

BÀI 5. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

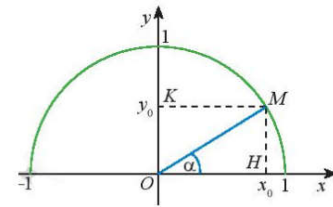
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Giá trị lượng giác

Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Gọi $(x_0; y_0)$ là toạ độ điểm M , ta có:

- Tung độ y_0 của M là **sin** của góc α , kí hiệu là $\sin \alpha = y_0$;
- Hoành độ x_0 của M là **côsin** của góc α , kí hiệu là $\cos \alpha = x_0$;
- Tỉ số $\frac{y_0}{x_0}$ ($x_0 \neq 0$) là **tang** của góc α , kí hiệu là $\tan \alpha = \frac{y_0}{x_0}$;
- Tỉ số $\frac{x_0}{y_0}$ ($y_0 \neq 0$) là **côtang** của góc α , kí hiệu là $\cot \alpha = \frac{x_0}{y_0}$.

Các số $\sin \alpha, \cos \alpha, \tan \alpha, \cot \alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc α .



2. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

- Mỗi liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha;$$

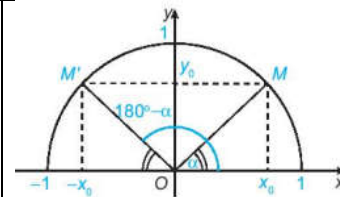
$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha; \quad \cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha.$$

- Mỗi liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha \quad (\alpha \neq 90^\circ);$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha \quad (0^\circ < \alpha < 180^\circ).$$



3. Một số đẳng thức lượng giác

Cho góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$). Khi đó:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ); \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 90^\circ, \alpha \neq 180^\circ)$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ); \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 180^\circ)$$

4. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

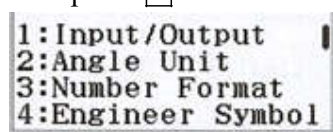
Dưới đây là bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt.

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Giá trị lượng giác									
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	

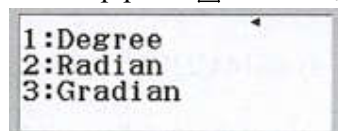
Chú ý: Trong bảng, kí hiệu "||" để chỉ giá trị lượng giác không xác định.

5. Sử dụng máy tính cầm tay để tính giá trị lượng giác của một góc

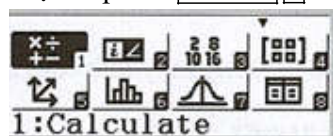
- Sau khi mở máy, ấn các phím **SHIFT** **MENU** để màn hình hiện lên bảng lựa chọn.
- Ấn phím **2** để vào chế độ cài đặt đơn vị đo góc.



- Ấn tiếp phím **1** để xác định đơn vị đo góc là “độ”.



- Lại ấn phím **MENU** **1** để vào chế độ tính toán.



B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1: Xác định giá trị lượng giác của góc đặc biệt

Phương pháp giải.

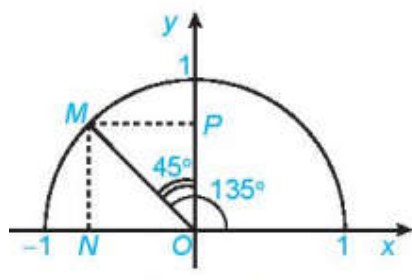
- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc;
- Sử dụng mối quan hệ giữa hai góc phụ nhau, bù nhau.
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt;
- Sử dụng các hệ thức lượng cơ bản.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm các giá trị lượng giác của góc 135° .

Lời giải

Gọi M là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy .



Vì $\widehat{XOM} = 135^\circ$ nên $\widehat{MON} = 45^\circ, \widehat{MOP} = 45^\circ$. Vậy các tam giác MON, MOP là vuông cân với cạnh huyền $OM = 1$. Từ đó, ta có $ON = OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mặt khác, điểm M nằm bên trái trục tung nên có tọa độ là $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Theo định nghĩa, ta có:

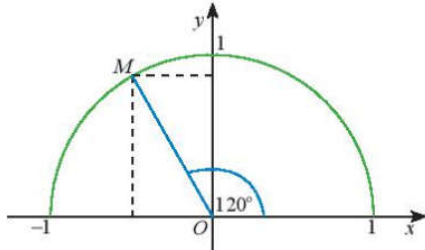
$$\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\tan 135^\circ = -1; \quad \cot 135^\circ = -1.$$

Câu 2. Tìm các giá trị lượng giác của góc 120° .

Lời giải

Lấy điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 120^\circ$.



Ta có $\widehat{MOy} = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$.

Ta tính được tọa độ điểm M là $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Vậy theo định nghĩa ta có:

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}; \quad \cot 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 3. Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của biểu thức sau:

$$T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos 55^\circ + \cos 165^\circ - \cos 180^\circ.$$

Lời giải

$$T = \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \cos(90^\circ - 35^\circ) + \cos(180^\circ - 15^\circ) + 1$$

$$= \cos 15^\circ - \sin 35^\circ + \sin 35^\circ - \cos 15^\circ + 1 = 1$$

Câu 4. Cho biết $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Tính $\sin 150^\circ; \cos 135^\circ; \tan 120^\circ$.

Lời giải

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \tan 120^\circ = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}.$$

Câu 5. Tính các giá trị lượng giác của các góc $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$.

Lời giải

Do các góc $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ tương ứng bù với các góc $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ nên từ bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt, ta cũng có bảng các giá trị lượng giác sau:

	120°	135°	150°
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos \alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan \alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot \alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Câu 6. Tính giá trị của $T = 4 \cos 60^\circ + 2 \sin 135^\circ + 3 \cot 120^\circ$.

Lời giải

$$T = 4 \cos 60^\circ + 2 \sin 135^\circ + 3 \cot 120^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Câu 7. Chứng minh rằng:

- a) $\sin 138^\circ = \sin 42^\circ$;
- b) $\tan 125^\circ = -\cot 35^\circ$.

Lời giải

- a) $\sin 138^\circ = \sin(180^\circ - 138^\circ) = \sin 42^\circ$.
- b) $\tan 125^\circ = -\tan(180^\circ - 125^\circ) = -\tan 55^\circ = -\cot(90^\circ - 55^\circ) = -\cot 35^\circ$.

Câu 8. Chứng minh các hệ thức sau:

- a) $\sin 20^\circ = \sin 160^\circ$
- b) $\cos 50^\circ = -\cos 130^\circ$.

Lời giải

- a) $\sin 20^\circ = \sin(180^\circ - 160^\circ) = \sin 160^\circ$
- b) $\cos 50^\circ = \cos(180^\circ - 130^\circ) = -\cos 130^\circ$

Câu 9. Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $(2 \sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3 \tan 150^\circ) \cdot (\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$;
- b) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$;
- c) $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$.

Chú ý. $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2$, $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$, $\tan^2 \alpha = (\tan \alpha)^2$, $\cot^2 \alpha = (\cot \alpha)^2$.

Lời giải

$$a) (2 \sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3 \tan 150^\circ) \cdot (\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$$

$$\text{Đặt } A = (2 \sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3 \tan 150^\circ) \cdot (\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ; \cos 180^\circ = -\cos 0^\circ \\ \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = (2 \sin 30^\circ - \cos 45^\circ + 3 \tan 30^\circ) \cdot (-\cos 0^\circ - \cot 60^\circ)$$

Sử dụng bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có:

$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \cos 0^\circ = 1; \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \left(2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cdot \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow A &= -\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ \Leftrightarrow A &= -\frac{2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \\ \Leftrightarrow A &= -\frac{(2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{6} \\ \Leftrightarrow A &= -\frac{6 + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6} + 6\sqrt{3} + 6}{6} \\ \Leftrightarrow A &= -\frac{12 + 8\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}. \end{aligned}$$

$$b) \sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$$

$$\text{Đặt } B = \sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ \\ \cot 135^\circ = -\cot 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 120^\circ = \cos^2 60^\circ \\ \cot^2 135^\circ = \cot^2 45^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = \sin^2 90^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 45^\circ$$

Sử dụng bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có:

$$\begin{cases} \cos 0^\circ = 1; \cot 45^\circ = 1; \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \tan 60^\circ = \sqrt{3}; \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 - (\sqrt{3})^2 + 1^2$$

$$\Leftrightarrow B = 1 + \frac{1}{4} + 1 - 3 + 1 = \frac{1}{4}$$

$$c) \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$$

$$\text{Đặt } C = \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$$

Sử dụng bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Câu 10. Đơn giản các biểu thức sau:

$$a) \sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$$

$$b) 2 \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cot \alpha - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \tan \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha), \text{ với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Lời giải

$$a) \sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ \\ \cos 164^\circ = \cos(180^\circ - 16^\circ) = -\cos 16^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ = \sin 80^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ - \cos 16^\circ = 2 \sin 80^\circ.$$

$$b) 2 \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cot \alpha - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \tan \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha) \text{ với } 0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

Ta có:

$$\begin{cases} \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha \\ \cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha \end{cases} \quad (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2 \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cot \alpha - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \tan \alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha) \cdot \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cot \alpha - (-\cos \alpha) \cdot \tan \alpha \cdot (-\cot \alpha) \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cot \alpha - \cos \alpha \cdot \tan \alpha \cdot \cot \alpha \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha \cdot (\tan \alpha \cdot \cot \alpha) \\ &= 2 \cos \alpha - \cos \alpha = \cos \alpha. \end{aligned}$$

Câu 11. Không dùng máy tính, tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $A = \sin 45^\circ \cdot \cos 135^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 150^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 120^\circ$;
 b) $B = \tan 135^\circ + \cot 60^\circ \cdot \cot 30^\circ - \tan 60^\circ \cdot \tan 150^\circ$
 c) $C = 2 \sin 60^\circ \cdot \tan 150^\circ - \cos 180^\circ \cdot \cot 45^\circ$.

Lời giải

a) Ta thấy $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos 135^\circ$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin 150^\circ$ và $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^\circ$.

Từ đó suy ra $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$.

b) Do $\tan 135^\circ = -1$, $\cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot 30^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ nên

$$B = -1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.$$

c) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos 180^\circ = -1$ và $\cot 45^\circ = 1$. Suy ra

$$C = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - (-1) \cdot 1 = 0.$$

Chú ý. Nếu đề ý đến mối liên hệ giữa các góc có trong biểu thức, như các góc bù nhau, các góc phụ nhau, thì ta có thể giải bài toán theo cách sau:

a) Do $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$, $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ nên

$$\begin{aligned} A &= \sin 45^\circ \cdot (-\cos 45^\circ) + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1. \end{aligned}$$

b) Do $135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ nên

$$B = -1 + 1 - \tan 60^\circ \cdot (-\tan 30^\circ) = 1.$$

c) Do $150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ nên

$$C = 2 \sin 60^\circ \cdot (-\tan 30^\circ) - \cos 180^\circ \cdot \cot 45^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - (-1) \cdot 1 = 0.$$

Câu 12. Cho biết $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\tan 45^\circ = 1$. Sử dụng mối liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau, phụ nhau để tính giá trị của $E = 2 \cos 30^\circ + \sin 150^\circ + \tan 135^\circ$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\cos 30^\circ &= \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \tan 135^\circ \\ &= -\tan(180^\circ - 135^\circ) = -\tan 45^\circ = -1 \Rightarrow E = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Câu 13. Tính giá trị của các biểu thức:

- a) $A = \sin 45^\circ + 2 \sin 60^\circ + \tan 120^\circ + \cos 135^\circ$
 b) $B = \tan 45^\circ \cdot \cot 135^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 120^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 150^\circ$
 c) $C = \cos^2 5^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 45^\circ + \cos^2 65^\circ + \cos^2 85^\circ$
 d) $D = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ + 12 \sin^2 107^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$
 e) $E = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cot 148^\circ + \frac{5 \cot^2 108^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$.

Lời giải

- a) $A = 0$.
 b) $B = 0$.
 c) Do $5^\circ = 90^\circ - 85^\circ$, $25^\circ = 90^\circ - 65^\circ$, nên theo tính chất 4-a), ta có $\cos 5^\circ = \sin 85^\circ$, $\cos 25^\circ = \sin 65^\circ$.

Từ đó, ta được $C = (\sin^2 85^\circ + \cos^2 85^\circ) + (\sin^2 65^\circ + \cos^2 65^\circ) + \cos^2 45^\circ = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

- d) Do $73^\circ + 107^\circ = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$ nên theo hệ thức cơ bản, ta có:

$$\frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} + 12 \sin^2 107^\circ = 12(\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) = 12. \quad (1)$$

$$\tan 75^\circ \cdot \cot 105^\circ = \tan 75^\circ \cdot (-\cot 75^\circ) = -1. \quad (2)$$

Do $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ nên theo hệ thức cơ bản, ta có

$$\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ = \tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ = 1. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $D = 12 - 4 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 15$

- e) Do $148^\circ + 32^\circ = 108^\circ + 72^\circ = 180^\circ$ và $72^\circ + 18^\circ = 90^\circ$ nên

$$\begin{aligned}E &= 4 \tan 32^\circ \cdot (-\cot 32^\circ) \cdot \cos 60^\circ + 5(-\cot 72^\circ)^2 \cdot \cos^2 18^\circ + 5 \cos^2 18^\circ \\ &= 4 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot 1 = 3.\end{aligned}$$

Câu 14. Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính cầm tay):

- a) $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$
 b) $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$
 c) $C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$
 d) $D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$
 e) $E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cot 100^\circ$.

Lời giải

- a) $A = \cos 0^\circ + \cos 40^\circ + \cos 120^\circ + \cos 140^\circ$

Tra bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có: $\cos 0^\circ = 1$; $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

Lại có: $\cos 140^\circ = -\cos(180^\circ - 40^\circ) = -\cos 40^\circ \Rightarrow A = 1 + \cos 40^\circ + \left(-\frac{1}{2}\right) - \cos 40^\circ \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}$.

- b) $B = \sin 5^\circ + \sin 150^\circ - \sin 175^\circ + \sin 180^\circ$

Tra bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt, ta có: $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$; $\sin 180^\circ = 0$

$$\text{Lại có: } \sin 175^\circ = \sin(180^\circ - 175^\circ) = \sin 5^\circ \Rightarrow B = \sin 5^\circ + \frac{1}{2} - \sin 5^\circ + 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}.$$

$$\text{c) } C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \sin 75^\circ - \sin 55^\circ$$

$$\text{Ta có: } \sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \cos 15^\circ; \sin 55^\circ = \sin(90^\circ - 55^\circ) = \cos 35^\circ$$

$$\Rightarrow C = \cos 15^\circ + \cos 35^\circ - \cos 15^\circ - \cos 35^\circ \Leftrightarrow C = 0.$$

$$\text{d) } D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 115^\circ$$

$$\text{Ta có: } \tan 115^\circ = -\tan(180^\circ - 115^\circ) = -\tan 65^\circ$$

$$\text{Mà: } \tan 65^\circ = \cot(90^\circ - 65^\circ) = \cot 25^\circ \Rightarrow D = \tan 25^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \cot 25^\circ \Leftrightarrow D = \tan 45^\circ = 1$$

$$\text{e) } E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \cot 100^\circ$$

$$\text{Ta có: } \cot 100^\circ = -\cot(180^\circ - 100^\circ) = -\cot 80^\circ$$

$$\text{Mà: } \cot 80^\circ = \tan(90^\circ - 80^\circ) = \tan 10^\circ \Rightarrow E = \cot 10^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \tan 10^\circ \Leftrightarrow E = \cot 30^\circ = \sqrt{3}.$$

Câu 15. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sin 13^\circ \cdot \cos 131^\circ + \sin 167^\circ \cdot \cos 49^\circ$$

$$\text{b) } B = \cot 35^\circ \cdot \cot 65^\circ \cdot \cot 125^\circ \cdot \cot 155^\circ.$$

Lời giải

a) Ta có:

$$\cos 131^\circ = \cos(180^\circ - 49^\circ) = -\cos 49^\circ, \sin 167^\circ = \sin(180^\circ - 13^\circ) = \sin 13^\circ.$$

$$\text{Do đó, } A = -\sin 13^\circ \cdot \cos 49^\circ + \sin 13^\circ \cdot \cos 49^\circ = 0.$$

b) Ta

$$\cot 125^\circ = -\cot(180^\circ - 125^\circ) = -\cot 55^\circ = -\tan(90^\circ - 55^\circ) = -\tan 35^\circ,$$

$$\cot 155^\circ = -\cot(180^\circ - 155^\circ) = -\cot 25^\circ = -\tan(90^\circ - 25^\circ) = -\tan 65^\circ.$$

Do

$$B = \cot 35^\circ \cdot \cot 65^\circ \cdot (-\tan 35^\circ) \cdot (-\tan 65^\circ)$$

$$= (-\tan 35^\circ \cdot \cot 35^\circ) \cdot (-\tan 65^\circ \cdot \cot 65^\circ) = (-1) \cdot (-1) = 1.$$

có:

đó,

Câu 16. Tính giá trị của biểu thức $T = \sin^2 25^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 115^\circ + \sin^2 165^\circ$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin 115^\circ = \sin(180^\circ - 115^\circ) = \sin 65^\circ = \cos(90^\circ - 65^\circ) = \cos 25^\circ;$$

$$\sin 165^\circ = \sin(180^\circ - 165^\circ) = \sin 15^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \cos 75^\circ.$$

Do

$$T = \sin^2 25^\circ + \sin^2 75^\circ + \cos^2 25^\circ + \cos^2 75^\circ = (\sin^2 25^\circ + \cos^2 25^\circ) + (\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ) = 1 + 1 = 2.$$

đó,

Câu 17. Dùng máy tính cầm tay, hãy thực hiện các yêu cầu dưới đây:

a) Tính

$$\sin 168^\circ 45' 33''; \cos 17^\circ 22' 35''; \tan 156^\circ 26' 39''; \cot 56^\circ 36' 42''.$$

b) Tìm α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$), trong các trường hợp sau:

$$\text{i) } \sin \alpha = 0,862.$$

$$\text{ii) } \cos \alpha = -0,567$$

$$\text{iii) } \tan \alpha = 0,334.$$

Lời giải

a)

$$\sin 168^\circ 45' 33'' = 0,195$$

$$\cos 17^\circ 22' 35'' = 0,954$$

$$\tan 156^\circ 26' 39'' = -0,436;$$

$$\cot 56^\circ 36' 42'' = 0,659$$

b)

i) $\alpha = 59^\circ 32' 30,8''$.

ii) $\alpha = 124^\circ 32' 28,65''$.

iii) $\alpha = 18^\circ 28' 9,55''$.

Câu 18. Dùng máy tính cầm tay, tính.

a) $\sin 144^\circ 23' 57''$;

b) $\cos 123^\circ 5' 48''$;

c) $\tan 115^\circ 43' 26''$; d) $\cot 139^\circ 35' 28''$.

Lời giải

a) $\sin 144^\circ 23' 57'' \approx 0,582$; b) $\cos 123^\circ 5' 48'' \approx -0,546$;

c) $\tan 115^\circ 43' 26'' \approx -2,076$; d) $\cot 139^\circ 35' 28'' \approx -1,175$.

Câu 19. Dùng máy tính cầm tay, tìm x ($0^\circ \leq x \leq 180^\circ$), biết:

a) $\cos x = -0,511$;

b) $\sin x = 0,456$;

c) $\tan x = -0,473$;

d) $\cot x = -0,258$.

Lời giải

a) $\cos x = -0,511 \Rightarrow x \approx 120^\circ 43' 50''$;

b) $\sin x = 0,456 \Rightarrow x \approx 27^\circ 7' 45''$ hay $x \approx 152^\circ 52' 15''$;

c) $\tan x = -0,473 \Rightarrow x \approx 154^\circ 41' 9''$;

d) $\cot x = -0,258 \Rightarrow x \approx 104^\circ 28' 1''$.

Câu 20. Dùng máy tính cầm tay, tính.

a) $\sin 138^\circ 12' 24''$;

b) $\cos 144^\circ 35' 12''$;

c) $\tan 152^\circ 35' 44''$.

Lời giải

a) $\sin 138^\circ 12' 24'' \approx 0,666$;

b) $\cos 144^\circ 35' 12'' \approx -0,815$;

c) $\tan 152^\circ 35' 44'' \approx -0,518$.

Câu 21. Dùng máy tính cầm tay, tìm x , biết:

a) $\cos x = -0,234$;

b) $\sin x = 0,812$;

c) $\cot x = -0,333$.

Lời giải

a) $\cos x = -0,234 \Rightarrow x \approx 103^\circ 31' 58''$;

b) $\sin x = 0,812 \Rightarrow x \approx 54^\circ 17' 30''$, hay $x \approx 125^\circ 42' 30''$;

c) $\cot x = -0,333 \Rightarrow x \approx 108^\circ 25' 4''$.

BÀI TẬP BỔ SUNG**Câu 22.** Tính:

$$A = 2 \cos 30^\circ + \sin 150^\circ + \tan 135^\circ$$

$$B = \tan^2 120^\circ + \cot 30^\circ - 2 \sin 120^\circ + \sin 180^\circ + 4 \cos 90^\circ + 2 \cos 120^\circ$$

Lời giải

$$A = 2 \cos 30^\circ + \sin 150^\circ + \tan 135^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$B = \tan^2 120^\circ + \cot 30^\circ - 2 \sin 120^\circ + \sin 180^\circ + 4 \cos 90^\circ + 2 \cos 120^\circ$$

$$= (\sqrt{3})^2 + \sqrt{3} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Câu 23. Tính giá trị các giá biểu thức sau đây:

$$S = \cos 12^\circ + \cos 36^\circ + \cos 60^\circ + \cos 84^\circ + \cos 96^\circ + \cos 120^\circ + \cos 144^\circ + \cos 168^\circ;$$

$$P = \tan 10^\circ \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ \tan 50^\circ \tan 60^\circ \tan 70^\circ \tan 80^\circ.$$

Lời giải

- Sử dụng quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau:

$$\cos 12^\circ + \cos 168^\circ = \cos 36^\circ + \cos 144^\circ = \cos 60^\circ + \cos 120^\circ$$

$$= \cos 84^\circ + \cos 96^\circ = 0$$

Do đó $S = 0$.

- Ta có: $\tan 80^\circ = \cot 10^\circ$, $\tan 70^\circ = \cot 20^\circ$, $\tan 60^\circ = \cot 30^\circ$, $\tan 50^\circ = \cot 40^\circ$.

$$\text{Từ đó: } P = (\tan 10^\circ \cot 10^\circ)(\tan 20^\circ \cot 20^\circ)(\tan 30^\circ \cot 30^\circ)(\tan 40^\circ \cot 40^\circ) = 1.$$

Câu 24. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$$

$$\text{b) } B = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$$

$$\text{c) } C = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$$

Lời giải

$$\text{a) } A = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2$$

$$\text{b) } B = 3 - (-1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$$

$$\text{c) } C = \sin^2 45^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 (\sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ) + 4 \tan 55^\circ \cdot \cot 55^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 2 (\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4.$$

Câu 25. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$$

$$\text{b) } B = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$$

$$\text{c) } C = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$$

Lời giải

$$\text{a) } A = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$$

$$= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 1 + 1 = 2.$$

$$\text{b) } B = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$$

$$= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) = 0.$$

$$\text{c) } C = (\tan 5^\circ \cdot \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \cdot \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ)$$

$$= (\tan 5^\circ \cdot \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cdot \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \cot 45^\circ) = 1$$

Câu 26. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \sin 45^\circ + 2 \cos 60^\circ - \tan 30^\circ + 5 \cot 120^\circ + 4 \sin 135^\circ$$

$$\text{b) } B = 4a^2 \sin^2 45^\circ - 3(a \tan 45^\circ)^2 + (2a \cos 45^\circ)^2$$

$$\text{c) } C = \sin^2 35^\circ - 5 \sin^2 73^\circ + \cos^2 35^\circ - 5 \cos^2 73^\circ$$

$$\text{d) } D = \frac{12}{1 + \tan^2 76^\circ} - 5 \tan 85^\circ \cot 95^\circ + 12 \sin^2 104^\circ$$

$$\text{e) } E = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ;$$

$$\text{f) } F = \cos^3 1^\circ + \cos^3 2^\circ + \cos^3 3^\circ + \dots + \cos^3 179^\circ + \cos^3 180^\circ.$$

Lời giải

$$a) A = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} - 5 \frac{\sqrt{3}}{3} + 4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{5\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3}$$

$$b) B = 4a^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3a^2 + (\sqrt{2}a)^2 = a^2$$

$$c) C = (\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ) - 5(\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ) = 1 - 5 = -4$$

$$d) D = 12 \cos^2 76^\circ + 5 \tan 85^\circ \cdot \cot 85^\circ + 12 \sin^2 76^\circ = 12 + 5 = 17$$

$$e) E = (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ$$

$$E = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) + \frac{1}{2} + 1$$

$$E = \underbrace{1+1+\dots+1}_{44 \text{ số}} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{91}{2}$$

$$f) F = (\cos^3 1^\circ + \cos^3 179^\circ) + \dots + (\cos^3 89^\circ + \cos^3 91^\circ) + \cos^3 90^\circ + \cos^3 180^\circ$$

$$F = \cos^3 90^\circ + \cos^3 180^\circ = 0 - 1 = -1$$

Câu 27. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$P = 4 \tan(x + 4^\circ) \cdot \sin x \cdot \cot(4x + 26^\circ) + \frac{8 \tan^2(3^\circ - x)}{1 + \tan^2(5x + 3^\circ)} + 8 \cos^2(x - 3^\circ)$$

khi $x = 30^\circ$

Lời giải

Thay $x = 30^\circ$ vào P , ta được:

$$P = 4 \tan 34^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \cot 146^\circ + \frac{8 \tan^2(-27^\circ)}{1 + \tan^2 153^\circ} + 8 \cos^2 27^\circ$$

$$P = -4 \tan 34^\circ \cdot \cot 34^\circ + 8 \tan^2 27^\circ \cdot \cos^2 27^\circ + 8 \cos^2 27^\circ + 8 \cos^2 27^\circ = -2 + 8 = 6$$

Câu 28. Tính giá trị của các biểu thức

$$a) A = (2 \sin 45^\circ + 2 \cos 135^\circ + \cot 45^\circ)(\sin 180^\circ + 3 \cos 180^\circ + \cos 90^\circ)$$

$$b) B = \cos 35^\circ + \cos 47^\circ + \cos 78^\circ + \cos 145^\circ + \cos 133^\circ + \cos 102^\circ;$$

$$c) C = \frac{2 \cos 0^\circ - 3 \sin 0^\circ + \tan 45^\circ}{2 \cos 180^\circ - 3 \sin 180^\circ};$$

$$d) D = \frac{\sin a \cos b + \tan c}{\sin(a+b) + \cos(a+b) + \cot c} \text{ với } a = 60^\circ, b = 30^\circ, c = 45^\circ.$$

Lời giải

$$a) A = -3.$$

$$b) B = 0.$$

$$c) C = -\frac{3}{2}$$

$$d) D = \frac{7}{8}.$$

Câu 29. Tính các biểu thức sau đây:

$$a) A = \cos^2 22^\circ + \cos^2 23^\circ + \cos^2 41^\circ + \cos^2 49^\circ + \cos^2 68^\circ + \cos^2 67^\circ;$$

$$b) B = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } \cos 49^\circ = \sin 41^\circ, \cos 67^\circ = \sin 23^\circ, \cos 68^\circ = \sin 22^\circ$$

$$\text{Do đó: } A = \cos^2 22^\circ + \sin^2 22^\circ + \cos^2 23^\circ + \sin^2 23^\circ + \cos^2 41^\circ + \sin^2 41^\circ = 3$$

$$b) \text{ Ta có: } B = (\tan 1^\circ \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$$

Dạng 2: Chứng minh đẳng thức lượng giác, chứng minh biểu thức không phụ thuộc vào x , đơn giản biểu thức.

Phương pháp giải

- Sử dụng các hệ thức lượng cơ bản;
- Sử dụng tính chất của giá trị lượng giác;
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP.

Câu 30. Chứng minh các hệ thức sau:

- a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;
 b) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$;
 c) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$.

Lời giải

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Gọi $M(x; y)$ là điểm trên đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy.

Ta có: $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = x^2 \\ \sin^2 \alpha = y^2 \end{cases} \quad (1)$

Mà $\begin{cases} |x| = ON \\ |y| = OP = MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = |x|^2 = ON^2 \\ y^2 = |y|^2 = MN^2 \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = ON^2 + MN^2 = OM^2$ (do $\triangle OMN$ vuông tại N)
 $\Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ (vì $OM = 1$). (đpcm)

b) $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$

Ta có: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$

$\Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$

Mà theo ý a) ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ với mọi góc α

$\Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ (đpcm)

c) $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$

Ta có: $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (0^\circ < \alpha < 180^\circ)$

$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$

Mà theo ý a) ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ với mọi góc α

$\Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ (đpcm)

Câu 31. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

- a) $\tan B = -\tan(A + C)$;
 b) $\sin C = \sin(A + B)$.

Lời giải

a) $\tan B = -\tan(180^\circ - B) = -\tan(A + C)$;

b) $\sin C = \sin(180^\circ - C) = \sin(A + B)$.

Câu 32. Chứng minh rằng với mọi góc x ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$), ta đều có:

- a) $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;
- b) $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;
- c) $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (x \neq 90^\circ)$
- d) $\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} (x \neq 0^\circ)$.

Lời giải

- a) Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\sin x \geq 0 \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;
- b) Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\cos x \geq 0 \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;
- c) Ta có: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (x \neq 90^\circ)$;
- d) Ta có: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow \cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} (x \neq 0^\circ)$.

Câu 33. Chứng minh rằng:

- a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;
- b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;
- c*) $\sqrt{\sin^4 \alpha + 6 \cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} = 4$.

Lời giải

- a) Sử dụng hằng đẳng thức $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ và hệ thức cơ bản.
 - b) Sử dụng hằng đẳng thức $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ và hệ thức cơ bản.
 - c) Sử dụng hệ thức cơ bản $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ta được
- $$\begin{aligned} & \sqrt{\sin^4 \alpha + 6 \cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{\cos^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{(1 - \cos^2 \alpha)^2 + 6 \cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{(1 - \sin^2 \alpha)^2 + 4 \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{4 + 4 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha} + \sqrt{1 + 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha} = (2 + \cos^2 \alpha) + (1 + \sin^2 \alpha) = 4. \end{aligned}$$

Câu 34. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

- a) $\sin A = \sin(B + C)$
- b) $\cos A = -\cos(B + C)$.

Lời giải

- a) $\sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$
 Vậy $\sin A = \sin(B + C)$
- b) $\cos(B + C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$
 Vậy $\cos A = -\cos(B + C)$.

Câu 35. Cho tam giác ABC . Chứng minh:

- a) $\sin \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$
- b) $\tan \frac{B+C}{2} = \cot \frac{A}{2}$.

Lời giải

Xét tam giác ABC , ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = 90^\circ$$

Do đó $\frac{\hat{A}}{2}$ và $\frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$ là hai góc phụ nhau.

- a) Ta có: $\sin \frac{A}{2} = \cos \left(90^\circ - \frac{A}{2} \right) = \cos \frac{B+C}{2}$
 b) Ta có: $\tan \frac{B+C}{2} = \cot \left(90^\circ - \frac{B+C}{2} \right) = \cot \frac{A}{2}$.

Câu 36. Cho $90^\circ < \alpha < 180^\circ, 0^\circ < \beta < 90^\circ$ và $\alpha - \beta = 90^\circ$. Chứng minh:

- a) $\sin \alpha = \cos \beta$;
 b) $\cos \alpha = -\sin \beta$;
 c) $\tan \alpha = -\cot \beta$.

Lời giải

- a) $\sin \alpha = \sin(90^\circ + \beta) = \sin[180^\circ - (90^\circ + \beta)] = \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$.
 b) $\cos \alpha = \cos(90^\circ + \beta) = -\cos[180^\circ - (90^\circ + \beta)] = -\cos(90^\circ - \beta) = -\sin \beta$.
 c) $\tan \alpha = \tan(90^\circ + \beta) = -\tan[180^\circ - (90^\circ + \beta)] = -\tan(90^\circ - \beta) = -\cot \beta$.

Câu 37. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC . Chứng minh:

- a) $\sin A = \sin(B+C)$;
 b) $\cos A + \cos(B+C) = 0$;
 c) $\tan A + \tan(B+C) = 0 (A \neq 90^\circ)$;
 d) $\cot A + \cot(B+C) = 0$.

Lời giải

Ta có: $A+B+C=180^\circ \Rightarrow B+C=180^\circ-A$. Do đó:

- a) $\sin(B+C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$.
 b) $\cos(B+C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A \Rightarrow \cos A + \cos(B+C) = 0$.
 c) $\tan(B+C) = \tan(180^\circ - A) = -\tan A \Rightarrow \tan A + \tan(B+C) = 0$.
 d) $\cot(B+C) = \cot(180^\circ - A) = -\cot A \Rightarrow \cot A + \cot(B+C) = 0$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 38. Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- a) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \sin^2 x \cdot \cos^2 x$
 b) $\frac{1+\cot x}{1-\cot x} = \frac{\tan x+1}{\tan x-1}$
 c) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

Lời giải

- a) $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^2 x \cos^2 x$
 $= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$
 b) $\frac{1+\cot x}{1-\cot x} = \frac{1+\frac{1}{\tan x}}{1-\frac{1}{\tan x}} = \frac{\frac{\tan x+1}{\tan x}}{\frac{\tan x-1}{\tan x}} = \frac{\tan x+1}{\tan x-1}$.
 c) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^3 x} = \tan^2 x + 1 + \tan x(\tan^2 x + 1) = \tan^3 x + \tan^2 x + \tan x + 1$

Câu 39. Chứng minh các hệ thức sau đây:

- a) $\cos \alpha + \sin \alpha \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ với $\alpha \neq 90^\circ$;
 b) $\cot^2 x \cdot \cos^2 x = \cot^2 x - \cos^2 x$;

c) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Lời giải

a) Ta có: $\cos \alpha + \sin \alpha \tan \alpha = \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$

b) $\cot^2 x \cdot \cos^2 x = \cot^2 x (1 - \sin^2 x) = \cot^2 x - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \sin^2 x = \cot^2 x - \cos^2 x$

c)

+ **Cách 1:**

Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$

hay $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1$.

Vậy $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

+ **Cách 2:**

Áp dụng hằng đẳng thức $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$, ta có

$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$.

Câu 40. Chứng minh các đẳng thức (với điều kiện đẳng thức có nghĩa)

a) $\frac{\cos a}{1 + \sin a} + \tan a = \frac{1}{\cos a} (a \neq 90^\circ)$;

b) $1 + \sin a + \cos a + \tan a = (1 + \cos a)(1 + \tan a) (a \neq 90^\circ)$

c) $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{\cot a}{\sin a} = \frac{1}{1 - \cos a}$.

Lời giải

a) Biến đổi về trái

$\frac{\cos a}{1 + \sin a} + \tan a = \frac{\cos a}{1 + \sin a} + \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a + \sin^2 a + \sin a}{(1 + \sin a) \cos a} = \frac{1 + \sin a}{(1 + \sin a) \cos a} = \frac{1}{\cos a} (a \neq 90^\circ)$

b) $1 + \sin a + \cos a + \tan a = 1 + \cos a + \sin a \left(1 + \frac{1}{\cos a}\right)$

$= (1 + \cos a) \left(1 + \frac{\sin a}{\cos a}\right) = (1 + \cos a)(1 + \tan a) (a \neq 90^\circ)$.

c) $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{\cot a}{\sin a} = \frac{1 + \cos a}{\sin^2 a} = \frac{1 + \cos a}{1 - \cos^2 a} = \frac{1}{1 - \cos a}$.

Câu 41. Chứng minh:

a) $\frac{\sin^2 x}{\cos x(1 + \tan x)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x(1 + \cot x)} = \sin x - \cos x$

b) $\left(\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) \left(\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}\right) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$

Lời giải

a) $VT = \frac{\sin^2 x}{\cos x \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right)} - \frac{\cos^2 x}{\sin x \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right)} = \frac{\sin^2 x}{\cos x + \sin x} - \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x}$

$= \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x$

b) $VT = \left(\tan x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right) \left(\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) \\
 &= \left[\frac{\sin x(1 + \sin x) + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \right] \left[\frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} \right] \\
 &= \frac{1 + \sin x}{\cos x(1 + \sin x)} \cdot \frac{1 + \cos x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}
 \end{aligned}$$

Câu 42. Rút gọn các biểu thức sau đây

- a) $A = \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$;
 b) $B = \sin x \cos x (\tan x + \cot x)$;
 c) $C = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x)$.

Lời giải

a) Áp dụng hệ thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x \\
 &= \sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1
 \end{aligned}$$

$$b) B = \sin x \cos x (\tan x + \cot x) = \sin x \cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

c) Áp dụng $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ và $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$
 $\Rightarrow \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$ và $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$
 Thay vào C ta suy được $C = -1$.

Câu 43. Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức đều có nghĩa)

$$a) A = \sin(90^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \sin^2 x (1 + \tan^2 x) - \tan^2 x$$

$$b) B = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \sqrt{2}$$

Lời giải

$$a) A = \cos x - \cos x + \sin^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 0.$$

$$\begin{aligned}
 b) B &= \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} - \sqrt{2} \\
 &= \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{\sin^2 x}} - \sqrt{2} \\
 &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \sqrt{2} \cot^2 x
 \end{aligned}$$

Câu 44. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

$$P = \sqrt{\sin^4 x + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 P &= \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x} \\
 &= \sqrt{4\cos^4 x + 4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^4 x + 4\sin^2 x + 1} \\
 &= \sqrt{(2\cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2\sin^2 x + 1)^2} = 2\cos^2 x + 1 + 2\sin^2 x + 1 = 3
 \end{aligned}$$

Vậy P không phụ thuộc vào x .

Câu 45. Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

- a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$;
 b) $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$;

$$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{\tan^3 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} + \frac{\cot^3 x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \cot^3 x \\ \text{d) } & \sin^2 x - \tan^2 x = \tan^6 x (\cos^2 x - \cot^2 x); \\ \text{e) } & \frac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a \cdot \tan^2 b} = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b}. \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } VT &= \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x (1 + \tan^2 x) - \sin^2 x = VP \\ \text{b) } \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ \text{c) } VT &= \tan^3 x (\cot^2 x + 1) - \tan x (\cot^2 x + 1) + \cot^3 x (\tan^2 x + 1) \\ &= \tan x + \tan^3 x - \cot x - \tan x + \cot x + \cot^3 x = VP \\ \text{d) } VP &= \tan^6 x \cos^2 x - \tan^6 x \cot^2 x = \tan^4 x \sin^2 x - \tan^4 x \\ &= \tan^4 x \cdot \cos^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x = \tan^2 x - \sin^2 x = VT \\ \text{e) } VT &= \frac{1}{\tan^2 b} - \frac{1}{\tan^2 a} = \cot^2 b - \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 b} - \frac{1}{\sin^2 a} = VP \end{aligned}$$

Câu 46. Đơn giản các biểu thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 (180^\circ - x) - \cos^2 (180^\circ - x); \\ \text{b) } B &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} - \cos^2 x \\ \text{c) } C &= \frac{\sin^3 a + \cos^3 a}{\cos^2 a + \sin a (\sin a - \cos a)} \\ \text{d) } D &= \sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} + \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}}. \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \tan^2 x + 1 - \tan^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x \\ \text{b) } B &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\frac{1}{\sin^2 x} - 1 - \frac{1}{\cos^2 x} + 1} - \cos^2 x = \cos^2 x \sin^2 x - \cos^2 x \\ &= -\cos^2 x (1 - \sin^2 x) = -\cos^4 x \\ \text{c) } C &= \frac{(\sin a + \cos a)(\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a)}{\sin^2 a - \sin a \cos a + \cos^2 a} = \sin a + \cos a \\ \text{d) } D^2 &= \frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} + \frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} + 2 \\ &= \frac{(1 + \sin a)^2 + (1 - \sin a)^2}{1 - \sin^2 a} + 2 = \frac{2 + 2\sin^2 a}{\cos^2 a} + 2 = \frac{4}{\cos^2 a} \\ \text{Suy ra } D &= \frac{2}{|\cos a|} \end{aligned}$$

Câu 47. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào α (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa).

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha); \\ \text{b) } B &= \cot^2 30^\circ (\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha) + 4\cos 60^\circ (\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha) - \sin^6 (90^\circ - \alpha) (\tan^2 x - 1)^3 \\ \text{c) } C &= (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2); \\ \text{d) } D &= \frac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^4 x - 1} \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 2(1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x) - 3(1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) = -1 \\ \text{b) } B &= 3(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ &\quad - (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^3 - (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^3 = 0 \\ \text{c) } C &= -2\sin^2 x \cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^2 = -2 \\ \text{d) } D &= \frac{(\sin^4 x + \cos^4 x) + 2\cos^4 x - 1}{(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) + 3\cos^4 x - 1} = \frac{(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) + 2\cos^4 x - 1}{3\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)} \\ &= \frac{2\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{3\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Dạng 3: Xác định giá trị của một biểu thức lượng giác có điều kiện

Phương pháp giải

- Dựa vào các hệ thức lượng cơ bản;
- Dựa vào dấu của giá trị lượng giác;
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 48. Tìm góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) trong mỗi trường hợp sau:

- $$\begin{aligned} \text{a) } \cos \alpha &= -\frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \text{b) } \sin \alpha &= \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \text{c) } \tan \alpha &= -\frac{\sqrt{3}}{3}; \\ \text{d) } \cot \alpha &= -1. \end{aligned}$$

Lời giải

- $$\begin{aligned} \text{a) } \alpha &= 150^\circ; \\ \text{b) } \alpha &= 60^\circ \text{ hay } \alpha = 120^\circ; \\ \text{c) } \alpha &= 150^\circ; \\ \text{d) } \alpha &= 135^\circ. \end{aligned}$$

Câu 49. Cho góc α , $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$.

- $$\begin{aligned} \text{a) Tính } \tan \alpha. \\ \text{b) Tính giá trị của biểu thức } P = \tan \alpha + 2 \cot \alpha. \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Do } \cos \alpha &= -\frac{1}{3} < 0 \text{ nên } \alpha \text{ là góc tù và } \tan \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = -2\sqrt{2}. \\ \text{b) Do } \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1 \text{ và } \tan \alpha = -2\sqrt{2} \text{ nên } \cot \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ và bởi vậy} \\ P &= -2\sqrt{2} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Nhận xét. Khi tính $\tan \alpha$ từ $\cos \alpha$ nhờ đẳng thức $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ sai lầm thường gặp của học sinh là mặc định coi $\tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1}$ mà quên mất $\tan \alpha < 0$ khi α là góc tù.

Câu 50. Tìm góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) trong mỗi trường hợp sau:

a) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin \alpha = 0$

c) $\tan \alpha = 1$

d) $\cot \alpha$ không xác định.

Lời giải

a) Sử dụng bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt, hàng $\cos \alpha$ ta có:

$$\cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \text{ với } \alpha = 135^\circ$$

b) Sử dụng bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt, hàng $\sin \alpha$ ta có:

$$\sin \alpha = 0 \text{ với } \alpha = 0^\circ \text{ và } \alpha = 180^\circ$$

c) Sử dụng bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt, hàng $\tan \alpha$ ta có:

$$\tan \alpha = 1 \text{ với } \alpha = 45^\circ$$

d) Sử dụng bảng giá trị lượng giác của các góc đặc biệt, hàng $\cot \alpha$ ta có:

$$\cot \alpha \text{ không xác định với } \alpha = 0^\circ.$$

Câu 51. Cho góc α , $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức

$$F = \frac{\tan \alpha + 2 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}.$$

Lời giải

HD. Sử dụng hệ thức cơ bản, chú ý do $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$. Đáp số:

$$F = \frac{23}{16}.$$

Câu 52. Cho góc α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) thỏa mãn $\tan \alpha = 3$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}.$

Lời giải

Cách 1. Vì $\tan \alpha = 3$ nên $\cos \alpha \neq 0$

$$\Rightarrow P = \frac{\frac{2 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{3 \sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 3}{3 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2} \Leftrightarrow P = \frac{2 \tan \alpha - 3}{3 \tan \alpha + 2} = \frac{2 \cdot 3 - 3}{3 \cdot 3 + 2} = \frac{3}{11}$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + 3^2 = 10 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Vì $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\sin \alpha > 0$.

$$\text{Mà } \tan \alpha = 3 > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{Lại có: } \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \tan \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\Rightarrow P = \frac{2 \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} - 3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10}}{3 \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} + 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{10}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}(2 \cdot 3 - 3)}{\frac{\sqrt{10}}{10}(3 \cdot 3 + 2)} = \frac{3}{11}.$$

Câu 53. Cho góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $G = 2 \sin \alpha + \cos \alpha$;

b) $H = \frac{2 \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

Lời giải

HD. Sử dụng hệ thức cơ bản, chú ý do $\tan \alpha > 0$ nên α là góc nhọn.

Đáp số: a) $G = \sqrt{5}$; b) $H = 5$.

Câu 54. Cho góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\tan \alpha = \sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$K = \frac{\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha - 4 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}.$$

Lời giải

Do $\tan \alpha = \sqrt{2} > 0$ nên α là góc nhọn và $\cos \alpha > 0$. Chia cả tử và mẫu của K cho $\cos^3 \alpha \neq 0$, ta được

$$K = \frac{\tan^3 \alpha + \tan \alpha + 2 \tan^2 \alpha - 4}{\tan \alpha \cdot (1 + \tan^2 \alpha) - (1 + \tan^2 \alpha)} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2} + 4 - 4}{\sqrt{2} \cdot 3 - 3} = \frac{3\sqrt{2}}{3(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1).$$

Câu 55. Cho góc α với $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 2 \sin^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha$.

Lời giải

Ta có: $A = 2 \sin^2 \alpha + 5 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 3 \cos^2 \alpha$

Mà $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$; $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\Rightarrow A = 2 + 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

Câu 56. Cho góc x với $\cos x = -\frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $S = 4 \sin^2 x + 8 \tan^2 x$.

Lời giải

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 120^\circ \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}; \tan x = -\sqrt{3}. S = 4 \sin^2 x + 8 \tan^2 x = 4 \cdot \frac{3}{4} + 8 \cdot 3 = 27.$$

Câu 57. Cho $\tan \alpha = -2$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{\cos \alpha + 3 \sin \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha}$.

Lời giải

Vì $\tan \alpha = -2$ nên $\cos \alpha \neq 0$. Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos \alpha$ ta có:

$$P = \frac{1 + 3 \tan \alpha}{\tan \alpha + 3} = \frac{1 + 3 \cdot (-2)}{(-2) + 3} = -5.$$

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 58. a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$ và $\tan \alpha$

b) Cho $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin \alpha$ và $\cot \alpha$

c) $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$. Tính các giá trị lượng giác còn lại.

Lời giải

a) Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha < 0$. Mặt khác

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Do đó, } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\text{b) Vì } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \text{ nên } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Và } \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{c) Vì } \tan \alpha = -2\sqrt{2} < 0 \Leftrightarrow \cos \alpha < 0 \text{ mặt khác } \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\text{Nên } \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\tan^2 \alpha + 1}} = -\sqrt{\frac{1}{8+1}} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha = -2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Câu 59. a) Cho $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tính $A = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$.

$$\text{b) Cho } \tan \alpha = \sqrt{2}. \text{ Tính } B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{\tan \alpha + 3 \cdot \frac{1}{\tan \alpha}}{\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}} = \frac{\tan^2 \alpha + 3}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = 1 + 2 \cos^2 \alpha$$

$$\text{Suy ra } A = 1 + 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{17}{8}$$

$$\text{b) } B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\sqrt{2}(2+1) - (2+1)}{2\sqrt{2} + 3 + 2\sqrt{2}(2+1)} = \frac{3(\sqrt{2}-1)}{3+8\sqrt{2}}$$

Câu 60. Biết $\sin x + \cos x = m$

a) Tìm $\sin x \cos x$ và $|\sin^4 x - \cos^4 x|$;

b) Chứng minh rằng $|m| \leq \sqrt{2}$.

Lời giải

$$\text{- Vì } \sin x + \cos x = m \text{ nên } m^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \text{ hay } \sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$$

- Đặt $A = |\sin^4 x - \cos^4 x|$. Ta có:

$$A = |(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x)| = |(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)|$$

$$\Rightarrow A^2 = (\sin x + \cos x)^2 (\sin x - \cos x)^2 = (1 + 2 \sin x \cos x)(1 - 2 \sin x \cos x)$$

$$\Rightarrow A^2 = (1 + m^2 - 1)(1 - m^2 + 1) = 2m^2 - m^4$$

Vậy $A = \sqrt{2m^2 - m^4}$

b) Ta có: $2 \sin x \cos x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ kết hợp với (*) suy ra $(\sin x + \cos x)^2 \leq 2 \Rightarrow |\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2}$. Vậy $|m| \leq \sqrt{2}$.

Câu 61. Tính các giá trị lượng giác còn lại, biết

a) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

b) $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$;

c) $\cot \alpha = -\sqrt{2}$;

d) $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ và $\sin \alpha = \frac{1}{5}$.

Lời giải

a) $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}$, $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\cot \alpha = \frac{4}{3}$

b) $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\tan \alpha = 2$, $\cot \alpha = \frac{1}{2}$

c) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

d) Ta có: $\tan \alpha \cot \alpha = 1 > 0$ mà $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ suy ra $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$
 $\cot \alpha = -\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1} = -2\sqrt{6} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$, $\cos \alpha = \cot \alpha \cdot \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Câu 62. a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $B = \frac{3 \cot \alpha + 2 \tan \alpha + 1}{\cot \alpha + \tan \alpha}$

b) Cho $\cot \alpha = 5$. Tính: $D = 2 \cos^2 \alpha + 5 \sin \alpha \cos \alpha + 1$

Lời giải

a) Từ giả thiết suy ra $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\cot \alpha = -2\sqrt{2} \Rightarrow B = \frac{26 - 2\sqrt{2}}{9}$

b) $\frac{D}{\sin^2 \alpha} = 2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow (\cot^2 \alpha + 1)D = 3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1$

Suy ra: $D = \frac{101}{26}$.

Câu 63. Biết $\tan x + \cot x = m$.

a) Tìm: $\tan^2 x + \cot^2 x$

b) $\frac{\tan^6 x + \cot^6 x}{\tan^4 x + \cot^4 x}$

Lời giải

a) $\tan^2 x + \cot^2 x = m^2 - 2$

b) $\tan^4 x + \cot^4 x = (\tan^2 x + \cot^2 x)^2 - 2 = (m^2 - 2)^2 - 2 = m^4 - 4m^2 + 2$

$$\Rightarrow \frac{\tan^6 x + \cot^6 x}{\tan^4 x + \cot^4 x} = \frac{(\tan^2 x + \cot^2 x)(\tan^4 x + \cot^4 x - \tan^2 x \cot^2 x)}{m^4 - 4m^2 + 2}$$

$$= \frac{(m^2 - 2)(m^4 - 4m^2 + 1)}{m^4 - 4m^2 + 2}$$

Câu 64. Cho $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{12}{25}$. Tính $\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

Lời giải

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \frac{24}{25} \Rightarrow \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \text{ (do } \cos \alpha > 0)$$

$$\Rightarrow \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = \frac{91}{125}.$$

Câu 65. a) Cho $\cos x = -\frac{3}{5}$. Tính $\sin x, \tan x, \cot x$.

b) Cho $\tan x = 4$ ($0^\circ < x < 90^\circ$). Tính $\sin x, \cos x$.

c) Cho $\cot x = -2$ ($90^\circ < x < 180^\circ$). Tính $\sin x, \cos x$.

Lời giải

a) Vì $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ nên $\cos x = -\frac{3}{5}$ khi $90^\circ < x < 180^\circ$.

Do đó: $\tan x$ và $\cot x$ là các số âm; $\sin x > 0$.

$$\text{Ta có: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

$$\text{Vậy } \sin x = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}, \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{b) } \cos x = \frac{1}{\sqrt{17}}, \sin x = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$\text{c) } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos x = \frac{-\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 66. a) Cho $\tan x + \cot x = m$. Tính $\tan^2 x + \cot^2 x, \tan^3 x + \cot^3 x$.

b) Tính $B = \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{5 \sin x - \cos x}$, biết $\tan x = 4$.

c) Tính $C = 2 \sin^4 x + 4 \cos^6 x$, biết $5 \sin^4 x + 3 \cos^4 x = 2$.

Lời giải

$$\text{a) - } m^2 = (\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x - 2 \tan x \cdot \cot x = \tan^2 x + \cot^2 x - 2$$

$$\text{Từ đó } \tan^2 x + \cot^2 x = m^2 - 2.$$

$$\text{- } \tan^3 x + \cot^3 x = (\tan x + \cot x)(\tan^2 x - \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) = m(m^2 - 2 - 1)$$

$$\text{hay } \tan^3 x + \cot^3 x = m(m^2 - 3).$$

b) Ta có: $\tan x = 4 \Rightarrow \cos x \neq 0$ nên:

$$B = \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{5 \sin x - \cos x} = \frac{\cos x(3 \tan x + 2)}{\cos x(5 \tan x - 1)} = \frac{3 \tan x + 2}{5 \tan x - 1} = \frac{3 \cdot 4 + 2}{5 \cdot 4 - 1} = \frac{14}{19}.$$

c) Đặt $t = \sin^2 x$, ta có $\cos^2 x = 1 - t$. Do đó:

$$5 \sin^4 x + 3 \cos^4 x = 2 \Leftrightarrow 5t^2 + 3(1-t)^2 = 2 \Leftrightarrow 8t^2 - 6t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \text{ hoặc } t = \frac{1}{4}.$$

$$\text{- } t = \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ ta có : } A = 2 \sin^4 x + 4 \cos^6 x = 1.$$

$$\text{- } t = \sin^2 x = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4}, \text{ ta có } C = 2 \sin^4 x + 4 \cos^6 x = \frac{29}{16}$$

Dạng 4. Bài toán thực tế

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 67. Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa (khoảng 12 giờ), em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất, đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước và độ dài của bóng thước. Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc vào thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90^\circ - \phi - \left| \cos \left(\left(\frac{2(N+10)}{365} - m \right) \cdot 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ$$

trong đó $m = 0$ nếu $1 \leq N \leq 172$, $m = 1$ nếu $173 \leq N \leq 355$, $m = 2$ nếu $356 \leq N \leq 365$.

a) Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ $\phi = 20^\circ$.

b) Hãy xác định vĩ độ tại nơi em sinh sống và tính góc nghiêng của Mặt Trời tại đó theo hai cách đã được đề cập trong bài toán (đo trực tiếp và tính theo công thức) và so sánh hai kết quả thu được.

Chú ý. Công thức tính toán nói trên chính xác tới $\pm 0,5^\circ$.

Góc nghiêng của Mặt Trời có ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất, chẳng hạn, vào mùa hè, góc nghiêng lớn nên nhiệt độ cao.

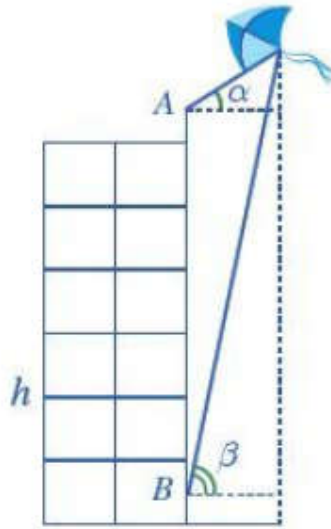
Lời giải

a) Ngày 10/10 là ngày thứ 283 của năm không nhuận. Do đó, góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày này tại vĩ độ $\phi = 20^\circ$ bằng

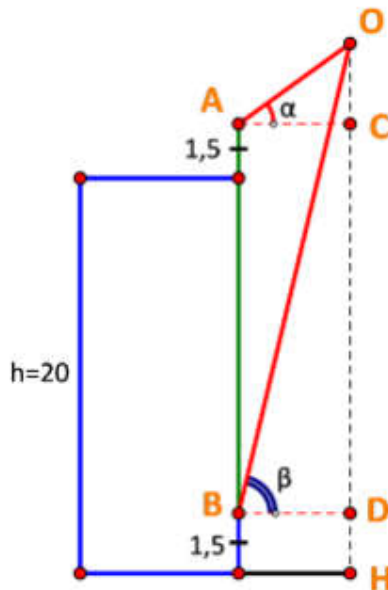
$$\begin{aligned} \alpha &= 90^\circ - 20^\circ - \left| \cos \left(\left(\frac{2(283+10)}{365} - 1 \right) \cdot 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ \\ &= 70^\circ - \left| \cos \frac{221}{365} \cdot 180^\circ \right| \cdot 23,5^\circ \approx 62,35^\circ \end{aligned}$$

b) Chú ý. Vĩ độ của nơi có góc nghiêng Mặt Trời α vào ngày thứ N trong năm bằng $\phi = 90^\circ - \alpha - \left| \cos \left(\left(\frac{2(N+10)}{365} - 1 \right) \cdot 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ$.

Câu 68. Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc điều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc điều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35^\circ$; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn B cũng quan sát chiếc điều và thấy góc nâng là $\beta = 75^\circ$; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn B cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của tòa nhà là $h = 20$ m (Hình). Chiếc điều bay cao bao nhiêu mét so mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

**Lời giải**

Gọi các điểm:



O là vị trí của chiếc diều.

H là hình chiếu vuông góc của chiếc diều trên mặt đất.

C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên OH.

Đặt $OC = x$, suy ra $OH = x + 20 + 1,5 = x + 21,5$.

Xét tam giác OAC , ta có: $\tan \alpha = \frac{OC}{AC} \Rightarrow AC = \frac{OC}{\tan \alpha} = \frac{x}{\tan 35^\circ}$ Xét tam giác OBD , ta có:

$$\tan \beta = \frac{OD}{BD} \Rightarrow BD = \frac{OD}{\tan \beta} = \frac{x+20}{\tan 75^\circ} \text{ Mà: } AC = BD \Rightarrow \frac{x}{\tan 35^\circ} = \frac{x+20}{\tan 75^\circ}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \tan 75^\circ = (x+20) \cdot \tan 35^\circ \Leftrightarrow x = \frac{20 \cdot \tan 35^\circ}{\tan 75^\circ - \tan 35^\circ} \approx 4,6$$

Suy ra $OH = 26,1$.

Vậy chiếc diều bay cao 26,1 m so với mặt đất.

Câu 69. Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa, em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất rồi đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước và độ dài của bóng thước.

Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc vào thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90^\circ - \phi - \left| \cos \left(\left(\frac{2(N+10)}{365} - m \right) 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ$$

trong đó $m = 0$ nếu $1 \leq N \leq 172$, $m = 1$ nếu $173 \leq N \leq 355$, $m = 2$ nếu $356 \leq N \leq 365$.

Chú ý. Công thức tính toán trên chính xác tới $\pm 0,5^\circ$. Góc nghiêng của Mặt Trời có ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, vì vậy một năm được chia thành các mùa, chẳng hạn, vào mùa hè (giữa năm), góc nghiêng lớn nên sự hấp thụ nhiệt cao và làm nhiệt độ Trái Đất cao.

a) Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày thứ 69 trong năm (ngày 10-3 đối với năm mà tháng Hai có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ $\phi = 42^\circ$.

b) Hãy xác định vĩ độ tại nơi em sinh sống và tính góc nghiêng của Mặt Trời tại đó theo hai cách đã được đề cập trong bài toán (đo trực tiếp và tính theo công thức) và so sánh hai kết quả thu được.

Lời giải

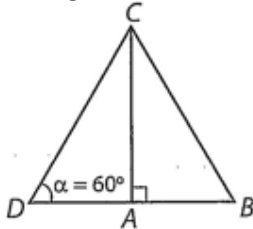
$$a) \alpha = 90^\circ - 42^\circ - \left| \cos \left(\left(\frac{2(69+10)}{365} - 0 \right) 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ \approx 43,08^\circ.$$

b) Tự thực hành

Câu 70. Thang xếp hình chữ A gồm 2 thang đơn tựa vào nhau. Để đảm bảo an toàn, mỗi thang đơn tạo với mặt đất một góc 60° . Nếu muốn xếp một thang chữ A cao $2,5m$ tính từ mặt đất thì chiều dài mỗi thang đơn phải dài bao nhiêu mét?

Lời giải

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có:



$$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AC}{\sin B} = \frac{2,5}{\sin 60^\circ} = \frac{5}{\sqrt{3}}(m)$$

Vậy chiều dài mỗi thang đơn là $\frac{5}{\sqrt{3}}m$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Cho $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Chọn câu trả lời đúng.

A. $\cos \alpha < 0$.

B. $\sin \alpha > 0$.

C. $\tan \alpha < 0$.

D. $\cot \alpha > 0$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2. Cho $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ và $\alpha + \beta = 180^\circ$. Chọn câu trả lời sai.

A. $\sin \alpha + \sin \beta = 0$.

B. $\cos \alpha + \cos \beta = 0$.

C. $\tan \alpha + \tan \beta = 0$.

D. $\cot \alpha + \cot \beta = 0$.

Lời giải

Chọn A

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 3. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

A. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$

Lời giải

Chọn

C.

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 4. Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1

Lời giải

Chọn D

Ta có $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Câu 5. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ D. 2

Lời giải

Chọn A

$\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 6. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$ B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$
C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$ D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$

Lời giải

Chọn D

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$. B. $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$. C. $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. D. $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 8. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.
C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$. D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

Lời giải

Chọn D

Giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 9. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. 1.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$.

Câu 10. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

A. $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$. B. $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.

C. $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$.

D. $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$.

Câu 11. Giá trị của $\tan 45^\circ + \cot 135^\circ$ bằng bao nhiêu?

A. 2.

B. 0.

C. $\sqrt{3}$.

D. 1.

Lời giải

Chọn

B.

$\tan 45^\circ + \cot 135^\circ = 1 - 1 = 0$

Câu 12. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ$.

A. $P = 1$.

B. $P = 0$.

C. $P = \sqrt{3}$.

D. $P = -\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $P = \sin 30^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$.

Câu 13. Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn A

$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin (90^\circ + 36^\circ) \cos (90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

Câu 14. Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2$

Câu 15. Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1$.

- Câu 16.** Tổng $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$ bằng
 A. 21. B. 23. C. 22. D. 24.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} S &= \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ \\ &= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) \\ &= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22. \end{aligned}$$

- Câu 17.** Giá trị của $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$ là
 A. 2. B. 1. C. 0. D. -1.

Lời giải

Chọn B

$$A = (\tan 5^\circ \cdot \tan 85^\circ) \cdot (\tan 10^\circ \cdot \tan 80^\circ) \dots (\tan 40^\circ \cdot \tan 50^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$$

- Câu 18.** Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là
 A. $\sqrt{2}$. B. 2. C. -2. D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$B = (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ) = (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \sin^2 87^\circ) = 2$$

- Câu 19.** Biểu thức $A = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$ có giá trị bằng
 A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\cos \alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) nên suy ra $\cos \alpha + \cos(180^\circ - \alpha) = 0$.

Do

đó:

$$\begin{aligned} A &= (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + (\cos 40^\circ + \cos 140^\circ) + (\cos 60^\circ + \cos 120^\circ) \\ &+ (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ) + \cos 180^\circ = \cos 180^\circ = -1. \end{aligned}$$

- Câu 20.** Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức sau: $A = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.
 A. $A = 12$. B. $A = 11$. C. $A = 13$. D. $A = 5$.

Lời giải

Chọn B

$$\tan \alpha - \cot \alpha = 3 \Leftrightarrow (\tan \alpha - \cot \alpha)^2 = 9 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 2 \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 9$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha - 2 = 9 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 11.$$

- Câu 21.** Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. -1. D. 0.

Lời giải

Chọn

B.

$$\text{Ta có: } \sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow 2 = (\sin a + \cos a)^2 \Rightarrow \sin a \cdot \cos a = \frac{1}{2}.$$

$$\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a) - 2 \sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Câu 22. Biểu thức $f(x) = 3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$ có giá trị bằng:

- A. 1. B. 2. C. -3. D. 0.

Lời giải

Chọn#A.

$$\square \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$\square \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x.$$

$$f(x) = 3(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x) = 1.$$

Câu 23. Biểu thức: $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.

Lời giải

Chọn#A.

$$f(x) = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Câu 24. Biểu thức $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

Chọn

B.

$$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0.$$

Câu 25. Cho $\sin x + \cos x = m$. Tính theo m giá trị của $M = \sin x \cdot \cos x$.

- A. $m^2 - 1$. B. $\frac{m^2 - 1}{2}$. C. $\frac{m^2 + 1}{2}$. D. $m^2 + 1$.

Lời giải

Chọn B

$$\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = m^2 \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2 \sin x \cdot \cos x = m^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2 \sin x \cdot \cos x = m^2 \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

$$\text{Vậy } M = \frac{m^2 - 1}{2}.$$

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ☞ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: Nguyễn Vương ☞ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ☞ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: Nguyễn Vương

☞ https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIE1iIRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

☞ **Tải nhiều tài liệu hơn tại:** <https://www.nbv.edu.vn/>