

# BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

## C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 1.** Nếu hai điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$  thì độ dài đoạn thẳng  $MN$  bằng bao nhiêu?
- A.  $MN = 4$   
 B.  $MN = 2$   
 C.  $MN = 16$ ;  
 D.  $MN = 256$ .

**Lời giải**

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4 = |\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{NM}| \cdot \cos 180 = -4 \Leftrightarrow MN^2 = 4 \Rightarrow MN = 2. \text{ Chọn A}$$

- Câu 2.** Phát biểu nào sau đây là đúng?
- A. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ;  
 B. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;  
 C. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;  
 D. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

- Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$  bằng:
- A.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .  
 B.  $-AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .  
 C.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .  
 D.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ACB}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

- Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  bằng:
- A.  $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .  
 B.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .  
 C.  $-AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .  
 D.  $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

- Câu 5.** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Tập hợp các điểm  $M$  nằm trong mặt phẳng thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  là:
- A. Đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AB$ .  
 B. Đường tròn tâm  $B$  bán kính  $AB$ .  
 C. Đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .  
 D. Đường tròn đường kính  $AB$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

- Câu 6.** Nếu hai điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -9$  thì:
- A.  $MN = 9$ .  
 B.  $MN = 3$ .  
 C.  $MN = 81$ .  
 D.  $MN = 6$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

**BÀI TẬP BỔ SUNG**

- Câu 7.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vector cùng hướng và đều khác vector  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .      **B.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .      **C.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ .      **D.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Do  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vector cùng hướng nên  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ .

Vậy  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

- Câu 8.** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khi  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .  
**A.**  $\alpha = 180^\circ$ .      **B.**  $\alpha = 0^\circ$ .      **C.**  $\alpha = 90^\circ$ .      **D.**  $\alpha = 45^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

Mà theo giả thiết  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ , suy ra  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

- Câu 9.** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .  
**A.**  $\alpha = 30^\circ$ .      **B.**  $\alpha = 45^\circ$ .      **C.**  $\alpha = 60^\circ$ .      **D.**  $\alpha = 120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

- Câu 10.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

**A.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .      **B.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$       **C.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$       **D.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  là góc  $\hat{A}$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$ .

Do đó  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$ .

- Câu 11.** Cho  $M, N, P, Q$  là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

**A.**  $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$ .      **B.**  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$ .      **D.**  $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ .

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

**Câu 12.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$       **B.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$       **C.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$       **D.**  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$  nên  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

**Câu 13.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ .      **B.**  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$ .      **C.**  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$ .      **D.**  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$ .

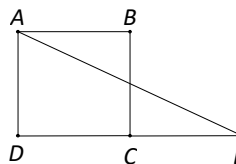
**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $C$  là trung điểm của  $DE$  nên  $DE = 2a$ .

Khi đó  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2$ .



**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  là:

- A.** một điểm.      **B.** đường thẳng.      **C.** đoạn thẳng.      **D.** đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta có  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$ .

Vậy tập hợp các điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .

**Câu 15.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a = 2$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?

- A.**  $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$       **B.**  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$ .  
**C.**  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$       **D.**  $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta đi tính tích vô hướng ở các phương án. So sánh về trái với về phải.

Phương án A:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos 60^\circ = 2x \Rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$  nên loại A.

Phương án B:  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = BC \cdot AC \cos 120^\circ = -2$  nên loại **B.**

Phương án C:  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$ ,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -2$  nên chọn **C.**

**Câu 16.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $\hat{A} = 120^\circ$  và  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A.**  $\frac{a^2}{2}$ .      **B.**  $-\frac{a^2}{2}$ .      **C.**  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .      **D.**  $-\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = BA \cdot CA \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}a^2$ .

**Câu 17.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .      B.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương án A:  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$  suy ra  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$  nên loại A.

Phương án B:  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$  và  $\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  suy ra  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  nên loại B.

Phương án C:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = AB \cdot AB \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = AB^2$ .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot DC \cdot \cos 180^\circ = -AB^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$  nên chọn C.

**Câu 18.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$ .  
C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương án A: Do  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = DA \cdot CB \cdot \cos 0^\circ = a^2$  nên loại A.

Phương án B: Do  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot CD \cdot \cos 180^\circ = -a^2$  nên chọn B.

**Câu 19.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ ;  $I$  là trung điểm của  $AD$ . Khi đó  $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$  bằng:

- A.  $\frac{9a^2}{2}$ .      B.  $-\frac{9a^2}{2}$ .      C.  $0$ .      D.  $9a^2$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} = -\frac{9a^2}{2}$  nên chọn B.

**Câu 20.** Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có góc  $\hat{B} = 50^\circ$ . Hệ thức nào sau đây là **sai**?

- A.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$ .      B.  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$ .      C.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$ .      D.  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương án A:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 130^\circ$  nên loại A.

Phương án B:  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 40^\circ$  nên loại B.

Phương án C:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 50^\circ$  nên loại C.

Phương án D:  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 140^\circ$  nên chọn D.

**Câu 21.** Cho hình vuông  $ABCD$ , tính  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

- A.  $\frac{1}{2}$ .      B.  $-\frac{1}{2}$ .      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Đầu tiên ta đi tìm số đo của góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$  sau đó mới tính  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

$$\text{Vì } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 135^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Câu 22.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$ .      B.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$ .      C.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$ .

**Lời giải****Chọn A**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

**Câu 23.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

A. 0.      B.  $a$ .      C.  $\frac{a^2}{2}$ .      D.  $a^2$ .

**Lời giải****Chọn A**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \cdot a \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

**Câu 24.** Cho  $M$  là trung điểm  $AB$ , tìm biểu thức sai:

A.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$ .      B.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$ .  
C.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$ .      D.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$ .

**Lời giải****Chọn D**

Phương án A:  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$  ngược hướng suy ra  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = MA \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot AB$  nên loại A.

Phương án B:  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$  ngược hướng suy ra  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$  nên loại B.

Phương án C:  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$  cùng hướng suy ra  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = AM \cdot AB$  nên loại C.

Phương án D:  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$  ngược hướng suy ra  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$  nên chọn D.

**Câu 25.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$  và  $H$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$

A.  $\frac{3a^2}{4}$ .      B.  $\frac{-3a^2}{4}$ .      C.  $\frac{3a^2}{2}$ .      D.  $\frac{-3a^2}{2}$ .

**Lời giải****Chọn B**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA} = AH \cdot CA \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CA}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 150^\circ = -\frac{3a^2}{4}.$$

**Câu 26.** Biết  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Câu nào sau đây đúng

- A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.  
B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc  $120^\circ$ .  
C.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.  
D. A, B, C đều sai.

**Lời giải****Chọn C**

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \text{ nên } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ ngược hướng}$$

**Câu 27.** Cho 2 vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 5$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A.  $\sqrt{21}$ . B.  $\sqrt{61}$ . C. 21. D. 61.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{21}.$$

**Câu 28.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A.  $3a^2$ . B.  $-3a^2$ . C.  $3a$ . D. 0.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot BC \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$$

**Câu 29.** Cho 2 vectơ đơn vị  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ . Hãy xác định  $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$

- A. 7. B. 5. C. -7. D. -5.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, (3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 20\vec{b}^2 + 7\vec{a}\vec{b} = -7.$$

**Câu 30.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ . Tính  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$

- A.  $-9a^2$ . B.  $15a^2$ . C. 0. D.  $9a^2$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Vì } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -9a^2 \text{ nên chọn A.}$$

**Câu 31.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  có  $AC = 9$ ,  $BC = 5$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. 9. B. 81. C. 3. D. 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 81 \text{ nên chọn B.}$$

**Câu 32.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A.  $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$ . B.  $\sqrt{7 - \sqrt{3}}$ . C.  $\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$ . D.  $\sqrt{7 + 2\sqrt{3}}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}}.$$

**Câu 33.** Cho hai điểm  $B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$  là :

- A. Đường tròn đường kính  $BC$ . B. Đường tròn  $(B; BC)$ .  
C. Đường tròn  $(C; CB)$ . D. Một đường khác.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Tập hợp điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $BC$ .

**Câu 34.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  là :

- A. Đường tròn đường kính  $AB$ .  
 B. Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .  
 C. Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AC$ .  
 D. Đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

Tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .

**Câu 35.** Cho hai điểm  $A(2, 2), B(5, -2)$ . Tìm  $M$  trên tia  $Ox$  sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$

- A.  $M(1, 6)$ .      B.  $M(6, 0)$ .      C.  $M(1, 0)$  hay  $M(6, 0)$ .      D.  $M(0, 1)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $M(x; 0)$ , với  $x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\overrightarrow{AM} = (x-2; -2)$ ,  $\overrightarrow{BM} = (x-5; 2)$ . Theo YCBT ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) - 4 = x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow M(1; 0) \\ x=6 \Rightarrow M(6; 0) \end{cases}, \text{ nên chọn } \mathbf{C}.$$

**Câu 36.** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$       B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$   
 C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$       D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số  $\frac{1}{2}$  và  $\frac{1}{4}$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ .  $\frac{1}{4}$  nên thử kiểm tra đáp án C và **D**.

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) \text{ Chọn C.}$$

- A đúng, vì  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
- B đúng, vì  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$   
 $\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

**Câu 37.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$       B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  là góc ngoài của góc  $\widehat{B}$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

**Câu 38.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$  và chiều cao  $AH$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A.  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$       B.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$       **D.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$**

**Lời giải**

**Chọn D**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$  là góc ngoài của góc  $\hat{A}$  nên  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

**Câu 39.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $AB = c$ ,  $AC = b$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

A.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$       **B.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$**       C.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$       D.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$$

**Cách khác.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  suy ra  $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$$

**Câu 40.** Cho ba điểm  $A, B, C$  thỏa  $AB = 2 \text{ cm}$ ,  $BC = 3 \text{ cm}$ ,  $CA = 5 \text{ cm}$  Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$       **B.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$**       C.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$       D.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $AB + BC = CA \Rightarrow$  ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng và  $AC \longrightarrow I(4; -1)$ . nằm giữa  $A, C$ .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$$

$$\text{Cách khác. Ta có } AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$$

**Câu 41.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  Tính  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

**A.  $P = b^2 - c^2$**       B.  $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$       C.  $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$       D.  $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$$



**Câu 42.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

A.  $P = -1$

B.  $P = 3a^2$

C.  $P = -3a^2$

D.  $P = 2a^2$

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết suy ra  $AC = a\sqrt{2}$

$$\text{Ta có } P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2$$

$$= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2$$

**Câu 43.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$ .      B.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$ .

C.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ .

D.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì  $M$  là trung điểm của  $BC$  suy ra  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2}$$

**Câu 44.** Cho ba điểm  $O, A, B$  không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng  $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  là

A. tam giác  $OAB$  đều.      B. tam giác  $OAB$  cân tại  $O$ .

C. tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$ .

D. tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA$$

**Câu 45.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 8$ ,  $AD = 5$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$ .

B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$ .

C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$ .

D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  theo các vector có giá vuông góc với nhau.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64.$$

**Câu 46.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 8$  và  $BD = 6$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$ .

B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ .

C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$ .

D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi  $O = AC \cap BD$ , giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  theo các vector có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2} AC^2 = 32.$$

**Câu 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$  là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. **D. đường tròn.**

**Lời giải**

**Chọn**

**D.**

Gọi  $I$  là trung điểm  $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ .

Ta có  $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}$ . (\*)

Biểu thức (\*) chứng tỏ  $MA \perp MI$  hay  $M$  nhìn đoạn  $AI$  dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $AI$ .

**Câu 48.** Tìm tập các hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$  với  $A, B, C$  là ba đỉnh của tam giác.

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. **D. đường tròn.**

**Lời giải**

**Chọn**

**D.**

Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

Ta có  $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$ . (\*)

Biểu thức (\*) chứng tỏ  $MB \perp MG$  hay  $M$  nhìn đoạn  $BG$  dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $BG$ .

**Câu 49.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định có khoảng cách bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$  là:

- A. một điểm. **B. đường thẳng.** C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn**

**B.**

Gọi  $C$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $B$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2$ .

Kết hợp với giả thiết, ta có  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB.$$

Vậy tập hợp các điểm  $N$  là đường thẳng qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .

**Câu 50.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định và  $AB = 8$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$  là:

- A. một điểm.** B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB \longrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết, ta có  $MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 16 = \frac{8^2}{4} - 16 = 0 \longrightarrow M \equiv I$ .

- Câu 51.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4a^2$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2$ .

**Lời giải**

**Cách 1:** Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  và từ câu a ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$ ,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

**Cách 2:** Từ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$  và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$$

- Câu 52.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính giá trị của biểu thức  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$
- A.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$ .      B.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$ .  
 C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$ .      D.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$ .

**Lời giải**

Theo quy tắc hình bình hành ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \widehat{ACB}$$

$$(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ vì } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD})$$

Mặt khác  $\widehat{ACB} = 45^\circ$  và theo định lý Pitago ta có:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2.$$

- Câu 53.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AB = BC = 2\sqrt{5}$ ,  $CD = BD = 5\sqrt{2}$ ,  $AD = 3\sqrt{10}$ ,  $AC = 10$ . Tìm cosin góc giữa hai vector  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{DB}$
- A.  $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$ .      B.  $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$ .      C.  $\frac{4}{5\sqrt{2}}$ .      D.  $\frac{3}{5\sqrt{2}}$ .

**Lời giải**

Với điểm  $O$  bất kỳ ta có:

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\text{Mặt khác } 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{BC}^2$$

Xây dựng các đẳng thức tương tự thay vào ta tính được

$$2\vec{AC} \cdot \vec{DB} = AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$$

$$\text{Suy ra } \cos(\vec{AC}, \vec{DB}) = \frac{AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2}{AC \cdot BD} = \frac{20 + 50 - 20 - 90}{10.5\sqrt{2}} = -\frac{4}{5\sqrt{2}}.$$

**Câu 54.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $DA, BC$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  biết  $AB = CD = 2a$ ,  $MN = a\sqrt{3}$ .

A.  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 50^\circ$ .    B.  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 60^\circ$ .    C.  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 80^\circ$ .    D.  $(\vec{AB}, \vec{CD}) = 30^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{CD})$  suy ra

$$MN^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{CD}) \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 2a^2.$$

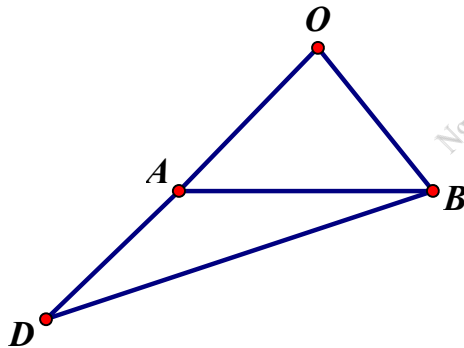
$$\text{Do đó } \cos(\vec{AB}, \vec{CD}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{2a^2}{2a \cdot 2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{AB}, \vec{CD}) = 60^\circ.$$

**Câu 55.** Cho tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$ , cạnh  $OA = 4$ . Tính  $|2\vec{OA} - \vec{OB}|$ .

A.  $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 4$ .    B.  $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 2$ .  
C.  $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 12$ .    D.  $|2\vec{OA} - \vec{OB}| = 4\sqrt{5}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $O$  qua  $A$ .

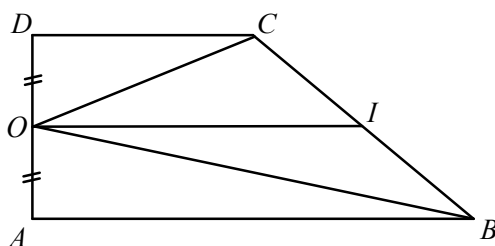
$$|2\vec{OA} - \vec{OB}| = |\vec{OD} - \vec{OB}| = |\vec{BD}| = BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

**Câu 56.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  vuông tại  $A, D$ ;  $AB \parallel CD$ ;  $AB = 2a$ ;  $AD = DC = a$ .  $O$  là trung điểm của  $AD$ . Độ dài vector tổng  $\vec{OB} + \vec{OC}$  bằng

A.  $\frac{a}{2}$ .    B.  $\frac{3a}{2}$ .    C.  $a$ .    D.  $3a$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2OI$ .

Xét hình thang  $ABCD$  có  $OI$  là đường trung bình  $\Rightarrow OI = \frac{AB+CD}{2} = \frac{3a}{2}$ .

Vậy  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$ .

**Câu 57.** Cho  $ABC$  đều cạnh  $2a$  với  $M$  là trung điểm  $BC$ . Khẳng định nào đúng?

- A.  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .      B.  $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Độ dài đường cao  $AM$  trong tam giác đều cạnh  $2a$  là:  $\frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Vậy khẳng định đúng là  $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$ .

**Câu 58.** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  với  $AB = AC = a$ . Khi đó  $|\overrightarrow{2AB} + \overrightarrow{AC}|$  bằng

- A.  $a\sqrt{3}$ .      B.  $a\sqrt{5}$ .      C.  $5a$ .      D.  $2a$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $(|\overrightarrow{2AB} + \overrightarrow{AC}|)^2 = (\overrightarrow{2AB})^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 4AB^2 + AC^2$  (vì  $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ )  
 $= 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow |\overrightarrow{2AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{5}$ .

**Câu 59.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Chọn phát biểu **đúng**.

- A.  $\alpha = 60^\circ$ .      B.  $\alpha = 30^\circ$ .      C.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .      D.  $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 4 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8}$$

**Câu 60.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $4a$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  là

- A.  $8a^2$ .      B.  $8a$ .      C.  $8\sqrt{3}a^2$ .      D.  $8\sqrt{3}a$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

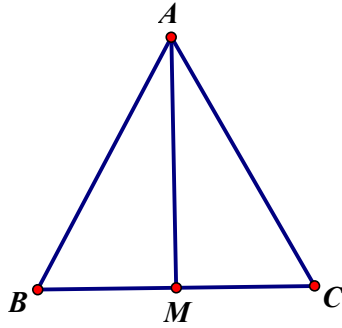
Ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4a \cdot 4a \cdot \cos 60^\circ = 4a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} = 8a^2$ .

**Câu 61.** Cho  $\triangle ABC$  đều;  $AB = 6$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$  bằng

- A.  $-18$ .      B.  $27$ .      C.  $18$ .      D.  $-27$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \widehat{BAM} = 30^\circ$ .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -27.$$

**Câu 62.** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .

- A.  $\sqrt{11}$ .      B.  $\sqrt{13}$ .      C.  $\sqrt{12}$ .      D.  $\sqrt{14}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } (|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}),$$

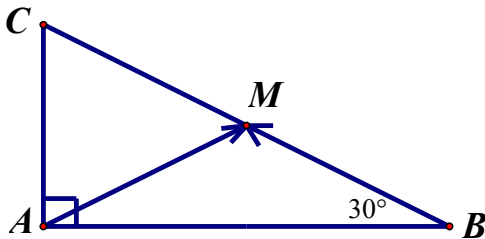
$$\Rightarrow (|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}.$$

**Câu 63.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $AC = 2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ .

- A.  $P = -2$ .      B.  $P = 2\sqrt{3}$ .      C.  $P = 2$ .      D.  $P = -2\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



$$\text{Ta có: } P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$$

$$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$$

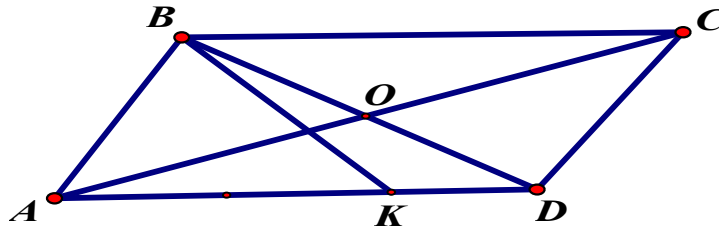
$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

**Câu 64.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 2a$ ,  $AD = 3a$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Điểm  $K$  thuộc  $AD$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A.  $3a^2$ .      B.  $6a^2$ .      C.  $0$ .      D.  $a^2$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có  $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ ;  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Khi đó  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

**Câu 65.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=5$ ,  $AC=8$ ,  $BC=7$  thì  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  bằng:

A. -20.

B. 40.

C. 10.

**D. 20.**

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

**Câu 66.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  sao cho  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và hai vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

A.  $120^\circ$ .

B.  $60^\circ$ .

**C.  $90^\circ$ .**

D.  $30^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì hai vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

**Câu 67.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a$  và  $AD = a\sqrt{2}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .**

B.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$ .

C.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$ .

D.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .

**Lời giải**

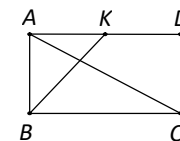
**Chọn A**

Ta có  $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ .

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left( \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0.$$



$$\rightarrow \cos \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ (vì } \widehat{ABC} \text{ nhọn)}.$$

Mặt khác góc giữa hai vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  là góc ngoài của góc  $\widehat{ABC}$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos \widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

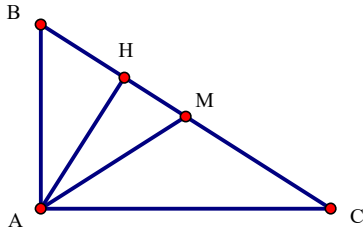
**Câu 68.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$  và có  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$ .

Tính cạnh  $AB, AC$ .

**A.**  $AB = a, AC = a\sqrt{2}$ . **B.**  $AB = a, AC = a$ .

**C.**  $AB = a\sqrt{2}, AC = a$ . **D.**  $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$ .

**Lời giải**



**Chọn A**

Vẽ  $AH \perp BC, H \in BC$ .

Có  $\overline{HM}$  là hình chiếu của  $\overline{AM}$  lên  $BC$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{BC}, \text{ mà } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}, BC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } \overline{HM} \text{ cùng chiều } \overline{BC} \text{ và } HM \cdot BC = \frac{a^2}{2}, HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Có } BH = BM - HM = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Có } AB^2 = BH \cdot BC = a^2 \Rightarrow AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

**Câu 69.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

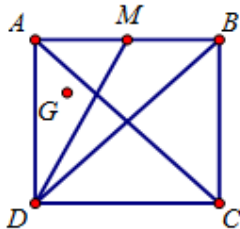
**A.**  $\frac{21a^2}{4}$ .

**B.**  $\frac{11a^2}{4}$ .

**C.**  $\frac{9a^2}{4}$ .

**D.**  $\frac{a^2}{4}$ .

**Lời giải**



$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ADM \text{ nên } \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$$



Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có  $\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$  và

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})] = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD})$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\text{Ta lại có } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } \overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) &= \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)\right) \\ &= \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}. \end{aligned}$$

**Câu 70.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$

A.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .      B.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$ .      C.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ .      D.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}$ .

**Lời giải**

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7} \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 7 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$$

**Câu 71.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng  $60^\circ$ . Xác định cosin góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  với  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

A.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{2}$ .      B.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{6}$ .      C.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{4}$ .      D.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{3}$ .

**Lời giải**

$$\text{Có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác: } \vec{u}^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \Leftrightarrow |\vec{u}| = 3$$

$$\vec{v}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Leftrightarrow |\vec{v}| = 1$$

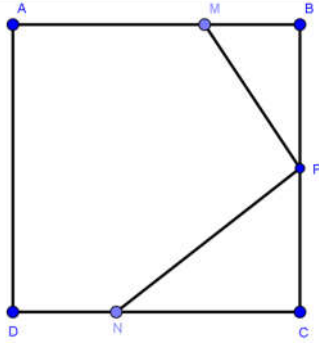
$$\text{Suy ra } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = -\frac{1}{6}$$

**Câu 72.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng 3. Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 1$ , trên cạnh  $CD$  lấy điểm  $N$  sao cho  $DN = 1$  và  $P$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $\cos \widehat{MNP}$ .

A.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$ .      B.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{4\sqrt{10}}$ .

C.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{\sqrt{10}}$ .      D.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$ .

**Lời giải**



Ta có  $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Suy ra  $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$

Mặt khác  $|\overrightarrow{NM}| = \sqrt{10}$ ,  $|\overrightarrow{NP}| = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$ .

**Câu 73.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 2$ .  $M$  là điểm được xác định bởi  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$

A.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$ .      B.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$ .      C.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$ .      D.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$  nên  $3\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{CG} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

Suy ra  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{3}{8}$ .

**Câu 74.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  và  $G$  là trọng tâm. Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

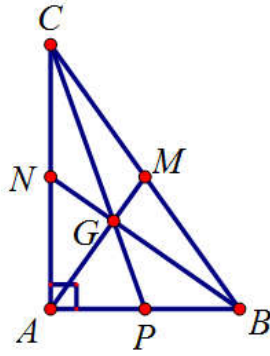
A.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$ .

B.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$ .

C.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$ .

D.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$ .

**Lời giải**



Vì  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$  nên

$$\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$

Dễ thấy tam giác  $ABM$  đều nên  $GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

$$\text{Suy ra } \vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$$

**Câu 75.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng 2. Điểm  $M$  nằm trên đoạn thẳng  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ .

Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = -4$ .      B.  $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 0$ .      C.  $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 4$ .      D.  $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 16$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ  $\vec{MB}, \vec{MN}$  theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

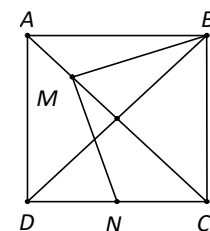
$$\vec{MB} = \vec{AB} - \vec{AM} = \vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC} = \vec{AB} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \vec{AD} + \vec{DN} - \frac{1}{4}\vec{AC} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD})$$

$$= \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AB}. \text{ Suy ra:}$$

$$\vec{MB} \cdot \vec{MN} = \left(\frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AB}\right) = \frac{1}{16}(3\vec{AB} \cdot \vec{AD} + 3\vec{AB}^2 - 3\vec{AD}^2 - \vec{AD} \cdot \vec{AB})$$

$$= \frac{1}{16}(0 + 3a^2 - 3a^2 - 0) = 0.$$



**Câu 76.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$  nằm trên một đường tròn  $(C)$  có bán kính  $R$ . Tính  $R$ .

A.  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .

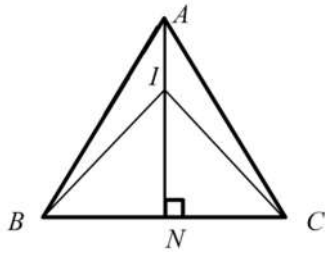
B.  $R = \frac{a}{4}$ .

C.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**D.**  $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Gọi  $N$  là trung điểm đoạn  $BC$ .

Gọi  $I$  là điểm thỏa:  $4\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{IA} + 2\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{IA} + \vec{IN} = \vec{0}$ , nên điểm  $I$  thuộc đoạn thẳng  $AN$  sao cho  $IN = 2IA$ .

Khi đó:  $IA = \frac{1}{3}AN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ , và  $IN = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

$$IB^2 = IC^2 = IN^2 + BN^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}.$$

Ta có:  $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow 4(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = \frac{5a^2}{2}$ .

$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 4IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 6MI^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{12} + 2 \cdot \frac{7a^2}{12} = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

**Câu 77.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh 18cm. Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$  là

A. Tập rỗng.

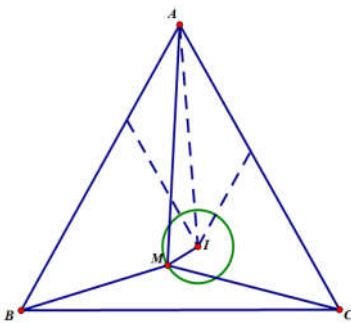
**B.** Đường tròn cố định có bán kính  $R = 2$  cm.

C. Đường tròn cố định có bán kính  $R = 3$  cm.

**D.** Một đường thẳng.

**Lời giải**

**Chọn B**



Ta có  $|\vec{MA} - \vec{MB}| = |\vec{AB}| = 18$ .

Dựng điểm  $I$  thỏa mãn  $2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{9}\vec{AC}$ .

Khi đó:  $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow 9|\vec{MI}| = 18 \Leftrightarrow IM = 2$ .

Do đó tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn cố định có bán kính  $R = 2$  cm.

**Câu 78.** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $J$  thỏa mãn  $\vec{AK} = 3\vec{KJ}$ ,  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , điểm  $K$  thỏa mãn  $\vec{KA} + \vec{KB} + 2\vec{KC} = \vec{0}$ .

Một điểm  $M$  thay đổi nhưng luôn thỏa mãn  $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$ .

Tập hợp điểm  $M$  là đường nào trong các đường sau.

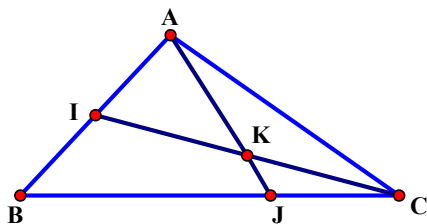
A. Đường tròn đường kính  $IJ$ .

B. Đường tròn đường kính  $IK$ .

C. Đường tròn đường kính  $JK$ .

D. Đường trung trực đoạn  $JK$ .

**Lời giải**



**Chọn C**

Ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$ .

Lấy điểm  $J$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ . Ta có  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ , mà  $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$  nên

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra  $J$  là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng  $BC$  xác định bởi hệ thức  $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ .

Ta có  $3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}$ .

$$\text{Nhu vậy } (3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}) \cdot (4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0.$$

Từ đó suy ra điểm  $M$  thuộc đường tròn đường kính  $JK$ .

Vì  $J, K$  là các điểm cố định nên điểm  $M$  luôn thuộc một đường tròn đường kính  $JK$  là đường tròn cố định (đpcm).

**Câu 79.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Lấy  $M, N, P$  lần lượt nằm trên ba cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$ . Tìm  $x$  để  $AM$  vuông góc với  $NP$ .

**A.**  $x = \frac{5a}{12}$ .

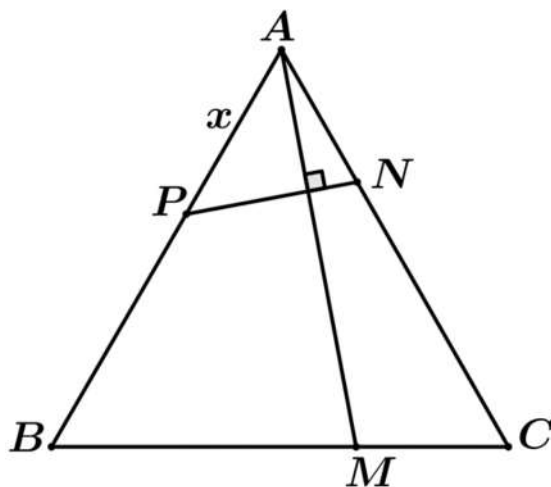
**B.**  $x = \frac{a}{2}$ .

**C.**  $x = \frac{4a}{5}$ .

**D.**  $x = \frac{7a}{12}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



$$\text{Đặt } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}, \text{ ta có } |\vec{b}| = |\vec{c}| = a \text{ và } \vec{b} \cdot \vec{c} = a.a.\cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c})$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3a}(-3x\vec{b} + a\vec{c})$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán ta có } AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (-3x\vec{b} + a\vec{c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x\vec{b} \cdot \vec{b} + a(\vec{b} \cdot \vec{c}) - 6x(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 2a\vec{c} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}.$$

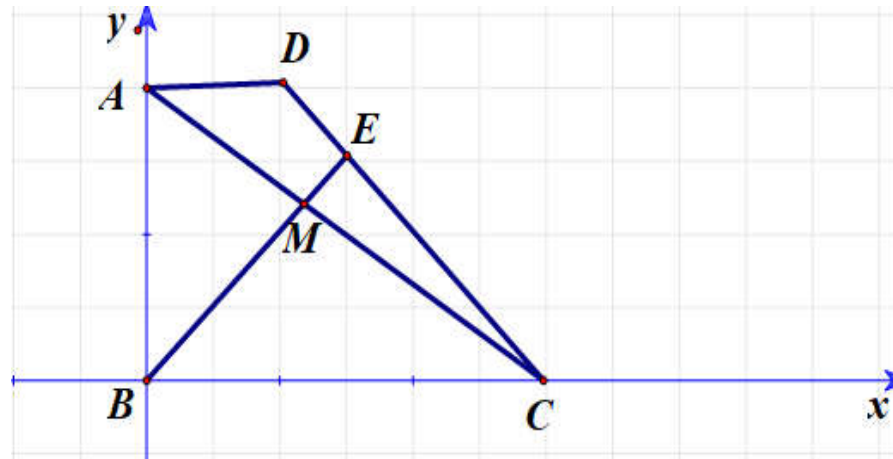
**Câu 80.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đường cao  $AB = 2a$ , các cạnh đáy  $AD = a$  và  $BC = 3a$ . Gọi  $M$  là điểm trên đoạn  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ . Tìm  $k$  để  $BM \perp CD$

- A.  $\frac{4}{9}$ .                      B.  $\frac{3}{7}$ .                      C.  $\frac{1}{3}$ .                      **D.  $\frac{2}{5}$ .**

**Lời giải**

**Chọn D**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm  $B$ , điểm  $A$  thuộc trục  $Oy$  và điểm  $C$  thuộc trục  $Ox$ .



Theo bài ra ta có  $B(0;0)$ ,  $A(0;2)$ ,  $C(3;0)$ ,  $D(1;2)$

Khi đó  $\overrightarrow{AC} = (3; -2)$ . Phương trình tham số của đường thẳng  $AC$  là  $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Gọi  $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2 - 2t)$ . Ta có  $\overrightarrow{BM} = (3t; 2 - 2t)$  và  $\overrightarrow{DC} = (2; -2)$ .

Để  $BM \perp DC$  thì  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$ .

Khi đó  $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{6}{5}; -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$  và  $\overrightarrow{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$ .

Vì  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}$  cùng chiều  $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{52}}{5}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$ .