

# ÔN TẬP CHƯƠNG IV. VECTOR

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vector nào sau đây có cùng phương?
- A.  $\vec{u} = (2; 3)$  và  $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; 6\right)$
- B.  $\vec{a} = (\sqrt{2}; 6)$  và  $\vec{b} = (1; 3\sqrt{2})$
- C.  $\vec{i} = (0; 1)$  và  $\vec{j} = (1; 0)$
- D.  $\vec{c} = (1; 3)$  và  $\vec{d} = (2; -6)$
- Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vector nào sau đây vuông góc với nhau?
- A.  $\vec{u} = (2; 3)$  và  $\vec{v} = (4; 6)$
- B.  $\vec{a} = (1; -1)$  và  $\vec{b} = (-1; 1)$
- C.  $\vec{z} = (a; b)$  và  $\vec{t} = (-b; a)$
- D.  $\vec{n} = (1; 1)$  và  $\vec{k} = (2; 0)$
- Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ, vector nào sau đây có độ dài bằng 1 ?
- A.  $\vec{a} = (1; 1)$
- B.  $\vec{b} = (1; -1)$
- C.  $\vec{c} = \left(2; \frac{1}{2}\right)$
- D.  $\vec{d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$
- Câu 4.** Góc giữa vector  $\vec{a} = (1; -1)$  và vector  $\vec{b} = (-2; 0)$  có số đo bằng:
- A.  $90^\circ$
- B.  $0^\circ$
- C.  $135^\circ$
- D.  $45^\circ$
- Câu 5.** Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A.  $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$
- B.  $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$
- C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$
- D.  $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$
- Câu 6.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = 45^\circ$
- B.  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 45^\circ$  và  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$
- C.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = a^2\sqrt{2}$
- D.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -a^2$
- Câu 7.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Xét các vector có hai điểm mút lấy từ các điểm  $A, B, C, D$  và  $O$ . Số các vector khác vector - không và cùng phương với  $\overrightarrow{AC}$  là
- A. 6.                                      B. 3.                                      C. 4.                                      D. 2.
- Câu 8.** Cho đoạn thẳng  $AC$  và  $B$  là một điểm nằm giữa  $A, C$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là một khẳng định đúng?
- A. Hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CB}$  cùng hướng.
- B. Hai vector  $\overrightarrow{CA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng.

C. Hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.

D. Hai vector  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BA}$  cùng hướng.

**Câu 9.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $K, L, M, N$  tương ứng là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ . Trong các vector có đầu mút lấy từ các điểm  $A, B, C, D, K, L, M, O$ , có bao nhiêu vector bằng vector  $\overrightarrow{AK}$ ?

A. 2.

B. 6.

C. 4.

D. 8.

**Câu 10.** Cho hình thoi  $ABCD$  có độ dài các cạnh bằng 1 và  $\widehat{DAB} = 120^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

B.  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ .

C.  $|\overrightarrow{BD}| = 1$ .

D.  $|\overrightarrow{AC}| = 1$ .

**Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$  đều, trọng tâm  $G$ , có độ dài các cạnh bằng 3. Độ dài của vector  $\overrightarrow{AG}$  bằng

A.  $\sqrt{3}$ .

B.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

D.  $2\sqrt{3}$ .

**Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $AB = 3, AC = 4$ . Độ dài của vector  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$  bằng

A.  $\sqrt{13}$ .

B.  $2\sqrt{13}$ .

C. 4.

D. 2.

**Câu 13.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, BC = 4$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Độ dài của vector  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$  bằng

A. 2.

B.  $\sqrt{19}$ .

C. 4.

D.  $\frac{\sqrt{19}}{2}$ .

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $I$  sao cho  $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ . Khẳng định nào sau đây là một khẳng định đúng?

A.  $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .

B.  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ .

C.  $\overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}}{-3}$ .

D.  $\overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}$ .

**Câu 15.** Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Khẳng định nào sau đây là một khẳng định đúng?

A.  $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}$ .

B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$ .

C.  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MG}$ .

- D.  $3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{AM}$
- Câu 16.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-3;1), B(2;-1), C(4;6)$ . Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  có tọa độ là
- A.  $(1;2)$ .  
 B.  $(2;1)$ .  
 C.  $(1;-2)$ .  
 D.  $(-2;1)$ .
- Câu 17.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-3;3), B(5;-2)$  và  $G(2;2)$ . Tọa độ của điểm  $C$  sao cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  là
- A.  $(5;4)$ .  
 B.  $(4;5)$ .  
 C.  $(4;3)$ .  
 D.  $(3;5)$ .
- Câu 18.** Cho hình vuông  $ABCD$  với độ dài cạnh bằng  $a$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  bằng
- A.  $a^2\sqrt{2}$   
 B.  $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$ .  
 C.  $a^2$   
 D.  $\frac{a^2}{2}$ .
- Câu 19.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng khác  $\vec{0}$ . Khi đó  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  tương đương với
- A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.  
 B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.  
 C.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.  
 D.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .
- Câu 20.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng khác  $\vec{0}$ . Khi đó  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  tương đương với
- A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.  
 B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.  
 C.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.  
 D.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .
- Câu 21.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(3;4); B(2;5)$ . Tọa độ của  $\overrightarrow{AB}$  là:
- A.  $(1;-1)$   
 B.  $(1;1)$   
 C.  $(-1;1)$   
 D.  $(-1;-1)$
- Câu 22.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?
- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\cos(\vec{a}, \vec{b})|$ .  
 B.  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$   
 C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$ .  
 D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .
- Câu 23.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Biểu thức  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$  bằng:
- A.  $CD^2$ .  
 B.  $0$ .  
 C.  $\vec{0}$ .  
 D.  $1$ .

**Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(-2;1), B(1;-3)$ . Tọa độ của vector  $\overrightarrow{AB}$  là:

- A.  $(1;-4)$ .
- B.  $(-3;4)$ .
- C.  $(3;-4)$ .
- D.  $(1;-2)$ .

**Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;-5), B(5;2)$  và trọng tâm là gốc tọa độ. Tọa độ điểm  $C$  là:

- A.  $(4;-3)$ .
- B.  $(-4;-3)$ .
- C.  $(-4;3)$ .
- D.  $(4;3)$ .

**Câu 26.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , vector nào sau đây có độ dài bằng 1 ?

- A.  $\vec{a} = (1;1)$ .
- B.  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ .
- C.  $\vec{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{3}\right)$ .
- D.  $\vec{d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

**Câu 27.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=1, BC=2$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$  bằng

- A.  $\sqrt{3}$ .
- B.  $-\sqrt{3}$ .
- C. 3
- D. -3.

**Câu 28.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(2;-1), B(-1;5)$  và  $C(3m;2m-1)$ . Tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho  $AB \perp OC$  là

- A.  $m = -2$ .
- B.  $m = 2$ .
- C.  $m = \pm 2$ .
- D.  $m = 3$ .

**Câu 29.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  với  $AB=1, AC=2$ . Lấy  $M, N, P$  tương ứng thuộc các cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $2BM = MC, CN = 2NA, AP = 2PB$ . Giá trị của tích vô hướng  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP}$  bằng

- A.  $\frac{2}{3}$ .
- B.  $-\frac{1}{2}$ .
- C. 0.
- D. 1.

**Câu 30.** Cho tam giác  $ABC$  đều các cạnh có độ dài bằng 1. Lấy  $M, N, P$  lần lượt thuộc các cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = 2MC, CN = 2NA$  và  $AM \perp NP$ . Tỉ số của  $\frac{AP}{AB}$  bằng

- A.  $\frac{5}{12}$ .
- B.  $\frac{7}{12}$ .

C.  $\frac{5}{7}$ .

D.  $\frac{7}{5}$ .

**Câu 31.** Cho tam giác  $ABC$  đều có độ dài các cạnh bằng  $3a$ . Lấy điểm  $M$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Tích vô hướng của hai vector  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MC}$  bằng

A.  $\frac{a^2}{2}$ .

B.  $-\frac{a^2}{2}$ .

C.  $a^2$ .

D.  $-a^2$ .

**Câu 32.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thoả mãn  $|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AC}|$  là

A. đường tròn tâm  $A$  bán kính  $BC$ .B. đường thẳng đi qua  $A$  và song song với  $BC$ .C. đường tròn đường kính  $BC$ .D. đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .

### BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Câu 1.** Cho 3 vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đều khác vector  $\vec{0}$ . Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Nếu hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phươngb) Nếu hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng ngược hướng với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng

**Câu 2.** Cho  $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$ . So sánh độ dài, phương và hướng của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$

**Câu 3.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng  $AD$  và  $BC$  trùng nhau.

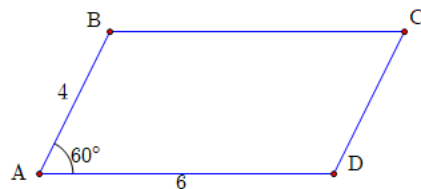
**Câu 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$ , ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

**Câu 5.** Chứng minh:

a) Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$  với  $E$  là điểm bất kì;b) Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{MN}$  với  $M, N$  là hai điểm bất kì;c) Nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NG}$  với  $M, N$  là hai điểm bất kì.

**Câu 6.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 4, AD = 6, \widehat{BAD} = 60^\circ$  (Hình).

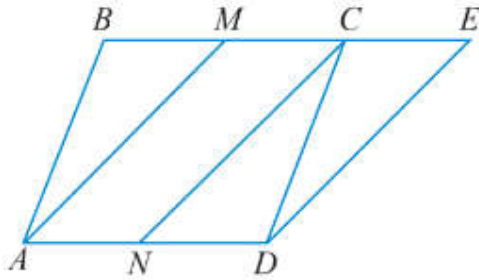
a) Biểu thị các vector  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ .b) Tính các tích vô hướng  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$ .c) Tính độ dài các đường chéo  $BD, AC$ .

**Câu 7.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo và  $AB = a, BC = 3a$ .

a) Tính độ dài các vector  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ b) Tìm trong hình ảnh vector đối nhau và có độ dài bằng  $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

**Câu 8.** Cho hình thoi  $ABCD$  đi có cạnh bằng  $a$  và có góc  $A$  bằng  $60^\circ$ . Tìm độ dài của các vector sau:  
 $\vec{p} = \vec{AB} + \vec{AD}$ ;  $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{AD}$ ;  $\vec{v} = 2\vec{AB} - \vec{AC}$

**Câu 9.** Cho hình bình hành  $ABCD$  hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Vẽ điểm  $E$  sao cho  $\vec{CE} = \vec{AN}$  (hình)



a) Tìm tổng của các vector:  $\vec{NC}$  và  $\vec{MC}$ ;  $\vec{AM}$  và  $\vec{CD}$ ;  $\vec{AD}$  và  $\vec{NC}$

b) Tìm các vector hiệu:  $\vec{NC} - \vec{MC}$ ;  $\vec{AC} - \vec{BC}$ ;  $\vec{AB} - \vec{ME}$

c) Chứng minh  $\vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AB} + \vec{AD}$

**Câu 10.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  là hai vector khác vector  $\vec{0}$ . Trong trường hợp nào thì đẳng thức sau đúng?

a)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

b)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

**Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$ . Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành  $ABIJ, BCPQ, CARS$ . Chứng minh rằng  $\vec{RJ} + \vec{IQ} + \vec{PS} = \vec{0}$ .

**Câu 12.** Trên cạnh  $BC$  của tam giác  $ABC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $MB = 3MC$ .

a) Tìm mối liên hệ giữa hai vector  $\vec{MB}$  và  $\vec{MC}$

b) Biểu thị vector  $\vec{AM}$  theo hai vector  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .

**Câu 13.** Cho vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$  (hay còn được viết là  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ) là một vector đơn vị, cùng hướng với vector  $\vec{a}$ .

**Câu 14.** Cho ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}$  với  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . Xét một hệ trục Oxy với các vector đơn vị  $\vec{i} = \vec{a}, \vec{j} = \vec{b}$ . Chứng minh rằng:

a) Vector  $\vec{u}$  có tọa độ là  $(\vec{u} \cdot \vec{a}; \vec{u} \cdot \vec{b})$

b)  $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b}$

**Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ .

**Câu 16.** Cho ba điểm phân biệt  $I, A, B$  và số thực  $k \neq 1$  thỏa mãn  $\vec{IA} = k\vec{IB}$ . Chứng minh rằng với  $O$  là điểm bất kì ta có:  $\vec{OI} = \left(\frac{1}{1-k}\right)\vec{OA} - \left(\frac{k}{1-k}\right)\vec{OB}$ .

**Câu 17.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 5, \widehat{BAC} = 120^\circ$ . Điểm  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ , điểm  $D$  thỏa mãn  $\vec{AD} = \frac{2}{5}\vec{AC}$ . Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  và chứng minh  $AM \perp BD$ .

**Câu 18.** Cho hai vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  và  $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ .  
 Tính  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ .

**Câu 19.** a) Chứng minh đẳng thức  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$  với  $\vec{a}, \vec{b}$  là hai vector bất kì.

b) Cho  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Câu 20.** Cho tam giác  $ABC$  có ba trung tuyến  $AD, BE, CF$ . Chứng minh rằng:

$$\vec{AD} \cdot \vec{BC} + \vec{BE} \cdot \vec{CA} + \vec{CF} \cdot \vec{AB} = 0$$

- Câu 21.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, AD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là giao điểm của  $BD$  với  $AM, CN$ . Xét các vector khác  $\vec{0}$ , có đầu mút lấy từ các điểm  $A, B, C, D, M, N, I, J, O$ .
- Hãy chỉ ra những vector bằng vector  $\vec{AB}$ ; những vector cùng hướng với  $\vec{AB}$ .
  - Chứng minh rằng  $BI = IJ = JD$ .
- Câu 22.** Trên cạnh  $BC$  của tam giác  $ABC$  lấy các điểm  $M, N$ , không trùng với  $B$  và  $C$  sao cho  $BM = MN = NC$ .
- Chứng minh rằng hai tam giác  $ABC$  và  $AMN$  có cùng trọng tâm.
  - Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Đặt  $\vec{GB} = \vec{u}$  và  $\vec{GC} = \vec{v}$ . Hãy biểu thị các vector sau qua hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ :  $\vec{GA}, \vec{GM}, \vec{GN}$ .
- Câu 23.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  trong mặt phẳng. Chứng minh rằng  $\vec{AB} \cdot \vec{CD} + \vec{BC} \cdot \vec{AD} + \vec{CA} \cdot \vec{BD} = 0$ .
- Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba vector  $\vec{a} = (1; 2), \vec{b} = (3; -4), \vec{c} = (-5; 3)$ .
- Tính các tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{c} \cdot \vec{a}$
  - Tìm góc giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b} + \vec{c}$ .
- Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(2; 1), B(-2; 5)$  và  $C(-5; 2)$ .
- Tìm tọa độ của các vector  $\vec{BA}$  và  $\vec{BC}$
  - Chứng minh rằng  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác vuông. Tính diện tích và chu vi của tam giác đó.
  - Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .
  - Tìm tọa độ của điểm  $D$  sao cho tứ giác  $BCAD$  là một hình bình hành.
- Câu 26.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(2; 1), B(1; 4), C(4; 5), D(5; 2)$ .
- Chứng minh  $ABCD$  là hình vuông.
  - Tìm tọa độ tâm  $I$  của hình vuông  $ABCD$ .
- Câu 27.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(1; 2), B(3; 4), C(-1; -2)$  và  $D(6; 5)$ .
- Hãy tìm tọa độ của các vector  $\vec{AB}$  và  $\vec{CD}$
  - Hãy giải thích tại sao các vector  $\vec{AB}$  và  $\vec{CD}$  cùng phương.
  - Giả sử  $E$  là điểm có tọa độ  $(a; 1)$ . Tìm  $a$  để các vector  $\vec{AC}$  và  $\vec{BE}$  cùng phương.
  - Với  $a$  tìm được, hãy biểu thị vector  $\vec{AE}$  theo các vector  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .
- Câu 28.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 5$  và  $\widehat{CAB} = 60^\circ$
- Tính tích vô hướng  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}, \vec{AB} \cdot \vec{BC}$ .
  - Lấy các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $2\vec{AM} + 3\vec{MC} = \vec{0}$  và  $\vec{NB} + x\vec{NC} = \vec{0} (x \neq -1)$ . Xác định  $x$  sao cho  $AN$  vuông góc với  $BM$ .
- Câu 29.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm các cạnh  $AB, CD$ . Lấy  $P$  thuộc đoạn  $DM$  và  $Q$  thuộc đoạn  $BN$  sao cho  $DP = 2PM, BQ = xQN$ . Đặt  $\vec{AB} = \vec{u}$  và  $\vec{AD} = \vec{v}$ .
- Hãy biểu thị các vector  $\vec{AP}, \vec{AQ}$  qua hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .
  - Tìm  $x$  để  $A, P, Q$  thẳng hàng.
- Câu 30.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$ , không có hai cạnh nào song song. Gọi  $E, F$  theo thứ tự là trung điểm  $AB, CD$ . Gọi  $K, L, M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AF, CE, BF, DE$ .
- Chứng minh rằng tứ giác  $KLMN$  là một hình bình hành.
  - Gọi  $I$  là giao điểm của  $KM, LN$ . Chứng minh rằng  $E, I, F$  thẳng hàng.
- Câu 31.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có  $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = 90^\circ, BC = 1, AB = 2$  và  $AD = 3$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ .
- Hãy biểu thị các vector  $\vec{CM}, \vec{CD}$  theo hai vector  $\vec{AB}$  và  $\vec{AD}$ .

b) Gọi  $N$  là trung điểm  $CD$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $MCD$ , và  $I$  là điểm thuộc cạnh  $CD$  sao cho  $9IC = 5ID$ . Chứng minh rằng  $A, G, I$  thẳng hàng.

c) Tính độ dài các đoạn thẳng  $AI$  và  $BI$ .

**Câu 32.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-2;1), B(1;4)$  và  $C(5;-2)$ .

a) Chứng minh rằng  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác. Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

b) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$ .

**Câu 33.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(2;-1), B(5;3)$  và  $C(-2;9)$ .

a) Tìm điểm  $D$  thuộc trục hoành sao cho  $B, C, D$  thẳng hàng.

b) Tìm điểm  $E$  thuộc trục hoành sao cho  $EA + EB$  nhỏ nhất.

c) Tìm điểm  $F$  thuộc trục tung sao cho vectơ  $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}$  có độ dài ngắn nhất.

**Câu 34.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $MNP$  có  $M(2;1); N(-1;3); P(4;-2)$

a. Tìm tọa độ của các vectơ  $\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$

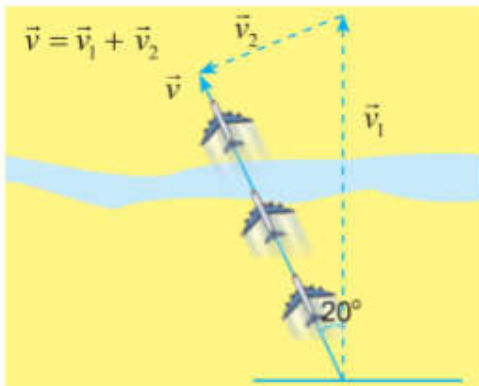
b. Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$

c. Tính độ dài các đoạn thẳng  $MN, MP$

d. Tính  $\cos \widehat{NMP}$

e. Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của  $NP$  và trọng tâm  $G$  của tam giác  $MNP$ .

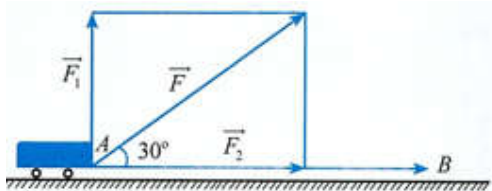
**Câu 35.** Một chiếc máy bay được biết là đang bay về phía Bắc với tốc độ  $45m/s$ , mặc dù vận tốc của nó so với mặt đất là  $38m/s$  theo hướng nghiêng một góc  $20^\circ$  về phía tây bắc (hình). Tính tốc độ của gió



**Câu 36.** Cho tam giác đều  $ABC$  có  $O$  là trọng tâm và  $M$  là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi  $D, E$ , lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ  $M$  đến  $BC, AC, AB$ . Chứng minh rằng

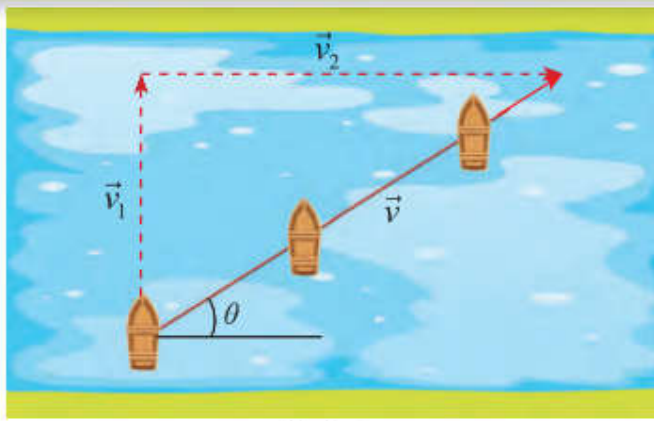
$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}$$

**Câu 37.** Một xe goòng được kéo bởi một lực  $\vec{F}$  có độ lớn là  $50N$ , di chuyển theo quãng đường từ  $A$  đến  $B$  có chiều dài là  $200m$ . Cho biết góc giữa lực  $\vec{F}$  và  $\overrightarrow{AB}$  là  $30^\circ$  và  $\vec{F}$  được phân tích thành 2 lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  (hình). Tính công sinh ra bởi các lực  $\vec{F}, \vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$ .



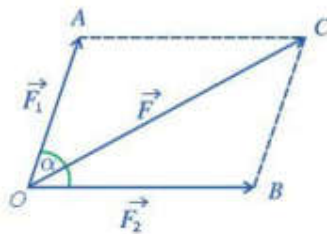
**Câu 38.** Một chiếc thuyền cố gắng đi thẳng qua một con sông với tốc độ  $0,75m/s$ . Tuy nhiên dòng chảy của nước trên con sông đó chạy với tốc độ  $1,20m/s$  về hướng bên phải. Gọi  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}$  lần lượt là vận tốc của thuyền so với dòng nước, vận tốc của dòng nước so với bờ và vận tốc của thuyền so với bờ.





- a) Tính độ dài của các vector  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}$   
 b) Tốc độ dịch chuyển của thuyền so với bờ là bao nhiêu?  
 c) Hướng đi chuyển của thuyền lệch một góc bao nhiêu so với bờ?

**Câu 39.** Hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cho trước cùng tác dụng lên một vật tại điểm  $O$  và tạo với nhau một góc  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \alpha$  làm cho vật di chuyển theo hướng từ  $O$  đến  $C$  (Hình). Lập công thức tính cường độ của hợp lực  $\vec{F}$  làm cho vật di chuyển theo hướng từ  $O$  đến  $C$  (giả sử chỉ có đúng hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  làm cho vật di chuyển).



- Câu 40.** Cho tứ giác  $ABCD$ .  $M$  là điểm thay đổi trong mặt phẳng thoả mãn  $(\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot (\vec{MC} + \vec{MD}) = 0$ . Chứng minh rằng điểm  $M$  luôn nằm trên một đường tròn cố định.
- Câu 41.** Cho tam giác  $ABC$  và đường thẳng  $d$  không có điểm chung với bất kì cạnh nào của tam giác.  $M$  là điểm thay đổi trên đường thẳng  $d$ . Xác định vị trí của  $M$  sao cho biểu thức  $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.
- Câu 42.** Trên sông, một cano chuyển động thẳng đều theo hướng  $S15^\circ E$  với vận tốc có độ lớn bằng  $20 \text{ km/h}$ . Tính vận tốc riêng của cano, biết rằng, nước trên sông chảy về hướng đông với vận tốc có độ lớn bằng  $3 \text{ km/h}$ .
- Câu 43.** Một ô tô có khối lượng  $2,5$  tấn chạy từ chân lên đỉnh một con dốc thẳng. Tính công của trọng lực tác động lên xe, biết dốc dài  $50 \text{ m}$  và nghiêng  $15^\circ$  so với phương nằm ngang (trong tính toán, lấy gia tốc trọng trường bằng  $10 \text{ m/s}^2$ )

# ÔN TẬP CHƯƠNG IV. VECTOR

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**Câu 1.** Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vector nào sau đây có cùng phương?

- A.  $\vec{u} = (2; 3)$  và  $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}; 6\right)$   
 B.  $\vec{a} = (\sqrt{2}; 6)$  và  $\vec{b} = (1; 3\sqrt{2})$   
 C.  $\vec{i} = (0; 1)$  và  $\vec{j} = (1; 0)$   
 D.  $\vec{c} = (1; 3)$  và  $\vec{d} = (2; -6)$

**Lời giải**

- A. Ta có:  $\frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \neq \frac{3}{6}$  nên  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  không cùng phương.  
 B. Ta có:  $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 0$  nên  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương, hơn nữa là cùng hướng

**Chọn B**

- C. Ta có:  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{i} \perp \vec{j}$

Vậy  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$  không cùng phương.

- D. Ta có:  $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{-6}$  nên  $\vec{c}$  và  $\vec{d}$  không cùng phương.

**Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vector nào sau đây vuông góc với nhau?

- A.  $\vec{u} = (2; 3)$  và  $\vec{v} = (4; 6)$   
 B.  $\vec{a} = (1; -1)$  và  $\vec{b} = (-1; 1)$   
 C.  $\vec{z} = (a; b)$  và  $\vec{t} = (-b; a)$   
 D.  $\vec{n} = (1; 1)$  và  $\vec{k} = (2; 0)$

**Lời giải**

- A. Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 26 \neq 0$  nên  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  không vuông góc với nhau.  
 B. Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -2 \neq 0$  nên  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không vuông góc với nhau.  
 C. Ta có:  $\vec{z} \cdot \vec{t} = a \cdot (-b) + b \cdot a = 0$  nên  $\vec{z}$  và  $\vec{t}$  vuông góc với nhau.

**Chọn C**

- D. Ta có:  $\vec{n} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 2 \neq 0$  nên  $\vec{n}$  và  $\vec{k}$  không vuông góc với nhau.

**Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ, vector nào sau đây có độ dài bằng 1 ?

- A.  $\vec{a} = (1; 1)$   
 B.  $\vec{b} = (1; -1)$   
 C.  $\vec{c} = \left(2; \frac{1}{2}\right)$   
 D.  $\vec{d} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

**Lời giải**

- A. Ta có:  $\vec{a} = (1; 1) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$ . (Loại)  
 B. Ta có:  $\vec{b} = (1; -1) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \neq 1$ . (Loại)  
 C. Ta có:  $\vec{c} = \left(2; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2} \neq 1$ . (Loại)

D. Ta có:  $\vec{d} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow |\vec{d}| = \sqrt{\left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)^2} = 1$ . (Thỏa mãn yc)

**Chọn D**

**Câu 4.** Góc giữa vector  $\vec{a} = (1; -1)$  và vector  $\vec{b} = (-2; 0)$  có số đo bằng:

- A.  $90^\circ$
- B.  $0^\circ$
- C.  $135^\circ$
- D.  $45^\circ$

**Lời giải**

Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 = -2 \neq 0$

Lại có:  $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; |\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$ .

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$$

**Chọn C**

**Câu 5.** Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})$
- B.  $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$
- C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$
- D.  $\vec{a}(\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c}$

**Lời giải**

**Chọn D** Đây là một tính chất của tích vô hướng.

A. Sai vì  $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = [|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})] \cdot \vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{a}[|\vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos(\vec{b}, \vec{c})]$

B. Sai vì

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = [|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})]^2 = \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) \neq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$$

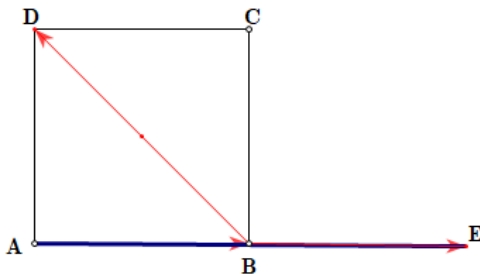
C. Sai vì  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \neq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$

**Câu 6.** Cho hình vuông ABCD có cạnh a. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $(\vec{AB}, \vec{BD}) = 45^\circ$
- B.  $(\vec{AC}, \vec{BC}) = 45^\circ$  và  $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = a^2$
- C.  $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = a^2 \sqrt{2}$
- D.  $\vec{BA} \cdot \vec{BD} = -a^2$

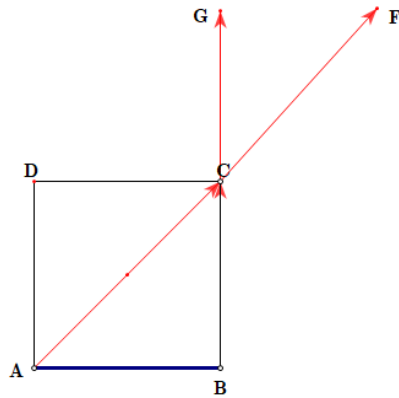
**Lời giải**

A. Ta có:  $(\vec{AB}, \vec{BD}) = (\vec{BE}, \vec{BD}) = 135^\circ \neq 45^\circ$ . Vậy A sai.



B. Ta có:  $(\vec{AC}, \vec{BC}) = (\vec{CF}, \vec{CG}) = 45^\circ$  và

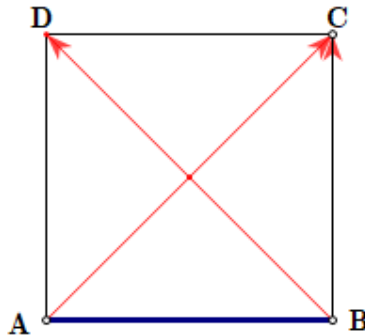
$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$



Vậy B đúng.

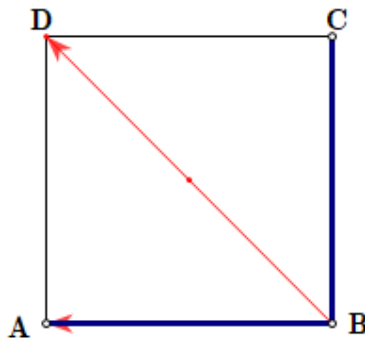
**Chọn B**

C. Dễ thấy  $AC \perp BD$  nên  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \neq a^2\sqrt{2}$ . Vậy C sai.



D. Ta có:  $(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}) = 45^\circ$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \cdot BD \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 \neq -a^2.$$



Vậy D sai

**Câu 7.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Xét các vector có hai điểm mút lấy từ các điểm  $A, B, C, D$  và  $O$ . Số các vector khác vector - không và cùng phương với  $\overrightarrow{AC}$  là

A. 6.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 8.** Cho đoạn thẳng  $AC$  và  $B$  là một điểm nằm giữa  $A, C$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là một khẳng định đúng?

A. Hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CB}$  cùng hướng.

B. Hai vector  $\overrightarrow{CA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng.

C. Hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.

D. Hai vector  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BA}$  cùng hướng.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 9.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $K, L, M, N$  tương ứng là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ . Trong các vector có đầu mút lấy từ các điểm  $A, B, C, D, K, L, M, O$ , có bao nhiêu vector bằng vector  $\overrightarrow{AK}$ ?

- A. 2.
- B. 6.
- C. 4.
- D. 8.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 10.** Cho hình thoi  $ABCD$  có độ dài các cạnh bằng 1 và  $\widehat{DAB} = 120^\circ$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .
- B.  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ .
- C.  $|\overrightarrow{BD}| = 1$ .
- D.  $|\overrightarrow{AC}| = 1$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$  đều, trọng tâm  $G$ , có độ dài các cạnh bằng 3. Độ dài của vector  $\overrightarrow{AG}$  bằng

- A.  $\sqrt{3}$ .
- B.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .
- C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- D.  $2\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $AB = 3, AC = 4$ . Độ dài của vector  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$  bằng

- A.  $\sqrt{13}$ .
- B.  $2\sqrt{13}$ .
- C. 4.
- D. 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 13.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, BC = 4$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Độ dài của vector  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$  bằng

- A. 2.
- B.  $\sqrt{19}$ .
- C. 4.
- D.  $\frac{\sqrt{19}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $I$  sao cho  $\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ . Khẳng định nào sau đây là một khẳng định đúng?

- A.  $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .
- B.  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ .

$$\text{C. } \overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}}{-3}.$$

$$\text{D. } \overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3}.$$

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 15.** Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Khẳng định nào sau đây là một khẳng định đúng?

$$\text{A. } \overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GM}.$$

$$\text{B. } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$$

$$\text{C. } \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MG}.$$

$$\text{D. } 3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{AM}$$

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 16.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-3;1), B(2;-1), C(4;6)$ .

Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  có tọa độ là

$$\text{A. } (1;2).$$

$$\text{B. } (2;1).$$

$$\text{C. } (1;-2).$$

$$\text{D. } (-2;1).$$

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 17.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-3;3), B(5;-2)$  và  $G(2;2)$ .

Tọa độ của điểm  $C$  sao cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  là

$$\text{A. } (5;4).$$

$$\text{B. } (4;5).$$

$$\text{C. } (4;3).$$

$$\text{D. } (3;5).$$

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 18.** Cho hình vuông  $ABCD$  với độ dài cạnh bằng  $a$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  bằng

$$\text{A. } a^2\sqrt{2}$$

$$\text{B. } \frac{a^2}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{C. } a^2$$

$$\text{D. } \frac{a^2}{2}.$$

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 19.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng khác  $\vec{0}$ . Khi đó  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  tương đương với

**A.**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.

**B.**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

**C.**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

**D.**  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 20.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng khác  $\vec{0}$ . Khi đó  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  tương đương với

**A.**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.

- B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.
- C.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.
- D.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

- Câu 21.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(3;4); B(2;5)$ . Tọa độ của  $\overrightarrow{AB}$  là:
- A.  $(1;-1)$
  - B.  $(1;1)$
  - C.  $(-1;1)$
  - D.  $(-1;-1)$

**Lời giải**

Đáp án C.  $(-1;1)$

- Câu 22.** Cho các vector  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?
- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\cos(\vec{a}, \vec{b})|$ .
  - B.  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$
  - C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$ .
  - D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

- Câu 23.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Biểu thức  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$  bằng:
- A.  $CD^2$ .
  - B. 0.
  - C.  $\vec{0}$ .
  - D. 1.

**Lời giải**

**Chọn B**

- Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(-2;1), B(1;-3)$ . Tọa độ của vector  $\overrightarrow{AB}$  là:
- A.  $(1;-4)$ .
  - B.  $(-3;4)$ .
  - C.  $(3;-4)$ .
  - D.  $(1;-2)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

- Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;-5), B(5;2)$  và trọng tâm là gốc tọa độ. Tọa độ điểm  $C$  là:
- A.  $(4;-3)$ .
  - B.  $(-4;-3)$ .
  - C.  $(-4;3)$ .
  - D.  $(4;3)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

- Câu 26.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , vector nào sau đây có độ dài bằng 1 ?
- A.  $\vec{a} = (1;1)$ .
  - B.  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ .
  - C.  $\vec{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{3}\right)$ .

$$\text{D. } \vec{d} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Lời giải

Chọn D

**Câu 27.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=1, BC=2$  và  $\widehat{ABC} = 60^\circ$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$  bằng

A.  $\sqrt{3}$ .

B.  $\sqrt{3}$ .

C. 3

D.  $-3$ .

Lời giải

Chọn D

**Câu 28.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(2;-1), B(-1;5)$  và  $C(3m;2m-1)$ . Tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho  $AB \perp OC$  là

A.  $m = -2$ .

B.  $m = 2$ .

C.  $m = \pm 2$ .

D.  $m = 3$ .

Lời giải

Chọn B

**Câu 29.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  với  $AB=1, AC=2$ . Lấy  $M, N, P$  tương ứng thuộc các cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $2BM = MC, CN = 2NA, AP = 2PB$ . Giá trị của tích vô hướng  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP}$  bằng

A.  $\frac{2}{3}$ .

B.  $-\frac{1}{2}$ .

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

**Câu 30.** Cho tam giác  $ABC$  đều các cạnh có độ dài bằng 1. Lấy  $M, N, P$  lần lượt thuộc các cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = 2MC, CN = 2NA$  và  $AM \perp NP$ . Tỉ số của  $\frac{AP}{AB}$  bằng

A.  $\frac{5}{12}$ .

B.  $\frac{7}{12}$ .

C.  $\frac{5}{7}$ .

D.  $\frac{7}{5}$ .

Lời giải

Chọn A

**Câu 31.** Cho tam giác  $ABC$  đều có độ dài các cạnh bằng  $3a$ . Lấy điểm  $M$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MC}$  bằng

A.  $\frac{a^2}{2}$ .

B.  $-\frac{a^2}{2}$ .



- C.  $a^2$ .  
D.  $-a^2$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

- Câu 32.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AC}|$  là  
A. đường tròn tâm  $A$  bán kính  $BC$ .  
B. đường thẳng đi qua  $A$  và song song với  $BC$ .  
C. đường tròn đường kính  $BC$ .  
D. đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

### **BÀI TẬP TỰ LUẬN**

- Câu 1.** Cho 3 vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đều khác vector  $\vec{0}$ . Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Nếu hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương  
b) Nếu hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng ngược hướng với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng

**Lời giải**

- a)+) Vector  $\vec{a}$  cùng phương với vector  $\vec{c}$  nên giá của vector  $\vec{a}$  song song với giá của vector  $\vec{c}$   
+) Vector  $\vec{b}$  cùng phương với vector  $\vec{c}$  nên giá của vector  $\vec{b}$  song song với giá của vector  $\vec{c}$   
Suy ra giá của vector  $\vec{a}$  và vector  $\vec{b}$  song song với nhau nên  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương  
Vậy khẳng định trên đúng  
b) Giả sử vector  $\vec{c}$  có hướng từ  $A$  sang  $B$   
+) Vector  $\vec{a}$  ngược hướng với vector  $\vec{c}$  nên giá của vector  $\vec{a}$  song song với giá của vector  $\vec{c}$  và có hướng từ  $B$  sang  $A$   
+) Vector  $\vec{b}$  ngược hướng với vector  $\vec{c}$  nên giá của vector  $\vec{b}$  song song với giá của vector  $\vec{c}$  và có hướng từ  $B$  sang  $A$   
Suy ra, hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng  
Vậy khẳng định trên đúng

- Câu 2.** Cho  $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$ . So sánh độ dài, phương và hướng của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$

**Lời giải**

- $|\vec{a} + \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\vec{b}$   
 $\vec{a} = -\vec{b}$  suy ra hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vecto đối nhau nên chúng cùng phương, ngược hướng và có độ dài bằng nhau.

- Câu 3.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng  $AD$  và  $BC$  trùng nhau.

**Lời giải**

- Với 4 điểm  $A, B, C, D$  ta có:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  khi và chỉ khi tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành  
Theo tính chất của hình bình hành thì giao điểm của hai đường chéo là trung điểm của mỗi đường và ngược lại.  
Nói cách khác: trung điểm của hai đoạn thẳng  $AD$  và  $BC$  trùng nhau.  
Vậy ta có điều phải chứng minh.

- Câu 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$ , ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

**Lời giải**

- Do  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$   
 $\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

**Cách 2:**

Ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} (*)$

Áp dụng quy tắc hiệu ta có:  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$

Do đó (\*)  $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$  (luôn đúng do  $ABCD$  là hình bình hành)

**Cách 3:**

Ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC})$$

Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow -\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$  hay

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \text{ (đpcm)}$$

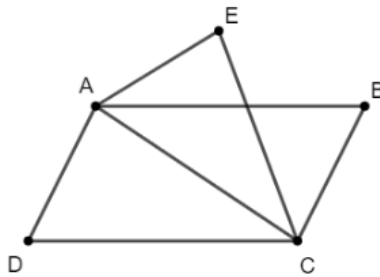
**Câu 5.**

Chứng minh:

- a) Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$  với  $E$  là điểm bất kì;  
 b) Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{MN}$  với  $M, N$  là hai điểm bất kì;  
 c) Nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NG}$  với  $M, N$  là hai điểm bất kì.

**Lời giải**

a)

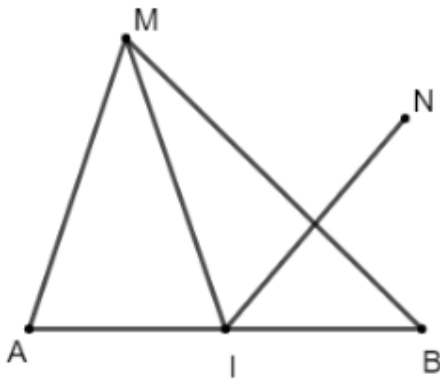


Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .

Với  $E$  là điểm bất kì ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$

Vậy  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$  với  $E$  là điểm bất kì.

b)



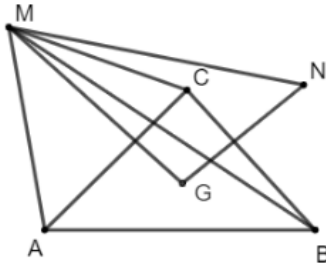
Vì  $I$  là trung điểm của  $AB$  nên với điểm  $M$  bất kì ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ .

Do đó, với điểm  $N$  bất kì, ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IN} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IN}) = 2\overrightarrow{MN}$$

Vậy  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{IN} = 2\overrightarrow{MN}$  với  $M, N$  là hai điểm bất kì.

c)



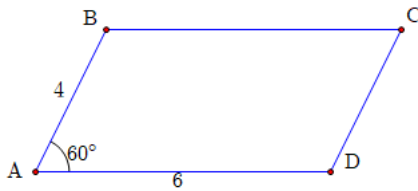
Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên với điểm M bất kì ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Khi đó với điểm N bất kì ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{MN} = 3(\overrightarrow{MG} - \overrightarrow{MN}) = 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NM}) = 3(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MG}) = 3\overrightarrow{NG}$$

Vậy  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{NG}$  với M, N là hai điểm bất kì.

**Câu 6.** Cho hình bình hành ABCD có  $AB = 4, AD = 6, \widehat{BAD} = 60^\circ$  (Hình).



- Biểu thị các vectơ  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ .
- Tính các tích vô hướng  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$ .
- Tính độ dài các đường chéo BD, AC.

**Lời giải**

a) Ta có:  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

ABCD. hình bình hành nên  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

b) Ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} = 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 12$

Do đó:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 12$

Ta cũng có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB^2 + 12 = 4^2 + 12 = 28$$

Do đó:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AB}^2$$

$$= AD^2 - AB^2 = 6^2 - 4^2 = 20.$$

Vậy  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

c) Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABD có:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 28 \Rightarrow BD = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow (\overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 \Leftrightarrow AC^2$$

$$= AB^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + AD^2$$

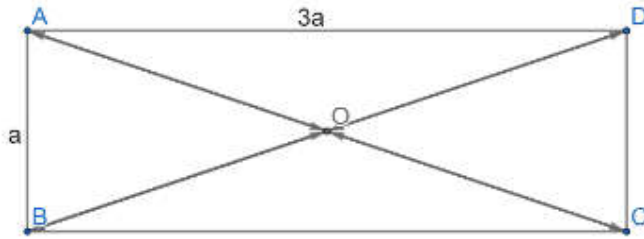
$$\text{Suy ra: } AC^2 = 4^2 + 2 \cdot 12 + 6^2 = 76 \Rightarrow AC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

**Câu 7.** Cho hình chữ nhật ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo và  $AB = a, BC = 3a$ .

a) Tính độ dài các vectơ  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$

b) Tìm trong hình ảnh vectơ đối nhau và có độ dài bằng  $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

**Lời giải**



a) Ta có:

$$AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = a\sqrt{10}$$

$$+) |\overrightarrow{AC}| = AC = a\sqrt{10}$$

$$+) |\overrightarrow{BD}| = BD = a\sqrt{10}$$

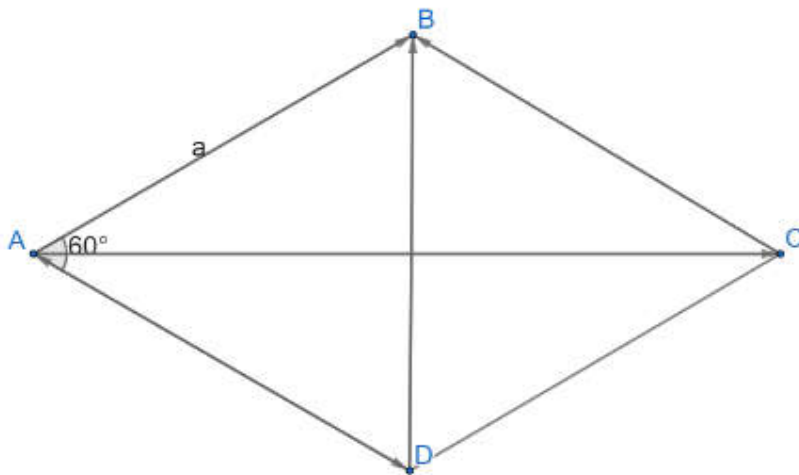
b)  $O$  là giao điểm của hai đường chéo nên ta có:

$$AO = OC = BO = OD = \frac{a\sqrt{10}}{2}$$

Dựa vào hình vẽ ta thấy  $AO$  và  $CO$  cùng nằm trên một đường thẳng;  $BO$  và  $DO$  cùng nằm trên một đường thẳng. Suy ra các cặp vector đối nhau và có độ dài bằng  $\frac{a\sqrt{10}}{2}$  là:  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OC}$ ;  $\overrightarrow{AO}$  và  $\overrightarrow{CO}$ ;  $\overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{OD}$ ;  $\overrightarrow{BO}$  và  $\overrightarrow{DO}$

**Câu 8.** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và có góc  $A$  bằng  $60^\circ$ . Tìm độ dài của các vector sau:  
 $\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ;  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ ;  $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

**Lời giải**



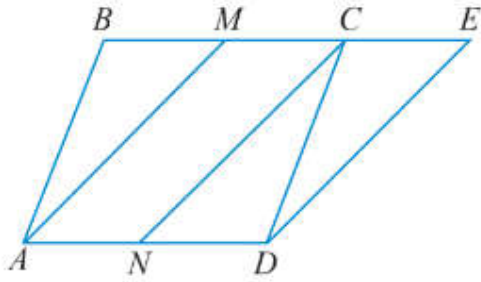
+)  $ABCD$  là hình thoi nên cũng là hình bình hành

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có:

$$\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \quad +) \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB} \quad +) \quad \vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$$

**Câu 9.** Cho hình bình hành  $ABCD$  hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Vẽ điểm  $E$  sao cho  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AN}$  (hình)



- a) Tìm tổng của các vector:  $\overrightarrow{NC}$  và  $\overrightarrow{MC}$ ;  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{CD}$ ;  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{NC}$   
 b) Tìm các vector hiệu:  $\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{MC}$ ;  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ME}$   
 c) Chứng minh  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

**Lời giải**

- a) Ta có:  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AN} \Rightarrow CE \parallel AN$  và  $CE = AN = ND = BM = MC$

Suy ra  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CE}$

$$+) \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{NE}$$

+)  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM}$$

+) Ta có  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN} \Rightarrow AMCN$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} \text{ (vì } AMED \text{ là hình bình hành)}$$

b) Ta có:

$$+) \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NM}$$

$$+) \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$$

$$+) \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$$

c) Ta có:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC}$$

Áp dụng quy tắc hình bình hành vào hình bình hành  $ABCD$  ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Từ đó suy ra  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  (đpcm)

**Câu 10.** Cho  $\vec{a}, \vec{b}$  là hai vector khác vector  $\vec{0}$ . Trong trường hợp nào thì đẳng thức sau đúng?

a)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

b)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

**Lời giải**

a)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$

$$\Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \Leftrightarrow (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$+ (\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| + |\vec{b}|^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| + |\vec{b}|^2$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\Leftrightarrow 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

$$\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$$

Vậy  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng.

b)  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$

$$\Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2 = (\vec{a})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{b})^2$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2\vec{a} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

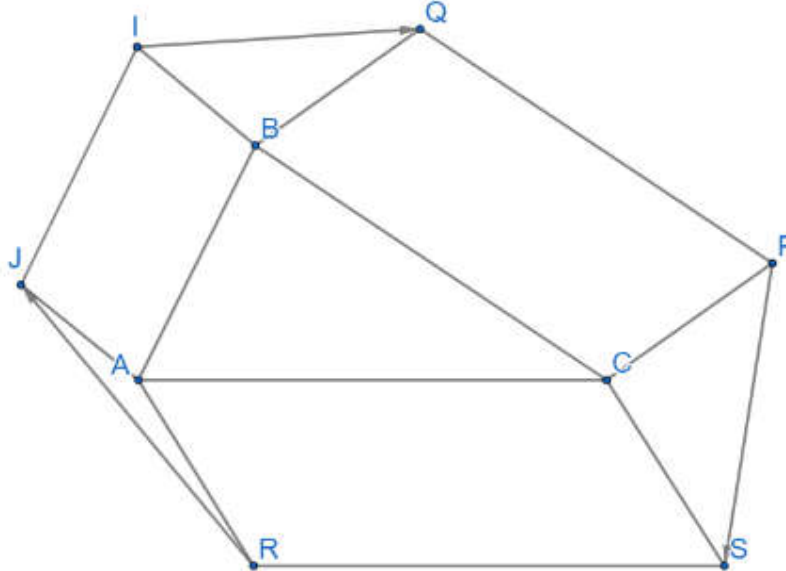
$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$$

Vậy  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$  vuông góc với nhau.

**Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$ . Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành  $ABIJ, BCPQ, CARS$ . Chứng minh rằng  $\vec{RJ} + \vec{IQ} + \vec{PS} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

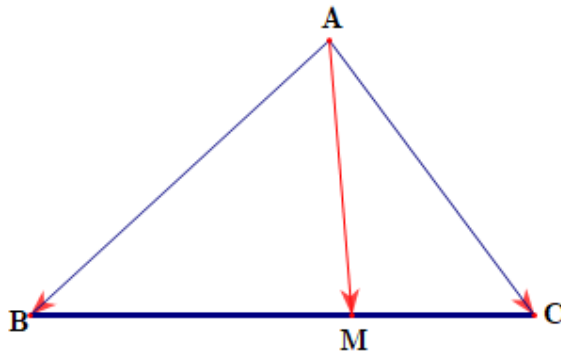
$$\begin{aligned}\vec{RJ} + \vec{IQ} + \vec{PS} &= (\vec{RA} + \vec{AJ}) + (\vec{IB} + \vec{BQ}) + (\vec{PC} + \vec{CS}) \\ &= (\vec{RA} + \vec{CS}) + (\vec{AJ} + \vec{IB}) + (\vec{BQ} + \vec{PC}) = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}\end{aligned}$$



**Câu 12.** Trên cạnh  $BC$  của tam giác  $ABC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $MB = 3MC$ .

- Tìm mối liên hệ giữa hai vector  $\vec{MB}$  và  $\vec{MC}$ .
- Biểu thị vector  $\vec{AM}$  theo hai vector  $\vec{AB}$  và  $\vec{AC}$ .

**Lời giải**



- M thuộc cạnh  $BC$  nên vector  $\vec{MB}$  và  $\vec{MC}$  ngược hướng với nhau.

Lại có:  $MB = 3MC \Rightarrow \vec{MB} = -3 \cdot \vec{MC}$

- Ta có:  $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$

Mà  $BM = \frac{3}{4}BC$  nên  $\vec{BM} = \frac{3}{4}\vec{BC}$

$$\Rightarrow \vec{AM} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC}$$

Lại có:  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$  (quy tắc hiệu)

$$\Rightarrow \vec{AM} = \vec{AB} + \frac{3}{4}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$$

Vậy  $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$

**Câu 13.** Cho vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Chứng minh rằng  $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$  (hay còn được viết là  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ) là một vector đơn vị, cùng hướng với vector  $\vec{a}$ .

**Lời giải**

**Cách 1:**

Gọi tọa độ của vector  $\vec{a}$  là  $(x; y)$ .

Ta có:  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Đặt  $\vec{i} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

$$\Rightarrow \vec{i} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x; y) = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\Rightarrow |\vec{i}| = \sqrt{\left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = 1$$

Mặt khác:

$$\vec{i} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \vec{a} \text{ và } \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} > 0 \text{ với mọi } x, y \neq 0$$

Do đó vector  $\vec{i}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng.

Vậy  $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$  (hay  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ) là một vector đơn vị, cùng hướng với vector  $\vec{a}$ .

**Cách 2:**

Với mọi vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , ta có:  $|\vec{a}| > 0 \Rightarrow k = \frac{1}{|\vec{a}|} > 0$ . Đặt  $\vec{i} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a}$

$$\Rightarrow |\vec{i}| = |k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| \Leftrightarrow |\vec{i}| = k \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$$

Mặt khác:  $\vec{i} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a}$  và  $k > 0$

Do đó vector  $\vec{i}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng.

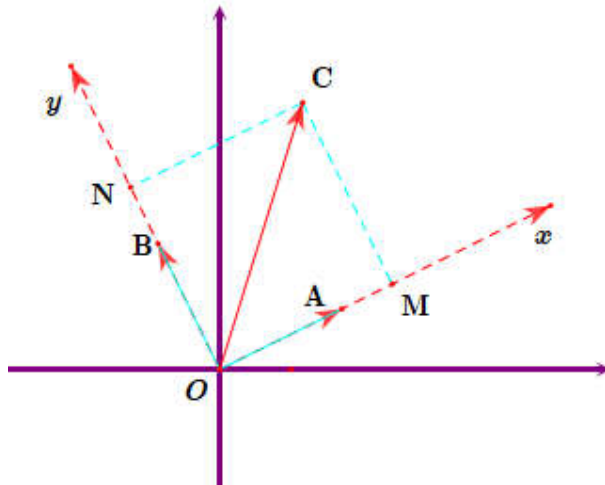
Vậy  $\frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$  (hay  $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ) là một vector đơn vị, cùng hướng với vector  $\vec{a}$ .

**Câu 14.** Cho ba vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}$  với  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$  và  $\vec{a} \perp \vec{b}$ . Xét một hệ trục Oxy với các vector đơn vị  $\vec{i} = \vec{a}, \vec{j} = \vec{b}$ . Chứng minh rằng:

a) Vector  $\vec{u}$  có tọa độ là  $(\vec{u} \cdot \vec{a}; \vec{u} \cdot \vec{b})$

b)  $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b}$

**Lời giải**

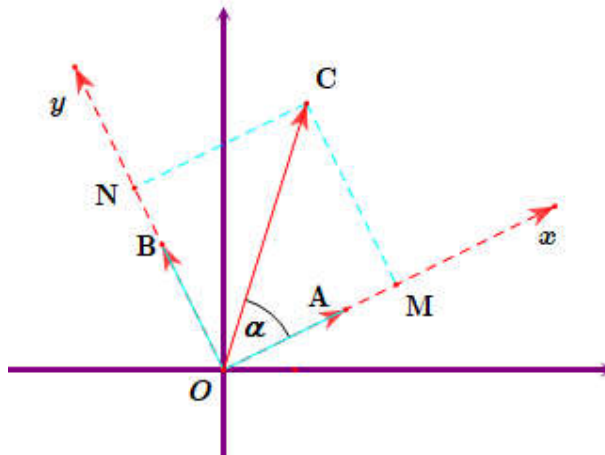


a) Trên mặt phẳng tọa độ, lấy các điểm A, B, C sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ;  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ;  $\overrightarrow{OC} = \vec{u}$

Trên hệ trục Oxy với các vector đơn vị  $\vec{i} = \vec{a}$ ,  $\vec{j} = \vec{b}$ , lấy M, N là hình chiếu của C trên Ox, Oy. Gọi tọa độ của  $\vec{u}$  là  $(x; y)$ . Đặt  $\alpha = (\vec{u}, \vec{a})$ .

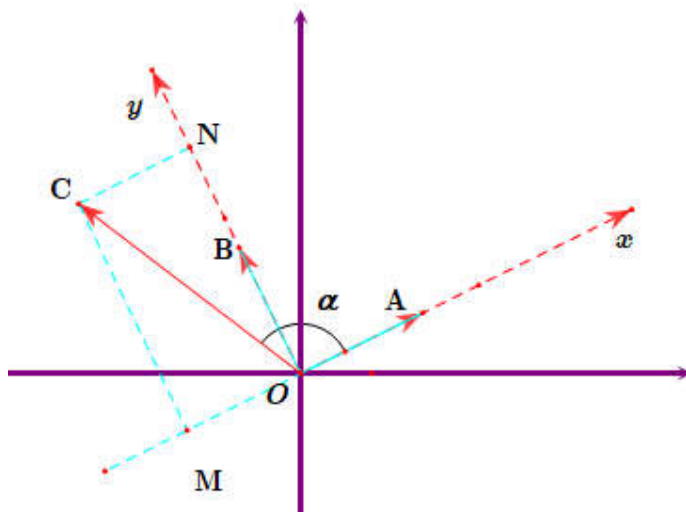
+) Nếu  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ :

$$x = OM = |\vec{u}| \cdot \cos \alpha = |\vec{u}| \cdot \cos \alpha \cdot |\vec{a}| = \vec{u} \cdot \vec{a}$$



+) Nếu  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ :

$$x = -OM = -|\vec{u}| \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = |\vec{u}| \cdot \cos \alpha = \vec{u} \cdot \vec{a}$$



Như vậy ta luôn có:  $x = \vec{u} \cdot \vec{a}$

Chứng minh tương tự, ta có:  $y = \vec{u} \cdot \vec{b}$



Vậy vector  $\vec{u}$  có tọa độ là  $(\vec{u} \cdot \vec{a}; \vec{u} \cdot \vec{b})$

b) Trong hệ trục Oxy với các vector đơn vị  $\vec{i} = \vec{a}, \vec{j} = \vec{b}$ , vector  $\vec{u}$  có tọa độ là  $(\vec{u} \cdot \vec{a}; \vec{u} \cdot \vec{b})$   
 $\Rightarrow \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{j} \Leftrightarrow \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b}$

**Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{CB}^2 \\ \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB^2 + AC^2 - BC^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \end{aligned}$$

**Câu 16.** Cho ba điểm phân biệt  $I, A, B$  và số thực  $k \neq 1$  thỏa mãn  $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB}$ . Chứng minh rằng với  $O$  là điểm bất kì ta có:  $\overrightarrow{OI} = \left(\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{OA} - \left(\frac{k}{1-k}\right)\overrightarrow{OB}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IB} &\Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OI}) \Rightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OI} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OI} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OI} - k\overrightarrow{OI} = (1-k)\overrightarrow{OI} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \left(\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{OA} - \left(\frac{k}{1-k}\right)\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

**Câu 17.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 5, \widehat{BAC} = 120^\circ$ . Điểm  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ , điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và chứng minh  $AM \perp BD$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = -10. \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{5} \cdot (-10) - \frac{1}{2} \cdot 4^2 + \frac{1}{5} \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot (-10) = 0. \text{ Suy ra } \\ &AM \perp BD. \end{aligned}$$

**Câu 18.** Cho hai vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  và  $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5, (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$ .

Tính  $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) &= 2\vec{a}^2 + 4\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 \\ &= 2|\vec{a}|^2 + 3|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) - 2|\vec{b}|^2 = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 135^\circ - 2 \cdot 5^2 \\ &= -18 - 30\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**Câu 19.** a) Chứng minh đẳng thức  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$  với  $\vec{a}, \vec{b}$  là hai vector bất kì.

b) Cho  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

b)  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) = \frac{1}{2}[(\sqrt{7})^2 - 2^2 - 3^2] = -3.$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{2 \cdot 3} = \frac{-1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ.$$

**Câu 20.** Cho tam giác  $ABC$  có ba trung tuyến  $AD, BE, CF$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

**Lời giải**

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2)$$

$$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{BC}^2),$$

$$\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CA}^2).$$

Ta có:  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{BC}^2) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CA}^2) = 0.$$

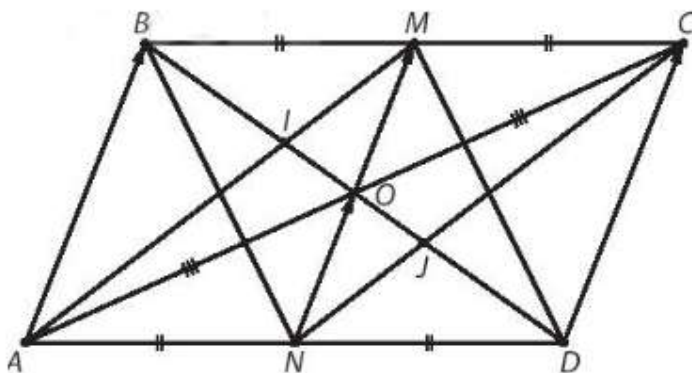
**Câu 21.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, AD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là giao điểm của  $BD$  với  $AM, CN$ . Xét các vectơ khác  $\vec{0}$ , có đầu mút lấy từ các điểm  $A, B, C, D, M, N, I, J, O$ .

a) Hãy chỉ ra những vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ; những vectơ cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$ .

b) Chứng minh rằng  $BI = IJ = JD$ .

**Lời giải**

a) Những vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{AB}$ :  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NO}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{DC}$ ;



Những vectơ cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ :  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NO}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{DC}$ .

b) Do  $ABCD$  là hình bình hành nên  $O$  là trung điểm chung của  $AC$  và  $BD$ . Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $I$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ , do  $N$  là trung điểm của  $DA$  nên  $J$  là trọng tâm của tam giác  $CDA$ .

Theo quy tắc ba điểm ta có  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ . (1)

Do  $I$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BI}$ . Từ đó và (1) suy ra  $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BI}$ . (2)

Hoàn toàn tương tự, chứng minh được  $\overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DJ}$ . Từ đó và (2) suy ra  $BI = IJ = JD$ .

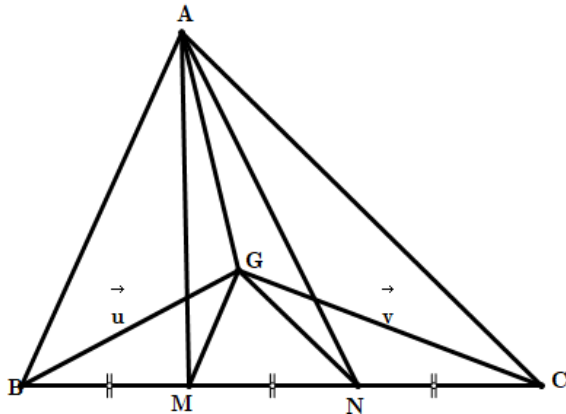
**Câu 22.** Trên cạnh  $BC$  của tam giác  $ABC$  lấy các điểm  $M, N$ , không trùng với  $B$  và  $C$  sao cho  $BM = MN = NC$ .

a) Chứng minh rằng hai tam giác  $ABC$  và  $AMN$  có cùng trọng tâm.

b) Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Đặt  $\overrightarrow{GB} = \vec{u}$  và  $\overrightarrow{GC} = \vec{v}$ . Hãy biểu thị các vectơ sau qua hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ :  $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GN}$ .

**Lời giải**

a) Do  $M, N$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $BM = MN = NC$  nên  $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NC}$  ngược hướng và cùng độ dài. Bởi vậy  $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ . Từ đó, theo kết quả của Ví dụ 3, Bài 9, hai tam giác  $AMN, ABC$  có cùng trọng tâm.



b) Từ giả thiết suy ra  $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ .

Từ đó, theo Nhận xét ở Ví dụ 2, Bài 9, thì  $(1 - (-2))\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GC} - (-2)\overrightarrow{GB}$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{GM} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}.$$

$$\text{Tương tự, cũng được } \overrightarrow{GN} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}.$$

Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$ , và do đó  $\overrightarrow{GA} = -\vec{u} - \vec{v}$ .

**Câu 23.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

**Lời giải**

HD. Biểu diễn các vector theo ba vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ .

Theo quy tắc ba điểm ta có  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + (-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}).$$

Khai triển, giản ước, thu được điều phải chứng minh.

**Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba vector  $\vec{a} = (1; 2), \vec{b} = (3; -4), \vec{c} = (-5; 3)$ .

a) Tính các tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{c} \cdot \vec{a}$

b) Tìm góc giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b} + \vec{c}$ .

**Lời giải**

a) Đáp số:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5; \vec{b} \cdot \vec{c} = -27; \vec{c} \cdot \vec{a} = 1$

b) Từ giả thiết suy ra  $\vec{b} + \vec{c} = (-2; -1), |\vec{a}| = \sqrt{5}, |\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{5}$ .

Do  $\vec{a} = (1; 2), \vec{b} + \vec{c} = (-2; -1)$  nên  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = -4$ .

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{a}; \vec{b} + \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b} + \vec{c}|} = \frac{-4}{5}. \text{ Từ đó suy ra } (\vec{a}; \vec{b} + \vec{c}) = 143^\circ 7' 48''.$$

**Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(2; 1), B(-2; 5)$  và  $C(-5; 2)$ .

a) Tìm tọa độ của các vector  $\overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{BC}$

b) Chứng minh rằng  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác vuông. Tính diện tích và chu vi của tam giác đó.

c) Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

d) Tìm tọa độ của điểm  $D$  sao cho tứ giác  $BCAD$  là một hình bình hành.

**Lời giải**

a) Ta có:  $\overrightarrow{BA} = (2 - (-2); 1 - 5) = (4; -4)$  và

$$\overrightarrow{BC} = (-5 - (-2); 2 - 5) = (-3; -3)$$

b)

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \cdot (-3) + (-4) \cdot (-3) = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \text{ hay } \widehat{ABC} = 90^\circ$$

Vậy tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .

$$\text{Lại có: } AB = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2};$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Và } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5\sqrt{2} \text{ (do } \triangle ABC \text{ vuông tại } B).$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 12$$

$$\text{Chu vi tam giác } ABC \text{ là: } AB + BC + AC = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

$$\text{c) Tọa độ của trọng tâm } G \text{ là } \left( \frac{2 + (-2) + (-5)}{3}; \frac{1 + 5 + 2}{3} \right) = \left( \frac{-5}{3}; \frac{8}{3} \right)$$

d) Giả sử điểm  $D$  thỏa mãn  $BCAD$  là một hình bình hành có tọa độ là  $(a; b)$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} = (-3; -3) \text{ và } \overrightarrow{AD} = (a - 2; b - 1)$$

$$\text{Vì } BCAD \text{ là một hình bình hành nên } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow (a - 2; b - 1) = (-3; -3) \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = -3 \\ b - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Vậy  $D$  có tọa độ  $(-1; -2)$

**Câu 26.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(2; 1), B(1; 4), C(4; 5), D(5; 2)$ .

a. Chứng minh  $ABCD$  là hình vuông.

b. Tìm tọa độ tâm  $I$  của hình vuông  $ABCD$ .

**Lời giải**

$$\text{a. Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-1; 3), \overrightarrow{DC} = (-1; 3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\Rightarrow ABCD \text{ là hình bình hành.}$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{AD} = (3; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \text{ hay } AB \perp AD$$

$$\Rightarrow \text{Hình bình hành } ABCD \text{ là hình chữ nhật.}$$

$$\text{Ta có: } AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow AB = AD \Rightarrow \text{Hình chữ nhật } ABCD \text{ là hình vuông (đpcm).}$$

$$\text{b. Tâm của hình vuông } ABCD \text{ là trung điểm của } AC \Rightarrow I = \left( \frac{2+4}{2}; \frac{1+5}{2} \right) \Leftrightarrow I = (3; 3)$$

$$\text{Vậy } I = (3; 3).$$

**Câu 27.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(1; 2), B(3; 4), C(-1; -2)$  và  $D(6; 5)$ .

a) Hãy tìm tọa độ của các vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$

b) Hãy giải thích tại sao các vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  cùng phương.

c) Giả sử  $E$  là điểm có tọa độ  $(a; 1)$ . Tìm  $a$  để các vector  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BE}$  cùng phương.

d) Với  $a$  tìm được, hãy biểu thị vector  $\overrightarrow{AE}$  theo các vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải**

$$\text{a) Ta có: } \overrightarrow{AB} = (3 - 1; 4 - 2) = (2; 2) \text{ và}$$

$$\overrightarrow{CD} = (6 - (-1); 5 - (-2)) = (7; 7)$$

$$\text{b) Dễ thấy: } (2; 2) = \frac{2}{7} \cdot (7; 7) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$\text{Vậy hai vector } \overrightarrow{AB} \text{ và } \overrightarrow{CD} \text{ cùng phương.}$$

$$\text{c) Ta có: } \overrightarrow{AC} = (-1 - 1; -2 - 2) = (-2; -4) \text{ và}$$

$$\overrightarrow{BE} = (a - 3; 1 - 4) = (a - 3; -3)$$

Để  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BE}$  cùng phương thì  $\frac{a-3}{-2} = \frac{-3}{-4} \Leftrightarrow a-3 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

Vậy  $a = \frac{3}{2}$  hay  $E\left(\frac{3}{2}; 1\right)$  thì hai vectơ  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BE}$  cùng phương

d)

**Cách 1:**

Ta có:  $\overrightarrow{BE} = \left(\frac{3}{2} - 3; -3\right) = \left(-\frac{3}{2}; -3\right); \overrightarrow{AC} = (-2; -4)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$  (quy tắc cộng)

$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AC}$

**Cách 2:**

Giả sử  $\overrightarrow{AE} = m \cdot \overrightarrow{AB} + n \cdot \overrightarrow{AC} (*)$

Ta có:  $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{2}; -1\right), m \cdot \overrightarrow{AB} = m(2; 2) = (2m; 2m)$ ,

$n \cdot \overrightarrow{AC} = n(-2; -4) = (-2n; -4n)$

Do đó  $(*) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}; -1\right) = (2m; 2m) + (-2n; -4n)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}; -1\right) = (2m - 2n; 2m - 4n)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} = 2m - 2n \\ -1 = 2m - 4n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = \frac{3}{4} \end{cases}$

Vậy  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{AC}$

**Câu 28.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 5$  và  $\widehat{CAB} = 60^\circ$

a) Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

b) Lấy các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{NB} + x\overrightarrow{NC} = \vec{0} (x \neq -1)$ . Xác định  $x$  sao cho  $AN$  vuông góc với  $BM$ .

**Lời giải**

a) Gọi ý:  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .

Đáp số:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -6$ .

b) Do  $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$  nên  $2(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}) + 3(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM}) = \vec{0}$ . Suy ra

$\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA} = 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + 2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$  (1)

Do  $\overrightarrow{NB} + x\overrightarrow{NC} = \vec{0}$  nên  $(1+x)\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$ . Từ đó và (1) suy ra

$(1+x)\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}) \cdot (-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC})$

$= -\overrightarrow{AB}^2 + 3x\overrightarrow{AC}^2 + (3-x)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -16 + 75x + 10(3-x)$ .

Từ đó suy ra  $AN \perp BM$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ . Điều này tương đương với  $-16 + 75x + 10(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{14}{65}$ .

Vậy với  $x = -\frac{14}{65}$  thì  $AN \perp BM$ .

- Câu 29.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm các cạnh  $AB, CD$ . Lấy  $P$  thuộc đoạn  $DM$  và  $Q$  thuộc đoạn  $BN$  sao cho  $DP = 2PM, BQ = xQN$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  và  $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$ .
- a) Hãy biểu thị các vectơ  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}$  qua hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .
- b) Tìm  $x$  để  $A, P, Q$  thẳng hàng.

**Lời giải**

a) Do  $P$  thuộc đoạn  $DM$  sao cho  $DP = 2PM$  nên  $\overrightarrow{PD} = -2\overrightarrow{PM}$ . Suy ra  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ . Từ

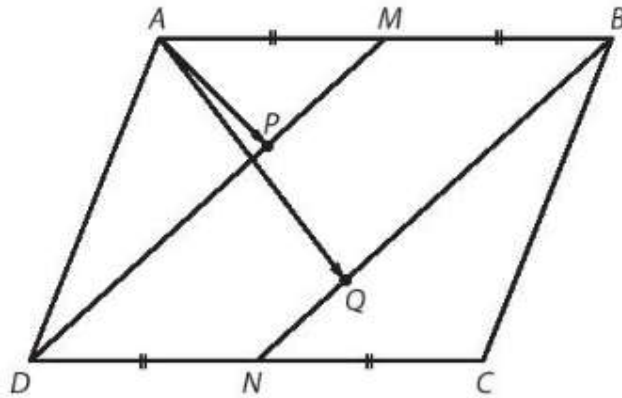
đó, do  $M$  là trung điểm của  $AB$ , nên  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  tức là  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{u}$ . (1)

Do  $Q$  thuộc đoạn  $BN$  sao cho  $BQ = xQN$  nên  $\overrightarrow{QB} = -x\overrightarrow{QN}$ . Suy ra

$$(1+x)\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$$

$$\text{hay } \overrightarrow{AQ} = \frac{(2+x)}{2(1+x)}\vec{u} + \frac{x}{1+x}\vec{v}. (2)$$

b) Từ (1) và (2) suy ra  $A, P, Q$  thẳng hàng khi và chỉ khi



$$\frac{2+x}{2(1+x)} : \frac{1}{3} = \frac{x}{1+x} : \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{2+x}{2(1+x)} = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow x = 2.$$

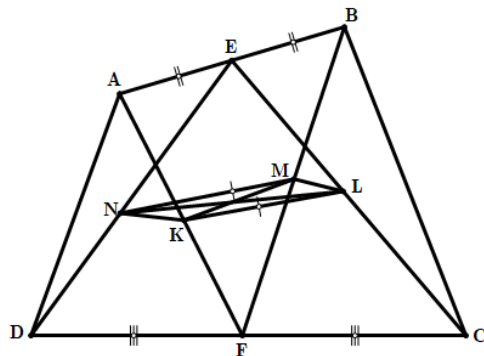
Vậy với  $x = 2$  thì  $A, P, Q$  thẳng hàng.

- Câu 30.** Cho tứ giác lồi  $ABCD$ , không có hai cạnh nào song song. Gọi  $E, F$  theo thứ tự là trung điểm  $AB, CD$ . Gọi  $K, L, M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AF, CE, BF, DE$ .

- a) Chứng minh rằng tứ giác  $KLMN$  là một hình bình hành.
- b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $KM, LN$ . Chứng minh rằng  $E, I, F$  thẳng hàng.

**Lời giải**

a) Do  $E$  là trung điểm của  $AB, F$  là trung điểm của  $CD$  nên  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{DF}$ .



Do  $K$  là trung điểm của  $AF, L$  là trung điểm của  $CE, M$  là trung điểm của  $BF, N$  là trung điểm của  $DE$ , nên theo kết quả của bài tập 4.12, Toán 10, Tập một, ta có

$$2\overline{KL} = \overline{AE} + \overline{FC} = \overline{EB} + \overline{DF} = 2\overline{NM}$$

Suy ra  $\overline{KL} = \overline{NM}$  và do đó  $KLMN$  là một hình bình hành.

b) Do  $KLMN$  là hình bình hành và  $I$  là giao điểm của  $KM$ ,  $LN$  nên  $I$  là trung điểm chung của  $KM$ ,  $LN$ .

Suy ra  $2\overline{EI} = \overline{EN} + \overline{EL} = \frac{1}{2}\overline{ED} + \frac{1}{2}\overline{EC} = \overline{EF}$ . Do đó  $E, I, F$  thẳng hàng, hơn nữa  $I$  là trung điểm của  $EF$ .

**Câu 31.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có  $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = 90^\circ$ ,  $BC = 1$ ,  $AB = 2$  và  $AD = 3$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ .

a) Hãy biểu thị các vector  $\overline{CM}$ ,  $\overline{CD}$  theo hai vector  $\overline{AB}$  và  $\overline{AD}$ .

b) Gọi  $N$  là trung điểm  $CD$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $MCD$ , và  $I$  là điểm thuộc cạnh  $CD$  sao cho  $9IC = 5ID$ . Chứng minh rằng  $A, G, I$  thẳng hàng.

c) Tính độ dài các đoạn thẳng  $AI$  và  $BI$ .

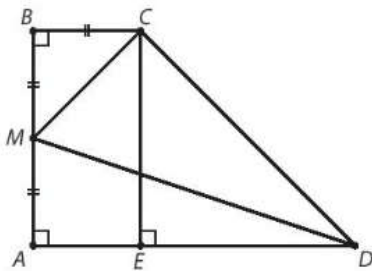
**Lời giải**

a) Do  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên  $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BA} = -\frac{1}{2}\overline{AB}$ . (1)

Gọi  $E$  là hình chiếu vuông góc của  $C$  trên  $AD$ . Khi đó tứ giác  $ABCE$  là một hình chữ nhật.

Suy ra  $EA = CB = 1 = \frac{1}{3}DA$  và do đó  $\overline{CB} = \overline{EA} = \frac{1}{3}\overline{DA} = -\frac{1}{3}\overline{AD}$ . (2)

Từ (1), (2), theo quy tắc ba điểm ta có  $\overline{CM} = \overline{CB} + \overline{BM} = -\frac{1}{3}\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{AB}$ .

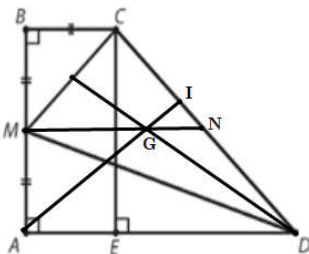


Theo cách xác định điểm  $E$  thì  $\overline{ED} = \frac{2}{3}\overline{AD}$ . Từ đó, theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED} = \overline{BA} + \overline{ED} = -\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AD}.$$

b) Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $MCD$  nên

$$3\overline{AG} = \overline{AM} + \overline{AC} + \overline{AD} = \overline{AM} + (\overline{AB} + \overline{AE}) + \overline{AD} = \frac{3}{2}\overline{AB} + \frac{4}{3}\overline{AD} \quad (3)$$



Do  $I$  thuộc cạnh  $CD$  nên hai vector  $\overline{IC}$  và  $\overline{ID}$  ngược hướng.

Từ đó, do  $9IC = 5ID$  nên  $9\overline{IC} + 5\overline{ID} = \vec{0}$ . Suy ra  $14\overline{AI} = 9\overline{AC} + 5\overline{AD} = 9\overline{AB} + 8\overline{AD}$ . (4)

Từ (3) và (4) suy ra  $14\overline{AI} = 6 \cdot 3\overline{AG} = 18\overline{AG}$  và do đó  $A, G, I$  thẳng hàng.

c) Từ (4), đề ý rằng  $AD \perp AB$ , suy ra

$$196AI^2 = (14\overline{AI})^2 = (9\overline{AB} + 8\overline{AD})^2 = 81\overline{AB}^2 + 2 \cdot (9\overline{AB}) \cdot (8\overline{AD}) + 64\overline{AD}^2$$

$$= 81AB^2 + 64AD^2 = 81 \cdot 4 + 64 \cdot 9 = 900.$$

$$\text{Suy ra } AI = \frac{15}{7}$$

$$\text{Theo quy tắc ba điểm ta có } \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = -\frac{5}{14}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Suy ra } BI^2 = \left(-\frac{5}{14}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \frac{25}{196} \cdot 4 + \frac{64}{196} \cdot 9 = \frac{169}{49} \text{ và do đó } BI = \frac{13}{7}.$$

**Câu 32.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(-2;1), B(1;4)$  và  $C(5;-2)$ .

a) Chứng minh rằng  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác. Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

b) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**

a) Do  $A(-2;1), B(1;4), C(5;-2)$  nên  $\overrightarrow{AB} = (3;3), \overrightarrow{AC} = (7;-3)$ . Do  $\frac{7}{3} \neq \frac{-3}{3}$  nên  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  không cùng phương, suy ra  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.

$$\text{Gọi } G(x; y) \text{ là trọng tâm của tam giác. Thế thì } \begin{cases} x = \frac{-2+1+5}{3} = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1+4+(-2)}{3} = 1 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy trọng tâm của tam giác là } G\left(\frac{4}{3}; 1\right).$$

b) Gọi  $H(x; y)$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CH} = (x-5; y+2), \overrightarrow{BH} = (x-1; y-4).$$

Do  $H$  là trực tâm, nên  $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$ . Từ đó thu được

$$\begin{cases} 3(x-5) + 3(y+2) = 0 \\ 7(x-1) - 3(y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{13}{5} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } H\left(\frac{2}{5}; \frac{13}{5}\right).$$

Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Theo kết quả bài tập 4.15, ta có

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IH}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{OI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} \text{ và do đó } I\left(\frac{9}{5}; \frac{1}{5}\right).$$

Nhận xét

- Ta có thể tìm tọa độ điểm  $I$  nhờ vào dấu hiệu  $IA = IB = IC$ .

- Việc sử dụng đẳng thức  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IH}$  hay  $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$  cho phép ta thu được tọa độ của điểm còn lại khi biết tọa độ của hai trong ba điểm  $G, H, I$ .

**Câu 33.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho ba điểm  $A(2;-1), B(5;3)$  và  $C(-2;9)$ .

a) Tìm điểm  $D$  thuộc trục hoành sao cho  $B, C, D$  thẳng hàng.

b) Tìm điểm  $E$  thuộc trục hoành sao cho  $EA + EB$  nhỏ nhất.

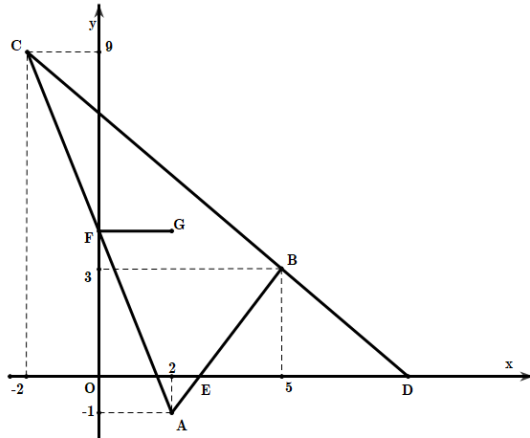
c) Tìm điểm  $F$  thuộc trục tung sao cho vectơ  $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}$  có độ dài ngắn nhất.

**Lời giải**



a) Xét điểm  $D(d; 0) \in Ox$ . Ta có  $\overrightarrow{BD} = (d-5; -3)$ ,  $\overrightarrow{CD} = (d+2; -9)$ . Từ đó  $B, C, D$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vector  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$  cùng phương, tức là  $(d-5):(-3) = (d+2):(-9)$ . Từ đó tìm được  $d = \frac{17}{2}$ . Vậy  $D\left(\frac{17}{2}; 0\right)$  là điểm cần tìm.

b) Từ giả thiết suy ra  $A$  và  $B$  nằm về hai phía của trục hoành. Bởi vậy, với mỗi điểm  $E \in Ox$  ta có  $EA + EB \geq AB$ , đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $E$  là giao điểm của  $AB$  với  $Ox$ . Bằng lập luận như ở phần a), tìm được  $E\left(\frac{11}{4}; 0\right)$ .



c) Giả sử tìm được điểm  $F$  thỏa mãn yêu cầu bài toán. Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Khi đó  $G\left(\frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right)$ . (1)

Do  $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = 3\overrightarrow{FG}$  nên  $|\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}|$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $\overrightarrow{FG}$  có độ dài nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi  $F$  là hình chiếu vuông góc của  $G$  trên  $Oy$ . Từ đó và (1) suy ra  $F\left(0; \frac{11}{3}\right)$ .

**Câu 34.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $MNP$  có  $M(2; 1); N(-1; 3); P(4; -2)$

- Tim tọa độ của các vectơ  $\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}$
- Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$
- Tính độ dài các đoạn thẳng  $MN, MP$
- Tính  $\cos \widehat{NMP}$
- Tìm tọa độ trung điểm I của NP và trọng tâm G của tam giác MNP.

**Lời giải**

a.

$$- \overrightarrow{OM} = (2; 1)$$

$$- \overrightarrow{MN} = (-3; 2)$$

$$- \overrightarrow{MP} = (2; 1)$$

b.

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = (-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1 = -3$$

c.

$$- MN = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$- MP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

d.

$$\cos \widehat{NMP} = \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{MP}|} = \frac{|(-3) \cdot 2 + 2 \cdot 1|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{3\sqrt{65}}{65}$$

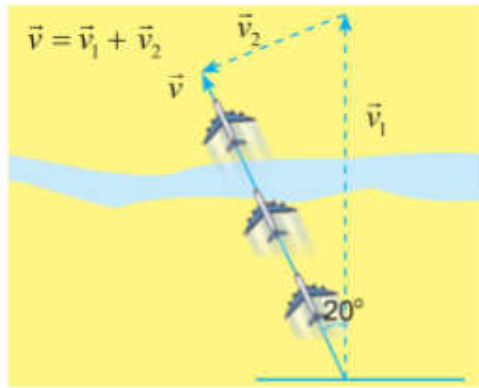
e. Vì  $I$  là trung điểm của  $NP$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_N + x_P}{2} = \frac{3}{2} \\ y_I = \frac{y_N + y_P}{2} = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$$

Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $MNP$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_M + x_N + x_P}{3} = \frac{5}{3} \\ y_G = \frac{y_M + y_N + y_P}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{5}{3}; 2\right)$$

**Câu 35.** Một chiếc máy bay được biết là đang bay về phía Bắc với tốc độ  $45m/s$ , mặc dù vận tốc của nó so với mặt đất là  $38m/s$  theo hướng nghiêng một góc  $20^\circ$  về phía tây bắc (hình). Tính tốc độ của gió



**Lời giải**

Từ giả thiết ta có:

+) Vector tương ứng với vận tốc máy bay là vector  $\vec{v}_1$

+) Vector tương ứng với vận tốc máy bay so với mặt đất là vector  $\vec{v}$

+) Vector tương ứng với vận tốc gió là vector  $\vec{v}_2$

Ta có:  $|\vec{v}_1| = 45; |\vec{v}| = 38; (\vec{v}_1, \vec{v}) = 20^\circ$

Áp dụng định lý cosin ta có:

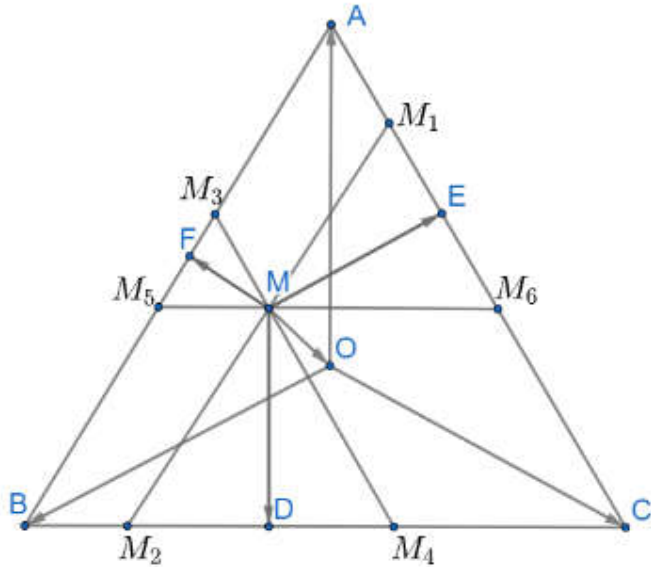
$$|\vec{v}_2| = \sqrt{|\vec{v}|^2 + |\vec{v}_1|^2 - 2|\vec{v}| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{v}_1)} = \sqrt{38^2 + 45^2 - 2 \cdot 38 \cdot 45 \cdot \cos 20^\circ} \approx 16(m/s)$$

Vậy tốc độ của gió gần bằng  $16m/s$

**Câu 36.** Cho tam giác đều  $ABC$  có  $O$  là trọng tâm và  $M$  là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi  $D, E$ ,  $F$  lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ  $M$  đến  $BC, AC, AB$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}$$

**Lời giải**



$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OF})$$

Qua  $M$  kẻ các đường thẳng

$$M_1M_2 \parallel AB; M_3M_4 \parallel AC; M_5M_6 \parallel BC$$

Từ đó ta có:

$$\widehat{MM_1M_6} = \widehat{MM_6M_1} = \widehat{MM_4M_2} = \widehat{MM_2M_4} = \widehat{MM_3M_5}$$

Suy ra các tam giác  $\triangle MM_3M_5, \triangle MM_1M_6, \triangle MM_2M_4$  đều

Áp dụng tính chất trung tuyến  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$  (với  $M$  là trung điểm của  $BC$ ) ta có:

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_6}); \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_4}); \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_3} + \overrightarrow{MM_5})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_4}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_6}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_3} + \overrightarrow{MM_5})$$

Ta có: các tứ giác  $AM_3MM_1; CM_4MM_6; BM_2MM_5$  là hình bình hành

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_4}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_6}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_3} + \overrightarrow{MM_5})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_3}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_2} + \overrightarrow{MM_5})$$

$$+ \frac{1}{2}(\overrightarrow{MM_4} + \overrightarrow{MM_6})$$

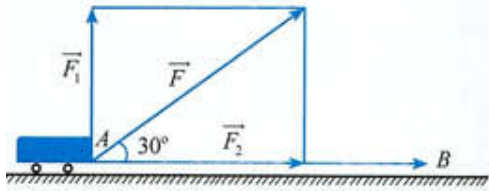
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$$

$$= \frac{1}{2}((\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}))$$

$$= \frac{1}{2}(3\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO} \text{ (đpcm)}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

**Câu 37.** Một xe goòng được kéo bởi một lực  $\vec{F}$  có độ lớn là  $50 \text{ N}$ , di chuyển theo quãng đường từ  $A$  đến  $B$  có chiều dài là  $200 \text{ m}$ . Cho biết góc giữa lực  $\vec{F}$  và  $\overrightarrow{AB}$  là  $30^\circ$  và  $\vec{F}$  được phân tích thành 2 lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  (hình). Tính công sinh ra bởi các lực  $\vec{F}, \vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$ .

**Lời giải**

Ta xác định được các độ lớn:

$$|\vec{F}| = 50, |\vec{F}_2| = |\vec{F}| \cos 30^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}, |\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \sin 30^\circ = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25 \text{ (N)}$$

Dựa vào hình vẽ ta có:

$$(\vec{F}, \vec{d}) = 30^\circ, (\vec{F}_1, \vec{d}) = 90^\circ, (\vec{F}_2, \vec{d}) = 0^\circ$$

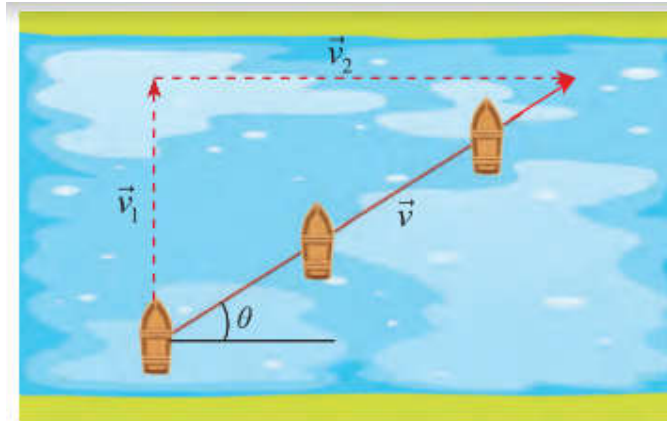
Áp dụng công thức tính công sinh ra bởi lực  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$  ta có:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| |\vec{d}| \cos(\vec{F}, \vec{d}) = 50 \cdot 200 \cdot \cos 30^\circ = 5000 \text{ (J)}$$

$$A_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} = |\vec{F}_1| |\vec{d}| \cos(\vec{F}_1, \vec{d}) = 25 \cdot 200 \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ (J)}$$

$$A_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{d} = |\vec{F}_2| |\vec{d}| \cos(\vec{F}_2, \vec{d}) = 25\sqrt{3} \cdot 200 \cdot \cos 0^\circ = 5000\sqrt{3} \text{ (J)}$$

**Câu 38.** Một chiếc thuyền cố gắng đi thẳng qua một con sông với tốc độ  $0,75 \text{ m/s}$ . Tuy nhiên dòng chảy của nước trên con sông đó chảy với tốc độ  $1,20 \text{ m/s}$  về hướng bên phải. Gọi  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}$  lần lượt là vận tốc của thuyền so với dòng nước, vận tốc của dòng nước so với bờ và vận tốc của thuyền so với bờ.



a) Tính độ dài của các vector  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}$

b) Tốc độ dịch chuyển của thuyền so với bờ là bao nhiêu?

c) Hướng di chuyển của thuyền lệch một góc bao nhiêu so với bờ?

**Lời giải**

a) Ta có:

$$|\vec{v}_1| = 0,75; |\vec{v}_2| = 1,20$$

Dựa vào hình vẽ ta thấy  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  và  $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

Áp dụng tính chất trong tam giác vuông ta có:

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{|\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2|^2} = \sqrt{0,75^2 + 1,2^2} = \frac{3\sqrt{89}}{20}$$

b) Tốc độ dịch chuyển của thuyền so với bờ là  $\frac{3\sqrt{89}}{20} \text{ m/s}$

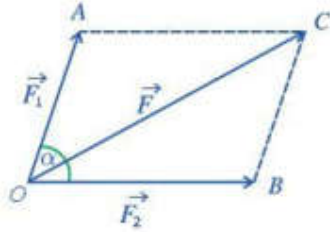
c) Nước có hướng dịch chuyển song song với bờ nên hướng di chuyển của thuyền so với bờ tương đương với hướng di chuyển của thuyền so với nước

Suy ra góc lệch giữa hướng di chuyển của thuyền và bờ là  $(\vec{v}, \vec{v}_2)$

$$\text{Ta có: } \sin(\vec{v}, \vec{v}_2) = \frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}|} = \frac{0,75}{\frac{3\sqrt{29}}{20}} = \frac{5\sqrt{89}}{89} \Rightarrow (\vec{v}, \vec{v}_2) \approx 32^\circ$$

Vậy hướng di chuyển của thuyền lệch một góc  $32^\circ$  so với bờ

**Câu 39.** Hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cho trước cùng tác dụng lên một vật tại điểm  $O$  và tạo với nhau một góc  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = \alpha$  làm cho vật di chuyển theo hướng từ  $O$  đến  $C$  (Hình). Lập công thức tính cường độ của hợp lực  $\vec{F}$  làm cho vật di chuyển theo hướng từ  $O$  đến  $C$  (giả sử chỉ có đúng hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  làm cho vật di chuyển).



#### Lời giải

Ta thấy, AOBC là hình bình hành nên  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$

Suy ra:  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  (1).

Ta cần tính cường độ của hợp lực  $\vec{F}$  hay chính là tính  $|\vec{F}|$ .

Từ (1) suy ra  $(\vec{F})^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2$ .

$$\Leftrightarrow \vec{F}^2 = \vec{F}_1^2 + 2 \cdot \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + \vec{F}_2^2 \Leftrightarrow |\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + 2 \cdot \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 + |\vec{F}_2|^2 \quad (2)$$

Ta lại có:  $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \alpha$  (3).

Từ (2) và (3) suy ra:  $|\vec{F}|^2 = |\vec{F}_1|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \alpha + |\vec{F}_2|^2 = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \alpha$

$$\Rightarrow |\vec{F}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \alpha + |\vec{F}_2|^2} = |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \alpha$$

Vậy công thức tính cường độ của hợp lực  $\vec{F}$  làm cho vật di chuyển theo hướng từ  $O$  đến  $C$  là

$$|\vec{F}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos \alpha + |\vec{F}_2|^2}.$$

**Câu 40.** Cho tứ giác ABCD. M là điểm thay đổi trong mặt phẳng thoả mãn  $(\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot (\vec{MC} + \vec{MD}) = 0$ . Chứng minh rằng điểm M luôn nằm trên một đường tròn cố định.

#### Lời giải

Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có:  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MP}, \vec{MC} + \vec{MD} = 2\vec{MQ}$ .

$$(\vec{MA} + \vec{MB}) \cdot (\vec{MC} + \vec{MD}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{MP} \cdot 2\vec{MQ} = 0 \Leftrightarrow \vec{MP} \cdot \vec{MQ} = 0$$

Nếu M không trùng với P và Q thì  $\vec{MP} \cdot \vec{MQ} = 0 \Leftrightarrow MP \perp MQ$ . Do đó M thuộc đường tròn đường kính PQ.

Nếu M trùng với P hoặc Q thì hiển nhiên M thuộc đường tròn đường kính PQ.

Vậy M luôn thuộc đường tròn cố định có đường kính là PQ.

**Câu 41.** Cho tam giác ABC và đường thẳng d không có điểm chung với bất kì cạnh nào của tam giác. M là điểm thay đổi trên đường thẳng d. Xác định vị trí của M sao cho biểu thức  $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

#### Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có:  $|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}| = |3\vec{MG}| = 3GM$ .

$GM$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $G$  lên đường thẳng  $d$ .

Vậy biểu thức  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $G$  lên đường thẳng  $d$ .

- Câu 42.** Trên sông, một cano chuyển động thẳng đều theo hướng  $S15^\circ E$  với vận tốc có độ lớn bằng  $20 \text{ km/h}$ . Tính vận tốc riêng của cano, biết rằng, nước trên sông chảy về hướng đông với vận tốc có độ lớn bằng  $3 \text{ km/h}$ .

### Lời giải

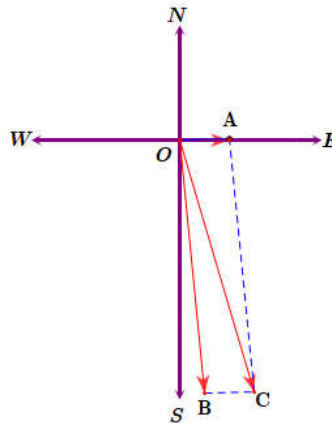
Lấy các điểm: A, C sao cho:

Vector vận tốc dòng nước  $\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{OA}$

Vector vận tốc chuyển động  $\overrightarrow{v_{\text{cano}}} = \overrightarrow{OC}$

Ta có:  $\overrightarrow{v_{\text{cano}}} = \overrightarrow{v_n} + \vec{v}$ , với  $\vec{v}$  là vector vận tốc riêng của cano.

Gọi B là điểm sao cho  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$  thì  $OACB$  là hình bình hành.



Vì tàu chuyển động theo hướng  $S15^\circ E$  nên vector  $\overrightarrow{OC}$  tạo với hướng Nam (tia OS) góc  $15^\circ$  và tạo với hướng Đông (tia OE) góc  $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$ .

Mà nước trên sông chảy về hướng đông nên vector  $\overrightarrow{OA}$  cùng hướng với vector  $\overrightarrow{OE}$

Do đó góc tạo bởi vector  $\overrightarrow{OC}$  và vector  $\overrightarrow{OA}$  là  $75^\circ$

Xét tam giác OAC ta có:

$$OA = |\overrightarrow{v_n}| = 3; OC = |\overrightarrow{v_{\text{cano}}}| = 20 \text{ và } \widehat{AOC} = 75^\circ$$

Áp dụng định lý cosin tại đỉnh O ta được:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 \cdot OA \cdot OC \cdot \cos \widehat{AOC} \Leftrightarrow AC^2 = 3^2 + 20^2 - 2 \cdot 3 \cdot 20 \cdot \cos 75^\circ \approx 378 \Leftrightarrow OB = AC \approx 19,44$$

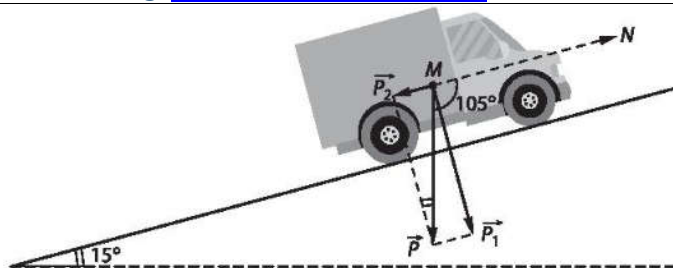
Vậy vận tốc riêng của cano là  $19,44 \text{ km/h}$

- Câu 43.** Một ô tô có khối lượng  $2,5$  tấn chạy từ chân lên đỉnh một con dốc thẳng. Tính công của trọng lực tác động lên xe, biết dốc dài  $50 \text{ m}$  và nghiêng  $15^\circ$  so với phương nằm ngang (trong tính toán, lấy gia tốc trọng trường bằng  $10 \text{ m/s}^2$ )

### Lời giải

Trọng lực của ô tô có độ lớn bằng  $|\vec{P}| = 2500 \times 10 = 25000 (N)$ .

Trọng lực  $\vec{P}$  của ô tô hợp với hướng chuyển dời  $\overrightarrow{MN}$  một góc  $\alpha = 90^\circ + 15^\circ = 105^\circ$ . Trọng lực  $\vec{P}$  được phân tích thành hai thành phần  $\vec{P}_1$  và  $\vec{P}_2$ :  $\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$ , trong đó  $\vec{P}_1$  có phương vuông góc với mặt dốc,  $\vec{P}_2$  có phương song song với mặt dốc



Ta nhận thấy rằng,  $\vec{P}_1$  không có tác dụng đối với chuyển dời  $\overrightarrow{MN}$  của xe, còn  $\vec{P}_2$  ngược hướng với  $\overrightarrow{MN}$ . Do đó, công của trọng lực tác động lên xe bằng

$$A = \vec{P} \cdot \overrightarrow{MN} = |\vec{P}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos(\vec{P} \cdot \overrightarrow{MN}) = 25000 \cdot 50 \cdot \cos 105^\circ \approx -323524(J)$$

Nhận xét. Cũng có thể tính công  $A$  nhờ định lí chiếu (xem mục Nhận xét sau Ví dụ 2, Bài 11) như sau:

$$A = \vec{P} \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{P}_2 \cdot \overrightarrow{MN} = |\vec{P}_2| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos 180^\circ = -(|\vec{P}| \cdot \sin 15^\circ) \cdot 50 \approx -323524(J)$$

Nguyễn Bảo Vương