

## BÀI 8. KHÁI NIỆM VECTO'

- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa vecto'

Vecto' là một đoạn thẳng có hướng.

Vecto' có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là "vecto'  $AB$ ".

Để vẽ vecto'  $\overrightarrow{AB}$  ta vẽ đoạn thẳng  $AB$  và đánh dấu mũi tên ở đầu mút  $B$



Đối với vecto'  $\overrightarrow{AB}$ , ta gọi:

- Đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $A, B$  là giá của vecto'  $\overrightarrow{AB}$



- Độ dài đoạn thẳng  $AB$  là độ dài của vecto'  $\overrightarrow{AB}$ , kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ .

#### 2. Hai vecto' cùng phương, cùng hướng

Hai vecto' được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

**Nhận xét:** Nếu hai vecto' cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng hoặc chúng ngược hướng.

Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vecto'  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.

#### 3. Vecto' bằng nhau – Vecto' đối nhau

Hai vecto'  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ .

Hai vecto'  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **đối nhau** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài, kí hiệu  $\vec{a} = -\vec{b}$ . Khi đó, vecto'  $\vec{b}$  được gọi là vecto' đối của vecto'  $\vec{a}$ .

#### Chú ý:

a) Cho vecto'  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ . Khi đó độ dài của vecto'  $\vec{a}$  là độ dài đoạn  $OA$ , kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .



b) Cho đoạn thẳng  $MN$ , ta luôn có  $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$ .

#### 4. Vecto'-không

Ta biết rằng mỗi vecto' hoàn toàn được xác định khi biết điểm đầu và điểm cuối của nó. Với một điểm  $A$  bất kì, ta quy ước có một vecto' đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là  $A$ .

Vecto' đó được kí hiệu là  $\overrightarrow{AA}$  và gọi là vecto'-không (có gạch nối giữa hai từ).

Vecto' có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là **vecto'-không**, kí hiệu là  $\vec{0}$ .

#### Chú ý:

- Quy ước vecto'-không có độ dài bằng 0.

- Vectơ-không luôn cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.
- Mọi vectơ-không đều bằng nhau:  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$  với mọi điểm  $A, B, C, \dots$
- Vectơ đối của vectơ-không là chính nó.

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### Dạng 1. Xác định vectơ, sự cùng phương, cùng hướng, bằng nhau của hai vectơ

Phương pháp

Để xác định một vectơ ta cần xác định điểm đầu và điểm cuối hoặc xác định độ dài và hướng của nó.

Để xét sự cùng phương, cùng hướng của các vectơ ta dùng các khái niệm và nhìn nhận trực quan để rút ra kết luận.

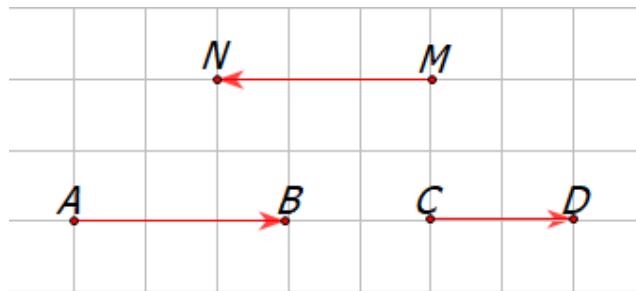
## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Cho hai điểm phân biệt  $H, K$ . Viết hai vectơ mà điểm đầu và điểm cuối là  $H$  hoặc  $K$ .

Lời giải

Hai vectơ thoả mãn yêu cầu đề bài là  $\overrightarrow{HK}$  và  $\overrightarrow{KH}$ .

**Câu 2.** Trong hình bên,



tìm vectơ cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ; ngược hướng với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

Lời giải

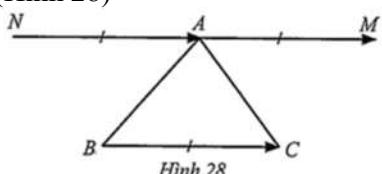
Vectơ  $\overrightarrow{CD}$  cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ , vectơ  $\overrightarrow{MN}$  ngược hướng với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Thực hiện các yêu cầu sau:

- Vẽ điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ .
- Vẽ điểm  $N$  sao cho  $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{BC}$ .

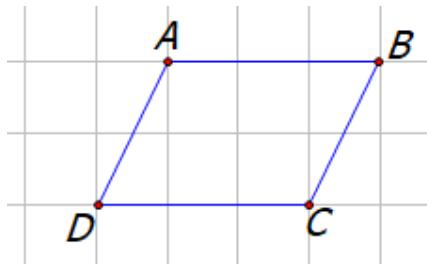
Lời giải

(Hình 28)



Hình 28

**Câu 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$



a) Vectơ nào bằng vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ?

b) Vectơ nào bằng vectơ  $\overrightarrow{AD}$ ?

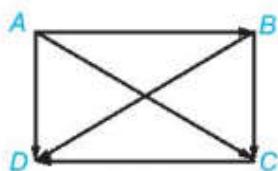
Lời giải

a) Vì  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  cùng hướng và  $AB = DC$  nên  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

b) Vì  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$  cùng hướng và  $AD = BC$  nên  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

**Câu 5.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vecto:  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BD}$ . Những cặp vecto nào trong các cặp vecto trên là bằng nhau?

Lời giải



- Hai vecto  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$  có cùng độ dài và cùng hướng. Do đó, hai vecto  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$  bằng nhau.
- Hai vecto  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  có cùng độ dài và ngược hướng. Do đó, hai vecto  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  không bằng nhau.
- Hai vecto  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BD}$  có cùng độ dài nhưng không cùng phương nên không cùng hướng. Do đó, hai vecto  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BD}$  không bằng nhau.

Vậy trong các cặp vecto đang xét, chỉ có cặp vecto  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$  là bằng nhau ( $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ).

**Câu 6.** Chứng minh rằng ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vecto  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  cùng phương.

Lời giải

Ta có thể

- Giả sử ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng. Khi đó, chúng cùng thuộc một đường thẳng  $d$ . Vậy hai vecto  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  có cùng giá là  $d$ . Suy ra chúng cùng phương.
- Giả sử hai vecto  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  cùng phương. Khi đó, chúng có cùng giá hoặc có hai giá song song với nhau. Mặt khác, giá của các vecto trên đều đi qua  $A$  nên chúng trùng nhau.

Vậy  $A, B, C$  thẳng hàng.

**Câu 7.** Cho 3 vecto  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đều khác  $\vec{0}$ . Những khẳng định nào sau đây là đúng?

- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đều cùng hướng với vecto  $\vec{0}$ ;
- Nếu  $\vec{b}$  không cùng hướng với  $\vec{a}$  thì  $\vec{b}$  ngược hướng với  $\vec{a}$ .
- Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều cùng phương với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.
- Nếu  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều cùng hướng với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

Lời giải

- Đúng vì vecto  $\vec{0}$  cùng hướng với mọi vecto.
- Sai. Chẳng hạn: Hai vecto không cùng hướng nhưng cũng không ngược hướng (do chúng không cùng phương).



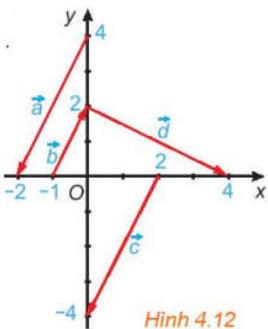
c) Đúng.

- $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều cùng phương với  $\vec{c}$  thì  $a // c$  và  $b // c$  do đó  $a // b$  tức là  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.

d) Đúng.

$\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều cùng hướng với  $\vec{c}$  thì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương, cùng chiều đó đó cùng hướng.

**Câu 8.** Trong Hình 4.12, hãy chỉ ra các vecto cùng phương, các cặp vecto ngược hướng và các cặp vecto bằng nhau.



Hình 4.12

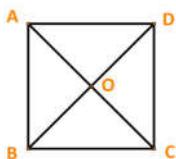
### Lời giải

Các vecto cùng phương là:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Trong đó cặp vecto  $\vec{a}, \vec{c}$  cùng hướng, cặp vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  và cặp vecto  $\vec{b}, \vec{c}$  ngược hướng.

- Câu 9.** Cho hình vuông  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Hãy chỉ ra tập hợp  $S$  gồm tất cả các vecto khác  $\vec{0}$ . Hãy chỉ ra tập hợp  $S$  gồm tất cả các vecto khác  $\vec{0}$ , có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp  $\{A; B; C; D; O\}$ . Hãy chia tập  $S$  thành các nhóm sao cho hai vecto thuộc cùng một nhóm khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

### Lời giải



Tập hợp  $S$  là:

$$S = \{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AO}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BO}; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CO}; \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DO}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OD}; \overrightarrow{OA}\}$$

Các nhóm trong  $S$  là:

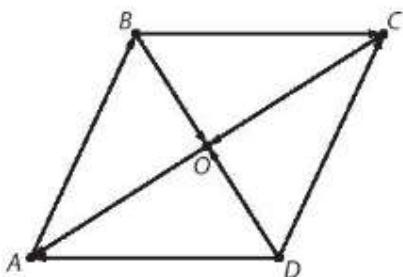
$$\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DC}\}, \{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CD}\}, \{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BC}\}, \{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{CB}\}, \{\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{OC}\}, \{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{CO}\}, \{\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{DO}\}, \{\overrightarrow{BO}; \overrightarrow{OD}\}$$

- Câu 10.** Cho hình thoi  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC, BD$ . Xét các cặp vecto:  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{BO}$  và  $\overrightarrow{DO}$ .

a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương, hướng và độ dài của các vecto trong mỗi cặp trên.

b) Trong các cặp trên, có bao nhiêu cặp gồm hai vecto bằng nhau?

### Lời giải



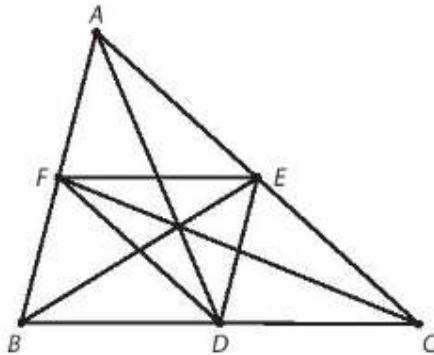
a) Do tứ giác  $ABCD$  là hình thoi, nên các cặp cạnh đối diện song song và bằng nhau, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Từ đó

- Hai vecto  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$  cùng hướng và cùng độ dài;
  - Hai vecto  $\overrightarrow{DA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  ngược hướng và cùng độ dài;
  - Hai vecto  $\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{CD}$  không cùng phương, nhưng có độ dài bằng nhau;
  - Hai vecto  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{CO}$  cùng hướng và cùng độ dài;
  - Hai vecto  $\overrightarrow{BO}$  và  $\overrightarrow{DO}$  cùng độ dài, nhưng ngược hướng.
- b) Theo kết quả của câu a,
- Do hai vecto  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$  cùng hướng và cùng độ dài, nên  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ;

- Do hai vectơ  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{CO}$  cùng hướng và cùng độ dài, nên  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ ;
  - Do hai vectơ  $\overrightarrow{DA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  có cùng độ dài, nhưng ngược hướng nên  $\overrightarrow{DA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  không bằng nhau. Tương tự,  $\overrightarrow{BO}$  và  $\overrightarrow{DO}$  không bằng nhau;
  - Do hai vectơ  $\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{CD}$  không cùng phương, vì vậy  $\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{CD}$  không bằng nhau.
- Vậy, trong những cặp vectơ được xét, có 2 cặp gồm hai vectơ bằng nhau, đó là  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$ ;  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{CO}$ .

- Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$ . Vẽ các đường trung tuyến  $AD, BE, CF$  của tam giác ( $D \in BC, E \in CA, F \in AB$ ). Xét các vectơ có đầu mút được lấy từ các điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Hãy chỉ ra các bộ ba vectơ khác  $\vec{0}$  và đôi một bằng nhau.

Lời giải



Từ giả thiết suy ra  $D$  là trung điểm  $BC$ ,  $E$  là trung điểm  $CA$  và  $F$  là trung điểm  $AB$ . Từ đó  $DE, EF, FD$  là các đường trung bình của tam giác. Do đó, hai đoạn thẳng  $DE, BF$  song song và bằng nhau, hai đoạn thẳng  $DE, FA$  song song và bằng nhau. Suy ra các tứ giác  $AEDF, FEDB$  là hình bình hành. Do đó các vectơ

$\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FA}$  cùng hướng và cùng độ dài; các vectơ  $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{ED}$  cùng hướng và cùng độ dài. Bởi vậy  $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DE}$  và  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{ED}$ .

Bằng lập luận tương tự, cũng được

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE} \text{ và } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EF}$$

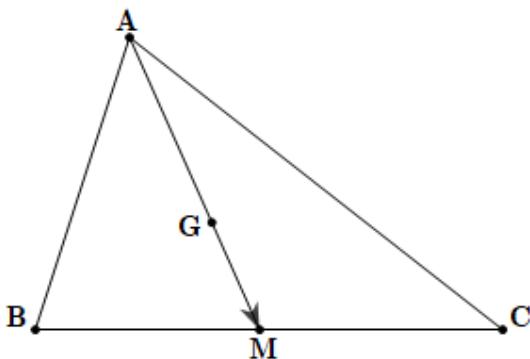
$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DF} \text{ và } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{FD}.$$

- Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là một khẳng định đúng?

- Hai vectơ  $\overrightarrow{GA}$  và  $\overrightarrow{GM}$  cùng phương;
- Hai vectơ  $\overrightarrow{GA}$  và  $\overrightarrow{GM}$  cùng hướng;
- Hai vectơ  $\overrightarrow{GA}$  và  $\overrightarrow{GM}$  ngược hướng;
- Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AM}$  bằng ba lần độ dài của vecto  $\overrightarrow{MG}$ .

Lời giải

Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác, nên  $A, G, M$  thẳng hàng theo thứ tự đó và  $AG = \frac{2}{3}AM$ .



Suy ra hai vectơ  $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}$  ngược hướng và  $|\overrightarrow{GA}| = 2|\overrightarrow{GM}|$ . Do đó  $|\overrightarrow{AM}| = 3|\overrightarrow{GM}|$ .

Từ đó, các khẳng định  $a, c, d$  là các khẳng định đúng; khẳng định  $b$  là khẳng định sai.

- Câu 13.** Cho trước hai vectơ không cùng phương  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Hỏi có hay không một vectơ cùng phương với cả  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ?

#### Lời giải

Có, đó là vectơ  $\vec{0}$ .

- Câu 14.** Cho ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  cùng phương và cùng khác vectơ  $\vec{0}$ . Chứng minh rằng có ít nhất hai vectơ trong chúng có cùng hướng.

#### Lời giải

Với hai vectơ khác vectơ  $\vec{0}$ , cùng phương thì hoặc chúng cùng hướng, hoặc chúng ngược hướng.

Từ đó, nếu  $\vec{a}$  ngược hướng với  $\vec{b}$  và  $\vec{a}$  ngược hướng với  $\vec{c}$  thì hai vectơ  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng.

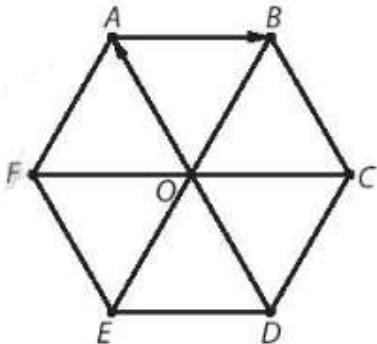
- Câu 15.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Xét các vectơ có hai điểm mút lấy từ các điểm  $O, A, B, C, D, E, F$ .

a) Hãy chỉ ra các vectơ khác vectơ - không và cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{OA}$ .

b) Tìm các vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

#### Lời giải

Do  $ABCDEF$  là lục giác đều tâm  $O$ , nên:



- Các cặp cạnh đối diện  $AB$  và  $ED, BC$  và  $EF, CD$  và  $FA$  song song và bằng nhau;

- Ba đường chéo chính  $AD, BE, CF$  đồng quy tại trung điểm của mỗi đường;

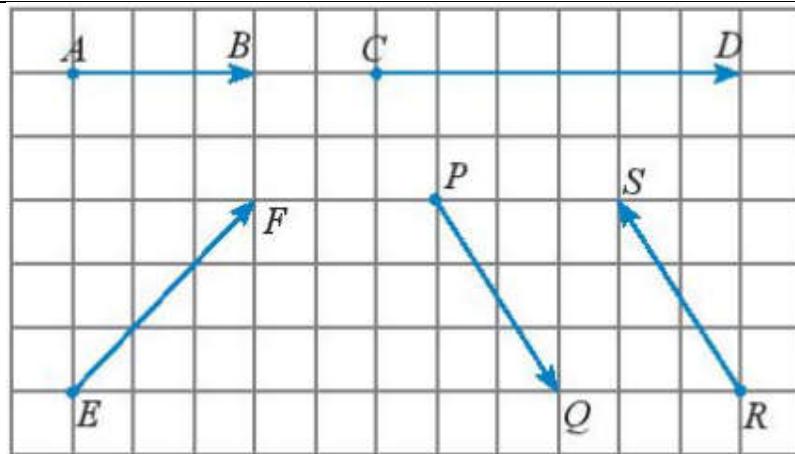
- Mỗi đường chéo chính song song với một cặp cạnh có đầu mút không thuộc đường chéo ấy.

Suy ra:

a) Các vectơ khác  $\vec{0}$ , cùng phương với  $\overrightarrow{OA}$  là:  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}$ .

b) Các vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

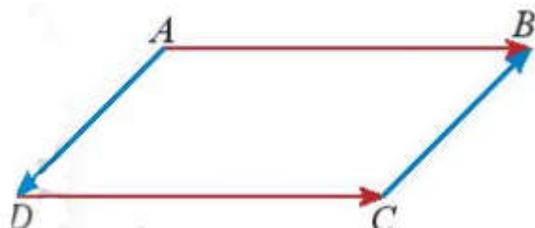
- Câu 16.** Tìm các cặp vectơ cùng phương trong Hình



**Lời giải**

Trong Hình  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  cùng phương vì có giá trị trùng nhau;  $\overrightarrow{PQ}$  và  $\overrightarrow{RS}$  cùng phương vì có giá song song.

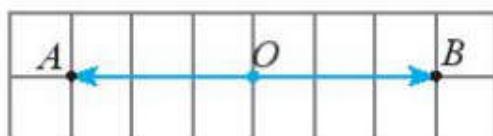
- Câu 17.** a) Tìm trong Hình hai cặp vecto bằng nhau và hai cặp vecto đối nhau.



- b) Cho điểm  $O$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Tìm hai vecto đối nhau.

**Lời giải**

- a) Trong Hình, ta có:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$ .  
b) Ta có  $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$



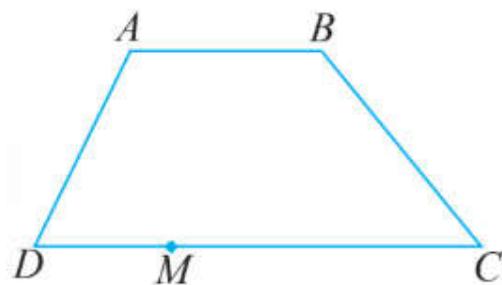
- Câu 18.** Cho đoạn thẳng  $EF$  có độ dài bằng 2 và nhận  $M$  là trung điểm.

- a) Tìm vecto-không trong số các vecto:  $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EE}, \overrightarrow{EM}, \overrightarrow{MM}, \overrightarrow{FF}$ .  
b) Dùng kí hiệu  $\vec{0}$  để biểu diễn các vecto-không đó.

**Lời giải**

- a) Ta có các vecto  $\overrightarrow{EE}, \overrightarrow{MM}, \overrightarrow{FF}$  có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau nên chúng là vecto-không.  
b) Ta viết  $\vec{0} = \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{FF} = \overrightarrow{MM}$ .

- Câu 19.** Cho hình thang  $ABCD$  có hai cạnh đáy là  $AB$  và  $DC$  (hình). Điểm  $M$  nằm trên đoạn  $DC$ .



- a) Gọi tên các vecto cùng hướng với vecto  $\overrightarrow{AB}$

b) Gọi tên các vectơ ngược hướng với vectơ  $\overrightarrow{DM}$

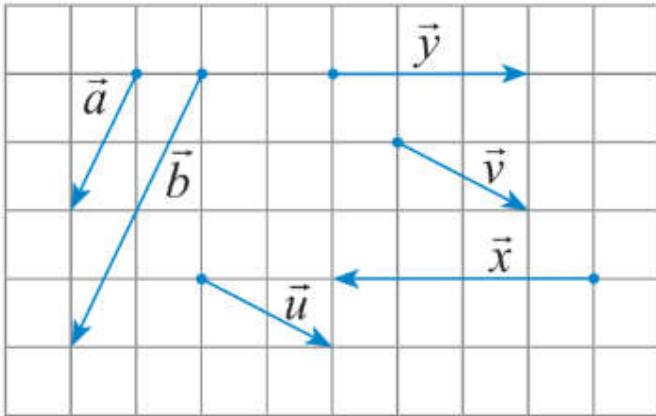
**Lời giải**

a)  $ABCD$  là hình thang nên  $AB // CD$

Các vectơ cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là các vectơ có hướng từ trái qua phải nên đó là:  $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{MC}$

b)  $\overrightarrow{DM}$  có hướng từ trái sang phải nên các vectơ ngược hướng với vectơ  $\overrightarrow{DM}$  là  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD}$

**Câu 20.** Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng hướng, ngược hướng, bằng nhau trong hình.



**Lời giải**

+ Các cặp vectơ cùng hướng là:  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ ;  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$

+ Các cặp vectơ ngược hướng là:  $\vec{x}$  và  $\vec{y}$

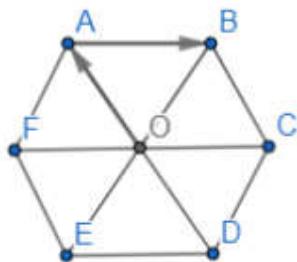
+ Các cặp vectơ bằng nhau là:  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$

**Câu 21.** Gọi  $O$  là tâm hình lục giác đều  $ABCDEF$ .

a) Tìm các vectơ khác vectơ  $\vec{0}$  và cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{OA}$ .

b) Tìm các vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

**Lời giải**



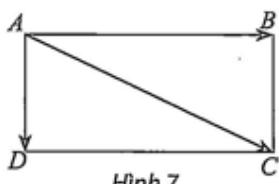
a) Ta có:  $AO // BC // EF$

Suy ra các vectơ khác vectơ khác vecto  $\vec{0}$  và cùng hướng với vecto  $\overrightarrow{OA}$  là:  $\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{EF}$

b) Ta có:  $OA = OB = OC = OD = OE = FO$  và  $AB // EC // ED$

Suy ra các vecto bằng vecto  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

**Câu 22.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ .



Hình 7

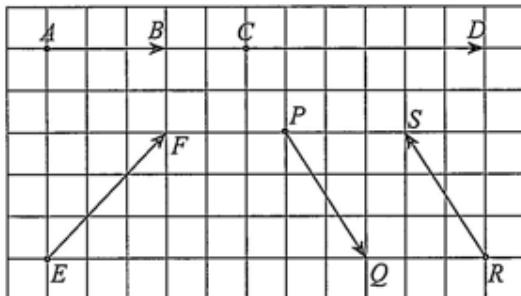
a) Tìm vecto bằng vecto  $\overrightarrow{AD}$ ;

b) Tìm các vecto đối của vecto  $\overrightarrow{AB}$ ;

c) Tìm các vecto có độ dài bằng độ dài của vecto  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải**

- a) Vecto bằng vecto  $\overrightarrow{AD}$  là  $\overrightarrow{BC}$ .  
 b) Vecto đối của vecto  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}$ .  
 c) Vecto có độ dài bằng độ dài của vecto  $\overrightarrow{AC}$  là  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{BD}$ .

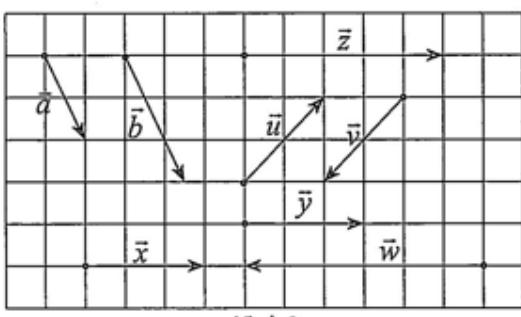
**Câu 23.** Trong Hình 8, tìm các vecto:

Hình 8

- a) cùng phương với vecto  $\overrightarrow{AB}$ ;  
 b) cùng hướng với vecto  $\overrightarrow{AB}$ ;  
 c) vecto đối của vecto  $\overrightarrow{PQ}$ .

**Lời giải**

- a) Vecto cùng phương với vecto  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{CD}$ .  
 b) Vecto cùng hướng với vecto  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{CD}$ .  
 c) Vecto đối của vecto  $\overrightarrow{PQ}$  là  $\overrightarrow{RS}$ .

**Câu 24.** Tìm trong Hình 9, các vecto:

Hình 9

- a) cùng phương với vecto  $\vec{x}$ ;  
 b) cùng hướng với vecto  $\vec{a}$ ;  
 c) ngược hướng với vecto  $\vec{u}$ .

**Lời giải**

- a) Vecto cùng phương với vecto  $\vec{x}$  là  $\vec{y}, \vec{w}, \vec{z}$ .  
 b) Vecto cùng hướng với vecto  $\vec{a}$  là  $\vec{b}$ .  
 c) Vecto ngược hướng với vecto  $\vec{u}$  là  $\vec{v}$ .

**Câu 25.** Cho hình thang  $ABCD$  với hai đáy là  $AB, CD$  và có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ .

- a) Gọi tên hai vecto cùng hướng với  $\overrightarrow{AO}$ .  
 b) Gọi tên hai vecto ngược hướng với  $\overrightarrow{AB}$ .

**Lời giải**

- a) Hai vecto cùng hướng với  $\overrightarrow{AO}$  là  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{OC}$ .  
 b) Hai vecto ngược hướng với  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{CD}$ .

**Câu 26.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Hãy chỉ ra một cặp vecto:

- a) cùng hướng;  
 b) ngược hướng;  
 c) bằng nhau.

**Lời giải**

- a)  $\overrightarrow{AO}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{AC}$ .
- b)  $\overrightarrow{DO}$  ngược hướng với  $\overrightarrow{BD}$ .
- c)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

**Câu 27.** Gọi  $O$  là tâm của hình bát giác đều  $ABCDEFGH$ .

- a) Tìm hai vectơ khác  $\vec{0}$  và cùng hướng với  $\overrightarrow{OA}$ .
- b) Tìm vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{BD}$ .

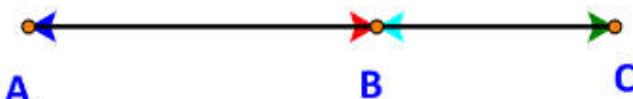
**Lời giải**

- a) Hai vectơ  $\overrightarrow{EO}, \overrightarrow{EA}$  khác  $\vec{0}$  và cùng hướng với  $\overrightarrow{OA}$ .
- b) Vectơ  $\overrightarrow{HF}$  bằng vectơ  $\overrightarrow{BD}$ .

**Câu 28.** Cho  $A, B, C$  là ba điểm thẳng hàng,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Viết các cặp vectơ cùng hướng, ngược hướng trong những vectơ sau:

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$

**Lời giải**



Do các vectơ đều nằm trên đường thẳng  $AB$  nên các vectơ này đều cùng phương với nhau.

Dễ thấy:

Các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$  cùng hướng (từ trái sang phải.)

Các vectơ  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$  cùng hướng (từ phải sang trái.)

Do đó, các cặp vectơ cùng hướng là:

$\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{CB}$

Các cặp vectơ ngược hướng là:

$\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{CB};$

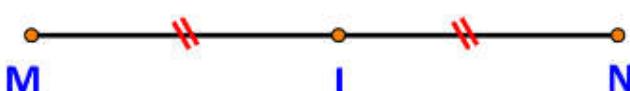
$\overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{CB}$

**Câu 29.** Cho đoạn thẳng  $MN$  có trung điểm là  $I$ .

a) Viết các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là một trong ba điểm  $M, N, I$ .

b) vectơ nào bằng  $\overrightarrow{MI}$ ? Bằng  $\overrightarrow{NI}$ ?

**Lời giải**



a) Các vectơ đó là:  $\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}, \overrightarrow{NI}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NM}$ .

b) Dễ thấy:

+ ) vectơ  $\overrightarrow{IN}$  cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{MI}$ . Hơn nữa:

$$|\overrightarrow{IN}| = IN = MI = |\overrightarrow{MI}|$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IN} = \overrightarrow{MI}$$

+ ) vectơ  $\overrightarrow{IM}$  cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{NI}$ . Hơn nữa:

$$|\overrightarrow{IM}| = IM = NI = |\overrightarrow{NI}|$$

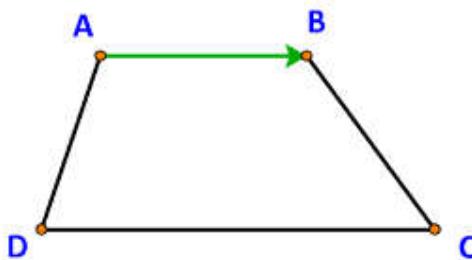
$$\Rightarrow \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{NI}$$

Vậy  $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{MI}$  và  $\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{NI}$

**Câu 30.** Cho hình thang  $ABCD$  có hai đáy là  $AB$  và  $CD$ . Tìm vectơ:

- a) Cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$
- b) Ngược hướng với  $\overrightarrow{AB}$

**Lời giải**



Giá của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là đường thẳng  $AB$ .

Các vectơ cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là:  $\overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{DC}$

a) vectơ  $\overrightarrow{DC}$  cùng hướng với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

b) vectơ  $\overrightarrow{CD}$  ngược hướng với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

**Câu 31.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Viết các vectơ khác  $\vec{0}$  thoả mãn:

a) Có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là một trong các đỉnh của tứ giác trên.

b) Có điểm cuối là  $B$ , điểm đầu là một trong các đỉnh của tứ giác trên.

**Lời giải**

a) Các vectơ thoả mãn là:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ .

b) Các vectơ thoả mãn là:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DB}$ .

**Câu 32.** Cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Chỉ ra ba cặp vectơ khác  $\vec{0}$  có điểm đầu và điểm cuối trong các điểm  $A, B, C$  thoả mãn:

a) Cặp vectơ đó cùng hướng.

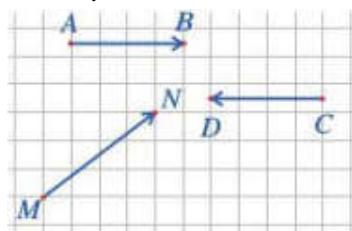
b) Cặp vectơ đó ngược hướng.

**Lời giải**

a) Ba cặp vectơ cùng hướng là:  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{CA}$ .

b) Ba cặp vectơ ngược hướng là:  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{BC}$ .

**Câu 33.** Tính độ dài của các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{MN}$



biết rằng độ dài cạnh của ô vuông bằng  $1\text{cm}$ .

**Lời giải**

$$|\overrightarrow{AB}| = 4\text{cm}, |\overrightarrow{CD}| = 4\text{cm}, |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5(\text{cm}).$$

**Câu 34.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Xác định vectơ thoả mãn:

a) Có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là một trong các đỉnh của hình vuông trên và có độ dài là  $a$ .

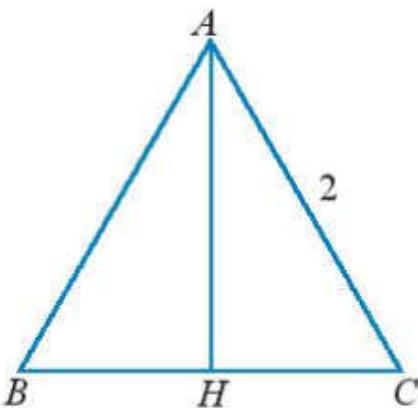
b) Có điểm cuối là  $C$ , điểm đầu là một trong các đỉnh của hình vuông trên và có độ dài là  $a$ .

**Lời giải**

a) Các vectơ thoả mãn là:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ .

b) Các vectơ thoả mãn là:  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC}$ .

**Câu 35.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $2$ . Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .



Tìm điểm đầu, điểm cuối, giá và độ dài của các vecto:  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BH}$ .

#### Lời giải

Vecto  $\overrightarrow{CA}$  có điểm đầu là  $C$ , điểm cuối là  $A$  và có giá là đường thẳng  $AC$ .

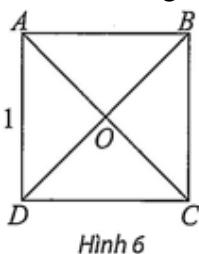
Vecto  $\overrightarrow{AH}$  có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là  $H$  và có giá là đường thẳng  $AH$ .

Vecto  $\overrightarrow{BH}$  có điểm đầu là  $B$ , điểm cuối là  $H$  và có giá là đường thẳng  $BH$ .

Ta có:  $CA = 2, BH = 1, AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ .

Suy ra  $|\overrightarrow{CA}| = 2, |\overrightarrow{BH}| = 1, |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{3}$ .

**Câu 36.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $O$  và có cạnh bằng 1.



a) Tìm điểm đầu, điểm cuối, giá và độ dài của các vecto:  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BD}$ .

b) Tìm các vecto đơn vị trong hình.

#### Lời giải

a) Vecto  $\overrightarrow{CA}$  có điểm đầu là  $C$ , điểm cuối là  $A$  và có giá là đường thẳng  $AC$ .

Vecto  $\overrightarrow{OA}$  có điểm đầu là  $O$ , điểm cuối là  $A$  và có giá là đường thẳng  $AO$ .

Vecto  $\overrightarrow{BD}$  có điểm đầu là  $B$ , điểm cuối là  $D$  và có giá là đường thẳng  $BD$ .

Ta có:  $CA = BD = \sqrt{2}; OA = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Suy ra  $|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{2}; |\overrightarrow{OA}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

b) Các vecto đơn vị là:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AD}$ .

**Câu 37.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh bằng  $a$  có tâm  $O$  và có  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ .

a) Tìm trong hình hai vecto bằng nhau và có độ dài bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ;

b) Tìm trong hình hai vecto đối nhau và có độ dài bằng  $a\sqrt{3}$ .

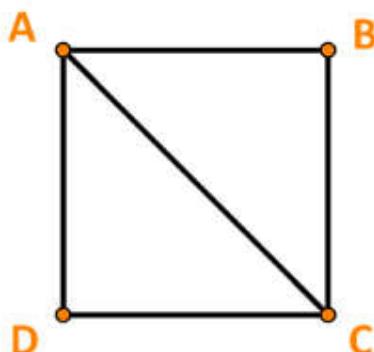
#### Lời giải

a) Hai vecto  $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$  bằng nhau và có độ dài bằng  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

b) Hai vecto  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}$  đối nhau và có độ dài bằng  $a\sqrt{3}$ .

**Câu 38.** Cho hình vuông  $ABCD$  có độ dài cạnh bằng  $3cm$ . Tính độ dài của các vecto  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

## Lời giải

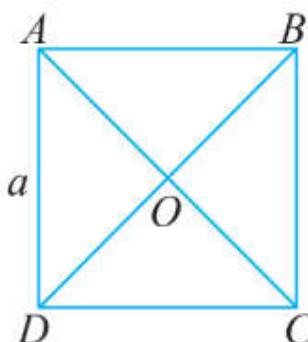


Ta có:  $|\vec{AB}| = AB$  và  $|\vec{AC}| = AC$ .

Mà  $AB = 3, AC = 3\sqrt{2}$

$$\Rightarrow |\vec{AB}| = 3; |\vec{AC}| = 3\sqrt{2}$$

**Câu 39.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $O$  và có các cạnh bằng  $a$  (hình)



a) Tìm trong hình hai vectơ bằng nhau và có độ dài bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

b) Tìm trong hình hai vectơ đối nhau và có độ dài bằng  $a\sqrt{2}$

## Lời giải

$$a) AC = BD = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = OC = BO = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra các cặp vectơ bằng nhau và có độ dài bằng  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$  là:  $\vec{AO}$  và  $\vec{OC}; \vec{CO}$  và  $\vec{OA}; \vec{DO}$  và  $\vec{OB}; \vec{OD}$  và  $\vec{BO}$

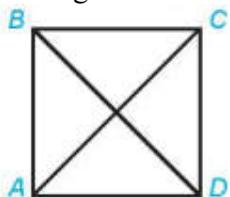
b) Trong hình chỉ có 2 đoạn thẳng  $AC$  và  $BD$  có độ dài là  $a\sqrt{2}$ .

Do đó hai vectơ đối nhau và có độ dài bằng  $a\sqrt{2}$  là:  $\vec{AC}$  và  $\vec{CA}; \vec{BD}$  và  $\vec{DB}$

**Câu 40.** Cho hình vuông  $ABCD$  với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vectơ  $\vec{AC}, \vec{CA}, \vec{BD}$ .

## Lời giải

Vì cạnh của hình vuông  $ABCD$  có độ dài bằng 1 nên các đường chéo của hình vuông này có độ dài bằng  $\sqrt{2}$ .



Vậy  $|\vec{AC}| = AC = \sqrt{2}, |\vec{CA}| = CA = \sqrt{2}, |\vec{BD}| = BD = \sqrt{2}$ .

**Câu 41.** Cho  $ABC$  là tam giác vuông tại  $A, AB = 3a, AC = 4a$ . Tính  $|\vec{BC}|$ .

**Lời giải**

$$|\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(3a)^2 + (4a)^2} = \sqrt{25a^2} = 5a.$$

- Câu 42.** Cho tam giác đều cạnh  $a$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $|\overrightarrow{AM}|$ .

**Lời giải**

Vì tam giác  $ABC$  đều nên trung tuyến  $AM$  cũng là đường cao. Vậy ta có:

$$|\overrightarrow{AM}| = AM = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

- Câu 43.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Tính  $|\overrightarrow{AB}|, |\overrightarrow{AC}|$ .

**Lời giải**

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = a, |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}.$$

## BÀI TẬP BỒ SUNG

- Câu 44.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ .

a) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$  có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

b) Xác định các véc-tơ khác véc-tơ - không, cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$  có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

c) Vẽ các véc-tơ bằng véc-tơ  $\overrightarrow{NP}$  mà có điểm đầu  $A, B$ .

**Lời giải.**

a) Các véc-tơ khác véc-tơ không cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$  là  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PB}$ .

b) Các véc-tơ khác véc-tơ - không cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NM}$ .

c) Trên tia  $CB$  lấy điểm  $B'$  sao cho  $BB' = NP$ .

Khi đó ta có  $\overrightarrow{BB'}$  là véc-tơ có điểm đầu là  $B$  và bằng véc-tơ  $\overrightarrow{NP}$ .

Qua  $A$  dựng đường thẳng song song với đường thẳng  $NP$ .

Trên đường thẳng đó lấy điểm  $A'$  sao cho  $\overrightarrow{AA'}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{NP}$  và  $AA' = NP$ .

Khi đó ta có là véc-tơ  $\overrightarrow{AA'}$  có điểm đầu là  $A$  và bằng véc-tơ  $\overrightarrow{NP}$ .

### Dạng 2. Chứng minh các vectơ bằng nhau

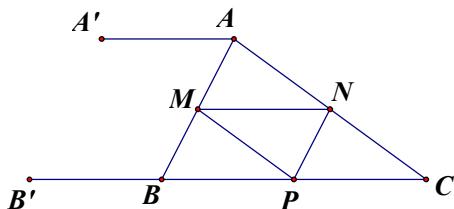
Phương pháp

Để chứng minh hai vecto bằng nhau ta có thể dùng một trong ba cách sau:

Có cùng hướng và cùng độ dài

Cùng bằng nhau với một vecto thứ ba

Áp dụng định lí sau “Nếu  $ABCD$  là hình bình hành” thì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$



## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 45.** Chứng minh rằng tứ giác  $ABCD$  là một hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ .

**Lời giải**

Tứ giác  $ABCD$  là một hình bình hành  $\Leftrightarrow \begin{cases} AD // BC \\ AD = BC \end{cases}$

$\Leftrightarrow$  Hai vecto  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng và  $AD = BC$ .

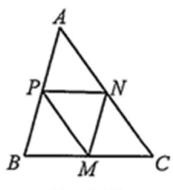
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ . (đpcm)

- Câu 46.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ .

Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$

b)  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{CN}$

**Lời giải**Xét tam giác  $ABC$ .

Hình 65

a) Vì  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $MN // AB, MN = \frac{1}{2}AB$

Suy ra  $MN // AP, MN = AP$ . Vậy  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA}$ .

b) Chứng minh tương tự như câu a).

- Câu 47.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Chứng minh rằng tứ giác đó là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

**Lời giải**

Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \begin{cases} AB // DC \\ AB = DC \end{cases}$

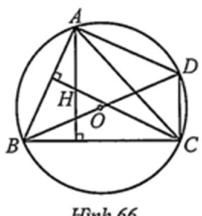
Mà  $AB // DC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  cùng phương, do đó cùng hướng.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC} \text{ cùng phương} \\ AB = DC \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Vậy tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

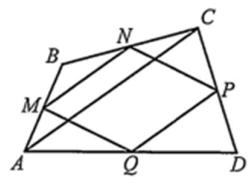
- Câu 48.** Cho đường tròn tâm  $O$  và dây cung  $BC$  không đi qua  $O$ . Điểm  $A$  chuyển động trên cung lớn  $BC$  của đường tròn sao cho tam giác  $ABC$  nhọn. Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AH}$  có độ dài không đổi.

**Lời giải**Kẻ đường kính  $BD$  của  $(O)$ . Khi đó,  $D$  là điểm cố định (Hình 66).

Hình 66

Ta chứng minh được  $AHCD$  là hình bình hành.Suy ra  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$ .Vậy  $AH = |\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{DC}| = DC$  cố định hay  $\overrightarrow{AH}$  có độ dài không đổi.

- Câu 49.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của bốn cạnh  $AB, BC, CD, DA$  (Hình 29). Chứng minh  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ .



Hình 29

**Lời giải**

Vì  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $MN // AC, MN = \frac{1}{2}AC$ .

Vì  $QP$  là đường trung bình của tam giác  $ACD$  nên  $QP // AC$ ,  $QP = \frac{1}{2} AC$ .

Suy ra  $MN // QP$ ,  $MN = QP$  nên  $MNPQ$  là hình bình hành. Vậy  $\overline{MN} = \overline{QP}$ .

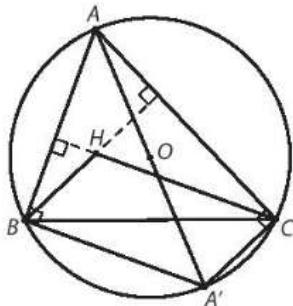
- Câu 50.** Cho tam giác  $ABC$  không vuông, với trực tâm  $H$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Kẻ đường kính  $AA'$  của đường tròn  $(O)$ .

a) Chứng minh rằng  $\overline{BH} = \overline{A'C}$ .

b) Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Tìm mối quan hệ về phương, hướng và độ dài của hai vectơ  $\overrightarrow{AH}$  và  $\overrightarrow{OM}$ .

### Lời giải

a) Do  $AA'$  là đường kính của  $(O)$ , nên  $\widehat{ABA} = \widehat{ACA'} = 90^\circ$ .



Suy ra  $A'C \perp AC$  (1) và  $A'B \perp AB$  (2)

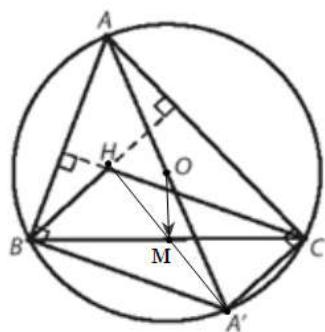
Do  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$  nên

$BH \perp AC$  (3) và  $CH \perp AB$  (4)

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra tứ giác  $BHCA'$  là hình bình hành.

Do đó  $\overline{BH} = \overline{A'C}$ .

b) Do  $AA'$  là đường kính của  $(O)$ , nên  $O$  là trung điểm của  $AA'$  (5).



Do  $BHCA'$  là hình bình hành, nên trung điểm  $M$  của  $BC$  cũng là trung điểm của  $HA'$  (6).

Từ (5) và (6) suy ra  $OM$  là đường trung bình của tam giác  $AHA'$ .

Do đó  $OM // AH$  và  $OM = \frac{1}{2} AH$ .

Suy ra hai vectơ  $\overrightarrow{AH}$  và  $\overrightarrow{OM}$  cùng hướng và  $|\overrightarrow{AH}| = 2 |\overrightarrow{OM}|$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 51.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Dựng điểm  $B'$  sao cho  $\overline{B'B} = \overline{AG}$ .

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ .

b) Gọi  $J$  là trung điểm của  $BB'$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$ .

### Lời giải.

a) Vì  $I$  là trung điểm của  $BC$  nên  $BI = CI$  và  $\overrightarrow{BI}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{IC}$  do đó hai véc-tơ  $\overrightarrow{BI}$ ,  $\overrightarrow{IC}$  bằng nhau hay  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ .

b) Ta có  $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$  suy ra  $B'B = AG$  và  $B'B \parallel AG$ . Do đó  $\overrightarrow{BJ}$ ,  $\overrightarrow{IG}$  cùng hướng. (1)

Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên  $IG = \frac{1}{2}AG$

và  $J$  là trung điểm  $BB'$  suy ra  $BJ = \frac{1}{2}BB'$ .

Vì vậy  $BJ = IG$ . (2)

Từ (1) và (2) ta có  $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$ .

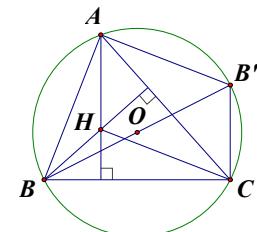
**Câu 52.** Cho tam giác  $ABC$  có  $H$  là trực tâm và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi  $B'$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $O$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ ,  $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$ .

**Lời giải.**

Vì  $BB'$  là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  nên  $\widehat{BAB'} = \widehat{BCB'} = 90^\circ$ .

Do đó  $CH \parallel B'A$  và  $AH \parallel B'C$ . Suy ra tứ giác  $AB'CH$  là hình bình hành.

Vậy  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ ,  $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$ .



**Câu 53.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Trên cạnh  $AC$  lấy hai điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $AE = EF = FC$ ;  $BE$  cắt  $AM$  tại  $N$ . Chứng minh  $\overrightarrow{NA}$  và  $\overrightarrow{NM}$  là hai vec-tơ đối nhau.

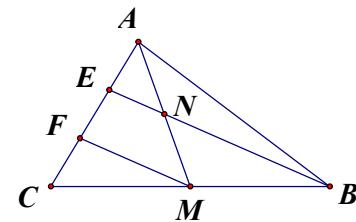
**Lời giải.**

Ta có  $FM \parallel BE$  vì  $FM$  là đường trung bình của tam giác  $CEB$ .

Mà  $EA = EF$  nên  $EN$  là đường trung bình của tam giác  $AFM$ .

Suy ra  $N$  là trung điểm của  $AM$ .

Vậy  $\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NM}$ .



**Câu 54.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ .

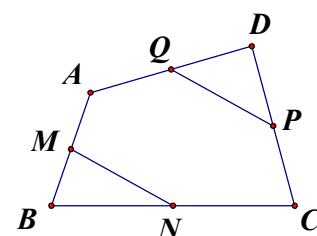
**Lời giải.**

Do  $M, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AD$  nên  $\overrightarrow{MQ}$  là đường trung bình của tam giác  $ABD$ .

Suy ra  $MQ \parallel BD$  và  $MQ = \frac{1}{2}BD$ . (1)

Tương tự  $NP \parallel BD$  là đường trung bình của tam giác  $CBD$ .

Suy ra  $NP \parallel BD$  và  $NP = \frac{1}{2}BD$ . (2)



Từ (1) và (2) suy ra  $MQ \parallel NP$  và  $MQ = NP$  do đó tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành.

Vậy ta có  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ .

**Câu 55.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trên các đoạn thẳng  $DC, AB$  theo thứ tự lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $DM = BN$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $AM, DB$  và  $Q$  là giao điểm của  $CN, DB$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$  và  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$ .

### Lời giải.

Ta có  $DM = BN \Rightarrow AN = MC$ , mặt khác  $AN$  song song với  $MC$  do tứ giác  $ANCM$  là hình bình hành.

Suy ra  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$ .

Xét tam giác  $\Delta DMP$  và  $\Delta BNQ$  ta có

$$\begin{cases} DM = NB & (\text{giả thiết}) \\ \widehat{PDM} = \widehat{QBN} & (\text{so le trong}). \end{cases}$$

Mặt khác  $\widehat{DMP} = \widehat{APB}$  (đôi đỉnh) và  $\widehat{APQ} = \widehat{NQB}$  (hai góc đồng vị) suy ra  $\widehat{DMP} = \widehat{BNQ}$ .

Do đó  $\Delta DMP = \Delta BNQ$  (c.g.c) suy ra  $DB = QB$ .

Dễ thấy  $\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{QB}$  cùng hướng vì vậy  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$ .

**Câu 56.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Nối  $AF$  và  $CE$ , hai đường này cắt đường chéo  $BD$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$ .

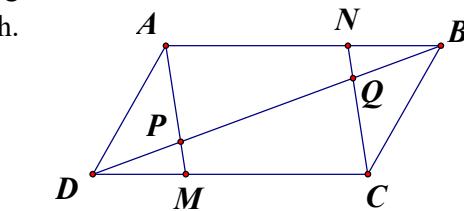
### Lời giải.

Ta có  $AECF$  là hình bình hành nên:  $EN // AM$ .

Vì  $E$  là trung điểm  $AB$  nên  $N$  là trung điểm của  $BM$ , do đó  $MN = NB$ .

Tương tự,  $M$  là trung điểm của  $DN$ , do đó  $DM = MN$ .

Hơn nữa, vì các véc-tor cùng hướng nên  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NB}$ .



**Câu 57.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  với  $A, D, F$  không thẳng hàng. Dựng các vectơ  $\overrightarrow{EH}$  và  $\overrightarrow{FG}$  bằng vectơ  $\overrightarrow{AD}$ . Chứng minh tứ giác  $CDGH$  là hình bình hành.

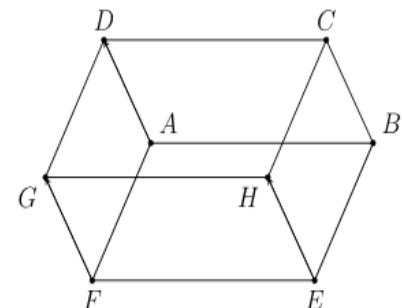
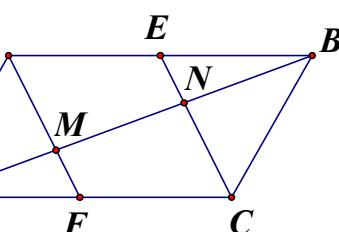
### Lời giải

Ta có  $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} \Rightarrow$  Tứ giác  $FEHG$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$  (1).

Ta có  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$  (2).

Từ (1) và (2) ta có  $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DC}$ .

Vậy tứ giác  $GHCD$  là hình bình hành.



### Dạng 3. Một số bài toán thực tế

**Câu 58.** a) Bạn hãy tìm sự khác biệt giữa hai đại lượng sau:

- Bác Ba có số tiền 20 triệu đồng
- Một cơn bão di chuyển với vận tốc  $20 \text{ km/h}$  theo hướng đông bắc.

b) Trong các đại lượng sau, đại lượng nào cần được biểu diễn bởi vectơ?

Giá tiền, lực, thể tích, tuổi, độ dịch chuyển, vận tốc

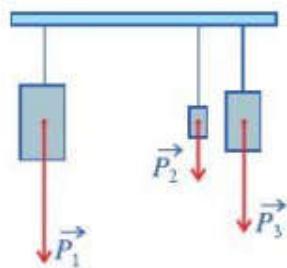
### Lời giải

a) Sự khác biệt là:

- Đơn vị của 2 đại lượng: triệu đồng và  $\text{km/h}$
- 20 triệu đồng là 1 đại lượng vô hướng còn cơn bão là đại lượng có hướng cụ thể là hướng từ đông sang bắc với vận tốc là  $20 \text{ km/h}$

b) Các đại lượng cần biểu diễn vectơ là các đại lượng có hướng nên đó là: lực, độ dịch chuyển, vận tốc.

**Câu 59.** Khi treo ba vật, mỗi vật sẽ tác dụng vào thanh treo một lực (trọng lực) như ở hình dưới

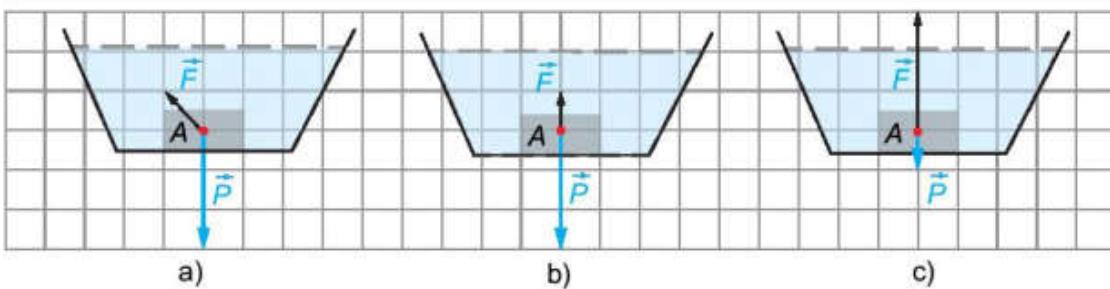


Nhận xét đặc điểm về phương, hướng của ba vectơ biểu thị trọng lực.

#### Lời giải

Trong vật lí, các vectơ trọng lực có cùng hướng nên ba vectơ  $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$  biểu thị trọng lực có cùng hướng.

- Câu 60.** Một vật  $A$  được thả chìm hoàn toàn dưới đáy một cốc chất lỏng. Biết rằng trong ba cách biểu diễn lực đẩy Archimedes ( $\vec{F}$ ) và trọng lực  $\vec{P}$  tác động lên vật  $A$  ở hình có một cách biểu diễn đúng.



Hãy chỉ ra mối quan hệ giữa trọng lượng riêng của vật  $A$  và trọng lượng riêng của chất lỏng trong cốc.

#### Lời giải

Lực đẩy Archimedes và trọng lực đều tác động lên vật  $A$  theo phương thẳng đứng, hai lực này cùng phương nhưng ngược hướng. Do đó, hình a không đúng. Vật  $A$  chìm xuống đáy nên trọng lực  $P$  (có hướng từ trên xuống) lớn hơn lực đẩy Archimedes  $F$  (có hướng từ dưới lên). Do vậy, hình c không đúng.

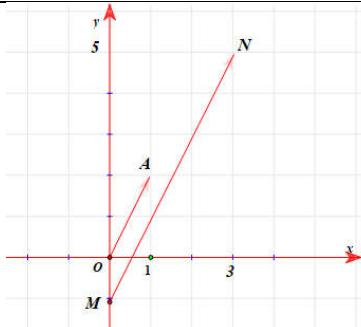
Vậy hình biểu diễn đúng là hình b. Theo đó, vectơ biểu diễn lực  $\vec{P}$  có độ dài gấp 3 lần độ dài của vectơ biểu diễn lực  $\vec{F}$ .

Độ lớn của trọng lực và lực đẩy Archimedes tác động lên  $A$  là:  $|\vec{P}| = d' \cdot V, |\vec{F}| = d \cdot V$ , trong đó  $V(m^3)$  là thể tích của vật  $A$  và  $d', d(N/m^3)$  tương ứng là trọng lượng riêng của vật  $A$  và của chất lỏng. Do  $|\vec{P}| = 3|\vec{F}|$  (theo b) nên  $d' = 3d$ . Vậy trọng lượng riêng của vật  $A$  gấp 3 lần trọng lượng riêng của chất lỏng trong cốc.

- Câu 61.** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy hãy vẽ các vectơ  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MN}$  với  $A(1; 2), M(0; -1), N(3; 5)$ .
- Chỉ ra mối quan hệ giữa hai vecto trên.
  - Một vật thể khởi hành từ  $M$  chuyên động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn với vectơ  $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ . Hỏi vật thể đó có đi qua N hay không? Nếu có thì sau bao lâu sẽ tới N?

#### Lời giải

a)



Dễ thấy:  $OA // MN$  do đó  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MN}$  cùng phương.

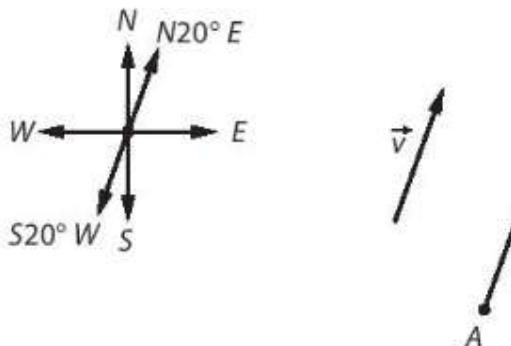
Hơn nữa,  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MN}$  cùng hướng và  $MN = 3OA$ .

b) Mỗi giờ, vật thể đó đi được quãng đường tương ứng với đoạn thẳng  $OA$ .  
vì  $MN = 3.OA$  nên vật thể đó sẽ đi qua  $N$  sau 3 giờ kể từ lúc khởi hành.

- Câu 62.** Trên biển Đông, một tàu chuyển động đều từ vị trí  $A$  theo hướng  $N20^\circ E$  với vận tốc  $20 \text{ km/h}$ . Sau 2 giờ, tàu đến được vị trí  $B$ . Hỏi  $A$  cách  $B$  bao nhiêu kilômét và về hướng nào so với  $B$  ?

**Lời giải**

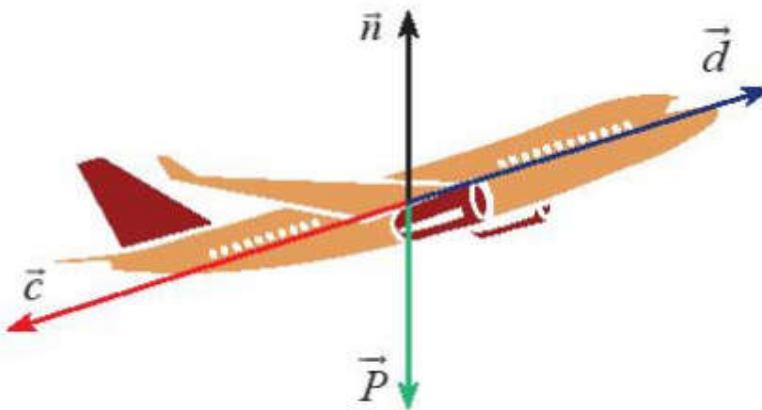
Ta sử dụng vectơ  $\vec{v} : |\vec{v}| = 20$  để biểu thị cho vận tốc của tàu, vectơ  $\overrightarrow{AB}$  để biểu thị cho quãng đường và hướng chuyển động của tàu từ  $A$  tới  $B$ . Do tàu chuyển động đều từ  $A$ , với vận tốc  $20 \text{ km/h}$ , trong 2 giờ tới  $B$ , nên  $AB = |\overrightarrow{AB}| = 2|\vec{v}| = 40(\text{km})$ .



Vậy  $A$  cách  $B 40 \text{ km}$ .

Do  $B$  ở về hướng  $N20^\circ E$  so với  $A$ , nên  $A$  ở về hướng  $S20^\circ W$  so với  $B$ .

- Câu 63.** Tìm các cặp lực ngược hướng trong số các lực tác động vào máy bay trong Hình.



**Lời giải**

Quan sát Hình, ta thấy lực nâng  $\vec{n}$  ngược hướng với trọng lực  $\vec{P}$ ; lực cản  $\vec{c}$  ngược hướng với lực đẩy  $\vec{d}$ .

- Câu 64.** Tìm các lực cùng hướng và ngược hướng trong số các lực đẩy được biểu diễn bằng các vectơ trong hình

**Lời giải**

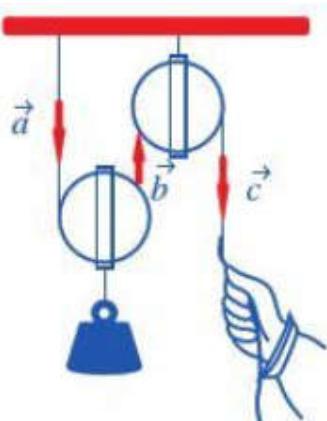
Nhận xét: giá của 4 lực đều song song hoặc trùng nhau, do đó 4 vecto là cùng phương.

Vecto  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  có chiều từ phải sang trái còn vecto  $\vec{d}$  có chiều từ trái sang phải

Vậy các vecto (hay lực) cùng hướng với nhau là vecto  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

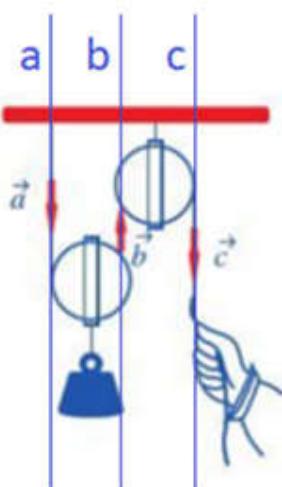
Các vecto (lực)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ngược hướng với vecto  $\vec{d}$ .

- Câu 65.** Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vecto  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (hình)



a) Hãy chỉ ra các cặp vecto cùng phương.

b) Trong các cặp vecto đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng.

**Lời giải**

Gọi a, b, c là các đường thẳng lần lượt chứa các vecto  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Khi đó: a, b, c lần lượt là giá của các vecto  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

a) Để thấy:  $a // b // c$

$\Rightarrow$  Ba vecto  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  cùng phương với nhau.

Vậy các cặp vecto cùng phương là:  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ ,  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$ .

b) Quan sát ba vecto, ta thấy: vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng xuống còn vecto  $\vec{b}$  hướng lên trên.

Vậy vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng, vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  ngược hướng, vecto  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  ngược hướng.

**Câu 66.** Treo một vật có khối lượng  $10\text{kg}$  vào một sợi dây (Hình 30). Sử dụng vectơ  $\vec{P}$  để biểu diễn trọng lực, vectơ  $\vec{T}$  để biểu diễn lực căng của dây tác động lên vật đó. Chọn các khẳng định đúng trong các phát biểu sau:



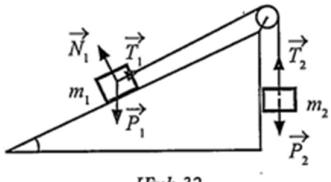
Hình 30

- a)  $\vec{P}$  có phương thẳng đứng;
- b)  $\vec{T}$  có phương thẳng đứng;
- c)  $\vec{P}$  có hướng từ trên xuống dưới;
- d)  $\vec{P}$  có hướng từ dưới lên trên;
- e)  $\vec{T}$  có hướng từ trên xuống dưới; g)  $\vec{T}$  có hướng từ dưới lên trên.

#### Lời giải

Các phát biểu đúng là a, b, c, g .

**Câu 67.** Trong mặt phẳng nghiêng không có ma sát, cho hệ vật  $m_1, m_2$ , hai vật nối với nhau bằng một sợi dây không dãn vắt qua ròng rọc (Hình 32). Giả sử bỏ qua khối lượng của dây và ma sát của ròng rọc.



Hình 32

- a) Tìm các cặp vectơ cùng phương trong các vectơ ở Hình 32.
- b) Những cặp vectơ cùng phương đó có cùng hướng không?

#### Lời giải

Học sinh tự làm

### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Trong mặt phẳng cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp tất cả các điểm  $M$  thoả mãn  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\overrightarrow{BC}$  là hình gì?

- A. Đường thẳng  $AB$ .
- B. Tia  $BA$ .
- C. Tia  $AB$ .
- D. Đường thẳng đi qua  $A$  song song với  $BC$ .

#### Lời giải

Vì  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\overrightarrow{BC}$  nên giá của  $\overrightarrow{AM}$  song song với giá của  $\overrightarrow{BC}$ . Như vậy, tập hợp tất cả các điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và song song với  $BC$ . Vậy chọn đáp án D.

**Câu 2.** Trong mặt phẳng cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp tất cả các điểm  $M$  thoả mãn  $\overrightarrow{AM}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$  là hình gì?

- A. Đoạn thẳng  $AB$ .
- B. Tia  $BA$ .
- C. Tia  $AB$ .
- D. Đường thẳng  $AB$ .

**Lời giải**

Vì  $\overrightarrow{AM}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$  nên giá của  $\overrightarrow{AM}$  trùng với giá của  $\overrightarrow{AB}$  và  $B, M$  cùng phía so với  $A$  hoặc  $M$  trùng  $A$ . Như vậy, tập hợp tất cả các điểm  $M$  là tia  $AB$ . Vậy chọn đáp án  $C$ .

**Câu 3.** Trong mặt phẳng cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tập hợp tất cả các điểm  $M$  thoả mãn  $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}|$  là hình gì?

- A. Đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AB$ .
- B. Đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .
- C. Đường tròn tâm  $B$  bán kính  $AB$ .
- D. Đoạn thẳng  $AB$ .

**Lời giải**

Ta có:  $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}| \Leftrightarrow MA = MB$ .

Tập hợp các điểm  $M$  trong mặt phẳng thoả mãn  $MA = MB$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ . Chọn đáp án  $B$ .

**Câu 4.** Trong mặt phẳng cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tập hợp tất cả các điểm  $M$  thoả mãn  $|\overrightarrow{AM}|$  ngược hướng với  $|\overrightarrow{AB}|$  là hình gì?

- A. Đường thẳng  $AB$ .
- B. Tia  $AB$ .
- C. Tia đối của tia  $AB$  trừ điểm  $A$ .
- D. Đoạn thẳng  $AB$ .

**Lời giải****Chọn C**

**Câu 5.** Trong mặt phẳng cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tập hợp tất cả các điểm  $M$  thoả mãn  $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AB}|$  là hình gì?

- A. Đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .
- B. Đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AB$ .
- C. Đường tròn tâm  $B$  bán kính  $AB$ .
- D. Đoạn thẳng  $AB$ .

**Lời giải****Chọn B**

**Câu 6.** Cho hình thang  $ABCD$  có  $AB$  và  $CD$  song song với nhau. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .
- B.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$  cùng hướng.
- C.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC}$  ngược hướng.
- D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

**Lời giải****Chọn B**

**Câu 7.** Cho  $\vec{a} = \vec{b}$ . Phát biểu nào sau đây là sai?

- A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.
- B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng độ dài.
- C.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương.
- D.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.

**Lời giải****Chọn C**

**Câu 8.** Cho điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ .
- B.  $\overrightarrow{IA}$  và  $\overrightarrow{IB}$  cùng hướng.
- C.  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$ .
- D.  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ .

**Lời giải****Chọn D**

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 9.** Vectơ có điểm đầu là  $D$ , điểm cuối là  $E$  được kí hiệu là:

- A.  $DE$ .      B.  $|\overrightarrow{DE}|$ .      C.  $\overrightarrow{ED}$ .      D.  $\overrightarrow{DE}$ .

Lời giải

Chọn D

**Câu 10.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Số các vectơ khác  $\vec{0}$  có điểm đầu và cuối là đỉnh của tứ giác bằng:

- A. 4      B. 6      C. 8      D. 12.

Lời giải

Chọn D

Hai điểm phân biệt, giả sử  $A, B$  tạo thành hai vec tơ khác vec tơ- không là  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BA}$ .

Vì vậy từ 4 đỉnh  $A, B, C, D$  của tam giác ta có 6 cặp điểm phân biệt nên có 12 vec tơ khác vec tơ- không được tạo thành.

**Câu 11.** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC$  của tam giác đều  $ABC$ . Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

- A.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{CB}$ .      B.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{MB}$ .      C.  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$ .      D.  $\overrightarrow{AN}$  và  $\overrightarrow{CA}$ .

Lời giải

Chọn A

**Câu 12.** Cho  $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$  và một điểm  $C$ , có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa mãn:  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

- A. 0.      B. 1.      C. 2.      D. Vô số.

Lời giải

Chọn D

Tập hợp điểm  $D$  là đường tròn tâm  $C$ , bán kính bằng  $|\overrightarrow{AB}|$

**Câu 13.** Xét các mệnh đề sau

(I): Véc tơ- không là véc tơ có độ dài bằng 0.

(II): Véc tơ- không là véc tơ có nhiều phương.

- A. Chỉ (I) đúng.      B. Chỉ (II) đúng.      C. (I) và (II) đúng.      D. (I) và (II) sai.

Lời giải

Chọn C

**Câu 14.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ .      B.  $|\overrightarrow{AC}| = a$ .      C.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ .      D.  $|\overrightarrow{AB}| = a$ .

Lời giải

Chọn D

**Câu 15.** Cho M là một điểm thuộc đoạn thẳng AB sao cho  $AB = 3AM$ . Hãy tìm khẳng định sai?

- A.  $|\overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MA}|$ .      B.  $|\overrightarrow{MA}| = 2|\overrightarrow{MB}|$ .      C.  $|\overrightarrow{BA}| = 3|\overrightarrow{AM}|$ .      D.  $|\overrightarrow{AM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BM}|$ .

Lời giải

Chọn D

**Câu 16.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ .      B.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ .      C.  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{DB}|$ .      D.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ .

Lời giải

Chọn A

**Câu 17.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Các véc tơ ngược hướng với  $\overrightarrow{OB}$  là:

- A.  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OD}$ .      B.  $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BO}$ .      C.  $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DO}$ .      D.  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BO}$

## Lời giải

## Chọn D

**Câu 18.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 3, AD = 4$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ .      B.  $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$ .      C.  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$ .      D.  $|\overrightarrow{BD}| = 7$ .

## Lời giải

## Chọn A

**Câu 19.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  tâm  $I, AB = 3, BC = 4$ . Khi đó  $|\overrightarrow{BI}|$  là:

- A. 7.      B.  $\frac{5}{2}$ .      C. 5.      D.  $\frac{7}{2}$ .

## Lời giải

## Chọn B

**Câu 20.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng.  
B. Hai vectơ cùng phương thì giá của chúng song song hoặc trùng nhau.  
C. Hai vectơ có giá vuông góc thì cùng phương.  
D. Hai vectơ ngược hướng với 1 vectơ thứ ba thì cùng phương.

## Lời giải

## Chọn B

**Câu 21.** Cho tam giác đều  $ABC$  với đường cao  $AH$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $|\overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{HC}|$ .      B.  $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{HC}|$ .      C.  $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{HC}|$ .      D.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ .

## Lời giải

## Chọn B

**Câu 22.** Nếu  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$  thì:

- A. tam giác  $ABC$  là tam giác cân  
C.  $A$  là trung điểm đoạn  $BC$
- B. tam giác  $ABC$  là tam giác đều  
D. điểm  $B$  trùng với điểm  $C$

## Lời giải

## Đáp án D

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow B \equiv C$$

**Câu 23.** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Khi đó cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

- A.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$       B.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PN}$       C.  $\overrightarrow{MP}$  và  $\overrightarrow{PN}$       D.  $\overrightarrow{NP}$  và  $\overrightarrow{NM}$

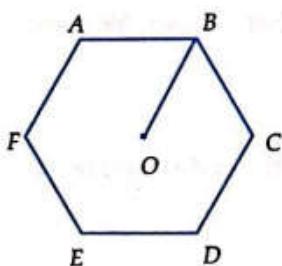
## Lời giải

## Đáp án A

**Câu 24.** Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{OB}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 4      B. 6      C. 8      D. 10

## Lời giải



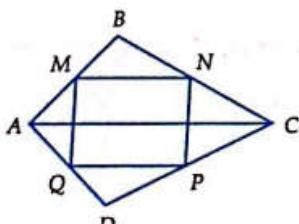
Các vectơ cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{OB}$  là:  
 $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AF}$ .

**Đáp án**      **B.**

**Câu 25.** Cho tứ giác đều  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$       B.  $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$       C.  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$       D.  $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$

**Lời giải**



Ta có  $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \end{cases}$  (do cùng song song và bằng  $\frac{1}{2} AC$ ).

Do đó MNPQ là hình bình hành.

**Đáp án**      **D.**

**Câu 26.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt và thẳng hàng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$       B.  $\overrightarrow{CA}$  và  $\overrightarrow{CB}$  cùng hướng  
 C.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  ngược hướng      D.  $\overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương

**Lời giải**

Với ba trường hợp lần lượt  $A, B, C$  nằm giữa thì ta luôn có  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$  cùng phương.

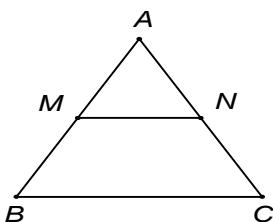
**Đáp án**      **D.**

**Câu 27.** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC$  của tam giác đều  $ABC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .      C.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$ .      D.  $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$ .

**Lời giải**

**Chọn D**



Ta có  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$ .

Do đó  $BC = 2MN \longrightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$ .

**Câu 28.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ?

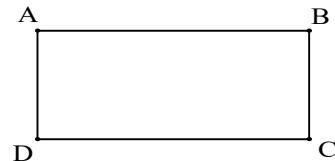
- A.  $ABCD$  là hình bình hành.      B.  $ABDC$  là hình bình hành.  
 C.  $AD$  và  $BC$  có cùng trung điểm.      D.  $AB = CD$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC \text{ là hình bình hành.}$



- Mặt khác,  $ABDC$  là hình bình hành  
 $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$

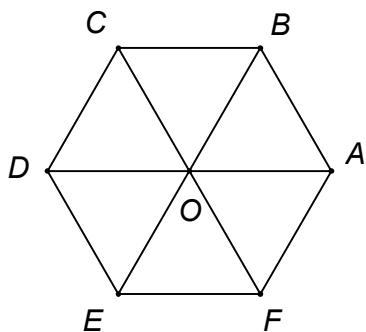
Do đó, điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  là  $ABDC$  là hình bình hành.

**Câu 29.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ .      B.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AF}|$ .      C.  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$ .      D.  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$ .

Lời giải

Chọn D



Nguyễn Bảo Vương

Hai vectơ này ngược hướng.

**Câu 30.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là trung điểm  $AB, BC, AD$ . Lấy 8 điểm trên làm điểm gốc hoặc điểm ngọn các vectơ. Tìm mệnh đề sai:

- A. Có 2 vectơ bằng  $\overrightarrow{PQ}$     B. Có 4 vectơ bằng  $\overrightarrow{AR}$   
C. Có 3 vectơ bằng  $\overrightarrow{BO}$     D. Có 5 vectơ bằng  $\overrightarrow{OP}$

Lời giải

Chọn C

**Câu 31.** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Điều kiện để điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là:

- A.  $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$ .      B.  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$ .      C.  $IA = IB$ .      D.  $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}.$$

**Câu 32.** Cho hình thoi  $ABCD$  có tâm  $I$ . Hãy cho biết số khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- a)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$  b)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  c)  $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IO}$

- d)  $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}$  e)  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$  f)  $2|\overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{BD}|$

A. 3.

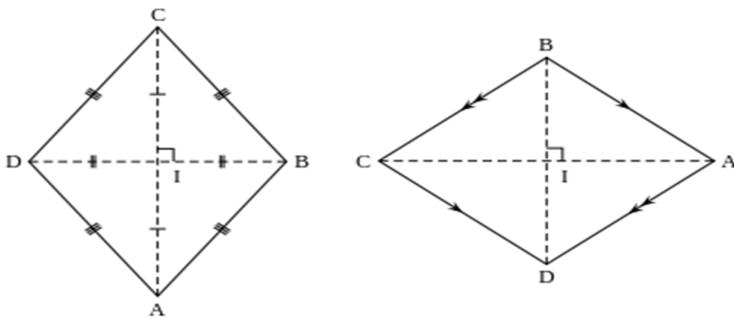
B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

**Chọn A**



- Câu 33.** Điền từ thích hợp vào dấu (...) để được mệnh đề đúng. Hai véc tơ ngược hướng thì (...).  
**A.** Bằng nhau.      **B.** Cùng phương.      **C.** Cùng độ dài.      **D.** Cùng điểm đầu.

**Lời giải**

**Chọn B**

- Câu 34.** Cho vecto  $\vec{a}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Có vô số vecto  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .      **B.** Có duy nhất một  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .  
**C.** Có duy nhất một  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = -\vec{a}$ .      **D.** Không có vecto  $\vec{u}$  nào mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Cho vecto  $\vec{a}$ , có vô số vecto  $\vec{u}$  cùng hướng và cùng độ dài với vecto  $\vec{a}$ . Nên có vô số vecto  $\vec{u}$  mà  $\vec{u} = \vec{a}$ .

- Câu 35.** Cho hình bình hành  $ABGE$ . Đẳng thức nào sau đây đúng.

- A.**  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EG}$ .      **B.**  $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{BE}$ .      **C.**  $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{BE}$ .      **D.**  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GE}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

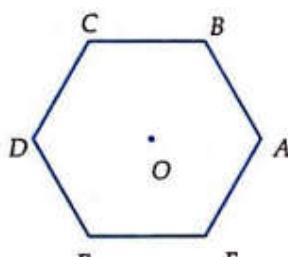
Hình bình hành  $ABGE \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GE}$ .

- Câu 36.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Hãy tìm các vecto khác vecto-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm  $O$  sao cho bằng với  $\overrightarrow{AB}$ ?

- A.**  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$       **B.**  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$       **C.**  $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$       **D.**  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

**Lời giải**

**Đáp án D**



Các vecto bằng vecto  $\overrightarrow{AB}$  là:

$\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$

- Câu 37.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Xác định các vecto cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$ .

- A.**  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$       **B.**  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$   
**C.**  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$       **D.**  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$

**Lời giải**

**Đáp án C**

Có 3 đường thẳng song song với  $MN$  là  $AC, AP, PC$

Nên có 7 vectơ

$$\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$$

- Câu 38.** Cho ba điểm  $A, B, C$  cùng nằm trên một đường thẳng. Các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  cùng hướng khi và chỉ khi:

- A. Điểm  $B$  thuộc đoạn  $AC$   
 C. Điểm  $C$  thuộc đoạn  $AB$   
 B. Điểm  $A$  thuộc đoạn  $BC$   
 D. Điểm  $A$  nằm ngoài đoạn  $BC$

Lời giải

**Đáp án A**



- Câu 39.** Cho tam giác đều cạnh  $2a$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$       B.  $\overrightarrow{AB} = 2a$       C.  $|\overrightarrow{AB}| = 2a$       D.  $\overrightarrow{AB} = AB$

Lời giải

**Đáp án C**

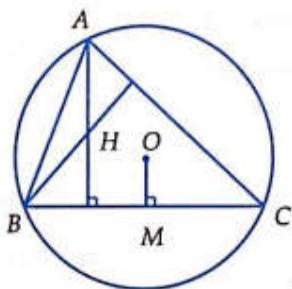
Vì tam giác đều nên  $AB = |\overrightarrow{AB}| = 2a$

- Câu 40.** Cho tam giác không cân  $ABC$ . Gọi  $H, O$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác.  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Tam giác  $ABC$  nhọn thì  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng hướng.  
 B.  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  luôn cùng hướng.  
 C.  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng phương nhưng ngược hướng.  
 D.  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  có cùng giá

Lời giải

**Đáp án A**



Thật vậy khi  $\Delta ABC$  nhọn thì ta có:

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \parallel OM$$

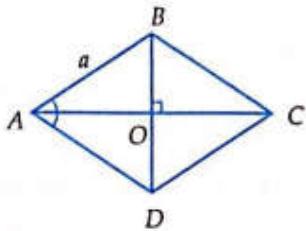
$O, H$  nằm trong tam giác  $\Rightarrow \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng hướng

- Câu 41.** Cho hình thoi tâm  $O$ , cạnh bằng  $a$  và  $\hat{A} = 60^\circ$ . Kết luận nào sau đây là đúng?

- A.  $|\overrightarrow{AO}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$       B.  $|\overrightarrow{OA}| = a$       C.  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$       D.  $|\overrightarrow{OA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

**Đáp án A**



$$\text{Vì } \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AO}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

**Câu 42.** Cho 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng,  $M$  là điểm bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\forall M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .      B.  $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .
- C.  $\forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$ .      D.  $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng,  $M$  là điểm bất kỳ.

Suy ra  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$  không cùng phương  $\Rightarrow \forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$ .

**Câu 43.** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Số vectơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm  $A, B$  là:

- A. 2.      B. 6.      C. 13.      D. 12.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số vectơ (khác  $\vec{0}$ ) là  $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BA}$ .

**Câu 44.** Gọi  $C$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A.  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ .      B.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.
- C.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CB}$  ngược hướng.      D.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $C$  là trung điểm của đoạn  $AB$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.

**Câu 45.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Các vectơ là vectơ đối của vectơ  $\overrightarrow{AD}$  là

- A.  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ .      B.  $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$ .      C.  $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}$ .      D.  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Vectơ đối của vectơ  $\overrightarrow{AD}$  là  $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}$ .

**Câu 46.** Số vectơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước là

- A. 42.      B. 3.      C. 9.      D. 27.

**Lời giải**

**Chọn A**

Số vectơ (khác  $\vec{0}$ ) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ 7 điểm phân biệt cho trước là  $7 \cdot 6 = 42$

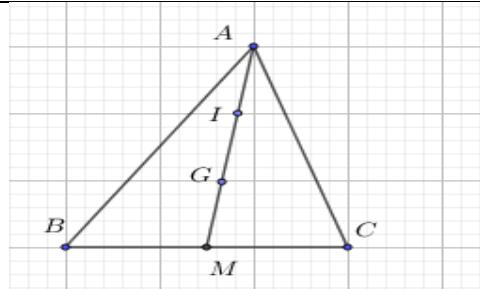
**Câu 47.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$  và  $G$  là trọng tâm. Gọi  $I$  là trung điểm của  $AG$ .

Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{BI}$  là

- A.  $a \frac{\sqrt{21}}{6}$ .      B.  $a \frac{\sqrt{21}}{3}$ .      C.  $a \frac{\sqrt{3}}{6}$ .      D.  $a \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Ta có  $|\overline{AB}| = AB = a$

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$

$$\text{Ta có } |\overline{AG}| = AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{2}{3} \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

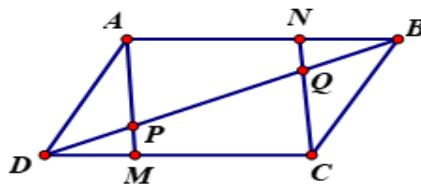
$$|\overline{BI}| = BI = \sqrt{BM^2 + MI^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$$

**Câu 48.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trên các đoạn thẳng  $DC$ ,  $AB$  theo thứ tự lấy các điểm  $M$ ,  $N$  sao cho  $DM = BN$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $AM$ ,  $DB$  và  $Q$  là giao điểm của  $CN$ ,  $DB$ . Khẳng định nào đúng?

- A.  $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{QB}$ .      B.  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ .      C.  $|\overline{PQ}| = |\overline{MN}|$ .      D.  $|\overline{MN}| = |\overline{AC}|$ .

Lời giải

**Chọn A**



Ta có  $DM = BN \Rightarrow AN = MC$ , mặt khác  $AN$  song song với  $MC$  do đó tứ giác  $ANCM$  là hình bình hành. Suy ra  $|\overline{AM}| = |\overline{NC}|$ .

Xét tam giác  $\triangle DMP$  và  $\triangle BNQ$  ta có  $DM = NB$  (giả thiết),  $\widehat{PDM} = \widehat{QBN}$  (so le trong)

Mặt khác  $\widehat{DMP} = \widehat{APB}$  (đối đỉnh) và  $\widehat{APQ} = \widehat{NQB}$  (hai góc đồng vị) suy ra  $\widehat{DMP} = \widehat{BNQ}$ .

Do đó  $\triangle DMP = \triangle BNQ$  (c.g.c) suy ra  $DB = QB$ .

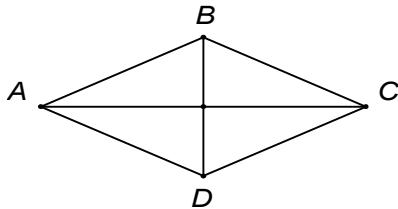
Dễ thấy  $\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{QB}$  cùng hướng vì vậy  $|\overline{DB}| = |\overline{QB}|$ .

**Câu 49.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  và  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ .      B.  $|\overline{BD}| = a$ .      C.  $|\overline{BD}| = |\overline{AC}|$ .      D.  $|\overline{BC}| = |\overline{DA}|$ .

Lời giải

**Chọn B**



Từ giả thiết suy ra tam giác  $ABD$  đều cạnh  $a$  nên  $BD = a \rightarrow |\overline{BD}| = a$ .

- Câu 50.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là các vecto khác  $\vec{0}$  với  $\vec{a}$  là vecto đối của  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây sai?
- A. Hai vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương.
  - B. Hai vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng.
  - C. Hai vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng độ dài.
  - D. Hai vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  chung điểm đầu.

#### Lời giải

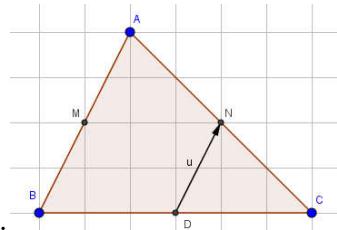
##### Chọn D

Ta có  $\vec{a} = -\vec{b}$ . Do đó,  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

- Câu 51.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, N, D$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ . Khi đó, các vecto đối của vecto  $\overrightarrow{DN}$  là:
- A.  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$ .
  - B.  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$ .
  - C.  $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}$ .
  - D.  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{ND}$ .

#### Lời giải

##### Chọn A



Nhìn hình ta thấy vecto đối của vecto  $\overrightarrow{DN}$  là:  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$ .

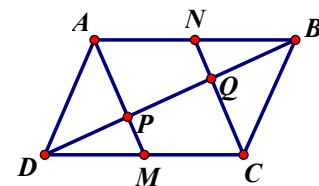
- Câu 52.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $DC, AB$ ;  $P$  là giao điểm của  $AM, DB$  và  $Q$  là giao điểm của  $CN, DB$ . Khẳng định nào sau đây là đúng nhất.
- A.  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$
  - B.  $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$
  - C. Cả A, B đều đúng
  - D. Cả A, B đều sai

#### Lời giải

##### Chọn C

Ta có tứ giác  $DMBN$  là hình bình hành vì  $DM = NB = \frac{1}{2}AB$ ,  $DM // NB$ . Suy ra  $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$ .

Xét tam giác  $CDQ$  có  $M$  là trung điểm của  $DC$  và  $MP // QC$  do đó  $P$  là trung điểm của  $DQ$ . Tương tự xét tam giác  $ABP$  suy ra được  $Q$  là trung điểm của  $PB$



Vì vậy  $DP = PQ = QB$  từ đó suy ra  $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$ .

**Câu 53.** Cho hình thang  $ABCD$  có hai đáy là  $AB$  và  $CD$  với  $AB = 2CD$ . Từ C vẽ  $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$ . Khẳng định nào sau đây là đúng nhất?

- A.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC}$       B.  $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$   
 C. Cả A, B đều đúng    D. A đúng, B sai

Lời giải

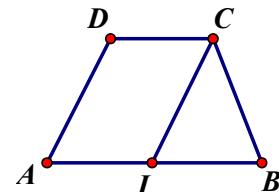
**Chọn C**

Ta có  $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{DA}$  suy ra  $AICD$  là hình bình hành

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{IC}$$

Ta có  $DC = AI$  mà  $AB = 2CD$  do đó  $AI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow I$  là trung

điểm  $AB$



Ta có  $DC = IB$  và  $DC // IB \Rightarrow$  tứ giác  $BCDI$  là hình bình hành

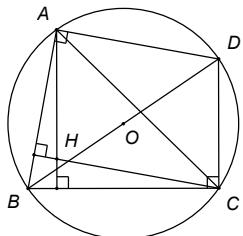
$$\text{Suy ra } \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CB}$$

**Câu 54.** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm H. Gọi D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ .      B.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .  
 C.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$ .      D.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$  và  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ .

Lời giải

**Chọn B**



Ta có  $AH \perp BC$  và  $DC \perp BC$  (do góc  $\widehat{DCB}$  chắn nửa đường tròn). Suy ra  $AH // DC$ .

Tương tự ta cũng có  $CH // AD$ .

**Câu 55.** Cho tam giác  $ABC$  với trực tâm H. D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$       B.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{HC}$   
 C.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$       D.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$  và  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$

Lời giải

Ta có  $BD$  là đường kính  $\Rightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ .

$AH \perp BC, DC \perp BC \Rightarrow AH // DC$  (1)

Ta lại có  $CH \perp AB, DA \perp AB \Rightarrow CH // DA$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow$  tứ giác  $HADC$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .

**Đáp án**

C.

**Câu 56.** Cho  $\Delta ABC$  với điểm  $M$  nằm trong tam giác. Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$  và  $N, P, Q$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $M$  qua  $A', B', C'$ . Câu nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$  và  $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$

C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$  và  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$

B.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$  và  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN}$  và  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

**Lời giải**

Ta có  $AMCP$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

Lại có  $AQBM$  và  $BMCN$  là hình bình hành

$$\Rightarrow NC = BM = QA$$

$$\Rightarrow AQNC \text{ là hình bình hành} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}.$$

**Đáp án**      **B.**

**Câu 57.** Cho tam giác  $ABC$  có  $H$  là trực tâm và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $O$ . Câu nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$

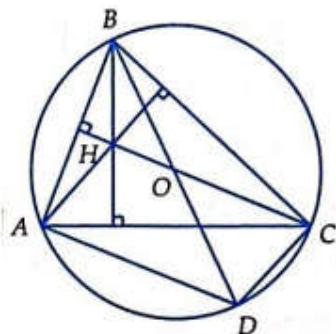
B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

C.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

D.  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}$

**Lời giải**

**Đáp án A**



Ta có thể chỉ ra được  $ADCH$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$

**Câu 58.** Cho đường tròn tâm  $O$ . Từ điểm  $A$  nằm ngoài  $(O)$ , kẻ hai tiếp tuyến  $AB, AC$  tới  $(O)$ . Xét mệnh đề:

(I)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$  (II)  $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$  (III)  $|\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}|$

Mệnh đề đúng là:

A. Chỉ (I)

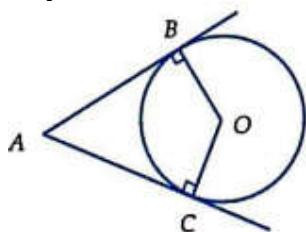
B. (I) và (III)

C. (I), (II), (III)

D. Chỉ (III)

**Lời giải**

**Đáp án D**



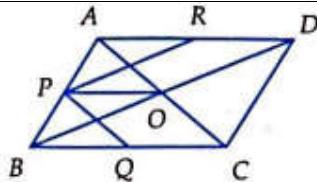
Ta có:  $OB = OC = R \Rightarrow |\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{CO}|$

**Câu 59.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, AD$ . Lấy 8 điểm trên là gốc hoặc ngọn của các vectơ. Tìm mệnh đề sai?

A. Có 2 vectơ bằng  $\overrightarrow{PR}$    B. Có 4 vectơ bằng  $\overrightarrow{AR}$    C. Có 2 vectơ bằng  $\overrightarrow{BO}$    D. Có 5 vectơ bằng  $\overrightarrow{OP}$

**Lời giải**

**Đáp án D**



Ta có:  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

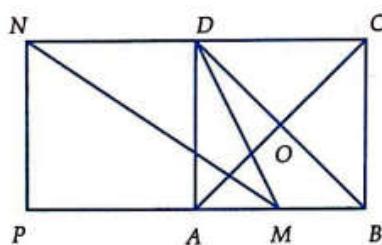
$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QC}, \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{DR} = \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QB}$$

- Câu 60.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $D$ . Hãy tính độ dài của vecto  $\overrightarrow{MN}$ .

A.  $|\overrightarrow{MN}| = \frac{a\sqrt{15}}{2}$       B.  $|\overrightarrow{MN}| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$       C.  $|\overrightarrow{MN}| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$       D.  $|\overrightarrow{MN}| = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

Lời giải

Đáp án C



Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông  $MAD$  ta có:

$$\begin{aligned} DM^2 &= AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 \\ &= \frac{5a^2}{4} \\ \Rightarrow DM &= \frac{a\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Qua  $N$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $AB$  tại  $P$ .

Khi đó tứ giác  $ADNP$  là hình vuông và  $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$

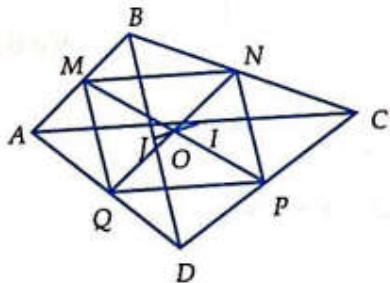
Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông  $NPM$  ta có:

$$\begin{aligned} MN^2 &= NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{13a^2}{4} \\ \Rightarrow MN &= \frac{a\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

Suy ra  $|\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

- Câu 61.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ . Gọi  $O$  là giao điểm của các đường chéo của tứ giác  $MNPQ$ , trung điểm của các đoạn thẳng  $AC, BD$  tương ứng là  $I, J$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OJ}$       B.  $MP = NQ$       C.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$       D.  $\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OJ}$

**Đáp án D**

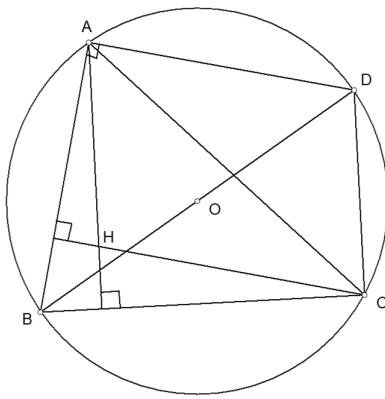
Ta có:  $MNPQ$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \\ &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0} \\ \Rightarrow \overrightarrow{OI} &= -\overrightarrow{OJ}\end{aligned}$$

**Câu 62.** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ ,  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ .      B.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .
- C.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HD}$ .      D.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .

**Chọn A**

Ta có: Vì  $D$  đối xứng với  $B$  qua  $O$  nên  $D$  thuộc đường tròn  $(O)$

$AD // DH$  (cùng vuông góc với  $AB$ )

$AH // CD$  (cùng vuông góc với  $BC$ )

Suy ra  $ADHC$  là hình bình hành

Vậy  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ .

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ↗ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Bảo Vương** ↗ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN) ↗ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: **Nguyễn Bảo Vương**

↗ [https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view\\_as=subscriber](https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber)

☞ Tải nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>

Nguyễn Bảo Vương