

## BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

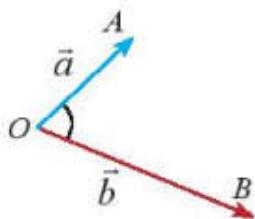
#### 1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ .

Góc  $\widehat{AOB}$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là **góc giữa hai vectơ**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

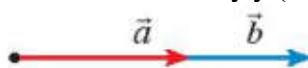
Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .



**Chú ý:**

- Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $0^\circ$ .
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $180^\circ$ .
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  hoặc  $\vec{b}$  là vectơ  $\vec{0}$  thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tuỳ ý (từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ ).



$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$$



$$(\vec{c}, \vec{d}) = 180^\circ$$

#### 2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$

**Tích vô hướng** của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})}$$

**Chú ý:**

- Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $\vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , ta có  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  thì tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ  $\vec{a}$ .

Ta có  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ . Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

#### 3. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$ , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ ;

#### 4. Một số ứng dụng

### Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm  $A, B$  phân biệt, ta có:  $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$ .

Do đó độ dài đoạn thẳng  $AB$  được tính như sau:  $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$ .

### Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vecto bất kì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vecto  $\vec{0}$ . Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .

Hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ .

Cũng như vậy, hai đường thẳng  $a$  và  $b$  vuông góc khi và chỉ khi  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , trong đó  $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , giá của vecto  $\vec{u}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $a$  và giá của vecto  $\vec{v}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $b$ .

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### Dạng 1. Tích tích vô hướng của hai vecto; góc của hai vecto

Phương pháp:

Tích vô hướng của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

Với hai vecto khác vecto  $\vec{0}$ , sử dụng công thức  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $\hat{B} = 30^\circ$ .

Tính  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ .

**Câu 2.** Tính  $(\vec{a}, \vec{b})$  biết rằng  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$ .

**Câu 3.** Cho hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thoả mãn  $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 8$  và  $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$ .

a) Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ .

b) Tính số đo của góc giữa hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$ .

**Câu 4.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các góc:

a)  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB})$

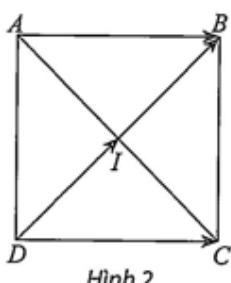
b)  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI})$

c)  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB})$

d)  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC})$

**Câu 5.** Cho hai vecto có độ dài lần lượt là 3 và 4 có tích vô hướng là  $-6$ . Tính góc giữa hai vecto đó.

**Câu 6.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $I$ . Tìm các góc:



Hình 2

a)  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}); (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$

b)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ .

**Câu 7.** Cho hai vecto  $\vec{i}, \vec{j}$  vuông góc có cùng độ dài bằng 1 và cho biết  $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và tính số đo góc  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Câu 8.** Cho hai vecto có độ dài lần lượt là 6 và 8 và có tích vô hướng là 24. Tính góc giữa hai vecto đó.

**Câu 9.** Tìm điều kiện của  $\vec{u}, \vec{v}$  để:

a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

- Câu 10.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $4$  và có đường cao  $AH$ . Tính các tích vô hướng:
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
  - $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
  - $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- Câu 11.** Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  trong các trường hợp sau:

a)  $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=7, (\vec{a}, \vec{b})=45^\circ$ ;

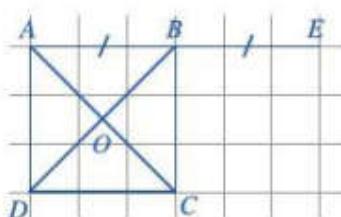
b)  $|\vec{a}|=8, |\vec{b}|=9, (\vec{a}, \vec{b})=150^\circ$

- Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và  $AB=4\text{ cm}$ .

a) Tính độ dài cạnh huyền  $BC$ .

b) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- Câu 13.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  có độ dài cạnh bằng  $a$ . Tính:

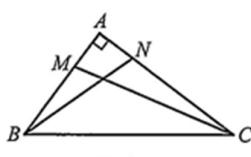


a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$

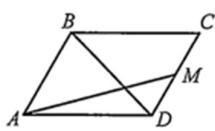
- Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $AB=3$ ,  $AC=4$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các cạnh  $AB$ ,  $AC$  thoả mãn  $AM=AN=1$  (Hình 49). Tính  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$ .



Hình 49

- Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=4, AC=6$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- Câu 16.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB=3$ ,  $AD=4$ ,  $\hat{A}=60^\circ$ .  $M$  là trung điểm của  $CD$  (Hình 50). Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$ .



Hình 50

- Câu 17.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Tính:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

- Câu 18.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ .

Tính các tích vô hướng của các cặp vectơ sau:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

- Câu 19.** Cho tam giác đều  $ABC$  tâm  $O$ , có độ dài các cạnh bằng  $1$ .

a) Xác định góc giữa các cặp vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{CB}$ .

b) Tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

$\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{CB}$

- Câu 20.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , có  $\hat{A}=120^\circ, AB=3$ .

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

b) Tính độ dài cạnh  $BC$ .

c) Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB=2MC$ . Tính  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ .

**Câu 21.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

**Câu 22.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$  và cho  $AD = a, AB = 2a$ . Tính:

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
- b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

**Câu 23.** Cho ba điểm  $O, A, B$  thẳng hàng và  $OA = a, OB = b$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  trong hai trường hợp:

- a) Điểm  $O$  nằm ngoài đoạn thẳng  $AB$ ;
- b) Điểm  $O$  nằm trong đoạn thẳng  $AB$

**Câu 24.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $2a$  và có đường cao  $AH$ . Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ .

**Câu 25.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ , có cạnh  $BC$  bằng  $\sqrt{2}$ . Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Câu 26.** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  có  $AB = AC = a$ .

Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

**Câu 27.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$  và cho  $AD = 2a, AB = a$ . Tính:

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
- b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

**Câu 28.** Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  trong mỗi trường hợp sau:

- a)  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ ;
- b)  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ ;
- c)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng;
- d)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

**Câu 29.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính các tích vô hướng sau:

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- b)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

**Câu 30.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  và  $\hat{A} = 120^\circ$ . Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 31.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Hãy tính:

- a).  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- b).  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- c).  $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
- d).  $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$

**Câu 32.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Hãy tính:

- a).  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}; (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}); (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
- b).  $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$  với  $N$  là điểm trên cạnh  $BC$ .
- c).  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$  với  $M$  nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

**Câu 33.** Cho hình thang  $ABCD$  có đáy lớn  $BC = 3a$ , đáy nhỏ  $AD = a$ , đường cao  $AB = 2a$

- a). Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- b). Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ . Hãy tính góc giữa  $AI$  và  $BD$ .

**Câu 34.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , đường cao  $AH$ . Tính:

- a).  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$ .

b).  $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$

**Câu 35.** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh bằng  $7$ , góc  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Tính:  
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}$ ;  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$

**Câu 36.** Cho các vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng  $1$  và thỏa mãn điều kiện  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Câu 37.** Cho các vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng  $1$  và góc tạo bởi hai vecto bằng  $60^\circ$ . Xác định cosin góc giữa hai vec tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  với  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ .

**Câu 38.** Cho hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Cho biết  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$ . Hãy tính các tích vô hướng  $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b})$ ,  $(3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b})$ .

**Câu 39.** Cho  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$

**Câu 40.** Cho hai vecto đơn vị  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn điều kiện  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ;  $|\vec{a} + \vec{b}|$

### Dạng 2. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng

Phương pháp:

- Biến đổi từ biểu thức về này sang về kia.
- Chứng minh hai biểu thức cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Sử dụng các tính chất của phép toán vecto, tính chất của tích vô hướng.
- Tách vecto, biến đổi về các tích vô hướng khác.

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 41.** Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, chứng minh rằng:  $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ .

**Câu 42.** Cho hình thoi  $ABCD$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = 0$

**Câu 43.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Với mỗi điểm  $M$ , chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}$ .

**Câu 44.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Chứng minh rằng với mỗi điểm  $O$  ta có:

a)  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$

b)  $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$ .

**Câu 45.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$ , ta có:  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

**Câu 46.** Cho tam giác  $ABC$  không cân. Gọi  $D, E, F$  theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ  $A, B, C$ ; gọi  $M, N, P$  tương ứng là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

**Câu 47.** Cho đoạn thẳng  $AB$  có  $O$  là trung điểm và cho điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$

**Câu 48.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh:

$$AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

**Câu 49.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , kẻ đường cao  $AH$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Câu 50.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

**Câu 51.** Cho tam giác  $ABC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác. Với mỗi điểm  $M$ , chứng minh rằng  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ .

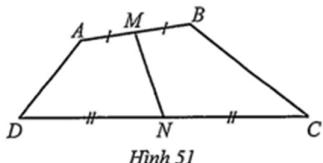
## BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 52.** Cho hình vuông  $ABCD$  có độ dài cạnh  $AC = a\sqrt{2}$ , gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .
- Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$  theo  $a$ .
  - Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$
- Câu 53.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $a\sqrt{3}$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AD$  và  $M$  là điểm bất kỳ.
- Tính  $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$
  - Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
- Câu 54.** Cho  $H$  là trung điểm của  $AB$  và  $M$  là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$
- Câu 55.** Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì  $A, B, C, D$  ta có:
- $$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ (hệ thức O - le).}$$
- Câu 56.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
  - $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$
- Câu 57.** Cho tam giác  $ABC$  có  $I$  trung điểm của  $BC$ . Chứng minh:
- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$
  - $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$  (Với  $H$  là hình chiếu của  $A$  xuống  $BC$ ).
- Câu 58.** Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyén  $AM$ . Chứng minh rằng
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2$
  - $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$
- Câu 59.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $AB = c, BC = a, AC = b$ . Có trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng  $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$  (hệ thức Lep - nit).
- Câu 60.** Cho tam giác  $ABC$ , trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$ , ta có  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$
- Câu 61.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Chứng minh với điểm  $M$  bất kỳ ta luôn có:
- $$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$
- Câu 62.** Cho hai điểm  $M, N$  nằm trên đường tròn đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $I$  là giao điểm hai đường thẳng  $AM$  và  $BN$ . Chứng minh:
- $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$
  - $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = 4R^2$
- Câu 63.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$  và  $M$  là một điểm tùy ý. Chứng minh:
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
  - $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$
- Câu 64.** Cho tam giác  $ABC$  đều nội tiếp đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$ .
- Chứng minh  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$  khi và chỉ khi  $M$  thuộc  $(O)$ .
  - Chứng minh với mọi điểm  $M$ :
- $$AM^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$$

- Câu 65.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  theo thứ tự là trung điểm của  $AC, BD$ . Chứng minh rằng  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$
- Câu 66.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $AB = c, BC = a, CA = b$ , các đường trung tuyến tương ứng  $AA', BB', CC'$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng với mọi  $M$  bất kì, ta có  $2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$
- Câu 67.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $H$  là trực tâm,  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}^2$
- Câu 68.** Cho tam giác  $ABC$ , có  $AD, BE, CF$  lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

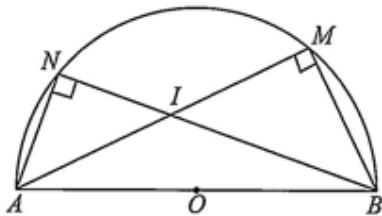
**Dạng 3. Tính khoảng cách giữa hai điểm, chứng minh đẳng thức độ dài***Phương pháp:* Sử dụng tính chất:Với hai điểm  $A, B$  phân biệt, ta có  $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$ , do đó  $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$ .**BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP**

- Câu 69.** (Định lí cosin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác  $ABC$ , ta có;  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$
- Câu 70.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  (Hình 51). Biết  $AD = 2, BC = 3, AD \perp BC$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$ .



Hình 51

- Câu 71.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Với mỗi điểm  $M$ , chứng minh rằng  $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + OA^2 + OB^2$ .
- Câu 72.** Chứng minh rằng với mọi tam giác  $ABC$ , ta có:  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$ .
- Câu 73.** Cho nửa đường tròn với đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho hai dây cung  $AM$  và  $BN$  cắt nhau tại một điểm  $I$ .
- Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ .
  - Tính  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$  theo  $R$ .
- Câu 74.** Cho tam giác đều  $ABC$  có độ dài các cạnh bằng 1.
- Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính tích vô hướng của các cặp vecto  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .
  - Gọi  $N$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $C$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ .
  - Lấy điểm  $P$  thuộc đoạn  $AN$  sao cho  $AP = 3PN$ . Hãy biểu thị các vecto  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{MP}$  theo hai vecto  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ . Tính độ dài đoạn  $MP$ .
- Câu 75.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho  $AM$  và  $BN$  cắt nhau tại  $I$  như Hình 5.



Hình 5

- a) Chứng minh  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$ .
- b) Tính  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$  theo  $R$ .

**Câu 76.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các tia  $BC$  và  $CA$  thoả mãn

$$BM = \frac{1}{3}BC, CN = \frac{5}{4}CA. \text{Tính:}$$

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}$
- b)  $MN$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 77.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Cho điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Tính độ dài  $AM$ .

**Câu 78.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = a\sqrt{2}, BC = 5a, \widehat{ABC} = 135^\circ$ . Gọi điểm  $M$  thuộc  $AC$  sao cho

$$AM = \frac{3}{2}MC$$

- a). Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- b). Tìm  $x, y$  sao cho  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$  và tính  $BM$ .

**Câu 79.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 120^\circ$

- a). Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và độ dài trung tuyến  $AM$ .
- b). Gọi  $AD$  là phân giác trong của góc  $A$  của tam giác  $ABC$ . Phân tích  $\overrightarrow{AD}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ . Suy ra độ dài đoạn  $AD$ .

**Câu 80.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a, BC = a\sqrt{7}, AC = 3a$ . Gọi  $M$  trung điểm của  $AB, N$  thuộc  $AC$  sao cho  $AN = 2NC$  và  $D$  thuộc  $MN$  sao cho  $2DM = DN$

- a). Tìm  $x, y$  sao cho  $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ .
- b). Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và độ dài đoạn  $AD$  theo  $a$ .

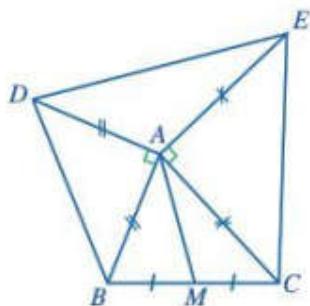
### Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

*Phương pháp:* Sử dụng các tính chất:

Hai đường thẳng  $a$  và  $b$  vuông góc khi và chỉ khi  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , trong đó  $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , giá của vectơ  $\vec{u}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $a$  và giá của vectơ  $\vec{v}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $b$ .

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

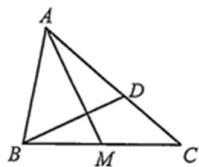
**Câu 81.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3, AC = 4, \widehat{A} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại  $A$  là  $ABD$  và  $ACE$



- a) Tính các tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ ;  
 b) Biểu diễn  $\overrightarrow{AM}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ . Từ đó chứng minh  $AM \perp DE$ .

**Câu 82.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .

Điểm  $D$  thuộc cạnh  $AC$  thỏa mãn  $AD = \frac{7}{12}AC$  (Hình 52).



Hình 52

Chứng minh  $AM \perp BD$ .

**Câu 83.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Trên các cạnh  $AB, AC$  lần lượt lấy các điểm  $P, Q$ . Chứng minh rằng  $\widehat{PMQ} = 90^\circ$  khi và chỉ khi  $BP + \sqrt{3}CQ = BC$ .

**Câu 84.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 1, BC = \sqrt{2}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AD$ .

- a) Chứng minh rằng các đường thẳng  $AC$  và  $BM$  vuông góc với nhau.  
 b) Gọi  $H$  là giao điểm của  $AC, BM$ . Gọi  $N$  là trung điểm của  $AH$  và  $P$  là trung điểm của  $CD$ .  
 Chứng minh rằng tam giác  $NBP$  là một tam giác vuông.

**Câu 85.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} < 90^\circ$ . Dựng ra phía ngoài tam giác hai tam giác vuông cân đỉnh  $A$  là  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm  $BC, BD, CE$ . Chứng minh rằng:

- a)  $AM$  vuông góc với  $DE$ ;  
 b)  $BE$  vuông góc với  $CD$ ;  
 c) Tam giác  $MNP$  là một tam giác vuông cân.

**Câu 86.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .

Điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$ .

- a) Tính  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .  
 b) Biểu diễn  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .  
 c) Chứng minh  $AM \perp BD$ .

**Câu 87.** Cho hình vuông  $ABCD, M$  là trung điểm của  $BC$ .  $N$  là điểm nằm giữa hai điểm  $A$  và  $C$ . Đặt  $x = \frac{AN}{AC}$ . Tìm  $x$  thỏa mãn  $AM \perp BN$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 88.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Gọi  $M, N$  là các điểm sao cho  $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}, 5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$ .

- a). Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$   
 b). Chứng minh  $AM$  vuông góc với  $BN$ .

**Câu 89.** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $A$  nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác vuông cân đỉnh  $A$  là  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $M$  trung điểm của đoạn  $BC$ . Chứng minh rằng  $AM$  vuông góc với  $DE$ .

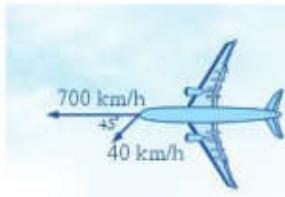
- Câu 90.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AH$  và  $HC$ . Chứng minh  $BI \perp AJ$
- Câu 91.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn  $BC$ ,  $D$  là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên  $AC$ ,  $M$  trung điểm của đoạn  $HD$ . Chứng minh  $AM$  vuông góc với  $DB$ .
- Câu 92.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $E$  là giao của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$  và  $H, K$  là trực tâm của các tam giác  $ABE, CDE$ .
- Chứng minh  $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
  - Chứng minh  $HK \perp IJ$
- Câu 93.** Cho tứ giác  $ABC$  có hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau và cắt nhau tại  $M$ . Gọi  $P$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Chứng minh  $MP$  vuông góc với  $BC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
- Câu 94.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , vẽ  $BH \perp AC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AH$  và  $DC$ . Chứng minh  $BM \perp MN$ .
- Câu 95.** Cho hình vuông  $ABCD$ , điểm  $M$  thuộc đoạn thẳng  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ . Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Chứng minh rằng  $DMN$  là tam giác vuông cân.
- Câu 96.** Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trực tâm của các tam giác  $ABO$  và  $CDO$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Chứng minh  $HK \perp IJ$ .
- Câu 97.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $3a$ . Lấy  $M, N, P$  lần lượt trên 3 cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = a, CN = 2a, AP = x$ . Tìm  $x$  để  $AM$  vuông góc với  $PN$ .
- Câu 98.** Tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nội tiếp đường tròn ( $O$ ).  $D$  là trung điểm của  $AB$ ,  $E$  là trọng tâm tam giác  $ACD$ . Chứng minh  $OE \perp CD$

#### Dạng 5. Bài toán thực tế

Trong Vật lí, tích vô hướng giúp tính công A sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ dịch chuyển là vectơ  $\vec{d}$ . Ta có công thức:  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ .

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 99.** Tính công sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ lớn 20 N kéo một vật dịch chuyển theo một vectơ  $\vec{d}$  có độ dài 50m và cho biết  $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$ .
- Câu 100.** Tính công sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ lớn 60 N kéo một vật dịch chuyển một vectơ  $\vec{d}$  có độ dài 200m. Cho biết  $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$ .
- Câu 101.** Cho ba điểm  $M, N, P$ . Nếu một lực  $\vec{F}$  không đối tác động lên một chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, thì các công sinh bởi lực  $\vec{F}$  trong hai trường hợp sau có mối quan hệ gì với nhau?
- Chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ  $M$  đến  $N$  rồi tiếp tục từ  $N$  đến  $P$ .
  - Chất điểm chuyển động thẳng từ  $M$  đến  $P$ .
- Câu 102.** Một người dùng một lực  $\vec{F}$  có độ lớn là 90N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100m. Biết lực hợp  $\vec{F}$  với hướng dịch chuyển là một góc  $60^\circ$ . Tính công sinh bởi lực  $\vec{F}$
- Câu 103.** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $700 \text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $40 \text{ km/h}$  (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



**Câu 104.** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $650 \text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $35 \text{ km/h}$ . Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị  $\text{km/h}$ ).

### Dạng 6. Tập hợp điểm

**Dạng 1:**  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$  (1) (A, B là hai điểm cố định).

-  $k = 0$  : Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.

-  $k \neq 0$  : Gọi I trung điểm của AB.

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

+ Nếu  $k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$  : Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính  $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$

+ Nếu  $k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4}$  : Tập hợp điểm M là điểm I.

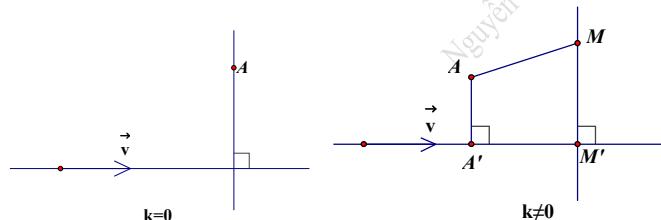
+ Nếu  $k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}$  : Tập hợp các điểm M là rỗng.

**Dạng 2:**  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k$  (2) (A cố định,  $\vec{v}$  có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$  : Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của  $\vec{v}$

$k \neq 0$  : Gọi  $\overrightarrow{A'M'}$  là hình chiếu của  $\overrightarrow{AM}$  trên giá của vectơ  $\vec{v}$ ; ta có:  $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{v} = k$  (định lí hình chiếu). A' cố định  $\Rightarrow M'$  cố định ( $M'$  nằm trên giá của  $\vec{v}$  định bởi  $\overrightarrow{A'M'} = \frac{k}{|\vec{v}|}$ ). Tập hợp các

điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vectơ  $\vec{v}$  tại M'.



**Dạng 3:**  $\alpha \overrightarrow{MA}^2 + \beta \overrightarrow{MB}^2 = k$  (3) (A, B cố định  $\alpha, \beta$  là hằng số và  $\alpha + \beta \neq 0$ ).

Gọi I là điểm thỏa  $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$  là điểm cố định.

$$(3) \Leftrightarrow \alpha(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 + 2(\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{MI} + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}$$

Nếu  $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2 + \beta IB^2$  : Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính

$$\sqrt{\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}}.$$

Nếu  $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2 + \beta IB^2$ : Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu  $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2 + \beta IB^2$ : Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

- Cho hai điểm A, B cố định  $\alpha, \beta$  là hằng số thỏa  $\alpha + \beta \neq 0$  thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho  $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ . Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có:  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MI}$ .
- Cho ba điểm A, B, C cố định  $\alpha, \beta, \gamma$  là hằng số thỏa  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho  $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ . Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có:  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MI}$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 105. Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Câu 106. Cho tam giác  $ABC$ , tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa:

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$
- $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$
- $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MB^2 + 4MC^2$

Câu 107. Cho tam giác  $ABC$ , tìm tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện sau:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$

Câu 108. Cho tam giác  $ABC$ , tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho:  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = AB^2$

Câu 109. Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $AB = AC = a, BC = 3a$ . Tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho

$$2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

Câu 110. Cho  $A, B, C, D$  là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho:

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0$$

Câu 111. Cho đoạn  $AB = a > 0$  và số  $k$ . Tìm tập hợp các điểm M sao cho  $MA^2 + MB^2 = k$

Câu 112. Cho tam giác  $ABC$ , tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho

- $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ ;
- $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ .

Câu 113. Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho:

- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ;
- $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$ ;
- $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ ;
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$ .

Câu 114. Cho hai điểm  $A, B$  và  $k$  là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm  $M$  thoả điều kiện:  $MA^2 + MB^2 = k^2$ .

Câu 115. Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp điểm M sao cho  $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

Câu 116. Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho:

a).  $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$

b).  $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

**Câu 117.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định và số  $k$  cho trước. Tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

**Câu 118.** Cho tam giác  $ABC$ , tìm tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2$  (với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ).

**Câu 119.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ .

a). Xác định vị trí điểm  $P$  thỏa  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ .

b). Chứng minh  $C, G, P$  thẳng hàng.

c). Tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$

**Câu 120.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $BC$  và  $M$  là một điểm thay đổi:

a). Chứng minh  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$  không đổi.

b). Tìm quỹ tích điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k$  ( $k$  là số thực cho trước).

**Câu 121.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm quỹ tích điểm  $M$  thỏa mãn:

a).  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$

b).  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$

(với  $k$  là một số cho trước).

**Câu 122.** Cho tam giác  $ABC$  số  $a$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$ .

**Câu 123.** Cho tam giác  $ABC$  và số  $k$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$ .

### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Nếu hai điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$  thì độ dài đoạn thẳng  $MN$  bằng bao nhiêu?

A.  $MN = 4$

B.  $MN = 2$

C.  $MN = 16$ ;

D.  $MN = 256$ .

**Câu 2.** Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ;

B. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;

C. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;

D. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ .

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$  bằng:

A.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .

B.  $-AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .

C.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .

D.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ACB}$ .

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  bằng:

A.  $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .

B.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .

C.  $-AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .

D.  $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .

**Câu 5.** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Tập hợp các điểm  $M$  nằm trong mặt phẳng thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  là:

A. Đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AB$ .

B. Đường tròn tâm  $B$  bán kính  $AB$ .

- C. Đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .
- D. Đường tròn đường kính  $AB$ .

**Câu 6.** Nếu hai điểm  $M, N$  thoả mãn  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -9$  thì:

- A.  $MN = 9$ .
- B.  $MN = 3$ .
- C.  $MN = 81$ .
- D.  $MN = 6$ .

### BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 7.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vecto cùng hướng và đều khác vecto  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .
- B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ .
- D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Câu 8.** Cho hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khi  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

- A.  $\alpha = 180^\circ$ .
- B.  $\alpha = 0^\circ$ .
- C.  $\alpha = 90^\circ$ .
- D.  $\alpha = 45^\circ$ .

**Câu 9.** Cho hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thoả mãn  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- A.  $\alpha = 30^\circ$ .
- B.  $\alpha = 45^\circ$ .
- C.  $\alpha = 60^\circ$ .
- D.  $\alpha = 120^\circ$ .

**Câu 10.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .
- B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$
- C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$
- D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

**Câu 11.** Cho  $M, N, P, Q$  là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A.  $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$ .

B.  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ .

C.  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$ .

D.  $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$ .

**Câu 12.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$
- B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$
- C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$
- D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$

**Câu 13.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ .
- B.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$ .
- C.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$ .
- D.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$ .

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thoả mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  là:

- A. một điểm.
- B. đường thẳng.
- C. đoạn thẳng.
- D. đường tròn.

**Câu 15.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a = 2$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A.  $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2 \overrightarrow{BC}$ .

B.  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$ .

C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$ .

D.  $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$ .

**Câu 16.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $\hat{A} = 120^\circ$  và  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A.  $\frac{a^2}{2}$ .
- B.  $-\frac{a^2}{2}$ .
- C.  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .
- D.  $-\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 17.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .

B.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ .

D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ .

**Câu 18.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

A.  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$ .

B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$ .

C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ . D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ .

**Câu 19.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ ;  $I$  là trung điểm của  $AD$ . Khi đó  $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$  bằng :

- A.  $\frac{9a^2}{2}$ . B.  $-\frac{9a^2}{2}$ . C. 0. D.  $9a^2$ .

**Câu 20.** Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có góc  $\hat{B} = 50^\circ$ . Hết thúc nào sau đây là sai?

- A.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$ . B.  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$ . C.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$ . D.  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$ .

**Câu 21.** Cho hình vuông  $ABCD$ , tính  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

- A.  $\frac{1}{2}$ . B.  $-\frac{1}{2}$ . C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . D.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 22.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$ . B.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$ . C.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ . D.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$ .

**Câu 23.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

- A. 0. B.  $a$ . C.  $\frac{a^2}{2}$ . D.  $a^2$ .

**Câu 24.** Cho  $M$  là trung điểm  $AB$ , tìm biểu thức sai:

- A.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$ . B.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$ .  
C.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$ . D.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$ .

**Câu 25.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$  và  $H$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A.  $\frac{3a^2}{4}$ . B.  $-\frac{3a^2}{4}$ . C.  $\frac{3a^2}{2}$ . D.  $-\frac{3a^2}{2}$ .

**Câu 26.** Biết  $\vec{a}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Câu nào sau đây đúng

- A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.  
B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc  $120^\circ$ .  
C.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.  
D. A, B, C đều sai.

**Câu 27.** Cho 2 vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 5$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A.  $\sqrt{21}$ . B.  $\sqrt{61}$ . C. 21. D. 61.

**Câu 28.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A.  $3a^2$ . B.  $-3a^2$ . C.  $3a$ . D. 0.

**Câu 29.** Cho 2 vectơ đơn vị  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ . Hãy xác định  $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$

- A. 7. B. 5. C. -7. D. -5.

**Câu 30.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ . Tính  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$

- A.  $-9a^2$ . B.  $15a^2$ . C. 0. D.  $9a^2$ .

**Câu 31.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  có  $AC = 9$ ,  $BC = 5$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. 9. B. 81. C. 3. D. 5.

**Câu 32.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$

A.  $\sqrt{7+\sqrt{3}}$ .      B.  $\sqrt{7-\sqrt{3}}$ .      C.  $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$ .      D.  $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$ .

- Câu 33.** Cho hai điểm  $B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$  là :
- A. Đường tròn đường kính  $BC$ .      B. Đường tròn  $(B; BC)$ .
- C. Đường tròn  $(C; CB)$ . D. Một đường khác.

- Câu 34.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  là :
- A. Đường tròn đường kính  $AB$ .
- B. Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .
- C. Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AC$ .
- D. Đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .

- Câu 35.** Cho hai điểm  $A(2, 2), B(5, -2)$ . Tìm  $M$  trên tia  $Ox$  sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$
- A.  $M(1, 6)$ .      B.  $M(6, 0)$ .      C.  $M(1, 0)$  hay  $M(6, 0)$ .      D.  $M(0, 1)$ .

- Câu 36.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?
- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left( |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 \right)$
- B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left( |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$
- C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \left( |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$
- D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} \left( |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \right)$

- Câu 37.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$       B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

- Câu 38.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$  và chiều cao  $AH$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?
- A.  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$       B.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

- Câu 39.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $AB = c, AC = b$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .
- A.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$       B.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$       C.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$       D.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

- Câu 40.** Cho ba điểm  $A, B, C$  thỏa  $AB = 2\text{cm}, BC = 3\text{cm}, CA = 5\text{cm}$  Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
- A.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$       B.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$       C.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$       D.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

- Câu 41.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$  Tính  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$
- A.  $P = b^2 - c^2$       B.  $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$       C.  $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$       D.  $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

- Câu 42.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$
- A.  $P = -1$       B.  $P = 3a^2$       C.  $P = -3a^2$       D.  $P = 2a^2$

- Câu 43.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a, CA = b, AB = c$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$ .      B.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$ .

C.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ .      D.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ .

- Câu 44.** Cho ba điểm  $O, A, B$  không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng  $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  là
- A. tam giác  $OAB$  đều.      B. tam giác  $OAB$  cân tại  $O$ .
- C. tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$ .      D. tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$ .

- Câu 45.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 8$ ,  $AD = 5$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$ .      C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$ .
- Câu 46.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 8$  và  $BD = 6$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ .      C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$ .
- Câu 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$  là:  
 A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.
- Câu 48.** Tìm tập các hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$  với  $A, B, C$  là ba đỉnh của tam giác.  
 A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.
- Câu 49.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định có khoảng cách bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$  là:  
 A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.
- Câu 50.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định và  $AB = 8$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$  là:  
 A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.
- Câu 51.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$   
 A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4a^2$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$ .      D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2$ .
- Câu 52.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính giá trị của biểu thức  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$   
 A.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$ .      B.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$ .  
 C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$ .      D.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$ .
- Câu 53.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AB = BC = 2\sqrt{5}$ ,  $CD = BD = 5\sqrt{2}$ ,  $AD = 3\sqrt{10}$ ,  $AC = 10$ . Tìm cosin góc giữa hai vecto  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{DB}$   
 A.  $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$ .      B.  $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$ .      C.  $\frac{4}{5\sqrt{2}}$ .      D.  $\frac{3}{5\sqrt{2}}$ .
- Câu 54.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $DA, BC$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  biết  $AB = CD = 2a$ ,  $MN = a\sqrt{3}$ .  
 A.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 50^\circ$ .      B.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$ .      C.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 80^\circ$ .      D.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$ .
- Câu 55.** Cho tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$ , cạnh  $OA = 4$ . Tính  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ .  
 A.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$ .      B.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$ .  
 C.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$ .      D.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$ .
- Câu 56.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  vuông tại  $A, D$ ;  $AB // CD$ ;  $AB = 2a$ ;  $AD = DC = a$ .  $O$  là trung điểm của  $AD$ . Độ dài vecto tổng  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  bằng  
 A.  $\frac{a}{2}$ .      B.  $\frac{3a}{2}$ .      C.  $a$ .      D.  $3a$ .
- Câu 57.** Cho  $ABC$  đều cạnh  $2a$  với  $M$  là trung điểm  $BC$ . Khẳng định nào đúng?  
 A.  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .      B.  $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$ .
- Câu 58.** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  với  $AB = AC = a$ . Khi đó  $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$  bằng  
 A.  $a\sqrt{3}$ .      B.  $a\sqrt{5}$ .      C.  $5a$ .      D.  $2a$ .

- Câu 59.** Cho hai véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}|=4; |\vec{b}|=3; |\vec{a}-\vec{b}|=4$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Chọn phát biểu đúng.
- A.  $\alpha = 60^\circ$ .      B.  $\alpha = 30^\circ$ .      C.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .      D.  $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ .
- Câu 60.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $4a$ . Tích vô hướng của hai vecto  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  là
- A.  $8a^2$ .      B.  $8a$ .      C.  $8\sqrt{3}a^2$ .      D.  $8\sqrt{3}a$ .
- Câu 61.** Cho  $\Delta ABC$  đều;  $AB = 6$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$  bằng
- A.  $-18$ .      B.  $27$ .      C.  $18$ .      D.  $-27$ .
- Câu 62.** Cho hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=\sqrt{3}$  và  $(\vec{a}, \vec{b})=30^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .
- A.  $\sqrt{11}$ .      B.  $\sqrt{13}$ .      C.  $\sqrt{12}$ .      D.  $\sqrt{14}$ .
- Câu 63.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B}=30^\circ, AC=2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ .
- A.  $P = -2$ .      B.  $P = 2\sqrt{3}$ .      C.  $P = 2$ .      D.  $P = -2\sqrt{3}$ .
- Câu 64.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB=2a, AD=3a, \widehat{BAD}=60^\circ$ . Điểm  $K$  thuộc  $AD$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$
- A.  $3a^2$ .      B.  $6a^2$ .      C.  $0$ .      D.  $a^2$ .
- Câu 65.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=5, AC=8, BC=7$  thì  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  bằng:
- A.  $-20$ .      B.  $40$ .      C.  $10$ .      D.  $20$ .
- Câu 66.** Cho hai vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  sao cho  $|\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{b}|=2$  và hai véc tơ  $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}, \vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$  vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- A.  $120^\circ$ .      B.  $60^\circ$ .      C.  $90^\circ$ .      D.  $30^\circ$ .
- Câu 67.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB=a$  và  $AD=a\sqrt{2}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .      B.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$ .      C.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$ .      D.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .
- Câu 68.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC=a\sqrt{3}$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$  và có  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$ . Tính cạnh  $AB, AC$ .
- A.  $AB=a, AC=a\sqrt{2}$ .      B.  $AB=a, AC=a$ .
- C.  $AB=a\sqrt{2}, AC=a$ .      D.  $AB=a\sqrt{2}, AC=a\sqrt{2}$ .
- Câu 69.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $M$  là trung điểm của  $AB, G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$
- A.  $\frac{21a^2}{4}$ .      B.  $\frac{11a^2}{4}$ .      C.  $\frac{9a^2}{4}$ .      D.  $\frac{a^2}{4}$ .
- Câu 70.** Cho các véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và thoả mãn điều kiện  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$
- A.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .      B.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$ .      C.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ .      D.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}$ .
- Câu 71.** Cho các véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai véc tơ bằng  $60^\circ$ . Xác định cosin góc giữa hai vecto  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  với  $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}, \vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$
- A.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{2}$ .      B.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{6}$ .      C.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{4}$ .      D.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{3}$ .

**Câu 72.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng  $3$ . Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 1$ , trên cạnh  $CD$  lấy điểm  $N$  sao cho  $DN = 1$  và  $P$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $\cos \widehat{MNP}$ .

A.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$ .    B.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{4\sqrt{10}}$ .

C.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{\sqrt{10}}$ .    D.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$ .

**Câu 73.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 2$ .  $M$  là điểm được xác định bởi  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$

A.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$ .    B.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$ .    C.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$ .    D.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$ .

**Câu 74.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  và  $G$  là trọng tâm. Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

A.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$ .    B.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$ .

C.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$ .    D.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$ .

**Câu 75.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng  $2$ . Điểm  $M$  nằm trên đoạn thẳng  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ .

Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$ .    B.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$ .    C.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$ .    D.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$ .

**Câu 76.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$  nằm trên một đường tròn  $(C)$  có bán kính  $R$ . Tính  $R$ .

A.  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .    B.  $R = \frac{a}{4}$ .    C.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .    D.  $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$ .

**Câu 77.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $18\text{cm}$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$  là

A. Tập rỗng.    B. Đường tròn cố định có bán kính  $R = 2\text{cm}$ .

C. Đường tròn cố định có bán kính  $R = 3\text{cm}$ .    D. Một đường thẳng.

**Câu 78.** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $J$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ ,  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , điểm  $K$  thỏa mãn  $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ .

Một điểm  $M$  thay đổi nhưng luôn thỏa mãn  $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$ .

Tập hợp điểm  $M$  là đường nào trong các đường sau.

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| A. Đường tròn đường kính $IJ$ . | B. Đường tròn đường kính $IK$ . |
| C. Đường tròn đường kính $JK$ . | D. Đường trung trực đoạn $JK$ . |

**Câu 79.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Lấy  $M, N, P$  lần lượt nằm trên ba cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$ . Tìm  $x$  để  $AM$  vuông góc với  $NP$ .

A.  $x = \frac{5a}{12}$ .    B.  $x = \frac{a}{2}$ .    C.  $x = \frac{4a}{5}$ .    D.  $x = \frac{7a}{12}$ .

**Câu 80.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đường cao  $AB = 2a$ , các cạnh đáy  $AD = a$  và  $BC = 3a$ . Gọi  $M$  là điểm trên đoạn  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ . Tìm  $k$  để  $BM \perp CD$

A.  $\frac{4}{9}$ .    B.  $\frac{3}{7}$ .    C.  $\frac{1}{3}$ .    D.  $\frac{2}{5}$ .

Nguyễn Bảo Vương

## BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

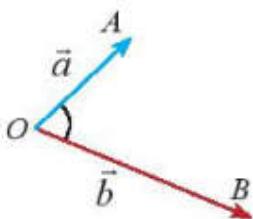
#### 1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ .

Góc  $\widehat{AOB}$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là **góc giữa hai vectơ**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

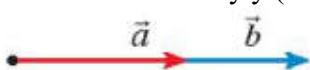
Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .



**Chú ý:**

- Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $0^\circ$ .
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $180^\circ$ .
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  hoặc  $\vec{b}$  là vectơ  $\vec{0}$  thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tùy ý (từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ ).



$$(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$$



$$(\vec{c}, \vec{d}) = 180^\circ$$

#### 2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$

**Tích vô hướng** của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})}.$$

**Chú ý:**

- Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $\vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , ta có  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  thì tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ  $\vec{a}$ .

Ta có  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ . Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

#### 3. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$ , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ ;

#### 4. Một số ứng dụng

##### Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm  $A, B$  phân biệt, ta có:  $\overline{AB}^2 = |\overline{AB}|^2$ .

Do đó độ dài đoạn thẳng  $AB$  được tính như sau:  $AB = \sqrt{\overline{AB}^2}$ .

### Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

*Nhận xét:* Cho hai vectơ bất kì  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$ . Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ .

Hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$ .

Cũng như vậy, hai đường thẳng  $a$  và  $b$  vuông góc khi và chỉ khi  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , trong đó  $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , giá của vectơ  $\vec{u}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $a$  và giá của vectơ  $\vec{v}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $b$ .

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ, góc của hai vectơ

*Phương pháp:*

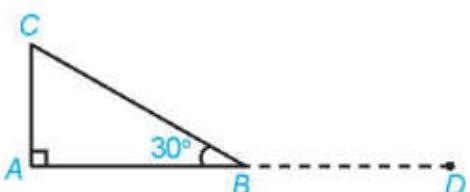
Tích vô hướng của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

Với hai vectơ khác vectơ  $\vec{0}$ , sử dụng công thức  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .

**Câu 1.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $\hat{B} = 30^\circ$ .

Tính  $(\overline{AB}, \overline{AC}), (\overline{CA}, \overline{CB}), (\overline{AB}, \overline{BC})$ .

**Lời giải**



Ta có:  $(\overline{AB}, \overline{AC}) = \widehat{BAC} = 90^\circ$ ,  $(\overline{CA}, \overline{CB}) = \widehat{ACB} = 60^\circ$ ,  $(\overline{AB}, \overline{BC}) = (\overline{BD}, \overline{BC}) = \widehat{DBC} = 150^\circ$ .

**Câu 2.** Tính  $(\vec{a}, \vec{b})$  biết rằng  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-6\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ . Do đó,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$ .

**Câu 3.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thoả mãn  $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 8$  và  $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$ .

a) Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ .

b) Tính số đo của góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{a} + \vec{b}$ .

**Lời giải**

HD. Từ một điểm  $O$ , dựng vectơ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ , rồi dựng vectơ  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ . Khi đó  $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$  và tam giác  $OAB$  vuông tại  $A$ .

a) Đáp số.  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 36$ .

b) Đáp số.  $(\vec{a}; \vec{a} + \vec{b}) \approx 53^\circ 7' 48''$ .

**Câu 4.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các góc:

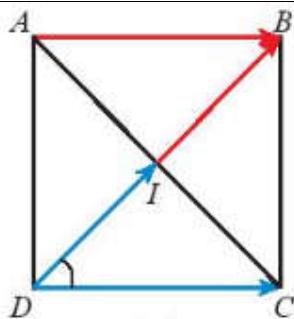
a)  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB})$

b)  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI})$

c)  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB})$

d)  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC})$

**Lời giải**



- a) Ta có:  $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IB}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ , suy ra  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DC}) = \widehat{IDC} = 45^\circ$ .
- b) Ta có:  $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$ , suy ra  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = \widehat{BIC} = 90^\circ$ .
- c) Do hai vectơ  $\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB}$  cùng hướng nên ta có  $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB}) = 0^\circ$ .
- d) Do hai vectơ  $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}$  ngược hướng nên ta có  $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = 180^\circ$ .

**Câu 5.** Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 3 và 4 có tích vô hướng là -6. Tính góc giữa hai vectơ đó.

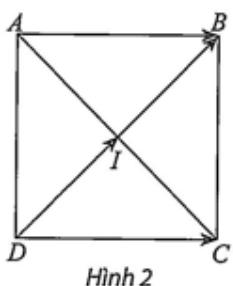
**Lời giải**

Ta cho:  $|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = 4$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$

Ta có công thức:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 4 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow 3 \cdot 4 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -6 \\ \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) &= -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ\end{aligned}$$

**Câu 6.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $I$ . Tìm các góc:



- a)  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}); (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$
- b)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ .

**Lời giải**

a) Do hai vectơ  $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}$  cùng hướng nên ta có  $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}) = 0^\circ$ .

Do hai vecto  $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$  ngược hướng nên ta có  $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ$ .

b) Do hai vecto  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  vuông góc nên ta có  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$ .

**Câu 7.** Cho hai vecto  $\vec{i}, \vec{j}$  vuông góc có cùng độ dài bằng 1 và cho biết  $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và tính số đo góc  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Lời giải**

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = (4\vec{i} - \vec{j}) \cdot (\vec{i} + 4\vec{j}) = 4\vec{i}^2 + 16\vec{i} \cdot \vec{j} - \vec{j} \cdot \vec{i} - 4\vec{j}^2 = 4 - 4 = 0$ .

Vậy  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ . Suy ra  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ .

**Câu 8.** Cho hai vecto có độ dài lần lượt là 6 và 8 và có tích vô hướng là 24. Tính góc giữa hai vecto đó.

**Lời giải**

Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai vecto. Ta có  $\cos \alpha = \frac{24}{6 \cdot 8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ .

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 9.** Tìm điều kiện của  $\vec{u}, \vec{v}$  để:

- a)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- b)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

**Lời giải**

a) Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$$

Nói cách khác:  $\vec{u}, \vec{v}$  cùng hướng.

b) Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$$

Nói cách khác:  $\vec{u}, \vec{v}$  ngược hướng.

**Câu 10.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng 4 và có đường cao  $AH$ . Tính các tích vô hướng:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

c)  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải**

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8;$

c)  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 90^\circ = 0$

**Câu 11.** Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  trong các trường hợp sau:

a)  $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 7, (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$ ;

b)  $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 9, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$

**Lời giải**

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 6 \cdot 7 \cdot \cos 45^\circ = 42 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 21\sqrt{2}$

b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 8 \cdot 9 \cdot \cos 150^\circ = 72 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -36\sqrt{3}$ .

**Câu 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và  $AB = 4\text{cm}$ .

a) Tính độ dài cạnh huyền  $BC$ .

b) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải**

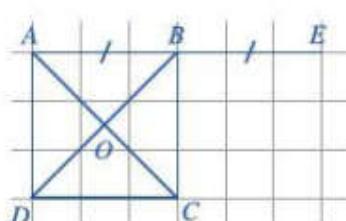
a)  $BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(\text{cm})$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos \widehat{BAC} = 16 \cdot \cos 90^\circ = 16 \cdot 0 = 0$ .

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$

$$= 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \widehat{ABC} = 16\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

**Câu 13.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  có độ dài cạnh bằng  $a$ . Tính:



a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

c)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$

**Lời giải**

a) Ta có:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \widehat{BAO} = 45^\circ$ .

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

b) Vẽ vecto  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$ . Ta có:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{EBD} = 135^\circ$ .

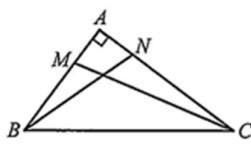
$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD})$$

$$= a \cdot a \sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2 \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -a^2.$$

c) Vì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BO}) = \widehat{EBO} = 135^\circ$ .

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-a^2}{2}.$$

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A, AB = 3, AC = 4$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các cạnh  $AB, AC$  thoả mãn  $AM = AN = 1$  (Hình 49). Tính  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$ .



Hình 49

**Lời giải**

Vì  $\hat{A} = 90^\circ$  nên  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} &= (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 0 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Vì hai vecto  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$  cùng hướng nên  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AB \cdot AM = 3 \cdot 1 = 3$ .

Vì hai vecto  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN}$  cùng hướng nên  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AN} = AC \cdot AN = 4 \cdot 1 = 4$ .

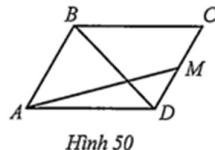
Suy ra  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} = -4 - 3 = -7$ .

**Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4, AC = 6$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) \\ &= \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) = \frac{1}{2}(6^2 - 4^2) = 10. \end{aligned}$$

**Câu 16.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 3, AD = 4, \hat{A} = 60^\circ$ .  $M$  là trung điểm của  $CD$  (Hình 50). Tính  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$ .



Hình 50

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left( \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 \\
 &= AD^2 - \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAD} - \frac{1}{2} AB^2 \\
 &= 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{17}{2}.
 \end{aligned}$$

**Câu 17.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Tính:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

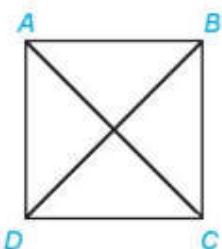
**Lời giải**

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
 &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 90^\circ \\
 &= AB \cdot AC \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

**Câu 18.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ .

Tính các tích vô hướng sau:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải**



Vì  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 90^\circ$  nên  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ .

Hình vuông có cạnh bằng  $a$  nên có đường chéo bằng  $a\sqrt{2}$ .

Mặt khác,  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 45^\circ, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = 135^\circ$ , do đó

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 \\
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= AB \cdot BD \cdot \cos 135^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -a^2.
 \end{aligned}$$

**Câu 19.** Cho tam giác đều  $ABC$  tâm  $O$ , có độ dài các cạnh bằng 1.

a) Xác định góc giữa các cặp vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{CB}$ .

b) Tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

$\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}$  và  $\overrightarrow{CB}$

**Lời giải**

a) Do tam giác  $ABC$  đều, nên  $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ .

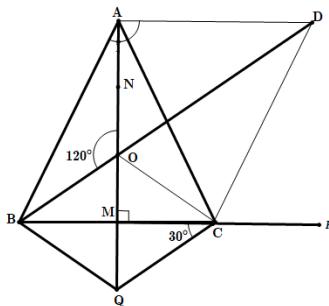
Suy ra  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \widehat{CAB} = 60^\circ$ .

Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $CA$ . Khi đó tứ giác  $ABCD$  là một hình thoi, do đó  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  và  $\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 120^\circ$ .

Suy ra  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \widehat{BAD} = 120^\circ$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $N$  là trung điểm của  $OA$ ,  $P$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $C$ .

Khi đó, do  $O$  là tâm của tam giác đều  $ABC$ , nên  $A, N, O, M$  thẳng hàng,  $AM \perp BC$ ,  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$ .



Suy ra  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}) = 90^\circ$ .

Lấy điểm  $Q$  đối xứng với  $O$  qua  $M$ . Khi đó tứ giác  $BOCQ$  là một hình thoi, có  $\widehat{OCQ} = 60^\circ$ .

Suy ra  $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CQ}; \overrightarrow{CB}) = \widehat{BCQ} = 30^\circ$ .

$$\text{b) Do } AM \perp BC \text{ nên } AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do  $O$  là tâm của tam giác đều  $ABC$ , nên  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = OA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

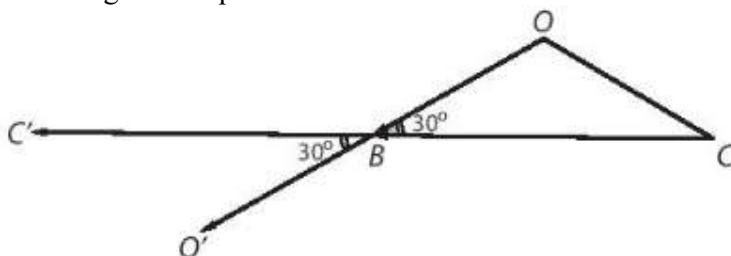
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{6}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0;$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Nhận xét. Ta có thể xác định góc giữa hai vecto  $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CB}$  như sau: Lấy  $O'$  đối xứng với  $O$  qua  $B$  và  $C'$  đối xứng với  $C$  qua  $B$ .



**Câu 20.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , có  $\hat{A}=120^\circ, AB=3$ .

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

b) Tính độ dài cạnh  $BC$ .

c) Lấy điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Tính  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ .

#### Lời giải

a) Do tam giác  $ABC$  cân tại  $A, \hat{A}=120^\circ, AB=3$ , nên

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 3 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{9}{2}.$$

Theo quy tắc ba điểm ta có  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$  và do đó:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3^2 - \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{27}{2}$$

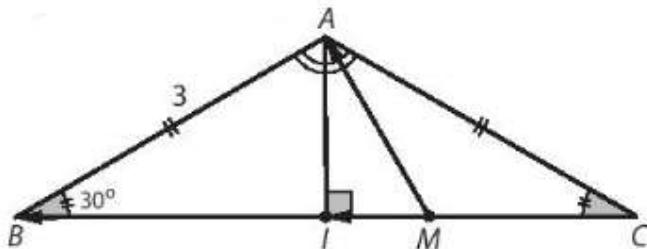
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}^2 = \left(-\frac{9}{2}\right) - 3^2 = -\frac{27}{2}.$$

b) Theo quy tắc ba điểm, ta có  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ . Từ đó

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = 27$$

Suy ra  $BC = 3\sqrt{3}$ .

c) Gọi I là trung điểm của  $BC$ .



Do  $M$  thuộc cạnh  $BC$  và  $MB = 2MC$ , I là trung điểm của  $BC$ , ta có  $\overrightarrow{MB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ .

Suy ra

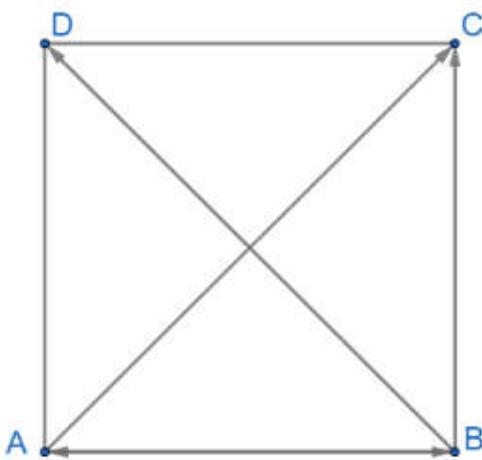
$$\begin{aligned} \overline{MI} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{IB} \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Từ đó, theo định lí chiếu, ta được

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CB}^2 = 3$$

- Câu 21.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Tính các tích vô hướng:  
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

#### Lời giải



Ta có:  $AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

+ )  $AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2 \sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 135^\circ = -a^2$$

+ )  $AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

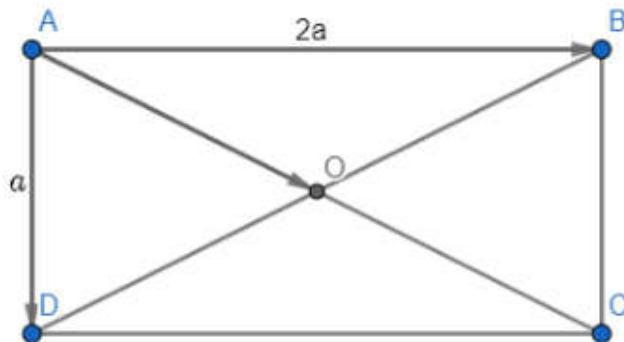
**Câu 22.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$  và cho  $AD = a, AB = 2a$ . Tính:

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
- b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} AC = BD &= \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \\ &= \cos \widehat{OAB} = \cos \widehat{CAB} = \frac{AB}{AC} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$$

$$= AB \cdot \frac{1}{2} AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2a^2$$

b)  $AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

**Câu 23.** Cho ba điểm  $O, A, B$  thẳng hàng và  $OA = a, OB = b$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  trong hai trường hợp:

- a) Điểm  $O$  nằm ngoài đoạn thẳng  $AB$  ;
- b) Điểm  $O$  nằm trong đoạn thẳng  $AB$

Lời giải

a) Ta có:



Ta thấy hai vecto  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  cùng hướng nên  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0^\circ$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = a \cdot b \cdot \cos 0^\circ = ab$$

b) Ta có:



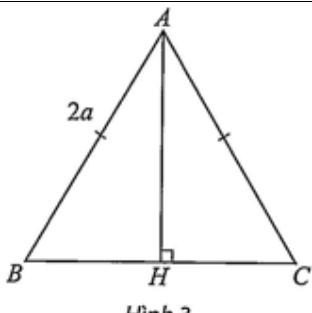
Ta thấy hai vecto  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  ngược hướng nên

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 180^\circ \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = a \cdot b \cdot \cos 180^\circ = -ab$$

**Câu 24.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $2a$  và có đường cao  $AH$ . Tính các tích vô hướng:  
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$ .

Lời giải



Hình 3

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ = 4a^2 \cdot \frac{1}{2} = 2a^2$$

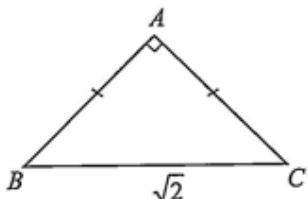
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ = 4a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2a^2$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = |\overrightarrow{HB}| \cdot |\overrightarrow{HC}| \cdot \cos(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = a \cdot a \cdot \cos 180^\circ = a^2 (-1) = -a^2$$

- Câu 25.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ , có cạnh  $BC$  bằng  $\sqrt{2}$ . Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Lời giải



Hình 4

Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $BC = \sqrt{2}$  suy ra  $AB = AC = 1$ .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

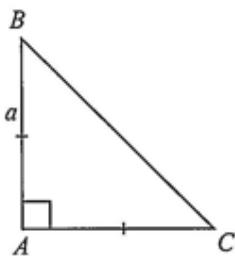
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$$

- Câu 26.** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  có  $AB = AC = a$ .

Tính các tích vô hướng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ .

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0;$$



Hình 1

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = (-\overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = -(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}).$$

$$\text{Ta có: } CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}) = -|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos \widehat{ACB}$$

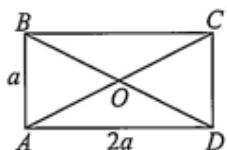
$$= -CA \cdot CB \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2.$$

**Câu 27.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$  và cho  $AD = 2a$ ,  $AB = a$ . Tính:

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$   
 b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

Lời giải

a)  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .



Hình 2

Khi đó  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{2}$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

**Câu 28.** Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  trong mỗi trường hợp sau:

- a)  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ ;  
 b)  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ ;  
 c)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng;  
 d)  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.

Lời giải

Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$  từ đó suy ra

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30 \cdot \cos 120^\circ = -15$

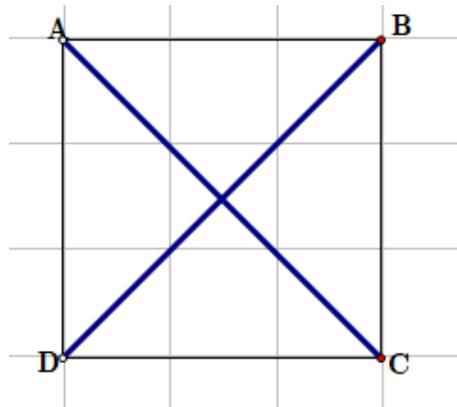
c)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot \cos 0^\circ = 6$

d)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot \cos 180^\circ = -6$

**Câu 29.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính các tích vô hướng sau:

- a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$   
 b)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

Lời giải



a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

$$b) \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

**Câu 30.** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  và  $\hat{A} = 120^\circ$ . Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 + a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} a^2.$$

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 31.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Hãy tính:

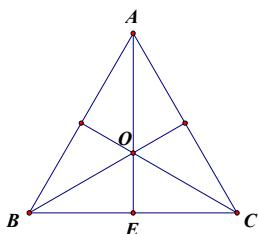
$$a). \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$b). \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$c). (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$$

$$d). (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$$

**Lời giải**



$$a). \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$b). \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

$$= -BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = -a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$$

$$c). \text{Gọi } E \text{ là trung điểm của } BC \text{ có } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB};$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CB} = 2|\overrightarrow{OE}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{CB})$$

$$= 2 \cdot OE \cdot CB \cos 90^\circ = 0.$$

d). Khai triển biểu thức, ta được

$$D = (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\text{Chú ý rằng: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Từ đó } D = a^2 + \frac{3a^2}{2} + a^2 - 3a^2 = \frac{a^2}{2}.$$

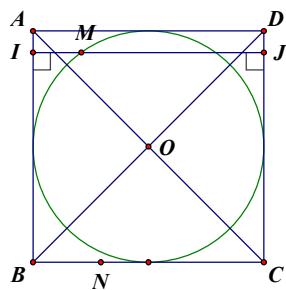
**Câu 32.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$ . Hãy tính:

$$a). \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}; (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}); (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

$$b). \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ với } N \text{ là điểm trên cạnh } BC.$$

$$c). \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} \text{ với } M \text{ nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.}$$

**Lời giải**



a).

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -BA \cdot BC \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -BA \cdot BD \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$$

$$\bullet (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$= 0 + |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ = a^2$$

b).

$$\bullet \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BO}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB} \text{ (do } \overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0)$$

$$= \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BO}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\bullet \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}^2 = -a^2$$

c).

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})$$

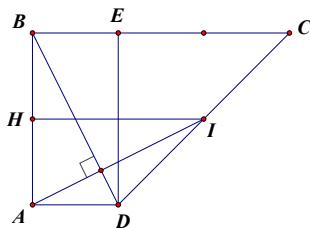
$$= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) = MH^2 - HA^2$$

**Câu 33.** Cho hình thang  $ABCD$  có đáy lớn  $BC = 3a$ , đáy nhỏ  $AD = a$ , đường cao  $AB = 2a$

a). Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ ;  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ ;  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

b). Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ . Hãy tính góc giữa  $AI$  và  $BD$ .

**Lời giải**



- Dựng  $DE \perp BC, E \in BC \Rightarrow ABED$  là hình chữ nhật. Do đó  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD}$

$$= -\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = -|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = -DE \cdot DC \cdot \cos 45^\circ = -2a \cdot 2a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4a^2$$

$$- \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = 3|\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos \widehat{DBE} = 3BE \cdot BD \cdot \frac{BE}{BD} = 3 \cdot a^2$$

$$- \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 0^\circ - \overrightarrow{AB}^2 = BC \cdot AD - AB^2 = 3a \cdot a - 4a^2 = -a^2$$

(Vì  $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ;  $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ).

b). Gọi H trung điểm của AB, suy ra HI là đường trung bình của hình thang ABCD, do đó

$$HI = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2} = 2a$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} = HI \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = 2a \cdot a = 2a^2$$

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad (\text{do } \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB}); \quad \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \quad (\text{do } \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD}).$$

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$$

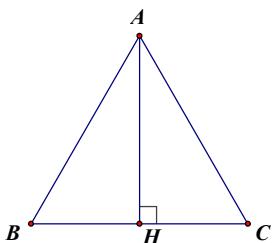
Vậy  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$  góc giữa AI và BD bằng  $90^\circ$ .

**Câu 34.** Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường cao AH. Tính:

a).  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$ .

b).  $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$

**Lời giải**



a).

$$-\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

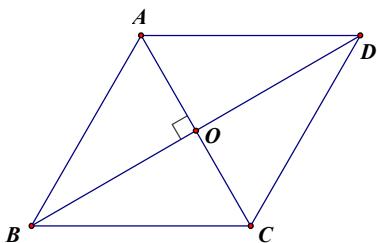
$$-\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \cdot AH \cdot \cos \widehat{BAH} = -a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -\frac{3a^2}{4}$$

$$\text{b). } (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{AB}(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$= -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -2 \cdot \frac{a^2}{2} - 3 \cdot \frac{3a^2}{4} = -\frac{13a^2}{4}$$

**Câu 35.** Cho hình thoi ABCD tâm O cạnh bằng 7, góc  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Tính:  
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$

**Lời giải**



$$\text{Do } \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AC = 7, BO = \frac{7\sqrt{3}}{2} \quad (\text{đường cao tam giác đều} = \frac{\text{canh} \cdot \sqrt{3}}{2})$$

- $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 7 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ = \frac{49}{2}$ .
- $\vec{AB} \cdot \vec{OA} = -\vec{AB} \cdot \vec{AO} = -AB \cdot AO \cdot \cos 60^\circ = -7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{49}{4}$
- $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$  (do  $\vec{AC} \perp \vec{BD}$ )
- $\vec{AB} \cdot \vec{OB} = \vec{BA} \cdot \vec{BO} = BA \cdot BO \cdot \cos \widehat{ABO} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3a^2}{4}$

**Câu 36.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 4 &\Leftrightarrow (2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 4a^2 - 12|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9b^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 4 - 12 \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9 = 16 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Câu 37.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng  $60^\circ$ . Xác định cosin góc giữa hai vec tơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  với  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = a^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) - 2b^2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\bullet \quad \vec{u}^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 1 = 7 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{7}$$

$$\bullet \quad \vec{v}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos 60^\circ + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{v}| = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7} \cdot 1} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

**Câu 38.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Cho biết  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$ . Hãy tính các tích vô hướng  $\vec{a}(2\vec{a} - \vec{b})$ ,  $(3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b})$ .

**Lời giải**

$$\text{Trước hết ta có: } \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 36, \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 9, \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = 6 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}.$$

Vậy:

$$\bullet \quad \vec{a}(2\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 36 - 9\sqrt{2} = 72 - 9\sqrt{2}$$

$$\bullet \quad (3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b}) = -6\vec{a}^2 + 12\vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot 36 + 12 \cdot 9 - 9\sqrt{2} = -108 - 9\sqrt{2}.$$

**Câu 39.** Cho  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$ . Tính  $|2\vec{a} + \vec{b}|$

**Lời giải**

$$-\quad |\vec{a} - 3\vec{b}|^2 = \vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 - \vec{a}^2 - 9\vec{b}^2}{6} = \frac{3^2 - 3^2 - 9 \cdot \sqrt{2}^2}{6} = -3$$

$$-\quad |2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3^2 + \sqrt{2}^2 + 4 \cdot (-3) = 26 \Rightarrow |2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{26}$$

**Câu 40.** Cho hai vectơ đơn vị  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn điều kiện  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ;  $|\vec{a} + \vec{b}|$

**Lời giải**

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \Rightarrow (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 3 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = 3 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{3-4-1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Có } (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

**Dạng 2. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng**

*Phương pháp:*

- Biến đổi từ biểu thức về này sang về kia.
- Chứng minh hai biểu thức cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Sử dụng các tính chất của phép toán vectơ, tính chất của tích vô hướng.
- Tách vectơ, biến đổi về các tích vô hướng khác.

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 41.** Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, chứng minh rằng:  $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (\vec{a} + \vec{b})^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

**Nhận xét:** Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2; \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

**Câu 42.** Cho hình thoi  $ABCD$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = 0$

**Lời giải**

Vì  $ABCD$  là hình thoi nên  $AC \perp BD$ . Khi đó, ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

**Câu 43.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Với mỗi điểm  $M$ , chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}$ .

**Lời giải**

$$\text{Cách 1: } \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 \\ &= \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{MO}^2 - 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}. \end{aligned}$$

**Câu 44.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Chứng minh rằng với mỗi điểm  $O$  ta có:

$$\text{a)} \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$$

$$\text{b)} \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2).$$

**Lời giải**

$$\text{a)} \text{ Vì } I \text{ là trung điểm } AB \text{ nên } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{OI} \cdot \vec{0} = 0$$

$$\text{b)} \text{ Vì } I \text{ là trung điểm } AB \text{ nên } 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}).$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (-\overrightarrow{OA})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$$

**Câu 45.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$ , ta có:  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

## Lời giải

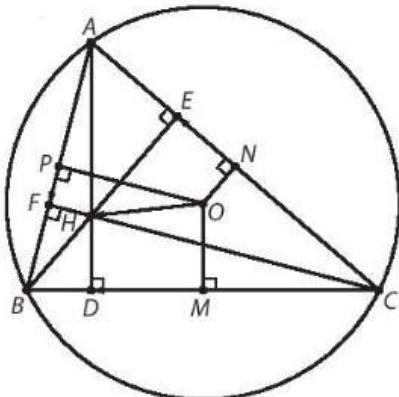
Ta có:

$$\begin{aligned}
 MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\
 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\
 &= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}^2 \\
 &= 3\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \\
 &= 3\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0} + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \\
 &\quad (\text{do } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC) \\
 &= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \\
 &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \quad (\text{đpcm}).
 \end{aligned}$$

- Câu 46.** Cho tam giác  $ABC$  không cân. Gọi  $D, E, F$  theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ  $A, B, C$ ; gọi  $M, N, P$  tương ứng là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

## Lời giải

Gọi  $H$  là trực tâm và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác  $ABC$ . Khi đó  $D, E, F$  tương ứng là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên  $BC, CA, AB$  và  $M, N, P$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $BC, CA, AB$ .



Nguyễn Bảo Vương

Theo định lí chiếu ta có:

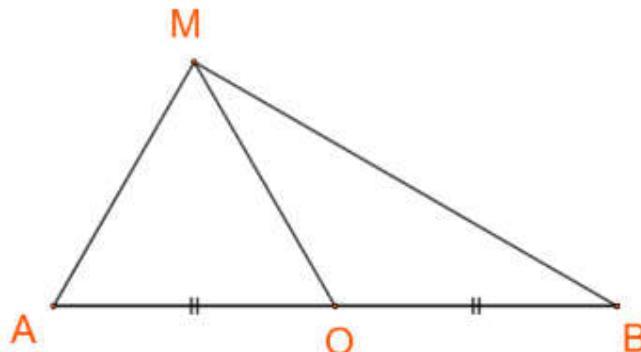
$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OH} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB} \\
 \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OH} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC} \\
 \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OH} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA}.
 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra  $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

- Câu 47.** Cho đoạn thẳng  $AB$  có  $O$  là trung điểm và cho điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$

## Lời giải



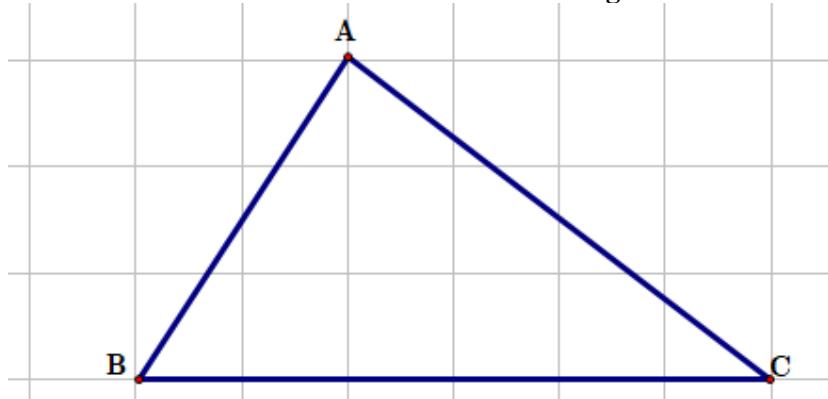
Ta có:  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA} \quad (\text{đpcm})$$

**Câu 48.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh:

$$AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

Lời giải



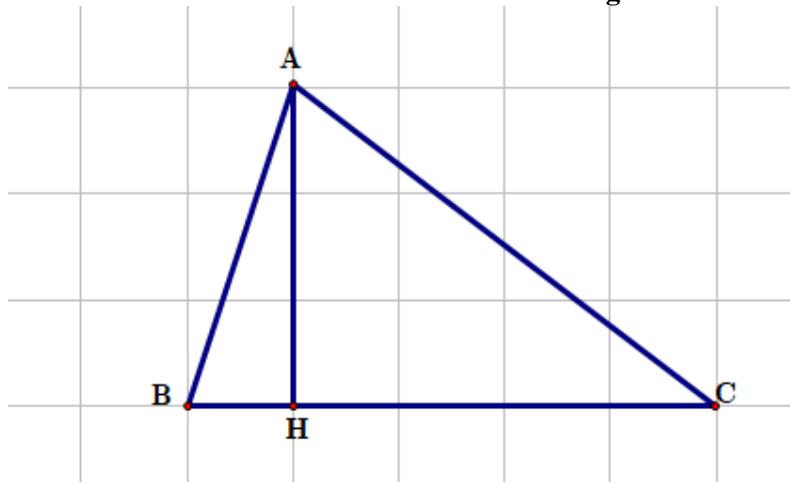
$$\text{Ta có } AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = AB^2 - AB^2 = 0 \quad (\text{đpcm})$$

**Câu 49.** Cho tam giác nhọn  $ABC$ , kẻ đường cao  $AH$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

Lời giải



$$\text{a) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad (\text{đpcm})$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \quad (\text{đpcm})$$

**Câu 50.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

Lời giải

Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

**Câu 51.** Cho tam giác  $ABC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác. Với mỗi điểm  $M$ , chứng minh rằng  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$ .

Lời giải

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \end{aligned}$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

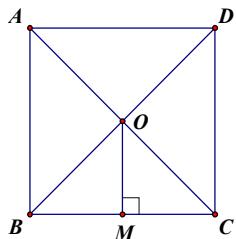
### BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 52.** Cho hình vuông  $ABCD$  có độ dài cạnh  $AC = a\sqrt{2}$ , gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

a). Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$  theo  $a$ .

b). Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$

Lời giải



a).

Do ABCD là hình vuông  $\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} \Leftrightarrow AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = a$ .

Theo định nghĩa có:  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD \cdot AC \cdot \cos \widehat{CAD} = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2$ .

b).

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2} a \cdot a \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2} \quad (1)$$

$$\bullet 2(OC^2 - OM^2) = 2MC^2 = \frac{BC^2}{2} = \frac{a^2}{2} \quad (2)$$

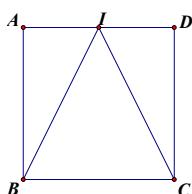
Từ (1) và (2) suy ra  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$

**Câu 53.** Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh  $a\sqrt{3}$ . Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.

a). Tính  $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$

b). Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

Lời giải



a).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} &= \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4} (2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) (2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4} [(2\overrightarrow{BA})^2 - \overrightarrow{BC}^2] \\ &= \frac{1}{4} (4BA^2 - BC^2) = \frac{1}{4} \cdot 3AB^2 = \frac{9a^2}{4} \end{aligned}$$

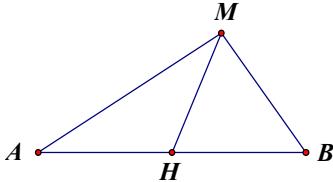
b). Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \quad (\text{do } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{DC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{DC} \\
 &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} \\
 &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \quad (\text{Do } \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0)
 \end{aligned}$$

**Câu 54.** Cho  $H$  là trung điểm của  $AB$  và  $M$  là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$

**Lời giải**



$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) \\
 &= \overrightarrow{MH}^2 - \overrightarrow{HA}^2 = HM^2 - HA^2 \quad (\text{Do } H \text{ trung điểm của } AB \text{ nên có } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HA})
 \end{aligned}$$

**Câu 55.** Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì  $A, B, C, D$  ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad (\text{hệ thức O - le}).$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\
 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\
 &= (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) \\
 &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

**Câu 56.** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng:

a).  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

b).  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$

**Lời giải**

a).

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \quad (1)$$

b).  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos A$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \quad (2)$$

**Chú ý:** Các công thức (1) và (2) thường xuyên được sử dụng trong khi giải các bài tập khác.

Đặc biệt, (2) được gọi là định lí hàm số cosin, trong chương sau ta sẽ đề cập nhiều đến định lí này.

**Câu 57.** Cho tam giác  $ABC$  có  $I$  trung điểm của  $BC$ . Chứng minh:

a).  $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

b).  $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$  (Với  $H$  là hình chiếu của  $A$  xuống  $BC$ ).

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
 \text{a). Ta có: } AB^2 + AC^2 &= \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2 \\
 &= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB})^2 \quad (\text{I trung điểm của BC} \Rightarrow \overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}) \\
 &= 2AI^2 + 2BI^2 = 2AI^2 + 2 \cdot \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} \quad (\text{đpcm}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b). } AB^2 - AC^2 &= \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB} \cdot 2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{HI} \\
 &= 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}
 \end{aligned}$$

**Câu 58.** Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyến  $AM$ . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned}
 \text{a). } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AM^2 - \frac{1}{4}BC^2 \\
 \text{b). } AM^2 &= \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}
 \end{aligned}$$

#### Lời giải

a). Cách 1:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2}{4} = \frac{(2\overrightarrow{AM})^2 - \overrightarrow{CB}^2}{4} \\
 &= \frac{4AM^2 - BC^2}{4} = AM^2 - \frac{BC^2}{4}
 \end{aligned}$$

Cách 2: Gọi I là trung điểm BC

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} \text{ và } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} \\
 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} &= AI^2 - IB^2 = AI^2 - \frac{BC^2}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b). } \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \\
 \Rightarrow AM^2 &= \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \\
 &= \frac{1}{4}[2(AB^2 + AC^2) - (AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})] \\
 &= \frac{1}{4}[2(AB^2 + AC^2) - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2] \\
 &= \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \quad (\text{đpcm}).
 \end{aligned}$$

Đây chính là công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác, sẽ được đề cập nhiều ở phần sau.

**Câu 59.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $AB = c, BC = a, AC = b$ . Có trọng tâm  $G$ . Chứng minh rằng

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (\text{hệ thức Lep-nit}).$$

#### Lời giải

Ta có  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})^2 &= 0 \\
 \Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2(\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) - (GA^2 + GB^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}) \\
 & - (GB^2 + GC^2 - 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}) - (GC^2 + GA^2 - 2\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}) = 0 \\
 & \Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})^2 \\
 & \Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = AB^2 + BC^2 + CA^2 \\
 & \Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ (đpcm)}
 \end{aligned}$$

- Câu 60.** Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có  
 $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$

#### Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}
 MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC})^2 \\
 &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} \\
 &= 3MG^2 + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}
 \end{aligned}$$

#### Nhận xét:

- a). Điểm có tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tam giác nhỏ nhất chính là trọng tâm của tam giác.  
b). Nếu tam giác ABC nội tiếp đường tròn  $(O; R)$  thì:

$$3(R^2 - OG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 \text{ (Với } M \equiv O).$$

- Câu 61.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh với điểm M bất kỳ ta luôn có:

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

#### Lời giải

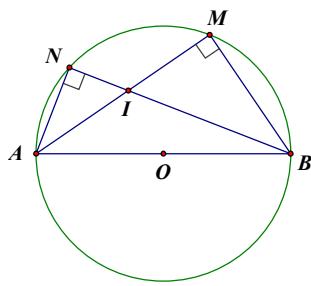
Theo tính chất trọng tâm, ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow 9\overrightarrow{MG}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 \\
 & \Leftrightarrow 9MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \\
 & \Leftrightarrow 9MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + (MA^2 + MB^2 - AB^2) + (MB^2 + MC^2 - BC^2) \\
 & \quad + (MA^2 + MC^2 - AC^2) \\
 & \Leftrightarrow 9MG^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2) \\
 & \Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)
 \end{aligned}$$

- Câu 62.** Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính  $AB = 2R$ . Gọi I là giao điểm hai đường thẳng  $AM$  và  $BN$ . Chứng minh:

- a).  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$ ;  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$   
b).  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = 4R^2$

#### Lời giải



Vì  $BM \perp AI$  nên  $\overrightarrow{AM}$  là hình chiếu của vec tơ  $\overrightarrow{AB}$  trên đường thẳng AI. Vậy ta có:  
 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$

Chứng minh tương tự  $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$

$$\begin{aligned} \text{b). Ta có: } & \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IB} \\ & = \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4R^2 \end{aligned}$$

**Câu 63.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có tâm  $O$  và  $M$  là một điểm tùy ý. Chứng minh:

- a).  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
- b).  $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$

**Lời giải**

a). Vì AC là đường kính, ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - R^2 \quad (\text{do } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}) \end{aligned}$$

Tương tự:  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MO^2 - R^2$

Vậy  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

$$\text{b). } \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$$

**Câu 64.** Cho tam giác  $ABC$  đều nội tiếp đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$ .

a). Chứng minh  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$  khi và chỉ khi  $M$  thuộc  $(O)$ .

b). Chứng minh với mọi điểm  $M$ :

$$AM^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$$

**Lời giải**

a). Vì tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác, do đó ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\vec{0}}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + 3R^2$$

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2 \Leftrightarrow 3MO^2 + 3R^2 = 6R^2 \Leftrightarrow MO^2 = R^2 \Leftrightarrow MO = R \Leftrightarrow M$  thuộc đường tròn  $(O)$ .

$$\text{b). } MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 - 3\overrightarrow{MC}^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 - 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\
 &= (\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2) + 2(\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2) - 3(\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2) \\
 &= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}) \\
 &= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{OM} - 3\overrightarrow{MC}) \\
 &= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \text{ (đpcm).}
 \end{aligned}$$

- Câu 65.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  theo thứ tự là trung điểm của  $AC, BD$ . Chứng minh rằng  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= AC^2 + BD^2 + 4IJ^2 \\
 \Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= AC^2 + BD^2 + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})^2 \\
 \Leftrightarrow (AD^2 - AC^2) - (BD^2 - BC^2) &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \\
 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \cdot 2\overrightarrow{AB} &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \text{ (đúng).}
 \end{aligned}$$

- Câu 66.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $AB = c, BC = a, CA = b$ , các đường trung tuyến tương ứng  $AA', BB', CC'$ . Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng với mọi  $M$  bất kì, ta có  $2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA}' + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 VT &= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}') + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\
 &= 2(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA}' + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MG}) + \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GA}' \\
 &= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA}' + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GA}' + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}
 \end{aligned}$$

Vì  $G$  là trọng tâm nên  $2\overrightarrow{GA}' = -\overrightarrow{GA}$

$$\text{Vậy } VT = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG} \left( \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_{0} \right) - \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}$$

Mà:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{GA}^2 &= \left( \frac{2}{3} \overrightarrow{AA}' \right)^2 = \frac{4}{9} AA'^2 = \frac{4}{9} \left( \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9} \\
 \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} &= \frac{\overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 - \overrightarrow{BC}^2}{2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{9} - a^2 \\
 &= \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{18}. \\
 \Rightarrow VT &= 3MG^2 - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9} + \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{18} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}
 \end{aligned}$$

**Câu 67.** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $H$  là trực tâm,  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Chứng minh rằng

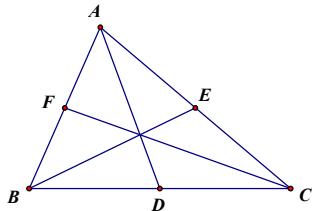
$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}^2$$

Lời giải

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}) \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4}[\overrightarrow{BH}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{CH}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})] \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{CH}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}^2\end{aligned}$$

**Câu 68.** Cho tam giác  $ABC$ , có  $AD, BE, CF$  lần lượt là các đường trung tuyế̂n. Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

Lời giải



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BC} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CA} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\left( \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} \right)}_0 + \underbrace{\left( \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} \right)}_0 + \underbrace{\left( \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} \right)}_0 \right] \\ &= 0\end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

### Dạng 3. Tính khoảng cách giữa hai điểm, chứng minh đẳng thức độ dài

Phương pháp: Sử dụng tính chất:

Với hai điểm  $A, B$  phân biệt, ta có  $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$ , do đó  $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$ .

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

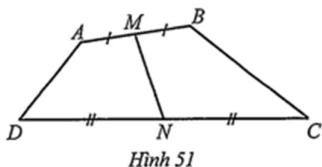
**Câu 69.** (Định lí cosin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác  $ABC$ , ta có;  
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$

Lời giải

Ta có:  $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

Suy ra:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$ .

**Câu 70.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  (Hình 51). Biết  $AD = 2, BC = 3, AD \perp BC$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$ .



Hình 51

### Lời giải

Ta có:  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$  và  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ .

Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } MN^2 &= \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 0\right) = \frac{1}{4}(2^2 + 3^2) = \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } MN = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

- Câu 71.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Với mỗi điểm  $M$ , chứng minh rằng  $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + OA^2 + OB^2$ .

### Lời giải

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 \\ &= \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= 2MO^2 + OA^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{0} \\ &= 2MO^2 + OA^2 + OB^2. \end{aligned}$$

- Câu 72.** Chứng minh rằng với mọi tam giác  $ABC$ , ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Đặt } A &= \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ \Rightarrow A &= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (AB \cdot AC \cdot \cos A)^2} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 \cdot AC^2 (1 - \cos^2 A)} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } 1 - \cos^2 A = \sin^2 A$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 \cdot AC^2 \cdot \sin^2 A} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \quad (\text{Vi } 0^\circ < \hat{A} < 180^\circ \text{ nên } \sin A > 0) \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } A = S_{ABC} \text{ hay } S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}. \quad (\text{đpcm})$$

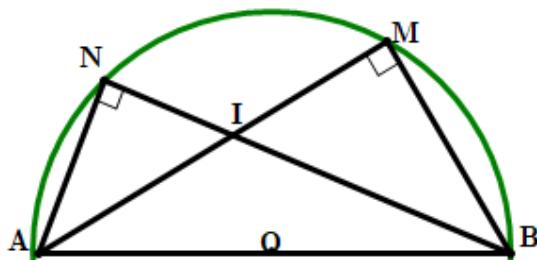
- Câu 73.** Cho nửa đường tròn với đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho hai dây cung  $AM$  và  $BN$  cắt nhau tại một điểm  $I$ .

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

b) Tính  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$  theo  $R$ .

### Lời giải

a) Do  $M$  thuộc nửa đường tròn với đường kính  $AB$  nên  $\overline{AMB} = 90^\circ$ .



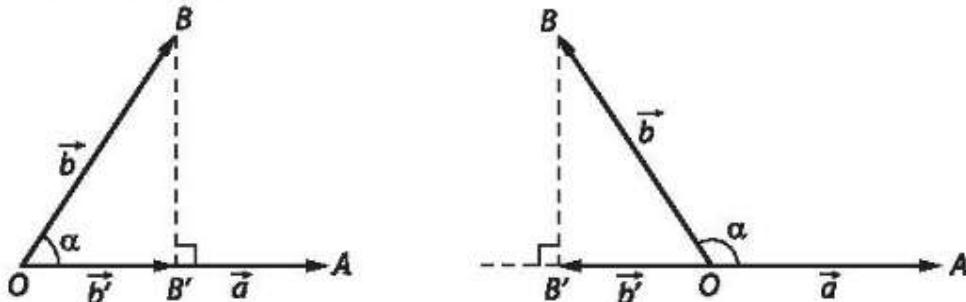
Suy ra  $AM = AB \cdot \cos \widehat{BAM}$ . Từ đó, để ý rằng  $\widehat{BAM} = (\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB})$ , ta có  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} | \cdot | \overrightarrow{AM} | \cdot \cos(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AM}) = AI \cdot AM = AI \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$

b) Tương tự như phần a), ta cũng được  $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

Suy ra

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} \\ &= \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2 \end{aligned}$$

Nhận xét. Một cách khái quát, ta chứng minh được  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}'$ , trong đó  $\vec{b}'$  là hình chiếu vuông góc của vecto  $\vec{b}$  trên giá của vecto  $\vec{a}$ . Kết quả này được gọi là định lí chiếu.

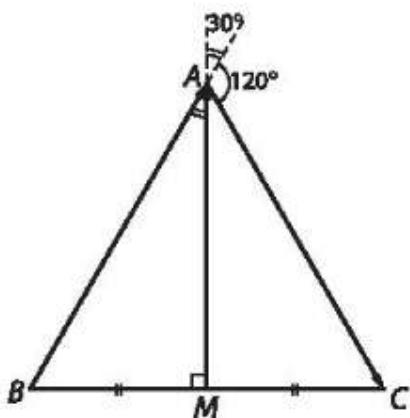


**Câu 74.** Cho tam giác đều  $ABC$  có độ dài các cạnh bằng 1.

- Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính tích vô hướng của các cặp vecto  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .
- Gọi  $N$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $C$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ .
- Lấy điểm  $P$  thuộc đoạn  $AN$  sao cho  $AP = 3PN$ . Hãy biểu thị các vecto  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{MP}$  theo hai vecto  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ . Tính độ dài đoạn  $MP$ .

#### Lời giải

- Do tam giác  $ABC$  là tam giác đều với độ dài các cạnh bằng 1,  $M$  là trung điểm  $BC$ , nên  $MA = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,



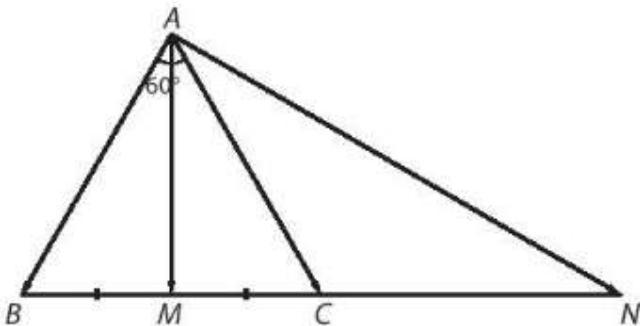
$$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{BA}) = 30^\circ, (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{AC}) = 120^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{BA}) = \frac{3}{2}, \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

b) Do tam giác  $ABC$  đều, nên  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$ . (1)

$$\text{Do } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}). \quad (2)$$

Do  $N$  đối xứng với  $B$  qua  $C$ , nên  $C$  là trung điểm của  $BN$ .

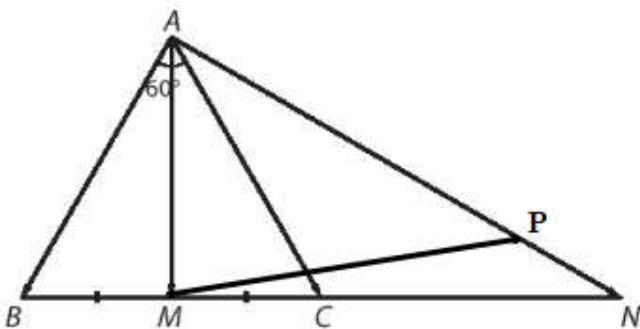


$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2\right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{c) Do } P \text{ thuộc đoạn } AN \text{ thoả mãn } AP = 3PN \text{ nên } \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

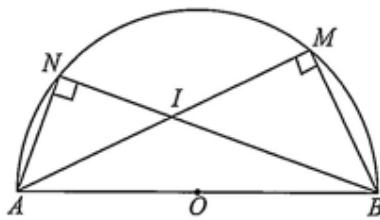


$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right) - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AC} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Từ đó } MP^2 = \overrightarrow{MP}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \frac{25}{16}\overrightarrow{AB}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} = 1 + \frac{25}{16} - \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{16}$$

$$\text{Suy ra } MP = \frac{\sqrt{21}}{4}.$$

- Câu 75.** Cho nửa đường tròn tâm  $O$  có đường kính  $AB = 2R$ . Gọi  $M$  và  $N$  là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho  $AM$  và  $BN$  cắt nhau tại  $I$  như Hình 5.



Hình 5

a) Chứng minh  $\vec{AI} \cdot \vec{AM} = \vec{AI} \cdot \vec{AB}$ ;  $\vec{BI} \cdot \vec{BN} = \vec{BI} \cdot \vec{BA}$ .

b) Tính  $\vec{AI} \cdot \vec{AM} + \vec{BI} \cdot \vec{BN}$  theo  $R$ .

**Lời giải**

a)  $AB$  là đường kính nên  $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).  
 $AM \perp MB$  và  $AN \perp NB$ .

Ta có:  $\vec{AI} \cdot \vec{AM} = \vec{AI} \cdot (\vec{AB} + \vec{BM}) = \vec{AI} \cdot \vec{AB} + \vec{AI} \cdot \vec{BM}$

Mà  $\vec{AI} \perp \vec{BM}$  (do  $AM \perp BM$ ) nên  $\vec{AI} \cdot \vec{BM} = 0$ .

Vậy  $\vec{AI} \cdot \vec{AM} = \vec{AI} \cdot \vec{AB} + 0 = \vec{AI} \cdot \vec{AB}$ .

Tương tự, ta có:  $\vec{BI} \cdot \vec{BN} = \vec{BI} \cdot \vec{BA}$ .

b)  $\vec{AI} \cdot \vec{AM} + \vec{BI} \cdot \vec{BN} = \vec{AI} \cdot \vec{AB} + \vec{BI} \cdot \vec{BA} = \vec{AI} \cdot \vec{AB} + \vec{BI} \cdot (-\vec{AB})$

$$= \vec{AI} \cdot \vec{AB} - \vec{BI} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot (\vec{AI} - \vec{BI}) = \vec{AB} \cdot (\vec{AI} + \vec{IB}) = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = \vec{AB}^2 = 4R^2$$

**Câu 76.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các tia  $BC$  và  $CA$  thoả mãn

$$BM = \frac{1}{3}BC, CN = \frac{5}{4}CA. \text{ Tính:}$$

a)  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}, \vec{AM} \cdot \vec{BN}$

b)  $MN$ .

**Lời giải**

$$\text{a)} \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \vec{AM} \cdot \vec{BN} &= (\vec{AB} + \vec{BM}) \cdot (\vec{BC} + \vec{CN}) = \left( \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} \right) \cdot \left( \vec{BC} + \frac{5}{4}\vec{CA} \right) \\ &= \vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{AB} \cdot \frac{5}{4}\vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{BC} \cdot \vec{BC} + \frac{1}{3}\vec{BC} \cdot \frac{5}{4}\vec{CA} \\ &= a^2 \cos 120^\circ + \frac{5}{4}a^2 \cos 120^\circ + \frac{1}{3}a^2 + \frac{5}{12}a^2 \cos 120^\circ \\ &= -a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} MN^2 &= (\vec{MB} + \vec{BC} + \vec{CN})^2 = \left( \frac{-1}{3}\vec{BC} + \vec{BC} + \frac{5}{4}\vec{CA} \right)^2 = \left( \frac{2}{3}\vec{BC} + \frac{5}{4}\vec{CA} \right)^2 \\ &= \left( \frac{2}{3}\vec{BC} \right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot |\vec{BC}| \cdot |\vec{CA}| \cdot \cos 120^\circ + \left( \frac{5}{4}\vec{CA} \right)^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{5}{6}a^2 + \frac{25}{16}a^2 = \frac{169}{144}a^2. \text{ Vậy} \\ MN &= \frac{13}{12}a. \end{aligned}$$

**BÀI TẬP BỔ SUNG**

**Câu 77.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Cho điểm  $M$  thoả  $\vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$ . Tính độ dài  $AM$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\
 \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 &= \left( \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \right)^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \left( \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \right)^2 + \left( \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\
 \Leftrightarrow AM^2 &= \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 - \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
 \Leftrightarrow AM^2 &= \frac{1}{9} \cdot 2^2 + \frac{4}{9} \cdot 3^2 - \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{28}{9} \Rightarrow AM = \frac{2\sqrt{7}}{3}
 \end{aligned}$$

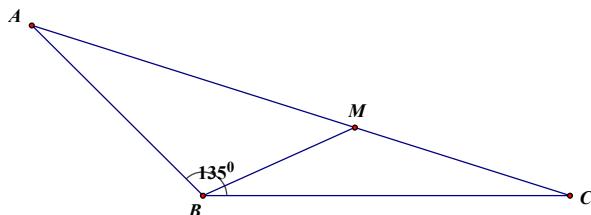
**Câu 78.** Cho tam giác ABC có  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $BC = 5a$ ,  $\widehat{ABC} = 135^\circ$ . Gọi điểm M thuộc AC sao cho

$$AM = \frac{3}{2}MC$$

a). Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

b). Tìm  $x, y$  sao cho  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$  và tính  $BM$ .

**Lời giải**



$$\text{a). } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos \widehat{ABC} = a\sqrt{2} \cdot 5a \cdot \cos 135^\circ = -5a^2$$

$$\text{b). Do M thuộc AC sao cho } AM = \frac{3}{2}MC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} \quad (*).$$

Vì  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  là hai vectơ không cùng phương nên biểu thức (\*) duy nhất  $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = \left( \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} \right)^2 \Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25}BA^2 + \frac{9}{25}BC^2 + 2 \cdot \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} \cdot \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25}BA^2 + \frac{9}{25}BC^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25} \cdot 2a^2 + \frac{9}{25} \cdot 25a^2 + \frac{12}{25} \cdot (-5a^2) = \frac{173}{25}a^2$$

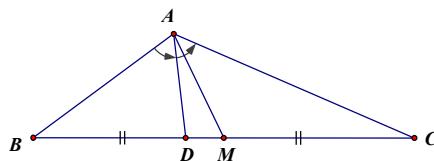
$$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{173}}{5}$$

**Câu 79.** Cho tam giác ABC có  $AB = 2$ ,  $AC = 3$ ,  $\widehat{BAC} = 120^\circ$

a). Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và độ dài trung tuyến  $AM$ .

b). Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC. Phân tích  $\overrightarrow{AD}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ . Suy ra độ dài đoạn AD.

**Lời giải**



a). Có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A = 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -3$ .

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \left[ \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \right]^2$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{4}(2^2 + 3^2 + 2 \cdot (-3)) = \frac{7}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

b).

Theo tính chất đường phân giác ta có  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow DB = \frac{2}{3}DC$ , do  $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$  là hai vecto

ngược hướng nên có  $\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow \frac{5}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \left( \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \right)^2 \Leftrightarrow AD^2 = \frac{9}{25}AB^2 + \frac{4}{25}AC^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{9}{25} \cdot 2^2 + \frac{4}{25} \cdot 3^2 + \frac{12}{25} \cdot (-3)$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{36}{25}$$

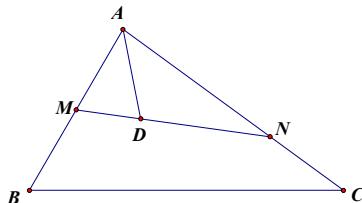
$$\Leftrightarrow AD = \frac{6}{5}$$

**Câu 80.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a$ ,  $BC = a\sqrt{7}$ ,  $AC = 3a$ . Gọi  $M$  trung điểm của  $AB$ ,  $N$  thuộc  $AC$  sao cho  $AN = 2NC$  và  $D$  thuộc  $MN$  sao cho  $2DM = DN$

a). Tìm  $x, y$  sao cho  $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ .

b). Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  và độ dài đoạn  $AD$  theo  $a$ .

Lời giải



$$\text{Do } AN = 2NC \Rightarrow AN = \frac{2}{3}AC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\bullet 2DM = DN \Rightarrow 2\overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{DN} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{9} \end{cases}$$

b). Ta có  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{(2a)^2 + (3a)^2 - (a\sqrt{7})^2}{2} = 3a^2$$

$$\text{Theo câu a) thì } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \left( \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 + \frac{4}{27}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{9}(2a)^2 + \frac{4}{9}(3a)^2 + \frac{4}{27} \cdot 3a^2$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{44}{9}a^2 \Rightarrow AD = \frac{2a\sqrt{11}}{3}$$

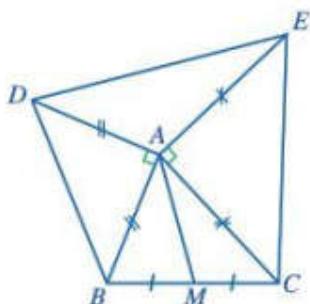
#### Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

*Phương pháp:* Sử dụng các tính chất:

Hai đường thẳng  $a$  và  $b$  vuông góc khi và chỉ khi  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ , trong đó  $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ , giá của vectơ  $\vec{u}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $a$  và giá của vectơ  $\vec{v}$  song song hoặc trùng với đường thẳng  $b$ .

### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 81.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 3, AC = 4, \hat{A} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Vẽ phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại  $A$  là  $ABD$  và  $ACE$



- a) Tính các tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ ;
- b) Biểu diễn  $\overrightarrow{AM}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ . Từ đó chứng minh  $AM \perp DE$ .

#### Lời giải

a) Do  $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 150^\circ, \widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 150^\circ$  nên

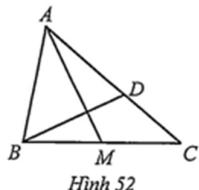
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} &= AB \cdot AE \cdot \cos \widehat{BAE} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD} = 4 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) \\ &\text{Vì } AB \perp AD, AC \perp AE \text{ nên } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0\end{aligned}$$

Suy ra  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(-6\sqrt{3} + 0 - 0 + 6\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow AM \perp DE$

- Câu 82.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Điểm  $D$  thuộc cạnh  $AC$  thỏa mãn  $AD = \frac{7}{12}AC$  (Hình 52).



Hình 52

Chứng minh  $AM \perp BD$ .

#### Lời giải

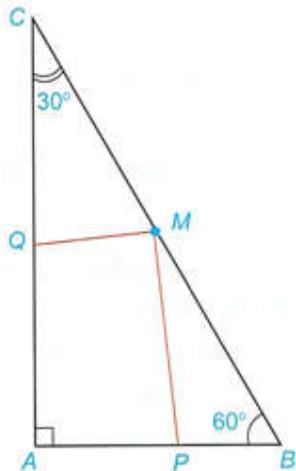
$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \left( \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{7}{12}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{7}{12} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{12} \cdot 3^2 - 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}(7 - 4 - 3) = 0.\end{aligned}$$

Vậy  $AM \perp BD$

- Câu 83.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Trên các cạnh  $AB, AC$  lần lượt lấy các điểm  $P, Q$ . Chứng minh rằng  $\widehat{PMQ} = 90^\circ$  khi và chỉ khi  $BP + \sqrt{3}CQ = BC$ .

#### Lời giải

Đặt  $MB = MC = a$ .



$$\begin{aligned}\text{Ta có } \widehat{PMQ} &= 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CQ}) = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = 0. \quad (1)$$

Mặt khác,

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MB \cdot MC \cdot \cos 180^\circ = -a^2;$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CQ} = MB \cdot CQ \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot CQ;$$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{MC} = BP \cdot MC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} a \cdot BP;$$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = BP \cdot CQ \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow -a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot CQ + \frac{1}{2} a \cdot BP = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} CQ + \frac{1}{2} BP - a = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} CQ + BP = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} CQ + BP = BC$$

Ta có điều phải chứng minh.

- Câu 84.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 1, BC = \sqrt{2}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AD$ .

a) Chứng minh rằng các đường thẳng  $AC$  và  $BM$  vuông góc với nhau.

b) Gọi  $H$  là giao điểm của  $AC, BM$ . Gọi  $N$  là trung điểm của  $AH$  và  $P$  là trung điểm của  $CD$ .

Chứng minh rằng tam giác  $NBP$  là một tam giác vuông.

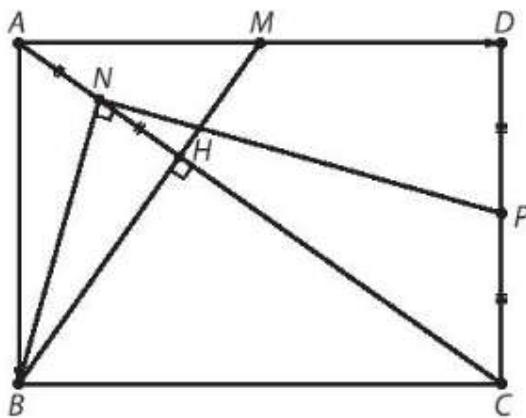
#### Lời giải

a) Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$  với  $|\vec{b}| = 1, |\vec{d}| = \sqrt{2}$  và  $\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{d}$ . Hơn nữa, do  $M$  là trung điểm của  $AD$  nên  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \vec{d}$  và do đó  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \vec{d} - \vec{b}$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = (\vec{b} + \vec{d}) \cdot \left( \frac{1}{2} \vec{d} - \vec{b} \right) = -\vec{b}^2 + \frac{1}{2} \vec{d}^2 = -1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$$

Từ đó  $AC \perp BM$ .

b) Theo định lí Pythagore ta có  $AC = \sqrt{3}$



$$\text{và } AH = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Suy ra } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}.$$

Do  $N$  là trung điểm của  $AH$  nên

$$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{d}) \right] + \vec{b} = \frac{5}{6} \vec{b} - \frac{1}{6} \vec{d} \quad (1)$$

Do  $P$  là trung điểm của  $CD$  và  $N$  là trung điểm của  $HA$ , nên theo kết quả bài 4. 12, Toán 10 tập một, ta có

$$\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{2}\left[\vec{d} + \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{d})\right] = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{d} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NP} = \left(\frac{5}{6}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{d}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{d}\right) = \frac{5}{18}\vec{b}^2 - \frac{5}{36}\vec{d}^2 = \frac{5}{18} \cdot 1 - \frac{5}{36} \cdot 2 = 0$$

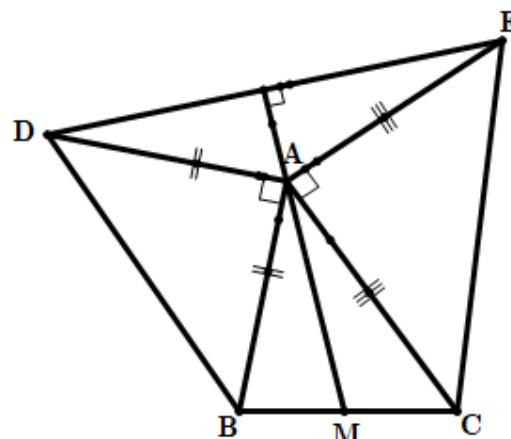
Suy ra  $NB \perp NP$  và do đó tam giác  $NBP$  vuông tại  $N$ .

**Câu 85.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} < 90^\circ$ . Dựng ra phía ngoài tam giác hai tam giác vuông cân đỉnh  $A$  là  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $M, N, P$  theo thứ tự là trung điểm  $BC, BD, CE$ . Chứng minh rằng:

- a)  $AM$  vuông góc với  $DE$ ;
- b)  $BE$  vuông góc với  $CD$ ;
- c) Tam giác  $MNP$  là một tam giác vuông cân.

Lời giải

Do  $\hat{A} < 90^\circ$  nên  $\widehat{BAE} = 90^\circ + \hat{A} = \widehat{CAD}$ . (1)



a) Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ . (2)

Theo quy tắc ba điểm, ta có  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ .

Từ đó và (1), (2) suy ra

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \quad (\text{do } AB \perp AD, AC \perp AE) \\ &= AB \cdot AE \cdot \cos \widehat{BAE} - AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD} = 0 \quad (\text{do } AB = AD, AE = AC \text{ và (1)}) \end{aligned}$$

b) Từ giả thiết suy ra  $\widehat{DAE} = 360^\circ - \widehat{DAB} - \widehat{BAC} - \widehat{CAE} = 180^\circ - \hat{A}$ . (3)

Theo quy tắc ba điểm, ta có  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ . Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} + AE \cdot AD \cdot \cos \widehat{DAE} = 0 \quad (\text{do } AB = AD, AC = AE \text{ và (3)}). \end{aligned}$$

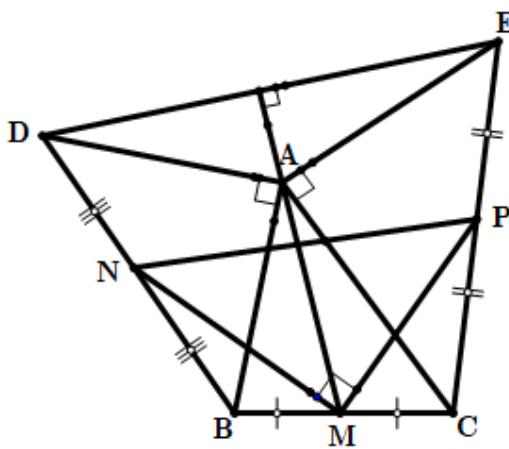
Tú đó  $BE \perp CD$ .

Hơn nữa

$$\begin{aligned} BE^2 &= \overrightarrow{BE}^2 = (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB})^2 = AE^2 + AB^2 - 2AE \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAE} \\ &= AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{CD}^2 = CD^2. \end{aligned}$$

Suy ra  $BE = CD$ .

c) Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $N$  là trung điểm của  $BD$ , nên  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $BCD$ .



Do đó  $MN \parallel CD, MN = \frac{1}{2}CD . (4)$

Cũng vậy,  $MP$  là đường trung bình của tam giác  $BCE$ .

Do đó  $MP \parallel BE, MP = \frac{1}{2}BE . (5)$

Từ (4),(5) và kết quả của phần b) suy ra  $MN = MP$  và  $MN \perp MP$ , hay tam giác  $MNP$  vuông cân tại  $M$ .

**Câu 86.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .

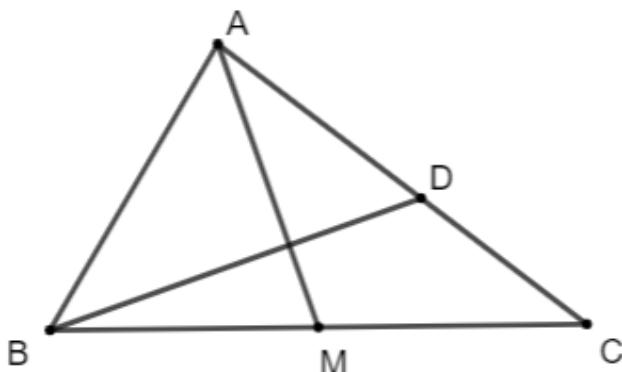
Điểm  $D$  thoả mãn  $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$ .

a) Tính  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

b) Biểu diễn  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

c) Chứng minh  $AM \perp BD$ .

### Lời giải



a) Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3$ .

b) + Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên với điểm  $A$  ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$+ \text{Ta có: } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AD}. \text{ Mà } \overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{BD} = (-\overrightarrow{AB}) + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left( \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right) \cdot \left( -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} \right) = \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{7}{24}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{7}{24}\overrightarrow{AC}^2 \\ &= \frac{-1}{2} \cdot AB^2 + \frac{7}{24} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{24} \cdot AC^2 = \frac{-1}{2} \cdot 2^2 + \frac{7}{24} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{7}{24} \cdot 3^2 = 0\end{aligned}$$

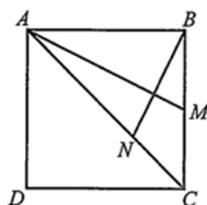
Suy ra:  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

Vậy  $AM \perp BD$ .

- Câu 87.** Cho hình vuông  $ABCD, M$  là trung điểm của  $BC. N$  là điểm nằm giữa hai điểm  $A$  và  $C$ . Đặt  $x = \frac{AN}{AC}$ . Tìm  $x$  thoả mãn  $AM \perp BN$ .

Lời giải

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.$$



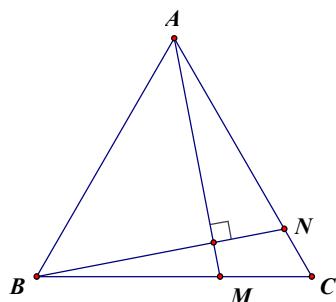
Hình 70

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AN} &= x\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BA}. \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} &= \left( \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \right) \cdot [x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BA}] \\ &= \left[ \frac{x}{2} - (1-x) \right] BC^2 = \left( \frac{3x}{2} - 1 \right) BC^2 \\ AM \perp BN &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{3x}{2} - 1 \right) BC^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

## BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 88.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Gọi  $M, N$  là các điểm sao cho  $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}, 5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$ .
- Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$
  - Chứng minh  $AM$  vuông góc với  $BN$ .

Lời giải



a).

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$
- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \cdot CA \cdot \cos \widehat{BCA} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$ .

b).

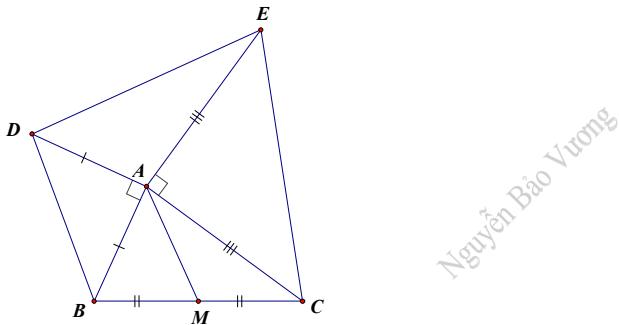
- $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

- $5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA}) = 4\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$

Ta có:  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = \left( \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \right) \left( -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC} \right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{8}{15}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{4}{15}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$   
 $= -\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{8}{15}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2$   
 $= -\frac{2}{5} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{8}{15} \cdot a^2 - \frac{1}{3}a^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BN} \Leftrightarrow AM \text{ vuông góc với } BN.$

- Câu 89.** Cho tam giác  $ABC$  có góc  $A$  nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác  $ABC$  các tam giác vuông cân đỉnh  $A$  là  $ABD$  và  $ACE$ . Gọi  $M$  trung điểm của đoạn  $BC$ . Chứng minh rằng  $AM$  vuông góc với  $DE$ .

Lời giải

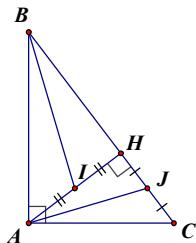


Ta chứng minh  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ . Vậy:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AE \cdot \cos(90^\circ + A) - AC \cdot AD \cdot \cos(90^\circ + A) = 0 \quad (\text{do } AB = AD, AE = AC). \end{aligned}$$

- Câu 90.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AH$  và  $HC$ . Chứng minh  $BI \perp AJ$

Lời giải



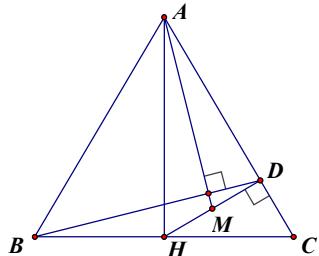
Ta có  $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC})$ ;  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})$

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}) \\
 &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{BH}) \\
 &= \frac{1}{4}(-\overrightarrow{AH}^2 - \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{4}(-AH^2 - HB \cdot HC \cdot \cos \widehat{BHC}) \\
 &= \frac{1}{4}(-AH^2 + HB \cdot HC) = 0
 \end{aligned}$$

- Câu 91.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ . Gọi  $H$  là trung điểm của đoạn  $BC$ ,  $D$  là hình chiếu vuông góc của  $H$  trên  $AC$ ,  $M$  trung điểm của đoạn  $HD$ . Chứng minh  $AM$  vuông góc với  $DB$ .

Lời giải



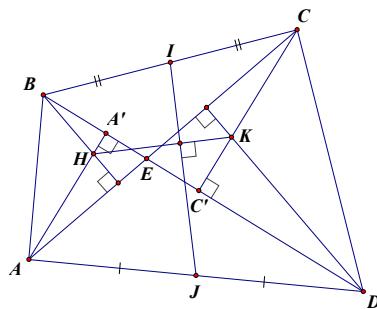
Vì  $M$  trung điểm của  $HD$ , nên có  $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}) = \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD}}_0 \\
 &= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BH} \\
 &= \overrightarrow{HD}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{HD}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\
 \Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BD}. \text{ Vậy } AM \text{ vuông góc với } BD.
 \end{aligned}$$

- Câu 92.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $E$  là giao của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AD$  và  $H, K$  là trực tâm của các tam giác  $ABE, CDE$ .

- a). Chứng minh  $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$   
b). Chứng minh  $HK \perp IJ$

Lời giải



- a). HẠ  $AA', CC'$  LẦN LƯỢT VUÔNG GÓC  $BD$ , TA CÓ:

$$\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

- b) Tương tự ta cũng có:  $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$

suy ra  $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD}$

$$\text{Thành từ } \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK} \cdot \left( \frac{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}}{2} \right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0$$

Vậy  $HK \perp IJ$

- Câu 93.** Cho tứ giác  $ABC$  có hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau và cắt nhau tại  $M$ . Gọi  $P$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Chứng minh  $MP$  vuông góc với  $BC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

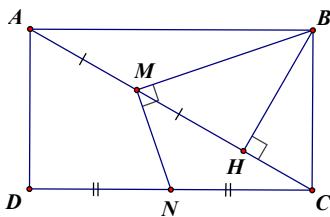
**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \underbrace{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC}}_0 - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} \end{aligned}$$

Do đó  $MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB}$

- Câu 94.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ , vẽ  $BH \perp AC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AH$  và  $DC$ . Chứng minh  $BM \perp MN$ .

**Lời giải**



$$\text{Ta có } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}); \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC})$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}) \\ &= \frac{1}{4} \left( \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HC}}_0 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = HA \cdot HC \cdot \cos \widehat{AHC} = HA \cdot HC \cdot \cos 180^\circ = -HA \cdot HC = -BH^2$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

Từ đó suy ra  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{MN}$ .

**Cách 2:**

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NH}) = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CH})$$

$$= -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CH}\right)$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{BM} = \left[ -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CH}\right) \right] \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$= -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH}) + \frac{1}{8}(-\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CH})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$= -\frac{1}{8} \left( \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}}_0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 \right) + \frac{1}{8} \left( -\overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} + 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} + \underbrace{2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 \right)$$

$$= -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + CD^2 + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} - 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD}) \quad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}}_0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB^2$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

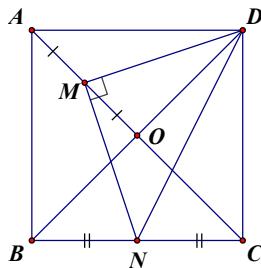
$$2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CH}(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}) = 2\underbrace{\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HA}$$

$$= 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HA} = 2CH \cdot AH = 2BH^2$$

$$\text{Do đó } (*) = -\frac{1}{8}(BH^2 - AB^2 + CD^2 + BH^2 - 2BH^2) = 0$$

**Câu 95.** Cho hình vuông  $ABCD$ , điểm  $M$  thuộc đoạn thẳng  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ . Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Chứng minh rằng  $DMN$  là tam giác vuông cân.

Lời giải



Gọi  $a > 0$  là độ dài cạnh hình vuông  $ABCD$ . Nên có  $AC = a\sqrt{2}$ ,  $CM = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Áp dụng định lí hàm số cosin cho các tam giác CMN và CDM:

$$\bullet MN^2 = CN^2 + CM^2 - 2CN \cdot CM \cdot \cos \widehat{MCN}$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{10}}{4} \quad (1)$$

$$\bullet MD^2 = CD^2 + CM^2 - 2CD \cdot CM \cdot \cos \widehat{DCM}$$

$$= a^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2a \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow MD = \frac{a\sqrt{10}}{4} \quad (2)$$

$$\bullet DN^2 = CD^2 + CN^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

Ta có  $MN^2 + MD^2 = ND^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow \text{DMN vuông tại M (3)}$

Từ (1), (2), (3) suy ra DMN vuông cân tại M.

**Cách 2:**

Đặt  $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ . Vì ABCD là hình vuông nên  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  &  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = -\frac{1}{4}(\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \vec{b} - \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{4}(3\vec{a} - \vec{b})$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{16}(\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{16}(3\vec{a}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2)$$

$$= \frac{1}{16}(3a^2 - 3b^2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MD} \quad (4).$$

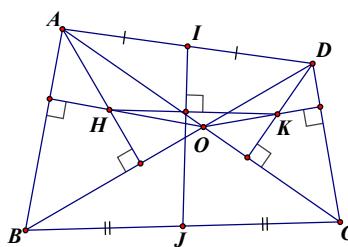
$$\bullet \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}(\vec{a} + 3\vec{b})^2 = \frac{1}{16}(\vec{a}^2 + 6\vec{a}\cdot\vec{b} + 9\vec{b}^2) = \frac{5a^2}{8} \quad (5)$$

$$\bullet \overrightarrow{MD}^2 = \frac{1}{16}(3\vec{a} - \vec{b})^2 = \frac{1}{16}(9\vec{a}^2 - 6\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2) = \frac{5a^2}{8} \quad (6)$$

Từ (4),(5),(6) suy ra DMN vuông cân tại M.

- Câu 96.** Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H,K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh HK ⊥ IJ.

**Lời giải**



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = \underbrace{\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}}_0 + 2\overrightarrow{IJ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}$$

$$2\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{HK} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})(\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{OH}$$

- Câu 97.** Cho tam giác ABC đều cạnh  $3a$ . Lấy M,N,P lần lượt trên 3 cạnh BC,CA,AB sao cho  $BM = a, CN = 2a, AP = x$ . Tìm x để AM vuông góc với PN.

**Lời giải**

Chọn hệ vec tơ cơ sở  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{3a}\vec{b}$$

$$\text{Để } AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)\left(\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{3a}\vec{b}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{c} + 2\vec{b})(\vec{c} - x\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{c}^2 - x\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} - 2x\cdot\vec{b}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a\cdot\vec{c}^2 + (2a-x)\vec{b}\cdot\vec{c} - 2x\cdot\vec{b}^2 = 0$$

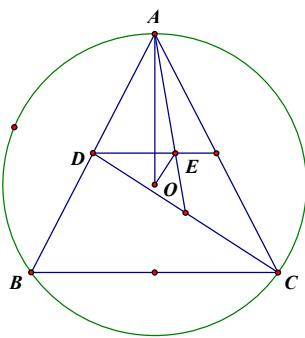
$$\Leftrightarrow a\cdot 9a^2 + (2a-x)\cdot a\cdot a\cdot \cos 60^\circ - 2x\cdot 9a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(9a + a - \frac{x}{2} - 2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10a - \frac{5}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 4a$$

- Câu 98.** Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn ( $O$ ). D là trung điểm của AB, E là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh  $OE \perp CD$

**Lời giải**



Ta có

$$\begin{aligned} - \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) \\ - \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC}\right] \\ &= \frac{1}{6}(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{12}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC})(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{12}(3OA^2 + OB^2 - 4OC^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \text{ tức } OE \perp CD \end{aligned}$$

#### Dạng 5. Bài toán thực tế

Trong Vật lí, tích vô hướng giúp tính công A sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ dịch chuyển là vecto  $\vec{d}$ .  
Ta có công thức:  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ .

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 99.** Tính công sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ lớn 20 N kéo một vật dịch chuyển theo một vecto  $\vec{d}$  có độ dài 50m và cho biết  $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$ .

#### Lời giải

$$\text{Ta có } A = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{d}) = 20 \cdot 50 \cdot \cos 60^\circ = 20 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} = 500 \text{ (J).}$$

**Câu 100.** Tính công sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ lớn 60 N kéo một vật dịch chuyển một vecto  $\vec{d}$  có độ dài 200m. Cho biết  $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$ .

#### Lời giải

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos 60^\circ = 60 \cdot 200 \cdot \cos 60^\circ = 6000 \text{ (J).}$$

**Câu 101.** Cho ba điểm  $M, N, P$ . Nếu một lực  $\vec{F}$  không đổi tác động lên một chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, thì các công sinh bởi lực  $\vec{F}$  trong hai trường hợp sau có mối quan hệ gì với nhau?

- a) Chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ  $M$  đến  $N$  rồi tiếp tục từ  $N$  đến  $P$ .
- b) Chất điểm chuyển động thẳng từ  $M$  đến  $P$ .

#### Lời giải

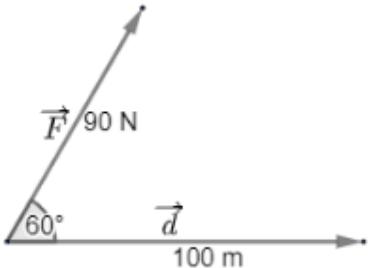
Do lực  $\vec{F}$  không đổi, tác động lên chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, nên công sinh bởi lực  $\vec{F}$  khi chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ  $M$  tới  $N$  rồi từ  $N$  tới

$P$  bằng  $A_1 = \vec{F} \cdot \vec{MN} + \vec{F} \cdot \vec{NP}$  (1) và công sinh bởi lực  $F$  khi chất điểm chuyển động thẳng từ  $M$  tới  $P$  bằng  $A_2 = \vec{F} \cdot \vec{MP}$ . (2)

Từ (1), (2), để ý rằng  $\vec{MP} = \vec{MN} + \vec{NP}$ , suy ra  $A_1 = A_2$ .

**Câu 102.** Một người dùng một lực  $\vec{F}$  có độ lớn là  $90\text{ N}$  làm một vật dịch chuyển một đoạn  $100\text{ m}$ . Biết lực hợp  $\vec{F}$  với hướng dịch chuyển là một góc  $60^\circ$ . Tính công sinh bởi lực  $\vec{F}$

Lời giải



Công sinh bởi lực  $\vec{F}$  được tính bằng công thức

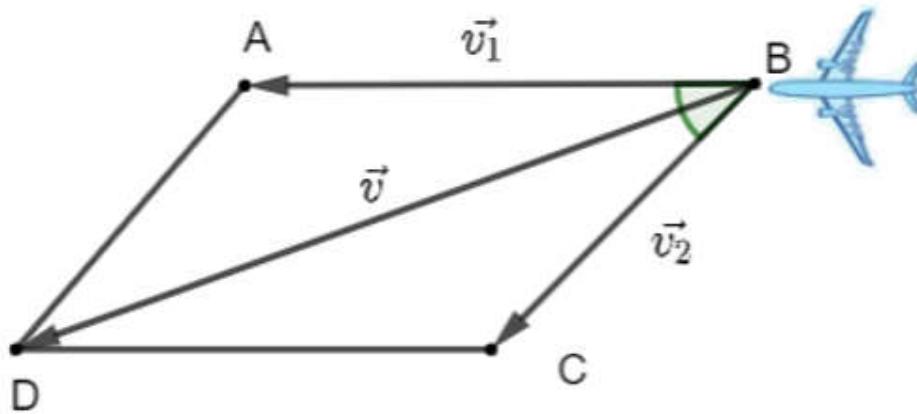
$$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{d}) = 90 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 4500 (\text{J})$$

Vậy công sinh bởi lực  $\vec{F}$  có độ lớn bằng  $4500 (\text{J})$

**Câu 103.** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $700\text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $40\text{ km/h}$  (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị  $\text{km/h}$ ).



Lời giải



Khi đó ta có:  $ABCD$  là hình bình hành có  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ .

Suy ra:  $\widehat{DAB} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ ;  $AD = |\vec{v}_2| = 40$ ,  $AB = |\vec{v}_1| = 700$ .

Ta cần tính độ dài đoạn thẳng  $BD$ , đây chính là độ dài vectơ  $\vec{v}$ .

Áp dụng định lí sin trong tam giác  $ABD$ , ta có:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos A \\ &= 40^2 + 700^2 - 2 \cdot 40 \cdot 700 \cdot \cos 135^\circ \approx 531197,98 \end{aligned}$$

Suy ra  $BD \approx 728,83 (\text{km/h})$ .

Vậy tốc độ mới của máy bay sau khi gặp gió thổi là  $728,83\text{km/h}$ .

**Câu 104.** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $650\text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $35\text{ km/h}$ . Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị  $\text{km/h}$ ).

### Lời giải

Gọi  $\vec{v}_0$  là vận tốc của máy bay khi không có gió,  $|\vec{v}_0| = 650(\text{km/h})$ ;

$\vec{v}_1$  là vận tốc của gió,  $|\vec{v}_1| = 35(\text{km/h})$ ;  $\vec{v}_2$  là vận tốc của máy bay khi có gió.

Ta có:  $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ . Vì  $(\vec{v}_1, \vec{v}_0) = 45^\circ$  nên

$$\begin{aligned} \vec{v}_2^2 &= (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)^2 = \vec{v}_0^2 + \vec{v}_1^2 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2 + 2|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos 45^\circ \\ &= 650^2 + 35^2 + 2 \cdot 650 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 455898,36 \end{aligned}$$

Suy ra  $|\vec{v}_2| \approx 675,2(\text{km/h})$ .

### Dạng 6. Tập hợp điểm

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Dạng 1:**  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$  (1) (A, B là hai điểm cố định).

- $k = 0$ : Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.
- $k \neq 0$ : Gọi I trung điểm của AB.

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

+ Nếu  $k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$ : Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính  $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$

+ Nếu  $k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4}$ : Tập hợp điểm M là điểm I.

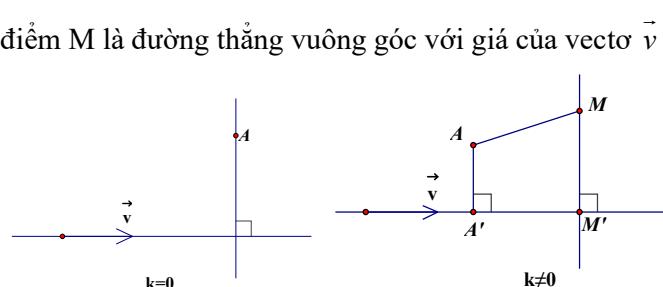
+ Nếu  $k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}$ : Tập hợp các điểm M là rỗng.

**Dạng 2:**  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k$  (2) (A cố định,  $\vec{v}$  có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$ : Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của  $\vec{v}$

$k \neq 0$ : Gọi  $\overrightarrow{A'M'}$  là hình chiếu của  $\overrightarrow{AM}$  trên giá của vecto  $\vec{v}$ ; ta có:  $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{v} = k$  (định lí hình chiếu). A' cố định  $\Rightarrow M'$  cố định ( $M'$  nằm trên giá của  $\vec{v}$  định bởi  $\overrightarrow{A'M'} = \frac{k}{v}$ ). Tập hợp các

điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vecto  $\vec{v}$  tại M'.



**Dạng 3:**  $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$  (3) (A, B cố định  $\alpha, \beta$  là hằng số và  $\alpha + \beta \neq 0$ ).

Gọi I là điểm thỏa  $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$  là điểm cố định.

$$(3) \Leftrightarrow \alpha (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 + 2(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB})\overrightarrow{MI} + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}$$

Nếu  $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2 + \beta IB^2$ : Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính

$$\sqrt{\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}}.$$

Nếu  $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2 + \beta IB^2$ : Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu  $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2 + \beta IB^2$ : Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

- Cho hai điểm A, B cố định  $\alpha, \beta$  là hằng số thỏa  $\alpha + \beta \neq 0$  thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho  $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ . Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có:  $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MI}$ .
- Cho ba điểm A, B, C cố định  $\alpha, \beta, \gamma$  là hằng số thỏa  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho  $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \gamma\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ . Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có:  $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MI}$ .

**Câu 105.** Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow AB \perp CM$$

$\Leftrightarrow$  Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua C vuông góc với AB.

**Câu 106.** Cho tam giác ABC, tìm tập hợp điểm M thỏa:

$$a). \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

$$b). \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$c). (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$$

$$d). \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MB^2 + 4MC^2$$

**Lời giải**

a). Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có:  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow MA \perp MI$$

$\Leftrightarrow$  Tập hợp các điểm M là đường là đường tròn đường kính IA.

$$b). \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, nên có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Do đó  $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow$  Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BG.

c).  $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

Gọi điểm I thỏa mãn  $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow I$  là điểm cố định.

Ta có  $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 4\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}}_0 = 4\overrightarrow{MI}$

Gọi điểm J thỏa mãn  $\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow J$  là điểm cố định.

Ta có  $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})$

$$= 6\overrightarrow{MJ} + \left( \underbrace{\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC}}_0 \right) = 6\overrightarrow{MJ}$$

Do đó  $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI} \cdot 6\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}$

$\Leftrightarrow$  Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ, với I, J xác định ở trên.

d).  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MB^2 + 4MC^2$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}^2 = 4\overrightarrow{MB}^2 + 4\overrightarrow{MC}^2 - 8\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) = 4(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 4(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME} \cdot 2\overrightarrow{MF} = 4\overrightarrow{CB}^2$$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{CB}^2$  (Với E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB).

Gọi K trung điểm của EF

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{CB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KF}) = BC^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})(\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KE}) = BC^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MK}^2 - \overrightarrow{KE}^2 = BC^2$$

$$\Leftrightarrow MK^2 = BC^2 + KE^2 = BC^2 + \frac{1}{4}EF^2 = BC^2 + \frac{1}{16}AC^2$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm K, bán kính  $R = \sqrt{BC^2 + \frac{1}{16}AC^2}$

**Câu 107.** Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn điều kiện sau:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow MA$  vuông góc với BC.

Vì A, B, C cố định  $\Leftrightarrow$  tập hợp những điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

**Câu 108.** Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho:  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = AB^2$

### Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = AB^2 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$$

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M và G trên BC, thì K cố định và hình chiếu của  $\overrightarrow{MG}$  trên BC là  $\overrightarrow{HK}$ , theo định lí hình chiếu ta có:  $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BC}$ , suy ra  $(*) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$ , suy ra H cố định (H thuộc đường thẳng BC định bởi  $\overrightarrow{HK} = \frac{\overrightarrow{AB}}{3\overrightarrow{BC}}$ ). Vậy tập hợp những điểm M là đường thẳng vuông góc với BC tại H.

- Câu 109.** Cho tam giác ABC cân tại A có  $AB = AC = a, BC = 3a$ . Tìm tập hợp những điểm M sao cho  $2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

### Lời giải

$$2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 + 4MB^2 = MB^2 - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + MC^2$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 + 4MB^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2 = BC^2 \quad (*)$$

Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow I là điểm cố định và nằm giữa hai điểm A và B. Do$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow |\overrightarrow{AI}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow AI = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3} \Rightarrow BI = \frac{a}{3}$$

$$(*) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}^2 + 4\overrightarrow{MB}^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = BC^2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 2IA^2 + 4IB^2 + 4\overrightarrow{MI} \left( \underbrace{\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} \right) = BC^2$$

$$\Rightarrow 6MI^2 = BC^2 - (2IA^2 + 4IB^2) = 9a^2 - \left[ 2 \cdot \left( \frac{2a}{3} \right)^2 + 4 \cdot \left( \frac{a}{3} \right)^2 \right] = \frac{23a^2}{3}$$

$$\Rightarrow MI^2 = \frac{23a^2}{18} \Leftrightarrow MI = a\sqrt{\frac{23}{18}}$$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I, bán kính  $R = a\sqrt{\frac{23}{18}}$ .

- Câu 110.** Cho  $A, B, C, D$  là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm M sao cho:

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0$$

### Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn AD ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$

$$\text{Gọi J là điểm thỏa mãn hệ thức: } \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow J là điểm cố định.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})$$

$$= 6\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}} = 6\overrightarrow{MJ}$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0 \Leftrightarrow 6\overrightarrow{MJ} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow MJ vuông góc với MI.$$

Do I, J cố định nên tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ.

**Câu 111.** Cho đoạn  $AB = a > 0$  và số  $k$ . Tìm tập hợp các điểm M sao cho  $MA^2 + MB^2 = k$

### Lời giải

Gọi O là trung điểm của đoạn AB.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \left( \underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}_0 \right) = 2MO^2 + OA^2 \\ &= 2MO^2 + \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Do } MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MO^2 + \frac{a^2}{2} = k \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Nếu  $\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}}$ . Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính

$$R = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}}.$$

$$\text{Nếu } \frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 = 0 \Leftrightarrow MO = 0 \Rightarrow M \equiv O$$

$$\text{Nếu } \frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 < 0 \text{ nên tập điểm là rỗng.}$$

**Câu 112.** Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho

a)  $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ ;

b)  $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ .

### Lời giải

a) Gọi I là trung điểm đoạn BC. Khi đó  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MI.$$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn đường kính AI.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow CA \perp MG$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua G và vuông góc với AC.

**Câu 113.** Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ ;

b)  $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$ ;

c)  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ ;

d)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$ .

### Lời giải

a) Giả sử M là điểm thoả mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ .

Ta có  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow M \text{ nằm trên đường tròn đường kính } AB$ .

b) Ta có  $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC \Leftrightarrow M$  nằm trên đường thẳng qua A và vuông góc với  $BC$ .

c) Gọi I là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

Khi đó  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$  và  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

Ta có  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow MI \perp MG \Leftrightarrow M$  nằm trên đường tròn đường kính IG.

d) Giả sử  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MB}| \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -MA \cdot MB$

$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -1 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 180^\circ \Leftrightarrow M$  nằm bên trong đoạn thẳng AB

**Câu 114.** Cho hai điểm  $A, B$  và  $k$  là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm  $M$  thoả điều kiện:  $MA^2 + MB^2 = k^2$ .

#### Lời giải

Với O là trung điểm AB. Ta có:

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + OA^2$$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + OB^2$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + OA^2 + OB^2 \quad (1)$$

Vì O là trung điểm AB nên  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$  và  $OA = OB$ , do đó (1) trở thành

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 2OA^2.$$

Gọi tập hợp các điểm M cần tìm là (L). Ta có:

$$MA^2 + MB^2 = k^2 \Leftrightarrow 2(MO^2 + OA^2) = k^2 \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k^2}{2} - OA^2 \quad (2)$$

Đặt  $OA^2 = \frac{m^2}{2}$ . (2) trở thành  $MO^2 = \frac{1}{2}(k^2 - m^2)$ . Xảy ra:

i)  $k^2 < m^2$  thì  $MO^2 < 0 : (L) = \emptyset$ .

ii)  $k^2 = m^2$  thì  $MO^2 = 0 \Leftrightarrow M \equiv O : (L) = \{ O \}$ .

iii)  $k^2 > m^2 \Leftrightarrow MO = \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 - m^2)} : (L)$  là đường tròn tâm O có bán kính là

$$R = \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 - m^2)}.$$

**Câu 115.** Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho  $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

#### Lời giải

Gọi I là trung điểm của BC, D là điểm thoả mãn  $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$ , E là trung điểm của DC. Ta có  $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot 6\overrightarrow{ME} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ME} = 0 \Leftrightarrow MI \perp ME$ . Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính IE.

**Câu 116.** Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

a).  $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$

b).  $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

#### Lời giải

Dựng hình bình hành ABEC, ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA} &= \vec{0} \\ \Rightarrow MB^2 + MC^2 - MA^2 &= (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})^2 - (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 \\ &= ME^2 + 2\overrightarrow{ME}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA}) + EB^2 + EC^2 - EA^2\end{aligned}$$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow ME^2 = EA^2 - (EB^2 + EC^2)$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC})^2 - (EB^2 + EC^2)$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Nếu  $\hat{A}$  tù: Tập hợp điểm M là  $\emptyset$

Nếu  $\hat{A}$  vuông: Tập hợp điểm M là  $\{E\}$

Nếu  $\hat{A}$  nhọn: Tập hợp điểm M là đường tròn  $(E; \sqrt{2AB \cdot AC \cdot \cos A})$

b).

**Cách 1:** Gọi I trung điểm của BC, J là trung điểm của AI. Ta có  $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{BC^2}{2} - 2MA^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - MI^2 = \frac{BC^2}{4}$$

$\Leftrightarrow M$  thuộc đường thẳng vuông góc với AI tại điểm H, xác định bởi:

$$\overline{JH} = \frac{BC^2}{8AI}$$

**Cách 2:** Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác ABC.

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(3\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Leftrightarrow MO \perp AG$$

$\Leftrightarrow M$  thuộc đường thẳng qua O vuông góc với AG.

**Câu 117.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định và số  $k$  cho trước. Tìm tập hợp những điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{\overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{AB}^2}{2} \quad (*)$$

Gọi I trung điểm của AB, khi đó có  $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

Thay vào (\*) ta được:  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k$

$$\Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}.$$

$$\bullet \quad k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Rightarrow M \text{ tập rỗng.}$$

- $k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Rightarrow M \equiv I$

- $k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Rightarrow M$  chạy trên đường tròn tâm I bán kính  $R = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$

**Câu 118.** Cho tam giác  $ABC$ , tìm tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2$  (với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ).

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}) = AB^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = AB^2 \Leftrightarrow MB \cdot GC \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{GC}}) = AB^2 (*) \end{aligned}$$

Gọi  $B_1$  là hình chiếu vuông góc của  $B$  trên  $GC$ , trên  $CB_1$  ta lấy điểm  $H$  thỏa mãn  $\overrightarrow{B_1H} = \frac{AB^2}{GC}$

$\overrightarrow{B_1H} \uparrow\uparrow \overrightarrow{B_1C} \uparrow\uparrow \overrightarrow{GC}$ , vì  $B_1$  cố định nên  $H$  cố định  $\Rightarrow M$  chạy trên đường thẳng  $CG$  đi qua  $H$ .

**Câu 119.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ .

a). Xác định vị trí điểm  $P$  thỏa  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ .

b). Chứng minh  $C, G, P$  thẳng hàng.

c). Tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$

**Lời giải**

a). Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ , theo tính chất đường tròn tuyến  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PI}$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PI} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CP}) - 4\overrightarrow{CP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CI} \quad (1)$$

b). Theo tính chất trọng tâm ta có  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IG} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{\vec{0}} - 3\overrightarrow{IG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG} \quad (2)$$

Từ (1) & (2)  $\Rightarrow \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{GI}$

$$c). |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{2MI} + 4\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CI}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HM} + 2(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HM})| = |\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow \left| \underbrace{\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{HC}}_{\vec{0}} - 3\overrightarrow{HM} \right| = |\overrightarrow{CI}|$$

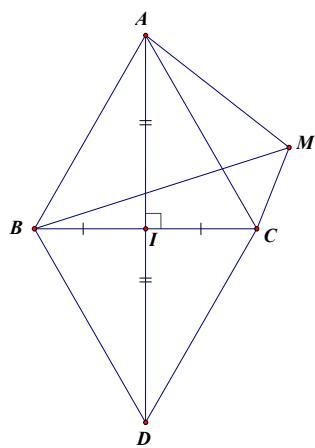
$$\Leftrightarrow 3|\overrightarrow{HM}| = |\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow HM = \frac{CI}{3} \Rightarrow \text{Tập hợp điểm } M \text{ là đường tròn tâm } H \text{ bán kính } R = \frac{CI}{3}.$$

**Câu 120.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $BC$  và  $M$  là một điểm thay đổi:

a). Chứng minh  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$  không đổi.

b). Tìm quỹ tích điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k$  ( $k$  là số thực cho trước).

**Lời giải**



a). Nhận xét: AD và BC có trung điểm I chung.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IB}^2 = MI^2 - \frac{a^2}{4} \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2 &= \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} \\ &= -(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}) = -\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 = -MI^2 + \frac{3a^2}{4} \\ \Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2 &= \frac{a^2}{2} \text{ không đổi.}\end{aligned}$$

b). Theo câu a), ta có:

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k \Leftrightarrow AM^2 + \frac{a^2}{2} = k \Leftrightarrow AM^2 = k - \frac{a^2}{2}$$

- Nếu  $k < \frac{a^2}{2}$  thì quỹ tích là tập rỗng.
- Nếu  $k = \frac{a^2}{2}$  thì quỹ tích chỉ gồm một điểm A.
- Nếu  $k > \frac{a^2}{2}$  thì quỹ tích là đường tròn tâm A, bán kính là  $\sqrt{k - \frac{a^2}{2}}$ .

**Câu 121.** Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn:

a).  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$

b).  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$

(với k là một số cho trước).

#### Lời giải

a).

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB})\overrightarrow{CA} + 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}) + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

(Với D là điểm sao cho  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$  ).

Do đó điểm M thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = k$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM'} = \frac{k + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overline{AD}} \text{ (Với } M' \text{ là hình chiếu của } M \text{ trên } AD).$$

Vậy quỹ tích điểm  $M$  là đường thẳng vuông góc với  $AD$  tại điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{AM'} = \frac{k + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\overline{AD}}$

b).

trước hết ta có

$$2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})^2 = MB^2 + MC^2 - BC^2 \text{ nên}$$

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = \frac{MB^2 + MC^2 - BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}MB^2 - \frac{1}{2}MC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2$$

$$\text{Do vậy điểm } M \text{ thỏa mãn } \frac{3}{2}MB^2 - \frac{1}{2}MC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 3MB^2 - MC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2 \quad (1)$$

Gọi  $G$  là điểm thỏa mãn  $3\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 3GB^2 - GC^2, \text{ mà } GB = \frac{BC}{2}, GC = \frac{2BC}{2} \text{ nên}$$

$$3MB^2 - MC^2 = 2MG^2 - \frac{3}{2}BC^2$$

$$\text{Thành thử điều kiện (1) trở thành: } 2MG^2 - \frac{3}{2}BC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = k + \frac{5a^2}{4} - b^2 + c^2 \text{ (với } a, b, c \text{ là độ dài ba cạnh } BC, CA, AB).$$

- Nếu  $k < -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2$  thì quỹ tích là tập rỗng.

- Nếu  $k = -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2$  thì quỹ tích chỉ gồm một điểm  $M$ .

- Nếu  $k > -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2$  thì quỹ tích điểm  $M$  là đường tròn tâm  $G$  bán kính  $\sqrt{k + \frac{5a^2}{4} - b^2 + c^2}$ .

**Câu 122.** Cho tam giác  $ABC$  số  $a$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$ .

**Lời giải:**

Chú ý, tổng các hệ số  $3+1-4=0$  nên không tồn tại tâm tỉ cự của hệ điểm  $A, B, C$ .

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm sao cho } 3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{IA} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$$

Do đó  $I$  cố định và

$$3MA^2 + MB^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$

$$= 4\overrightarrow{MI}^2 + 3\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{3IA} + \overrightarrow{IB})$$

$$= 4\overrightarrow{MI}^2 + 3\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \vec{0}$$

$$= 4\overrightarrow{MI}^2 + 3\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2.$$

Ta có

$$3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI}^2 + 3\overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 - 4\overrightarrow{MC}^2 = a$$

$$\Leftrightarrow MC^2 - MI^2 = \frac{3IA^2 + IB^2 - a}{4}.$$

Đặt  $k = \frac{3IA^2 + IB^2 - a}{4}$  không đổi, bài toán đưa về tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho

$$MC^2 - MI^2 = k.$$

Gọi  $O$  là trung điểm của  $CI$  và  $H$  là hình chiếu của  $M$  trên  $CI$ , ta có

$$MC^2 - MI^2 = \overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MI}^2 = (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MI})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MI}) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{IC}.$$

Do đó

$$MC^2 - MI^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{IC} = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CI} = k$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CI} = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OH} \cdot (\overrightarrow{CI})^2 = k \cdot \overrightarrow{CI}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{k}{2\overrightarrow{CI}^2} \overrightarrow{CI}.$$

Nên điểm  $H$  cố định. Vậy tập hợp các điểm  $M$  là đường thẳng vuông góc với  $AB$  tại  $H$  xác định ở trên.

**Câu 123.** Cho tam giác  $ABC$  và số  $k$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$ .

**Lời giải:**

Gọi  $I$  là điểm sao cho

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) + 5(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} = 10\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Do đó điểm  $I$  xác định duy nhất và

$$\begin{aligned} 2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 &= 2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 + 5\overrightarrow{MC}^2 \\ &= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 5(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 10\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 + 5\overrightarrow{IC}^2 + 2\overrightarrow{MI}(2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}) \\ &= 10\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 + 5\overrightarrow{IC}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \vec{0} \\ &= 10\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 + 5\overrightarrow{IC}^2. \end{aligned}$$

Vậy

$$2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = k^2 \Leftrightarrow 10\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 + 5\overrightarrow{IC}^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 = \frac{1}{10}(k^2 - 2\overrightarrow{IA}^2 - 3\overrightarrow{IB}^2 - 5\overrightarrow{IC}^2).$$

□ Nếu  $k^2 > 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 + 5\overrightarrow{IC}^2$  thì tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn tâm  $O$ , bán kính

$$R = \sqrt{\frac{1}{10}(k^2 - 2\overrightarrow{IA}^2 - 3\overrightarrow{IB}^2 - 5\overrightarrow{IC}^2)}.$$

□ Nếu  $k^2 = 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 + 5\overrightarrow{IC}^2$  thì tập hợp các điểm  $M$  gồm chỉ một điểm  $O$ .

□ Nếu  $k^2 < 2\overrightarrow{IA}^2 + 3\overrightarrow{IB}^2 + 5\overrightarrow{IC}^2$  thì tập hợp các điểm  $M$  là rỗng.

## BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Nếu hai điểm  $M, N$  thoả mãn  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$  thì độ dài đoạn thẳng  $MN$  bằng bao nhiêu?

- A.  $MN = 4$
- B.  $MN = 2$
- C.  $MN = 16$ ;
- D.  $MN = 256$ .

Lời giải

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4 = |\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{NM}| \cdot \cos 180^\circ = -4 \Leftrightarrow MN^2 = 4 \Rightarrow MN = 2. \text{ Chọn A}$$

**Câu 2.** Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ ;
- B. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;
- C. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ;
- D. Nếu  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$  thì  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ .

Lời giải

Chọn C

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$  bằng:

- A.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .
- B.  $-AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .
- C.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .
- D.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ACB}$ .

Lời giải

Chọn A

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$  bằng:

- A.  $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .
- B.  $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .
- C.  $-AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$ .
- D.  $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}$ .

Lời giải

Chọn A

**Câu 5.** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Tập hợp các điểm  $M$  nằm trong mặt phẳng thoả mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  là:

- A. Đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AB$ .
- B. Đường tròn tâm  $B$  bán kính  $AB$ .
- C. Đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .
- D. Đường tròn đường kính  $AB$ .

Lời giải

Chọn D

**Câu 6.** Nếu hai điểm  $M, N$  thoả mãn  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -9$  thì:

- A.  $MN = 9$ .
- B.  $MN = 3$ .
- C.  $MN = 81$ .
- D.  $MN = 6$ .

Lời giải

### **Chọn B**

### **BÀI TẬP BỒ SUNG**

- Câu 7.** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$ .      **B.**  $\vec{a}.\vec{b} = 0$ .      **C.**  $\vec{a}.\vec{b} = -1$ .      **D.**  $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$ .

### **Lời giải**

### **Chọn A**

Do  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ cùng hướng nên  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ .

Vậy  $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$ .

- Câu 8.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khi  $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$ .  
**A.**  $\alpha = 180^\circ$ .      **B.**  $\alpha = 0^\circ$ .      **C.**  $\alpha = 90^\circ$ .      **D.**  $\alpha = 45^\circ$ .

### **Lời giải**

### **Chọn A**

Ta có  $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

Mà theo giả thiết  $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$ , suy ra  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

- Câu 9.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và  $\vec{a}.\vec{b} = -3$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .  
**A.**  $\alpha = 30^\circ$ .      **B.**  $\alpha = 45^\circ$ .      **C.**  $\alpha = 60^\circ$ .      **D.**  $\alpha = 120^\circ$ .

### **Lời giải**

### **Chọn D**

Ta có  $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{-3}{3.2} = -\frac{1}{2} \rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

- Câu 10.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ .

$$\textbf{A. } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2a^2. \quad \textbf{B. } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \quad \textbf{C. } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2} \quad \textbf{D. } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$$

### **Lời giải**

### **Chọn D**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  là góc  $\hat{A}$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$ .

Do đó  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a.a.\cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$ .

- Câu 11.** Cho  $M, N, P, Q$  là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

$$\textbf{A. } \overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}. \quad \textbf{B. } \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}.$$

$$\textbf{C. } \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}. \quad \textbf{D. } (\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2.$$

### **Lời giải**

### **Chọn B**

Đáp án A đúng theo tính chất phân phôi.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng  $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$ .

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

**Câu 12.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$       B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$

Lời giải

**Chọn A**

Ta có  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$  nên  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

**Câu 13.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ .      B.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$ .      C.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$ .      D.  $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$ .

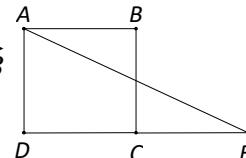
Lời giải

**Chọn A**

Ta có  $C$  là trung điểm của  $DE$  nên  $DE = 2a$ .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2.$$



**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  là:

- A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.

Lời giải

**Chọn B.**

Ta có  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$ .

Vậy tập hợp các điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .

**Câu 15.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a = 2$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$ . B.  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$ .  
C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$ . D.  $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta đi tính tích vô hướng ở các phương án. So sánh về trái với về phải.

Phương án A:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos 60^\circ = 2x \Rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$  nên loại #A.

Phương án B:  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = BC \cdot CA \cos 120^\circ = -2$  nên loại #B.

Phương án C:  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$ ,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -2$  nên chọn #C.

**Câu 16.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $\hat{A} = 120^\circ$  và  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A.  $\frac{a^2}{2}$ .      B.  $-\frac{a^2}{2}$ .      C.  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .      D.  $-\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = BA \cdot CA \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}a^2$ .

**Câu 17.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .      B.  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ .    D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương án A:  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$  suy ra  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$  nên loại #A.

Phương án B:  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$  và  $\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  suy ra  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  nên loại B.

Phương án C:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = AB \cdot AB \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = AB^2$ .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot DC \cdot \cos 180^\circ = -AB^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$  nên chọn C.

**Câu 18.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$ .  
 C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ . D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương án A: Do  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = DA \cdot CB \cdot \cos 0^\circ = a^2$  nên loại A.

Phương án B: Do  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot CD \cdot \cos 180^\circ = -a^2$  nên chọn B.

**Câu 19.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ ; I là trung điểm của  $AD$ . Khi đó  $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$  bằng :

- A.  $\frac{9a^2}{2}$ .      B.  $-\frac{9a^2}{2}$ .      C. 0.      D.  $9a^2$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} = -\frac{9a^2}{2}$  nên chọn B.

**Câu 20.** Tam giác  $ABC$  vuông ở  $A$  và có góc  $\hat{B} = 50^\circ$ . Hết thúc nào sau đây là **sai**?

- A.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$ .      B.  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$ .      C.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$ .      D.  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương án A:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 130^\circ$  nên loại #A.

Phương án B:  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 40^\circ$  nên loại B.

Phương án C:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 50^\circ$  nên loại C.

Phương án D:  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 140^\circ$  nên chọn D.

**Câu 21.** Cho hình vuông  $ABCD$ , tính  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

- A.  $\frac{1}{2}$ .      B.  $-\frac{1}{2}$ .      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Đầu tiên ta đi tìm số đo của góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$  sau đó mới tính  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

$$\text{Vì } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 135^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Câu 22.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $BC = a\sqrt{2}$ . Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$ .      B.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$ .      C.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$ .

**Lời giải****Chọn A**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

**Câu 23.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

- A. 0 .      B.  $a$  .      C.  $\frac{a^2}{2}$  .      D.  $a^2$  .

**Lời giải****Chọn A**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \cdot a \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

**Câu 24.** Cho  $M$  là trung điểm  $AB$ , tìm biểu thức sai:

- A.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$  .      B.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$  .  
C.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$  .      D.  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$  .

**Lời giải****Chọn D**

Phương án A:  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$  ngược hướng suy ra  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = MA \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot AB$  nên loại#A.

Phương án B:  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$  ngược hướng suy ra  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$  nên loại B.

Phương án C:  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$  cùng hướng suy ra  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = AM \cdot AB$  nên loại C.

Phương án D:  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$  ngược hướng suy ra  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$  nên chọn D.

**Câu 25.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$  và  $H$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A.  $\frac{3a^2}{4}$  .      B.  $\frac{-3a^2}{4}$  .      C.  $\frac{3a^2}{2}$  .      D.  $\frac{-3a^2}{2}$  .

**Lời giải****Chọn B**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA} = AH \cdot CA \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CA}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 150^\circ = -\frac{3a^2}{4}.$$

**Câu 26.** Biết  $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Câu nào sau đây đúng

- A.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.  
B.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc  $120^\circ$ .  
C.  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.  
D. A, B, C đều sai.

**Lời giải****Chọn C**

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \text{ nên } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ ngược hướng}$$

**Câu 27.** Cho 2 vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 5$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A.  $\sqrt{21}$ .      B.  $\sqrt{61}$ .      C. 21.      D. 61.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{21}.$$

**Câu 28.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $AB = a$ . Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A.  $3a^2$ .      B.  $-3a^2$ .      C.  $3a$ .      D. 0.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot BC \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$$

**Câu 29.** Cho 2 vectơ đơn vị  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa  $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$ . Hãy xác định  $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$

- A. 7.      B. 5.      C. -7.      D. -5.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, (3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 20\vec{b}^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} = -7.$$

**Câu 30.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đáy lớn  $AB = 4a$ , đáy nhỏ  $CD = 2a$ , đường cao  $AD = 3a$ . Tính  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$

- A.  $-9a^2$ .      B.  $15a^2$ .      C. 0.      D.  $9a^2$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Vì } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -9a^2 \text{ nên chọn A.}$$

**Câu 31.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$  có  $AC = 9$ ,  $BC = 5$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. 9.      B. 81.      C. 3.      D. 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 81 \text{ nên chọn B.}$$

**Câu 32.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A.  $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$ .      B.  $\sqrt{7 - \sqrt{3}}$ .      C.  $\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$ .      D.  $\sqrt{7 + 2\sqrt{3}}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}}.$$

**Câu 33.** Cho hai điểm  $B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$  là :

- A. Đường tròn đường kính  $BC$ .      B. Đường tròn  $(B; BC)$ .

- C. Đường tròn  $(C; CB)$ .      D. Một đường khác.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Tập hợp điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $BC$ .

**Câu 34.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  là :

- A. Đường tròn đường kính  $AB$ .
- B. Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .
- C. Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AC$ .
- D. Đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

Tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .

**Câu 35.** Cho hai điểm  $A(2, 2), B(5, -2)$ . Tìm  $M$  trên tia  $Ox$  sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$

- A.  $M(1, 6)$ .
- B.  $M(6, 0)$ .
- C.  $M(1, 0)$  hay  $M(6, 0)$ .
- D.  $M(0, 1)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $M(x; 0)$ , với  $x \in \mathbb{R}$ . Khi đó  $\overrightarrow{AM} = (x-2; -2), \overrightarrow{BM} = (x-5; 2)$ . Theo YCBT ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) - 4 = x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow M(1; 0) \\ x=6 \Rightarrow M(6; 0) \end{cases}, \text{nên chọn C.}$$

**Câu 36.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$
- B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
- C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
- D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số  $\frac{1}{2}$  và  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) \cdot \frac{1}{4}$  nên thử kiểm

tra đáp án C và **D**.

Ta có  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$  **Chọn C.**

• A đúng, vì  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

• B đúng, vì  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

**Câu 37.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$
- B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$
- C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$
- D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  là góc ngoài của góc  $\hat{B}$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

Do đó  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$

**Câu 38.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$  và chiều cao  $AH$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A.  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$       B.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$  là góc ngoài của góc  $\hat{A}$  nên  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

Do đó  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$

**Câu 39.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $AB = c$ ,  $AC = b$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- A.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$       B.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$       C.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$       D.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$

**Cách khác.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  suy ra  $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Ta có  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$

**Câu 40.** Cho ba điểm  $A, B, C$  thỏa  $AB = 2\text{ cm}$ ,  $BC = 3\text{ cm}$ ,  $CA = 5\text{ cm}$  Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$       B.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$       C.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$       D.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $AB + BC = CA \Rightarrow$  ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng và  $AC \longrightarrow I(4; -1)$ . nằm giữa  $A, C$ .

Khi đó  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$

**Cách khác.** Ta có  $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$

$$\longrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$$

**Câu 41.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  Tính  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

- A.  $P = b^2 - c^2$       B.  $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$       C.  $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$       D.  $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$$

**Câu 42.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

- A.  $P = -1$       B.  $P = 3a^2$       C.  $P = -3a^2$       D.  $P = 2a^2$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra  $AC = a\sqrt{2}$

$$\text{Ta có } P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2$$

$$= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2$$

**Câu 43.** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$ .    B.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ .    D.  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$ .

Lời giải

Chọn A

Vì  $M$  là trung điểm của  $BC$  suy ra  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2}$$

**Câu 44.** Cho ba điểm  $O, A, B$  không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng  $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  là

- A. tam giác  $OAB$  đều.    B. tam giác  $OAB$  cân tại  $O$ .  
 C. tam giác  $OAB$  vuông tại  $O$ .    D. tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA$$

**Câu 45.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 8$ ,  $AD = 5$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$ .    B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$ .    C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$ .    D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$ .

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BD}$  theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64.$$

**Câu 46.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AC = 8$  và  $BD = 6$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$ .    B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ .    C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$ .    D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi  $O = AC \cap BD$ , giả thiết không cho góc, ta phân tích các vecto  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  theo các vecto có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2} AC^2 = 32.$$

- Câu 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$  là:

A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Gọi  $I$  là trung điểm  $BC \rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}. (*)$$

Biểu thức  $(*)$  chứng tỏ  $MA \perp MI$  hay  $M$  nhìn đoạn  $AI$  dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $AI$ .

- Câu 48.** Tìm tập các hợp điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$  với  $A, B, C$  là ba đỉnh của tam giác.

A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC \rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}. (*)$$

Biểu thức  $(*)$  chứng tỏ  $MB \perp MG$  hay  $M$  nhìn đoạn  $BG$  dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $BG$ .

- Câu 49.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định có khoảng cách bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$  là:

A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Gọi  $C$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $B$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2.$$

Kết hợp với giả thiết, ta có  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB.$$

Vậy tập hợp các điểm  $N$  là đường thẳng qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .

- Câu 50.** Cho hai điểm  $A, B$  cố định và  $AB = 8$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$  là:

A. một điểm.      B. đường thẳng.      C. đoạn thẳng.      D. đường tròn.

**Lời giải**

**Chọn #A.**

Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB \rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có } MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 16 = \frac{8^2}{4} - 16 = 0 \rightarrow M \equiv I.$$

**Câu 51.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$

A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4a^2$ .

C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$ .

B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2$ .

D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2$ .

Lời giải

**Cách 1:** Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  và từ câu a ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$ ,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

**Cách 2:** Từ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$  và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB})$$

Ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$

**Câu 52.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính giá trị của biểu thức  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

A.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$ .

B.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$ .

C.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$ .

D.  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$ .

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Do đó  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \widehat{ACB}$

( $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$  vì  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ )

Mặt khác  $\widehat{ACB} = 45^\circ$  và theo định lý Pitago ta có:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Suy ra  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$ .

**Câu 53.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AB = BC = 2\sqrt{5}$ ,  $CD = BD = 5\sqrt{2}$ ,  $AD = 3\sqrt{10}$ ,  $AC = 10$ . Tìm cosin góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{DB}$

A.  $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$ .

B.  $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$ .

C.  $\frac{4}{5\sqrt{2}}$ .

D.  $\frac{3}{5\sqrt{2}}$ .

Lời giải

Với điểm  $O$  bất kỳ ta có:

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

Mặt khác  $2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{BC}^2$

Xây dựng các đẳng thức tương tự thay vào ta tính được

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \frac{AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2}{AC \cdot BD} = \frac{20 + 50 - 20 - 90}{10 \cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{4}{5\sqrt{2}}.$$

- Câu 54.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $DA, BC$ . Tính góc giữa hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  biết  $AB = CD = 2a$ ,  $MN = a\sqrt{3}$ .

A.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 50^\circ$ .      B.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$ .      C.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 80^\circ$ .      D.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$ .

Lời giải

Ta có:  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$  suy ra

$$MN^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2a^2.$$

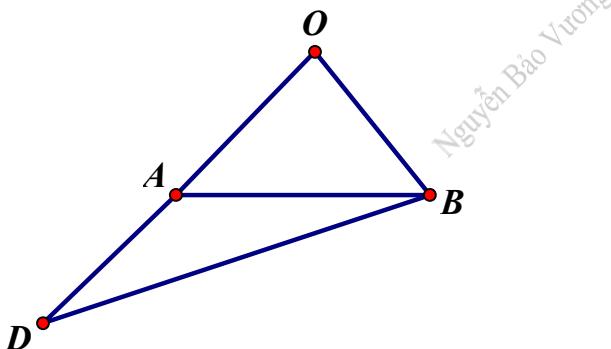
$$\text{Do đó } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{2a^2}{2a \cdot 2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ.$$

- Câu 55.** Cho tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$ , cạnh  $OA = 4$ . Tính  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ .

A.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$ .      B.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$ .  
 C.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$ .      D.  $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$ .

Lời giải

Chọn D



Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $O$  qua  $A$ .

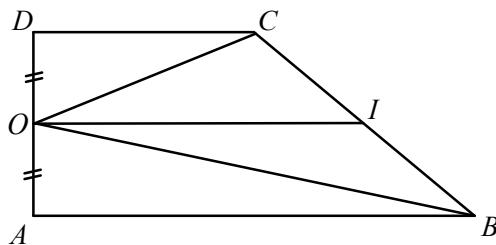
$$|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

- Câu 56.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  vuông tại  $A, D$ ;  $AB \parallel CD$ ;  $AB = 2a$ ;  $AD = DC = a$ .  $O$  là trung điểm của  $AD$ . Độ dài vectơ tổng  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  bằng

A.  $\frac{a}{2}$ .      B.  $\frac{3a}{2}$ .      C.  $a$ .      D.  $3a$ .

Lời giải

Chọn D



Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2|OI|$ .

Xét hình thang  $ABCD$  có  $OI$  là đường trung bình  $\Rightarrow OI = \frac{AB+CD}{2} = \frac{3a}{2}$ .

Vậy  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$ .

**Câu 57.** Cho  $ABC$  đều cạnh  $2a$  với  $M$  là trung điểm  $BC$ . Khẳng định nào đúng?

- A.  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .      B.  $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      D.  $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$ .

Lời giải

Chọn D

Độ dài đường cao  $AM$  trong tam giác đều cạnh  $2a$  là:  $\frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Vậy khẳng định đúng là  $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$ .

**Câu 58.** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  với  $AB = AC = a$ . Khi đó  $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$  bằng

- A.  $a\sqrt{3}$ .      B.  $a\sqrt{5}$ .      C.  $5a$ .      D.  $2a$ .

Lời giải

Chọn B

Ta có:  $(|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|)^2 = (2\overrightarrow{AB})^2 + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 4AB^2 + AC^2$  (vì  $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ )  
 $= 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow |2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{5}$ .

**Câu 59.** Cho hai véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai véctơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Chọn phát biểu **đúng**.

- A.  $\alpha = 60^\circ$ .      B.  $\alpha = 30^\circ$ .      C.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .      D.  $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ .

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}| = 4 &\Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

**Câu 60.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $4a$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  là

- A.  $8a^2$ .      B.  $8a$ .      C.  $8\sqrt{3}a^2$ .      D.  $8\sqrt{3}a$ .

Lời giải

Chọn A

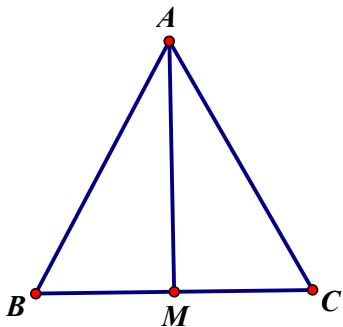
Ta có  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4a.4a.\cos 60^\circ = 4a.4a.\frac{1}{2} = 8a^2$ .

**Câu 61.** Cho  $\Delta ABC$  đều;  $AB = 6$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tích vô hướng  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$  bằng

- A.  $-18$ .      B.  $27$ .      C.  $18$ .      D.  $-27$ .

Lời giải

Chọn D



Ta có  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \widehat{BAM} = 30^\circ$ .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -27.$$

- Câu 62.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Biết  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}|$ .
- A.  $\sqrt{11}$ .      B.  $\sqrt{13}$ .      C.  $\sqrt{12}$ .      D.  $\sqrt{14}$ .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (\vec{a} + \vec{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}),$$

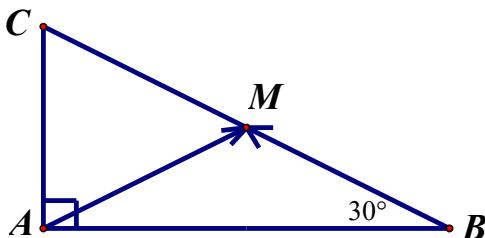
$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}.$$

- Câu 63.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{B} = 30^\circ$ ,  $AC = 2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ .

- A.  $P = -2$ .      B.  $P = 2\sqrt{3}$ .      C.  $P = 2$ .      D.  $P = -2\sqrt{3}$ .

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$$

$$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$$

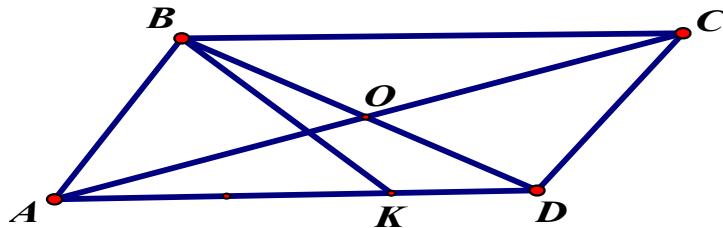
$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

- Câu 64.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 2a$ ,  $AD = 3a$ ,  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Điểm  $K$  thuộc  $AD$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A.  $3a^2$ .      B.  $6a^2$ .      C. 0.      D.  $a^2$ .

Lời giải

Chọn D



Ta có  $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ ;  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Khi đó  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3}2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

**Câu 65.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB=5$ ,  $AC=8$ ,  $BC=7$  thì  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  bằng:

A. -20.

B. 40.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

**Chọn D**

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

**Câu 66.** Cho hai vecto  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  sao cho  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và hai véc tơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

A.  $120^\circ$ .

B.  $60^\circ$ .

C.  $90^\circ$ .

D.  $30^\circ$ .

Lời giải

**Chọn C**

Vì hai véc tơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau nên

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) &= 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ. \end{aligned}$$

**Câu 67.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a$  và  $AD = a\sqrt{2}$ . Gọi  $K$  là trung điểm của cạnh  $AD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ .      B.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$ .      C.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$ .      D.  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .

Lời giải

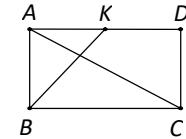
**Chọn A**

Ta có  $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$ .

Ta có 
$$\begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left( \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0.$$



$$\rightarrow \cos \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} (\text{vì } \widehat{ABC} \text{ nhọn}).$$

Mặt khác góc giữa hai vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  là góc ngoài của góc  $\widehat{ABC}$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos \widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

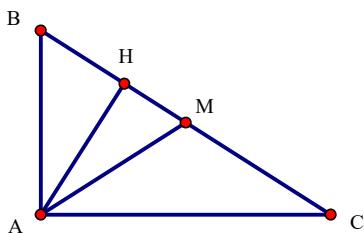
- Câu 68.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ ,  $BC = a\sqrt{3}$ ,  $M$  là trung điểm của  $BC$  và có  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$ .

Tính cạnh  $AB, AC$ .

**A.**  $AB = a, AC = a\sqrt{2}$ .   **B.**  $AB = a, AC = a$ .

**C.**  $AB = a\sqrt{2}, AC = a$ .   **D.**  $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$ .

**Lời giải**



**Chọn A**

Vẽ  $AH \perp BC, H \in BC$ .

Có  $\overrightarrow{HM}$  là hình chiếu của  $\overrightarrow{AM}$  lên  $BC$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{BC}, \text{ mà } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}, BC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{HM} \text{ cùng chiều } \overrightarrow{BC} \text{ và } HM \cdot BC = \frac{a^2}{2}, HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Có } BH = BM - HM = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

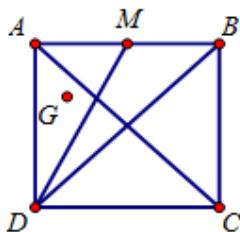
$$\text{Có } AB^2 = BH \cdot BC = a^2 \Rightarrow AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

Vậy  $AB = a$  và  $AC = a\sqrt{2}$ .

- Câu 69.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $M$  là trung điểm của  $AB, G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính giá trị của biểu thức  $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

**A.**  $\frac{21a^2}{4}$ .      **B.**  $\frac{11a^2}{4}$ .      **C.**  $\frac{9a^2}{4}$ .      **D.**  $\frac{a^2}{4}$ .

**Lời giải**



Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$  nên  $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có  $\vec{CA} = -(\vec{AB} + \vec{AD})$  và

$$\vec{CM} = \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{CA}) = \frac{1}{2}[\vec{CB} - (\vec{AB} + \vec{AD})] = -\frac{1}{2}(\vec{AB} + 2\vec{AD})$$

$$\text{Suy ra } \vec{CG} = -\vec{AB} - (\vec{AB} + \vec{AD}) - \frac{1}{2}(\vec{AB} + 2\vec{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\vec{AB} + 2\vec{AD}\right)$$

$$\text{Ta lại có } \vec{CA} + \vec{DM} = -(\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{AM} - \vec{AD} = -\left(\frac{1}{2}\vec{AB} + 2\vec{AD}\right)$$

$$\text{Nên } \vec{CG} \cdot (\vec{CA} + \vec{DM}) = \left(\frac{5}{2}\vec{AB} + 2\vec{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{AB} + 2\vec{AD}\right)$$

$$= \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}.$$

**Câu 70.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và thoả mãn điều kiện  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$

- A.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .      B.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$ .      C.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ .      D.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}$ .

Lời giải

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7} \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 7 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$$

**Câu 71.** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vec tơ bằng  $60^\circ$ . Xác định cosin góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  với  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

- A.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{2}$ .      B.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{6}$ .      C.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{4}$ .      D.  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{3}$ .

Lời giải

$$\text{Có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác: } \vec{u}^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \Leftrightarrow |\vec{u}| = 3$$

$$\vec{v}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Leftrightarrow |\vec{v}| = 1$$

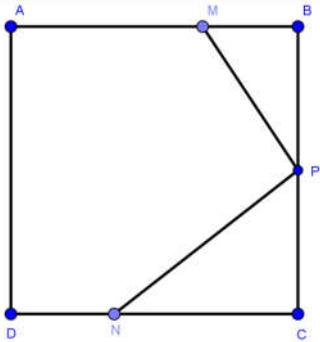
$$\text{Suy ra } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = -\frac{1}{6}$$

**Câu 72.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng 3. Trên cạnh  $AB$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 1$ , trên cạnh  $CD$  lấy điểm  $N$  sao cho  $DN = 1$  và  $P$  là trung điểm  $BC$ . Tính  $\cos \widehat{MNP}$ .

- A.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$ .      B.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{4\sqrt{10}}$ .

- C.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{\sqrt{10}}$ .      D.  $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$ .

Lời giải



$$\text{Ta có } \overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$$

$$\text{Mặt khác } |\overrightarrow{NM}| = \sqrt{10}, |\overrightarrow{NP}| = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}.$$

- Câu 73.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 2$ .  $M$  là điểm được xác định bởi  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$

- A.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$ .      B.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$ .      C.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$ .      D.  $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$ .

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ADM \text{ nên } 3\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{CG} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$$

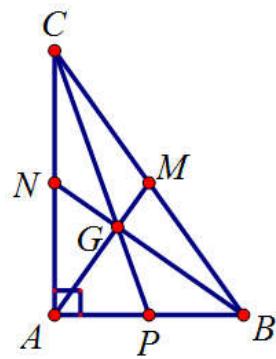
$$\Rightarrow \overrightarrow{GC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \left( \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \right) = \frac{3}{8}.$$

- Câu 74.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  và  $G$  là trọng tâm. Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

- A.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$ .      B.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$ .  
 C.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$ .      D.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$ .

Lời giải



Vì  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$  nên

$$\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$

$$\text{Để thấy tam giác } ABM \text{ đều nên } GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

$$\text{Suy ra } \vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$$

- Câu 75.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh bằng  $2$ . Điểm  $M$  nằm trên đoạn thẳng  $AC$  sao cho  $AM = \frac{AC}{4}$ .

Gọi  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $DC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = -4$ .      B.  $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 0$ .      C.  $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 4$ .      D.  $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 16$ .

### Lời giải

#### Chọn B

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ  $\vec{MB}$ ,  $\vec{MN}$  theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

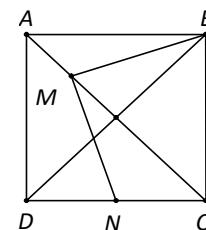
$$\bullet \vec{MB} = \vec{AB} - \vec{AM} = \vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC} = \vec{AB} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD}.$$

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \vec{AD} + \vec{DN} - \frac{1}{4}\vec{AC} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD})$$

$$= \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AB}. \text{ Suy ra:}$$

$$\vec{MB} \cdot \vec{MN} = \left(\frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD}\right) \left(\frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AB}\right) = \frac{1}{16} \left(3\vec{AB} \cdot \vec{AD} + 3\vec{AB}^2 - 3\vec{AD}^2 - \vec{AD} \cdot \vec{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{16} (0 + 3a^2 - 3a^2 - 0) = 0.$$



- Câu 76.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng  $a$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$  nằm trên một đường tròn  $(C)$  có bán kính  $R$ . Tính  $R$ .

A.  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ .

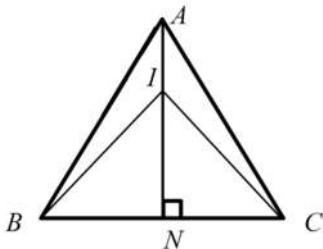
B.  $R = \frac{a}{4}$ .

C.  $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

D.  $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$ .

Lời giải

Chọn D



Gọi  $N$  là trung điểm đoạn  $BC$ .

Gọi  $I$  là điểm thỏa:  $4\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{IA} + 2\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{IA} + \vec{IN} = \vec{0}$ , nên điểm  $I$  thuộc đoạn thẳng  $AN$  sao cho  $IN = 2IA$ .

Khi đó:  $IA = \frac{1}{3}AN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ , và  $IN = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

$$IB^2 = IC^2 = IN^2 + BN^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}.$$

Ta có:  $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow 4(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = \frac{5a^2}{2}$ .

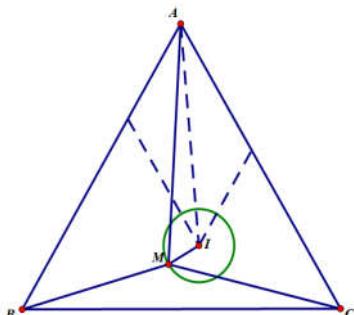
$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 4IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 6MI^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{12} + 2 \cdot \frac{7a^2}{12} = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

**Câu 77.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $18\text{cm}$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$  là

- A. Tập rỗng.                      B. Đường tròn cố định có bán kính  $R = 2\text{cm}$ .  
 C. Đường tròn cố định có bán kính  $R = 3\text{cm}$ .    D. Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B



Ta có  $|\vec{MA} - \vec{MB}| = |\vec{AB}| = 18$ .

Dựng điểm  $I$  thỏa mãn  $2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{9}\vec{AC}$ .

Khi đó:  $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow 9|\vec{MI}| = 18 \Leftrightarrow IM = 2$ .

Do đó tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn cố định có bán kính  $R = 2\text{cm}$ .

**Câu 78.** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $J$  thỏa mãn  $\vec{AK} = 3\vec{KJ}$ ,  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , điểm  $K$  thỏa mãn  $\vec{KA} + \vec{KB} + 2\vec{KC} = \vec{0}$ .

Một điểm  $M$  thay đổi nhưng luôn thỏa mãn  $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$ .

Tập hợp điểm  $M$  là đường nào trong các đường sau.

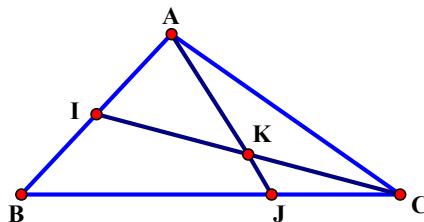
A. Đường tròn đường kính  $IJ$ .

B. Đường tròn đường kính  $IK$ .

C. Đường tròn đường kính  $JK$ .

D. Đường trung trực đoạn  $JK$ .

**Lời giải**



**Chọn C**

Ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$ .

Lấy điểm  $J$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ . Ta có  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$ , mà  $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$  nên

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra  $J$  là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng  $BC$  xác định bởi hệ thức  $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ .

Ta có  $3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}$ .

Như vậy  $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}) \cdot (4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$ .

Từ đó suy ra điểm  $M$  thuộc đường tròn đường kính  $JK$ .

Vì  $J, K$  là các điểm cố định nên điểm  $M$  luôn thuộc một đường tròn đường kính  $JK$  là đường tròn cố định (đpcm).

**Câu 79.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ . Lấy  $M, N, P$  lần lượt nằm trên ba cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$ . Tìm  $x$  để  $AM$  vuông góc với  $NP$ .

A.  $x = \frac{5a}{12}$ .

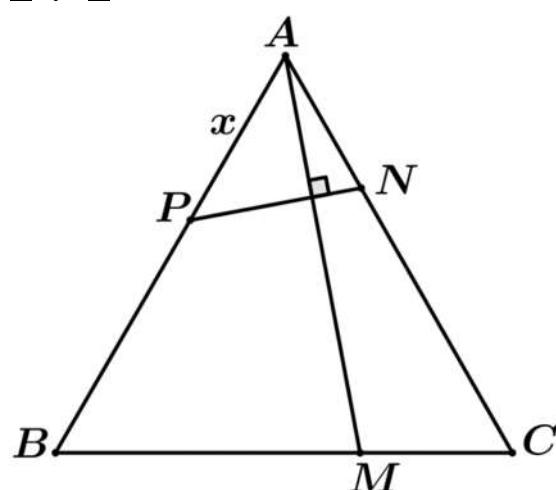
B.  $x = \frac{a}{2}$ .

C.  $x = \frac{4a}{5}$ .

D.  $x = \frac{7a}{12}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**



Đặt  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}$ , ta có  $|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$  và  $\vec{b} \cdot \vec{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3} (\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3} (\vec{b} + 2\vec{c})$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{x}{a} \overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} = \frac{1}{3a} (-3x\vec{b} + a\vec{c})$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán ta có } AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c})(-3x\vec{b} + a\vec{c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x\vec{b}^2 + a(\vec{b} \cdot \vec{c}) - 6x(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 2a\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}.$$

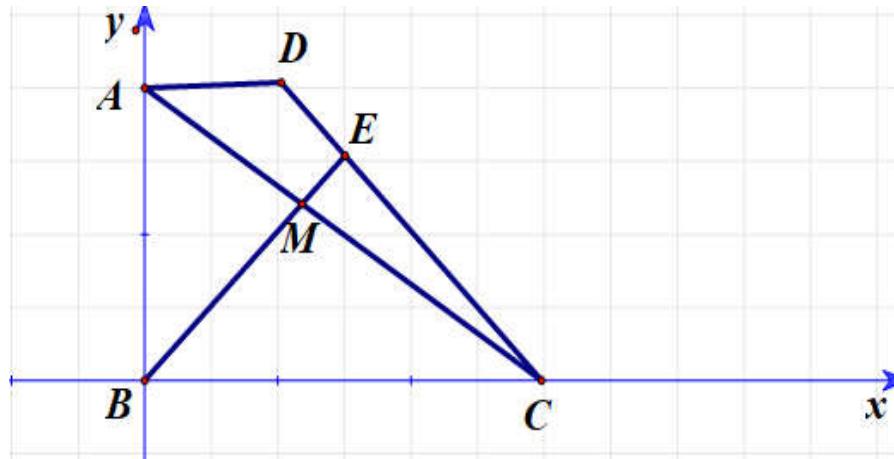
- Câu 80.** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có đường cao  $AB = 2a$ , các cạnh đáy  $AD = a$  và  $BC = 3a$ . Gọi  $M$  là điểm trên đoạn  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ . Tìm  $k$  để  $BM \perp CD$

- A.  $\frac{4}{9}$ .      B.  $\frac{3}{7}$ .      C.  $\frac{1}{3}$ .      D.  $\frac{2}{5}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm  $B$ , điểm  $A$  thuộc trục  $Oy$  và điểm  $C$  thuộc trục  $Ox$ .



Theo bài ra ta có  $B(0;0)$ ,  $A(0;2)$ ,  $C(3;0)$ ,  $D(1;2)$

Khi đó  $\overrightarrow{AC} = (3; -2)$ . Phương trình tham số của đường thẳng  $AC$  là  $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Gọi  $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2 - 2t)$ . Ta có  $\overrightarrow{BM} = (3t; 2 - 2t)$  và  $\overrightarrow{DC} = (2; -2)$ .

Để  $BM \perp DC$  thì  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$ .

Khi đó  $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{6}{5}; \frac{-4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$  và  $\overrightarrow{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$ .

Vì  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}$  cùng chiều  $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$ .