

ÔN TẬP CHƯƠNG III. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

• | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

ÔN TẬP CHƯƠNG III. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Cho góc nhọn α . Biểu thức $(\sin \alpha \cdot \cot \alpha)^2 + (\cos \alpha \cdot \tan \alpha)^2$ bằng:
- A. 2. B. $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$. C. 1. D. $\sin \alpha + \cos \alpha$.
- Câu 2.** Cho góc nhọn α . Biểu thức $\tan \alpha \cdot \tan(90^\circ - \alpha)$ bằng:
- A. $\tan \alpha + \cot \alpha$. B. $\tan^2 \alpha$. C. 1. D. $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.
- Câu 3.** Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 135^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $S = \frac{1}{2}ca$. B. $S = \frac{-\sqrt{2}}{4}ac$. C. $S = \frac{\sqrt{2}}{4}bc$. D. $S = \frac{\sqrt{2}}{4}ca$.
- Câu 4.** Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 135^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $R = \frac{a}{\sin A}$. B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}b$. C. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}c$. D. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.
- Câu 5.** Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 135^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}ab$. B. $\frac{b}{\sin A} = \frac{a}{\sin B}$.
- C. $\sin B = \frac{-\sqrt{2}}{2}$. D. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos 135^\circ$.
- Câu 6.** Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $S = \frac{abc}{4r}$. B. $r = \frac{2S}{a+b+c}$.
- C. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$. D. $S = r(a+b+c)$.
- Câu 7.** Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $\sin A = \sin(B+C)$. B. $\cos A = \cos(B+C)$.
- C. $\cos A > 0$. D. $\sin A \leq 0$.
- Câu 8.** Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. $\sin a = \sin(180^\circ - a)$; B. $\cos a = \cos(180^\circ - a)$;
- C. $\tan a = \tan(180^\circ - a)$; D. $\cot a = \cot(180^\circ - a)$.
- Câu 9.** Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?
- A. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$; B. $\cos 45^\circ = \sin 135^\circ$;
- C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$; D. $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$.
- Câu 10.** Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?
- A. $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$; B. $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$;
- C. $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$; D. $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$.
- Câu 11.** Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là đúng?
- A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$.
- Câu 12.** Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A nhọn;
- B. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A tù;
- C. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A nhọn;

D. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A vuông.

Câu 13. Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}, BC = 7\text{cm}, CA = 9\text{cm}$. Giá trị $\cos A$ là:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$; D. $\frac{1}{2}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC có $AB = 8\text{cm}, AC = 18\text{cm}$ và có diện tích bằng 64cm^2 . Giá trị $\sin A$ là:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B. $\frac{3}{8}$; C. $\frac{4}{5}$; D. $\frac{8}{9}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = 30\text{cm}$. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G . Diện tích tam giác GFC là:

- A. 50cm^2 ; B. $50\sqrt{2}\text{cm}^2$ C. 75cm^2 D. $15\sqrt{105}\text{cm}^2$.

Câu 16. Tam giác ABC có diện tích S . Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh CA lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

- A. $2S$ B. $3S$; C. $4S$ D. $6S$.

Câu 17. Cho $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng:

- A. 1,5; B. $\sqrt{3}$; C. $2\sqrt{2}$; D. 2.

Câu 18. Tam giác ABC có $\hat{A} = 15^\circ, \hat{B} = 45^\circ$. Giá trị của $\tan C$ bằng

- A. $-\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 19. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Tích hoành độ và tung độ của điểm M bằng

- A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 20. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{XOM} = 150^\circ$. N là điểm đối xứng với M qua trục tung. Giá trị của $\tan \widehat{xON}$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.

Câu 21. Cho góc nhọn α có $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Giá trị của tích $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{12}{25}$. C. $\frac{25}{12}$. D. $\frac{3}{4}$.

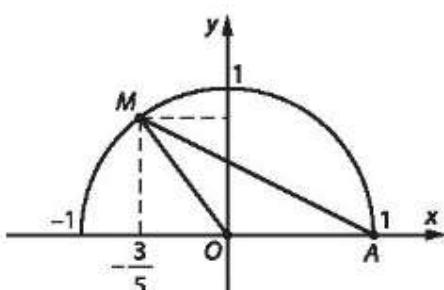
Câu 22. Cho góc $\alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ thoả mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. Giá trị của $\cot \alpha$ là

- A. 0. B. 1. C. -1. D. Không tồn tại.

Câu 23. Cho góc α thoả mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$. Giá trị của $\tan \alpha + \cot \alpha$ là

- A. 1. B. -2. C. 0. D. 2.

Câu 24. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị, sao cho $\cos \widehat{XOM} = -\frac{3}{5}$.



Diện tích của tam giác AOM bằng

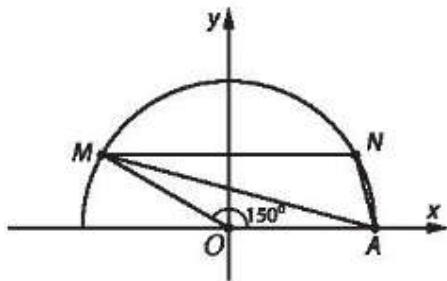
A. $\frac{4}{5}$.

B. $\frac{2}{5}$.

C. $\frac{3}{5}$.

D. $\frac{3}{10}$.

- Câu 25.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị, sao cho $\widehat{XOM} = 150^\circ$. Lấy N đối xứng với M qua trục tung. Diện tích của tam giác MAN bằng



A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{3}$.

- Câu 26.** Cho $\cos \alpha = \frac{1}{4}$. Giá trị của $P = \frac{\tan \alpha + 2 \cot \alpha}{2 \tan \alpha + 3 \cot \alpha}$ là

A. $-\frac{17}{33}$.

B. $\frac{17}{33}$.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{16}{33}$.

- Câu 27.** Tam giác ABC có $a = 2, b = 3, c = 4$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là

A. $R = \frac{\sqrt{15}}{2}$

B. $R = \frac{7}{\sqrt{15}}$.

C. $R = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

D. $R = \frac{8}{\sqrt{15}}$.

- Câu 28.** Tam giác ABC có $a = 4, b = 5, c = 6$. Độ dài đường cao h_b bằng

A. $\frac{3\sqrt{7}}{2}$.

B. $\frac{3}{2\sqrt{7}}$.

C. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

D. $\frac{3}{4\sqrt{7}}$.

- Câu 29.** Cho tam giác ABC có $a = 20, b = 16$ và $m_a = 10$. Diện tích của tam giác bằng

A. 92.

B. 100.

C. 96.

D. 88.

- Câu 30.** Tam giác ABC có $a = 14, b = 9$ và $m_a = 8$. Độ dài đường cao h_a bằng

A. $\frac{24\sqrt{5}}{7}$.

B. $\frac{12\sqrt{5}}{7}$.

C. $12\sqrt{5}$.

D. $24\sqrt{5}$.

- Câu 31.** Tam giác ABC có $\hat{A} = 45^\circ, c = 6, \hat{B} = 75^\circ$. Độ dài đường cao h_b bằng

A. $3\sqrt{2}$

B. $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

C. $6\sqrt{2}$

D. $2\sqrt{3}$.

- Câu 32.** Tam giác ABC có $\hat{A} = 45^\circ, c = 6, \hat{B} = 75^\circ$.

Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác bằng

A. $8\sqrt{3}$.

B. $2\sqrt{3}$.

C. $6\sqrt{3}$.

D. $4\sqrt{3}$.

- Câu 33.** Tam giác ABC có diện tích $S = 2R^2 \cdot \sin B \sin C$. với R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Số đo góc A bằng

A. 60° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 75° .

- Câu 34.** Tam giác ABC có $AB = \sqrt{5}, AC = \sqrt{2}$ và $\hat{C} = 45^\circ$. Độ dài cạnh BC bằng

A. 3.

B. 2.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\sqrt{2}$.

- Câu 35.** Tam giác ABC có $\hat{C} = 60^\circ, AC = 2$ và $AB = \sqrt{7}$. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $3\sqrt{3}$.

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

D. $\sqrt{3}$.

- Câu 36.** Tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ, AB = 3$ và $BC = 3\sqrt{3}$.

Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC là

A. $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$

B. $\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

D. $\sqrt{3}-1$.

Câu 37. Một ca nô xuất phát từ cảng A , chạy theo hướng đông với vận tốc 60 km/h . Cùng lúc đó, một tàu cá, xuất phát từ A , chạy theo hướng $N30^\circ E$ với vận tốc 50 km/h . Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu kilômét?

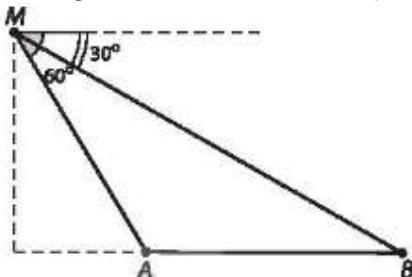
A. 110 km .

B. 112 km .

C. $111,4\text{ km}$.

D. $110,5\text{ km}$.

Câu 38. Một người đứng trên đài quan sát ở cuối một đường đua thẳng. Ở độ cao $6m$ so với mặt đường đua, tại một thời điểm người đó nhìn hai vận động viên A và B dưới các góc tương ứng là 60° và 30° , so với phương nằm ngang. Khoảng cách giữa hai vận động viên A và B (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị mét) tại thời điểm đó là



A. $8m$.

B. $7m$.

C. $6m$.

D. $9m$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 39. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $M = \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$

b) $N = \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$

c) $P = 1 + \tan^2 60^\circ$

d) $Q = \frac{1}{\sin^2 120^\circ} - \cot^2 120^\circ$

Câu 40. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$, $AC = 10$. Tính a, R, S, r .

Câu 41. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Chứng minh rằng:

a) $\cos \widehat{AMB} + \cos \widehat{AMC} = 0$

b) $MA^2 + MB^2 - AB^2 = 2 \cdot MA \cdot MB \cdot \cos \widehat{AMB}$ và $MA^2 + MC^2 - AC^2 = 2 \cdot MA \cdot MC \cdot \cos \widehat{AMC}$

c) $MA^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$ (công thức đường trung tuyến).

Câu 42. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

a) Nếu góc A nhọn thì $b^2 + c^2 > a^2$

b) Nếu góc A tù thì $b^2 + c^2 < a^2$

c) Nếu góc A vuông thì $b^2 + c^2 = a^2$

Câu 43. Cho góc tù α có $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

a) Tính $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$

b) Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \sin \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \cot(90^\circ - \alpha);$$

$$B = \frac{3(\sin \alpha + \sqrt{2} \cdot \cos \alpha) - 2}{\sin \alpha - \sqrt{2} \cdot \cos \alpha}.$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Câu 44. Cho

a) Tính $\sin 75^\circ, \cos 105^\circ, \tan 165^\circ$.

b) Tính giá trị của biểu thức

$$A = \sin 75^\circ \cdot \cos 165^\circ + \cos 105^\circ \cdot \sin 165^\circ.$$

Câu 45. Cho tam giác ABC có $AB = 1, BC = 2$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh và số đo các góc còn lại của tam giác.

Câu 46. Cho tam giác ABC có $c = 1, a = 2$ và $\hat{B} = 120^\circ$.

- a) Tính b, \hat{A}, \hat{C} .
- b) Tính diện tích của tam giác.
- c) Tính độ dài đường cao kẻ từ B của tam giác.

Câu 47. Cho tam giác ABC có $a = 3, b = 5$ và $c = 7$.

- a) Tính các góc của tam giác, làm tròn đến độ.
- b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp của tam giác.

Câu 48. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 45^\circ, \hat{C} = 15^\circ$ và $b = \sqrt{2}$. Tính a, h_a .

Câu 49. Cho tam giác ABC , có $c = 5, a = 8$ và $\hat{B} = 60^\circ$.

- a) Tính b và số đo các góc A, C (số đo các góc làm tròn hàng đơn vị, theo đơn vị độ).
- b) Tính độ dài đường cao kẻ từ B .
- c) Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A .

Câu 50. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 15^\circ, \hat{C} = 30^\circ$ và $C = 2$.

- a) Tính số đo góc A và độ dài các cạnh a, b .
- b) Tính diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác.
- c) Lấy điểm D thuộc cạnh AB sao cho $\widehat{BCD} = \widehat{DCA}$ (tức CD là phân giác của góc \widehat{BCA}). Tính độ dài CD .

Câu 51. Cho tam giác ABC . Biết $a = 49,4; b = 26,4; \hat{C} = 47^\circ 20'$. Tính hai góc \hat{A}, \hat{B} và cạnh c .

Câu 52. Cho tam giác ABC . Biết $a = 24, b = 13, c = 15$. Tính các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Câu 53. Cho tam giác ABC có $a = 8, b = 10, c = 13$.

- a) Tam giác ABC có góc tù không?
- b) Tính độ dài trung tuyến AM , diện tích tam giác và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.
- c) Lấy điểm D đối xứng với A qua C . Tính độ dài BD .

Câu 54. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ, b = 8, c = 5$. Tính:

- a) Cạnh a và các góc \hat{B}, \hat{C} .
- b) Diện tích tam giác ABC .
- c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường cao AH của tam giác.

Câu 55. Cho hình bình hành $ABCD$

- a) Chứng minh $2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$
- b) Cho $AB = 4, BC = 5, BD = 7$. Tính AC .

Câu 56. Cho tam giác ABC có $a = 15, b = 20, c = 25$.

- a) Tính diện tích tam giác ABC
- b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Câu 57. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng: $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$

Câu 58. Cho tam giác ABC với ba cạnh là a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$$

Câu 59. Cho tam giác ABC . Biết $a = 24; b = 36; \hat{C} = 52^\circ$. Tính cạnh c và hai góc \hat{A}, \hat{B} .

Câu 60. Cho tam giác ABC không vuông. Chứng minh rằng: $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$.

Câu 61. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, \widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

- a) Độ dài cạnh BC và độ lớn góc B ;

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp;

c) Diện tích của tam giác;

d) Độ dài đường cao xuất phát từ A ;

Câu 62. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = (\sin 20^\circ + \sin 70^\circ)^2 + (\cos 20^\circ + \cos 110^\circ)^2$$

$$B = \tan 20^\circ + \cot 20^\circ + \tan 110^\circ + \cot 110^\circ.$$

Câu 63. Cho α thoả mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha, \sin(90^\circ - \alpha), \cos(90^\circ - \alpha)$,

$\sin(180^\circ - \alpha), \cos(180^\circ - \alpha)$ trong các trường hợp sau:

a) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

b) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Câu 64. Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 6, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

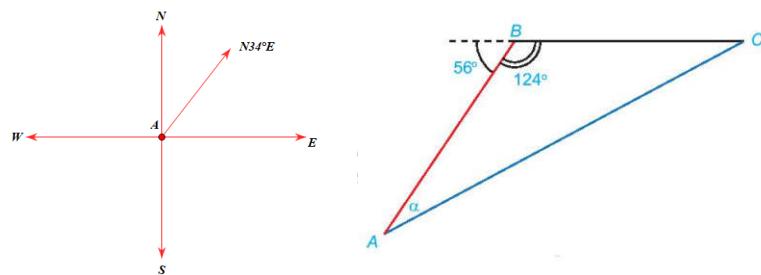
a) Độ dài cạnh BC và độ lớn góc B ;

b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp R ;

c) Diện tích của tam giác ABC ;

d) Độ dài đường cao xuất phát từ A ;

Câu 65. Trên biển, tàu B ở vị trí cách tàu A 53 km về hướng $N34^\circ E$. Sau đó, tàu B chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 30 km/h về hướng đông, đồng thời tàu A chuyển động thẳng đều với vận tốc có độ lớn 50 km/h để gặp tàu B .



a) Hỏi tàu A cần phải chuyển động theo hướng nào?

b) Với hướng chuyển động đó thì sau bao lâu tàu A gặp tàu B ?

Câu 66. Trên sân bóng chày dành cho nam, các vị trí gôn Nhà (Home plate), gôn 1 (First base), gôn 2 (Second base), gôn 3 (Third base) là bốn đỉnh của một hình vuông có cạnh dài $27,4\text{ m}$. Vị trí đứng ném bóng (Pitcher's mound) nằm trên đường nối gôn Nhà với gôn 2, và cách gôn Nhà $18,44\text{ m}$. Tính các khoảng cách từ vị trí đứng ném bóng tới các gôn 1 và gôn 3.



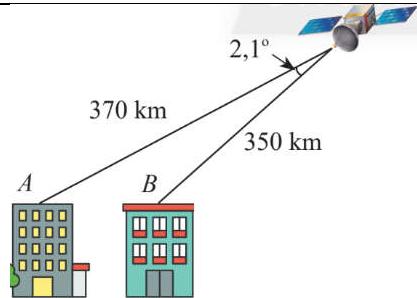
Câu 67. Trên biển, một tàu cá xuất phát từ cảng A , chạy về phương đông 15 km tới B , rồi chuyển sang hướng $E30^\circ S$ chạy tiếp 20 km nữa tới đảo C .

a) Tính khoảng cách từ A tới C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị kilômét).

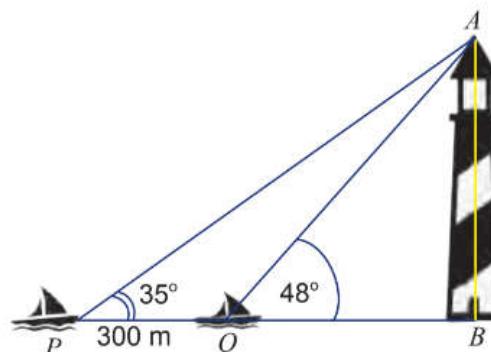
b) Xác định hướng từ A tới C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).

Câu 68. Trên sườn đồi, với độ dốc 12% (độ dốc của sườn đồi được tính bằng tang của góc nhọn tạo bởi sườn đồi với phương nằm ngang) có một cây cao mọc thẳng đứng. Ở phía chân đồi, cách gốc cây 30 m , người ta nhìn ngọn cây dưới một góc 45° so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của cây đó (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị mét).

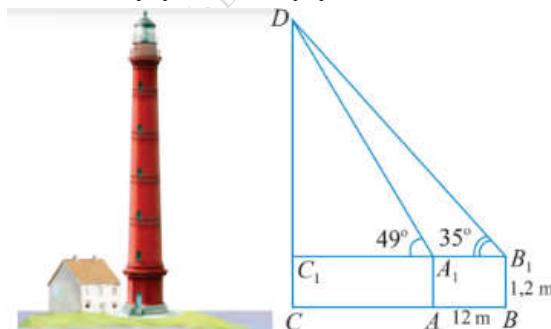
Câu 69. Tính khoảng cách AB giữa hai nóc tòa cao ốc. Cho biết khoảng cách từ hai điểm đó đến một vệ tinh viễn thông lần lượt là 370 km , 350 km và góc nhìn từ vệ tinh đến A và B là $2,1^\circ$.



- Câu 70.** Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau $300m$ và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển (Hình). Từ P và Q , người ta nhìn thấy tháp hải đăng AB dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^\circ$ và $\widehat{BQA} = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp hải đăng đó.

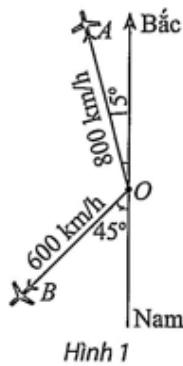


- Câu 71.** Muốn đo chiều cao của một ngọn tháp, người ta lấy hai điểm A, B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12m$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác ké. Chân của hai giác ké có chiều cao là $h = 1,2m$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ$, $\widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.



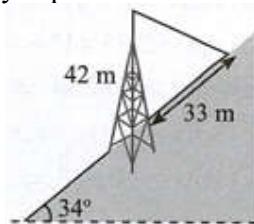
- Câu 72.** Hai chiếc tàu thuỷ P và Q cách nhau $50m$. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển, người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 40^\circ$ và $\widehat{BQA} = 52^\circ$. Tính chiều cao của tháp hải đăng đó.

- Câu 73.** Hai máy bay rời một sân bay cùng một lúc. Một chiếc bay với vận tốc $800km/h$ theo hướng lệch so với hướng bắc 15° về phía tây. Chiếc còn lại bay theo hướng lệch so với hướng nam 45° về phía tây với vận tốc $600km/h$ (Hình 1). Hỏi hai máy bay đó cách nhau bao xa sau 3 giờ?



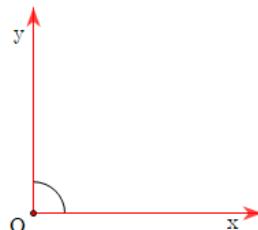
Hình 1

- Câu 74.** Một tháp viễn thông cao 42 m được dựng thẳng đứng trên một sườn dốc 34° so với phương ngang. Từ đỉnh tháp người ta neo một sợi cáp xuống một điểm trên sườn dốc cách chân tháp 33 m như Hình 2. Tính chiều dài của sợi dây cáp đó.



Hình 2

- Câu 75.** Không dùng thước đo góc, làm thế nào để biết số đo góc đó. Bạn Hoài vẽ góc xOy và đó bạn Đông làm thế nào có thể biết được số đo của góc này khi không có thước đo góc. Bạn Đông làm như sau:



- Chọn các điểm A, B lần lượt thuộc các tia Ox và Oy sao cho $OA = OB = 2\text{ cm}$;
- Đo độ dài đoạn thẳng AB được $AB = 3,1\text{ cm}$.

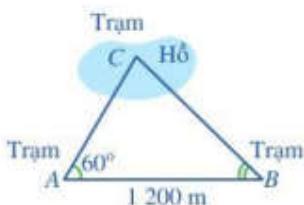
Từ các dữ kiện trên bạn Đông tính được $\cos xOy$, từ đó suy ra độ lõn góc xOy .

Em hãy cho biết số đo góc xOy ở Hình bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

- Câu 76.** Có hai trạm quan sát A và B ven hồ và một trạm quan sát C ở giữa hồ. Để tính khoảng cách từ A và từ B đến C , người ta làm như sau (Hình):

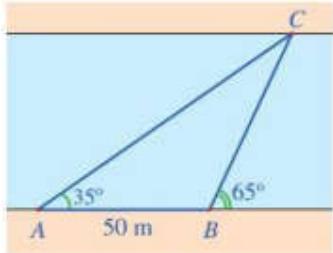
- Đo góc BAC được 60° , đo góc ABC được 45° ;
- Đo khoảng cách AB được 1200 m .

Khoảng cách từ trạm C đến các trạm A và B bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



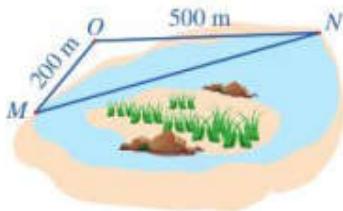
- Câu 77.** Một người đứng ở bờ sông, muốn đo độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí đang đứng (khúc sông tương đối thẳng, có thể xem hai bờ song song với nhau).

Từ vị trí đang đứng A , người đó đo được góc nghiêng $\alpha = 35^\circ$ so với bờ sông tới một vị trí C quan sát được ở phía bờ bên kia. Sau đó di chuyển dọc bờ sông đến vị trí B cách A một khoảng $d = 50\text{ m}$ và tiếp tục đo được góc nghiêng $\beta = 65^\circ$ so với bờ bên kia tới vị trí C đã chọn (Hình).



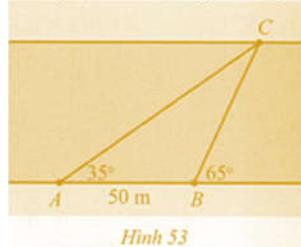
Hỏi độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí người đó đang đứng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Câu 78. Để đo khoảng cách giữa hai vị trí M, N ở hai phía ốc đảo, người ta chọn vị trí O bên ngoài ốc đảo sao cho: O không thuộc đường thẳng MN ; các khoảng cách OM, ON và góc MON là đo được (Hình).



Sau khi đo, ta có $OM = 200\text{ m}, ON = 500\text{ m}, \widehat{MON} = 135^\circ$. Khoảng cách giữa hai vị trí M, N là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 79. Một người quan sát đứng ở bờ sông muốn đo độ rộng của khúc sông chõ chảy qua vị trí đang đứng (khúc sông tương đối thẳng, có thể xem hai bờ song song với nhau).



Từ vị trí đang đứng A , người đó đo được góc nghiêng $\alpha = 35^\circ$ so với bờ sông tới một vị trí C quan sát được ở phía bờ bên kia. Sau đó di chuyển dọc bờ sông đến vị trí B cách A một khoảng $d = 50\text{ m}$ và tiếp tục đo được góc nghiêng $\beta = 65^\circ$ so với bờ sông tới vị trí C đã chọn (Hình 53).

Hỏi độ rộng của con sông chõ chảy qua vị trí người quan sát đang đứng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ↗ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** ↗ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ↗ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: **Nguyễn Vương**

↗ https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUBt3nwJfA?view_as=subscriber

↗ Tải nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>

ÔN TẬP CHƯƠNG III. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho góc nhọn α . Biểu thức $(\sin \alpha \cdot \cot \alpha)^2 + (\cos \alpha \cdot \tan \alpha)^2$ bằng:

A. 2 .

B. $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

C. 1 .

D. $\sin \alpha + \cos \alpha$.

Lời giải

Chọn C

Câu 2. Cho góc nhọn α . Biểu thức $\tan \alpha \cdot \tan(90^\circ - \alpha)$ bằng:

A. $\tan \alpha + \cot \alpha$.

B. $\tan^2 \alpha$.

C. 1 .

D. $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

Lời giải

Chọn C

Câu 3. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 135^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $S = \frac{1}{2}ca$.

B. $S = \frac{-\sqrt{2}}{4}ac$.

C. $S = \frac{\sqrt{2}}{4}bc$.

D. $S = \frac{\sqrt{2}}{4}ca$.

Lời giải

Diện tích tam giác

$$ABC : S = \frac{1}{2}ac \cdot \sin B \text{ mà } \hat{B} = 135^\circ \Rightarrow \sin B = \sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{2}ac \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}ac$$

Chọn D

Câu 4. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 135^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $R = \frac{a}{\sin A}$.

B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}b$.

C. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

D. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Lời giải

Theo định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = R$

A. $R = \frac{a}{\sin A}$ đúng

B. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}b$. Mà $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = b\sqrt{2}$. Vậy B sai.

C. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}c$ (Loại vì không có dữ kiện về góc C nên không thể tính R theo c .)

D. $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (Loại vì không có dữ kiện về góc A nên không thể tính R theo a .)

Chọn A

Câu 5. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 135^\circ$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}ab$.

B. $\frac{b}{\sin A} = \frac{a}{\sin B}$.

C. $\sin B = \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

D. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos 135^\circ$.

Lời giải

A. $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}ab$. (Loại)

Vì: Theo định lí cos ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. Không đủ dữ kiện để suy ra $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}ab$.

B. $\frac{b}{\sin A} = \frac{a}{\sin B}$ (Loại). Theo định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \neq \frac{b}{\sin A} = \frac{a}{\sin B}$

C. $\sin B = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ (sai vì theo câu $a, \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

D. $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos 135^\circ$.

Theo định lý cos ta có: $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B (*)$

Mà $\hat{B} = 135^\circ \Rightarrow \cos B = \cos 135^\circ$. Thay vào (*) ta được: $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos 135^\circ \Rightarrow D$ đúng.

Chọn D

Câu 6. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $S = \frac{abc}{4r}$.

B. $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$.

D. $S = r(a+b+c)$

Lời giải

Chọn B

A. $S = \frac{abc}{4r}$. Ta có: $S = \frac{abc}{4R}$. Mà $r < R$ nên suy ra $S = \frac{abc}{4R} < \frac{abc}{4r}$

Vậy A sai.

B. $r = \frac{2S}{a+b+c}$. Ta có: $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p}$

$$\text{Mà } p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{S}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2S}{a+b+c}$$

Vậy B đúng

C. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$. Sai vì theo định lí cos ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

D. $S = r(a+b+c)$. Sai vì $S = pr = r \cdot \frac{a+b+c}{2}$

Câu 7. Cho tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin A = \sin(B+C)$. **B.** $\cos A = \cos(B+C)$.

C. $\cos A > 0$. **D.** $\sin A \leq 0$.

Lời giải

Chọn A

A. $\sin A = \sin(B+C)$. Ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow \sin(B+C) = \sin A$

Vậy A đúng.

B. $\cos A = \cos(B+C)$. Sai vì $\cos(B+C) = -\cos A$ (Do $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$)

C. $\cos A > 0$. Không đủ dữ kiện để kết luận. Nếu $0^\circ < \hat{A} < 90^\circ$ thì $\cos A > 0$

Nếu $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ thì $\cos A < 0$

D. $\sin A \leq 0$. Ta có $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A > 0$. Mà $b,c > 0 \Rightarrow \sin A > 0$

Vậy D sai.

Câu 8. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin a = \sin(180^\circ - a)$;

B. $\cos a = \cos(180^\circ - a)$;

C. $\tan a = \tan(180^\circ - a)$;

D. $\cot a = \cot(180^\circ - a)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 9. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

A. $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ$;

B. $\cos 45^\circ = \sin 135^\circ$;

C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$;

D. $\sin 60^\circ = \cos 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D**Câu 10.** Bất đẳng thức nào dưới đây là đúng?

- A. $\sin 90^\circ < \sin 150^\circ$;
 C. $\cos 90^\circ 30' > \cos 100^\circ$;
 B. $\sin 90^\circ 15' < \sin 90^\circ 30'$;
 D. $\cos 150^\circ > \cos 120^\circ$.

Lời giải**Chọn C****Câu 11.** Trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào là đúng?

- A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
 D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$.

Lời giải**Chọn C****Câu 12.** Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A nhọn;
 B. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 > 0$ thì góc A tù;
 C. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A nhọn;
 D. Nếu $b^2 + c^2 - a^2 < 0$ thì góc A vuông.

Lời giải**Chọn A****Câu 13.** Cho tam giác ABC có $AB = 4cm, BC = 7cm, CA = 9cm$. Giá trị $\cos A$ là:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$; D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải**Chọn A****Câu 14.** Cho tam giác ABC có $AB = 8cm, AC = 18cm$ và có diện tích bằng $64cm^2$. Giá trị $\sin A$ là:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; B. $\frac{3}{8}$; C. $\frac{4}{5}$; D. $\frac{8}{9}$.

Lời giải**Chọn D****Câu 15.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = AC = 30cm$. Hai đường trung tuyến BF và CE cắt nhau tại G . Diện tích tam giác GFC là:

- A. $50cm^2$; B. $50\sqrt{2}cm^2$ C. $75cm^2$ D. $15\sqrt{105}cm^2$.

Lời giải**Chọn C****Câu 16.** Tam giác ABC có diện tích S . Nếu tăng cạnh BC lên 2 lần đồng thời tăng cạnh CA lên 3 lần và giữ nguyên độ lớn của góc C thì khi đó diện tích của tam giác mới được tạo nên bằng:

- A. $2S$ B. $3S$; C. $4S$ D. $6S$.

Lời giải**Chọn D****Câu 17.** Cho $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A và B là hai điểm di động lần lượt trên Ox và Oy sao cho $AB = 1$. Độ dài lớn nhất của đoạn OB bằng:

- A. $1,5$; B. $\sqrt{3}$; C. $2\sqrt{2}$; D. 2 .

Lời giải**Chọn D****Câu 18.** Tam giác ABC có $\hat{A} = 15^\circ, \hat{B} = 45^\circ$. Giá trị của $\tan C$ bằng

- A. $-\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải**Chọn A**

- Câu 19.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Tích hoành độ và tung độ của điểm M bằng

- A. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn B

- Câu 20.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{XOM} = 150^\circ$. N là điểm đối xứng với M qua trục tung. Giá trị của $\tan \widehat{xON}$ bằng

- A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 21.** Cho góc nhọn α có $\tan \alpha = \frac{3}{4}$. Giá trị của tích $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ bằng

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{12}{25}$. C. $\frac{25}{12}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

- Câu 22.** Cho góc $\alpha (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ thoả mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$. Giá trị của $\cot \alpha$ là
- A. 0. B. 1. C. -1. D. Không tồn tại.

Lời giải

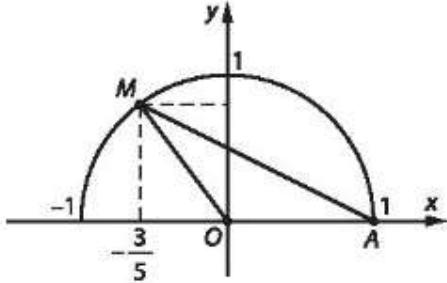
Chọn A

- Câu 23.** Cho góc α thoả mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}$. Giá trị của $\tan \alpha + \cot \alpha$ là
- A. 1. B. -2. C. 0. D. 2.

Lời giải

Chọn D

- Câu 24.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị, sao cho $\cos \widehat{XOM} = -\frac{3}{5}$.



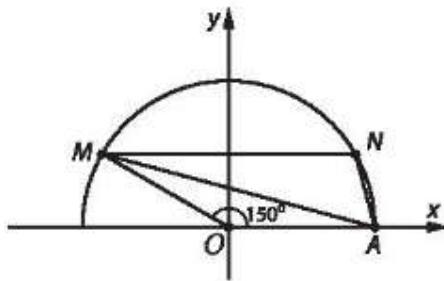
Diện tích của tam giác AOM bằng

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{2}{5}$. C. $\frac{3}{5}$. D. $\frac{3}{10}$.

Lời giải

Chọn B

- Câu 25.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy lấy điểm M thuộc nửa đường tròn đơn vị, sao cho $\widehat{XOM} = 150^\circ$. Lấy N đối xứng với M qua trục tung. Diện tích của tam giác MAN bằng



- A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 26.** Cho $\cos \alpha = \frac{1}{4}$. Giá trị của $P = \frac{\tan \alpha + 2 \cot \alpha}{2 \tan \alpha + 3 \cot \alpha}$ là

- A. $-\frac{17}{33}$. B. $\frac{17}{33}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{16}{33}$.

Lời giải

Chọn B

- Câu 27.** Tam giác ABC có $a = 2, b = 3, c = 4$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là

- A. $R = \frac{\sqrt{15}}{2}$ B. $R = \frac{7}{\sqrt{15}}$. C. $R = \frac{\sqrt{15}}{6}$. D. $R = \frac{8}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn D

- Câu 28.** Tam giác ABC có $a = 4, b = 5, c = 6$. Độ dài đường cao h_b bằng

- A. $\frac{3\sqrt{7}}{2}$. B. $\frac{3}{2\sqrt{7}}$. C. $\frac{3\sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{3}{4\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 29.** Cho tam giác ABC có $a = 20, b = 16$ và $m_a = 10$. Diện tích của tam giác bằng

- A. 92. B. 100. C. 96. D. 88.

Lời giải

Chọn C

- Câu 30.** Tam giác ABC có $a = 14, b = 9$ và $m_a = 8$. Độ dài đường cao h_a bằng

- A. $\frac{24\sqrt{5}}{7}$. B. $\frac{12\sqrt{5}}{7}$. C. $12\sqrt{5}$. D. $24\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 31.** Tam giác ABC có $\hat{A} = 45^\circ, c = 6, \hat{B} = 75^\circ$. Độ dài đường cao h_b bằng

- A. $3\sqrt{2}$ B. $\frac{3}{\sqrt{2}}$. C. $6\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 32.** Tam giác ABC có $\hat{A} = 45^\circ, c = 6, \hat{B} = 75^\circ$.

Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác bằng

- A. $8\sqrt{3}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $6\sqrt{3}$. D. $4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

- Câu 33.** Tam giác ABC có diện tích $S = 2R^2 \cdot \sin B \sin C$, với R là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Số đo góc A bằng

A. 60° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 75°

Lời giải

Chọn B

- Câu 34.** Tam giác ABC có $AB = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{2}$ và $\hat{C} = 45^\circ$. Độ dài cạnh BC bằng
 A. 3. B. 2. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 35.** Tam giác ABC có $\hat{C} = 60^\circ$, $AC = 2$ và $AB = \sqrt{7}$. Diện tích của tam giác ABC bằng
 A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $3\sqrt{3}$. C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

- Câu 36.** Tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $AB = 3$ và $BC = 3\sqrt{3}$.
 Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC là
 A. $\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}$ B. $\frac{3(\sqrt{3}+1)}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ D. $\sqrt{3}-1$.

Lời giải

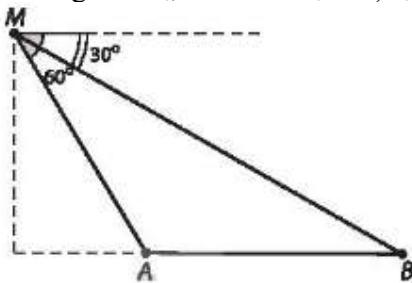
Chọn A

- Câu 37.** Một ca nô xuất phát từ cảng A , chạy theo hướng đông với vận tốc 60 km/h . Cùng lúc đó, một tàu cá, xuất phát từ A , chạy theo hướng $N30^\circ E$ với vận tốc 50 km/h . Sau 2 giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu kilômét?
 A. 110 km . B. 112 km . C. $111,4 \text{ km}$. D. $110,5 \text{ km}$.

Lời giải

Chọn C

- Câu 38.** Một người đứng trên đài quan sát đài ở cuối một đường đua thẳng. Ở độ cao 6 m so với mặt đường đua, tại một thời điểm người đó nhìn hai vận động viên A và B dưới các góc tương ứng là 60° và 30° , so với phương nằm ngang. Khoảng cách giữa hai vận động viên A và B (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị mét) tại thời điểm đó là



A. 8 m .

B. 7 m .

C. 6 m .

D. 9 m .

Lời giải

Chọn B

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

- Câu 39.** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $M = \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$

b) $N = \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$

c) $P = 1 + \tan^2 60^\circ$

d) $Q = \frac{1}{\sin^2 120^\circ} - \cot^2 120^\circ$

Lời giải

a) $M = \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 30^\circ$

Ta có: $\begin{cases} \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{cases}$

Thay vào M , ta được: $M = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 1$

b) $N = \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$

Ta có: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Thay vào N , ta được: $N = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

c) $P = 1 + \tan^2 60^\circ$

Ta có: $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

Thay vào P , ta được: $Q = 1 + (\sqrt{3})^2 = 4$.

d) $Q = \frac{1}{\sin^2 120^\circ} - \cot^2 120^\circ$

Ta có: $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cot 120^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

Thay vào P , ta được: $Q = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$.

Câu 40. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ, AC = 10$. Tính a, R, S, r .

Lời giải

Theo định lí sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = R$

+) Ta có: $R = \frac{b}{\sin B}$

Mà $b = AC = 10, \hat{B} = 60^\circ$

$$\Rightarrow R = \frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

+) Mặt khác: $R = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow a = R \cdot \sin A$

Mà $R = \frac{20\sqrt{3}}{3}, \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$

$$\Rightarrow a = \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 75^\circ \approx 11,154$$

+) Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \hat{C} \approx \frac{1}{2} \cdot 11,154 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ \approx 48,3$

+) Lại có: $R = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow c = \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 45^\circ = \frac{10\sqrt{6}}{3} \approx 8,165$$

$$\Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2} \approx \frac{11,154 + 10 + 8,165}{2} \approx 14,66$$

$$\Rightarrow r = \frac{S}{p} \approx \frac{48,3}{14,66} \approx 3,3$$

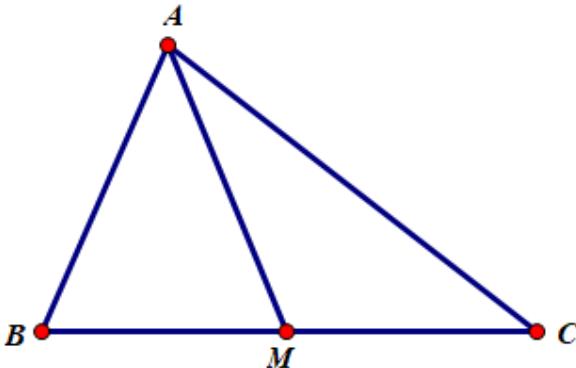
Câu 41. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Chứng minh rằng:

a) $\cos \widehat{AMB} + \cos \widehat{AMC} = 0$

b) $MA^2 + MB^2 - AB^2 = 2 \cdot MA \cdot MB \cdot \cos \widehat{AMB}$ và $MA^2 + MC^2 - AC^2 = 2 \cdot MA \cdot MC \cdot \cos \widehat{AMC}$

c) $MA^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$ (công thức đường trung tuyến).

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AMB} + \widehat{AMC} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AMB} = -\cos \widehat{AMC}$$

Hay $\cos \widehat{AMB} + \cos \widehat{AMC} = 0$

b) Áp dụng định lí cos trong tam giác AMB ta có:

$$AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos \widehat{AMB}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 - AB^2 = 2MA \cdot MB \cos \widehat{AMB} \quad (1)$$

Tương tự, Áp dụng định lí cos trong tam giác AMC ta được:

$$AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA \cdot MC \cos \widehat{AMC}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MC^2 - AC^2 = 2MA \cdot MC \cos \widehat{AMC} \quad (2)$$

c) **Cách 1:** Từ (1), suy ra $MA^2 = AB^2 - MB^2 + 2MA \cdot MB \cos \widehat{AMB}$

Từ (2), suy ra $MA^2 = AC^2 - MC^2 + 2MA \cdot MC \cos \widehat{AMC}$

Cộng vế với vế ta được:

$$2MA^2 = (AB^2 - MB^2 + 2MA \cdot MB \cos \widehat{AMB}) + (AC^2 - MC^2 + 2MA \cdot MC \cos \widehat{AMC})$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 = AB^2 + AC^2 - MB^2 - MC^2 + 2MA \cdot MB \cos \widehat{AMB} + 2MA \cdot MC \cos \widehat{AMC}$$

Mà: $MB = MC = \frac{BC}{2}$ (do AM là trung tuyến)

$$\Rightarrow 2MA^2 = AB^2 + AC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 2MA \cdot MB \cos \widehat{AMB} + 2MA \cdot MB \cos \widehat{AMC}$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 2MA \cdot MB (\cos \widehat{AMB} + \cos \widehat{AMC})$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \text{ (đpcm)}$$

Cách 2:

Theo ý a, ta có: $\cos \widehat{AMC} = -\cos \widehat{AMB}$

$$\text{Từ đẳng thức (1): suy ra } \cos \widehat{AMB} = \frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2 \cdot MA \cdot MB}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AMC} = -\cos \widehat{AMB} = -\frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2 \cdot MA \cdot MB}$$

Thế $\cos \widehat{AMC}$ vào biểu thức (2), ta được:

$$MA^2 + MC^2 - AC^2 = 2MA \cdot MC \cdot \left(-\frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2 \cdot MA \cdot MB} \right)$$

$$\text{Lại có: } MB = MC = \frac{BC}{2} \text{ (do AM là trung tuyến)}$$

$$\Rightarrow MA^2 + \left(\frac{BC}{2} \right)^2 - AC^2 = 2MA \cdot MB \cdot \left(-\frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2 \cdot MA \cdot MB} \right)$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + \left(\frac{BC}{2} \right)^2 - AC^2 = - (MA^2 + MB^2 - AB^2)$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + \left(\frac{BC}{2} \right)^2 - AC^2 + MA^2 + \left(\frac{BC}{2} \right)^2 - AB^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 - AB^2 - AC^2 + \frac{BC^2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = \frac{AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \text{ (đpcm)}$$

Câu 42. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

- a) Nếu góc A nhọn thì $b^2 + c^2 > a^2$
- b) Nếu góc A tù thì $b^2 + c^2 < a^2$
- c) Nếu góc A vuông thì $b^2 + c^2 = a^2$

Lời giải

Theo định lí cos ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$ (1)

a) Nếu góc A nhọn thì $\cos A > 0$

Từ (1), suy ra $b^2 + c^2 > a^2$

b) Nếu góc A tù thì $\cos A < 0$

Từ (1), suy ra $b^2 + c^2 < a^2$

c) Nếu góc A vuông thì $\cos A = 0$

Từ' (1), suy ra $b^2 + c^2 = a^2$

Câu 43. Cho góc tù α có $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

a) Tính $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$

b) Tính giá trị của các biểu thức:

$$A = \sin \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \cot(90^\circ - \alpha);$$

$$B = \frac{3(\sin \alpha + \sqrt{2} \cdot \cos \alpha) - 2}{\sin \alpha - \sqrt{2} \cdot \cos \alpha}.$$

Lời giải

a) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\cot \alpha = -2\sqrt{2}$.

b) $A = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; $B = -3$

Câu 44. Cho $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

a) Tính $\sin 75^\circ$, $\cos 105^\circ$, $\tan 165^\circ$.

b) Tính giá trị của biểu thức

$$A = \sin 75^\circ \cdot \cos 165^\circ + \cos 105^\circ \cdot \sin 165^\circ.$$

Lời giải

Do $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, suy ra $\cos 15^\circ = \sqrt{1-\sin^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Do đó $\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = 2 - \sqrt{3}$.

a) $\sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

$$\cos 105^\circ = \cos(180^\circ - 75^\circ) = -\cos 75^\circ = -\cos(90^\circ - 15^\circ)$$

$$= -\sin 15^\circ = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

$$\tan 165^\circ = \tan(180^\circ - 15^\circ) = -\tan 15^\circ = -2 + \sqrt{3}.$$

b) Đáp số: $A = -1$.

Câu 45. Cho tam giác ABC có $AB = 1$, $BC = 2$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính độ dài cạnh và số đo các góc còn lại của tam giác.

Lời giải

Đáp số: $\widehat{CAB} = 90^\circ$, $\widehat{BCA} = 30^\circ$ và $CA = \sqrt{3}$.

Câu 46. Cho tam giác ABC có $c = 1$, $a = 2$ và $\widehat{B} = 120^\circ$.

a) Tính b, \hat{A}, \hat{C} .

b) Tính diện tích của tam giác.

c) Tính độ dài đường cao kẻ từ B của tam giác.

Lời giải

a) HD. Áp dụng định lí côsin.

Đáp số: $b = \sqrt{7}$, $\hat{A} \approx 41^\circ$, $\hat{C} \approx 19^\circ$.

b) Đáp số: $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) $h_b = \frac{2S}{b} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Câu 47. Cho tam giác ABC có $a = 3$, $b = 5$ và $c = 7$.

a) Tính các góc của tam giác, làm tròn đến độ.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp của tam giác.

Lời giải

a) HD. Áp dụng định lí côsin.

Đáp số: $\hat{C} = 120^\circ, \hat{A} \approx 22^\circ, \hat{B} \approx 38^\circ$.

b) Áp dụng định lí sin, ta được bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác là

$$R = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Do $a = 3, b = 5$ và $\hat{C} = 120^\circ$ nên diện tích của tam giác là $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{15\sqrt{3}}{4}$.

Từ đó, bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác là $r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 48. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 45^\circ, \hat{C} = 15^\circ$ và $b = \sqrt{2}$. Tính a, h_a .

Lời giải

$$\text{Đáp số: } a = \sqrt{3}, h_a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Câu 49. Cho tam giác ABC , có $c = 5, a = 8$ và $\hat{B} = 60^\circ$.

- a) Tính b và số đo các góc A, C (số đo các góc làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).
- b) Tính độ dài đường cao kẻ từ B .
- c) Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A .

Lời giải

a) HD. Áp dụng định lí cosin.

$$\text{Đáp số: } b = 7, \hat{C} \approx 38^\circ, \hat{A} \approx 82^\circ.$$

$$\text{b) Đáp số: } h_b = \frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

$$\text{c) Đáp số: } m_a = \sqrt{21}.$$

Câu 50. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 15^\circ, \hat{C} = 30^\circ$ và $C = 2$.

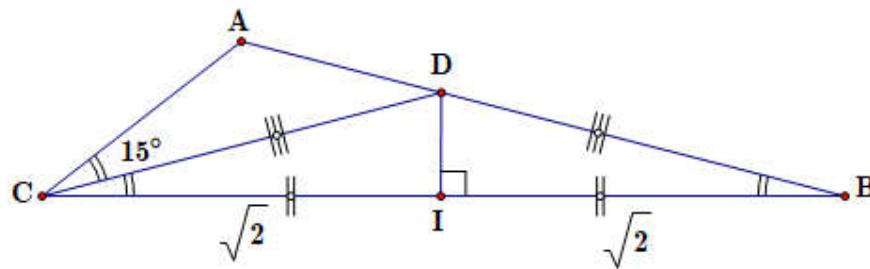
- a) Tính số đo góc A và độ dài các cạnh a, b .
- b) Tính diện tích và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác.
- c) Lấy điểm D thuộc cạnh AB sao cho $\widehat{BCD} = \widehat{DCA}$ (tức CD là phân giác của góc \widehat{BCA}). Tính độ dài CD .

Lời giải

$$\text{a) Đáp số: } \hat{A} = 135^\circ, a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

$$\text{b) Đáp số: } S = \sqrt{3} - 1, R = 2.$$

c) Do CD là phân giác của \widehat{BCA} nên $\widehat{BCD} = \widehat{DCA} = 15^\circ = \widehat{CBD}$. Suy ra tam giác DBC cân tại D . Từ đó, nếu gọi I là trung điểm của BC thì $IC = IB = \sqrt{2}$ và $DI \perp BC$.



$$\text{Từ đó } CD = \frac{Cl}{\cos \widehat{ICD}} = 2(\sqrt{3} - 1).$$

Câu 51. Cho tam giác ABC . Biết $a = 49, 4; b = 26, 4; \hat{C} = 47^\circ 20'$. Tính hai góc \hat{A}, \hat{B} và cạnh c .

Lời giải

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC , ta có:

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos C \Leftrightarrow c^2 = 26,4^2 + 49,4^2 - 2.26,4.49,4 \cos 47^\circ 20' \Rightarrow c \approx 37$$

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Leftrightarrow \frac{49,4}{\sin A} = \frac{26,4}{\sin B} = \frac{37}{\sin 47^\circ 20'}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{49,4 \cdot \sin 47^\circ 20'}{37} \approx 0,982 \Rightarrow \hat{A} \approx 79^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} \approx 180^\circ - 79^\circ - 47^\circ 20' = 53^\circ 40'$$

- Câu 52.** Cho tam giác ABC . Biết $a = 24, b = 13, c = 15$. Tính các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$

Lời giải

Áp dụng hệ quả của định lí cosin, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \cos A = \frac{13^2 + 15^2 - 24^2}{2.13.15} = -\frac{7}{15}; \cos B = \frac{24^2 + 15^2 - 13^2}{2.24.15} = \frac{79}{90}$$

$$\Rightarrow \hat{A} \approx 117,8^\circ, \hat{B} \approx 28,6^\circ \Rightarrow \hat{C} \approx 33,6^\circ$$

- Câu 53.** Cho tam giác ABC có $a = 8, b = 10, c = 13$.

a) Tam giác ABC có góc tù không?

b) Tính độ dài trung tuyến AM , diện tích tam giác và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

c) Lấy điểm D đối xứng với A qua C . Tính độ dài BD .

Lời giải

a)

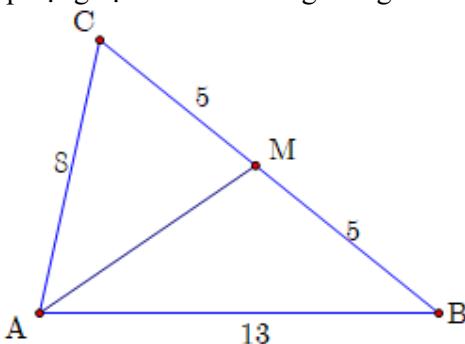
Áp dụng hệ quả của định lí cosin, ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Rightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{10^2 + 13^2 - 8^2}{2.10.13} = \frac{41}{52} > 0 \\ \cos B = \frac{8^2 + 13^2 - 10^2}{2.8.13} = \frac{133}{208} > 0 \\ \cos C = \frac{8^2 + 10^2 - 13^2}{2.8.13} = -\frac{1}{32} < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \hat{C} \approx 91,79^\circ > 90^\circ$, tam giác ABC có góc C tù.

b)

+) Áp dụng định lí cosin trong tam giác ACM, ta có:



$$AM^2 = AC^2 + CM^2 - 2 \cdot AC \cdot CM \cdot \cos C \Leftrightarrow AM^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right) = 91,5 \Rightarrow AM \approx 9,57$$

$$+) Ta có: p = \frac{8+10+13}{2} = 15,5.$$

Áp dụng công thức heron, ta có:

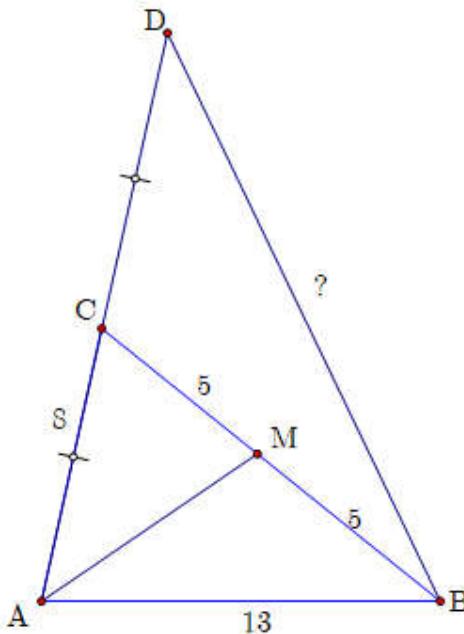
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{15,5 \cdot (15,5-8) \cdot (15,5-10) \cdot (15,5-13)} \approx 40$$

+ Áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{c}{2 \cdot \sin C} = \frac{13}{2 \cdot \sin 91,79^\circ} \approx 6,5$$

LG C

c) Lấy điểm D đối xứng với A qua C.



Ta có: $\widehat{BCD} = 180^\circ - 91,79^\circ = 88,21^\circ$; $CD = AC = 8$. Áp dụng định lí cosin trong tam giác BCD, ta có:

$$\begin{aligned} BD^2 &= CD^2 + CB^2 - 2 \cdot CD \cdot CB \cdot \cos \widehat{BCD} \\ \Leftrightarrow BD^2 &= 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 88,21^\circ \approx 159 \Rightarrow BD \approx 12,6 \end{aligned}$$

Câu 54. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$, $b = 8$, $c = 5$. Tính:

- a) Cạnh a và các góc \hat{B}, \hat{C} .
- b) Diện tích tam giác ABC
- c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường cao AH của tam giác.

Lời giải

a) Cạnh a và các góc \hat{B}, \hat{C} .

Áp dụng định lí cosin, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 129 \Rightarrow a = \sqrt{129}$$

Áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{\sqrt{129}}{\sin 120^\circ} = \frac{8}{\sin B} = \frac{5}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin B = \frac{8 \cdot \sin 120^\circ}{\sqrt{129}} \approx 0,61 \\ \sin C = \frac{5 \cdot \sin 120^\circ}{\sqrt{129}} \approx 0,38 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} \approx 37,59^\circ \\ \hat{C} \approx 22,41^\circ \end{cases}$$

b) Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = 10\sqrt{3}$$

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp và đường cao AH của tam giác.

$$+) \text{ Theo định lí sin, ta có: } R = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{129}}{\sin 120^\circ} = 2\sqrt{43}$$

+) Đường cao AH của tam giác bằng:

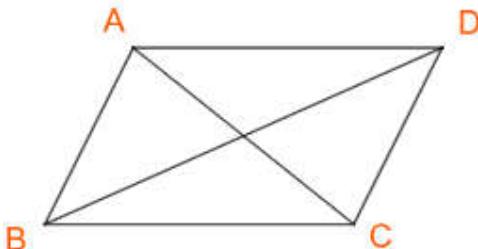
$$AH = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 10\sqrt{3}}{\sqrt{129}} = \frac{20\sqrt{43}}{43}$$

Câu 55. Cho hình bình hành $ABCD$

$$a) \text{ Chứng minh } 2(AB^2 + BC^2) = AC^2 + BD^2$$

b) Cho $AB = 4, BC = 5, BD = 7$. Tính AC .

Lời giải



a) Áp dụng định lí cosin ta có:

$$\begin{cases} AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B \\ BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A \end{cases}$$

$$\text{Mà } AD = BC; \cos A = \cos(180^\circ - B) = -\cos B$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos A \\ BD^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A \end{cases}$$

$$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$$

$$b) \text{ Theo câu a, ta suy ra: } AC^2 = 2(AB^2 + BC^2) - BD^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 2(4^2 + 5^2) - 7^2 = 33 \Rightarrow AC = \sqrt{33}$$

Câu 56. Cho tam giác ABC có $a = 15, b = 20, c = 25$.

a) Tính diện tích tam giác ABC

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{15+20+25}{2} = 30$$

Áp dụng công thức heron, ta có:

$$S = \sqrt{30 \cdot (30-15) \cdot (30-20) \cdot (30-25)} = 150$$

$$b) \text{ Ta có: } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{15 \cdot 20 \cdot 25}{4 \cdot 150} = 12,5.$$

Câu 57. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng: $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$

Lời giải

Áp dụng hệ quả của định lí sin và định lí cosin, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R} \text{ và } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} : \frac{a}{2R} = R \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}$$

Tương tự ta có: $\cot B = R \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{abc}$ và $\cot C = R \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C &= \frac{R}{abc} \left[(b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2) \right] \\ &= \frac{R}{abc} (2b^2 + 2c^2 + 2a^2 - a^2 - c^2 - b^2) = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc} \end{aligned}$$

Câu 58. Cho tam giác ABC với ba cạnh là a, b, c . Chứng minh rằng:

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$$

Lời giải

Áp dụng định lí cosin ta có: $\frac{\cos A}{a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}; \frac{\cos B}{b} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2abc}; \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2abc}$.

$$\Rightarrow \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}.$$

Câu 59. Cho tam giác ABC . Biết $a = 24; b = 36; \hat{C} = 52^\circ$. Tính cạnh c và hai góc \hat{A}, \hat{B} .

Lời giải

Áp dụng định lí cosin: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 24^2 + 36^2 - 2 \cdot 24 \cdot 36 \cdot \cos 52^\circ \approx 808,14 \Rightarrow c \approx 28,43$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{24}{\sin A} = \frac{36}{\sin B} = \frac{28,43}{\sin 52^\circ}$

$$\Rightarrow \sin A \approx \frac{24 \cdot \sin 52^\circ}{28,43} \approx 0,665; \sin B \approx \frac{36 \cdot \sin 52^\circ}{28,43} \approx 0,998 \Rightarrow \hat{A} \approx 41^\circ 40' 56'', \hat{B} \approx 86^\circ 22' 32''$$

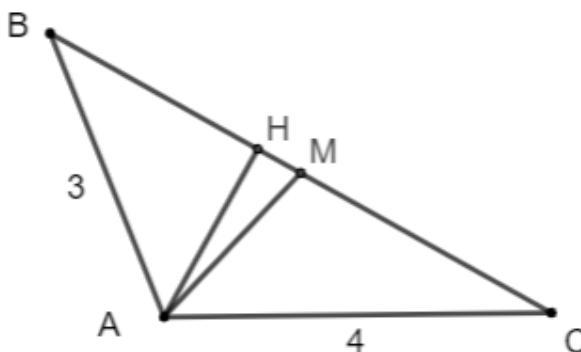
Câu 60. Cho tam giác ABC không vuông. Chứng minh rằng: $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{\tan A}{\tan B} = \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} \cdot \frac{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}}{\frac{b}{2R}} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}$.

Câu 61. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, \widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

- a) Độ dài cạnh BC và độ lớn góc B ;
- b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp;
- c) Diện tích của tam giác;
- d) Độ dài đường cao xuất phát từ A ;

Lời giải

a) Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 9 + 16 - (-12) = 37.$$

Suy ra: $BC = \sqrt{37} \approx 6$

$$+ \text{Ta có: } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{3^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 6} = \frac{29}{36}. \text{ Suy ra } \hat{B} \approx 36^\circ.$$

b) Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$

$$\text{Suy ra: } R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{6}{2 \cdot \sin 120^\circ} = 2\sqrt{3} \approx 3$$

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R \approx 3$.

$$c) \text{ Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = 3\sqrt{3} \approx 5$$

d) Kẻ đường cao AH .

$$\text{Ta có diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S = \frac{1}{2} AH \cdot BC. \text{ Suy ra: } AH = \frac{2S}{BC} = \frac{2.5}{6} \approx 2.$$

Câu 62. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = (\sin 20^\circ + \sin 70^\circ)^2 + (\cos 20^\circ + \cos 110^\circ)^2$$

$$B = \tan 20^\circ + \cot 20^\circ + \tan 110^\circ + \cot 110^\circ.$$

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (\sin 20^\circ + \sin 70^\circ)^2 + (\cos 20^\circ + \cos 110^\circ)^2 \\ &= [\sin(90^\circ - 70^\circ) + \sin 70^\circ]^2 + [\cos(90^\circ - 70^\circ) + \cos(180^\circ - 70^\circ)]^2 \\ &= (\cos 70^\circ + \sin 70^\circ)^2 + [\sin 70^\circ + (-\cos 70^\circ)]^2 = (\cos 70^\circ + \sin 70^\circ)^2 + (\sin 70^\circ - \cos 70^\circ)^2 \\ &= \cos^2 70^\circ + 2 \cdot \cos 70^\circ \cdot \sin 70^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 70^\circ - 2 \cdot \sin 70^\circ \cdot \cos 70^\circ + \cos^2 70^\circ \\ &= 2(\cos^2 70^\circ + \sin^2 70^\circ) = 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Vậy $A = 2$.

+ Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \tan 20^\circ + \cot 20^\circ + \tan 110^\circ + \cot 110^\circ \\ &= \tan(90^\circ - 70^\circ) + \cot(90^\circ - 70^\circ) + \tan(180^\circ - 70^\circ) + \cot(180^\circ - 70^\circ) \\ &= \cot 70^\circ + \tan 70^\circ + (-\tan 70^\circ) + (-\cot 70^\circ) = (\cot 70^\circ - \cot 70^\circ) + (\tan 70^\circ - \tan 70^\circ) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Vậy $B = 0$.

Câu 63. Cho α thoả mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $\cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha, \sin(90^\circ - \alpha), \cos(90^\circ - \alpha)$,

$\sin(180^\circ - \alpha), \cos(180^\circ - \alpha)$ trong các trường hợp sau:

a) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

b) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

$$a) \text{ Nếu } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ thì } \cos \alpha > 0 \text{ nên } \cos \alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3}.$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{4}{5}, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = -\frac{4}{5}.$$

b) Nếu $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ thì $\cos \alpha < 0$ nên $\cos \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5} : \frac{-4}{5} = \frac{-3}{4}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{-4}{3}.$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{-4}{5}, \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

Câu 64. Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 6, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị):

- a) Độ dài cạnh BC và độ lớn góc B ;
- b) Bán kính đường tròn ngoại tiếp R ;
- c) Diện tích của tam giác ABC ;
- d) Độ dài đường cao xuất phát từ A ;

Lời giải

a) Áp dụng định lí cosin, ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$, tức là $BC^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 28 \Rightarrow BC = 2\sqrt{7}$.

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot BA \cdot BC} = \frac{4^2 + (2\sqrt{7})^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 79^\circ.$$

$$b) \text{Áp dụng định lí sin, ta có: } R = \frac{BC}{2 \sin \widehat{BAC}} = \frac{2\sqrt{7}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \approx 3.$$

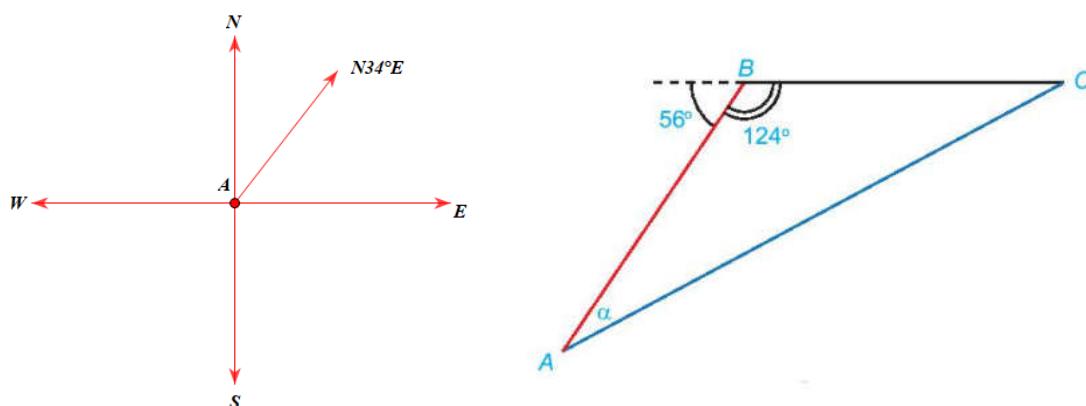
c) Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ = 6\sqrt{3} \approx 10.$$

d) Gọi h_a là độ dài đường cao xuất phát từ A , ta có: $S = \frac{1}{2} h_a BC$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2S}{BC} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{21}}{7} \approx 4.$$

Câu 65. Trên biển, tàu B ở vị trí cách tàu A $53km$ về hướng $N34^\circ E$. Sau đó, tàu B chuyên động thẳng đều với vận tốc có độ lớn $30km/h$ về hướng đông, đồng thời tàu A chuyên động thẳng đều với vận tốc có độ lớn $50km/h$ để gặp tàu B .



a) Hỏi tàu A cần phải chuyên động theo hướng nào?

b) Với hướng chuyên động đó thì sau bao lâu tàu A gặp tàu B ?

Lời giải

a)

Gọi t (đơn vị: giờ) là thời gian đi cho đến khi hai tàu gặp nhau tại C.

Tàu B đi với vận tốc có độ lớn $30km/h$ nên quãng đường $BC = 30t$

Tàu A đi với vận tốc có độ lớn $50km/h$ nên quãng đường $AC = 50t$

Theo định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin B}$

$$\text{Trong đó: } \begin{cases} a = BC = 30t \\ b = AC = 50t \Rightarrow \frac{30t}{\sin \alpha} = \frac{50t}{\sin 124^\circ} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{30 \cdot \sin 124^\circ}{50t} = \frac{30 \cdot \sin 124^\circ}{50} \approx 0,4974 \\ \hat{B} = 124^\circ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \approx 30^\circ \text{ hoặc } \alpha \approx 150^\circ \text{ (loại)}$$

Vậy tàu A chuyển động theo hướng tạo với vị trí ban đầu của tàu B góc 30° .

b) Xét tam giác ABC, ta có:

$$\hat{B} = 124^\circ; \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{A}) = 180^\circ - (124^\circ + 30^\circ) = 26^\circ$$

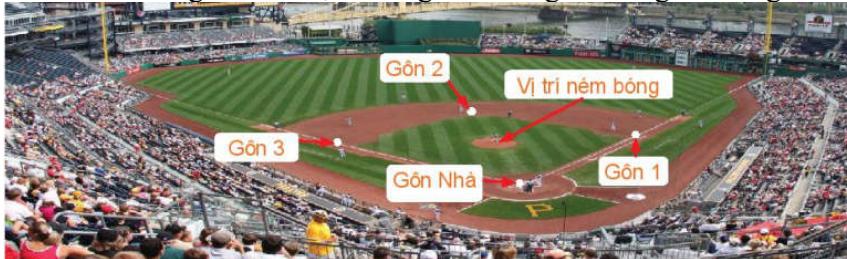
Theo định lí sin, ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow a = \frac{c \cdot \sin A}{\sin C}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} a = BC = 30t \\ c = AB = 53 \\ \hat{A} = 30^\circ; \hat{C} = 26^\circ \end{cases} \Rightarrow 30t = \frac{53 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 26^\circ} \Leftrightarrow 30t \approx 60,45 \Leftrightarrow t \approx 2(h)$$

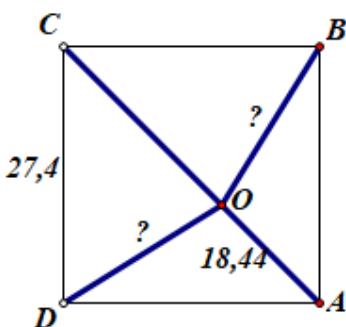
Vậy sau khoảng 2 giờ thì tàu A đuổi kịp tàu B.

Câu 66. Trên sân bóng chày dành cho nam, các vị trí gôn Nhà (Home plate), gôn 1 (First base), gôn 2 (Second base), gôn 3 (Third base) là bốn đỉnh của một hình vuông có cạnh dài 27,4 m. Vị trí đứng ném bóng (Pitcher's mound) nằm trên đường nối gôn Nhà với gôn 2, và cách gôn Nhà 18,44 m. Tính các khoảng cách từ vị trí đứng ném bóng tới các gôn 1 và gôn 3.



Lời giải

Kí hiệu gôn Nhà, gôn 1, gôn 2, gôn 3 và vị trí ném bóng lần lượt là các điểm A, B, C, D, O như hình vẽ.



$$\text{Ta có: } CD = 27,4 \Rightarrow AC = CD \cdot \sqrt{2} = 27,4 \cdot \sqrt{2} \approx 38,75$$

$$\Rightarrow OC = AC - OA \approx 38,75 - 18,44 = 20,31$$

Xét tam giác OCD ta có:

$$\text{Định lí cos: } OD^2 = CD^2 + CO^2 - 2 \cdot CD \cdot CO \cdot \cos C$$

$$\text{Trong đó } \begin{cases} CD = 27,4 \\ CO = 20,31 \\ \hat{C} = 45^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow OD^2 = 27,4^2 + 20,31^2 - 2 \cdot 27,4 \cdot 20,31 \cdot \cos 45^\circ \Leftrightarrow OD^2 \approx 376,255 \Leftrightarrow OD \approx 19,4(m)$$

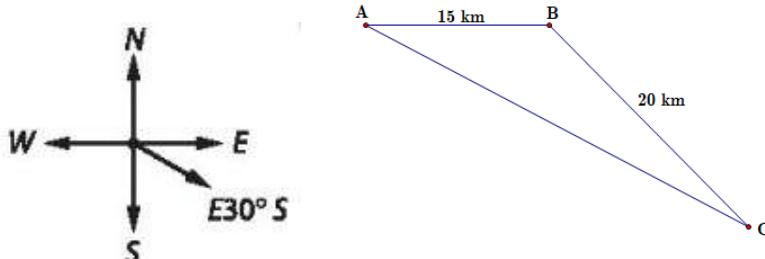
Dễ thấy $\Delta COB = \Delta COD$ (c.g.c) $\Rightarrow OB = OD = 19,4(m)$

- Câu 67.** Trên biển, một tàu cá xuất phát từ cảng A , chạy về phương đông 15 km tới B , rồi chuyển sang hướng $E30^\circ S$ chạy tiếp 20 km nữa tới đảo C .

- a) Tính khoảng cách từ A tới C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị kilômét).
 b) Xác định hướng từ A tới C (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị độ).

Lời giải

- a) Do ban đầu tàu chạy theo hướng đông từ A tới B , rồi chuyển sang $E30^\circ S$ chạy tới C , nên $\widehat{ABC} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.



Áp dụng định lí cosin ta được $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} \approx 1144,6$ và do đó $AC \approx 34\text{ km}$.

- b) Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta được

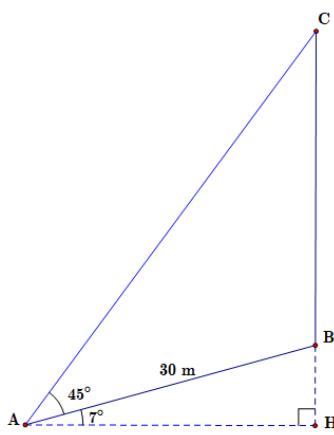
$$\sin \widehat{CAB} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{AC} \cdot BC \approx 0,2941.$$

Suy ra $\widehat{CAB} \approx 17^\circ$. Vậy từ A tới C là hướng $E17^\circ S$.

- Câu 68.** Trên sườn đồi, với độ dốc 12% (độ dốc của sườn đồi được tính bằng tang của góc nhọn tạo bởi sườn đồi với phương nằm ngang) có một cây cao mọc thẳng đứng. Ở phía chân đồi, cách gốc cây 30 m , người ta nhìn ngọn cây dưới một góc 45° so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của cây đó (làm tròn đến hàng đơn vị, theo đơn vị mét).

Lời giải

Coi người quan sát từ điểm A cách gốc cây B một khoảng bằng 30 m , nhìn ngọn cây C dưới góc 45° .



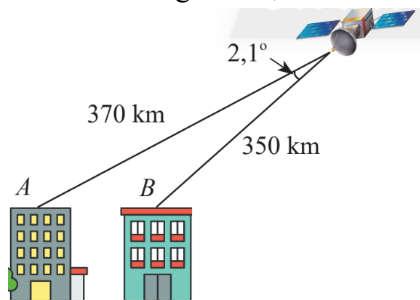
Do sườn đồi có độ dốc 12% , nên sườn đồi tạo với phương nằm ngang một góc $\widehat{BAH} \approx 7^\circ$.

Từ đó $\widehat{BAC} = \widehat{HAC} - \widehat{HAB} \approx 38^\circ$ và $\widehat{BCA} = 45^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC , ta được

$$BC = \frac{AB}{\sin BCA} \cdot \sin \widehat{BAC} = 26(m)$$

- Câu 69.** Tính khoảng cách AB giữa hai nóc tòa cao ốc. Cho biết khoảng cách từ hai điểm đó đến một vệ tinh viễn thông lần lượt là 370 km, 350 km và góc nhìn từ vệ tinh đến A và B là $2,1^\circ$.



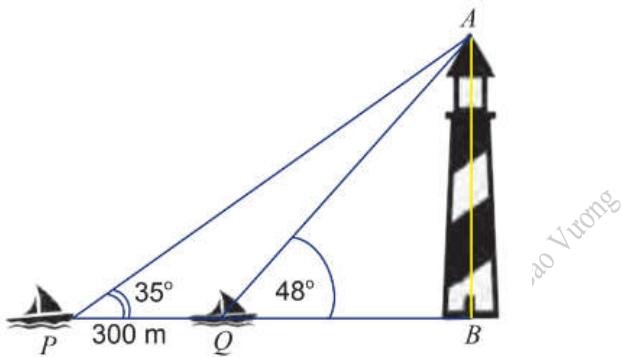
Lời giải

Áp dụng định lí cosin, ta có:

$$AB^2 = 370^2 + 350^2 - 2 \cdot 370 \cdot 350 \cdot \cos 2,1^\circ \Rightarrow AB \approx 23,96(\text{km})$$

Vậy khoảng cách giữa hai tòa nhà là 23,96 km.

- Câu 70.** Hai chiếc tàu thủy P và Q cách nhau 300m và thẳng hàng với chân B của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển (Hình). Từ P và Q , người ta nhìn thấy tháp hải đăng AB dưới các góc $\widehat{BPA} = 35^\circ$ và $\widehat{BQA} = 48^\circ$. Tính chiều cao của tháp hải đăng đó.



Lời giải

Xét tam giác APB và AQB , ta có:

$$\tan 35^\circ = \frac{AB}{PB} = \frac{AB}{300+QB}; \tan 48^\circ = \frac{AB}{QB}$$

$$\Rightarrow AB = \tan 35^\circ \cdot (300+QB) = \tan 48^\circ \cdot QB$$

$$\Leftrightarrow \tan 35^\circ \cdot 300 + \tan 35^\circ \cdot QB = \tan 48^\circ \cdot QB$$

$$\Leftrightarrow \tan 35^\circ \cdot 300 = (\tan 48^\circ - \tan 35^\circ) \cdot QB$$

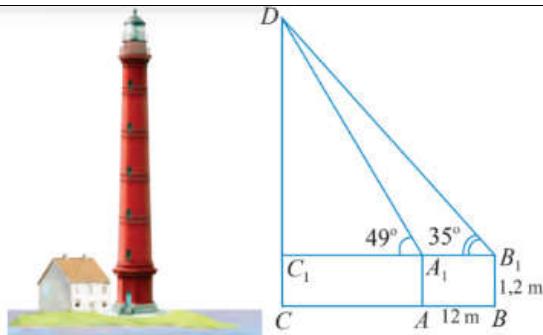
$$\Leftrightarrow QB = \frac{\tan 35^\circ \cdot 300}{\tan 48^\circ - \tan 35^\circ}$$

$$\text{Mà } AB = \tan 48^\circ \cdot QB$$

$$\Rightarrow AB = \tan 48^\circ \cdot \frac{\tan 35^\circ \cdot 300}{\tan 48^\circ - \tan 35^\circ} \approx 568,5(m)$$

Vậy tháp hải đăng cao khoảng 568,5 m.

- Câu 71.** Muốn đo chiều cao của một ngọn tháp, người ta lấy hai điểm A, B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12m$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của hai giác kế có chiều cao là $h = 1,2m$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được $\widehat{DA_1C_1} = 49^\circ, \widehat{DB_1C_1} = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp.

**Lời giải**

Ta có:

$$\widehat{DA_1C_1} = \widehat{A_1DB_1} + \widehat{DB_1A_1} \Rightarrow \widehat{A_1DB_1} = 49^\circ - 35^\circ = 14^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác A_1DB_1 , ta có:

$$\frac{A_1D}{\sin B_1} = \frac{A_1B_1}{\sin D} \Leftrightarrow \frac{A_1D}{\sin 35^\circ} = \frac{12}{\sin 14^\circ}$$

$$\Rightarrow A_1D = \sin 35^\circ \cdot \frac{12}{\sin 14^\circ} \approx 28,45$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác A_1DC_1 , ta có:

$$\frac{A_1D}{\sin C_1} = \frac{C_1D}{\sin A_1} \Leftrightarrow \frac{28,45}{\sin 90^\circ} = \frac{C_1D}{\sin 49^\circ}$$

$$\Rightarrow C_1D = \sin 49^\circ \cdot \frac{28,45}{\sin 90^\circ} \approx 21,47$$

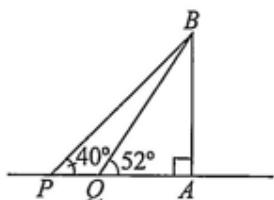
Do đó, chiều cao CD của tháp là: $21,47 + 1,2 = 22,67(m)$

- Câu 72.** Hai chiếc tàu thuỷ P và Q cách nhau $50m$. Từ P và Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển, người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $\widehat{BPA} = 40^\circ$ và $\widehat{BQA} = 52^\circ$. Tính chiều cao của tháp hải đăng đó.

Lời giải

Ta có: $\widehat{BPA} = 40^\circ$, $\widehat{BQA} = 52^\circ$, $\widehat{BAP} = 90^\circ$, $PQ = 50m$.

$$\Rightarrow \widehat{BQP} = 128^\circ, \widehat{PBQ} = 180^\circ - 128^\circ - 40^\circ = 12^\circ.$$



Hình 1

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{PQ}{\sin B} = \frac{BQ}{\sin P} \Rightarrow BQ = \frac{PQ \sin B}{\sin P} \Rightarrow AB = BQ \cdot \sin 52^\circ = 154$ a)

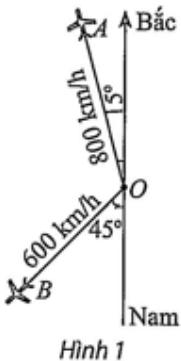
$$S = \frac{1}{2}bc \sin A \approx 29,63$$

b) Áp dụng định lí cosin, ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a \approx 12,44$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $R = \frac{a}{2 \cdot \sin A} \approx \frac{12,44}{2 \cdot \sin 99^\circ} \approx 6,30$.

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{a+b+c} \approx \frac{2 \cdot 29,63}{6+10+12,44} \approx 2,08.$$

- Câu 73.** Hai máy bay rời một sân bay cùng một lúc. Một chiếc bay với vận tốc $800km/h$ theo hướng lệch so với hướng bắc 15° về phía tây. Chiếc còn lại bay theo hướng lệch so với hướng nam 45° về phía tây với vận tốc $600km/h$ (Hình 1). Hỏi hai máy bay đó cách nhau bao xa sau 3 giờ?



Hình 1

Lời giải

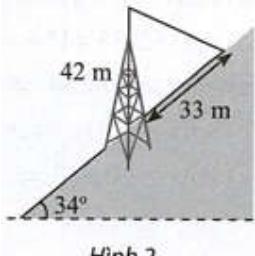
Ta có: $\widehat{AOB} = 180^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 120^\circ$.

Áp dụng định lí cosin, ta có:

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB}} = \sqrt{2400^2 + 1800^2 - 2 \cdot 2400 \cdot 1800 \cdot \cos 120^\circ} \approx 3650(km)$$

Vậy hai máy bay cách nhau khoảng 3650 km.

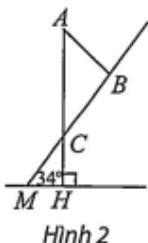
- Câu 74.** Một tháp viễn thông cao 42 m được dựng đứng trên một sườn dốc 34° so với phương ngang. Từ đỉnh tháp người ta neo một sợi cáp xuống một điểm trên sườn dốc cách chân tháp 33 m như Hình 2. Tính chiều dài của sợi dây cáp đó.



Hình 2

Lời giải

Ta có: $AC = 42, BC = 33, \widehat{CMH} = 34^\circ, \widehat{CHM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{MCH} = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ$.

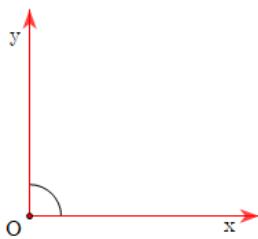


Hình 2

Áp dụng định lí cosin, ta có: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C \Rightarrow AB \approx 36,1(m)$.

- Câu 75.** Không dùng thước đo góc, làm thế nào để biết số đo góc đó.

Bạn Hoài vẽ góc xOy và đó bạn Đông làm thế nào có thể biết được số đo của góc này khi không có thước đo góc. Bạn Đông làm như sau:

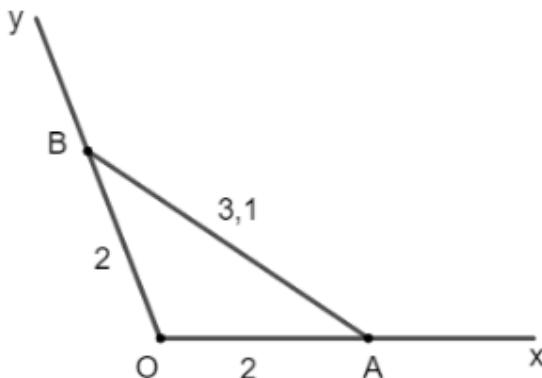


- Chọn các điểm A, B lần lượt thuộc các tia Ox và Oy sao cho $OA = OB = 2\text{ cm}$;
- Đo độ dài đoạn thẳng AB được $AB = 3,1\text{ cm}$.

Từ các dữ kiện trên bạn Đông tính được $\cos \widehat{xOy}$, từ đó suy ra độ lõn góc xOy .

Em hãy cho biết số đo góc xOy ở Hình bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải



Áp dụng hệ quả của định lí cosin trong tam giác ABO ta có:

$$\cos O = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{2^2 + 2^2 - (3,1)^2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{161}{800}$$

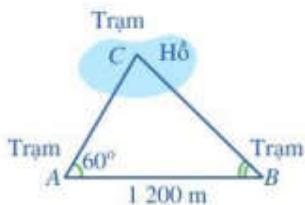
Do đó: $\hat{O} \approx 102^\circ$.

Vậy từ các dữ kiện bạn Đông tính được, ta suy ra $\widehat{xOy} \approx 102^\circ$.

Câu 76. Có hai trạm quan sát A và B ven hồ và một trạm quan sát C ở giữa hồ. Để tính khoảng cách từ A và từ B đến C , người ta làm như sau (Hình):

- Đo góc BAC được 60° , đo góc ABC được 45° ;
- Đo khoảng cách AB được $1200m$.

Khoảng cách từ trạm C đến các trạm A và B bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Ba vị trí A, B, C tạo thành 3 đỉnh của tam giác ABC .

Ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ (định lí tổng ba góc trong tam giác ABC)

$$\text{Suy ra } \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$

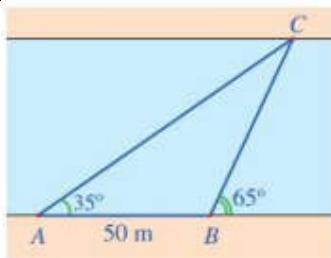
$$\text{Do đó: } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{1200 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 878 \text{ (m)};$$

$$BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{1200 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} \approx 1076 \text{ (m)}$$

Vậy khoảng cách từ trạm C đến trạm A khoảng $878m$ và từ trạm C đến trạm B khoảng $1076m$.

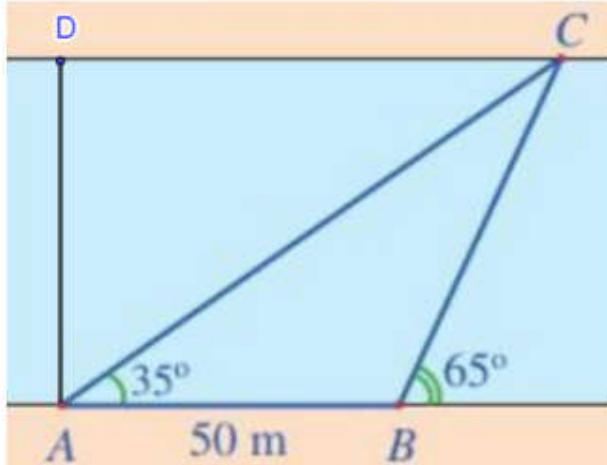
Câu 77. Một người đứng ở bờ sông, muốn đo độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí đang đứng (khúc sông tương đối thẳng, có thể xem hai bờ song song với nhau).

Từ vị trí đang đứng A , người đó đo được góc nghiêng $\alpha = 35^\circ$ so với bờ sông tới một vị trí C quan sát được ở phía bờ bên kia. Sau đó di chuyển dọc bờ sông đến vị trí B cách A một khoảng $d = 50m$ và tiếp tục đo được góc nghiêng $\beta = 65^\circ$ so với bờ bên kia tới vị trí C đã chọn (Hình).



Hỏi độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí người đó đang đứng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mươi)?

Lời giải



Dựng AD vuông góc với hai bên bờ sông, khi đó AD là độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí của người đó đang đứng. Ta cần tính khoảng cách AD .

Xét tam giác ABC ta có: $\widehat{CAB} + \widehat{ACB} = 65^\circ$ (tính chất góc ngoài tại đỉnh B của tam giác)

$$\widehat{ACB} = 65^\circ - \widehat{CAB} = 65^\circ - 35^\circ = 30^\circ. Lại có \widehat{ABC} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có: $\frac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}}$.

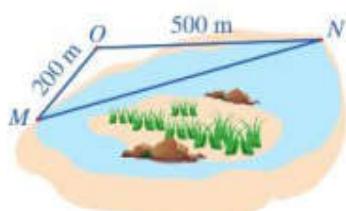
$$\text{Suy ra } AC = \frac{AB \cdot \sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{50 \cdot \sin 115^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 90,6. \text{ Ta có: } \widehat{DAC} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$

Tam giác ADC vuông tại D nên $\cos \widehat{DAC} = \frac{AD}{AC}$

$$\Rightarrow AD = AC \cdot \cos \widehat{DAC} = 90,6 \cdot \cos 55^\circ \approx 52 (m).$$

Vậy độ rộng của khúc sông chảy qua vị trí người đó đang đứng là $52 m$.

Câu 78. Để đo khoảng cách giữa hai vị trí M, N ở hai phía ốc đảo, người ta chọn vị trí O bên ngoài ốc đảo sao cho: O không thuộc đường thẳng MN ; các khoảng cách OM, ON và góc MON là đo được (Hình).



Sau khi đo, ta có $OM = 200 m, ON = 500 m, \widehat{MON} = 135^\circ$. Khoảng cách giữa hai vị trí M, N là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Ba vị trí O, M, N tạo thành 3 đỉnh của tam giác

Tam giác OMN có $OM = 200 m, ON = 500 m$ và $\widehat{MON} = 135^\circ$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác OMN ta có:

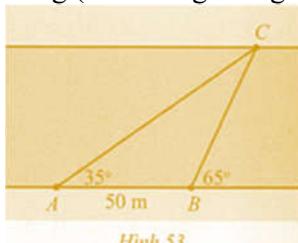
$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos \widehat{MON} = 200^2 + 500^2 - 2 \cdot 200 \cdot 500 \cdot \cos 135^\circ$$

$$\approx 431421$$

Suy ra: $MN \approx 657 m$.

Vậy khoảng cách giữa hai vị trí M, n khoảng $657 m$.

- Câu 79.** Một người quan sát đứng ở bờ sông muốn đo độ rộng của khúc sông chỗ chảy qua vị trí đang đứng (khúc sông tương đối thẳng, có thể xem hai bờ song song với nhau).



Hình 53

Từ vị trí đang đứng A , người đó đo được góc nghiêng $\alpha = 35^\circ$ so với bờ sông tới một vị trí C quan sát được ở phía bờ bên kia. Sau đó di chuyển dọc bờ sông đến vị trí B cách A một khoảng $d = 50 m$ và tiếp tục đo được góc nghiêng $\beta = 65^\circ$ so với bờ sông tới vị trí C đã chọn (Hình 53). Hỏi độ rộng của con sông chỗ chảy qua vị trí người quan sát đang đứng là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ; \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{ABC} = 180^\circ - 35^\circ - 115^\circ = 30^\circ.$$

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{AB \sin A}{\sin C} = \frac{50 \sin 35^\circ}{\sin 30^\circ} = 100 \sin 35^\circ$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng AB , ta có:

Độ rộng của con sông là: $CH = CB \sin 65^\circ = 100 \sin 35^\circ \cdot \sin 65^\circ \approx 51,98(m)$.

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ↗ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** ↗ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ↗ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: **Nguyễn Vương**

↗ https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUBt3nwJfA?view_as=subscriber

↗ Tài nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>