BÀI 6. ĐỊNH LÍ CÔSIN. ĐỊNH LÍ SIN

• |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lí côsin

Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$. Khi đó:

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

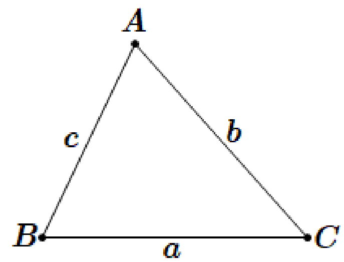
$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

Ta có thể suy ra hệ quả sau

Hệ quả 1.

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



2. Định lí sin

Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Khi đó:

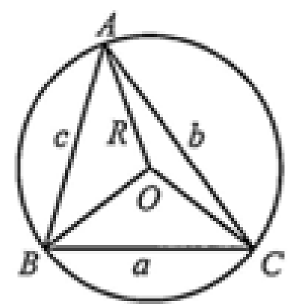
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

Từ định lí sin, ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả

$a=2R\sin A;\quad b=2R\sin B;\quad c=2R\sin C$

$\sin A=\dfrac{a}{2R};\quad \sin B=\dfrac{b}{2R};\quad \sin C=\dfrac{c}{2R}.$



3. Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC. Ta kí hiệu: - $h_a h_b, h_c$ là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB. - R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. - r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. - p là nửa chu vi tam giác. - S là diện tích tam giác. Ta có các **công thức tính diện tích tam giác** bên:	1) $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$ 2) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$ 3) $S=\frac{abc}{4R}$; 4) $S=pr$; 5) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Heron).

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tính toán các yếu tố trong một tam giác

Phương pháp

Tùy theo giả thiết của bài toán, để tìm các yếu tố của tam giác ta có thể:

1) Áp dụng trực tiếp các định lí côsin, định lí sin, công thức diện tích… để tính.

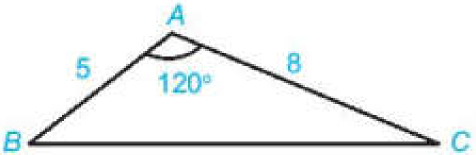
2) Chọn một hệ thức thích hợp cho phép tìm được một số yếu tố trung gian cần thiết, từ đó ta tìm được yếu tố cần tìm.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=120^\circ$ và $AB=5$, $AC=8$. Tính độ dài cạnh BC.

Lời giải

Áp dụng Định lí côsin cho tam giác ABC, ta có:



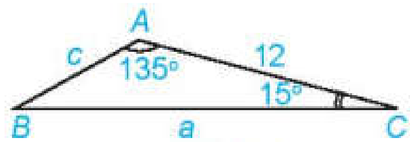
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ$

$= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 129$. Vậy $BC = \sqrt{129}$.

Câu 2. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 135^\circ, \widehat{C} = 15^\circ$ và $b = 12$.

Tính a, c, R và số đo góc B.

Lời giải



Ta có: $\widehat{B} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180^\circ - \left(135^\circ + 15^\circ\right) = 30^\circ$.

Áp dụng Định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin 135^\circ} = \dfrac{12}{\sin 30^\circ} = \dfrac{c}{\sin 15^\circ} = 2R$.

Suy ra $a = \dfrac{12}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 135^\circ = 12\sqrt{2}; c = \dfrac{12}{\sin 30^\circ} \cdot \sin 15^\circ = 24 \sin 15^\circ (\approx 6,21); R = \dfrac{12}{2\sin 30^\circ} = 12$.

Câu 3. Tính diện tích S của tam giác ABC có $c = 4, b = 6, \widehat{A} = 150^\circ$.

Lời giải

Ta có: $S = \dfrac{1}{2} bc \sin A = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 150^\circ = 6$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có $a = 13, b = 14, c = 15$.

a) Tinh $\sin A$.

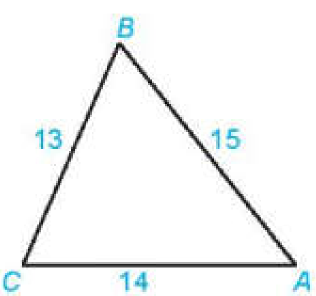
b) Tính diện tích S bằng hai cách khác nhau.

Lời giải

a) Áp dụng Định lí côsin, ta có:

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{14^2 + 15^2 - 13^2}{420} = 0,6$.

Do đó $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = 0,8$.



b) Ta có $S = \dfrac{1}{2} bc \sin A = 84$.

Áp dụng Công thức Heron, ta cũng có thể tính S theo cách thứ hai sau:

Tam giác ABC có nửa chu vi là: $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$.

Khi đó

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$

Câu 5. Cho tam giác ABC có $a=6, b=5, c=8$. Tính $\cos A, S, r$.

Lời giải

Từ định lí cosin ta suy ra $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+8^2-6^2}{2.5.8}=\frac{53}{80}$

Tam giác ABC có nửa chu vi là: $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{6+5+8}{2}=9,5$.

Theo công thức Herong ta có:

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{9,5\cdot(9,5-6)\cdot(9,5-5)\cdot(9,5-8)}\approx 14,98$

Lại có: $S=pr\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{14,98}{9,5}=1,577$.

Vậy $\cos A=\frac{53}{80}; S\approx 14,98$ và $r=1,577$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có $a=10, \hat{A}=45^\circ, \hat{B}=70^\circ$. Tính R, b, c.

Lời giải

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\frac{a}{2\sin A};\quad b=\frac{a\cdot\sin B}{\sin A}$

Mà $a=10, \hat{A}=45^\circ, \hat{B}=70^\circ$

$\Rightarrow R=\frac{10}{2\sin 45^\circ}=5\sqrt{2};\quad b=\frac{a\cdot\sin 70^\circ}{\sin 45^\circ}\approx 13,29$

Mặt khác: $\hat{A}=45^\circ, \hat{B}=70^\circ\Rightarrow \hat{C}=65^\circ$

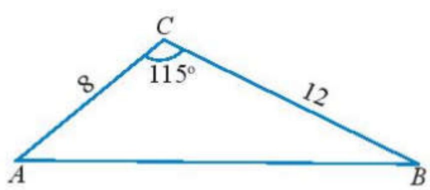
Từ định lí sin ta suy ra: $c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{10\cdot\sin 65^\circ}{\sin 45^\circ}\approx 12,82$.

Vậy $R=5\sqrt{2};\quad b\approx 13,29; c\approx 12,82$.

Câu 7. Cho tam giác ABC có $\hat{C}=115°, AC=8$ và $BC=12$. Tính độ dài cạnh AB và các góc A, B của tam giác đó.

Lời giải

Theo định lí côsin, ta có:



$AB^2=BC^2+AC^2-2\cdot BC\cdot AC\cdot\cos C$

$=12^2+8^2-2\cdot 12\cdot 8\cdot\cos 115^\circ\approx 289,14$.

Vậy $AB\approx\sqrt{289,14}\approx 17$.

Theo hệ quả của định lí côsin, ta có $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}\approx\frac{17^2+8^2-12^2}{2\cdot 17.8}\approx 0,7684$.

Suy ra $\hat{A}\approx 39°47', \hat{B}=180°-(\hat{A}+\hat{C})\approx 25°13'$

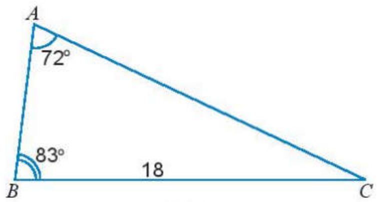
Câu 8. Cho tam giác ABC có $\hat{A}=72°, \hat{B}=83°, BC=18$. Tính độ dài các cạnh AC, AB và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Lời giải

Đặt $a=BC, b=AC, c=AB$.

Ta có: $a=18, \hat{C}=180°-\left(72°+83°\right)=25°$.

Áp dụng định li sin, ta có $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.



Suy ra:

$AC = b = \dfrac{a\sin B}{\sin A} = \dfrac{18\cdot\sin 83^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 18,8$

$AB = c = \dfrac{a\sin C}{\sin A} = \dfrac{18\cdot\sin 25^\circ}{\sin 72^\circ} \approx 8$

$R = \dfrac{a}{2\cdot\sin A} = \dfrac{18}{2\cdot\sin 72^\circ} \approx 9,5$

Câu 9. Cho tam giác ABC có $a = 2\sqrt{3}, b = 2$ và $\hat{C} = 30°$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải

a) Áp dụng công thức $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$, ta có:

$S = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\cdot\sin 30° = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\cdot\dfrac{1}{2} = \sqrt{3} \approx 1,7.$

b) Áp dụng định lí côsin, ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 12 + 4 - 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4$.

Suy ra $c = 2$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $R = \dfrac{c}{2\cdot\sin C} = \dfrac{2}{2\cdot\sin 30°} = \dfrac{2}{2\cdot\dfrac{1}{2}} = 2$.

Câu 10. Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 30, b = 26, c = 28$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải

a) Ta có $p = \dfrac{1}{2}\cdot(30 + 26 + 28) = 42$.

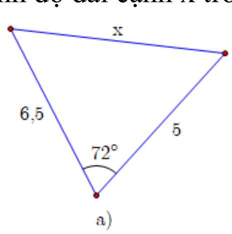
Áp dụng công thức Heron, ta có:

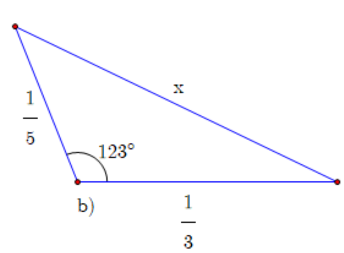
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{42(42-30)(42-26)(42-28)} = 336.$

b) Ta có $S = \dfrac{abc}{4R}$, suy ra $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{30\cdot 26\cdot 28}{4.336} = 16,25$.

Ta lại có $S = pr$, suy ra $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{336}{42} = 8$.

Câu 11. Tính độ dài cạnh x trong các tam giác sau





Lời giải

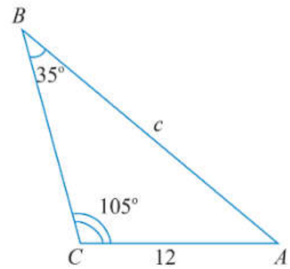
a) Áp dụng định lí cosin, ta có

$x^2 = 6,5^2 + 5^2 - 2.6,5\cdot 5\cdot \cos 72^o \approx 47,16 \Leftrightarrow x \approx 6,87$

b) Áp dụng định lí cosin, ta có:

$$x^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cos 123^o \approx 0,224 \Leftrightarrow x \approx 0,473$$

Câu 12. Tính độ dài cạnh c trong tam giác ABC ở hình



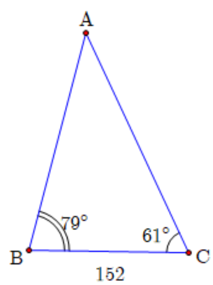
Lời giải

Áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{c}{\sin 105^\circ} = \frac{12}{\sin 35^\circ} \Rightarrow c = \frac{12\cdot\sin 105^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 3,37$$

Câu 13. Cho tam giác ABC, biết cạnh $a = 152, \hat{B} = 79^\circ, \hat{C} = 61^\circ$. Tính các góc, các cạnh còn lại và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

Lời giải



Đặt $AB = c, AC = b, BC = a$.

Ta có: $a = 152; \hat{A} = 180^\circ - \left(79^\circ + 61^\circ\right) = 40^\circ$

Áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Suy ra:

$$AC = b = \frac{a\cdot\sin B}{\sin A} = \frac{152\cdot\sin 79^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 232,13$$

$$AB = c = \frac{a\cdot\sin C}{\sin A} = \frac{152\cdot\sin 61^\circ}{\sin 40^\circ} \approx 206,82$$

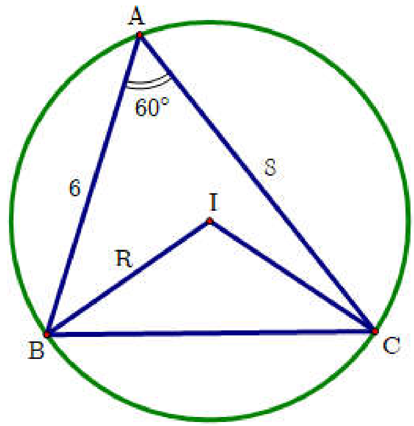
$$R = \frac{a}{\sin A} = \frac{152}{\sin 40^\circ} \approx 236,47$$

Câu 14. Cho tam giác ABC có $AB = 6, AC = 8$ và $\hat{A} = 60^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính diện tích tam giác IBC.

Lời giải



Đặt $a = BC, b = AC, c = AB$.

a) Áp dụng công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, ta có:

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 8.6\cdot\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}$

b) Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta được:

$BC^2 = a^2 = 8^2 + 6^2 - 2.8.6\cdot\cos 60^\circ = 52 \Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$

Xét tam giác IBC ta có:

Góc $\widehat{BIC} = 2.\widehat{BAC} = 120^\circ$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$IB = IC = R = \frac{a}{\sin A} = \frac{2\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{39}}{3} \Rightarrow S_{IBC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{39}}{3}\cdot\frac{4\sqrt{39}}{3}\sin 120^\circ = \frac{52\sqrt{3}}{3}$

Câu 15. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và độ dài ba cạnh AB, BC, CA lần lượt là $15, 18, 27$.

a) Tính diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác GBC.

Lời giải

a) Đặt $a = BC, b = AC, c = AB$.

Ta có: $p = \frac{1}{2}(15 + 18 + 27) = 30$

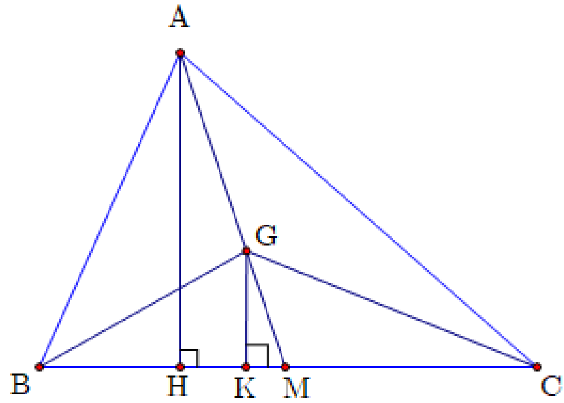
Áp dụng công thức heron, ta có:

$S_{ABC} = \sqrt{30(30-15)(30-18)(30-27)} = 90\sqrt{2}$

Và $r = \frac{S}{p} = \frac{90\sqrt{2}}{30} = 3\sqrt{2}$

b) Gọi, H, K lần lượt là chân đường cao hạ từ A và G xuống BC, M là trung điểm BC.

G là trọng tâm tam giác ABC nên $GM = \frac{1}{3}AM$



$\Rightarrow GK = \dfrac{1}{3} \cdot AH \Rightarrow S_{GBC} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.90\sqrt{2} = 30\sqrt{2}$

Xét tam giác IBC ta có:

Góc $\widehat{BIC} = 2.\widehat{BAC} = 120^{\circ}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$IB = IC = R = \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{2\sqrt{13}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4\sqrt{39}}{3} \Rightarrow S_{IBC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4\sqrt{39}}{3} \cdot \dfrac{4\sqrt{39}}{3} \sin 120^{\circ} = \dfrac{52\sqrt{3}}{3}$

Câu 16. Cho tam giác ABC có $\hat{C} = 120^{\circ}, AC = 6cm$ và $BC = 10cm$. Tính độ dài cạnh AB và các góc A, B của tam giác đó.

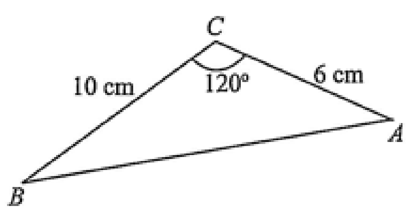
Lời giải

Theo định lí côsin, ta có:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos C$

$= 6^2 + 10^2 - 2.6.10.\cos 120° = 196$

$\Rightarrow AB = \sqrt{196} = 14(cm)$



Hình 1

Theo hệ quả của định lí côsin, ta có: $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB \cdot AC} = \dfrac{14^2 + 6^2 - 10^2}{2.14 \cdot 6} = \dfrac{11}{14}$.

Suy ra $\hat{A} \approx 38^{\circ}12'48''; \hat{B} = 180^{\circ} - (\hat{A} + \hat{C}) \approx 21^{\circ}47'12''$.

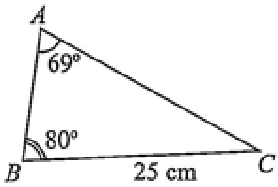
Câu 17. Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 8, b = 15, c = 20$. Tính góc A của tam giác ABC.

Lời giải

Theo hệ quả của định lí côsin, ta có: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c} = \dfrac{15^2 + 20^2 - 8^2}{2 \cdot 15.20} = 0,935$. Suy ra $\hat{A} \approx 20^{\circ}46'19''$.

Câu 18. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 69^{\circ}, \hat{B} = 80^{\circ}$, $BC = 25cm$. Tính độ dài các cạnh AC, AB và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Lời giải



Hình 2

Đặt $a = BC; b = AC; c = AB$.

Ta có: $a = 25\,cm; \hat{C} = 180^\circ - \left(80^\circ + 69^\circ\right) = 31^\circ$.

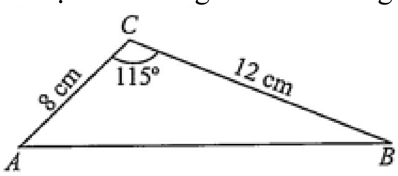
Áp dụng định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Suy ra: $AC = b = \dfrac{a\sin B}{\sin A} = \dfrac{25 \cdot \sin 80^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 26,37(cm)$;

$AB = c = \dfrac{a\sin C}{\sin A} = \dfrac{25 \cdot \sin 31^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 13,79(cm)$

$R = \dfrac{a}{2 \cdot \sin A} = \dfrac{25}{2 \cdot \sin 69^\circ} \approx 13,39(cm)$

Câu 19. Tính diện tích tam giác ABC trong Hình 4.



Hình 4

Lời giải

Diện tích tam giác ABC: $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \sin 115^\circ \approx 43,5\left(cm^2\right)$.

Câu 20. Cho tam giác ABC có cạnh $a = 2\sqrt{3}\,cm, b = 2\,cm$ và $\hat{C} = 30^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Lời giải

a) Diện tích tam giác ABC: $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}\left(cm^2\right)$.

b) Áp dụng định lí côsin, ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C = 12 + 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4$.

Suy ra $c = 2\,cm$.

Áp dụng đinh lí sin, ta có: $R = \dfrac{c}{2 \cdot \sin C} = \dfrac{2}{2 \cdot \sin 30^\circ} = \dfrac{2}{2 \cdot \dfrac{1}{2}} = 2(cm)$.

c) Ta có công thức $S = p \cdot r$.

Suy ra $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{2S}{a+b+c} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2+2} \approx 0,46(cm)$.

Câu 21. Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 15\,cm, b = 13\,cm, c = 14\,cm$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

c) Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Lời giải

a) Ta có $p=\frac{1}{2}(15+13+14)=21(cm)$.

Áp dụng công thức Heron, ta có: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=84\left(cm^2\right)$.

b) Ta có $S=\frac{abc}{4R}$, suy ra $R=\frac{abc}{4S}=\frac{15.13.14}{4.84}=8{,}125(cm)$.

c) Ta có công thức $S=p\cdot r$.

Suy ra $r=\frac{S}{p}=\frac{84}{21}=4(cm)$.

Câu 22. Cho tam giác ABC, biết cạnh $a=75\,cm, \hat{B}=80^\circ, \hat{C}=40^\circ$.

a) Tính các góc, các cạnh còn lại của tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Lời giải

a) Ta có: $a=75\,cm; \hat{A}=180^\circ-\left(80^\circ+40^\circ\right)=60^\circ$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

Suy ra: $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{75\cdot\sin 80^\circ}{\sin 60^\circ}\approx 85{,}29(cm)$.

$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{75\cdot\sin 40^\circ}{\sin 60^\circ}\approx 55{,}67(cm)$.

b) $R=\frac{a}{2\cdot\sin A}=\frac{75}{2\sin 60^\circ}=25\sqrt{3}(cm)$.

Câu 23. Tính góc lớn nhất của tam giác ABC, biết các cạnh là $a=8, b=12, c=6$.

Lời giải

Do b là cạnh lớn nhất nên góc B là góc lớn nhất. Ta có:

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2.a\cdot c}=\frac{8^2+6^2-12^2}{2.8.6}\approx-\frac{11}{24};\Rightarrow \hat{B}\approx 117^\circ 16' 46''$.

Câu 24. Cho tam giác ABC có $a=24\,cm, b=26\,cm, c=30\,cm$.

a) Tính diện tích tam giác ABC.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

Lời giải

a) $p=\frac{1}{2}(a+b+c)=40$. $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{40.16.14.10}=80\sqrt{14}\left(cm^2\right)$.

b) $r=\frac{S}{P}=\frac{80\sqrt{14}}{40}=2\sqrt{14}(cm)$.

Câu 25. Cho tam giác MNP có $MN=10, MP=20$ và $\hat{M}=42^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác MNP.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP. Tính diện tích tam giác ONP.

Lời giải

a) $S=\frac{1}{2}MN\cdot MP\cdot\sin M=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 20\cdot\sin 42^\circ\approx 67$.

b) Ta có: $\widehat{NOP}=2\widehat{NMP}=84^\circ$.

$NP=\sqrt{MN^2+MP^2-2MN\cdot MP\cdot\cos M}=\sqrt{10^2+20^2-2\cdot 10\cdot 20\cdot\cos 42^\circ}$

$\approx 14{,}24.R=\frac{NP}{2\sin M}\approx\frac{14{,}24}{2\cdot\sin 42^\circ}\approx 10{,}64\Rightarrow ON=OP=R\approx 10{,}64$.

Vậy $S_{ONP}=\frac{1}{2}ON\cdot OP\cdot\sin 84^\circ\approx\frac{1}{2}(10{,}64)^2\cdot\sin 84^\circ\approx 56{,}30$.

Câu 26. Cho tam giác ABC có $AB=3, AC=5$ và $\widehat{A}=120°$

a) Tính $\cos A$;
b) Tính độ dài cạnh BC.

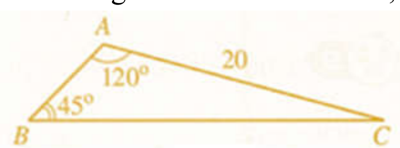
Lời giải

a) Ta có: $\cos A=\cos 120°=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$.

b) Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC ta có:
$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A.$
Thay số ta có:
$BC^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=49.$

Do đó $BC=\sqrt{49}=7$.

Câu 27. Cho tam giác ABC có $\widehat{A}=120^{\circ}, \widehat{B}=45^{\circ}$ và $CA=20$ .Tính:



a) $\sin A$;
b) Độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải

a) Ta có: $\sin A=\sin 120^{\circ}=\sin 60^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có: $\frac{BC}{\sin A}=\frac{CA}{\sin B}=2R$.

Do đó $BC=\frac{CA\cdot\sin A}{\sin B}=\frac{20\cdot\sin 120^{\circ}}{\sin 45^{\circ}}=10\sqrt{6}$;

$R=\frac{CA}{2\cdot\sin B}=\frac{20}{2\cdot\sin 45^{\circ}}=10\sqrt{2}$

Câu 28. Cho tam giác ABC có $AB=3,5; AC=7,5; \hat{A}=135^{\circ}$. Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:
$BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos A$
$\Leftrightarrow BC^2=7,5^2+3,5^2-2.7,5.3,5\cdot\cos 135^{\circ}\Leftrightarrow BC^2\approx 105,6$
$\Leftrightarrow BC\approx 10,3$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có: $\frac{BC}{\sin A}=2R$

$\Rightarrow R=\frac{BC}{2\cdot\sin A}=\frac{10,3}{2\cdot\sin 135^{\circ}}\approx 7,3$

Câu 29. Cho tam giác ABC có $\hat{B}=75^{\circ}, \hat{C}=45^{\circ}$ và $BC=50$. Tính độ dài cạnh AB.

Lời giải

Ta có: $\hat{B}=75^{\circ}, \hat{C}=45^{\circ}\Rightarrow\hat{A}=180^{\circ}-\left(75^{\circ}+45^{\circ}\right)=60^{\circ}$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow AB=\sin C\cdot\frac{BC}{\sin A}=\sin 45^{\circ}\cdot\frac{50}{\sin 60^{\circ}}\approx 40,8$

Vậy độ dài cạnh AB là 40,8.

Câu 30. Cho tam giác ABC có $AB=6, AC=7, BC=8$. Tính $\cos A, \sin A$ và bán kính R của đường trong ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:

$BC^2=AC^2+AB^2-2\cdot AC\cdot AB\cdot\cos A$

$\Rightarrow \cos A=\frac{AC^2+AB^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\frac{7^2+6^2-8^2}{2.7.6}=\frac{1}{4}$

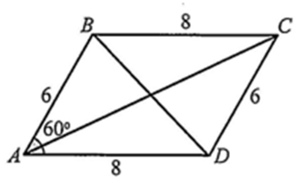
Lại có: $\sin^2 A+\cos^2 A=1\Rightarrow \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$ (do $0^{\circ}<A\leq 90^{\circ}$)

$\Rightarrow \sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có: $\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\frac{BC}{2\cdot\sin A}=\frac{8}{2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{16\sqrt{15}}{15}$.

Vậy $\cos A=\frac{1}{4};\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4};R=\frac{16\sqrt{15}}{15}$.

Câu 31. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=6, AD=8, \widehat{BAD}=60^{\circ}$ (Hình 5). Tính độ dài các đường chéo AC, BD.



Hình 5

Lời giải

Ta có: $\widehat{ABC}=180^{\circ}-\widehat{BAD}=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$. Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$$\begin{aligned}AC^2&=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\widehat{ABC}\\&=6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos 120^{\circ}=148\end{aligned}$$

Suy ra $AC=\sqrt{148}=2\sqrt{37}$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABD ta có:

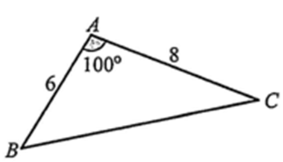
$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\widehat{BAD}=6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos 60^{\circ}=52$.

Suy ra $BD=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

Câu 32. Cho tam giác ABC có $AB=6, AC=8, \hat{A}=100^{\circ}$. Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC (Hình 54) ta có:



Hình 54

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$

$=6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos 100^{\circ}\approx 116,67$.

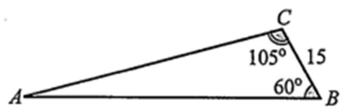
$$2R=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow R\approx\frac{10,8}{2\sin 100^{\circ}}\approx 5,5.$$

Câu 33. Cho tam giác ABC có $\hat{B}=60^{\circ},\hat{C}=105^{\circ}$ và $BC=15$. Tính độ dài cạnh AC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có: $\hat{A}=180^{\circ}-105^{\circ}-60^{\circ}=15^{\circ}$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC (Hình 55) ta có:



Hình 55

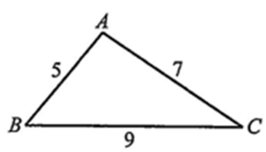
$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}=2R$$

Do đó: $AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{15\sin 60^{\circ}}{\sin 15^{\circ}}\approx 50;\quad R=\frac{BC}{2\sin A}=\frac{15}{2\cdot\sin 15^{\circ}}\approx 29$.

Câu 34. Cho tam giác ABC có $AB=5, AC=7, BC=9$. Tính số đo góc A và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC (Hình 56) ta có:



Hình 56

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{5^2+7^2-9^2}{2\cdot 5.7}=-\frac{1}{10}$$

Do đó, $\hat{A}\approx 95,7^{\circ}$.

Áp dụng định lí sin ta có: $2R=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow R\approx\frac{9}{2\sin 95,7^{\circ}}\approx 4,5$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 35. Cho tam giác ABC, biết

a) $a=12, b=13, c=15$. Tính độ lớn góc A. b) $AB=5, AC=8, \widehat{A}=60^{o}$. Tính cạnh BC

Lời giải.

a) Ta có $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{13^2+15^2-12^2}{2.13.15}=\frac{25}{39}$. Suy ra $\widehat{A}\approx 50^{o}$

b) Ta có $BC^2=AC^2+AB^2-2AC.AB.\cos A=8^2+5^2-2.8.5.\cos 60^{o}=49$. Vậy $BC=7$

Câu 36. Cho tam giác ABC, biết

a) $\widehat{A}=60^{o},\widehat{B}=45^{o}, b=4$. Tính cạnh b và c. b) $\widehat{A}=60^{o}, a=6$. Tính R

Lời giải.

a) Ta có $A+B+C=180^{o}\Rightarrow C=180^{o}-A-B=75^{o}$.

Suy ra $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{4\sin 60^{o}}{\sin 45^{o}}\approx 4,9$ và $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{4\sin 75^{o}}{\sin 45^{o}}\approx 5,5$

b) Ta có $R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{6}{2\sin 60^{o}}\approx 3,5$.

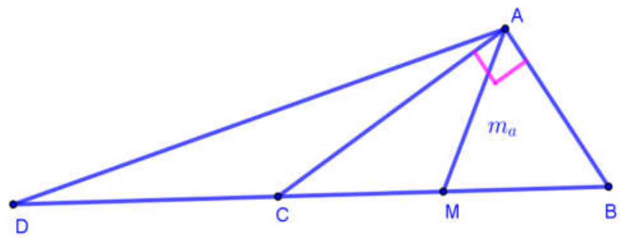
Câu 37. Cho tam giác ABC, biết

a) $a=7,b=8,c=6$. Tính m_a. b) $a=5,b=4,c=3$. Lấy D đối xứng của B qua C. Tính m_a và AD

Lời giải.

Áp dụng định lý trung tuyến

a) Ta có $m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{8^2+6^2}{2}-\frac{7^2}{4}=\frac{151}{4}=37,75$. Suy ra $m_a\approx 6,1$



b) Ta có $a^2=b^2+c^2=25$ nên tam giác ABC vuông tại A. Do đó $m_a=\frac{a}{2}=\frac{5}{2}=2,5$

Tam giác ABD có AC là trung tuyến nên

$AC^2=\frac{AB^2+AD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}$. Suy ra $AD^2=\frac{1}{2}\left(4AC^2+BD^2-2AB^2\right)=\frac{1}{2}\left(4.4^2+10^2-2.3^2\right)=73$

Vậy $AD\approx 8,5$.

Câu 38. Cho tam giác ABC, biết

a) $a=7,b=8,c=6$. Tính S và h_a.

b) $b=7,c=5,\cos A=\frac{3}{5}$. Tính S và R,r

Lời giải.

a) Áp dụng công thức Hê-rông với $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{21}{2}$

Ta có $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2}-7\right)\left(\frac{21}{2}-8\right)\left(\frac{21}{2}-6\right)}=\frac{21\sqrt{15}}{4}$

Vì $S=\frac{1}{2}ah_a\Rightarrow\frac{21\sqrt{15}}{4}=\frac{1}{2}7.h_a\Rightarrow h_a=\frac{3\sqrt{15}}{2}$

b) Ta có $\sin^2A=1-\cos^2A=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow\sin A=\frac{4}{5}$ (vì $\sin A>0$).

Mà $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.7.5.\frac{4}{5}=14$

Theo Định lí Cô-sin ta có $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=7^2+5^2-2.7.5.\frac{3}{5}=32\Rightarrow a=4\sqrt{2}$

Từ $S=\frac{1}{2}ah_a\Rightarrow h_a=\frac{2S}{a}=\frac{28}{4\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$

Theo định lí sin: $\frac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{4\sqrt{2}}{2.\frac{4}{5}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

Ta có $S=pr\Rightarrow r=\frac{S}{p}=\frac{14}{5+7+4\sqrt{2}}=\frac{14}{12+4\sqrt{2}}=\frac{7}{6+2\sqrt{2}}$

Câu 39. Cho tam giác ABC, biết $a=3,b=4,c=6$. Tính góc lớn nhất và đường cao tương ứng với cạnh lớn nhất

Lời giải.

Ta có $c=6$ là cạnh lớn nhất của tam giác, do đó là góc lớn nhất.

Áp dụng định lí cô-sin, ta có $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{3^2+4^2-6^2}{2.3.4}=-\dfrac{11}{24}\Rightarrow \widehat{C}\approx 117^o17'$

Ta có h_c là đường cao ứng với cạnh lớn nhất. Theo công thức Hê-rông

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{13}{2}$

Nên $S=\sqrt{\dfrac{13}{2}\left(\dfrac{13}{2}-3\right)\left(\dfrac{13}{2}-4\right)\left(\dfrac{13}{2}-6\right)}=\dfrac{\sqrt{455}}{4}$

Ta có: $h_c=\dfrac{2S}{c}=\dfrac{\sqrt{455}}{2.6}=\dfrac{\sqrt{455}}{12}$

Câu 40. Tính các góc A,B và h_a,R của tam giác ABC biết $a=\sqrt{6},b=2,c=\sqrt{3}+1$

Lời giải.

Theo định lí cô-sin, ta có

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{4^2+\left(\sqrt{3}+1\right)^2-6^2}{2.2.\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{1}{2}\Rightarrow \widehat{A}=60^o,$$

$$\cos B=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+6-4}{2.\left(\sqrt{3}+1\right).\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \widehat{B}=45^o$$

$$h_a=\frac{2S}{a}=\frac{ac\sin B}{a}=c\sin B=\left(\sqrt{3}+1\right)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Áp dụng định lí sin ta có $\dfrac{b}{\sin B}=2R\Rightarrow R=\dfrac{b}{2\sin B}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Câu 41. Cho tam giác ABC, biết $a=21,b=17,c=10$

a) Tính diện tích S của tam giác ABC và chiều cao h_a.

b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp r và trung tuyến m_a.

Lời giải.

a) Ta có $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{21+17+10}{2}=24$

Theo công thức Hê-rông, ta có $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{24(24-21)(24-17)(24-10)}=84$

Do đó: $h_a=\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2.84}{21}=8$.

b) Ta có $S=pr\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{82}{24}=3,5$.

Độ dài trung tuyến $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{17^2+10^2}{2}-\dfrac{21^2}{4}=\dfrac{337}{4}=84,25$

Câu 42. Cho tam giác ABC, có $\widehat{A}=60^o,b=20,c=25$.

a) Tính diện tích S và chiều cao h_a.

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R và bán kính đường tròn nội tiếp r

Lời giải.

a) Ta có $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.20.35.\frac{\sqrt{3}}{2}=175\sqrt{3}$

Hơn nữa $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=20^2+35^2-2.20.35.\frac{1}{2}=925$

Vậy $a=\sqrt{925}\approx 30,41$

Từ công thức $S=\frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a=\frac{2S}{a}=\frac{350\sqrt{3}}{\sqrt{925}}\approx 19,94$

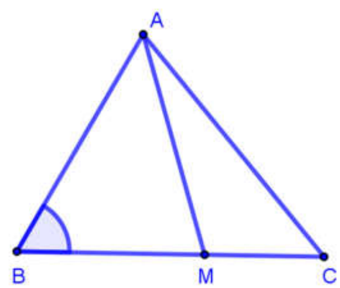
b) Từ công thức $\frac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{\sqrt{925}}{\sqrt{3}}\approx 17,56$

Từ công thức $S=pr$ với $p=\frac{a+b+c}{2}$ ta có $r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{bc\sin A}{a+b+c}=\frac{20.30.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{925}+20+35}\approx 7,10$

Câu 43. Cho tam giác ABC, có $AB=8, AC=9, BC=10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM=7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Lời giải.

Ta có $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{83}{160}$



Áp dụng định lí cô-sin cho tam giác ABM, ta có

$AM^2=AB^2+BM^2-2AB.BM.\cos B=8^2+7^2-2.8.7.\frac{83}{160}=\frac{549}{10}$

Vậy $AM=3\sqrt{6,1}$

Câu 44. Cho tam giác ABC, có $BC=12, CA=13$, trung tuyến $AM=8$. Tính S và cạnh AB.

Lời giải.

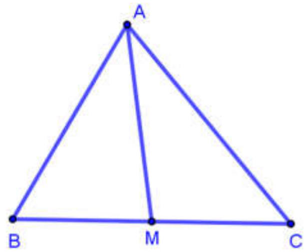
Theo hệ thức Hê-rông, ta có $S_{AMC}=\sqrt{\frac{27}{2}\left(\frac{27}{2}-13\right)\left(\frac{27}{2}-6\right)\left(\frac{27}{2}-8\right)}=\frac{9\sqrt{55}}{4}$

Vì M là trung điểm BC nên $S_{ABC}=2S_{AMC}=\frac{9\sqrt{55}}{2}$

Ta có $AM^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\Rightarrow 2AM^2=b^2+c^2-\frac{a^2}{2}$

Suy ra $AB^2=c^2=2AM^2-b^2+\frac{a^2}{2}=2.64-196+72=31$

Vậy $AB=c=\sqrt{31}$



Câu 45. Cho tam giác ABC, có $\widehat{B}=60^o, \widehat{C}=45^o, BC=a$

a) Tính độ dài hai cạnh AB, AC.

b) Chứng minh $\cos 75^o = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Lời giải.

a) Ta có $\widehat{A}=180^o-\left(60^o+45^o\right)=75^o$. Đặt $AC=b, AB=c$. Theo định lí hàm số sin, ta có

$\dfrac{b}{\sin 60^o}=\dfrac{a}{\sin 75^o}=\dfrac{c}{\sin 45^o}$. Suy ra $b=\dfrac{a\sqrt{3}}{2\sin 75^o}; c=\dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin 75^o}$

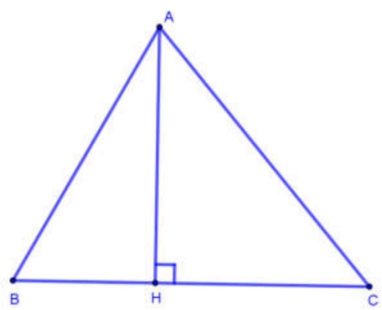
b) Kẻ $AH \perp BC$ do $\widehat{B}, \widehat{C}$ đều là góc nhọn nên H thuộc đoạn BC, hay $BC=HB+HC$.

Ta có $HC=\dfrac{b\sqrt{2}}{2}; HB=\dfrac{c}{2}$.

Suy ra $a=HC+HB=b\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{c}{2}=\dfrac{a\sqrt{6}+a\sqrt{2}}{4\sin 75^o}$.

Do đó $\sin 75^o=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ và

$\cos 75^o=\sqrt{1-\sin^2 75^o}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{4}\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\dfrac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.



Câu 46. Cho tam giác ABC, có độ dài ba trung tuyến bằng $15, 18, 27$

a) Tính diện tích tam giác. b) Tính độ dài các cạnh của tam giác

Lời giải.

a) Gọi I là trung điểm của BC và G là trọng tâm của tam giác ABC thì ta có:

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{GBC}}=\dfrac{AI}{GI}=3 \Rightarrow S_{ABC}=3S_{GBC}$.

Lấy D là điểm đối xứng với G qua I ta được hình bình hành $BGCD$, do đó

$S_{GBC}=S_{BGD}=\dfrac{1}{2}S_{BGCD} \Rightarrow S_{ABC}=3S_{BGD}$

Tam giác BGD có độ dài ba cạnh bằng $10, 12, 18$ nên

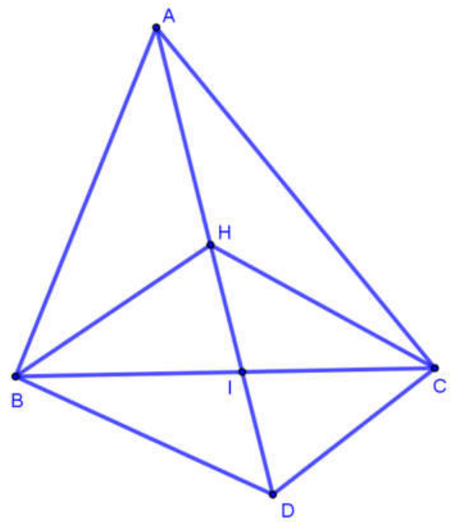
$S_{BGD}=\sqrt{20(20-10)(20-12)(20-18)}=40\sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC}=S=120\sqrt{2}$

b) Giả sử $m_a = 15, m_b = 18, m_c = 27$. Ta có

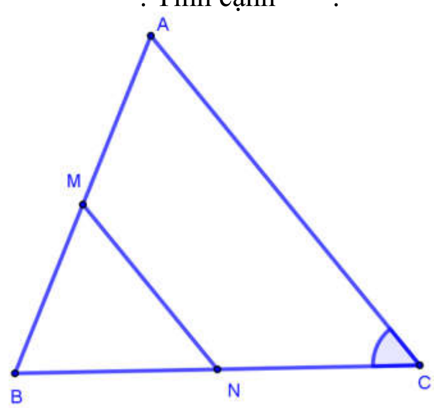
$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2} \\ c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \dfrac{b^2}{2} \\ a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \dfrac{c^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = 1704$$

Mà $b^2 - a^2 = \frac{4}{3}\left(m_a^2 - m_b^2\right) = -132$ và $b^2 - c^2 = \frac{4}{3}\left(m_c^2 - m_b^2\right) = 540$

Từ đó ta tính được $b = 8\sqrt{11}, a = 2\sqrt{209}, c = 2\sqrt{41}$



Câu 47. Cho tam giác ABC, có đoạn thẳng nối trung điểm AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60^o$. Tính cạnh BC.



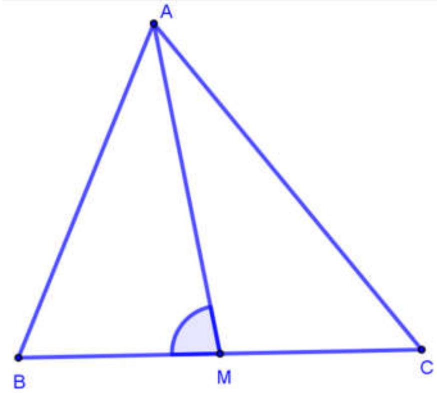
Lời giải.

Đặt $BC = x, x > 0$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC.

Ta có $MN = 3 \Rightarrow AC = 6$. Theo định lí cô-sin ta có

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2.CA.CB.\cos C \Leftrightarrow 81 = 36 + x^2 - 12x.\frac{1}{2} \Leftrightarrow BC = x = 3\left(1 + \sqrt{6}\right)$$

Câu 48. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC. Biết $AB = 3, BC = 8, \cos\widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$. Tính độ dài cạnh AC và góc lớn nhất của tam giác ABC.



Lời giải.

Ta có $BC=8 \Rightarrow BM=4$. Đặt $AM=x$

Theo định lí cô-sin ta có $\cos \widehat{AMB}=\dfrac{AM^2+BM^2-AB^2}{2AM.AB}$.

Suy ra $\dfrac{5\sqrt{13}}{26}=\dfrac{x^2+16-9}{8x} \Leftrightarrow 13x^2-20\sqrt{13}x+91=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{13}$ hoặc $x=\dfrac{7\sqrt{13}}{13}$

Theo công thức tính đường trung tuyến ta có $AM^2=\dfrac{2\left(AB^2+AC^2\right)-BC^2}{2AB.AC}$

* Nếu $x=\sqrt{13} \Rightarrow 13=\dfrac{2\left(3^2+AC^2\right)-8^2}{4} \Rightarrow AC=7$

Ta có $BC>AC>AB$ góc A lớn nhất.

Theo định lí cô-sin ta có $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=-\dfrac{1}{7}$

Suy ra $A \approx 98^o 12'$

* Nếu $x=\dfrac{7\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \dfrac{49}{13}=\dfrac{2\left(3^2+AC^2\right)-8^2}{4} \Rightarrow AC=\sqrt{\dfrac{397}{13}}$

Ta có $BC>AC>AB$ góc A lớn nhất.

Theo định lí cô-sin ta có $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB.AC}=-\dfrac{53}{\sqrt{5161}}$

Suy ra $A \approx 137^o 32'$

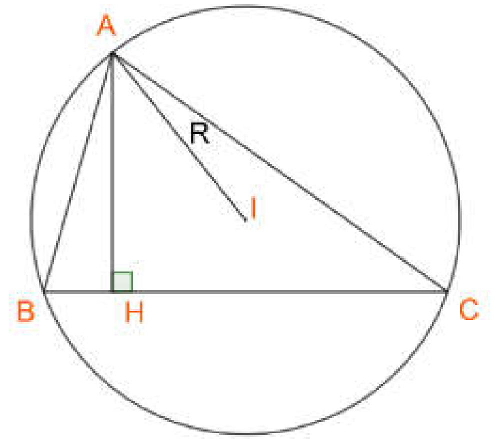
Dạng 2. Chứng minh các hệ thức liên quan đến các yếu tố của một tam giác

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 49. Cho h_a là đường cao vẽ từ đỉnh A, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh hệ thức: $h_a=2R\sin B\sin C$.

Lời giải

Đặt $a=BC, b=AC, c=AB$



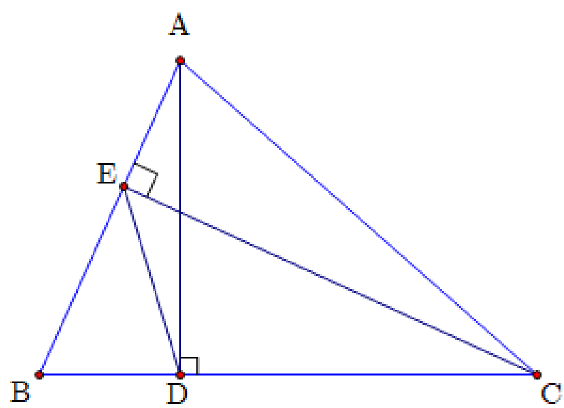
Ta có: $\sin C=\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{h_a}{b}\Rightarrow h_a=b\cdot\sin C$ Theo định lí sin, ta có: $\dfrac{b}{\sin B}=2R\Rightarrow b=2R.\ \sin B$
$\Rightarrow h_a=2R\cdot\sin B\cdot\sin C$

Câu 50. Cho tam giác ABC có góc B nhọn, AD và CE là hai đường cao.

a) Chứng minh $\dfrac{S_{BDE}}{S_{BAC}}=\dfrac{BD\cdot BE}{BA\cdot BC}$.

b) Biết rằng $S_{ABC}=9S_{BDE}$ và $DE=2\sqrt{2}$. Tính $\cos B$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



a) Áp dụng công thức $S=\dfrac{1}{2}ac.\ \sin B$ cho tam giác ABC và BED, ta có:

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot BA\cdot BC\cdot\sin B;S_{BED}=\dfrac{1}{2}..BE\cdot BD\cdot\sin B\ \Rightarrow\dfrac{S_{BED}}{S_{ABC}}=\dfrac{\dfrac{1}{2}\cdot BE\cdot BD\cdot\sin B}{\dfrac{1}{2}\cdot BA\cdot BC\cdot\sin B}=\dfrac{BE\cdot BD}{BA\cdot BC}$

b) Ta có: $\cos B=\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{BE}{BC}$

Mà $\dfrac{S_{BED}}{S_{ABC}}=\dfrac{1}{9}\Rightarrow\dfrac{BD}{BA}\cdot\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{1}{9}$

$\Rightarrow\cos B=\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{1}{3}$

+) Xét tam giác ABC và tam giác DEB ta có:
$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{1}{3}$ và góc B chung
$\Rightarrow\Delta ABC\sim\Delta DEB(cgc)$

$\Rightarrow \dfrac{DE}{AC}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow AC=3.DE=3.2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

Ta có: $\cos B=\dfrac{1}{3}\Rightarrow \sin B=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (do B là góc nhọn)

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$\dfrac{AC}{\sin B}=2R\Rightarrow R=\dfrac{6\sqrt{2}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}:2=\dfrac{9}{2}$

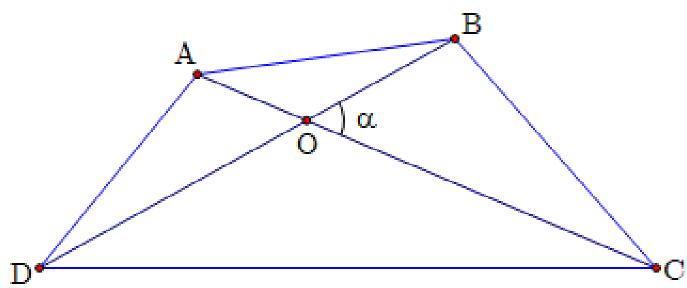
Câu 51. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các đường chéo $AC=x,BD=y$ và góc giữa AC và BD bằng α. Gọi S là diện tích của tứ giác $ABCD$.

a) Chứng minh $S=\dfrac{1}{2}xy\cdot\sin\alpha$

b) Nêu kết quả trong trường hợp $AC\perp BD$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Lời giải



a) Áp dụng công thức $S=\dfrac{1}{2}ac.\ \sin B$, ta có:

$S_{OAD}=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OD\cdot\sin\alpha;\quad S_{OBC}=\dfrac{1}{2}..OB\cdot OC\cdot\sin\alpha; S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin\left(180^\circ-\alpha\right);$

$S_{OCD}=\dfrac{1}{2}\cdot OD\cdot OC\cdot\sin\left(180^\circ-\alpha\right).$

Mà $\sin\left(180^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$

$\Rightarrow S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin\alpha;\quad S_{OCD}=\dfrac{1}{2}\cdot OD\cdot OC\cdot\sin\alpha.$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\left(S_{OAD}+S_{OAB}\right)+\left(S_{OBC}+S_{OCD}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot\sin\alpha\cdot(OD+OB)+\dfrac{1}{2}\cdot OC\cdot\sin\alpha\cdot(OB+OD)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot\sin\alpha\cdot BD+\dfrac{1}{2}\cdot OC\cdot\sin\alpha\cdot BD=\dfrac{1}{2}\cdot BD\cdot\sin\alpha\cdot(OA+OC)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot y\cdot\sin\alpha.$

b) Nếu $AC\perp BD$ thì $\alpha=90^\circ\Rightarrow\sin\alpha=1\Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}x.y.1=\dfrac{1}{2}xy$

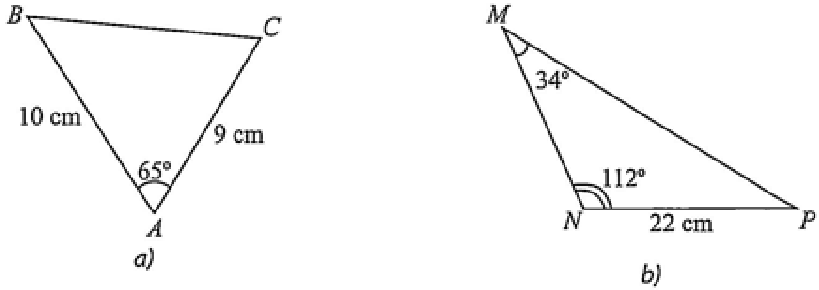
Câu 52. Cho tam giác ABC có ba cạnh là a,b,c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng: $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

Lời giải

Ta có các công thức: $S=\dfrac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin C; a=2R\sin A; b=2R\sin B$.

Suy ra: $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

Câu 53. Tính độ dài các cạnh chưa biết trong các tam giác sau:



Hình 6

Lời giải

a) $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos 65^\circ=10^2+9^2-2\cdot 10\cdot 9\cdot\cos 65^\circ\approx 104,929$ $\Rightarrow BC\approx 10,24(cm)$.

b) Ta có: $NP=22\,cm;\hat{P}=180^\circ-\left(112^\circ+34^\circ\right)=34^\circ$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\dfrac{MP}{\sin N}=\dfrac{MN}{\sin P}=\dfrac{NP}{\sin M}$.

Suy ra: $MP=\dfrac{NP\sin N}{\sin M}=\dfrac{22\cdot\sin 112^\circ}{\sin 34^\circ}\approx 36,48(cm)$.

$\hat{M}=\hat{P}\Rightarrow \Delta NMP$ cân tại $N\Rightarrow NM=NP=22(cm)$.

Câu 54. Cho tam giác ABC với $BC=a;AC=b;AB=c$. Chứng minh rằng: $1+\cos A=\dfrac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$.

Lời giải

$1+\cos A=1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}=\dfrac{(b+c)^2-a^2}{2.b.c}=\dfrac{(a+b+c)(-a+b+c)}{2bc}$.

Câu 55. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh các tam giác GBC,GAB,GAC có diện tích bằng nhau.

Lời giải

Vẽ AH và GK vuông góc với BC. Ta có $AH=3GK$, suy ra $S_{GBC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}$.

Chứng minh tương tự ta có: $S_{GBC}=S_{GAB}=S_{GAC}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}$.

Câu 56. Cho tam giác ABC và cho các điểm B',C' trên cạnh AB và AC.

Chứng minh $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}}=\dfrac{AB\cdot AC}{AB'\cdot AC'}$.

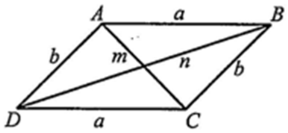
Lời giải

Ta có: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A}{\frac{1}{2}AB'\cdot AC'\cdot\sin A}=\dfrac{AB\cdot AC}{AB'\cdot AC'}$.

Câu 57. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=a,BC=b$, $AC=m,BD=n$. Chứng minh: $m^2+n^2=2\left(a^2+b^2\right)$.

Lời giải

Đặt $\widehat{ABC}=\alpha$, ta có: $\widehat{BAD}=180^\circ-\alpha$.



Hình 57

Xét tam giác ABC (Hình 57), áp dụng đị côsin ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$

$\Rightarrow m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

Xét tam giác ABD, áp dụng định lí côsin ta có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD}$

$\Rightarrow n^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$.

Vậy $m^2 + n^2 = \left(a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha\right) + \left(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\right) = 2\left(a^2 + b^2\right)$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 58. Tam giác ABC có $b + 2c = 2a$. Chứng minh rằng

a) $2\sin A = \sin B + \sin C$.   b) $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

Lời giải.

a) Theo định lí sin ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b+c}{\sin B + \sin C} = \dfrac{2a}{\sin B + \sin C} \Rightarrow 2\sin A = \sin B + \sin C$

Cách khác: $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$

Nên $b + c = 2a \Rightarrow 2R\sin B + 2R\sin C = 2.2R\sin A \Rightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A$

b) Ta có $S = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S}; \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{b}{2S}; \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{c}{2S}$

Do đó $S = \dfrac{1}{2}a.h_a = \dfrac{1}{2}b.h_b = \dfrac{1}{2}c.h_c \Rightarrow \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{a}{2S}; \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{2S}(b+c) = \dfrac{1}{2S}2a = \dfrac{2}{h_a}$

Câu 59. Tam giác ABC có $bc = a^2$. Chứng minh rằng

a) $\sin^2 A = \sin B.\sin C$.   b) $h_b.h_c = h_a^2$

Lời giải.

a) Theo giả thiết ta có $a^2 = bc$

Thay $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$ vào hệ thức trên ta được

$4R^2\sin^2 A = 2R\sin B.2R\sin C \Rightarrow \sin^2 A = \sin B.\sin C$

b) Ta có $2S = a.h_a = b.h_b = c.h_c \Rightarrow a^2h_a^2 = b.h_b.c.h_c$

Theo giả thiết $a^2 = bc$ nên suy ra $h_a^2 = h_b.h_c$

Câu 60. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$.

Lời giải.

Áp dụng định lí trung tuyến trong tam giác ta có

$m_a^2 = \dfrac{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}{4}$; $m_b^2 = \dfrac{2\left(a^2 + c^2\right) - b^2}{4}$; $m_c^2 = \dfrac{2\left(a^2 + b^2\right) - a^2}{4}$

Từ đó suy ra $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Câu 61. Gọi là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh

$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Lời giải.

Theo tính chất của trọng tâm, ta có $GA = \frac{2}{3}m_a; GB = \frac{2}{3}m_b; GC = \frac{2}{3}m_c$ Nên

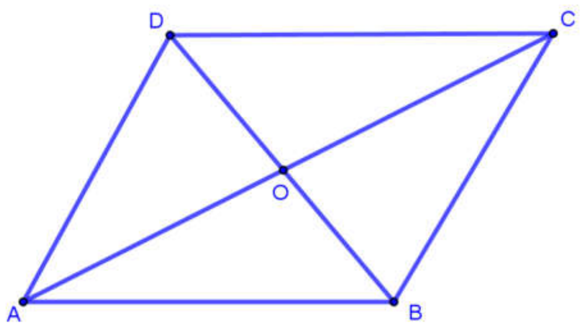
$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \left(\frac{2}{3}m_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right)$

$= \frac{4}{9}\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Câu 62. Chứng minh rằng tổng bình phương hai đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương bốn cạnh của nó.

Lời giải.

Xét hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD thì AO là trung tuyến của tam giác ABD.

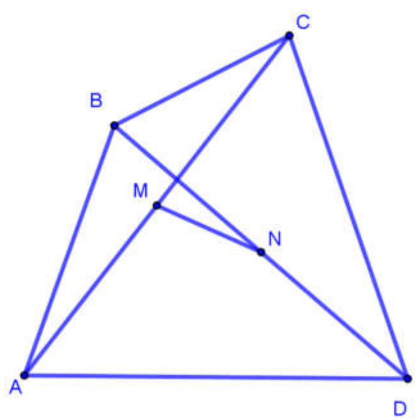


Ta có $AO^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Leftrightarrow \frac{AC^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = 2\left(AB^2 + AD^2\right)$

Câu 63. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm hai đường chéo AC, BD. Chứng minh $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$

Lời giải.

Trong tam giác ABD, CBD, ta có



$AB^2 + AD^2 = 2AN^2 + \frac{BD^2}{2}$

$CB^2 + CD^2 = 2CN^2 + \frac{BD^2}{2}$

Vậy nên $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2\left(AN^2 + CN^2\right) + BD^2$

Vì M là trung điểm của AC nên

$NA^2+NC^2=2MN^2+\dfrac{AC^2}{2}$

Do đó $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2\left(2MN^2+\dfrac{AC^2}{2}\right)+BD^2=AC^2+BD^2+4MN^2$

Câu 64. Cho tam giác ABC, chứng minh

a) $\cot A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$. b) $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

Lời giải.

Áp dụng định lí sin và công thức diện tích, ta có

a) Ta có $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}:\dfrac{a}{2R}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2abc}R=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S}$.

b) Tương tự $\cot B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S}$ và $\cot C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{4S}$ nên

$\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{4S}+\dfrac{a^2+c^2-b^2}{4S}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{4S}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$

Câu 65. Chứng minh rằng trong một tam giác ABC, ta có

a) $a=b\cos C+c\cos B$. b) $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$

Lời giải.

a) Theo định lí cô-sin. Suy ra và

Do đó $a=b\cos C+c\cos B$.

b) Ta có $\sin A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$

Câu 66. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có

a) $b^2-c^2=a(b\cos C-c\cos B)$. b) $(b^2-c^2)\cos A=a(c\cos C-b\cos B)$

Lời giải.

a) Ta có $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ và $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

Suy ra $b^2-c^2=c^2-b^2+2a(b\cos C-c\cos B)\Rightarrow 2(b^2-c^2)=2a(b\cos C-c\cos B)$

$\Rightarrow b^2-c^2=a(b\cos C-c\cos B)$

b) Ta có $b^2-c^2=a(c\cos C-b\cos B)=a\left(\dfrac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab}-\dfrac{b(a^2+c^2-b^2)}{2ac}\right)$

$=\dfrac{c(a^2+b^2-c^2)}{2b}-\dfrac{b(a^2+c^2-b^2)}{2c}=\dfrac{c^2(a^2+b^2-c^2)-b^2(a^2+c^2-b^2)}{2bc}$

$=\dfrac{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2bc}=(b^2-c^2)\cos A$

Câu 67. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có có

a) $a=r\left(\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\right)$. b) $h_a=2R\sin B\sin C$.

Lời giải.

a) Xét hai tam giác vuông IEB, IEC. Ta có $\cot\dfrac{B}{2}=\dfrac{BE}{r}\Rightarrow BE=r\cot\dfrac{B}{2}$,

$\cot\dfrac{C}{2}=\dfrac{BE}{r}\Rightarrow CE=r\cot\dfrac{C}{2}$

Do đó $a=BC=BE+EC=r\left(\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\right)$

b) Ta có $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}bc\sin A$

Suy ra $\frac{1}{2}.2R\sin A.h_a=\frac{1}{2}.2R\sin B.2R\sin C.\sin A\Rightarrow h_a=2R\sin B\sin C$.

Câu 68. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có có

a) $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$. b) $S=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$.

Lời giải.

a) Dùng định lý diện tích, định lí sin ta có $S=\frac{abc}{4R}=\frac{2R\sin A2R\sin B2R\sin C}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$

b) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos A=bc.\cos A$

nên $\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2=b^2c^2-b^2c^2\cos^2A=b^2c^2\left(1-\cos^2A\right)=b^2c^2\sin^2A=4S^2$

Vậy $S=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Câu 69. Tam giác ABC có $b+2c=2a$. Chứng minh rằng

a) $2\sin A=\sin B+\sin C$.

b) $\frac{2}{h_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$

Lời giải.

a) Theo định lí sin ta có $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{a}{\sin A}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}=\frac{2a}{\sin B+\sin C}\Rightarrow 2\sin A=\sin B+\sin C$

Cách khác: $a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$

Nên $b+c=2a\Rightarrow 2R\sin B+2R\sin C=2.2R\sin A\Rightarrow\sin B+\sin C=2\sin A$

b) Ta có $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c\Rightarrow\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S};\frac{1}{h_b}=\frac{b}{2S};\frac{1}{h_c}=\frac{c}{2S}$

Do đó $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c\Rightarrow\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2S};\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{2S}(b+c)=\frac{1}{2S}2a=\frac{2}{h_a}$

Câu 70. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được và có các cạnh a,b,c,d. Chứng minh rằng diện tích tứ giác đó được tính theo công thức sau $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, trong đó p là nửa chu vi tứ giác.

Lời giải

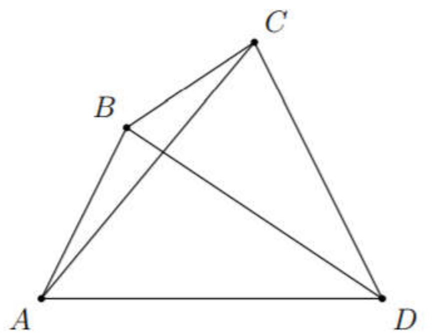
Giả sử $ABCD$ là tứ giác nội tiếp với độ dài cạnh a,b,c,d.

Khi đó $\widehat{A}+\widehat{C}=180°$ nên $\sin C=\sin A;\cos C=-\cos A$.

Ta có $S=S_{ABD}+S_{CDB}=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C$.

Vậy $2S=(ad+bc)\sin A$, suy ra $\sin A=\frac{2S}{ad+bc}$.

Mặt khác, xét các tam giác ABD và BCD có



$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos C = b^2 + c^2 + 2bc\cos A.$$

Suy ra $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad + bc)\cos A$ nên $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$.

Do $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ nên $16S^2 + \left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right) = 4(ad + bc)^2$. Suy ra

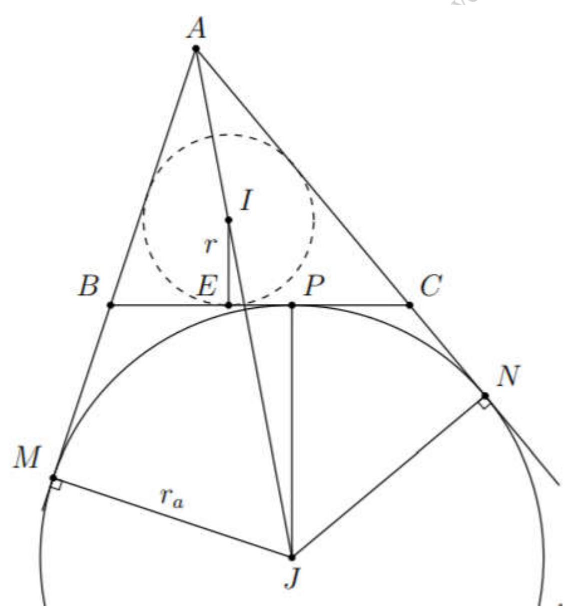
$$16S^2 = [2(ad + bc)]^2 - \left(a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)^2$$
$$= \left(2ad + 2bc + a^2 + d^2 - b^2 - c^2\right)\left(2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2\right)$$
$$= \left[(a + d)^2 - (b - c)^2\right] \cdot \left[(b + c)^2 - (a - d)^2\right]$$
$$= (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d)$$
$$= (2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2d)(2p - 2a)$$
$$= 16(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$$

Câu 71. Cho tam giác ABC, r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp trong góc A. Chứng minh rằng:

a) $r_a = p\tan\dfrac{A}{2}$

b) $r = (p - a)\tan\dfrac{A}{2}$

Lời giải



a) Ta có $AM = AN = p, JM = r_a$. Suy ra $r_a = p\tan\dfrac{A}{2}$.

b) Tương tự $AE = p - a, IE = r$ nên $r = (p - a)\tan\dfrac{A}{2}$.

Câu 72. Tam giác ABC vuông tại A, đồng dạng với tam giác $A'B'C'$. Gọi $a' = B'C',\ b' = A'C', a' = A'B'$ và h_a' là đường cao hạ từ A' của tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng:

a) $a \cdot a' = b \cdot b' + c \cdot c'$

b) $\dfrac{1}{h_a \cdot h_a'} = \dfrac{1}{b \cdot b'} + \dfrac{1}{c \cdot c'}$

Lời giải

a) Theo giả thiết đồng dạng của hai tam giác vuông ta có $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k$.

Suy ra $a = k \cdot a' \Rightarrow a \cdot a' = k \cdot a'^2$, tương tự $b \cdot b' = k \cdot b'^2, c \cdot c' = k \cdot c'^2$.

b) Ta có $\dfrac{1}{b \cdot b'} + \dfrac{1}{c \cdot c'} = \dfrac{1}{k \cdot b'^2} + \dfrac{1}{k \cdot c^2} = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{b'^2} + \dfrac{1}{c^2}\right) = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{1}{h_a'^2} = \dfrac{1}{k \cdot h_a' \cdot h_a'} = \dfrac{1}{h_a \cdot h_a'}$.

Câu 73. Tam giác ABC vuông tại A. Gọi d là đường phân giác của góc A. Chứng minh rằng:

a) $d = \dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$

b) $r = \dfrac{1}{2}(b+c-a)$

Lời giải

a) Ta có: $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}bc = \dfrac{1}{2}dc\sin 45^\circ + \dfrac{1}{2}db\sin 45^\circ$

$\Leftrightarrow bc = d(b+c)\sin 45^\circ = d(b+c)\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow d = \dfrac{\sqrt{2}bc}{b+c}$

b) Ta có $S = pr \Rightarrow r = \dfrac{2S}{a+b+c} = \dfrac{bc}{b+c+\sqrt{b^2+c^2}} = \dfrac{1}{2}\left(b+c-\sqrt{b^2+c^2}\right) = \dfrac{1}{2}(b+c-a)$.

Câu 74. Tam giác ABC có $\dfrac{c}{b} = \dfrac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh rằng $2\cot A = \cot B + \cot C$.

Lời giải

Ta có $2\cot A = \cot B + \cot C \Leftrightarrow 2 \cdot \dfrac{b^2+c^2-a^2}{abc}R = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{abc}R + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{abc}R \Leftrightarrow b^2+c^2 = 2a^2$

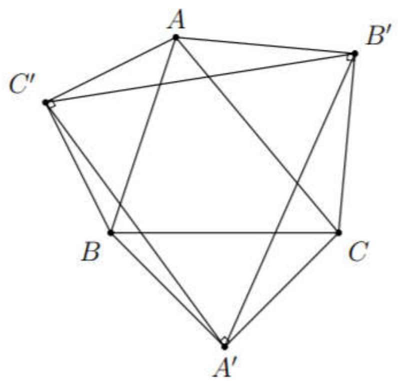
Từ giả thiết suy ra $c^2 m_c^2 = b^2 m_b^2$. Do đó $c^2\left(\dfrac{b^2+a^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}\right) = b^2\left(\dfrac{c^2+a^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}\right)$.

Suy ra $2b^2c^2 + 2a^2c^2 - c^4 = 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - b^4 \Leftrightarrow b^4 - c^4 = 2a^2\left(b^2-c^2\right) \Rightarrow b^2+c^2 = 2a^2\ (do\ b^2-c^2 \neq 0)$

Từ đó ta có điều phải chứng minh

Câu 75. Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh a,b,c và diện tích S. Trên ba cạnh về phía ngoài của tam giác đó dựng các tam giác vuông cân $A'BC, B'AC, C'AB\left(A', B', C'\right.$ lần lượt là đỉnh). Chứng minh rằng $A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S$.

Lời giải



Ta có $AB' = \dfrac{b\sqrt{2}}{2}, AC' = \dfrac{c\sqrt{2}}{2}, \widehat{B'AC'} = \widehat{A} + 90^\circ$.

Trong tam giác $AB'C'$, ta có

$$B'C'^2 = AB'^2 + AC^2 - 2AB' \cdot AC' \cdot \cos\widehat{B'AC'} = \frac{b^2+c^2}{2} + bc\sin A = \frac{b^2+c^2}{2} + 2S$$

Tương tự $A'B'^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} + 2S$.

Từ đó suy ra $A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S$.

Câu 76. Cho điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{DBC} = \widehat{DCA} = \varphi$. Chứng minh rằng

a) $\sin^3\varphi = \sin(A-\varphi)\cdot\sin(B-\varphi)\cdot\sin(C-\varphi)$;

b) $\cot\varphi = \cot A + \cot B + \cot C$.

Lời giải

a) Theo định lý sin, trong các tam giác ABD, BCD, ACD. Ta có:

$$\frac{BD}{\sin\varphi} = \frac{AD}{\sin(B-\varphi)}; \frac{CD}{\sin\varphi} = \frac{BD}{\sin(C-\varphi)}; \frac{AD}{\sin\varphi} = \frac{CD}{\sin(A-\varphi)}$$

Từ đó ta được $\dfrac{AD\cdot BD\cdot CD}{\sin^3\varphi} = \dfrac{AD\cdot BD\cdot CD}{\sin(A-\varphi)\cdot\sin(B-\varphi)\cdot\sin(C-\varphi)}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

b) Áp dụng định lý cosin vào tam giác DAB, ta có $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cdot\cos\varphi$

Mà $\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\varphi = S_{ABD}$ Từ đó suy ra $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 4S_{DAB}\cdot\cot\varphi$.

Tương tự $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 4S_{DBC} \cdot \cot\varphi$ và $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 4S_{DCA} \cdot \cot\varphi$.

Cộng vế theo vế, chú ý rằng tổng diện tích ba tam giác nhỏ bằng diện tích S của tam giác ABC, ta được

$$\cot\varphi = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S} = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}R$$

Mà $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}R$ nên ta suy ra đẳng thức cần chứng minh.

Câu 77. Trong mọi tam giác ABC chứng minh rằng $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$ (Với a,b,c lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC, AB và S là diện tích tam giác).

Lời giải

Từ giả thiết ta có

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C}$$
$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc \cdot \frac{a}{2R}} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac \cdot \frac{b}{2R}} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab \cdot \frac{c}{2R}}$$
$$= \frac{2R\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2bca} + \frac{2R\left(a^2+c^2-b^2\right)}{2acb} + \frac{2R\left(a^2+b^2-c^2\right)}{2abc}$$
$$= \frac{R\left(a^2+b^2+c^2\right)}{abc} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}\left(\text{do } S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow \frac{R}{abc} = \frac{1}{4S}\right)$$

Câu 78. Cho hai tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau khi và chỉ khi ΔGBC vuông tại G.

$$\Leftrightarrow GB^2 + GC^2 = BC^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m_b\right)^2 + \left(\frac{2}{3}m_c\right)^2 = a^2 \ (*)$$

Mặt khác theo công thức đường trung tuyến, ta có: $m_b^2 = \dfrac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4}$, $m_c^2 = \dfrac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}$.

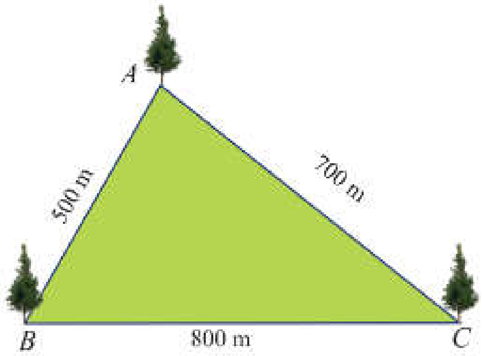
Suy ra

$$(*) \Leftrightarrow \frac{4}{9}\left(m_b^2 + m_c^2\right) = a^2 \Leftrightarrow \frac{4}{9}\left[\frac{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}{4} + \frac{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}{4}\right] = a^2$$

Dạng 3. Ứng dụng – Bài toán thực tế

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 79. Một công viên có dạng hình tam giác với các kích thước như Hình. Tính số đo các góc của tam giác đó.



Lời giải

Đặt $a=BC, b=AC, c=AB$

Ta có: $a=800, b=700, c=500$.

Áp dụng định lí cosin, ta có:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}; \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}; \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Suy ra:

$$\cos A=\frac{700^2+500^2-800^2}{2.700.500}=\frac{1}{7} \Rightarrow \hat{A}=81^\circ 47' 12,44''$$

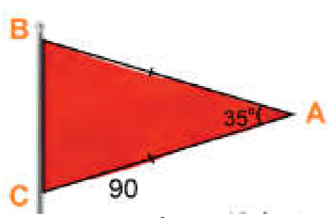
$$\cos B=\frac{500^2+800^2-700^2}{2.500.800}=\frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B}=60^\circ$$

$$\cos C=\frac{800^2+700^2-500^2}{2.800.700}=\frac{11}{14} \Rightarrow \hat{C}=38^\circ 12' 47,56''$$

Vậy $\hat{A}=81^\circ 47' 12,44''; \hat{B}=60^\circ; \hat{C}=38^\circ 12' 47,56''$.

Câu 80. Tính diện tích một lá cờ hình tam giác cân có độ dài cạnh bên là 90 cm và góc ở đỉnh là 35°.

Lời giải



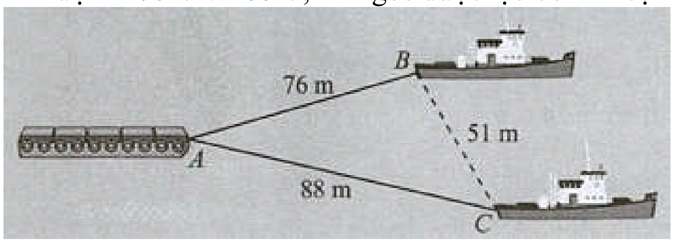
Kí hiệu các điểm A, B, C như hình trên.

Từ giả thiết ta có: $AB=AC=90, \hat{A}=35^\circ$

Áp dụng công thức $S=\frac{1}{2}bc\sin A$, ta có:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 90.90.c\sin 35^\circ \approx 2323\left(cm^2\right)$$

Câu 81. Hai tàu kéo cách nhau $51m$, cùng kéo một chiếc xà lan như Hình 3. Biết chiều dài của hai sợi cáp lần lượt là $76m$ và $88m$, tính góc được tạo bởi hai sợi cáp.



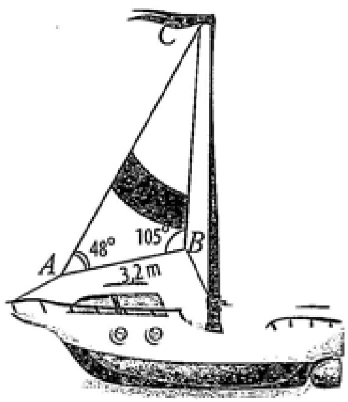
Lời giải

Gọi vị trí của xà lan và hai con tàu lần lượt là A,B,C. Theo hệ quả của định lí côsin, ta có:

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2.AB\cdot AC}=\frac{76^2+88^2-51^2}{2.76.88}\approx 0,8163.$$

Vậy góc được tạo bởi hai sợi cáp là: $\hat{A}\approx 35^\circ 16' 57''$.

Câu 82. Tính diện tích một cánh buồm hình tam giác có chiều dài một cạnh là $3,2m$ và hai góc kề cạnh đó có số đo lần lượt là 48° và 105° (Hình 5).



Hình 5

Lời giải

Gọi ba đỉnh của cánh buồm là A,B,C. Đặt $a=BC;b=AC;c=AB$.

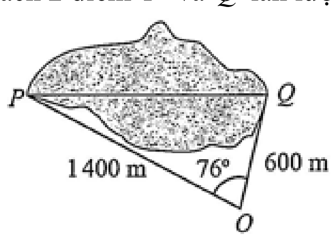
Ta có: $c=3,2m;\hat{C}=180^\circ-\left(105^\circ+48^\circ\right)=27^\circ$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

Suy ra: $AC=b=\dfrac{c\sin B}{\sin C}=\dfrac{3,2\cdot\sin 105^\circ}{\sin 27^\circ}\approx 6,8(m)$;

Ta có $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 6,8\cdot 3,2\cdot\sin 48^\circ\approx 8,1\left(m^2\right)$.

Câu 83. Tính khoảng cách giữa hai điểm P và Q của một hồ nước (Hình 7). Cho biết từ một điểm O cách 2 điểm P và Q lần lượt là $1400m$ và $600m$ người quan sát nhìn thấy một góc 76°.



Hình 7

Lời giải

$$PQ=\sqrt{OP^2+OQ^2-2OP\cdot OQ\cdot\cos O}=\sqrt{1400^2+600^2-2\cdot 1400\cdot 600\cdot\cos 76^\circ}\approx 1383,32(m).$$

Câu 84. Tính diện tích bề mặt của một miếng bánh mì kebab hình tam giác có hai cạnh lần lượt là $10\,cm, 12\,cm$ và góc tạo bởi hai cạnh đó là 35°.

Lời giải

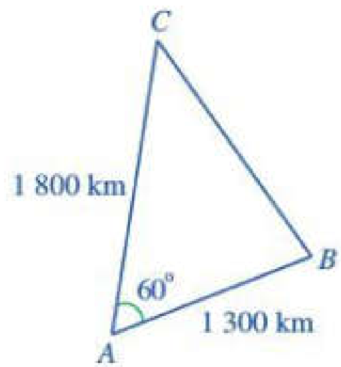
Diện tích miếng bánh mì kebab là: $S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 12\cdot \sin 35^{\circ}\approx 34,4\left(cm^2\right)$.

Câu 85. Hai máy bay cùng xuất phát từ một sân bay A và bay theo hai hướng khác nhau, tạo với nhau góc 60°. Máy bay thứ nhất bay với vận tốc $650\,km/h$, máy bay thứ hai bay với vận tốc $900\,km/h$. Sau 2 giờ, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng cả hai máy bay bay theo đường thẳng và sau 2 giờ bay đều chưa hạ cánh.

Lời giải

Giả sử sau 2 giờ, máy bay thứ nhất đến vị trí B, máy bay thứ hai đến vị trí C. Ta có: $AB=2.650=1300(km), AC=2.900=1800(km)$,

$\widehat{BAC}=60^{\circ}$



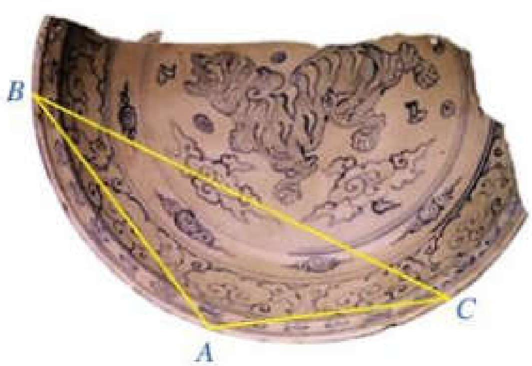
Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot \cos\widehat{BAC}$$
$$=1300^2+1800^2-2\cdot 1300\cdot 1800\cdot \cos 60^{\circ}=2590000.$$

Do đó $BC\approx 1609,35(km)$.

Vậy sau 2 giờ hai máy bay cách nhau khoảng 1609,35 km.

Câu 86. Các nhà khảo cổ học tìm được một mảnh chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ. Để xác định đường kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy ba điểm trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau: $BC\approx 28,5\,cm; \widehat{BAC}\approx 120^{\circ}$.



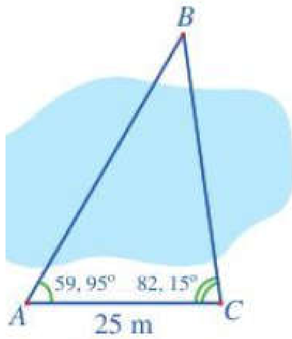
Tính đường kính của chiếc đĩa theo đơn vị xăng-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC, ta có: $2R=\frac{BC}{\sin A}\approx\frac{28,5}{\sin 120^{\circ}}\approx 33(cm)$.

Vậy đường kính của chiếc đĩa khoảng $33\,cm$.

Câu 87. Để đo khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí A đến vị trí C và tiến hành đo các góc BAC, BCA. Biết $AC=25\,m, \widehat{BAC}=59,95^{\circ}; \widehat{BCA}=82,15^{\circ}$. Hỏi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Xét tam giác ABC, ta có: $\widehat{BAC}=59,95^{\circ};\widehat{BCA}=82,15^{\circ}$.

$\Rightarrow \widehat{ABC}=180^{\circ}-\left(59,95+82,15^{\circ}\right)=37,9^{\circ}$

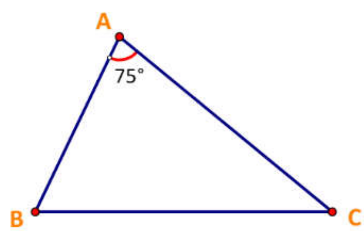
Áp dụng định lí sin trong tam giác BAC ta có: $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$

$\Rightarrow AB=\sin C\cdot\dfrac{AC}{\sin B}=\sin 82,15^{\circ}\cdot\dfrac{25}{\sin 59,95^{\circ}}\approx 28,6$

Vậy khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là $28,6m$.

Câu 88. Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến A và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc 75°. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai chạy với tốc độ 12 hải lí một giờ. Sau 2,5 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

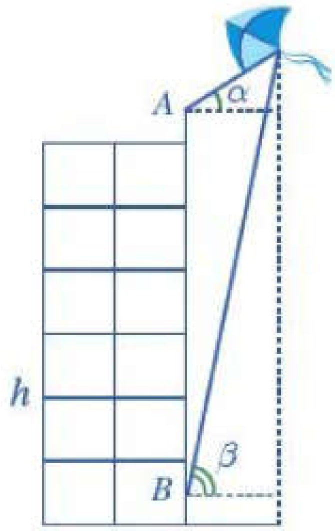


Gọi B, C lần lượt là vị trí của tàu thứ nhất và tàu thứ hai sau 2,5 giờ.
Sau 2,5 giờ:
Quãng đường tàu thứ nhất đi được là: $AB=8.2,5=20$ (hải lí)
Quãng đường tàu thứ hai đi được là: $AC=12\cdot 2,5=30$ (hải lí)
Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC ta có:

$BC^2=AC^2+AB^2-2\cdot AC\cdot AB\cdot\cos A\Rightarrow BC^2=30^2+20^2-2.30\cdot 20\cdot\cos 75^o\Rightarrow BC^2\approx 989,4\Rightarrow BC\approx 3$

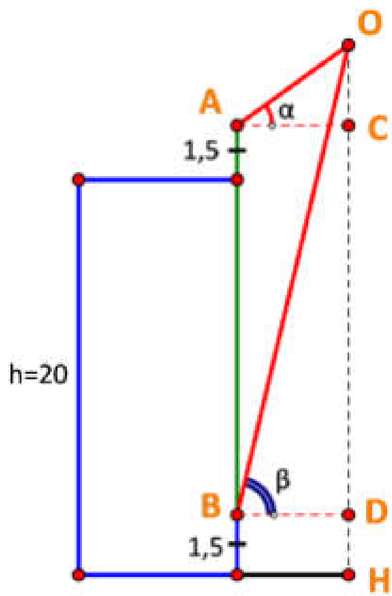
Vậy hai tàu cách nhau 31,5 hải lí.

Câu 89. Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc diều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc diều và phương nằm ngang) là $\alpha=35^{\circ}$; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn B cũng quan sát chiếc diều và thấy góc nâng là $\beta=75^{\circ}$; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn B cũng là $1,5m$. Biết chiều cao của tòa nhà là $h=20m$ (Hình). Chiếc diều bay cao bao nhiêu mét so mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Gọi các điểm:



O là vị trí của chiếc diều.
H là hình chiếu vuông góc của chiếc diều trên mặt đất.
C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên OH.
Đặt $OC = x$, suy ra $OH = x + 20 + 1,5 = x + 21,5$.

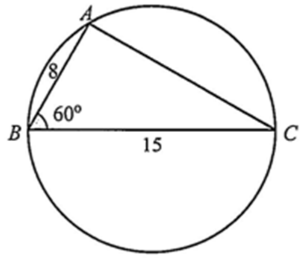
Xét tam giác OAC, ta có: $\tan\alpha = \dfrac{OC}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{OC}{\tan\alpha} = \dfrac{x}{\tan 35^{\circ}}$ Xét tam giác OBD, ta có: $\tan\beta = \dfrac{OD}{BD} \Rightarrow BD = \dfrac{OD}{\tan\beta} = \dfrac{x+20}{\tan 75^{\circ}}$ Mà: $AC = BD \Rightarrow \dfrac{x}{\tan 35^{\circ}} = \dfrac{x+20}{\tan 75^{\circ}}$

$\Leftrightarrow x\cdot\tan 75^{\circ} = (x+20)\cdot\tan 35^{\circ} \Leftrightarrow x = \dfrac{20\cdot\tan 35^{\circ}}{\tan 75^{\circ} - \tan 35^{\circ}} \approx 4,6$

Suy ra $OH = 26,1$.

Vậy chiếc diều bay cao 26,1 m so với mặt đất.

Câu 90. Từ một tấm bìa hình tròn, bạn *An* cắt ra được một hình tam giác có các cạnh $AB = 8\,cm, BC = 15\,cm$ và góc $B = 60^{\circ}$ (Hình 4). Tính độ dài cạnh AC và bán kính R của miếng bìa.



Hình 4

Lời giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$ $= 8^2 + 15^2 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ = 169$.

Suy ra $AC = \sqrt{169} = 13(cm)$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có:

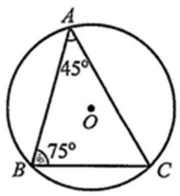
$\frac{AC}{\sin B} = 2R$.

Suy ra $R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{13}{2\sin 60^\circ} = \frac{13\sqrt{3}}{3}(cm)$.

Câu 91. Từ một tấm tôn hình tròn có bán kính $R = 1m$, bạn Trí muốn cắt ra một hình tam giác ABC có các góc $A = 45^\circ, B = 75^\circ$. Hỏi bạn Trí phải cắt miếng tôn theo hai dây cung AB, BC có độ dài lần lượt bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Xét tam giác ABC (Hình 58), ta có: $\hat{C} = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ$.



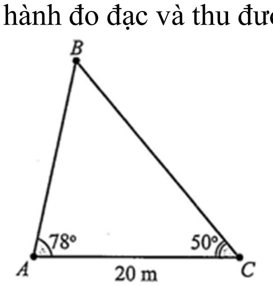
Hình 58

Áp dụng định lí sin ta có: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = 2R = 2$.

Suy ra: $AB = 2\sin C = 2\sin 60^\circ \approx 1,73(m)$ $BC = 2\sin A = 2\sin 45^\circ \approx 1,41(m)$.

Vậy bạn Trí phải cắt miếng tôn theo hai dây cung AB, BC có độ dài lần lượt là xấp xỉ $1,73m$ và $1,41m$.

Câu 92. Một cây cao bị nghiêng so với mặt đất góc 78°. Từ vị trí C cách gốc cây $20m$, người ta tiến hành đo đạc và thu được kết quả: $\widehat{ACB} = 50^\circ$ với B là vị trí ngọn cây (Hình 10).

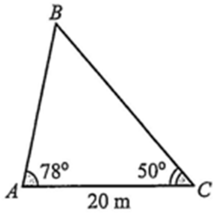


Hình 10

Tính khoảng cách từ gốc cây (điểm A) đến ngọn cây (điểm B) (làm tròn kêt quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).

Lời giải

Xét tam giác ABC (Hình 59), ta có:



Hình 59

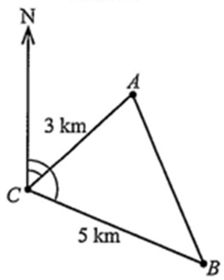
$\hat{B}=180^{\circ}-50^{\circ}-78^{\circ}=52^{\circ}$.

Áp dụng định lí sin ta có: $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$.

Do đó: $AB=\dfrac{20\sin 50^{\circ}}{\sin 52^{\circ}}\approx 19,4(m)$.

Vậy chiều dài của cây là xấp xỉ 19,4 m.

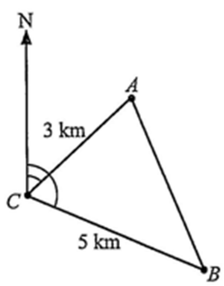
Câu 93. Tàu A cách cảng C một khoảng $3km$ và lệch hướng bắc một góc $47,45^{\circ}$. Tàu B cách cảng C một khoảng $5km$ và lệch hướng bắc một góc $112,90^{\circ}$ (Hình 11). Hỏi khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 11

Lời giải

Xét Hinh 60, ta có:



Hình 60

$\widehat{ACB}=112,90^{\circ}-47,45^{\circ}=65,45^{\circ}$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có:

$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos\widehat{ACB}$

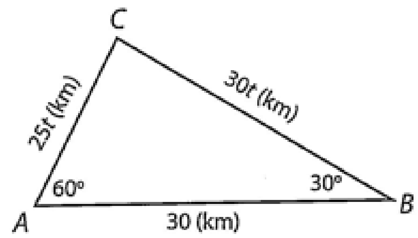
$=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos 65,45^{\circ}\approx 21,54$

Suy ra $AB\approx\sqrt{21,54}\approx 4,64(km)$. Vậy khoảng cách giữa hai tàu là khoảng $4,64\,km$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 94. Trên biển Đông, đảo A cách đảo $B30$ km về hướng Đông, tại cùng một thời điểm, tàu thứ nhất xuất phát từ A với vận tốc không đổi, có độ lớn bằng $30\,km/h$ và có hướng $N30^{\circ}E$, tàu thứ hai xuất phát từ B với vận tốc không đổi, có độ lớn $25\,km/h$ và có hướng N60° W. Hỏi hai tàu có gặp nhau không?

Lời giải



Giả sử sau t (giờ) hai tàu gặp nhau tại điểm C. Khi đó, $BC = 30t(km), AC = 25t(km)$ $\hat{A} = 60^{\circ}, \hat{B} = 30^{\circ} \Rightarrow \hat{C} = 90^{\circ}$. Do đó, áp dụng định lí sin cho tam giác ABC ta có $\dfrac{30k}{\sin 60^{\circ}} = \dfrac{25k}{\sin 30^{\circ}} = \dfrac{30}{\sin 90^{\circ}}$ (vô lí).

Do đó, hai tàu không gặp nhau.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$. **B.** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$. **D.** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos B$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý cosin trong tam giác ABC, ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Câu 2. Cho tam giác ABC, có độ dài ba cạnh là $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và S là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$. **B.** $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$.

C. $S = \dfrac{abc}{4R}$. **D.** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Lời giải

Chọn B

Theo định lý hàm số cosin trong tam giác ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Câu 3. Cho tam giác ABC có $a = 8, b = 10$, góc C bằng 60^0. Độ dài cạnh c là?

A. $c = 3\sqrt{21}$. **B.** $c = 7\sqrt{2}$. **C.** $c = 2\sqrt{11}$. **D.** $c = 2\sqrt{21}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2a.b.\cos C = 8^2 + 10^2 - 2.8.10.\cos 60^0 = 84 \Rightarrow c = 2\sqrt{21}$.

Câu 4. Cho ΔABC có $b = 6, c = 8, \hat{A} = 60^0$. Độ dài cạnh a là:

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $3\sqrt{12}$. **C.** $2\sqrt{37}$. **D.** $\sqrt{20}$.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 36 + 64 - 2.6.8.\cos 60^0 = 52 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$.

Câu 5. Cho ΔABC có $B = 60^0, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:

A. 7. **B.** 129. **C.** 49. **D.** $\sqrt{129}$.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60^0 = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 6. Cho ΔABC có $AB = 9$; $BC = 8$; $\widehat{B} = 60^0$. Tính độ dài AC.

A. $\sqrt{73}$. **B.** $\sqrt{217}$. **C.** 8. **D.** $\sqrt{113}$.

Lời giải

Chọn A

Theo định lý cosin có:

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos\widehat{ABC} = 73 \Rightarrow AC = \sqrt{73}$.

Vậy $AC = \sqrt{73}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 1$ và $A = 60^0$. Tính độ dài cạnh BC.

A. $BC = \sqrt{2}$. **B.** $BC = 1$. **C.** $BC = \sqrt{3}$. **D.** $BC = 2$.

Lời giải

Chọn C

Theo định lý cosin ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^0}$

$= \sqrt{2^2 + 1^2 - 2.2.1.\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Câu 8. Tam giác ABC có $a = 8, c = 3, \widehat{B} = 60^0$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

A. 49. **B.** $\sqrt{97}$ **C.** 7. **D.** $\sqrt{61}$.

Lời giải

Chọn **C.**

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 8^2 + 3^2 - 2.8.3.\cos 60^0 = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 9. Tam giác ABC có $\widehat{C} = 150^0, BC = \sqrt{3}, AC = 2$. Tính cạnh AB?

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 10. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Theo định lí cosin trong ΔABC ta có:

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos\widehat{C} = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$. Chọn#**A.**

Câu 10. Cho $a; b;$ c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC. Biết $b = 7$; $c = 5$; $\cos A = \frac{4}{5}$. Tính độ dài của a.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{23}{8}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{4}{5} = 18$.

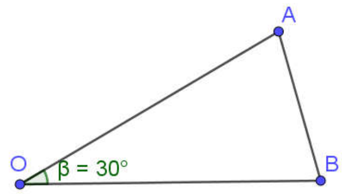
Suy ra: $a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Câu 11. Cho $\widehat{xOy} = 30°$.Gọi A, B là 2 điểm di động lần lượt trên Ox, Oy sao cho $AB = 2$. Độ dài lớn nhất của OB bằng bao nhiêu?

A. 4. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A



Áp dụng định lí cosin: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\cos 30° \Leftrightarrow 4 = OA^2 + OB^2 - 2OA.OB.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow OA^2 - \sqrt{3}.OB.OA + OB^2 - 4 = 0$ (*).

Coi phương trình (*) là một phương trình bậc hai ẩn OA. Để tồn tại giá trị lớn nhất của OB thì $\Delta_{(*)} \ge 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}OB)^2 - 4(\mathrm{OB}^2 - 4) \ge 0 \Leftrightarrow OB^2 \le 16 \Leftrightarrow OB \le 4$.

Vậy $\max OB = 4$.

Câu 12. Cho $a; b;$ c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

A. $a^2 < ab + ac$. **B.** $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$. **C.** $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$. **D.** $ab + bc > b^2$.

Lời giải

Chọn C

Do $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc.\cos\widehat{A} \le 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 \le a^2 + 2bc$ nên mệnh đề C sai.

Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có $a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac$;đáp án A đúng.

Tương tự $a + c > b \Rightarrow ab + bc > b^2$;mệnh đề D đúng.

Ta có: $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac.\cos B < 2ac \Rightarrow a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$;mệnh đề B đúng.

Câu 13. Cho tam giác ABC có $AB = 4$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm. Tính $\cos A$.

A. $\cos A = -\frac{2}{3}$. **B.** $\cos A = \frac{1}{2}$. **C.** $\cos A = \frac{1}{3}$. **D.** $\cos A = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC} = \frac{4^2 + 9^2 - 7^2}{2.4.9} = \frac{2}{3}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó:

A. Góc $C > 90^0$ **B.** Góc $C < 90^0$

C. Góc $C = 90^0$ **D.** Không thể kết luận được gì về góc C.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Mà: $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ suy ra: $\cos C > 0 \Rightarrow C < 90^0$.

Câu 15. Cho tam giác ABC thoả mãn: $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó:

A. $A=30^0$. **B.** $A=45^0$. **C.** $A=60^0$. **D.** $A=75^0$.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A=30^0$.

Câu 16. Cho các điểm $A(1;1),B(2;4),C(10;-2)$. Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 45^0. **D.** 30^0.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;3)$, $\overrightarrow{AC}=(9;-3)$.

Suy ra: $\cos\widehat{BAC}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=0\Rightarrow\widehat{BAC}=90^0$.

Câu 17. Cho tam giác ABC, biết $a=24,b=13,c=15$. Tính góc A?

A. $33^034'$. **B.** $117^049'$. **C.** $28^037'$. **D.** $58^024'$.

Lời giải

Chọn **B.**

Ta có: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{13^2+15^2-24^2}{2.13.15}=-\frac{7}{15}\Rightarrow A\simeq117^049'$.

Câu 18. Cho tam giác ABC, biết $a=13,b=14,c=15$. Tính góc B?

A. $59^049'$. **B.** $53^07'$. **C.** $59^029'$. **D.** $62^022'$.

Lời giải

Chọn **C.**

Ta có: $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{13^2+15^2-14^2}{2.13.15}=\frac{33}{65}\Rightarrow B\simeq59^029'$.

Câu 19. Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(c^2-a^2\right)$ với $b\neq c$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ bằng

A. 45°. **B.** 60°. **C.** 90°. **D.** 120°.

Lời giải

Chọn D

Ta có $b\left(b^2-a^2\right)=c\left(c^2-a^2\right)\Leftrightarrow b^3-ba^2=c^3-ca^2\Leftrightarrow b^3-c^3-a^2\left(b-c\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(b-c\right)\left(b^2+bc+c^2-a^2\right)=0\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=-bc$.

Mặt khác $\cos\widehat{BAC}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=120^\circ$.

Câu 20. Tam giác ABC có $AB = c,\ BC = a,\ CA = b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b\left(b^2 - a^2\right) = c\left(a^2 - c^2\right)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ.

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B

Theo bài ra, ta có: $b\left(b^2 - a^2\right) = c\left(a^2 - c^2\right) \Leftrightarrow b^3 - a^2b = a^2c - c^3 = 0 \Leftrightarrow b^3 + c^3 - a^2b - a^2c = 0$

$\Leftrightarrow (b+c)\left(b^2 - bc + c^2\right) - a^2(b+c) = 0 \Leftrightarrow (b+c)\left(b^2 - bc + c^2 - a^2\right) = 0 \Leftrightarrow b^2 - bc + c^2 - a^2 = 0$

(do $b + c \neq 0$)

$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Leftrightarrow \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 60°$.

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $MA : MB : MC = 1:2:3$ khi đó góc AMB bằng bao nhiêu?

A. $135°$. **B.** $90°$. **C.** $150°$. **D.** $120°$.

Lời giải

$MB = x \Leftrightarrow MA = 2x$; $MC = 3x$ với $0 < x < BC = \sqrt{2}$.

Ta có $\cos\widehat{BAM} = \dfrac{1 + 4x^2 - x^2}{2.1.2x} = \dfrac{3x^2 + 1}{4x}$

$\cos\widehat{MAC} = \dfrac{1 + 4x^2 - 9x^2}{4x} = \dfrac{1 - 5x^2}{4x}$.

$\Rightarrow \left(\dfrac{3x^2 + 1}{4x}\right)^2 + \left(\dfrac{1 - 5x^2}{4x}\right)^2 = 1 \Rightarrow 9x^4 + 6x^2 + 1 + 1 - 10x^2 + 25x^4 = 16$.

$\Rightarrow 34x^4 - 20x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \dfrac{5 + 2\sqrt{2}}{17} > \dfrac{1}{5}\,(l) \\ x^2 = \dfrac{5 - 2\sqrt{2}}{17} \end{array}\right.$.

$\Rightarrow \cos\widehat{AMB} = \dfrac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM.BM} = \dfrac{4x^2 + x^2 - 1}{2.2x.x}$

$= \dfrac{5x^2 - 1}{4x^2} = \left(\dfrac{25 - 10\sqrt{2}}{17} - 1\right) : \dfrac{20 - 8\sqrt{2}}{17} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\widehat{AMB} = 135°$.

Câu 22. Cho tam giác ABC, chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} + \dfrac{a^2}{4}$. **B.** $m_a^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$.

C. $m_a^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$. **D.** $m_a^2 = \dfrac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

Câu 23. Tam giác ABC có $AB=9$ cm, $BC=15$ cm, $AC=12$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là

A. 10 cm . **B.** 9 cm . **C.** 7,5 cm . **D.** 8 cm .

Lời giải

Chọn C

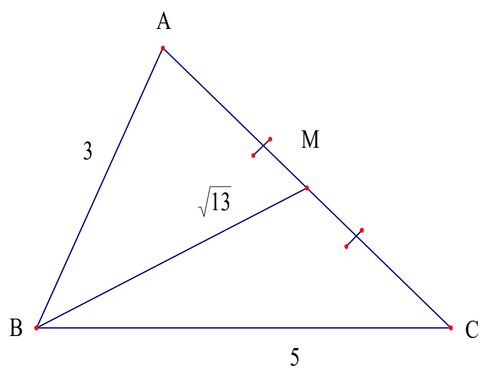
Ta có $AM^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{9^2+12^2}{2}-\dfrac{15^2}{4}=\dfrac{225}{4}\Rightarrow AM=\dfrac{15}{2}$.

Câu 24. Cho tam giác ABC có $AB=3$, $BC=5$ và độ dài đường trung tuyến $BM=\sqrt{13}$. Tính độ dài AC.

A. $\sqrt{11}$. **B.** 4 . **C.** $\dfrac{9}{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn B



Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến;ta có: $BM^2=\dfrac{BA^2+BC^2}{2}-\dfrac{AC^2}{4}\Leftrightarrow\left(\sqrt{13}\right)^2=\dfrac{3^2+5^2}{2}-\dfrac{AC^2}{4}\Leftrightarrow AC=4$.

Câu 25. Cho ΔABC vuông ở A, biết $\widehat{C}=30°$, $AB=3$. Tính độ dài trung tuyến AM ?

A. 3 **B.** 4 **C.** $\dfrac{5}{2}$ **D.** $\dfrac{7}{2}$

Lời giải

Chọn A

AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM=\dfrac{1}{2}BC=BM=MC$.

Xét ΔBAC có $\widehat{B}=90°-30°=60°$.

Xét tam giác ABM có $BM=AM$ và $\widehat{B}=60°$ suy ra ΔABM là tam giác đều.

$\Rightarrow AM=AB=3$.

Câu 26. Tam giác ABC có $a=6, b=4\sqrt{2}, c=2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM=3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{9}$. **B.** 9. **C.** 3. **D.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{108}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: Trong tam giác ABC có $a=6\Rightarrow BC=6$ mà $BM=3$ suy ra M là trung điểm BC.

Suy ra: $AM^2 = m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = 9 \Rightarrow AM = 3$.

Câu 27. Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. $S = \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$. **B.** $S = a^2+b^2+c^2$.

C. $S = \dfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)$. **D.** $S = 3(a^2+b^2+c^2)$.

Lời giải

Chọn#A.

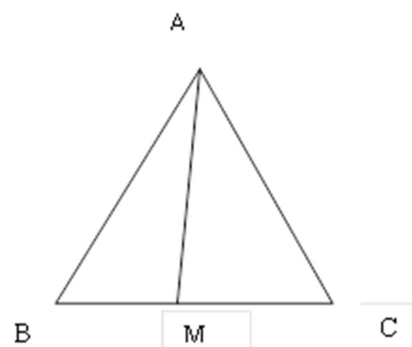
Ta có: $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Câu 28. Cho ΔABC có $AB = 2$; $AC = 3$; $\widehat{A} = 60^0$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

A. $\dfrac{12}{5}$. **B.** $\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$. **C.** $\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là chân đường phân giác góc#**A.**

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$.

Lại có $\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $BM = \dfrac{2\sqrt{7}}{5}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABM ta được:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos\widehat{ABC} = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC} = \dfrac{108}{25}.$$

$\Rightarrow AM = \dfrac{6\sqrt{3}}{5}$.

CÁ CH 2

Gọi M là chân đường phân giác trong của góc A.

Vì đoạn thẳng AM chia tam giác ABC thành hai phần nên ta có:

$S_{ABC}=S_{ABM}+S_{ACM}\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}AB.AM.\sin\widehat{BAM}+\frac{1}{2}AC.AM.\sin\widehat{MAC}$

$\Leftrightarrow AM=\dfrac{AB.AC.\sin 60^\circ}{(AB+AC).\sin 30^\circ}$.

$\Leftrightarrow AM=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$.

Vậy $AM=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$.

Câu 29. Cho tam giác ABC. Tìm công thức sai:

A. $\dfrac{a}{\sin A}=2R$. **B.** $\sin A=\dfrac{a}{2R}$. **C.** $b\sin B=2R$. **D.** $\sin C=\dfrac{c\sin A}{a}$.

Lời giải

Chọn **C.**

Ta có: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

Câu 30. Cho ΔABC với các cạnh $AB=c, AC=b, BC=a$. Gọi R,r,S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $S=\dfrac{abc}{4R}$. **B.** $R=\dfrac{a}{\sin A}$.

C. $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$. **D.** $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$.

Lời giải

Chọn **B.**

Theo định lí Sin trong tam giác, ta có $\dfrac{a}{\sin A}=2R$.

Câu 31. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC}=60^\circ$ và cạnh $BC=\sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $R=4$. **B.** $R=1$. **C.** $R=2$. **D.** $R=3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Leftrightarrow R=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{2.\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$.

Câu 32. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC có $AC=4$ cm, góc $\widehat{A}=60^\circ$, $\widehat{B}=45^\circ$. Độ dài cạnh BC là

A. $2\sqrt{6}$. **B.** $2+2\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{3}-2$. **D.** $\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}\Leftrightarrow BC=\dfrac{4.\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{6}$.

Câu 33. Cho ΔABC có $AB=5$; $\widehat{A}=40^\circ$; $\widehat{B}=60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

A. $3,7$. **B.** $3,3$. **C.** $3,5$. **D.** $3,1$.

Lời giải

Chọn B

$\widehat{C} = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} = 180° - 40° - 60° = 80°$

Áp dụng định lý sin: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\sin C}.\sin A = \dfrac{5}{\sin 80°}\sin 40° \approx 3,3$.

Câu 34. Cho tam giác ABC thoả mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B + \cos C = 2\cos A$. **B.** $\sin B + \sin C = 2\sin A$.

C. $\sin B + \sin C = \dfrac{1}{2}\sin A$. **D.** $\sin B + \cos C = 2\sin A$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{\frac{b+c}{2}}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{b+c}{2\sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A.$$

Câu 35. Tam giác ABC có $a = 16,8$; $\widehat{B} = 56^0 13'$; $\widehat{C} = 71^0$. Cạnh c bằng bao nhiêu?

A. 29,9. **B.** 14,1. **C.** 17,5. **D.** 19,9.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: Trong tam giác ABC: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 \Rightarrow \widehat{A} = 180^0 - 71^0 - 56^0 13' = 52^0 47'$.

Mặt khác $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \dfrac{a.\sin C}{\sin A} = \dfrac{16,8.\sin 71^0}{\sin 52^0 47'} \simeq 19,9.$

Câu 36. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 68^0 12'$, $\widehat{B} = 34^0 44'$, $AB = 117$. Tính AC?

A. 68. **B.** 168. **C.** 118. **D.** 200.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: Trong tam giác ABC: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 \Rightarrow \widehat{C} = 180^0 - 68^0 12' - 34^0 44' = 77^0 4'$.

Mặt khác $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \dfrac{AB.\sin B}{\sin C} = \dfrac{117.\sin 34^0 44'}{\sin 77^0 4'} \simeq 68.$

Câu 37. Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$. **B.** $S = \dfrac{1}{2}ac\sin A$. **C.** $S = \dfrac{1}{2}bc\sin B$. **D.** $S = \dfrac{1}{2}bc\sin B$.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$.

Câu 38. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a. Góc $\widehat{BAD}=30^\circ$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

A. $\frac{a^2}{4}$. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $S_{ABCD}=AB.AD.\sin\widehat{BAD}=a.a.\sin 30^\circ=\frac{1}{2}a^2$.

Câu 39. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB=3, BC=5, CA=6$.

A. $\sqrt{56}$. **B.** $\sqrt{48}$. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $p=\frac{AB+AC+BC}{2}=\frac{3+5+6}{2}=7$.

Vậy diện tích tam giác ABC là: $S=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}=\sqrt{7(7-3)(7-6)(7-5)}=\sqrt{56}$.

Câu 40. Cho ΔABC có $a=6, b=8, c=10$. Diện tích S của tam giác trên là:

A. 48. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 30.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: Nửa chu vi ΔABC: $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Áp dụng công thức Hê-rông: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}=24$.

Câu 41. Cho ΔABC có $a=4, c=5, B=150^0$. Diện tích của tam giác là:

A. $5\sqrt{3}$. **B.** 5. **C.** 10. **D.** $10\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a.c.\sin B=\frac{1}{2}.4.5.\sin 150^0=5$.

Câu 42. Một tam giác có ba cạnh là $13,14,15$. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

A. 84. **B.** $\sqrt{84}$. **C.** 42. **D.** $\sqrt{168}$.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: $p=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13+14+15}{2}=21$.

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=84$.

Câu 43. Cho các điểm $A(1;-2), B(-2;3), C(0;4)$. Diện tích ΔABC bằng bao nhiêu?

A. $\frac{13}{2}$. **B.** 13. **C.** 26. **D.** $\frac{13}{4}$.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;5)\Rightarrow AB=\sqrt{34}$, $\overrightarrow{AC}=(-1;6)\Rightarrow AC=\sqrt{37}$, $\overrightarrow{BC}=(2;1)\Rightarrow BC=\sqrt{5}$.

Mặt khác $p=\dfrac{AB+AC+BC}{2}=\dfrac{\sqrt{37}+\sqrt{34}+\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}=\dfrac{13}{2}$.

Câu 44. Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích ΔABC là

A. 12. **B.** 6. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-2)\Rightarrow AB=2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AC}=(5;1)\Rightarrow AC=\sqrt{26}$, $\overrightarrow{BC}=(3;3)\Rightarrow BC=3\sqrt{2}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow AB\perp BC$.

Suy ra: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.BC=6$.

Câu 45. Cho tam giác ABC có $a=4, b=6, c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

A. $9\sqrt{15}$. **B.** $3\sqrt{15}$. **C.** 105. **D.** $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{4+6+8}{2}=9$.

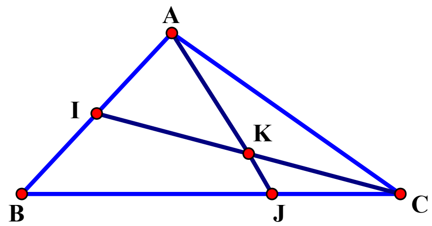
Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=3\sqrt{15}$.

Câu 46. Cho tam giác ABC. Biết $AB=2$; $BC=3$ và $\widehat{ABC}=60°$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

A. $5+\sqrt{7}$ và $\frac{3}{2}$. **B.** $5+\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

C. $5\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $5+\sqrt{19}$ và $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Chọn B

Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\widehat{ABC} = 4 + 9 - 2.2.3.\cos 60° = 13 - 6 = 7$.

Suy ra $AC = \sqrt{7}$.

Chu vi tam giác ABC là $AB + AC + BC = 2 + 3 + \sqrt{7}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC.\sin\widehat{ABC} = \frac{1}{2}.2.3.\sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (đvdt).

Câu 47. Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 15$, $m_b = 12$, $m_c = 9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng

A. 72. **B.** 144. **C.** 54. **D.** 108.

Lời giải 1

Chọn A

Theo bài toán ta có

$$\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = 15^2 \\ m_b^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} = 12^2 \\ m_c^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} = 9^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 900 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Ta có $p = \frac{a+b+c}{2} = 5 + 2\sqrt{13} + \sqrt{73}$, áp dụng công thức He-rong ta có

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 72$.

Cách 2:

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$,

Theo định lý trung tuyến có:

$$\begin{cases} 4m_a^2 + a^2 = 2(b^2+c^2) \\ 4m_b^2 + b^2 = 2(a^2+c^2) \\ 4m_c^2 + c^2 = 2(b^2+a^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 900 \\ 2a^2 - b^2 + 2c^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 291 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 208 \\ c^2 = 292 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Có $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ Suy ra $S_{ABC} = 72$

Câu 48. Cho tam giác ΔABC có $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác ΔABC là.

A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. **B.** 8. **C.** $8\sqrt{3}$ **D.** $80\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{7^2+5^2-2.7.5.\frac{3}{5}}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$. Suy ra $\left[\begin{array}{l}\sin A=\frac{4}{5}\\ \sin A=-\frac{4}{5}\end{array}\right.$ vì $0\le \widehat{A}\le 180^0$ nên $\sin A=\frac{4}{5}$

$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.7.5.\frac{4}{5}=14$ mà $S=\frac{1}{2}a.h_a \Leftrightarrow 14=\frac{1}{2}.4\sqrt{2}.h_a \Leftrightarrow h_a=\frac{7\sqrt{2}}{2}$

Câu 49. Cho tam giác ABC có $AB=2a$; $AC=4a$ và $\widehat{BAC}=120^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC?

A. $S=8a^2$. **B.** $S=2a^2\sqrt{3}$. **C.** $S=a^2\sqrt{3}$. **D.** $S=4a^2$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích của tam giác ABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}.2a.4a.\sin 120^\circ=2a^2\sqrt{3}$ (đvdt).

Câu 50. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi G là trọng tâm ABC. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $R=AG=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 51. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. 12. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 24.

Lời giải

Chọn C

Theo đề bài tam giác ABC có chu vi bằng 12 nên nửa chu vi là $p=\frac{12}{2}$; bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1, tức là ta có: $r=1$.

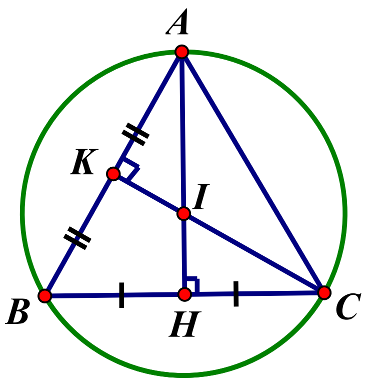
Diện tích tam giác ABC là: $S=p.r=6.1=6$.

Câu 52. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{4a}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{8a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{6a}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H, K lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC;

I là giao điểm của AH và CK.

Lúc đó, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có: $AH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Do đó: $R = AI = \dfrac{2}{3}AH = \dfrac{2}{3}a\sqrt{3} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Câu 53. Cho tam giác ABC có $BC = \sqrt{6}$, $AC = 2$ và $AB = \sqrt{3}+1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng định lý cosin ta có $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{1}{2}$ suy ra $A = 60°$.

Áp dụng định lý sin ta có $R = \dfrac{a}{2\sin A} = \sqrt{2}$.

Câu 54. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{8}{9}$. **C.** $\dfrac{4}{5}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

Do đó bán kính đường tròn nội tiếp $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{\frac{1}{2}AB.AC}{\frac{1}{2}(AB+AC+BC)} = \dfrac{3.4}{3+4+5} = 1$.

Câu 55. Cho ΔABC có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:

A. 8,125. **B.** 130. **C.** 8. **D.** 8,5.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a.b.c}{4R} \Leftrightarrow R = \dfrac{a.b.c}{4S} = \dfrac{13.14.15}{4.84} = \dfrac{65}{8}$.

Câu 56. Cho ΔABC có $S=10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p=10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:

A. 3. **B.** 2. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn **D.**

Ta có: $S=pr\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{10\sqrt{3}}{10}=\sqrt{3}$.

Câu 57. Một tam giác có ba cạnh là $26,28,30$. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

A. 16. **B.** 8. **C.** 4. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn **B.**

Ta có: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{26+28+30}{2}=42$.

$S=pr\Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=\dfrac{\sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)}}{42}=8$.

Câu 58. Một tam giác có ba cạnh là $52,56,60$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

A. $\dfrac{65}{8}$. **B.** 40. **C.** $32,5$. **D.** $\dfrac{65}{4}$.

Lời giải

Chọn **C.**

Ta có: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{52+56+60}{2}=84$.

Suy ra: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)}=1344$.

Mà $S=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{abc}{4S}=\dfrac{52.56.60}{4.1344}=\dfrac{65}{2}$.

Câu 59. Tam giác với ba cạnh là $5;12;13$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

A. 6. **B.** 8. **C.** $\dfrac{13}{2}$. **D.** $\dfrac{11}{2}$.

Lời giải

Chọn **C.**

Ta có: $5^2+12^2=13^2\Rightarrow R=\dfrac{13}{2}$. (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\dfrac{1}{2}$ cạnh huyền).

Câu 60. Tam giác với ba cạnh là $5;12;13$ có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn#A.

Ta có: $p=\dfrac{5+12+13}{2}=15$. Mà $5^2+12^2=13^2 \Rightarrow S=\dfrac{1}{2}.5.12=30.$

Mặt khác $S=p.r \Rightarrow r=\dfrac{S}{p}=2.$

Câu 61. Tam giác với ba cạnh là $6;8;10$ có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn#A.

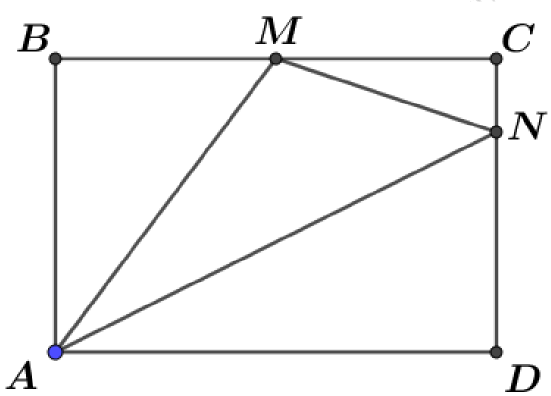
Ta có: $6^2+8^2=10^2 \Rightarrow R=\dfrac{10}{2}=5.$ (Tam giác vuông bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\dfrac{1}{2}$ cạnh huyền).

Câu 62. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB=4, BC=6$, M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND=3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có

$MC=3, NC=1 \Rightarrow MN=\sqrt{10}$

$BM=3, AB=4 \Rightarrow AM=5$

$AD=6, ND=3 \Rightarrow AN=\sqrt{45}$

$p=\dfrac{AM+AN+MN}{2}=\dfrac{\sqrt{10}+5+\sqrt{45}}{2}$

$S_{AMN}=\sqrt{p(p-AM)(p-AN)(p-MN)}=\dfrac{15}{2}$

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác AMN là: $R=\dfrac{AM.AN.MN}{4S_{AMN}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

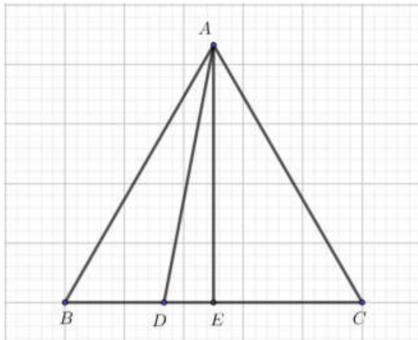
Câu 63. Cho tam giác đều ABC ;gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ADC. Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$. **C.** $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$. **D.** $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DB}$. Do đó $DC=2DB$.



Gọi S là diện tích của tam giác ACD và E là trung điểm của BC.

Đặt $AB=a$. Suy ra $\begin{cases} S=\frac{2}{3}S_{ABC}=\frac{2}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{6} \\ AD=\sqrt{AE^2+ED^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{6}\right)^2}=\frac{2a\sqrt{7}}{6} \end{cases}$.

Hơn nữa $\begin{cases} S=\frac{AD+DC+AC}{2}.r=\frac{5+\sqrt{7}}{6}a.r \\ S=\frac{AD.DC.BC}{4R}=\frac{2a^3\sqrt{7}}{36R} \end{cases}\Rightarrow S^2=\frac{\left(5+\sqrt{7}\right)ar.2a^3\sqrt{7}}{6.36R}=\frac{\sqrt{7}\left(5+\sqrt{7}\right)a^4r}{108R}$.

Hay $\frac{a^4}{12}=\frac{\sqrt{7}\left(5+\sqrt{7}\right)a^4r}{108R}\Leftrightarrow\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{7}\left(5+\sqrt{7}\right).12}{108}\Leftrightarrow\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{7}\left(5+\sqrt{7}\right)}{9}$.