

# BÀI 5. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ $0^\circ$ ĐẾN $180^\circ$

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

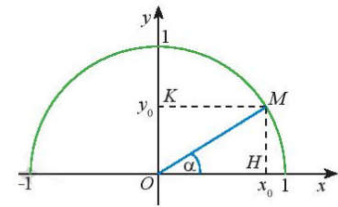
## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Giá trị lượng giác

Với mỗi góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) ta xác định được một điểm  $M$  duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho  $\widehat{xOM} = \alpha$ . Gọi  $(x_0; y_0)$  là toạ độ điểm  $M$ , ta có:

- Tung độ  $y_0$  của  $M$  là **sin** của góc  $\alpha$ , kí hiệu là  $\sin \alpha = y_0$ ;
- Hoành độ  $x_0$  của  $M$  là **côsin** của góc  $\alpha$ , kí hiệu là  $\cos \alpha = x_0$ ;
- Tỉ số  $\frac{y_0}{x_0}$  ( $x_0 \neq 0$ ) là **tang** của góc  $\alpha$ , kí hiệu là  $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$ ;
- Tỉ số  $\frac{x_0}{y_0}$  ( $y_0 \neq 0$ ) là **côtang** của góc  $\alpha$ , kí hiệu là  $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$ .

Các số  $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$  được gọi là các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ .



### 2. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

- Mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$$

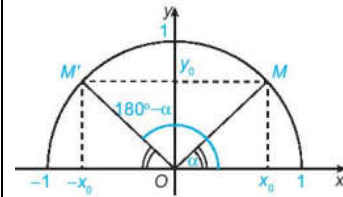
$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha; \quad \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$$

- Mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha \quad (\alpha \neq 90^\circ);$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha \quad (0^\circ < \alpha < 180^\circ).$$



### 3. Một số đẳng thức lượng giác

Cho góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ). Khi đó:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ); \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 90^\circ, \alpha \neq 180^\circ)$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ); \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ)$$

### 4. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

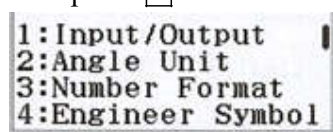
Dưới đây là bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt.

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
Giá trị lượng giác									
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

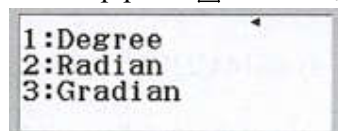
Chú ý: Trong bảng, kí hiệu "||" để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

### 5. Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của một góc

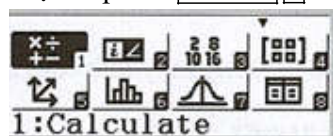
- Sau khi mở máy, ấn các phím **[SHIFT]** **[MENU]** để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.
- Ấn phím **[2]** để vào chế độ cài đặt đơn vị đo góc.



- Ấn tiếp phím **[1]** để xác định đơn vị đo góc là “độ”.



- Lại ấn phím **[MENU]** **[1]** để vào chế độ tính toán.



## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### Dạng 1: Xác định giá trị lượng giác của góc đặc biệt

#### Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc;
- Sử dụng mối quan hệ giữa hai góc phụ nhau, bù nhau.
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt;
- Sử dụng các hệ thức lượng cơ bản.

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP.

- Câu 1.** Tìm các giá trị lượng giác của góc  $135^\circ$ .
- Câu 2.** Tìm các giá trị lượng giác của góc  $120^\circ$ .
- Câu 3.** Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức sau:  
 $T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 165^\circ - \cos 180^\circ$ .
- Câu 4.** Cho biết  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ;  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ . Tính  $\sin 150^\circ$ ;  $\cos 135^\circ$ ;  $\tan 120^\circ$ .
- Câu 5.** Tính các giá trị lượng giác của các góc  $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ .
- Câu 6.** Tính giá trị của  $T = 4 \cos 60^\circ + 2 \sin 135^\circ + 3 \cot 120^\circ$ .
- Câu 7.** Chứng minh rằng:  
 a)  $\sin 138^\circ = \sin 42^\circ$ ;  
 b)  $\tan 125^\circ = -\cot 35^\circ$ .
- Câu 8.** Chứng minh các hệ thức sau:

- a)  $\sin 20^\circ = \sin 160^\circ$   
 b)  $\cos 50^\circ = -\cos 130^\circ$ .
- Câu 9.** Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:  
 a)  $(2\sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3\tan 150^\circ) \cdot (\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$ ;  
 b)  $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$ ;  
 c)  $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ .  
 Chú ý.  $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2, \cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2, \tan^2 \alpha = (\tan \alpha)^2, \cot^2 \alpha = (\cot \alpha)^2$ .
- Câu 10.** Đơn giản các biểu thức sau:  
 a)  $\sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$   
 b)  $2\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cot \alpha - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \tan \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha)$ , với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .
- Câu 11.** Không dùng máy tính, tính giá trị của các biểu thức sau:  
 a)  $A = \sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 150^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 120^\circ$ ;  
 b)  $B = \tan 135^\circ + \cot 60^\circ \cdot \cot 30^\circ - \tan 60^\circ \cdot \tan 150^\circ$   
 c)  $C = 2\sin 60^\circ \cdot \tan 150^\circ - \cos 180^\circ \cdot \cot 45^\circ$ .
- Câu 12.** Cho biết  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan 45^\circ = 1$ . Sử dụng mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau, phụ nhau để tính giá trị của  $E = 2\cos 30^\circ + \sin 150^\circ + \tan 135^\circ$ .
- Câu 13.** Tính giá trị của các biểu thức:  
 a)  $A = \sin 45^\circ + 2\sin 60^\circ + \tan 120^\circ + \cos 135^\circ$   
 b)  $B = \tan 45^\circ \cdot \cot 135^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 120^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ$   
 c)  $C = \cos^2 5^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 85^\circ$   
 d)  $D = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4\tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ + 12\sin^2 107^\circ - 2\tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$   
 e)  $E = 4\tan 32^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cot 148^\circ + \frac{5\cot^2 108^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5\sin^2 72^\circ$ .
- Câu 14.** Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay):  
 a)  $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$   
 b)  $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$   
 c)  $C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$   
 d)  $D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$   
 e)  $E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cot 100^\circ$ .
- Câu 15.** Tính giá trị các biểu thức sau:  
 a)  $A = \sin 13^\circ \cdot \cos 131^\circ + \sin 167^\circ \cdot \cos 49^\circ$   
 b)  $B = \cot 35^\circ \cdot \cot 65^\circ \cdot \cot 125^\circ \cdot \cot 155^\circ$ .
- Câu 16.** Tính giá trị của biểu thức  $T = \sin^2 25^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 115^\circ + \sin^2 165^\circ$ .
- Câu 17.** Dùng máy tính cầm tay, hãy thực hiện các yêu cầu dưới đây:  
 a) Tính  $\sin 168^\circ 45' 33''; \cos 17^\circ 22' 35''; \tan 156^\circ 26' 39''; \cot 56^\circ 36' 42''$ .  
 b) Tìm  $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ , trong các trường hợp sau:  
 i)  $\sin \alpha = 0,862$ .  
 ii)  $\cos \alpha = -0,567$   
 iii)  $\tan \alpha = 0,334$ .
- Câu 18.** Dùng máy tính cầm tay, tính.  
 a)  $\sin 144^\circ 23' 57''$ ;  
 b)  $\cos 123^\circ 5' 48''$ ;  
 c)  $\tan 115^\circ 43' 26''$ ; d)  $\cot 139^\circ 35' 28''$ .
- Câu 19.** Dùng máy tính cầm tay, tìm  $x (0^\circ \leq x \leq 180^\circ)$ , biết:

- a)  $\cos x = -0,511$ ;
- b)  $\sin x = 0,456$ ;
- c)  $\tan x = -0,473$ ;
- d)  $\cot x = -0,258$ .

**Câu 20.** Dùng máy tính cầm tay, tính.

- a)  $\sin 138^\circ 12' 24''$ ;
- b)  $\cos 144^\circ 35' 12''$ ;
- c)  $\tan 152^\circ 35' 44''$ .

**Câu 21.** Dùng máy tính cầm tay, tìm  $x$ , biết:

- a)  $\cos x = -0,234$ ;
- b)  $\sin x = 0,812$ ;
- c)  $\cot x = -0,333$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 22.** Tính:

$$A = 2 \cos 30^\circ + \sin 150^\circ + \tan 135^\circ$$

$$B = \tan^2 120^\circ + \cot 30^\circ - 2 \sin 120^\circ + \sin 180^\circ + 4 \cos 90^\circ + 2 \cos 120^\circ$$

**Câu 23.** Tính giá trị các giá biểu thức sau đây:

$$S = \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 60^\circ + \cos 84^\circ + \cos 96^\circ + \cos 120^\circ + \cos 144^\circ + \cos 168^\circ;$$

$$P = \tan 10^\circ \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ \tan 50^\circ \tan 60^\circ \tan 70^\circ \tan 80^\circ.$$

**Câu 24.** Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$$

$$b) B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$$

$$c) C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$$

**Câu 25.** Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$$

$$b) B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$$

$$c) C = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$$

**Câu 26.** Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) A = \sin 45^\circ + 2 \cos 60^\circ - \tan 30^\circ + 5 \cot 120^\circ + 4 \sin 135^\circ$$

$$b) B = 4a^2 \sin^2 45^\circ - 3(a \tan 45^\circ)^2 + (2a \cos 45^\circ)^2$$

$$c) C = \sin^2 35^\circ - 5 \sin^2 73^\circ + \cos^2 35^\circ - 5 \cos^2 73^\circ$$

$$d) D = \frac{12}{1 + \tan^2 76^\circ} - 5 \tan 85^\circ \cot 95^\circ + 12 \sin^2 104^\circ$$

$$e) E = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ;$$

$$f) F = \cos^3 1^\circ + \cos^3 2^\circ + \cos^3 3^\circ + \dots + \cos^3 179^\circ + \cos^3 180^\circ.$$

**Câu 27.** Tính giá trị các biểu thức sau:

$$P = 4 \tan(x + 4^\circ) \cdot \sin x \cdot \cot(4x + 26^\circ) + \frac{8 \tan^2(3^\circ - x)}{1 + \tan^2(5x + 3^\circ)} + 8 \cos^2(x - 3^\circ)$$

khí  $x = 30^\circ$

**Câu 28.** Tính giá trị của các biểu thức

$$a) A = (2 \sin 45^\circ + 2 \cos 135^\circ + \cot 45^\circ)(\sin 180^\circ + 3 \cos 180^\circ + \cos 90^\circ)$$

$$b) B = \cos 35^\circ + \cos 47^\circ + \cos 78^\circ + \cos 145^\circ + \cos 133^\circ + \cos 102^\circ;$$

$$c) C = \frac{2 \cos 0^\circ - 3 \sin 0^\circ + \tan 45^\circ}{2 \cos 180^\circ - 3 \sin 180^\circ};$$

$$d) D = \frac{\sin a \cos b + \tan c}{\sin(\vec{a} + b) + \cos(a + b) + \cot c} \text{ với } a = 60^\circ, b = 30^\circ, c = 45^\circ.$$

**Câu 29.** Tính các biểu thức sau đây:

a)  $A = \cos^2 22^\circ + \cos^2 23^\circ + \cos^2 41^\circ + \cos^2 49^\circ + \cos^2 68^\circ + \cos^2 67^\circ$ ;

b)  $B = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ .

**Dạng 2: Chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào  $x$ , đơn giản biểu thức.**

**Phương pháp giải**

- Sử dụng các hệ thức lượng cơ bản;
- Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác;
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP.

**Câu 30.** Chứng minh các hệ thức sau:

a)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ;

b)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$ ;

c)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ .

**Câu 31.** Chứng minh rằng trong tam giác  $ABC$  ta có:

a)  $\tan B = -\tan(A + C)$ ;

b)  $\sin C = \sin(A + B)$ .

**Câu 32.** Chứng minh rằng với mọi góc  $x (0^\circ \leq x \leq 90^\circ)$ , ta đều có:

a)  $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ ;

b)  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ ;

c)  $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (x \neq 90^\circ)$

d)  $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} (x \neq 0^\circ)$ .

**Câu 33.** Chứng minh rằng:

a)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ ;

b)  $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$ ;

c\*)  $\sqrt{\sin^4 \alpha + 6 \cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = 4$ .

**Câu 34.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:

a)  $\sin A = \sin(B + C)$

b)  $\cos A = -\cos(B + C)$ .

**Câu 35.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh:

a)  $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$

b)  $\tan \frac{B+C}{2} = \cot \frac{A}{2}$ .

**Câu 36.** Cho  $90^\circ < \alpha < 180^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ$  và  $\alpha - \beta = 90^\circ$ . Chứng minh:

a)  $\sin \alpha = \cos \beta$ ;

b)  $\cos \alpha = -\sin \beta$ ;

c)  $\tan \alpha = -\cot \beta$ .

**Câu 37.** Cho  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$ . Chứng minh:

a)  $\sin A = \sin(B + C)$ ;

b)  $\cos A + \cos(B + C) = 0$ ;

c)  $\tan A + \tan(B + C) = 0 (A \neq 90^\circ)$ ;

d)  $\cot A + \cot(B + C) = 0$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 38.** Chứng minh các đẳng thức sau( giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

b)  $\frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$

c)  $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

**Câu 39.** Chứng minh các hệ thức sau đây:

a)  $\cos \alpha + \sin \alpha \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$  với  $\alpha \neq 90^\circ$ ;

b)  $\cot^2 x \cdot \cos^2 x = \cot^2 x - \cos^2 x$ ;

c)  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ .

**Câu 40.** Chứng minh các đẳng thức (với điều kiện đẳng thức có nghĩa)

a)  $\frac{\cos a}{1 + \sin a} + \tan a = \frac{1}{\cos a} (a \neq 90^\circ)$ ;

b)  $1 + \sin a + \cos a + \tan a = (1 + \cos a)(1 + \tan a) (a \neq 90^\circ)$

c)  $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{\cot a}{\sin a} = \frac{1}{1 - \cos a}$ .

**Câu 41.** Chứng minh:

a)  $\frac{\sin^2 x}{\cos x(1 + \tan x)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x(1 + \cot x)} = \sin x - \cos x$

b)  $\left( \tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \left( \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$

**Câu 42.** Rút gọn các biểu thức sau đây

a)  $A = \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$ ;

b)  $B = \sin x \cos x (\tan x + \cot x)$ ;

c)  $C = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$ .

**Câu 43.** Đơn giản các biểu thức sau(giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

a)  $A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x(1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$

b)  $B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$ .

**Câu 44.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$ .

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6 \cos^2 x + 3 \cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6 \sin^2 x + 3 \sin^4 x}$$

**Câu 45.** Chứng minh các đẳng thức sau( giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a)  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$ ;

b)  $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$ ;

c)  $\frac{\tan^3 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{\cot^3 x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \cot^3 x$

d)  $\sin^2 x - \tan^2 x = \tan^6 x (\cos^2 x - \cot^2 x)$ ;

e)  $\frac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a \cdot \tan^2 b} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b}$ .

**Câu 46.** Đơn giản các biểu thức sau ( giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a)  $A = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2(180^\circ - x) - \cos^2(180^\circ - x)$ ;

b)  $B = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} - \cos^2 x$

$$c) C = \frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\cos^2 a + \sin a(\sin a - \cos a)}$$

$$d) D = \sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} + \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}}.$$

**Câu 47.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào  $\alpha$  (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa).

$$a) A = 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha);$$

$$b) B = \cot^2 30^\circ (\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha) + 4 \cos 60^\circ (\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha) - \sin^6 (90^\circ - \alpha) (\tan^2 x - 1)^3$$

$$c) C = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2);$$

$$d) D = \frac{\sin^4 x + 3 \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \cos^4 x - 1}$$

### Dạng 3: Xác định giá trị của một biểu thức lượng giác có điều kiện

#### Phương pháp giải

- Dựa vào các hệ thức lượng cơ bản;
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác;
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 48.** Tìm góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) trong mỗi trường hợp sau:

$$a) \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$b) \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$c) \tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$d) \cot \alpha = -1.$$

**Câu 49.** Cho góc  $\alpha$ ,  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$  thỏa mãn  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ .

a) Tính  $\tan \alpha$ .

b) Tính giá trị của biểu thức  $P = \tan \alpha + 2 \cot \alpha$ .

**Câu 50.** Tìm góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ) trong mỗi trường hợp sau:

$$a) \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b) \sin \alpha = 0$$

$$c) \tan \alpha = 1$$

$$d) \cot \alpha \text{ không xác định.}$$

**Câu 51.** Cho góc  $\alpha$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ . Tính giá trị của biểu thức

$$F = \frac{\tan \alpha + 2 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}.$$

**Câu 52.** Cho góc  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) thỏa mãn  $\tan \alpha = 3$ .

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } P = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}.$$

**Câu 53.** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $\tan \alpha = 2$ . Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) G = 2 \sin \alpha + \cos \alpha;$$

$$b) H = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$$

**Câu 54.** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ,  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính giá trị của biểu thức

$$K = \frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$$

**Câu 55.** Cho góc  $\alpha$  với  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = 2 \sin^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha$ .

**Câu 56.** Cho góc  $x$  với  $\cos x = -\frac{1}{2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $S = 4 \sin^2 x + 8 \tan^2 x$ .

**Câu 57.** Cho  $\tan \alpha = -2$ . Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{\cos \alpha + 3 \sin \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}$ .

### BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 58.** a) Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $\cos \alpha$  và  $\tan \alpha$

b) Cho  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ . Tính  $\sin \alpha$  và  $\cot \alpha$

c)  $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ . Tính các giá trị lượng giác còn lại.

**Câu 59.** a) Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Tính  $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ .

b) Cho  $\tan \alpha = \sqrt{2}$ . Tính  $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

**Câu 60.** Biết  $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm  $\sin x \cos x$  và  $|\sin^4 x - \cos^4 x|$ ;

b) Chứng minh rằng  $|m| \leq \sqrt{2}$ .

**Câu 61.** Tính các giá trị lượng giác còn lại, biết

a)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  với  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ;

b)  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$ ;

c)  $\cot \alpha = -\sqrt{2}$ ;

d)  $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$  và  $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ .

**Câu 62.** a) Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  với  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Tính  $B = \frac{3 \cot \alpha + 2 \tan \alpha + 1}{\cot \alpha + \tan \alpha}$

b) Cho  $\cot \alpha = 5$ . Tính:  $D = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$

**Câu 63.** Biết  $\tan x + \cot x = m$ .

a) Tìm:  $\tan^2 x + \cot^2 x$

b)  $\frac{\tan^6 x + \cot^6 x}{\tan^4 x + \cot^4 x}$

**Câu 64.** Cho  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{12}{25}$ . Tính  $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$ .

**Câu 65.** a) Cho  $\cos x = -\frac{3}{5}$ . Tính  $\sin x, \tan x, \cot x$ .

b) Cho  $\tan x = 4$  ( $0^\circ < x < 90^\circ$ ). Tính  $\sin x, \cos x$ .

c) Cho  $\cot x = -2$  ( $90^\circ < x < 180^\circ$ ). Tính  $\sin x, \cos x$ .

**Câu 66.** a) Cho  $\tan x + \cot x = m$ . Tính  $\tan^2 x + \cot^2 x, \tan^3 x + \cot^3 x$ .



b) Tính  $B = \frac{3\sin x + 2\cos x}{5\sin x - \cos x}$ , biết  $\tan x = 4$ .

c) Tính  $C = 2\sin^4 x + 4\cos^6 x$ , biết  $5\sin^4 x + 3\cos^4 x = 2$ .

#### Dạng 4. Bài toán thực tế

### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 67.** Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa (khoảng 12 giờ), em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất, đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước và độ dài của bóng thước. Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc vào thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ  $\phi$  và ngày thứ  $N$  trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời  $\alpha$  còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90^\circ - \phi - \left| \cos \left( \left( \frac{2(N+10)}{365} - m \right) 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ$$

trong đó  $m = 0$  nếu  $1 \leq N \leq 172$ ,  $m = 1$  nếu  $173 \leq N \leq 355$ ,  $m = 2$  nếu  $356 \leq N \leq 365$ .

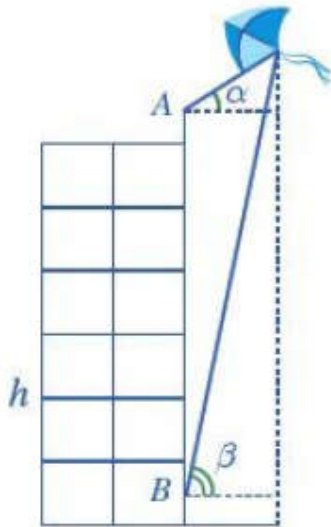
a) Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ  $\phi = 20^\circ$ .

b) Hãy xác định vĩ độ tại nơi em sinh sống và tính góc nghiêng của Mặt Trời tại đó theo hai cách đã được đề cập trong bài toán (đo trực tiếp và tính theo công thức) và so sánh hai kết quả thu được.

**Chú ý.** Công thức tính toán nói trên chính xác tới  $\pm 0,5^\circ$ .

Góc nghiêng của Mặt Trời có ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất, chẳng hạn, vào mùa hè, góc nghiêng lớn nên nhiệt độ cao.

**Câu 68.** Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc điều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc điều và phương nằm ngang) là  $\alpha = 35^\circ$ ; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn B cũng quan sát chiếc điều và thấy góc nâng là  $\beta = 75^\circ$ ; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn B cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của tòa nhà là  $h = 20$  m (Hình). Chiếc điều bay cao bao nhiêu mét so mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



**Câu 69.** Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa, em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất rồi đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước và độ dài của bóng thước.

Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc vào thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ  $\phi$  và ngày thứ  $N$  trong năm, góc nghiêng Mặt Trời  $\alpha$  còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90^\circ - \phi - \left| \cos \left( \left( \frac{2(N+10)}{365} - m \right) 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ$$

trong đó  $m = 0$  nếu  $1 \leq N \leq 172$ ,  $m = 1$  nếu  $173 \leq N \leq 355$ ,  $m = 2$  nếu  $356 \leq N \leq 365$ .

**Chú ý.** Công thức tính toán trên chính xác tới  $\pm 0,5^\circ$ . Góc nghiêng của Mặt Trời có ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, vì vậy một năm được chia thành các mùa, chẳng hạn, vào mùa hè (giữa năm), góc nghiêng lớn nên sự hấp thụ nhiệt cao và làm nhiệt độ Trái Đất cao.

a) Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày thứ 69 trong năm (ngày 10-3 đối với năm mà tháng Hai có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ  $\phi = 42^\circ$ .

b) Hãy xác định vĩ độ tại nơi em sinh sống và tính góc nghiêng của Mặt Trời tại đó theo hai cách đã được đề cập trong bài toán (đo trực tiếp và tính theo công thức) và so sánh hai kết quả thu được.

**Câu 70.** Thang xếp hình chữ  $A$  gồm 2 thang đơn tựa vào nhau. Để đảm bảo an toàn, mỗi thang đơn tạo với mặt đất một góc  $60^\circ$ . Nếu muốn xếp một thang chữ  $A$  cao  $2,5m$  tính từ mặt đất thì chiều dài mỗi thang đơn phải dài bao nhiêu mét?

### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Cho  $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ . Chọn câu trả lời đúng.

- A.  $\cos \alpha < 0$ .      B.  $\sin \alpha > 0$ .      C.  $\tan \alpha < 0$ .      D.  $\cot \alpha > 0$ .

**Câu 2.** Cho  $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$  và  $\alpha + \beta = 180^\circ$ . Chọn câu trả lời sai.

- A.  $\sin \alpha + \sin \beta = 0$ .  
B.  $\cos \alpha + \cos \beta = 0$ .  
C.  $\tan \alpha + \tan \beta = 0$ .  
D.  $\cot \alpha + \cot \beta = 0$ .

#### BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 3.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **đúng**?

- A.  $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .      D.  $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

**Câu 4.** Giá trị của  $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       D. 1

**Câu 5.** Giá trị của  $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A.  $\frac{4}{\sqrt{3}}$       B.  $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$       C.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$       D. 2

**Câu 6.** Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

- A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$       B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$   
C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$       D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$

**Câu 7.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ .      B.  $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$ .      C.  $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$ .      D.  $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$ .

**Câu 8.** Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A.  $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ .      B.  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$ .  
C.  $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$ .      D.  $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$ .

**Câu 9.** Giá trị  $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$  bằng bao nhiêu?

- A. 1.      B.  $\sqrt{2}$ .      C.  $\sqrt{3}$ .      D. 0.

**Câu 10.** Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A.  $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$ . B.  $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$ .

C.  $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ . D.  $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ .

**Câu 11.** Giá trị của  $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$  bằng bao nhiêu?

A. 2. B. 0. C.  $\sqrt{3}$ . D. 1.

**Câu 12.** Tính giá trị của biểu thức  $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$ .

A.  $P=1$ . B.  $P=0$ . C.  $P=\sqrt{3}$ . D.  $P=-\sqrt{3}$ .

**Câu 13.** Giá trị của  $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$  là

A.  $\frac{1}{2}$ . B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . C. 1. D. -1.

**Câu 14.** Giá trị của biểu thức  $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$  là

A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

**Câu 15.** Giá trị của biểu thức  $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$  là

A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

**Câu 16.** Tổng  $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$  bằng

A. 21. B. 23. C. 22. D. 24.

**Câu 17.** Giá trị của  $A = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$  là

A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

**Câu 18.** Giá trị của  $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$  là

A.  $\sqrt{2}$ . B. 2. C. -2. D. 1.

**Câu 19.** Biểu thức  $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$  có giá trị bằng

A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.

**Câu 20.** Cho  $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$ . Tính giá trị của biểu thức sau:  $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ .

A.  $A=12$ . B.  $A=11$ . C.  $A=13$ . D.  $A=5$ .

**Câu 21.** Biết  $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ . Hỏi giá trị của  $\sin^4 a + \cos^4 a$  bằng bao nhiêu?

A.  $\frac{3}{2}$ . B.  $\frac{1}{2}$ . C. -1. D. 0.

**Câu 22.** Biểu thức  $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$  có giá trị bằng:

A. 1. B. 2. C. -3. D. 0.

**Câu 23.** Biểu thức:  $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.

**Câu 24.** Biểu thức  $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$  có giá trị bằng

A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.

**Câu 25.** Cho  $\sin x + \cos x = m$ . Tính theo  $m$  giá trị của  $M = \sin x \cdot \cos x$ .

A.  $m^2 - 1$ . B.  $\frac{m^2 - 1}{2}$ . C.  $\frac{m^2 + 1}{2}$ . D.  $m^2 + 1$ .

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: **Nguyễn Vương**

🔗 Tải nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>

Nguyễn Bảo Vương