ÔN TẬP CHƯƠNG IV. VECTƠ

• |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vectơ nào sau đây có cùng phương?

A. $\vec{u}=(2;3)$ và $\vec{v}=\left(\frac{1}{2};6\right)$

B. $\vec{a}=(\sqrt{2};6)$ và $\vec{b}=(1;3\sqrt{2})$

C. $\vec{i}=(0;1)$ và $\vec{j}=(1;0)$

D. $\vec{c}=(1;3)$ và $\vec{d}=(2;-6)$

Lời giải

A. Ta có: $\frac{2}{\frac{1}{2}}=4\neq\frac{3}{6}$ nên $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không cùng phương.

B. Ta có: $\frac{\sqrt{2}}{1}=\frac{6}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}>0$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, hơn nữa là cùng hướng

Chọn B

C. Ta có: $\vec{i}\cdot\vec{j}=0.1+1.0=0\Rightarrow\vec{i}\perp\vec{j}$

Vậy $\vec{i}$ và $\vec{j}$ không cùng phương.

D. Ta có: $\frac{1}{2}\neq\frac{3}{-6}$ nên $\vec{c}$ và $\vec{d}$ không cùng phương.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ, cặp vectơ nào sau đây vuông góc với nhau?

A. $\vec{u}=(2;3)$ và $\vec{v}=(4;6)$

B. $\vec{a}=(1;-1)$ và $\vec{b}=(-1;1)$

C. $\vec{z}=(a;b)$ và $\vec{t}=(-b;a)$

D. $\vec{n}=(1;1)$ và $\vec{k}=(2;0)$

Lời giải

A. Ta có: $\vec{u}\cdot\vec{v}=2.4+3.6=26\neq 0$ nên $\vec{u}$ và $\vec{v}$ không vuông góc với nhau.

B. Ta có: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1=-2\neq 0$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không vuông góc với nhau.

C. Ta có: $\vec{z}\cdot\vec{t}=a\cdot(-b)+b\cdot a=0$ nên $\vec{z}$ và $\vec{t}$ vuông góc với nhau.

Chọn C

D. Ta có: $\vec{n}\cdot\vec{k}=1.2+1.0=2\neq 0$ nên $\vec{n}$ và $\vec{k}$ không vuông góc với nhau.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ, vectơ nào sau đây có độ dài bằng 1 ?

A. $\vec{a}=(1;1)$

B. $\vec{b}=(1;-1)$

C. $\vec{c}=\left(2;\frac{1}{2}\right)$

D. $\vec{d}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

Lời giải

A. Ta có: $\vec{a}=(1;1)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}\neq 1$. (Loại)

B. Ta có: $\vec{b}=(1;-1)\Rightarrow|\vec{b}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\neq 1$. (Loại)

C. Ta có: $\vec{c}=\left(2;\frac{1}{2}\right)\Rightarrow|\vec{c}|=\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}\neq 1$. (Loại)

D. Ta có: $\vec{d}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{11}{\sqrt{2}}\right)^2}=1$. (Thỏa mãn yc)

Chọn D

Câu 4. Góc giữa vectơ $\vec{a}=(1;-1)$ và vectơ $\vec{b}=(-2;0)$ có số đo bằng:

A. 90°

B. 0°

C. 135°

D. 45°

Lời giải

Ta có: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-2)+(-1)\cdot 0=-2\neq 0$

Lại có: $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2};|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2$.

$\Rightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-2}{\sqrt{2}\cdot 2}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=135^\circ$

Chọn C

Câu 5. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$

B. $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$

C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$

D. $\vec{a}(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$

Lời giải

Chọn D Đây là một tính chất của tích vô hướng.

A. Sai vì $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=[|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})]\cdot\vec{c}\neq\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})=\vec{a}[|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos(\vec{b},\vec{c})]$

B. Sai vì

$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=[\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})]^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2\cdot\cos^2(\vec{a},\vec{b})\neq\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$

C. Sai vì $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})\neq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})=45^\circ$

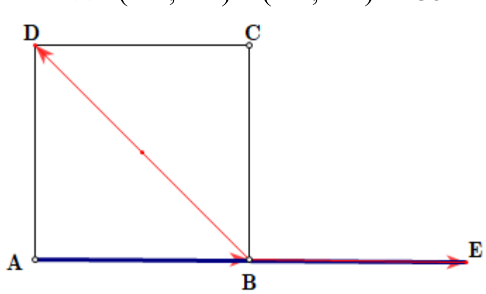
B. $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})=45^\circ$ và $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$

C. $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=a^2\sqrt{2}$

D. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=-a^2$

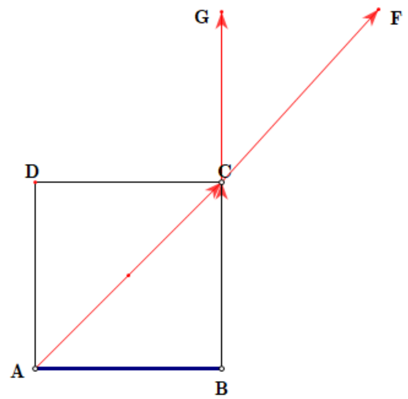
Lời giải

A. Ta có: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})=(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD})=135^\circ\neq 45^\circ$. Vậy A sai.



B. Ta có: $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{CF},\overrightarrow{CG})=45^\circ$ và

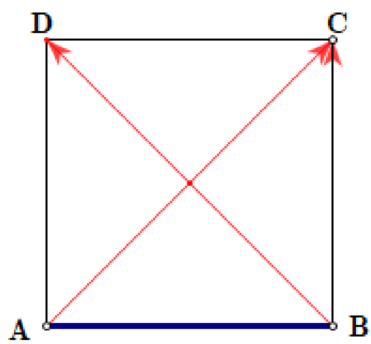
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=AC\cdot BC\cdot\cos 45^\circ=a\sqrt{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.



Vậy B đúng.

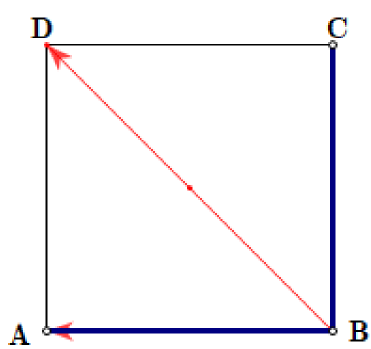
Chọn B

C. Dễ thấy $AC \perp BD$ nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \neq a^2\sqrt{2}$. Vậy C sai.



D. Ta có: $(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}) = 45^\circ$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = BA \cdot BD \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2 \neq -a^2$.



Vậy D sai

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Xét các vectơ có hai điểm mút lấy từ các điểm A, B, C, D và O. Số các vectơ khác vectơ - không và cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ là

A. 6. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Câu 8. Cho đoạn thẳng AC và B là một điểm nằm giữa A, C. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là một khẳng định đúng?

A. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$ củng hướng.

B. Hai vectơ' $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

C. Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

D. Hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng.

Lời giải

Chọn C

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi K,L,M,N tương ứng là trung điểm các cạnh AB,BC,CD,DA. Trong các vectơ có đầu mút lấy từ các điểm A,B, C,D,K,L,M,O, có bao nhiêu vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AK}$?

A. 2.
B. 6.
C. 4.
D. 8.

Lời giải

Chọn B

Câu 10. Cho hình thoi $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng 1 và $\widehat{DAB}=120^{\circ}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.
B. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$.
C. $|\overrightarrow{BD}|=1$.
D. $|\overrightarrow{AC}|=1$.

Lời giải

Chọn D

Câu 11. Cho tam giác ABC đều, trọng tâm G, có độ dài các cạnh bằng 3. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AG}$ bằng

A. $\sqrt{3}$.
B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
D. $2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB=3, AC=4$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}$ bằng

A. $\sqrt{13}$.
B. $2\sqrt{13}$
C. 4
D. 2

Lời giải

Chọn B

Câu 13. Cho tam giác ABC có $AB=2, BC=4$ và $\widehat{ABC}=60^{\circ}$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}$ bằng

A. 2.
B. $\sqrt{19}$.
C. 4.
D. $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 14. Cho tam giác ABC và điểm I sao cho $\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{CC}=\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây là một khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.
B. $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AI}=\dfrac{\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}}{-3}$.

D. $\overrightarrow{AI}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 15. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm cạnh BC. Khẳng định nào sau đây là một khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GM}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$

C. $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MG}$.

D. $3\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{AM}$

Lời giải

Chọn B

Câu 16. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(-3;1), B(2;-1), C(4;6)$.

Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là

A. $(1;2)$.

B. $(2;1)$.

C. $(1;-2)$.

D. $(-2;1)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 17. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(-3;3), B(5;-2)$ và $G(2;2)$.

Toạ độ của điểm C sao cho G là trọng tâm tam giác ABC là

A. $(5;4)$.

B. $(4;5)$.

C. $(4;3)$.

D. $(3;5)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ với độ dài cạnh bằng a. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ bằng

A. $a^2\sqrt{2}$

B. $\dfrac{a^2}{\sqrt{2}}$.

C. a^2

D. $\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 19. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng khác $\vec{0}$. Khi đó $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ tương đương với

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

D. $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 20. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng khác $\vec{0}$. Khi đó $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ tương đương với

A. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

C. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

D. $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(3;4);B(2;5)$. Tọa độ của $\overrightarrow{AB}$ là:

A. $(1;-1)$

B. $(1;1)$

C. $(-1;1)$

D. $(-1;-1)$

Lời giải

Đáp án **C.** $(-1;1)$

Câu 22. Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos(\vec{a},\vec{b})|$.

B. $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$

C. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$.

D. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Lời giải

Chọn D

Câu 23. Cho tứ giác $ABCD$. Biểu thức $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}$ bằng:

A. CD^2.

B. 0.

C. $\vec{0}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Câu 24. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(-2;1), B(1;-3)$. Toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là:

A. $(1;-4)$.

B. $(-3;4)$.

C. $(3;-4)$.

D. $(1;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 25. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;-5), B(5;2)$ và trọng tâm là gốc toạ độ. Tọa độ điểm C là:

A. $(4;-3)$.

B. $(-4;-3)$.

C. $(-4;3)$.

D. $(4;3)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 26. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, vectơ nào sau đây có độ dài bằng 1 ?

A. $\vec{a} = (1;1)$.

B. $\vec{b} = \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

C. $\vec{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2}{3}\right)$.

D. $\vec{d}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 27. Cho tam giác ABC có $AB=1, BC=2$ và $\widehat{ABC}=60^{\circ}$. Tich vô hướng $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. 3

D. -3.

Lời giải

Chọn D

Câu 28. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(2;-1), B(-1;5)$ và $C(3m;2m-1)$. Tất cả các giá trị của tham số m sao cho $AB\perp OC$ là

A. $m=-2$.

B. $m=2$.

C. $m=\pm 2$.

D. $m=3$.

Lời giải

Chọn B

Câu 29. Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB=1, AC=2$. Lấy M, N, P tương ứng thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $2BM=MC, CN=2NA, AP=2PB$. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{NP}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Câu 30. Cho tam giác ABC đều các cạnh có độ dài bằng 1. Lấy M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM=2MC, CN=2NA$ và $AM\perp NP$. Tỉ số của $\frac{AP}{AB}$ bằng

A. $\frac{5}{12}$.

B. $\frac{7}{12}$

C. $\frac{5}{7}$.

D. $\frac{7}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 31. Cho tam giác ABC đều có độ dài các cạnh bằng $3a$. Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $MB=2MC$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MC}$ bằng

A. $\frac{a^2}{2}$.

B. $-\frac{a^2}{2}$.

C. a^2.

D. $-a^2$.

Lời giải

Chọn B

Câu 32. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thoả mãn $|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{AC}|$ là

A. đường tròn tâm A bán kính BC.

B. đường thẳng đi qua A và song song với BC.

C. đường tròn đường kính BC.

D. đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

Lời giải

Chọn A

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 1. Cho 3 vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Nếu hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

b) Nếu hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng

Lời giải

a)+) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{c}$ nên giá của vectơ $\vec{a}$ song song với giá của vectơ $\vec{c}$

+) Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{c}$ nên giá của vectơ $\vec{b}$ song song với giá của vectơ $\vec{c}$

Suy ra giá của vectơ $\vec{a}$ và vectơ $\vec{b}$ song song với nhau nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

Vậy khẳng định trên đúng

b) Giả sử vectơ $\vec{c}$ có hướng từ A sang B

+) Vectơ $\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{c}$ nên giá của vectơ $\vec{a}$ song song với giá của vectơ $\vec{c}$ và có hướng từ B sang A

+) Vectơ $\vec{b}$ ngược hướng với vectơ $\vec{c}$ nên giá của vectơ $\vec{b}$ song song với giá của vectơ $\vec{c}$ và có hướng từ B sang A

Suy ra, hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng

Vậy khẳng định trên đúng

Câu 2. Cho $|\vec{a}+\vec{b}|=0$. So sánh độ dài, phương và hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

Lời giải

$|\vec{a}+\vec{b}|=0 \Leftrightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}=-\vec{b}$

$\vec{a}=-\vec{b}$ suy ra hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vecto đối nhau nên chúng cùng phương, ngược hướng và có độ dài bằng nhau.

Câu 3. Cho bốn điểm A,B,C,D. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Lời giải

Với 4 điểm A,B,C,D ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi tứ giác ABDC là hình bình hành

Theo tính chất của hình bình hành thì giao điểm của hai đường chéo là trung điểm của mỗi đường và ngược lại.

Nói cách khác: trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

Lời giải

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow -\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}$ (*)

Áp dụng quy tắc hiệu ta có: $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CD}$

Do đó $(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ (luôn đúng do $ABCD$ là hình bình hành)

Cách 3:

Ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})$

Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow -\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$ hay

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$ (đpcm)

Câu 5. Chứng minh:

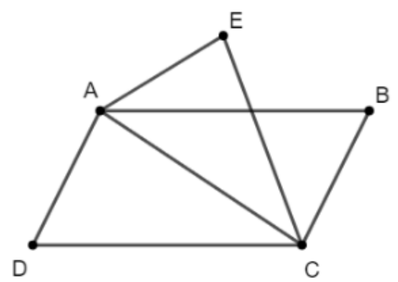
a) Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$ với E là điểm bất kì;

b) Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{IN}=2\overrightarrow{MN}$ với M,N là hai điểm bất kì;

c) Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NG}$ với M,N là hai điểm bất kì.

Lời giải

a)

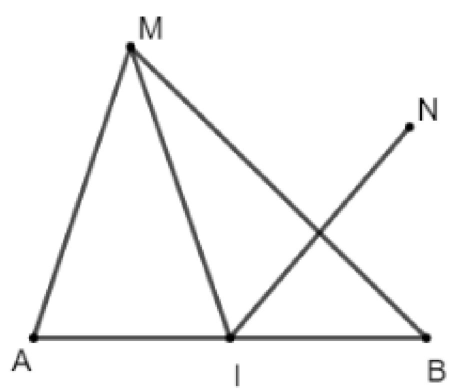


Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Với E là điểm bất kì ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AE}$ với E là điểm bất kì.

b)



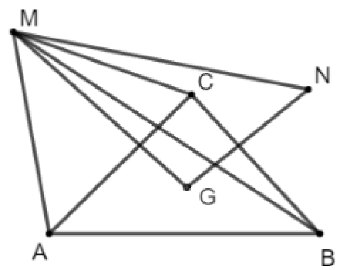
Vì I là trung điểm của AB nên với điểm M bất kì ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Do đó, với điểm N bất kì, ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{IN}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IN}=2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IN})=2\overrightarrow{MN}$

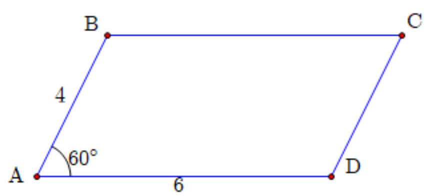
Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{IN}=2\overrightarrow{MN}$ với M,N là hai điểm bất kì.

c)



Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên với điểm M bất kì ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$
Khi đó với điểm N bất kì ta có:
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MG}-3\overrightarrow{MN}=3(\overrightarrow{MG}+(-\overrightarrow{MN}))=3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{NM})=3(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MG})=3\overrightarrow{NG}$
Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{NG}$ với M, N là hai điểm bất kì.

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=4, AD=6$, $\widehat{BAD}=60^\circ$ (Hình).



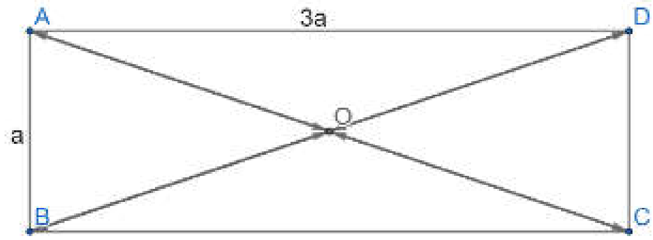
a) Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.
b) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}$.
c) Tính độ dài các đường chéo BD, AC.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
ABCD. hình bình hành nên $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
b) Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=AB\cdot AD\cdot\cos\widehat{BAD}=4\cdot 6\cdot\cos 60^\circ=12$
Do đó: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=12$
Ta cũng có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=AB^2+12=4^2+12=28$
Do đó: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=28$
Lại có. $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}=(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AB}^2$
$=AD^2-AB^2=6^2-4^2=20$.
Vậy $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=20$
c) Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABD có:
$BD^2=AB^2+AD^2-2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos A=4^2+6^2-2\cdot 4\cdot 6\cdot\cos 60^\circ=28\Rightarrow BD=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$
Ta có:
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow(\overrightarrow{AC})^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2+2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2\Leftrightarrow AC^2$
$=AB^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+AD^2$
Suy ra: $AC^2=4^2+2\cdot 12+6^2=76\Rightarrow AC=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$

Câu 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo và $AB=a, BC=3a$.
a) Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$
b) Tìm trong hình ảnh vectơ đối nhau và có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Lời giải



a) Ta có:

$AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = a\sqrt{10}$

+) $|\overrightarrow{AC}| = AC = a\sqrt{10}$

+) $|\overrightarrow{BD}| = BD = a\sqrt{10}$

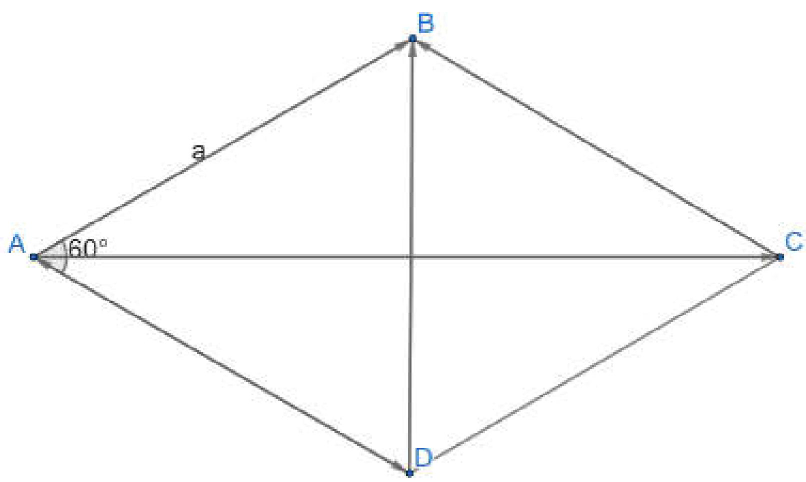
b) O là giao điểm của hai đường chéo nên ta có:

$AO = OC = BO = OD = \dfrac{a\sqrt{10}}{2}$

Dựa vào hình vẽ ta thấy AO và CO cùng nằm trên một đường thẳng; BO và DO cùng nằm trên một đường thẳng Suy ra các cặp vectơ đối nhau và có độ dài bằng $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$ là: $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{AO}$ và $\overrightarrow{CO}$; $\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{BO}$ và $\overrightarrow{DO}$

Câu 8. Cho hình thoi $ABCD$ đi có cạnh bằng a và có góc A bằng 60°. Tìm độ dài của các vectơ sau: $\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}; \vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}; \vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

Lời giải



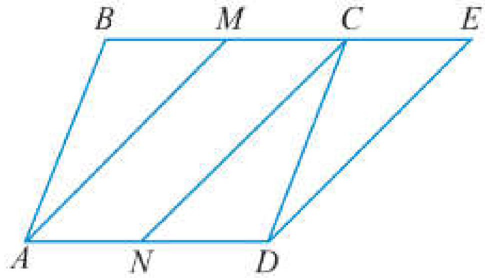
+) $ABCD$ là hình thoi nên cũng là hình bình hành

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có:

$\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ +) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ +) $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$ hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Vẽ điểm E sao cho $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AN}$ (hình)



a) Tìm tổng của các vectơ: $\overrightarrow{NC}$ và $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{NC}$

b) Tìm các vectơ hiệu: $\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ME}$

c) Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AN} \Rightarrow CE // AN$ và $CE=AN=ND=BM=MC$

Suy ra $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CE}$

+) $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{NE}$

+) $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BM}$

+) Ta có $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AN} \Rightarrow AMCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}$ (vì $AMED$ là hình bình hành)

b) Ta có:

+) $\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{NM}$

+) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$

+) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$

c) Ta có:

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}$

Áp dụng quy tắc hình bình hành vào hình bình hành $ABCD$ ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (đpcm)

Câu 10. Cho $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ khác vectơ $\vec{0}$. Trong trường hợp nào thì đẳng thức sau đúng?

a) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$

b) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$

Lời giải

a) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2$

$\Leftrightarrow (\vec{a}+\vec{b})^2=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2 \Leftrightarrow (\vec{a})^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$+(\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|+|\vec{b}|^2$

$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|+|\vec{b}|^2$

$\Leftrightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b}=2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

$\Leftrightarrow 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

$\Leftrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b})=1 \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b})=0^\circ$

Vậy $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

b) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$

$\Leftrightarrow (\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})^2$

$\Leftrightarrow (\vec{a})^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{b})^2=(\vec{a})^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{b})^2$

$\Leftrightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\vec{a}\cdot\vec{b} \Leftrightarrow 4\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Leftrightarrow (\vec{a},\vec{b})=90^\circ$

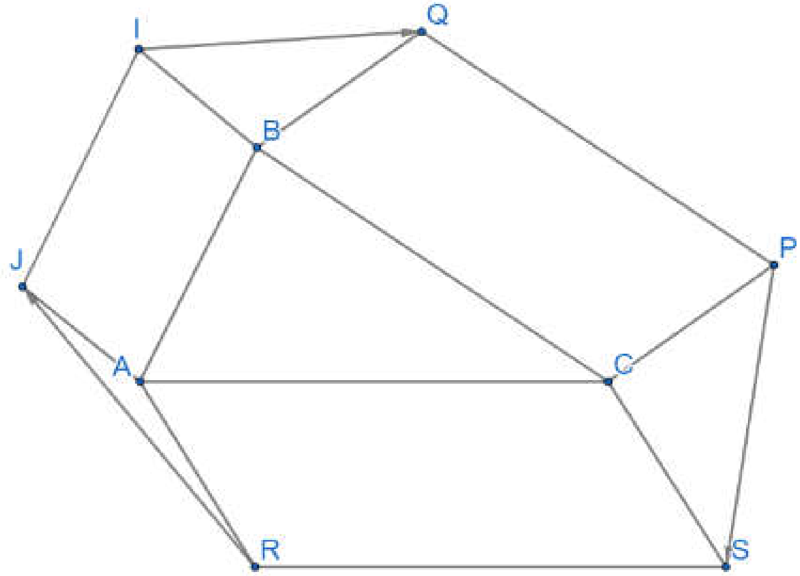
Vậy $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b}$ vuông góc với nhau.

Câu 11. Cho tam giác ABC. Bên ngoài tam giác vẽ các hình bình hành $ABIJ, BCPQ, CARS$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=\vec{0}$.

Lời giải

$\overrightarrow{RJ}+\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{PS}=(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{AJ})+(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BQ})+(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CS})$

$=(\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{CS})+(\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{PC})=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

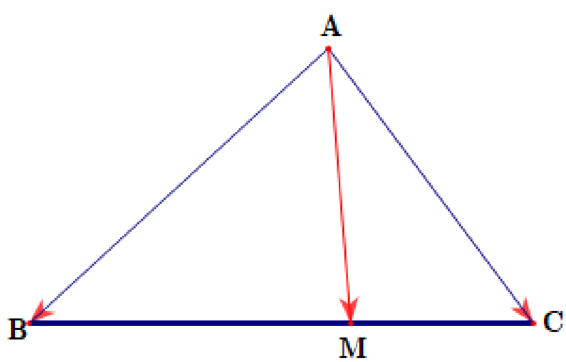


Câu 12. Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm M sao cho $MB=3MC$.

a) Tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



a) M thuộc cạnh BC nên vectơ $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$ ngược hướng với nhau.

Lại có: $MB=3MC \Rightarrow \overrightarrow{MB}=-3\cdot\overrightarrow{MC}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$

Mà $BM=\frac{3}{4}BC$ nên $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

Lại có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ (quy tắc hiệu)

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$

Vậy $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$

Câu 13. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ (hay còn được viết là $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$) là một vectơ đơn vị, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

Lời giải

Cách 1:

Gọi tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là $(x; y)$.

Ta có: $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Đặt $\vec{i}=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}$

$$\Rightarrow \vec{i}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(x; y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\Rightarrow |\vec{i}|=\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}=1$$

Mặt khác:

$\vec{i}=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\vec{a}$ và $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}>0$ với mọi $x, y \neq 0$

Do đó vectơ $\vec{i}$ và $\vec{a}$ cùng hướng.

Vậy $\frac{1}{|\vec{d}|}\vec{a}$ (hay $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$) là một vectơ đơn vị, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

Cách 2:

Với mọi vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$, ta có: $|\vec{a}|>0 \Rightarrow k=\frac{1}{|\vec{a}|}>0$. Đặt $\vec{i}=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=k\cdot\vec{a}$

$$\Rightarrow |\vec{i}|=|k\cdot\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}| \Leftrightarrow |\vec{i}|=k\cdot|\vec{a}|=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=1$$

Mặt khác: $\vec{i}=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=k\cdot\vec{a}$ và $k>0$

Do đó vectơ $\vec{i}$ và $\vec{a}$ cùng hướng.

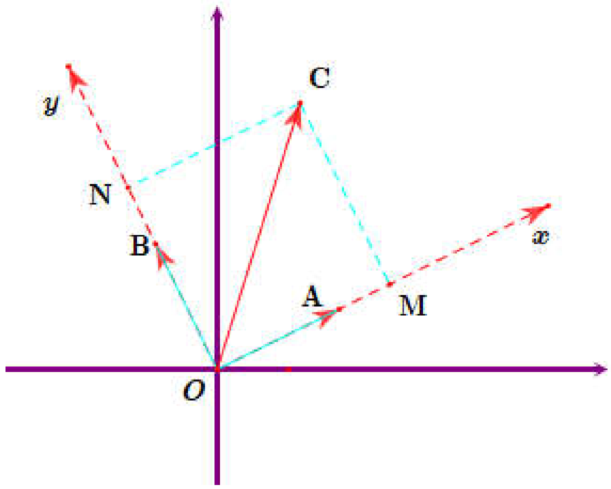
Vậy $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ (hay $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$) là một vectơ đơn vị, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

Câu 14. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}$ với $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\vec{a} \perp \vec{b}$. Xét một hệ trục Oxy với các vectơ đơn vị $\vec{i}=\vec{a}, \vec{j}=\vec{b}$. Chứng minh rằng:

a) Vectơ $\vec{u}$ có tọa độ là $(\vec{u}\cdot\vec{a}; \vec{u}\cdot\vec{b})$

b) $\vec{u}=(\vec{u}\cdot\vec{a})\cdot\vec{a}+(\vec{u}\cdot\vec{b})\cdot\vec{b}$

Lời giải



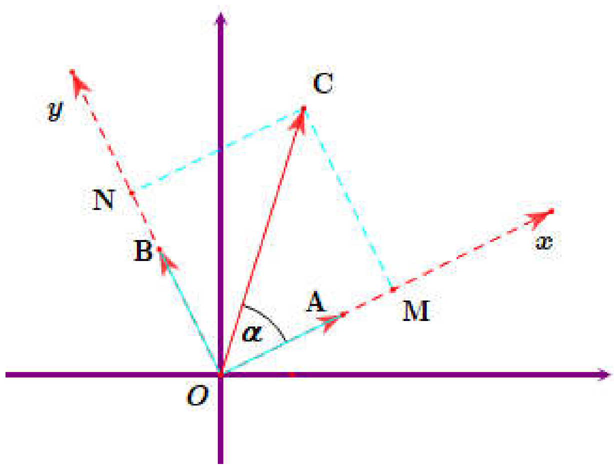
a) Trên mặt phẳng tọa độ, lấy các điểm A, B, C sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a};\overrightarrow{OB}=\vec{b};\overrightarrow{OC}=\vec{u}$

Trên hệ trục Oxy với các vectơ đơn vị $\vec{i}=\vec{a},\vec{j}=\vec{b}$, lấy M,N là hình chiếu của C trên Ox, Oy.

Gọi tọa độ của $\vec{u}$ là $(x;y)$. Đặt $\alpha=(\vec{u},\vec{a})$.

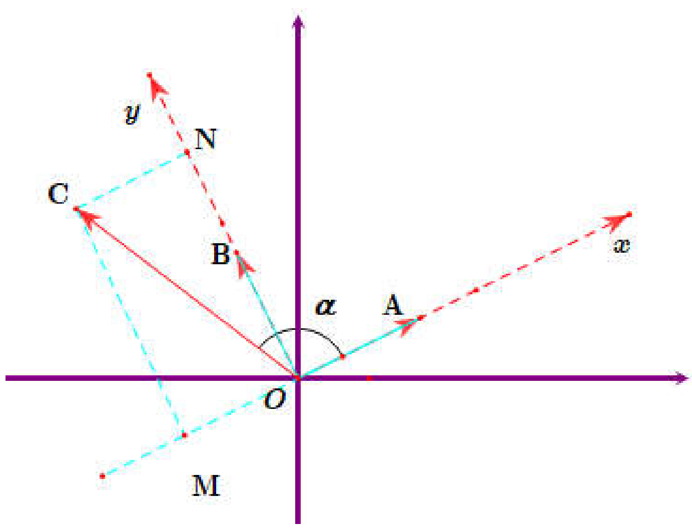
+) Nếu $0^\circ<\alpha<90^\circ$:

$x=OM=|\vec{u}|\cdot\cos\alpha=|\vec{u}|\cdot\cos\alpha\cdot|\vec{a}|=\vec{u}\cdot\vec{a}$



+) Nếu $90^\circ<\alpha<180^\circ$:

$x=-OM=-|\vec{u}|\cdot\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=|\vec{u}|\cdot\cos\alpha=\vec{u}\cdot\vec{a}$



Như vậy ta luôn có: $x=\vec{u}\cdot\vec{a}$

Chứng minh tương tự, ta có: $y=\vec{u}\cdot\vec{b}$

Vậy vectơ $\vec{u}$ có tọa độ là $(\vec{u}\cdot\vec{a};\vec{u}\cdot\vec{b})$

b) Trong hệ trục Oxy với các vectơ vectơ đơn vị $\vec{i}=\vec{a},\vec{j}=\vec{b}$, vectơ $\vec{u}$ có tọa độ là $(\vec{u}\cdot\vec{a};\vec{u}\cdot\vec{b})$

$\Rightarrow \vec{u}=(\vec{u}\cdot\vec{a})\cdot\vec{i}+(\vec{u}\cdot\vec{b})\cdot\vec{j} \Leftrightarrow \vec{u}=(\vec{u}\cdot\vec{a})\cdot\vec{a}+(\vec{u}\cdot\vec{b})\cdot\vec{b}$

Câu 15. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$.

Lời giải

$2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{CB}^2$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB^2+AC^2-BC^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Câu 16. Cho ba điểm phân biệt I,A,B và số thực $k\neq 1$ thoả mãn $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{IB}$. Chứng minh rằng với O là điểm bất kì ta có: $\overrightarrow{OI}=\left(\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{OA}-\left(\frac{k}{1-k}\right)\overrightarrow{OB}.$

Lời giải

$\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{IB}\Rightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OI})\Rightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OI}=k\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OI}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OI}-k\overrightarrow{OI}=(1-k)\overrightarrow{OI}\Rightarrow \overrightarrow{OI}=\left(\frac{1}{1-k}\right)\overrightarrow{OA}-\left(\frac{k}{1-k}\right)\overrightarrow{OB}$

Câu 17. Cho tam giác ABC có $AB=4, AC=5, \widehat{BAC}=120^\circ$. Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng BC, điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và chứng minh $AM\perp BD$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}=4\cdot 5\cdot\cos 120^\circ=-10.$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} \quad =\frac{1}{5}\cdot(-10)-\frac{1}{2}\cdot 4^2+\frac{1}{5}\cdot 5^2-\frac{1}{2}\cdot(-10)=0$. Suy ra $AM\perp BD$.

Câu 18. Cho hai vecto $\vec{a},\vec{b}$ và $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=5, (\vec{a},\vec{b})=135^\circ$.

Tính $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$.

Lời giải

$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}^2+4\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2=2\vec{a}^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2$

$=2|\vec{a}|^2+3|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})-2|\vec{b}|^2=2\cdot 4^2+3\cdot 4\cdot 5\cdot\cos 135^\circ-2\cdot 5^2$

$=-18-30\sqrt{2}.$

Câu 19. a) Chứng minh đẳng thức $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$ với $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ bất kì.

b) Cho $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$. Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$ và $(\vec{a},\vec{b})$.

Lời giải

a) Ta có: $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$.

b) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{7})^2-2^2-3^2\right]=-3$.

$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{-3}{2\cdot 3}=\frac{-1}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=120^\circ.$

Câu 20. Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AD, BE, CF. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

Lời giải

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)$

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{BC}^2\right),$

$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})\cdot(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}^2-\overrightarrow{CA}^2\right).$

Ta có: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{BC}^2\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}^2-\overrightarrow{CA}^2\right)=0.$

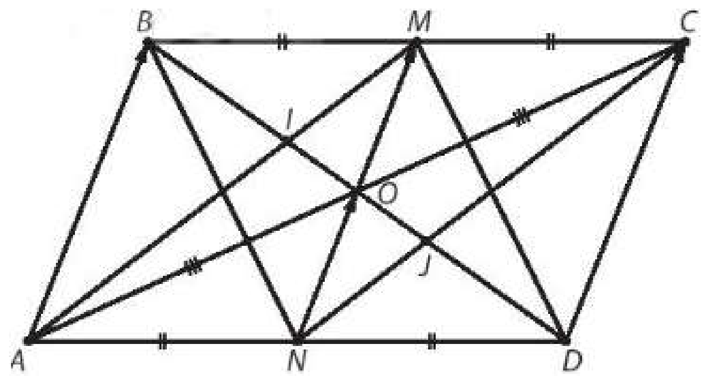
Câu 21. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của BC,AD. Gọi I,J lần lượt là giao điểm của BD với AM,CN. Xét các vectơ khác $\vec{0}$, có đầu mút lấy từ các điểm A,B,C,D,M,N,I,J,O.

a) Hãy chỉ ra những vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$; những vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh rằng $BI=IJ=JD$.

Lời giải

a) Những vecto bằng vectơ $\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{AB},\overrightarrow{NM},\overrightarrow{DC}$;



Những vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}:\overrightarrow{AB},\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NO},\overrightarrow{OM},\overrightarrow{DC}$.

b) Do $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm chung của AC và BD. Do M là trung điểm của BC nên I là trọng tâm của tam giác ABC, do N là trung điểm của DA nên J là trọng tâm của tam giác CDA.

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$. (1)

Do I là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BI}$. Từ đó và (1) suy ra $\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BI}$. (2)

Hoàn toàn tương tự, chứng minh được $\overrightarrow{DB}=3\overrightarrow{DJ}$. Từ đó và (2) suy ra $BI=IJ=JD$.

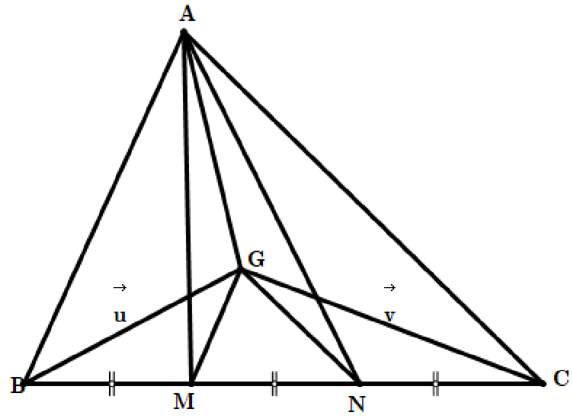
Câu 22. Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy các điểm M,N, không trùng với B và C sao cho $BM=MN=NC$.

a) Chứng minh rằng hai tam giác ABC và AMN có cùng trọng tâm.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Đặt $\overrightarrow{GB}=\vec{u}$ và $\overrightarrow{GC}=\vec{v}$. Hãy biểu thị các vectơ sau qua hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}:\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GM},\overrightarrow{GN}$.

Lời giải

a) Do M,N thuộc cạnh BC sao cho $BM=MN=NC$ nên $\overrightarrow{MB},\overrightarrow{NC}$ ngược hướng và cùng độ dài. Bởi vậy $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$. Từ đó, theo kết quả của Ví dụ 3, Bài 9, hai tam giác AMN,ABC có cùng trọng tâm.



b) Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB}$.

Từ đó, theo Nhận xét ở Vị dụ 2, Bài 9, thì $(1-(-2))\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{GC}-(-2)\overrightarrow{GB}$.

Suy ra $\overrightarrow{GM}=\frac{2}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$.

Tương tự, cũng được $\overrightarrow{GN}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{2}{3}\vec{v}$.

Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}$. và do đó $\overrightarrow{GA}=-\vec{u}-\vec{v}$.

Câu 23. Cho bốn điểm A,B,C,D trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0.$

Lời giải

HD. Biểu diễn các vectơ theo ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$.

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$.

Khai triển, giản ước, thu được điều phải chứng minh.

Câu 24. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2),\vec{b}=(3;-4),\vec{c}=(-5;3)$.

a) Tính các tích vô hướng $\vec{a}\cdot\vec{b},\vec{b}\cdot\vec{c},\vec{c}\cdot\vec{a}$

b) Tìm góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải

a) Đáp số: $\vec{a}\cdot\vec{b}=-5;\vec{b}\cdot\vec{c}=-27;\vec{c}\cdot\vec{a}=1$

b) Từ giả thiết suy ra $\vec{b}+\vec{c}=(-2;-1),|\vec{a}|=\sqrt{5},|\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{5}$.

Do $\vec{a}=(1;2),\vec{b}+\vec{c}=(-2;-1)$ nên $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=1\cdot(-2)+2\cdot(-1)=-4$.

Suy ra $\cos(\vec{a};\vec{b}+\vec{c})=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}+\vec{c}|}=\frac{-4}{5}$. Từ đó suy ra $(\vec{a};\vec{b}+\vec{c})=143^{\circ}7'48''$.

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2;1),B(-2;5)$ và $C(-5;2)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$

b) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông. Tính diện tích và chu vi của tam giác đó.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác BCAD là một hình bình hành.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{BA}=(2-(-2);1-5)=(4;-4)$ và

$\overrightarrow{BC}=(-5-(-2);2-5)=(-3;-3)$

b)

Ta có: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=4\cdot(-3)+(-4)\cdot(-3)=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ hay $\widehat{ABC} = 90^\circ$

Vậy tam giác ABC vuông tại B.

Lại có: $AB = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$;

$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$

Và $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5\sqrt{2}$ (do ΔABC vuông tại B).

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB.BC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 12$

Chu vi tam giác ABC là: $AB + BC + AC = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

c) Tọa độ của trọng tâm G là $\left(\frac{2+(-2)+(-5)}{3}; \frac{1+5+2}{3}\right) = \left(\frac{-5}{3}; \frac{8}{3}\right)$

d) Giả sử điểm D thỏa mãn BCAD là một hình bình hành có tọa độ là (a; b).

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-3; -3)$ và $\overrightarrow{AD} = (a-2; b-1)$

Vì BCAD là một hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow (a-2; b-1) = (-3; -3) \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=-3 \\ b-1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$

Vậy D có tọa độ $(-1$; -2)

Câu 26. Trong mặt phẳng Oxy, cho bốn điểm $A(2;1), B(1;4), C(4;5), D(5;2)$.

a. Chứng minh $ABCD$ là hình vuông.

b. Tìm tọa độ tâm I của hình vuông $ABCD$.

Lời giải

a. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1;3), \overrightarrow{DC} = (-1;3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Lại có: $\overrightarrow{AD} = (3;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = -1.3 + 3.1 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ hay $AB \perp AD$

$\Rightarrow$ Hình bình hành $ABCD$ là hình chữ nhật.

Ta có: $AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow AB = AD \Rightarrow$ Hình chữ nhật $ABCD$ là hình vuông (đpcm).

b. Tâm của hình vuông $ABCD$ là trung điểm của $AC \Rightarrow I = \left(\frac{2+4}{2}; \frac{1+5}{2}\right) \Leftrightarrow I = (3;3)$

Vậy $I = (3;3)$.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;2), B(3;4), C(-1;-2)$ và $D(6;5)$.

a) Hãy tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$

b) Hãy giải thích tại sao các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương.

c) Giả sử E là điểm có tọa độ $(a;1)$. Tìm a để các vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE}$ cùng phương.

d) Với a tìm được, hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{AE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3-1; 4-2) = (2;2)$ và

$\overrightarrow{CD} = (6-(-1); 5-(-2)) = (7;7)$

b) Dễ thấy: $(2;2) = \frac{2}{7} \cdot (7;7) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{7} \cdot \overrightarrow{CD}$

Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương.

c) Ta có: $\overrightarrow{AC} = (-1-1; -2-2) = (-2;-4)$ và

$\overrightarrow{BE} = (a-3; 1-4) = (a-3; -3)$

Để $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE}$ cùng phương thì $\frac{a-3}{-2}=\frac{-3}{-4} \Leftrightarrow a-3=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}$

Vậy $a=\frac{3}{2}$ hay $E\left(\frac{3}{2};1\right)$ thì hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE}$ cùng phương

d)

Cách 1:

Ta có: $\overrightarrow{BE}=\left(\frac{3}{2}-3;-3\right)=\left(-\frac{3}{2};-3\right); \overrightarrow{AC}=(-2;-4)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BE}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$ (quy tắc cộng)

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$

Cách 2:

Giả sử $\overrightarrow{AE}=m\cdot\overrightarrow{AB}+n\cdot\overrightarrow{AC}(*)$

Ta có: $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{1}{2};-1\right), m, \overrightarrow{AB}=m(2;2)=(2m;2m)$,

$n\cdot\overrightarrow{AC}=n(-2;-4)=(-2n;-4n)$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2};-1\right)=(2m;2m)+(-2n;-4n)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2};-1\right)=(2m-2n;2m-4n)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{2}=2m-2n\\ -1=2m-4n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=1\\ n=\frac{3}{4}\end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AC}$

Câu 28. Cho tam giác ABC có $AB=4, AC=5$ và $\widehat{CAB}=60^{\circ}$

a) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

b) Lấy các điểm M,N thoả mãn $2\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NB}+x\overrightarrow{NC}=\vec{0}(x\neq -1)$. Xác định x sao cho AN vuông góc với BM.

Lời giải

a) Gợi ý: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

Đáp số: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=10, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-6$.

b) Do $2\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ nên $2(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA})+3(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM})=\vec{0}$. Suy ra

$\overrightarrow{BM}=3\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BA}=3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+2\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ (1)

Do $\overrightarrow{NB}+x\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ nên $(1+x)\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$. Từ đó và (1) suy ra $(1+x)\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=(\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC})\cdot(-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}))$

$=-\overrightarrow{AB}^2+3x\overrightarrow{AC}^2+(3-x)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-16+75x+10(3-x).$

Từ đó suy ra $AN\perp BM$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BM}=0$. Điều này tương đương với $-16+75x+10(3-x)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{14}{65}$.

Vậy với $x=-\frac{14}{65}$ thì $AN\perp BM$.

Câu 29. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB, CD. Lấy P thuộc đoạn DM và Q thuộc đoạn BN sao cho $DP=2PM, BQ=xQN$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ và $\overrightarrow{AD}=\vec{v}$.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}$ qua hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

b) Tìm x để A,P,Q thẳng hàng.

Lời giải

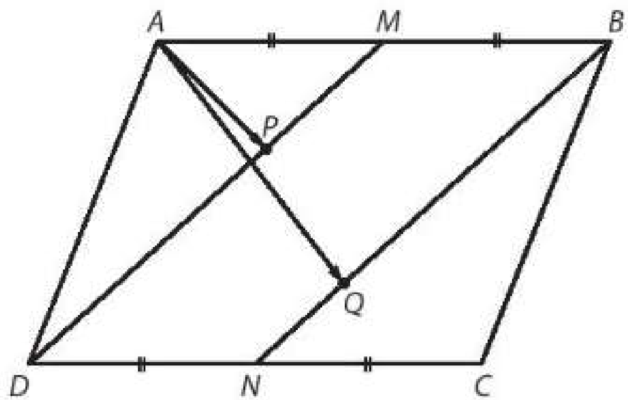
a) Do P thuộc đoạn DM sao cho $DP=2PM$ nên $\overrightarrow{PD}=-2\overrightarrow{PM}$. Suy ra $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$. Từ đó, do M là trung điểm của AB, nên $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ tức là $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}$. (1)

Do Q thuộc đoạn BN sao cho $BQ=xQN$ nên $\overrightarrow{QB}=-x\overrightarrow{QN}$. Suy ra

$$(1+x)\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+x(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN})=\left(1+\frac{x}{2}\right)\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AD}$$

hay $\overrightarrow{AQ}=\frac{(2+x)}{2(1+x)}\vec{u}+\frac{x}{1+x}\vec{V}$. (2)

b) Từ (1) và (2) suy ra A,P,Q thẳng hàng khi và chỉ khi



$$\frac{2+x}{2(1+x)}:\frac{1}{3}=\frac{x}{1+x}:\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{2+x}{2(1+x)}=\frac{x}{1+x}\Leftrightarrow x=2.$$

Vậy với $x=2$ thì A,P,Q thẳng hàng.

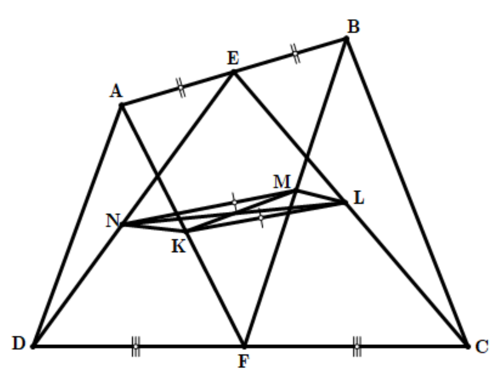
Câu 30. Cho tứ giác lồi $ABCD$, không có hai cạnh nào song song. Gọi E,F theo thứ tự là trung điểm AB,CD. Gọi K,L,M,N lần lượt là trung điểm của AF, CE,BF,DE.

a) Chứng minh rằng tứ giác $KLMN$ là một hình bình hành.

b) Gọi I là giao điểm của KM,LN. Chứng minh rằng E,I,F thẳng hàng.

Lời giải

a) Do E là trung điểm của AB,F là trung điềm của CD nên $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB},\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{DF}$.



Do K là trung điểm của AF,L là trung điểm của CE,M là trung điểm của BF, N là trung điểm của DE, nên theo kết quả của bài tập 4.12, Toán 10, Tập một, ta có

$2\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{NM}$

Suy ra $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$ và do đó $KLMN$ là một hình bình hành.

b) Do KLMN là hình bình hành và I là giao điểm của KM, LN nên I là trung điểm chung của KM, LN.

Suy ra $2\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{EL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EF}$. Do đó E,I,F thẳng hàng, hơn nữa I là trung điểm của EF.

Câu 31. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{DAB}=\widehat{ABC}=90^{\circ}, BC=1, AB=2$ và $AD=3$. Gọi M là trung điểm của AB.

a) Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{CM},\overrightarrow{CD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Gọi N là trung điểm CD, G là trọng tâm tam giác MCD, và I là điểm thuộc cạnh CD sao cho $9IC=5ID$. Chứng minh rằng A,G,I thẳng hàng.

c) Tính độ dài các đoạn thẳng AI và BI.

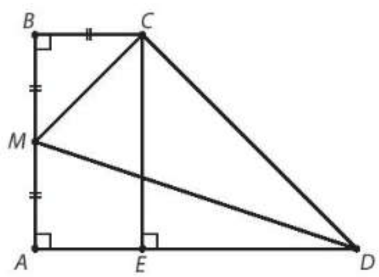
Lời giải

a) Do M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.(1)

Gọi E là hình chiếu vuông góc của C trên AD. Khi đó tứ giác $ABCE$ là một hình chữ nhật.

Suy ra $EA=CB=1=\frac{1}{3}DA$ và do đó $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{EA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. (2)

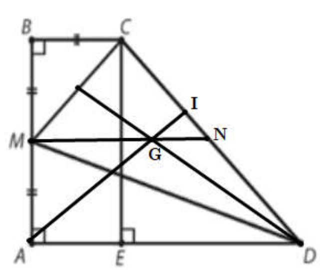
Từ (1), (2), theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Theo cách xác định điểm E thì $\overrightarrow{ED}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. Từ đó, theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

b) Do G là trọng tâm của tam giác MCD nên

$3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})+\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}$ (3)



Do I thuộc cạnh CD nên hai vectơ $\overrightarrow{IC}$ và $\overrightarrow{ID}$ ngược hướng.

Từ đó, do $9IC=5ID$ nên $9\overrightarrow{IC}+5\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{0}$. Suy ra $14\overrightarrow{AI}=9\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AD}=9\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{AD}$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $14\overrightarrow{AI}=6\cdot 3\overrightarrow{AG}=18\overrightarrow{AG}$ và do đó A,G,I thẳng hàng.

c) Từ (4), để ý rằng $AD\perp AB$, suy ra

$196AI^2=(14\overrightarrow{AI})^2=(9\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{AD})^2=81\overrightarrow{AB}^2+2\cdot(9\overrightarrow{AB})\cdot(8\overrightarrow{AD})+64\overrightarrow{AD}^2$

$= 81AB^2 + 64AD^2 = 81\cdot 4 + 64\cdot 9 = 900.$

Suy ra $AI = \dfrac{15}{7}$

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = -\dfrac{5}{14}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AD}$.

Suy ra $BI^2 = \left(-\dfrac{5}{14}\overrightarrow{AB} + \dfrac{8}{14}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \dfrac{25}{196}\cdot 4 + \dfrac{64}{196}\cdot 9 = \dfrac{169}{49}$ và do đó $BI = \dfrac{13}{7}$.

Câu 32. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(-2;1), B(1;4)$ và $C(5;-2)$.

a) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC.

Lời giải

a) Do $A(-2;1), B(1;4), C(5;-2)$ nên $\overrightarrow{AB} = (3;3), \overrightarrow{AC} = (7;-3)$. Do $\dfrac{7}{3} \neq \dfrac{-3}{3}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương, suy ra A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

Gọi $G(x;y)$ là trọng tâm của tam giác. Thế thì $\begin{cases} x = \dfrac{-2+1+5}{3} = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{1+4+(-2)}{3} = 1 \end{cases}$.

Vậy trọng tâm của tam giác là $G\left(\dfrac{4}{3};1\right)$.

b) Gọi $H(x;y)$ là trực tâm của tam giác ABC.

Khi đó $\overrightarrow{CH} = (x-5; y+2), \overrightarrow{BH} = (x-1; y-4)$.

Do H là trực tâm, nên $\overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$. Từ đó thu được

$$\begin{cases} 3(x-5) + 3(y+2) = 0 \\ 7(x-1) - 3(y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{13}{5} \end{cases}$$

Vậy $H\left(\dfrac{2}{5};\dfrac{13}{5}\right)$.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Theo kết quả bài tập 4.15, ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IH}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{OI} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{OG} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{OH}$ và do đó $I\left(\dfrac{9}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

Nhận xét

- Ta có thể tìm tọ độ điểm I nhờ vào dấu hiệu $IA = IB = IC$.
- Việc sử dụng đẳng thức $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IH}$ hay $\overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG}$ cho phép ta thu được toạ độ của điểm còn lại khi biết toạ độ của hai trong ba điểm G, H, I.

Câu 33. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho ba điểm $A(2;-1), B(5;3)$ và $C(-2;9)$.

a) Tìm điểm D thuộc trục hoành sao cho B, C, D thẳng hàng.

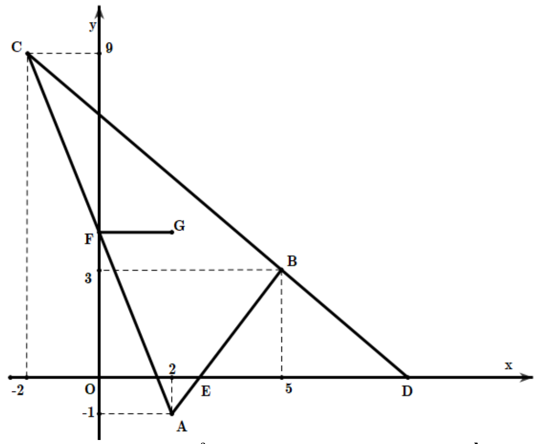
b) Tìm điểm E thuộc trục hoành sao cho $EA + EB$ nhỏ nhất.

c) Tìm điểm F thuộc trục tung sao cho vectơ $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC}$ có độ dài ngắn nhất.

Lời giải

a) Xét điểm $D(d;0)\in Ox$. Ta có $\overrightarrow{BD}=(d-5;-3), \overrightarrow{CD}=(d+2;-9)$. Từ đó B, C, D thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CD}$ cùng phương, tức là $(d-5):(-3)=(d+2):(-9)$. Từ đó tìm được $d=\frac{17}{2}$. Vậy $D\left(\frac{17}{2};0\right)$ là điểm cần tìm.

b) Từ giả thiết suy ra A và B nằm về hai phía của trục hoành. Bởi vậy, với mỗi điểm $E\in Ox$ ta có $EA+EB\ge AB$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi E là giao điểm của AB với Ox. Bằng lập luận như ở phần a), tìm được $E\left(\frac{11}{4};0\right)$.



c) Giả sử tìm được điểm F thoả mãn yêu cầu bài toán. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó $G\left(\frac{5}{3};\frac{11}{3}\right)$. (1)

Do $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=3\overrightarrow{FG}$ nên $|\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\overrightarrow{FG}$ có độ dài nhỏ nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi F là hình chiếu vuông góc của G trên Oy. Từ đó và (1) suy ra $F\left(0;\frac{11}{3}\right)$.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác MNP có $M(2;1); N(-1;3); P(4;-2)$

a. Tìm tọa độ của các vecto $\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$

b. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$

c. Tính độ dài các đoạn thẳng MN, MP

d. Tính $\cos\widehat{NMP}$

e. Tìm tọa độ trung điểm I của NP và trọng tâm G của tam giác MNP.

Lời giải

a.

- $\overrightarrow{OM}=(2;1)$
- $\overrightarrow{MN}=(-3;2)$
- $\overrightarrow{MP}=(2;1)$

b.

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=(-3)\cdot 2+2\cdot 1=-3$

c.

- $MN=\sqrt{(-3)^2+2^2}=\sqrt{13}$
- $MP=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

d.

$$\cos\widehat{NMP}=\cos(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})\frac{|\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{MP}|}=\frac{|(-3)\cdot 2+2\cdot 1|}{\sqrt{(-3)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{65}}{65}$$

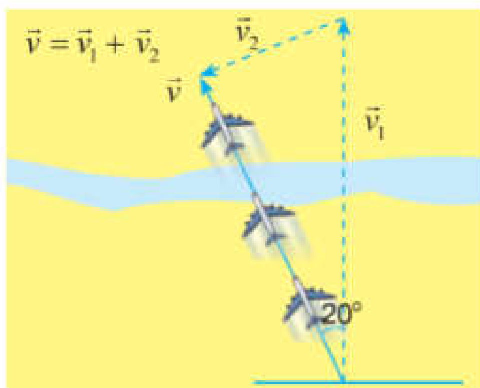
e. Vì I là trung điểm của NP

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_N + x_P}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_I = \dfrac{y_N + y_P}{2} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{3}\right)$$

Vì G là trọng tâm của tam giác MNP

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_M + x_N + x_P}{3} = \dfrac{5}{3} \\ y_G = \dfrac{y_M + y_N + y_P}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{5}{3};2\right)$$

Câu 35. Một chiếc máy bay được biết là đang bay về phía Bắc với tốc độ $45m/s$, mặc dù vận tốc của nó so với mặt đất là $38m/s$ theo hướng nghiêng một góc 20° về phía tây bắc (hình). Tính tốc độ của gió



Lời giải

Từ giả thiết ta có:

+) Vectơ tương ứng với vận tốc máy bay là vectơ $\overrightarrow{v_1}$

+) Vectơ tương ứng với vận tốc máy bay so với mặt đất là vectơ $\vec{v}$

+) Vectơ tương ứng với vận tốc gió là vectơ $\overrightarrow{v_2}$

Ta có : $\left|\overrightarrow{v_1}\right| = 45; |\vec{v}| = 38; \left(\overrightarrow{v_1}, \vec{v}\right) = 20^\circ$

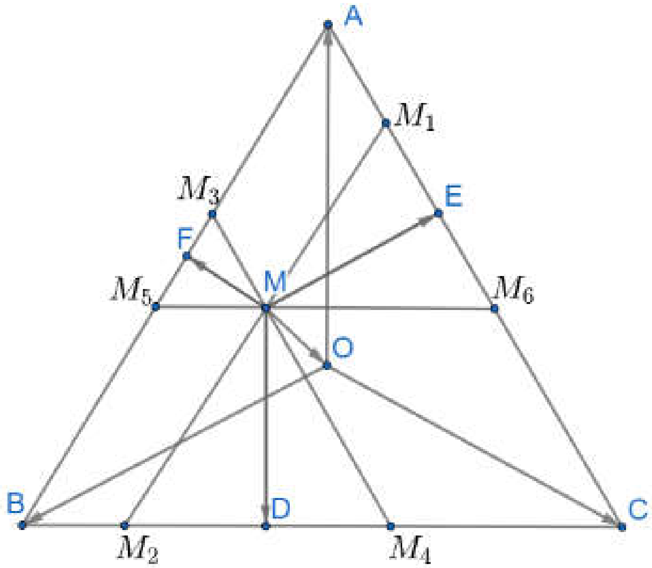
Áp dụng định lý cosin ta có:

$$\left|\overrightarrow{v_2}\right| = \sqrt{|\vec{v}|^2 + \left|\overrightarrow{v_1}\right|^2 - 2|\vec{v}|\cdot\left|\overrightarrow{v_1}\right|\cdot\cos\left(\vec{v}, \overrightarrow{v_1}\right)} = \sqrt{38^2 + 45^2 - 2\cdot 38\cdot 45\cdot\cos 20^\circ} \simeq 16(m/s)$$

Vậy tốc độ của gió gần bằng $16m/s$

Câu 36. Cho tam giác đều ABC có O là trọng tâm và M là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M đến BC, AC, AB. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

Lời giải



$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OF})$

Qua M kẻ các đường thẳng

$M_1M_2\,//\,AB;M_3M_4\,//\,AC;M_5M_6\,//\,BC$

Từ đó ta có:

$M\widehat{M_1M_6}=M\widehat{M_6M_1}=M\widehat{M_4M_2}=M\widehat{M_2M_4}=\widehat{MM_3M_5}$

Suy ra các tam giác $\Delta MM_3M_5,\Delta MM_1M_6,\Delta MM_2M_4$ đều

Áp dụng tính chất trung tuyến $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ (với M là trung điểm của BC) ta có:

$\overrightarrow{ME}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_6}\right);\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_2}+\overrightarrow{MM_4}\right)\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_3}+\overrightarrow{MM_5}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_2}+\overrightarrow{MM_4}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_6}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_3}+\overrightarrow{MM_5}\right)$

Ta có: các tứ giác $AM_3MM_1;CM_4MM_6;BM_2MM_5$ là hình bình hành

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có

$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_2}+\overrightarrow{MM_4}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_6}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_3}+\overrightarrow{MM_5}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{MM_3}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_2}+\overrightarrow{MM_5}\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MM_4}+\overrightarrow{MM_6}\right)$

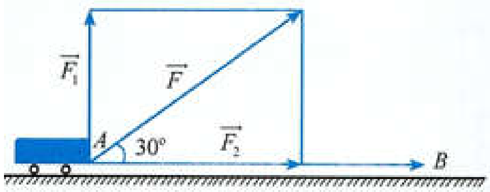
$=\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$

$=\frac{1}{2}((\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}))$

$=\frac{1}{2}(3\overrightarrow{MO}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}))=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$ (đpcm)

Vậy $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

Câu 37. Một xe goòng được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn là là $50\,N$, di chuyển theo quãng đường từ A đến B có chiều dài là $200\,m$. Cho biết góc giữa lực $\vec{F}$ và $\overrightarrow{AB}$ là 30° và $\vec{F}$ được phân tích thành 2 lực $\vec{F_1},\vec{F_2}$ (hình). Tính công sinh ra bởi các lực $\vec{F},\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$.



Lời giải

Ta xác định được các độ lớn:

$|\vec{F}| = 50, \left|\vec{F_2}\right| = |\vec{F}|\cos 30^\circ = 50 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}, \left|\vec{F_1}\right| = |\vec{F}| \cdot \sin 30^\circ = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25$ (N)

Dựa vào hình vẽ ta có:

$(\vec{F}, \vec{d}) = 30^\circ, \left(\vec{F_1}, \vec{d}\right) = 90^\circ, \left(\vec{F_2}, \vec{d}\right) = 0^\circ$

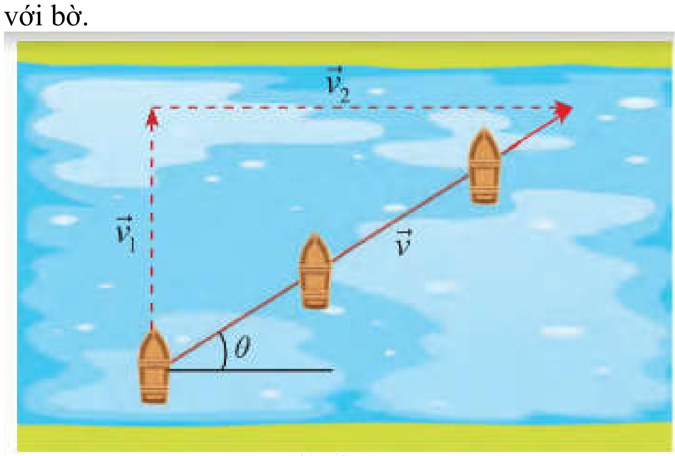
Áp dụng công thức tính công sinh ra bởi lực $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ ta có:

$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}||\vec{d}|\cos(\vec{F}, \vec{d}) = 50 \cdot 200 \cdot \cos 30^\circ = 5000(J)$

$A_1 = \vec{F_1} \cdot \vec{d} = \left|\vec{F_1}\right||\vec{d}|\cos\left(\vec{F_1}, \vec{d}\right) = 25 \cdot 200 \cdot \cos 90^\circ = 0(J)$

$A_2 = \vec{F_2} \cdot \vec{d} = \left|\vec{F_2}\right||\vec{d}|\cos\left(\vec{F_2}, \vec{d}\right) = 25\sqrt{3} \cdot 200 \cdot \cos 0^\circ = 5000\sqrt{3}(J)$

Câu 38. Một chiếc thuyền cố gắng đi thẳng qua một con sông với tốc độ $0,75\, m/s$. Tuy nhiên dòng chảy của nước trên con sông đó chạy với tốc độ $1,20\, m/s$ về hướng bên phải. Gọi $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v}$ lần lượt là vận tốc của thuyền so với dòng nước, vận tốc của dòng nước so với bờ và vận tốc của thuyền so với bờ.



a) Tính độ dài của các vectơ $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v}$

b) Tốc độ dịch chuyển của thuyền so với bờ là bao nhiêu?

c) Hướng di chuyển của thuyền lệch một góc bao nhiêu so với bờ?

Lời giải

a) Ta có:

$\left|\vec{v_1}\right| = 0,75; \left|\vec{v_2}\right| = 1,20$

Dựa vào hình vẽ ta thấy $\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$ và $\vec{v_1} \perp \vec{v_2}$

Áp dụng tính chất trong tam giác vuông ta có:

$|\vec{v}|^2 = \left|\vec{v_1}\right|^2 + \left|\vec{v_2}\right|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\left|\vec{v_1}\right|^2 + \left|\vec{v_2}\right|^2} = \sqrt{0,75^2 + 1,2^2} = \frac{3\sqrt{89}}{20}$

b) Tốc độ dịch chuyển của thuyền so với bờ là $\frac{3\sqrt{89}}{20} m/s$

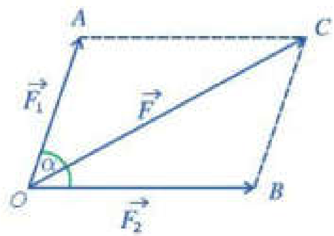
c) Nước có hướng dichuyển song song với bờ nên hướng di chuyển của thuyền so với bờ tương đương với hướng di chuyển của thuyền so với nước

Suy ra góc lệch giữa hướng di chuyển của thuyền và bờ là $\left(\vec{v}, \vec{v_2}\right)$

Ta có: $\sin\left(\vec{v},\overrightarrow{v_2}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{v_1}\right|}{|\vec{v}|}=\dfrac{0,75}{\dfrac{3\sqrt{29}}{20}}=\dfrac{5\sqrt{89}}{89}\Rightarrow\left(\vec{v},\overrightarrow{v_2}\right)\simeq 32^{\circ}$

Vậy hướng di chuyển của thuyền lệch một góc 32° so với bờ

Câu 39. Hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ cho trước cùng tác dụng lên một vật tại điểm O và tạo với nhau một góc $\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)=\alpha$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C (Hình). Lập công thức tính cường độ của hợp lực $\vec{F}$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C (giả sử chỉ có đúng hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ làm cho vật di chuyển).



Lời giải

Ta thấy, AOBC là hình bình hành nên $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

Suy ra: $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ (1).

Ta cần tính cường độ của hợp lực $\vec{F}$ hay chính là tính $|\vec{F}|$.

Từ (1) suy ra $(\vec{F})^2=\left(\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}\right)^2$.

$\Leftrightarrow \vec{F}^2=\overrightarrow{F_1}^2+2\cdot\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_2}^2 \Leftrightarrow |\vec{F}|^2=\left|\overrightarrow{F_1}\right|^2+2\cdot\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2}+\left|\overrightarrow{F_2}\right|^2$ (2)

Ta lại có: $\overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{F_2}=\left|\overrightarrow{F_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}\right)=\left|\overrightarrow{F_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cdot\cos\alpha$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra: $|\vec{F}|^2=\left|\overrightarrow{F_1}\right|^2+2\cdot\left|\overrightarrow{F_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cdot\cos\alpha+\left|\overrightarrow{F_2}\right|^2=\left|\overrightarrow{F_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cdot\cos\alpha$

$\Rightarrow|\vec{F}|=\sqrt{\left|\overrightarrow{F_1}\right|^2+2\cdot\left|\overrightarrow{F_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cdot\cos\alpha+\left|\overrightarrow{F_2}\right|^2}=\left|\overrightarrow{F_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cdot\cos\alpha$

Vậy công thức tính cường độ của hợp lực $\vec{F}$ làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến C là $|\vec{F}|=\sqrt{\left|\overrightarrow{F_1}\right|^2+2\cdot\left|\overrightarrow{F_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{F_2}\right|\cdot\cos\alpha+\left|\overrightarrow{F_2}\right|^2}$.

Câu 40. Cho tứ giác $ABCD$. M là điểm thay đổi trong mặt phẳng thoả mãn $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})=0$. Chứng minh rằng điểm M luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Lời giải

Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MP},\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MQ}$.

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})=0\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MP}\cdot 2\overrightarrow{MQ}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$

Nếu M không trùng với P và Q thì $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0\Leftrightarrow MP\perp MQ$. Do đó M thuộc đường tròn đường kính PQ.

Nếu M trùng với P hoặc Q thì hiển nhiên M thuộc đường tròn đường kính PQ.

Vậy M luôn thuộc đường tròn cố định có đường kính là PQ.

Câu 41. Cho tam giác ABC và đường thẳng d không có điểm chung với bất kì cạnh nào của tam giác. M là điểm thay đổi trên đường thẳng d. Xác định vị trí của M sao cho biểu thức $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có: $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=|3\overrightarrow{MG}|=3GM$.

GM đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của G lên đường thẳng d.

Vậy biểu thức $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của G lên đường thẳng d.

Câu 42. Trên sông, một cano chuyển động thẳng đều theo hướng $S15^{\circ}E$ với vận tốc có độ lớn bằng $20\,km/h$. Tính vận tốc riêng của cano, biết rằng, nước trên sông chảy về hướng đông với vận tốc có độ lớn bằng 3 km/h.

Lời giải

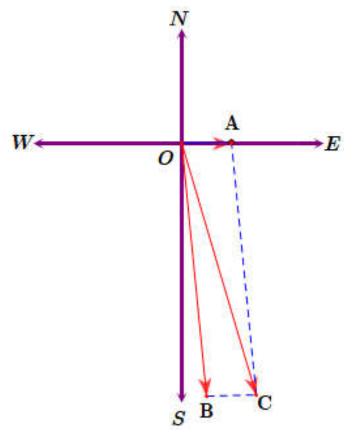
Lấy các điểm: A, C sao cho:

Vectơ vận tốc dòng nước $\overrightarrow{v_n}=\overrightarrow{OA}$

Vectơ vận tốc chuyển động $\overrightarrow{v_{\text{cano}}}=\overrightarrow{OC}$

Ta có: $\overrightarrow{v_{\text{cano}}}=\overrightarrow{v_n}+\vec{v}$, với $\vec{v}$ là vectơ vận tốc riêng của cano.

Gọi B là điểm sao cho $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ thì $OACB$ là hình bình hành.



Vì tàu chuyển động theo hướng $S15^{\circ}E$ nên vectơ $\overrightarrow{OC}$ tạo với hướng Nam (tia OS) góc 15° và tạo với hướng Đông (tia OE) góc $90^{\circ}-15^{\circ}=75^{\circ}$.

Mà nước trên sông chảy về hướng đông nên vectơ $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{OE}$

Do đó góc tạo bởi vectơ $\overrightarrow{OC}$ và vectơ $\overrightarrow{OA}$ là 75°

Xét tam giác OAC ta có:

$OA=\left|\overrightarrow{v_n}\right|=3; OC=\left|\overrightarrow{v_{\text{cano}}}\right|=20$ và $\widehat{AOC}=75^{\circ}$

Áp dụng định lí cosin tại đỉnh O ta được:

$AC^2=OA^2+OC^2-2.OA\cdot OC\cdot\cos\widehat{AOC}\Leftrightarrow AC^2=3^2+20^2-2.3.20\cdot\cos 75^{\circ}\approx 378\Leftrightarrow OB=AC\approx 19,44$

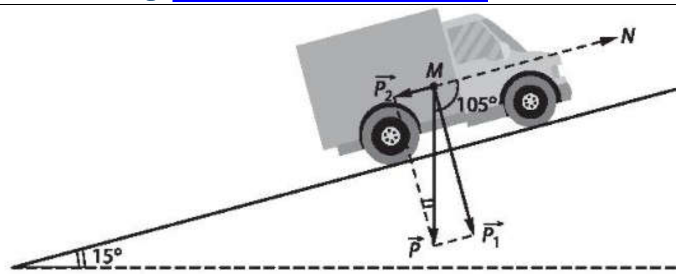
Vậy vận tốc riêng của cano là $19,44\,km/h$

Câu 43. Một ô tô có khối lượng 2,5 tấn chạy từ chân lên đỉnh một con dốc thẳng. Tính công của trọng lực tác động lên xe, biết dốc dài 50 m và nghiêng 15° so với phương nằm ngang (trong tính toán, lấy gia tốc trọng trường bằng $10\,m/s^2$)

Lời giải

Trọng lực của ô tô có độ lớn bằng $|\vec{P}|=2500\times 10=25000(N)$.

Trọng lực $\vec{P}$ của ô tô hợp với hướng chuyển dời $\overrightarrow{MN}$ một góc $\alpha=90^{\circ}+15^{\circ}=105^{\circ}$. Trọng lực $\vec{P}$ được phân tích thành hai thành phần $\overrightarrow{P_1}$ và $\overrightarrow{P_2}:\vec{P}=\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{P_2}$, trong đó $\overrightarrow{P_1}$ có phương vuông góc với mặt dốc, $\overrightarrow{P_2}$ có phương song song với mặt dốc



Ta nhận thấy rằng, $\overrightarrow{P_1}$ không có tác dụng đối với chuyển dời $\overrightarrow{MN}$ của xe, còn $\overrightarrow{P_2}$ ngược hướng với $\overrightarrow{MN}$. Do đó, công của trọng lực tác động lên xe bằng

$A = \vec{P} \cdot \overrightarrow{MN} = |\vec{P}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos(\vec{P} \cdot \overrightarrow{MN}) = 25000 \cdot 50 \cdot \cos 105^\circ \approx -323524(J)$

Nhận xét. Cũng có thể tính công A nhờ định lí chiếu (xem mục Nhận xét sau Ví dụ 2, Bài 11) như sau:

$A = \vec{P} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{P_2} \cdot \overrightarrow{MN} = \left|\overrightarrow{P_2}\right| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos 180^\circ = -\left(|\vec{P}| \cdot \sin 15^\circ\right) \cdot 50 \approx -323524(J)$