} \Rightarrow D(9; -25).$$

$$\text{c) } M \text{ chia đoạn } AB \text{ theo tỉ số } k = -3 \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + 3x_B}{1+3} = \frac{3+3 \cdot 1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{y_A + 3y_B}{1+3} = \frac{-5+3 \cdot 0}{4} = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right).$$

Câu 81. Cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(0; 4)$, $C(3; 2)$.

- Tìm tọa độ các vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} .
- Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB .
- Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$.
- Tìm tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Lời giải:

$$\text{a) } \overrightarrow{AB} = (-1; 6), \overrightarrow{AC} = (2; 4), \overrightarrow{BC} = (3; -2).$$

$$\text{b) } I \text{ là trung điểm của } AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

$$\text{c) Ta có: } \overrightarrow{CM} = (x_M - 3; y_M - 2), 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = 2(-1; 6) - 3(2; 4) = (-8; 0)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 3 = -8 \\ y_M - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -5 \\ y_M = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-5; 2).$$

$$\text{d) } \overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0} \Rightarrow (x_N - 1; y_N + 2) + 2(x_N; y_N - 4) - 4(x_N - 3; y_N - 2) = (0; 0)$$

$$\Leftrightarrow (-x_N + 11; -y_N + 2) = (0; 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 11 \\ y_N = 2 \end{cases} \Rightarrow N(11; 2).$$

Câu 82. Cho ba điểm $A(1; -2)$, $B(2; 3)$, $C(-1; -2)$.

- Tìm tọa độ điểm D đối xứng với A qua C .
- Tìm tọa độ điểm E là đỉnh thứ tư của hình bình hành có 3 đỉnh là A, B, C .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Lời giải

$$\text{a) } D \text{ đối xứng với } A \text{ qua } C \text{ hay } C \text{ là trung điểm của } AD$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D = 2x_C - x_A = -3 \\ y_D = 2y_C - y_A = -2 \end{cases} \Rightarrow D(-3; -2).$$

$$\text{b) } ABCE \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x_E - 1; y_E + 2) = (-3; -5) \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 1 = -3 \\ y_E + 2 = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -2 \\ y_E = -7 \end{cases} \Rightarrow E(-2; -7).$$

$$\text{c) } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

Câu 83. Cho ba điểm $A(-1;1)$, $B(2;1)$, $C(-1;-3)$.

- CMR: Tồn tại tam giác ABC .
- Tính chu vi tam giác.
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm điểm M thuộc trục Ox sao cho M cách đều A, B .
- Tìm điểm N thuộc trục Oy sao cho N cách đều B, C .

Lời giải.

a) Ta có phương trình đường thẳng $AB: y = ax + b$

$$\begin{cases} A \in d \\ B \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -a + b \\ 1 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow d: y = 1$$

Do C không thuộc d nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng, tức là tam giác tồn tại.

b) Ta có $\overline{AB} = (3;0)$, $\overline{BC} = (-3;-4)$, $\overline{AC} = (0;-4)$

$$\Rightarrow AB = 3; BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5; AC = 4 \Rightarrow P_{ABC} = 3 + 5 + 4 = 12.$$

$$\text{c) Tọa độ trọng tâm } G: \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 0 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(0; -\frac{1}{3}\right).$$

$$\text{d) Gọi } D(x; y), ABCD \text{ là hình bình hành thì } \overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x = 3 \\ -3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D(-4; -3).$$

e) Phương trình trung trực của đoạn thẳng AB là $x = \frac{1}{2}$. M là giao của trung trực này với trục

$$Ox \text{ hay } M\left(\frac{1}{2}; 0\right).$$

$$\text{f) Gọi } N(0; x) \Rightarrow \begin{cases} CN^2 = 1 + (x+3)^2 \\ BN^2 = 2^2 + (1-x)^2 \end{cases}$$

$$N \text{ cách đều } B \text{ và } C \text{ khi } CN^2 = BN^2 \Leftrightarrow 1 + (x+3)^2 = 2^2 + (1-x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 10 = x^2 - 2x + 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{8} \Rightarrow N\left(0; -\frac{5}{8}\right).$$

Câu 84. Cho tam giác ABC có $A(4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$.

- Tính chu vi tam giác.
- Xác định điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Xác định tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Xác định tọa độ trực tâm H của tam giác.
- Xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải.

$$\text{a) Ta có } \overline{AB} = (-2;3), \overline{BC} = (0;-6), \overline{AC} = (-2;-3)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}; BC = 6, AC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \Rightarrow P_{ABC} = 2\sqrt{13}$$

b) Gọi $D(x; y)$, $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=-2 \\ -2-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$
 $\Rightarrow D(4; -5)$.

c) Tọa độ trọng tâm G của tam giác $x_G = \frac{4+2+2}{3} = \frac{8}{3}; y_G = \frac{1+4-2}{3} = 1 \Rightarrow G\left(\frac{8}{3}; 1\right)$.

d) Ta có phương trình đường thẳng $AC: y = \frac{3}{2}x - 5$. Suy ra đường cao BF qua B và vuông góc với AC là $y = -\frac{2}{3}(x-2) + 4 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3}$.

Phương trình đường thẳng AB là $y = -\frac{3}{2}x + 7$ suy ra đường cao CK đi qua C và vuông góc với AB là $y = \frac{2}{3}(x-2) - 2 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$.

Tọa độ trực tâm H là giao điểm của BF và CK nên $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3} \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{2} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{2}; 1\right)$.

e) Trung điểm đoạn AB và BC lần lượt là $M\left(3; \frac{5}{2}\right), N(2; 1)$

Phương trình trung trực của AB đi qua M và vuông góc với AB là: $y = \frac{2}{3}(x-3) + \frac{5}{2}$.

Phương trình trung trực của BC là $y = 1$.

Tâm đường tròn ngoại tiếp I là giao điểm của hai trung trực nên $I\left(\frac{3}{4}; 1\right)$.

Câu 85. Cho $A(1; 3), B(2; 5)$ và $C(4; -1)$.

- Tìm chu vi của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC .
- Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .
- Tìm tọa độ điểm D để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
- Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác.
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (1; 2), \overrightarrow{BC} = (2; -6), \overrightarrow{AC} = (3; -4)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}; BC = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}; AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow P_{ABC} = \sqrt{5} + 5 + \sqrt{40}.$$

b) Tọa độ trung điểm M của đoạn $AB: x_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}; y_M = \frac{3+5}{2} = 4 \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; 4\right)$

Trung điểm của N của đoạn $AC: x_N = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}; y_N = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow N\left(\frac{5}{2}; 1\right)$

c) Tọa độ trọng tâm G tương tự như các bài toán trước $G\left(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}\right)$.

d) Gọi $D(x; y)$, $ABCD$ là hình bình hành thì $\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=1 \\ -1-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-3 \end{cases}$
 $\Rightarrow D(3; -3)$.

e) Ta có phương trình đường thẳng $AB: y = 2x + 1$. Suy ra đường cao CH là $y = -\frac{1}{2}(x-4) - 1$.

Phương trình đường thẳng AC là $y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{3}$. Suy ra đường cao BE là $y = \frac{3}{4}(x-2) + 5$

Tọa độ trực tâm H thỏa mãn $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}(x-4) - 1 \\ y = \frac{3}{4}(x-2) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow H(-2; 2)$.

f) Phương trình trung trực của AB đi qua M và vuông góc với AB là: $y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + 4$.

Phương trình trung trực của BC là: $y = \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right) + 1$

Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I là giao điểm của hai trung trực nên thỏa mãn

$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) + 4 \\ y = \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{9}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Câu 86. Cho ba điểm $A(1; 1), B(3; 5), C(-4; 7)$

a) Tìm điểm M thuộc trục Ox sao cho $|\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}|$ nhỏ nhất

b) Tìm điểm N thuộc trục Oy sao cho $|\overline{NB} + \overline{NC}|$ nhỏ nhất

c) Tìm điểm K thuộc trục Oy sao cho $|\overline{KC} - \overline{KB}|$ nhỏ nhất

d) Tìm điểm P thuộc trục Ox sao cho $|\overline{PA} + 2\overline{PB} + 3\overline{PC}|$ nhỏ nhất

Lời giải

a) Ta có $M \in Ox \Rightarrow M(m; 0)$.

$\overline{MA} = (1-m; 1); \overline{MB} = (3-m; 5)$ và $\overline{MC} = (-4-m; 7)$

$\Rightarrow \overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC} = (-4-4m; 20)$

$\Rightarrow |\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}| = \sqrt{(-4-4m)^2 + 20^2} \geq 20$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow -4m-4=0 \Leftrightarrow m=-1 \Leftrightarrow M(-1; 0)$.

Vậy $|\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M(-1; 0)$.

b) Ta có $N \in Oy \Rightarrow N(0; n)$.

$\overline{NB} = (3; 5-n)$ và $\overline{NC} = (-4; 7-n)$

$\Rightarrow \overline{CN} = (4; n-7) \Rightarrow \overline{NB} + \overline{CN} = (7; -2)$

Ta có: $|\overline{NB} + \overline{NC}| = |\overline{NB}| + |\overline{CN}| \geq |\overline{NB} + \overline{CN}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \overline{NB}, \overline{CN}$ cùng hướng

$\Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{5-n}{n-7} > 0 \Leftrightarrow 3n-21=20-4n \Leftrightarrow n = \frac{41}{7} \Leftrightarrow N\left(0; \frac{41}{7}\right)$.

Vậy $|\overline{NB} + \overline{NC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow N\left(0; \frac{41}{7}\right)$.

c) Ta có $K \in Oy \Rightarrow K(0; k)$.

$$\overrightarrow{KB} = (3; 5-k) \text{ và } \overrightarrow{KC} = (-4; 7-k)$$

Ta có: $|KB - KC| \geq 0$.

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow KB = KC \Leftrightarrow \sqrt{3^2 + (5-k)^2} = \sqrt{4^2 + (7-k)^2}$$

$$\Leftrightarrow 9 + (5-k)^2 = 16 + (7-k)^2$$

$$\Leftrightarrow 4k = 31 \Leftrightarrow k = \frac{31}{4} \Leftrightarrow K\left(0; \frac{31}{4}\right).$$

$$\text{Vậy } |KB - KC| \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow K\left(0; \frac{31}{4}\right).$$

d) Ta có $P \in Ox \Rightarrow P(p; 0)$.

$$\overrightarrow{PA} = (1-p; 1); \overrightarrow{PB} = (3-p; 5) \text{ và } \overrightarrow{PC} = (-4-p; 7)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = (-5-6p; 25)$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC}| = \sqrt{(-5-6p)^2 + 25^2} \geq \sqrt{25^2} = 25$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow -6p-5=0 \Leftrightarrow p=-\frac{5}{6} \Leftrightarrow P\left(-\frac{5}{6}; 0\right)$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC}| \text{ đạt giá trị nhỏ nhất} \Leftrightarrow P\left(-\frac{5}{6}; 0\right).$$

Dạng 5. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng và ứng dụng

Phương pháp

Cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ và hai điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta có:

$$- \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$- \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0;$$

$$- \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

$$- |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$- \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} (\vec{a}, \vec{b} \text{ khác } \vec{0}).$$

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 87. Tính góc xen giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} trong các trường hợp sau:

a. $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (6; 4)$

b. $\vec{a} = (3; 2)$, $\vec{b} = (5; -1)$

c. $\vec{a} = (-2; -2\sqrt{3})$, $\vec{b} = (3; \sqrt{3})$

Lời giải

$$\text{a. } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 6 + (-3) \cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{6^2 + 4^2}} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

$$\text{b. } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$$

$$\text{c. } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(-2) \cdot 3 + (-2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$$

Câu 88. Cho hai vector $\vec{a} = (3; 4)$, $\vec{b} = (-1; 5)$.

a) Tìm tọa độ của vector: $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, 10\vec{a}, -2\vec{b}$.

b) Tính các tích vô hướng: $\vec{a} \cdot \vec{b}, (-2\vec{a}) \cdot (5\vec{b})$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1); 4 + 5) = (2; 9); \quad \vec{a} - \vec{b} = (3 - (-1); 4 - 5) = (4; -1);$$

$$10\vec{a} = (10 \cdot 3; 10 \cdot 4) = (30; 40); \quad -2\vec{b} = (-2 \cdot (-1); -2 \cdot 5) = (2; -10).$$

b) Ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 = -3 + 20 = 17$$

$$-2\vec{a} = (-6; -8) \text{ và } 5\vec{b} = (-5; 25) \text{ nên } (-2\vec{a}) \cdot (5\vec{b}) = (-6) \cdot (-5) + (-8) \cdot 25 = 30 - 200 = -170.$$

Câu 89. Cho ba vector $\vec{m} = (-6; 1), \vec{n} = (0; 2), \vec{p} = (1; 1)$. Tìm tọa độ của các vector:

a) $\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$.

b) $(\vec{m} \cdot \vec{n})\vec{p}$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{m} + \vec{n} - \vec{p} = (-6 + 0 - 1; 1 + 2 - 1) = (-7; 2)$.

b) Ta có: $(\vec{m} \cdot \vec{n})\vec{p} = (-6 \cdot 0 + 1 \cdot 2)\vec{p} = 2\vec{p} = (2; 2)$.

Câu 90. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính tích vô hướng của các cặp vector sau:

a) $\vec{u} = (2; -3)$ và $\vec{v} = (5; 3)$;

b) Hai vector đơn vị \vec{i} và \vec{j} tương ứng của các trục Ox, Oy.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 3 = 10 - 9 = 1$.

b) Vì $\vec{i} = (1; 0)$ và $\vec{j} = (0; 1)$ nên $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

Câu 91. Cho hai vector $\vec{a} = (1; 5), \vec{b} = (4; -2)$.

a) Tìm tọa độ của các vector $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}, 3\vec{a}, -5\vec{b}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}, (3\vec{a}) \cdot (-\vec{b})$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\vec{a} + \vec{b} = (1 + 4; 5 + (-2)) = (5; 3); \quad \vec{a} - \vec{b} = (1 - 4; 5 - (-2)) = (-3; 7)$$

$$3\vec{a} = (3 \cdot 1; 3 \cdot 5) = (3; 15); \quad -5\vec{b} = (-5 \cdot 4; -5 \cdot (-2)) = (-20; 10)$$

b) Ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) = 4 - 10 = -6;$$

$$\vec{a} = (3; 15); \quad -\vec{b} = (-4; 2)$$

$$\Rightarrow (3\vec{a}) \cdot (-\vec{b}) = 3 \cdot (-4) + 15 \cdot 2 = -12 + 30 = 18$$

Câu 92. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tính góc giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (-3; 1), \vec{b} = (2; 6)$

b) $\vec{a} = (3; 1), \vec{b} = (2; 4)$

c) $\vec{a} = (-\sqrt{2}; 1), \vec{b} = (2; -\sqrt{2})$

Lời giải

a)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \text{ hay } (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

b)

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 10 \\ |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}; |\vec{b}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$$

c) Dễ thấy: \vec{a} và \vec{b} cùng phương do $\frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{-\sqrt{2}}$

Hơn nữa: $\vec{b} = (2; -\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}; 1) = -\sqrt{2} \cdot \vec{a}; -\sqrt{2} < 0$

Do đó: \vec{a} và \vec{b} ngược hướng.

$$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$$

Câu 93. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (-2; -2\sqrt{3}), \vec{v} = (3; \sqrt{3})$.

Lời giải

Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2) \cdot 3 + (-2\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = -12$,

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4, |\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}.$$

Suy ra $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-12}{4 \cdot 2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vậy $(\vec{u}, \vec{v}) = 150^\circ$.

Câu 94. Cho bốn điểm $A(7; -3), B(8; 4), C(1; 5), D(0; -2)$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình vuông.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1; 7), \overrightarrow{DC} = (1; 7); \overrightarrow{AD} = (-7; 1)$

Nhận thấy: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành

mà $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$ (vì cùng $= 5\sqrt{2}$) hay $AB = AD \Rightarrow ABCD$ là hình thoi

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \cdot (-7) + 7 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow AB \perp AD$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ABCD$ là hình vuông (đpcm)

Câu 95. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-2; 3), B(4; 5), C(2; -3)$. Giải tam giác ABC (làm tròn các kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

- Ta có: $AB = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6$,

$$BC = \sqrt{(2 - 4)^2 + (-3 - 5)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \approx 8,$$

$$AC = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-3 - 3)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7.$$

- Ta có: $\overrightarrow{AB} = (6; 2), \overrightarrow{AC} = (4; -6)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \cdot 4 + 2 \cdot (-6) = 12$.

Suy ra $\cos \widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{12}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{130}}{130}$.

Vậy $\widehat{BAC} \approx 75^\circ$.

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (-6; -2), \overrightarrow{BC} = (-2; -8)$ nên

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-6) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-8) = 28$$

Suy ra $\cos \widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{28}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{17}} = \frac{7\sqrt{170}}{170}$.

Vậy $\widehat{ABC} \approx 58^\circ$.

Suy ra ta có: $\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) \approx 180^\circ - (75^\circ + 58^\circ) = 47^\circ$.

Câu 96. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho các điểm $M(1; 3), N(4; 2)$

a) Tính độ dài các đoạn thẳng OM, ON, MN .

b) Chứng minh rằng tam giác OMN vuông cân.

Lời giải

a) Ta có: $M(1; 3)$ và $N(4; 2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM}(1; 3), \overrightarrow{ON}(4; 2), \overrightarrow{MN} = (4 - 1; 2 - 3) = (3; -1)$$

$$\Rightarrow OM = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$ON = |\overrightarrow{ON}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

b) Dễ thấy: $OM = \sqrt{10} = MN \Rightarrow \triangle OMN$ cân tại M .

Lại có: $OM^2 + MN^2 = 10 + 10 = 20 = ON^2$

\Rightarrow Theo định lý Pythagore đảo, ta có $\triangle OMN$ vuông tại M .

Vậy $\triangle OMN$ vuông cân tại M .

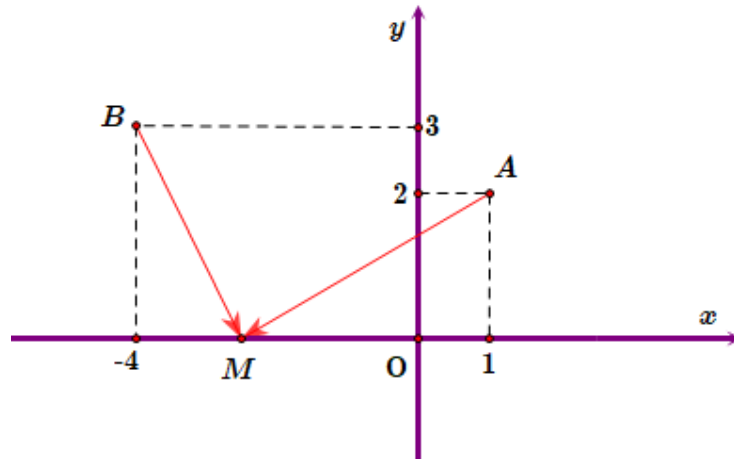
Câu 97. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2), B(-4;3)$. Gọi $M(t;0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ theo t .

b) Tính t để $\widehat{AMB} = 90^\circ$

Lời giải

a)



Ta có: $A(1;2), B(-4;3)$ và $M(t;0)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (t-1; -2), \overrightarrow{BM} = (t+4; -3)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (t-1)(t+4) + (-2)(-3) = t^2 + 3t + 2$$

b)

Để $\widehat{AMB} = 90^\circ$ hay $AM \perp BM$ thì $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -2 \end{cases}$$

Vậy $t = -1$ hoặc $t = -2$ thì $\widehat{AMB} = 90^\circ$

Câu 98. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$

a) Giải tam giác

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2 - (-4); 4 - 1) = (6; 3) \\ \overrightarrow{BC} = (2 - 2; -2 - 4) = (0; -6) \\ \overrightarrow{AC} = (2 - (-4); -2 - 1) = (6; -3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \\ BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6 \\ AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5} \end{cases}$$

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC , ta có:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(3\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 - (6)^2}{2 \cdot 3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \hat{A} \approx 53,13^\circ$$

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(6)^2 + (3\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{5})^2}{2 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{B} \approx 63,435^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} \approx 63,435^\circ$$

Vậy tam giác ABC có: $a = 6; b = 3\sqrt{5}; c = 3\sqrt{5}$;

$$\hat{A} \approx 53,13^\circ; \hat{B} = \hat{C} \approx 63,435^\circ.$$

b)

Gọi H có tọa độ $(x; y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} = (x - (-4); y - 1) = (x + 4; y - 1) \\ \overrightarrow{BH} = (x - 2; y - 4) \end{cases}$$

Lại có: H là trực tâm tam giác ABC

$$\Rightarrow AH \perp BC \text{ và } BH \perp AC$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 0$$

$$\text{và } (\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AC}) = 90^\circ \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ và } \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\text{Mà: } \overrightarrow{BC} = (0; -6)$$

$$\Rightarrow (x + 4) \cdot 0 + (y - 1) \cdot (-6) = 0 \Leftrightarrow -6 \cdot (y - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 1.$$

$$\text{Và } \overrightarrow{AC} = (6; -3) \Rightarrow (x - 2) \cdot 6 + (y - 4) \cdot (-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 12 + (-3) \cdot (-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } H \text{ có tọa độ } \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$$

Câu 99. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;3)$ và $B(7;1)$.

a) Tính chu vi của tam giác OAB .

b) Chứng minh rằng OA vuông góc với AB . Tính diện tích của tam giác OAB .

c) Gọi M là trung điểm của AB . Tính số đo góc \widehat{BOM} .

Lời giải

a) Do $A(1;3)$ và $B(7;1)$ suy ra

$$OA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}; OB = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}; AB = \sqrt{(7-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{40}.$$

Suy ra chu vi của tam giác OAB bằng

$$OA + AB + OB = \sqrt{10} + \sqrt{50} + \sqrt{40} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{10}.$$

b) Theo kết quả của phần a), ta có $OA^2 + AB^2 = 10 + 40 = 50 = OB^2$. Từ đó, theo định lý Pythagore tam giác OAB vuông tại A , hay $OA \perp AB$.

Suy ra diện tích tam giác OAB bằng $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = 10$ (đ.v.d.t).

c) Do M là trung điểm của AB nên $M(4;2)$. Suy ra $OM = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ và do đó

$$\cos(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OM}|} = \frac{7 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{20}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Suy ra $0^\circ < (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}) < 90^\circ$ và do đó $\widehat{BOM} = (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OM}) \approx 18^\circ 26' 6''$.

Nhận xét. Ta có thể chứng minh được OA vuông góc với AB nhờ vào tích vô hướng, mà không cần phải tính độ dài của các đoạn thẳng như sau:

$$\text{Từ giả thiết suy ra } \overrightarrow{OA} = (1; 3), \overrightarrow{AB} = (6; -2).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) = 0$$

Từ đó, do các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}$ đều khác $\vec{0}$, suy ra $OA \perp AB$.

Một cách khái quát, để chứng minh hai đường thẳng MN và PQ vuông góc với nhau, ta chứng minh $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$.

Câu 100. Cho bốn điểm $M(6; -4), N(7; 3), P(0; 4), Q(-1; -3)$. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

Lời giải

$$\overrightarrow{MN} = (1; 7); \overrightarrow{QP} = (1; 7); \overrightarrow{NP} = (-7; 1); \text{ suy ra } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = (1; 7) \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 1 \cdot (-7) + 7 \cdot 1 = 0 \Rightarrow MN \perp NP \\ MN = NP = \sqrt{50}. \end{cases}$$

Tứ giác $MNPQ$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau, có một góc vuông và hai cạnh liên tiếp bằng nhau suy ra $MNPQ$ là hình vuông.

Câu 101. Tính góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} trong các trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (1; -4), \vec{b} = (5; 3)$;

b) $\vec{a} = (4; 3), \vec{b} = (6; 0)$;

c) $\vec{a} = (2; 2\sqrt{3}), \vec{b} = (-3; \sqrt{3})$.

Lời giải

a) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot 5 + (-4) \cdot 3}{\sqrt{1 + (-4)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 3^2}} = \frac{-7\sqrt{2}}{34} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \approx 106^\circ 56'.$

b) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 6 + 3 \cdot 0}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{6^2 + 0^2}} = \frac{4}{5} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) \approx 36^\circ 52'.$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2(-3) + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 - 6 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$

Câu 102. Cho điểm $A(1; 4)$. Gọi B là điểm đối xứng với điểm A qua gốc tọa độ O . Tìm tọa độ của điểm C có tung độ bằng 3, sao cho tam giác ABC vuông tại C .

Lời giải

Gọi $C(x; 3)$.

Vì B là điểm đối xứng với điểm A qua gốc tọa độ O nên $B(-1; -4)$.

$\overrightarrow{CA} = (1 - x; 1); \overrightarrow{CB} = (-1 - x; -7).$

Tam giác ABC vuông tại C nên ta có:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (1 - x)(-1 - x) - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Vậy $C(2\sqrt{2}; 3)$ hoặc $C(-2\sqrt{2}; 3)$.

Câu 103. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2; 2), B(1; -1), C(8; 0)$.

a) Tính $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ và $\cos \widehat{ABC}$.

b) Chứng minh $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Giải tam giác ABC .

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (1; 3), \overrightarrow{BC} = (7; 1)$. Do đó $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 10$.

Mặt khác, ta cũng có:

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}, |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50},$

$\cos \widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{50}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

b) Do $\overrightarrow{AB} = (-1; -3)$ và $\overrightarrow{AC} = (6; -2)$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot 6 + (-3) \cdot (-2) = 0$. Vậy $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

c) Do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\widehat{BAC} = 90^\circ$, tức là tam giác ABC vuông tại A . Mà $\cos \widehat{ABC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ nên

$$\widehat{ABC} \approx 63^\circ. \text{ Vì thế } \widehat{ACB} \approx 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ.$$

Mặt khác, ta có: $AB = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{10}$,

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}, CA = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2} = 2\sqrt{10}$$

Câu 104. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $A(-2;3); B(4;5); C(2;-3)$

a. Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

c. Giải tam giác ABC (làm tròn các kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

$$A(-2;3); B(4;5); C(2;-3)$$

a. Có: $\overrightarrow{AB} = (6;2); \overrightarrow{BC} = (-2;-8)$

$$\text{Vì } \frac{6}{-2} \neq \frac{2}{-8} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{BC}$$

Vậy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-2 + 4 + 2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 + 5 + (-3)}{3}$$

$$\text{Vậy } G\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$$

c. Giải tam giác ABC (làm tròn các kết quả đến hàng đơn vị).

$$- \overrightarrow{AB} = (6;2) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} \approx 6$$

$$- \overrightarrow{BC} = (-2;-8) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2} = 2\sqrt{17} \approx 8$$

$$- \overrightarrow{AC} = (4;-6) \Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{13} \approx 7$$

$$\overrightarrow{BA} = (-6;-2); \overrightarrow{BC} = (-2;-8)$$

$$- \cos \widehat{ABC} = \cos(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{28}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{17}} \approx 0,54 \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 58^\circ$$

$$- \cos \widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{12}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{13}} \approx 0,26 \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 75^\circ$$

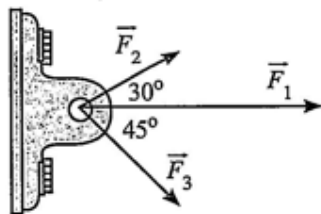
Xét tam giác ABC có: $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$ (ĐL tổng ba góc trong tam giác)

$$\Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 47^\circ$$

Dạng 6. Bài toán thực tế

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 105. Một vật đồng thời bị ba lực tác động: lực tác động thứ nhất $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là 1500 N , lực tác động thứ hai $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn là 600 N , lực tác động thứ ba $\overrightarrow{F_3}$ có độ lớn là 800 N .

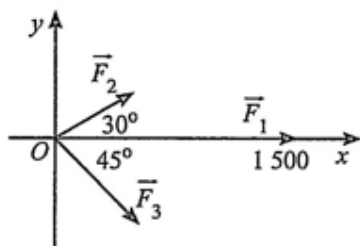


Hình 5

Các lực này được biểu diễn bằng những vector như Hình 5, với $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 30^\circ$, $(\vec{F}_1, \vec{F}_3) = 45^\circ$ và $(\vec{F}_2, \vec{F}_3) = 75^\circ$. Tính độ lớn lực tổng hợp tác động lên vật (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như Hình 6, x và y tính bằng Newton.



Hình 6

Ta có:

$$\vec{F}_1 = (1500; 0);$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 30^\circ \text{ nên tọa độ của } \vec{F}_2 \text{ là: } \vec{F}_2 = (600 \cos 30^\circ; 600 \sin 30^\circ) \text{ hay } \vec{F}_2 = (300\sqrt{3}; 300).$$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_3) = 45^\circ \text{ nên tọa độ của } \vec{F}_3 \text{ là: } \vec{F}_3 = (800 \cos 45^\circ; -800 \sin 45^\circ) \text{ hay } \vec{F}_3 = (400\sqrt{2}; -400\sqrt{2}).$$

Do đó, lực \vec{F} tổng hợp các lực tác động lên vật có tọa độ là:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1500 + 300\sqrt{3} + 400\sqrt{2}; 300 - 400\sqrt{2}).$$

Độ lớn lực tổng hợp \vec{F} tác động lên vật là:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(1500 + 300\sqrt{3} + 400\sqrt{2})^2 + (300 - 400\sqrt{2})^2} \approx 2599(N)$$

Câu 106. Một máy bay đang hạ cánh với vận tốc $\vec{v} = (-210; -42)$. Cho biết vận tốc của gió là $\vec{w} = (-12; -4)$ và một đơn vị trên hệ trục tọa độ tương ứng với 1 km . Tìm độ dài vector tổng hai vận tốc \vec{v} và \vec{w}

Lời giải

$$\text{Ta có: } \vec{v} + \vec{w} = (-210 + (-12); -42 + (-4)) = (-222; -46)$$

$$\text{Độ dài của vector tổng hai vận tốc } \vec{v} \text{ và } \vec{w} \text{ là: } |\vec{v} + \vec{w}| = \sqrt{(-222)^2 + (-46)^2} = 10\sqrt{514}(\text{km})$$

Câu 107. Sự chuyển động của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau:

Tàu khởi hành từ vị trí $A(1; 2)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vector $\vec{v} = (3; 4)$. Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

Lời giải

Gọi $B(x; y)$ là vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

Do tàu khởi hành từ A đi chuyển với vận tốc được biểu thị bởi vector $\vec{v} = (3; 4)$ nên cứ sau mỗi giờ, tàu đi chuyển được một quãng bằng $|\vec{v}|$.

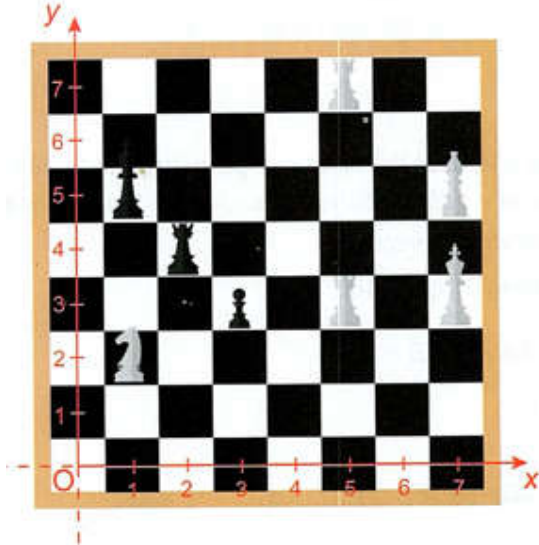
Vậy sau 1,5 giờ tàu di chuyển tới B , ta được: $\overrightarrow{AB} = 1,5 \cdot \vec{v}$

$$\Leftrightarrow (x-1; y-2) = 1,5 \cdot (3; 4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=4,5 \\ y-2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5,5 \\ y=8 \end{cases}$$

Vậy sau 1,5 tàu ở vị trí (trên mặt phẳng tọa độ) là $B(5,5;8)$.

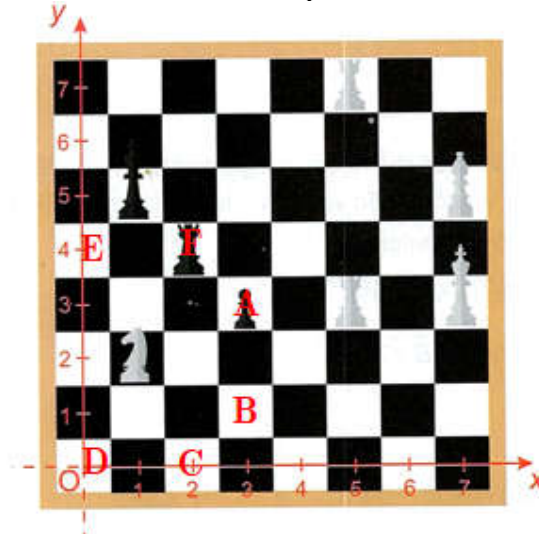
Câu 108. Trong hình, quân mã đang ở vị trí có tọa độ $(1;2)$. Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?



Lời giải

a) Quân mã đi theo đường chéo hình chữ nhật có chiều dài 3 ô, chiều rộng 2 ô.

Do đó, từ vị trí hiện tại, quân mã có thể đi đến các vị trí A, B, C, D, E, F như dưới đây:



A có tọa độ $(3;3)$

B có tọa độ $(3;1)$

C có tọa độ $(2;0)$

D có tọa độ $(0;0)$

E có tọa độ $(0;4)$

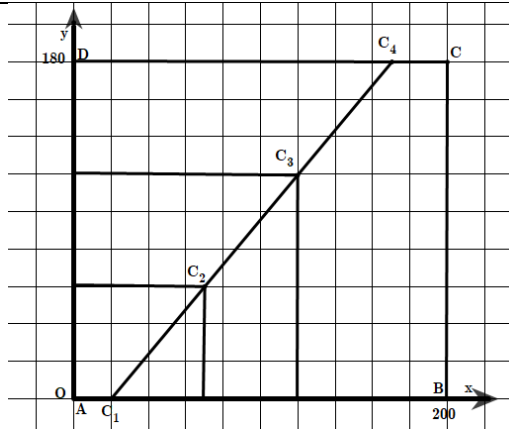
F có tọa độ $(2;4)$

Vậy quân mã có thể đi đến các vị trí $A(3;3), B(3;1), C(2;0), D(0;0), E(0;4), F(2;4)$.

Câu 109. Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật $ABCD$ với độ dài $AB = 200m, AD = 180m$, người ta dự định làm 4 cột điện liên tiếp cách đều, cột thứ nhất nằm trên bờ AB và cách đỉnh A khoảng cách $20m$, cột thứ tư nằm trên bờ CD và cách đỉnh C khoảng cách $30m$. Tính các khoảng cách từ vị trí các cột thứ hai, thứ ba đến các bờ AB, AD .

Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho $A(0;0), B(200;0), C(200;180), D(0;180)$. Gọi vị trí các cột điện được trồng là C_1, C_2, C_3, C_4 .



Do C_1 thuộc cạnh AB và $AC_1 = 20$ nên $C_1(20;0)$, do C_4 thuộc cạnh CD và $C_4C = 30$ nên $C_4(170;180)$.

Suy ra $\overrightarrow{C_1C_4} = (150;180)$. (1)

Do bốn cột điện C_1, C_2, C_3, C_4 được trồng liên tiếp, cách đều trên một đường thẳng, nên

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_4} \text{ và } \overrightarrow{C_1C_3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C_4}.$$

Gọi tọa độ của C_2 đối với hệ trục đang xét là $(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{C_1C_2} = (x-20;y)$.

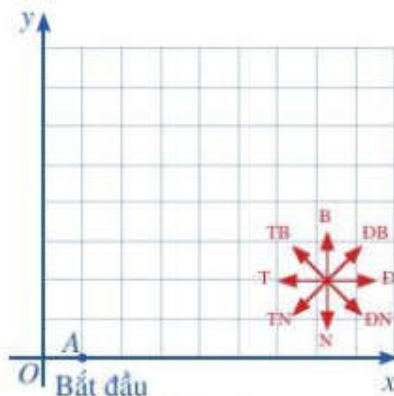
$$\text{Từ đó và (1), do } \overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_4} \text{ nên } \begin{cases} x-20 = \frac{150}{3} = 50 \\ y = \frac{180}{3} = 60. \end{cases}$$

Suy ra $x = 70, y = 60$, tức là $C_2(70;60)$.

Khi đó $d(C_2; AB) = d(C_2; Ox) = 60(m)$ và $d(C_2; AD) = d(C_2; Oy) = 70(m)$.

Hoàn toàn tương tự, cũng được $d(C_3; AB) = 120(m), d(C_3; AD) = 120(m)$.

Câu 110. Trong một bài luyện tập của các cầu thủ bóng nước, huấn luyện viên cho các cầu thủ di chuyển theo ba đoạn liên tiếp. Đoạn thứ nhất di chuyển về hướng Đông Bắc với quãng đường là $20m$; đoạn thứ hai di chuyển về hướng Tây Bắc với quãng đường là $10m$ và đoạn thứ ba di chuyển theo hướng Đông Bắc với quãng đường $5m$.

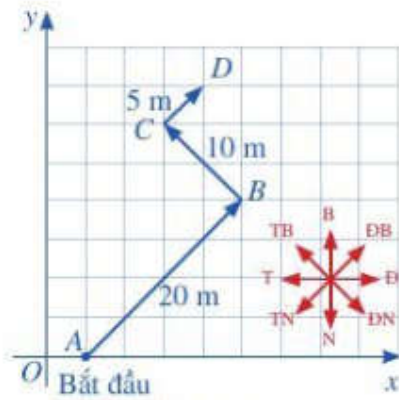


a) Vẽ các vector biểu diễn sự di chuyển của các cầu thủ trong hệ trục tọa độ Oxy với vị trí bắt đầu như hình, trong đó ta quy ước độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là $5m$.

b) Tìm tọa độ của các vector trên.

Lời giải

a) Trong hình, ta thấy các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ lần lượt biểu diễn sự di chuyển theo đoạn thứ nhất; đoạn thứ hai; đoạn thứ ba của các cầu thủ.



b) Do độ dài đường chéo của mỗi ô vuông là $5m$ nên độ dài cạnh của mỗi ô vuông là $\frac{5\sqrt{2}}{2}m$.

Dựa vào số ô vuông, ta có:

$$A\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; 0\right); \quad B\left(\frac{25\sqrt{2}}{2}; 10\sqrt{2}\right);$$

$$C\left(\frac{15\sqrt{2}}{2}; 15\sqrt{2}\right); \quad D\left(10\sqrt{2}; \frac{35\sqrt{2}}{2}\right).$$

Do đó

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{25\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}; 10\sqrt{2} - 0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (10\sqrt{2}; 10\sqrt{2})$$

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{15\sqrt{2}}{2} - \frac{25\sqrt{2}}{2}; 15\sqrt{2} - 10\sqrt{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2})$$

$$\overrightarrow{CD} = \left(10\sqrt{2} - \frac{15\sqrt{2}}{2}; \frac{35\sqrt{2}}{2} - 15\sqrt{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right).$$

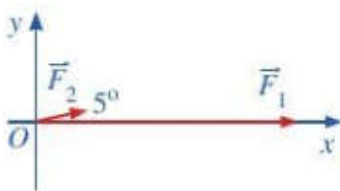
Câu 111. Một chiếc xe ô tô con bị mắc kẹt trong bùn lầy. Để kéo xe ra, người ta dùng xe tải kéo bằng cách gắn một đầu dây cáp kéo xe vào đầu xe ô tô con và móc đầu còn lại vào phía sau của xe tải kéo. Khi kéo, xe tải tạo ra một lực \vec{F}_1 có độ lớn (cường độ) là $2000N$ theo phương ngang lên xe ô tô con.



Ngoài ra, có thêm một người đẩy phía sau xe ô tô con, tạo ra lực \vec{F}_2 có độ lớn là $300N$ lên xe. Các lực này được biểu diễn bằng vector như hình sao cho $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 5^\circ$. Độ lớn lực tổng hợp tác động lên xe ô tô con là bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình bên, mỗi đơn vị trên trục ứng với $1N$.



Ta có:

$$- \vec{F}_1 = (2000; 0);$$

$$- (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 5^\circ \text{ nên tọa độ của } \vec{F}_2 \text{ là:}$$

$$\vec{F}_2 = (300 \cdot \cos 5^\circ; 300 \cdot \sin 5^\circ).$$

Do đó, lực \vec{F} tổng hợp các lực tác động lên xe ô tô con có tọa độ là:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (2000 + 300 \cdot \cos 5^\circ; 300 \cdot \sin 5^\circ).$$

Độ lớn lực tổng hợp \vec{F} tác động lên xe ô tô con là:

$$|\vec{F}| = \sqrt{(2000 + 300 \cdot \cos 5^\circ)^2 + (300 \cdot \sin 5^\circ)^2} \approx 2299(N).$$

Câu 112. Trên màn hình ra đa của đài kiểm soát không lưu (được coi như mặt phẳng tọa độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), một máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều từ thành phố A có tọa độ $(600; 200)$ đến thành phố B có tọa độ $(200; 500)$ và thời gian bay quãng đường AB là 3 giờ. Hãy tìm tọa độ của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ.

Lời giải

Giả sử $M(x; y)$ là vị trí của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ. Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = (x - 600; y - 200), \overrightarrow{AB} = (-400; 300).$$

Vì máy bay trực thăng chuyển động thẳng đều nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$. Do đó

$$\begin{cases} x - 600 = -\frac{400}{3} \\ y - 200 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1400}{3} \\ y = 300. \end{cases}$$

Vậy vị trí của máy bay trực thăng tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ là $M\left(\frac{1400}{3}; 300\right)$.

Nguyễn Bảo Vương