

BÀI 6. ĐỊNH LÝ CÔSIN. ĐỊNH LÝ SIN

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lý côsin

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Khi đó:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

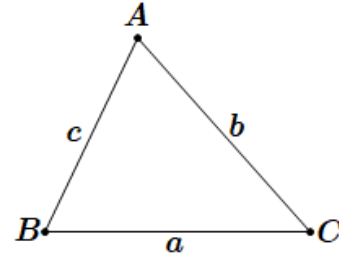
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Ta có thể suy ra hệ quả sau

Hệ quả 1.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



2. Định lý sin

Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp là R . Khi đó:

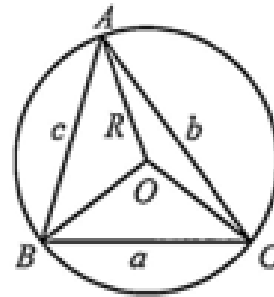
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Từ định lý sin, ta có hệ quả sau đây:

Hệ quả

$$a = 2R \sin A; \quad b = 2R \sin B; \quad c = 2R \sin C$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}; \quad \sin B = \frac{b}{2R}; \quad \sin C = \frac{c}{2R}.$$



3. Các công thức tính diện tích tam giác

Cho tam giác ABC . Ta kí hiệu:

- h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao lần lượt ứng với các cạnh BC, CA, AB .

- R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

- r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

- p là nửa chu vi tam giác.

- S là diện tích tam giác.

Ta có các công thức tính diện tích tam giác bên:

$$1) S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$$

$$2) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$3) S = \frac{abc}{4R};$$

$$4) S = pr;$$

$$5) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (công thức Heron).}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tính toán các yếu tố trong một tam giác

Phương pháp

Tùy theo giả thiết của bài toán, để tìm các yếu tố của tam giác ta có thể:

1) Áp dụng trực tiếp các định lý côsin, định lý sin, công thức diện tích... để tính.

2) Chọn một hệ thức thích hợp cho phép tìm được một số yếu tố trung gian cần thiết, từ đó ta tìm được yếu tố cần tìm.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = 5, AC = 8$. Tính độ dài cạnh BC .

Câu 2. Cho tam giác ABC có $\hat{A}=135^\circ, \hat{C}=15^\circ$ và $b=12$.

Tính a, c, R và số đo góc B .

Câu 3. Tính diện tích S của tam giác ABC có $c=4, b=6, \hat{A}=150^\circ$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có $a=13, b=14, c=15$.

a) Tính $\sin A$.

b) Tính diện tích S bằng hai cách khác nhau.

Câu 5. Cho tam giác ABC có $a=6, b=5, c=8$. Tính $\cos A, S, r$.

Câu 6. Cho tam giác ABC có $a=10, \hat{A}=45^\circ, \hat{B}=70^\circ$. Tính R, b, c .

Câu 7. Cho tam giác ABC có $\hat{C}=115^\circ, AC=8$ và $BC=12$. Tính độ dài cạnh AB và các góc A, B của tam giác đó.

Câu 8. Cho tam giác ABC có $\hat{A}=72^\circ, \hat{B}=83^\circ, BC=18$. Tính độ dài các cạnh AC, AB và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Câu 9. Cho tam giác ABC có $a=2\sqrt{3}, b=2$ và $\hat{C}=30^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác ABC .

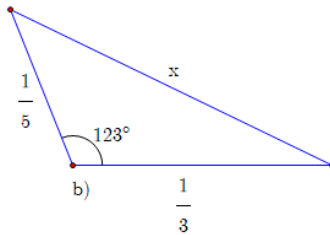
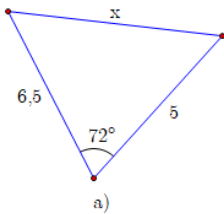
b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 10. Cho tam giác ABC có các cạnh $a=30, b=26, c=28$.

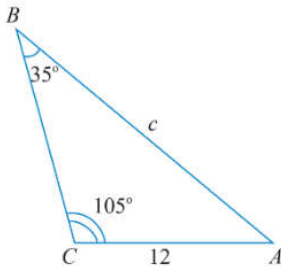
a) Tính diện tích tam giác ABC .

b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Câu 11. Tính độ dài cạnh x trong các tam giác sau



Câu 12. Tính độ dài cạnh c trong tam giác ABC ở hình



Câu 13. Cho tam giác ABC , biết cạnh $a=152, \hat{B}=79^\circ, \hat{C}=61^\circ$. Tính các góc, các cạnh còn lại và bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác đó.

Câu 14. Cho tam giác ABC có $AB=6, AC=8$ và $\hat{A}=60^\circ$.

a) Tính diện tích tam giác ABC .

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính diện tích tam giác IBC .

Câu 15. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và độ dài ba cạnh AB, BC, CA lần lượt là 15, 18, 27.

a) Tính diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

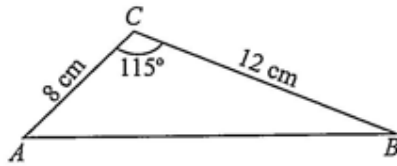
b) Tính diện tích tam giác GBC .

Câu 16. Cho tam giác ABC có $\hat{C}=120^\circ, AC=6\text{ cm}$ và $BC=10\text{ cm}$. Tính độ dài cạnh AB và các góc A, B của tam giác đó.

Câu 17. Cho tam giác ABC có các cạnh $a=8, b=15, c=20$. Tính góc A của tam giác ABC .

Câu 18. Cho tam giác ABC có $\hat{A}=69^\circ, \hat{B}=80^\circ, BC=25\text{ cm}$. Tính độ dài các cạnh AC, AB và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Câu 19. Tính diện tích tam giác ABC trong Hình 4.



Hình 4

Câu 20. Cho tam giác ABC có cạnh $a = 2\sqrt{3} \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$ và $\hat{C} = 30^\circ$.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

Câu 21. Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 15 \text{ cm}$, $b = 13 \text{ cm}$, $c = 14 \text{ cm}$.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

Câu 22. Cho tam giác ABC , biết cạnh $a = 75 \text{ cm}$, $\hat{B} = 80^\circ$, $\hat{C} = 40^\circ$.

- Tính các góc, các cạnh còn lại của tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC .

Câu 23. Tính góc lớn nhất của tam giác ABC , biết các cạnh là $a = 8$, $b = 12$, $c = 6$.

Câu 24. Cho tam giác ABC có $a = 24 \text{ cm}$, $b = 26 \text{ cm}$, $c = 30 \text{ cm}$.

- Tính diện tích tam giác ABC .
- Tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC .

Câu 25. Cho tam giác MNP có $MN = 10$, $MP = 20$ và $\hat{M} = 42^\circ$.

- Tính diện tích tam giác MNP .
- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP . Tính diện tích tam giác ONP .

Câu 26. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$ và $\hat{A} = 120^\circ$



- Tính $\cos A$;
- Tính độ dài cạnh BC .

Câu 27. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ và $CA = 20$. Tính:



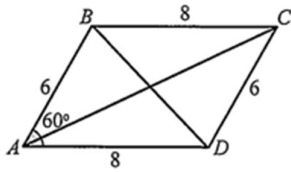
- $\sin A$;
- Độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Câu 28. Cho tam giác ABC có $AB = 3,5$; $AC = 7,5$; $\hat{A} = 135^\circ$. Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 29. Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 75^\circ$, $\hat{C} = 45^\circ$ và $BC = 50$. Tính độ dài cạnh AB .

Câu 30. Cho tam giác ABC có $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 8$. Tính $\cos A$, $\sin A$ và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 31. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 6$, $AD = 8$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$ (Hình 5). Tính độ dài các đường chéo AC , BD .

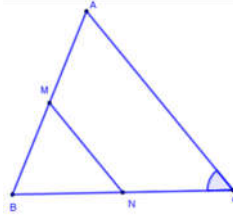


Hình 5

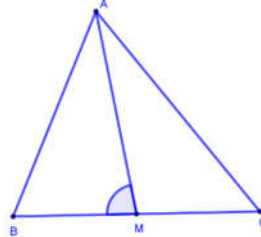
- Câu 32.** Cho tam giác ABC có $AB = 6, AC = 8, \hat{A} = 100^\circ$. Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Câu 33.** Cho tam giác ABC có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 105^\circ$ và $BC = 15$. Tính độ dài cạnh AC và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- Câu 34.** Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 7, BC = 9$. Tính số đo góc A và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 35.** Cho tam giác ABC , biết
a) $a = 12, b = 13, c = 15$. Tính độ lớn góc A . b) $AB = 5, AC = 8, \hat{A} = 60^\circ$. Tính cạnh BC
- Câu 36.** Cho tam giác ABC , biết
a) $\hat{A} = 60^\circ, \hat{B} = 45^\circ, b = 4$. Tính cạnh b và c . b) $\hat{A} = 60^\circ, a = 6$. Tính R
- Câu 37.** Cho tam giác ABC , biết
a) $a = 7, b = 8, c = 6$. Tính m_a . b) $a = 5, b = 4, c = 3$. Lấy D đối xứng của B qua C . Tính m_a và AD
- Câu 38.** Cho tam giác ABC , biết
a) $a = 7, b = 8, c = 6$. Tính S và h_a .
b) $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Tính S và R, r
- Câu 39.** Cho tam giác ABC , biết $a = 3, b = 4, c = 6$. Tính góc lớn nhất và đường cao tương ứng với cạnh lớn nhất
- Câu 40.** Tính các góc A, B và h_a, R của tam giác ABC biết $a = \sqrt{6}, b = 2, c = \sqrt{3} + 1$
- Câu 41.** Cho tam giác ABC , biết $a = 21, b = 17, c = 10$
a) Tính diện tích S của tam giác ABC và chiều cao h_a .
b) Tính bán kính đường tròn nội tiếp r và trung tuyến m_a .
- Câu 42.** Cho tam giác ABC , có $\hat{A} = 60^\circ, b = 20, c = 25$.
a) Tính diện tích S và chiều cao h_a .
b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R và bán kính đường tròn nội tiếp r
- Câu 43.** Cho tam giác ABC , có $AB = 8, AC = 9, BC = 10$. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = 7$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .
- Câu 44.** Cho tam giác ABC , có $BC = 12, CA = 13$, trung tuyến $AM = 8$. Tính S và cạnh AB .
- Câu 45.** Cho tam giác ABC , có $\hat{B} = 60^\circ, \hat{C} = 45^\circ, BC = a$
a) Tính độ dài hai cạnh AB, AC .
b) Chứng minh $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
- Câu 46.** Cho tam giác ABC , có độ dài ba trung tuyến bằng 15, 18, 27
a) Tính diện tích tam giác. b) Tính độ dài các cạnh của tam giác
- Câu 47.** Cho tam giác ABC , có đoạn thẳng nối trung điểm AB và BC bằng 3, cạnh $AB = 9$ và $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Tính cạnh BC .



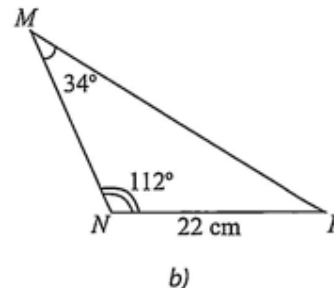
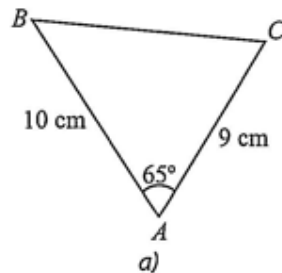
- Câu 48.** Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Biết $AB = 3, BC = 8, \cos \widehat{AMB} = \frac{5\sqrt{13}}{26}$. Tính độ dài cạnh AC và góc lớn nhất của tam giác ABC .



Dạng 2. Chứng minh các hệ thức liên quan đến các yếu tố của một tam giác

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 49.** Cho h_a là đường cao vẽ từ đỉnh A, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh hệ thức: $h_a = 2R \sin B \sin C$.
- Câu 50.** Cho tam giác ABC có góc B nhọn, AD và CE là hai đường cao.
- Chứng minh $\frac{S_{BDE}}{S_{BAC}} = \frac{BD \cdot BE}{BA \cdot BC}$.
 - Biết rằng $S_{ABC} = 9S_{BDE}$ và $DE = 2\sqrt{2}$. Tính $\cos B$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Câu 51.** Cho tứ giác lồi $ABCD$ có các đường chéo $AC = x, BD = y$ và góc giữa AC và BD bằng α . Gọi S là diện tích của tứ giác $ABCD$.
- Chứng minh $S = \frac{1}{2}xy \cdot \sin \alpha$
 - Nêu kết quả trong trường hợp $AC \perp BD$.
Gọi O là giao điểm của AC và BD .
- Câu 52.** Cho tam giác ABC có ba cạnh là a, b, c và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Chứng minh rằng: $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.
- Câu 53.** Tính độ dài các cạnh chưa biết trong các tam giác sau:



Hình 6

- Câu 54.** Cho tam giác ABC với $BC = a; AC = b; AB = c$. Chứng minh rằng:
- $$1 + \cos A = \frac{(a + b + c)(-a + b + c)}{2bc}$$
- Câu 55.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh các tam giác GBC, GAB, GAC có diện tích bằng nhau.

Câu 56. Cho tam giác ABC và cho các điểm B', C' trên cạnh AB và AC .

Chứng minh $\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AB \cdot AC}{AB' \cdot AC'}.$

Câu 57. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = a, BC = b, AC = m, BD = n$. Chứng minh: $m^2 + n^2 = 2(a^2 + b^2).$

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 58. Tam giác ABC có $b + 2c = 2a$. Chứng minh rằng

a) $2 \sin A = \sin B + \sin C$. b) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

Câu 59. Tam giác ABC có $bc = a^2$. Chứng minh rằng

a) $\sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$. b) $h_b \cdot h_c = h_a^2$

Câu 60. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ta đều có $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$

Câu 61. Gọi I là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Câu 62. Chứng minh rằng tổng bình phương hai đường chéo của hình bình hành bằng tổng bình phương bốn cạnh của nó.

Câu 63. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm hai đường chéo AC, BD . Chứng minh $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$

Câu 64. Cho tam giác ABC , chứng minh

a) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$. b) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$

Câu 65. Chứng minh rằng trong một tam giác ABC , ta có

a) $a = b \cos C + c \cos B$. b) $\sin A = \sin B \cos C + \sin C \cos B$

Câu 66. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta có

a) $b^2 - c^2 = a(b \cos C - c \cos B)$. b) $(b^2 - c^2) \cos A = a(c \cos C - b \cos B)$

Câu 67. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta có

a) $a = r \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)$. b) $h_a = 2R \sin B \sin C$.

Câu 68. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC , ta có

a) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$. b) $S = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (AB \cdot AC)^2}$.

Câu 69. Tam giác ABC có $b + 2c = 2a$. Chứng minh rằng

a) $2 \sin A = \sin B + \sin C$.

b) $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

Câu 70. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được và có các cạnh a, b, c, d . Chứng minh rằng diện tích tứ giác đó được tính theo công thức sau $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, trong đó p là nửa chu vi tứ giác.

Câu 71. Cho tam giác ABC , r_a là bán kính đường tròn bàng tiếp trong góc A . Chứng minh rằng:

a) $r_a = p \tan \frac{A}{2}$

$$b) r = (p - a) \tan \frac{A}{2}$$

Câu 72. Tam giác ABC vuông tại A , đồng dạng với tam giác $A'B'C'$. Gọi $a' = B'C'$, $b' = A'C'$, $c' = A'B'$ và h_a' là đường cao hạ từ A' của tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng:

$$a) a \cdot a' = b \cdot b' + c \cdot c'$$

$$b) \frac{1}{h_a \cdot h_a'} = \frac{1}{b \cdot b'} + \frac{1}{c \cdot c'}$$

Câu 73. Tam giác ABC vuông tại A . Gọi d là đường phân giác của góc A . Chứng minh rằng:

$$a) d = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}$$

$$b) r = \frac{1}{2}(b+c-a)$$

Câu 74. Tam giác ABC có $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$. Chứng minh rằng $2 \cot A = \cot B + \cot C$.

Câu 75. Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh a, b, c và diện tích S . Trên ba cạnh về phía ngoài của tam giác đó dựng các tam giác vuông cân $A'BC, B'AC, C'AB$ (A', B', C' lần lượt là đỉnh). Chứng minh rằng $A'B'^2 + B'C'^2 + C'A'^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S$.

Câu 76. Cho điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho $\widehat{DAB} = \widehat{DBC} = \widehat{DCA} = \varphi$. Chứng minh rằng

$$a) \sin^3 \varphi = \sin(A - \varphi) \cdot \sin(B - \varphi) \cdot \sin(C - \varphi);$$

$$b) \cot \varphi = \cot A + \cot B + \cot C.$$

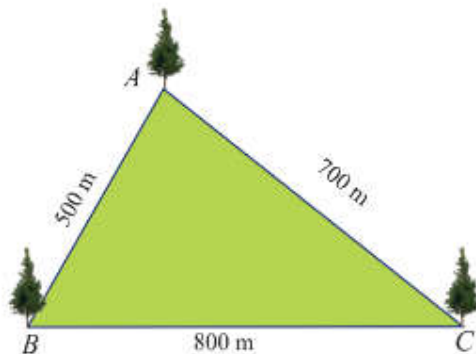
Câu 77. Trong mọi tam giác ABC chứng minh rằng $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$ (Với a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, AC, AB và S là diện tích tam giác).

Câu 78. Cho hai tam giác ABC . Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Dạng 3. Ứng dụng – Bài toán thực tế

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

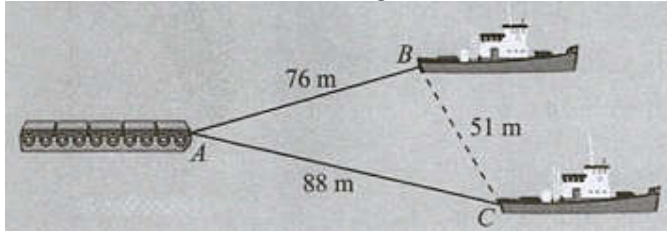
Câu 79. Một công viên có dạng hình tam giác với các kích thước như Hình. Tính số đo các góc của tam giác đó.



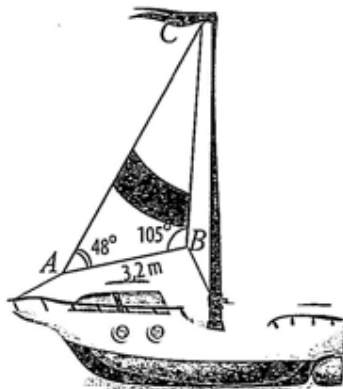
Câu 80. Tính diện tích một lá cờ hình tam giác cân có độ dài cạnh bên là 90 cm và góc ở đỉnh là 35° .



Câu 81. Hai tàu kéo cách nhau $51m$, cùng kéo một chiếc xà lan như Hình 3. Biết chiều dài của hai sợi cáp lần lượt là $76m$ và $88m$, tính góc được tạo bởi hai sợi cáp.

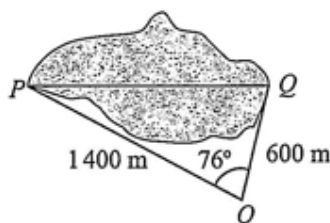


Câu 82. Tính diện tích một cánh buồm hình tam giác có chiều dài một cạnh là $3,2m$ và hai góc kề cạnh đó có số đo lần lượt là 48° và 105° (Hình 5).



Hình 5

Câu 83. Tính khoảng cách giữa hai điểm P và Q của một hồ nước (Hình 7). Cho biết từ một điểm O cách 2 điểm P và Q lần lượt là $1400m$ và $600m$ người quan sát nhìn thấy một góc 76° .

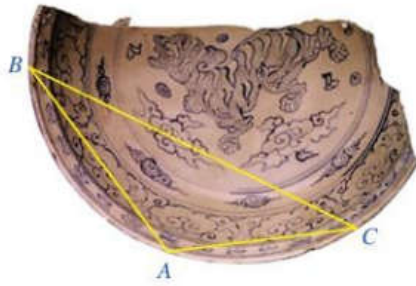


Hình 7

Câu 84. Tính diện tích bề mặt của một miếng bánh mì kebab hình tam giác có hai cạnh lần lượt là $10cm, 12cm$ và góc tạo bởi hai cạnh đó là 35° .

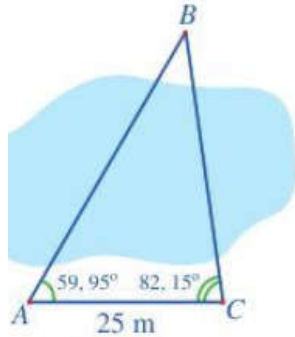
Câu 85. Hai máy bay cùng xuất phát từ một sân bay A và bay theo hai hướng khác nhau, tạo với nhau góc 60° . Máy bay thứ nhất bay với vận tốc $650km/h$, máy bay thứ hai bay với vận tốc $900km/h$. Sau 2 giờ, hai máy bay cách nhau bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết rằng cả hai máy bay bay theo đường thẳng và sau 2 giờ bay đều chưa hạ cánh.

Câu 86. Các nhà khảo cổ học tìm được một mảnh chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ. Để xác định đường kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy ba điểm trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau: $BC \approx 28,5cm$; $\widehat{BAC} \approx 120^\circ$.

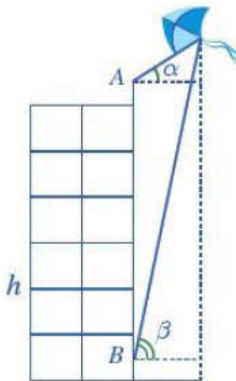


Tính đường kính của chiếc đĩa theo đơn vị xăng-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

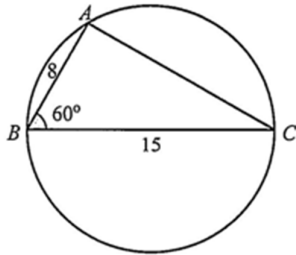
- Câu 87.** Để đo khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B ở hai bên bờ một cái ao, bạn An đi dọc bờ ao từ vị trí A đến vị trí C và tiến hành đo các góc BAC, BCA . Biết $AC = 25m, \widehat{BAC} = 59,95^\circ; \widehat{BCA} = 82,15^\circ$. Hỏi khoảng cách từ vị trí A đến vị trí B là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



- Câu 88.** Hai tàu đánh cá cùng xuất phát từ bến A và đi thẳng đều về hai vùng biển khác nhau, theo hai hướng tạo với nhau góc 75° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 8 hải lí một giờ và tàu thứ hai chạy với tốc độ 12 hải lí một giờ. Sau 2,5 giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu hải lí (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
- Câu 89.** Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc điều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc điều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35^\circ$; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn A là 1,5 m. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn B cũng quan sát chiếc điều và thấy góc nâng là $\beta = 75^\circ$; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn B cũng là 1,5 m. Biết chiều cao của tòa nhà là $h = 20m$ (Hình). Chiếc điều bay cao bao nhiêu mét so mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



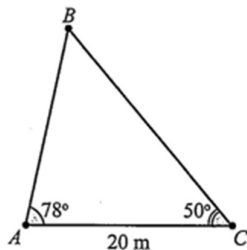
- Câu 90.** Từ một tấm bìa hình tròn, bạn An cắt ra được một hình tam giác có các cạnh $AB = 8cm, BC = 15cm$ và góc $B = 60^\circ$ (Hình 4). Tính độ dài cạnh AC và bán kính R của miếng bìa.



Hình 4

Câu 91. Từ một tấm tôn hình tròn có bán kính $R = 1m$, bạn Trí muốn cắt ra một hình tam giác ABC có các góc $A = 45^\circ, B = 75^\circ$. Hỏi bạn Trí phải cắt miếng tôn theo hai dây cung AB, BC có độ dài lần lượt bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

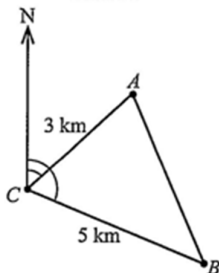
Câu 92. Một cây cao bị nghiêng so với mặt đất góc 78° . Từ vị trí C cách gốc cây $20m$, người ta tiến hành đo đạc và thu được kết quả: $\widehat{ACB} = 50^\circ$ với B là vị trí ngọn cây (Hình 10).



Hình 10

Tính khoảng cách từ gốc cây (điểm A) đến ngọn cây (điểm B) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị mét).

Câu 93. Tàu A cách cảng C một khoảng $3km$ và lệch hướng bắc một góc $47,45^\circ$. Tàu B cách cảng C một khoảng $5km$ và lệch hướng bắc một góc $112,90^\circ$ (Hình 11). Hỏi khoảng cách giữa hai tàu là bao nhiêu ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Hình 11

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 94. Trên biển Đông, đảo A cách đảo B $30 km$ về hướng Đông, tại cùng một thời điểm, tàu thứ nhất xuất phát từ A với vận tốc không đổi, có độ lớn bằng $30 km/h$ và có hướng $N30^\circ E$, tàu thứ hai xuất phát từ B với vận tốc không đổi, có độ lớn $25 km/h$ và có hướng $N60^\circ W$. Hỏi hai tàu có gặp nhau không?

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$.

B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

C. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$.

D. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$.

Câu 2. Cho tam giác ABC , có độ dài ba cạnh là $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A , R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và S là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

$$\text{A. } m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \quad \text{B. } a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A.$$

$$\text{C. } S = \frac{abc}{4R}. \quad \text{D. } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Câu 3. Cho tam giác ABC có $a=8, b=10$, góc C bằng 60° . Độ dài cạnh c là?

$$\text{A. } c = 3\sqrt{21}. \quad \text{B. } c = 7\sqrt{2}. \quad \text{C. } c = 2\sqrt{11}. \quad \text{D. } c = 2\sqrt{21}.$$

Câu 4. Cho $\triangle ABC$ có $b=6, c=8, \hat{A}=60^\circ$. Độ dài cạnh a là:

$$\text{A. } 2\sqrt{13}. \quad \text{B. } 3\sqrt{12}. \quad \text{C. } 2\sqrt{37}. \quad \text{D. } \sqrt{20}.$$

Câu 5. Cho $\triangle ABC$ có $B=60^\circ, a=8, c=5$. Độ dài cạnh b bằng:

$$\text{A. } 7. \quad \text{B. } 129. \quad \text{C. } 49. \quad \text{D. } \sqrt{129}.$$

Câu 6. Cho $\triangle ABC$ có $AB=9, BC=8, \hat{B}=60^\circ$. Tính độ dài AC.

$$\text{A. } \sqrt{73}. \quad \text{B. } \sqrt{217}. \quad \text{C. } 8. \quad \text{D. } \sqrt{113}.$$

Câu 7. Cho tam giác ABC có $AB=2, AC=1$ và $A=60^\circ$. Tính độ dài cạnh BC.

$$\text{A. } BC = \sqrt{2}. \quad \text{B. } BC = 1. \quad \text{C. } BC = \sqrt{3}. \quad \text{D. } BC = 2.$$

Câu 8. Tam giác ABC có $a=8, c=3, \hat{B}=60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

$$\text{A. } 49. \quad \text{B. } \sqrt{97}. \quad \text{C. } 7. \quad \text{D. } \sqrt{61}.$$

Câu 9. Tam giác ABC có $\hat{C}=150^\circ, BC=\sqrt{3}, AC=2$. Tính cạnh AB?

$$\text{A. } \sqrt{13}. \quad \text{B. } \sqrt{3}. \quad \text{C. } 10. \quad \text{D. } 1.$$

Câu 10. Cho a; b; c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC. Biết $b=7; c=5; \cos A = \frac{4}{5}$. Tính độ dài của a.

$$\text{A. } 3\sqrt{2}. \quad \text{B. } \frac{7\sqrt{2}}{2}. \quad \text{C. } \frac{23}{8}. \quad \text{D. } 6.$$

Câu 11. Cho $\widehat{xOy} = 30^\circ$. Gọi A, B là 2 điểm di động lần lượt trên Ox, Oy sao cho $AB=2$. Độ dài lớn nhất của OB bằng bao nhiêu?

$$\text{A. } 4. \quad \text{B. } 3. \quad \text{C. } 6. \quad \text{D. } 2.$$

Câu 12. Cho a; b; c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

$$\text{A. } a^2 < ab + ac. \quad \text{B. } a^2 + c^2 < b^2 + 2ac. \quad \text{C. } b^2 + c^2 > a^2 + 2bc. \quad \text{D. } ab + bc > b^2.$$

Câu 13. Cho tam giác ABC có $AB=4\text{ cm}, BC=7\text{ cm}, AC=9\text{ cm}$. Tính $\cos A$.

$$\text{A. } \cos A = -\frac{2}{3}. \quad \text{B. } \cos A = \frac{1}{2}. \quad \text{C. } \cos A = \frac{1}{3}. \quad \text{D. } \cos A = \frac{2}{3}.$$

Câu 14. Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \text{A. Góc } C > 90^\circ & \quad \text{B. Góc } C < 90^\circ \\ \text{C. Góc } C = 90^\circ & \quad \text{D. Không thể kết luận được gì về góc } C. \end{aligned}$$

Câu 15. Cho tam giác ABC thỏa mãn: $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Khi đó:

$$\text{A. } A = 30^\circ. \quad \text{B. } A = 45^\circ. \quad \text{C. } A = 60^\circ. \quad \text{D. } A = 75^\circ.$$

Câu 16. Cho các điểm $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$. Góc \widehat{BAC} bằng bao nhiêu?

$$\text{A. } 90^\circ. \quad \text{B. } 60^\circ. \quad \text{C. } 45^\circ. \quad \text{D. } 30^\circ.$$

Câu 17. Cho tam giác ABC , biết $a=24, b=13, c=15$. Tính góc A ?

- A. $33^{\circ}34'$. B. $117^{\circ}49'$. C. $28^{\circ}37'$. D. $58^{\circ}24'$.

Câu 18. Cho tam giác ABC , biết $a=13, b=14, c=15$. Tính góc B ?

- A. $59^{\circ}49'$. B. $53^{\circ}7'$. C. $59^{\circ}29'$. D. $62^{\circ}22'$.

Câu 19. Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$ với $b \neq c$. Khi đó, góc \widehat{BAC} bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 120° .

Câu 20. Tam giác ABC có $AB=c, BC=a, CA=b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2 - a^2) = c(a^2 - c^2)$. Khi đó góc \widehat{BAC} bằng bao nhiêu độ.

- A. 30° . B. 60° . C. 90° . D. 45° .

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $MA:MB:MC=1:2:3$ khi đó góc AMB bằng bao nhiêu?

- A. 135° . B. 90° . C. 150° . D. 120° .

Câu 22. Cho tam giác ABC , chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A. $m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{a^2}{4}$. B. $m_a^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$.
C. $m_a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$. D. $m_a^2 = \frac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$.

Câu 23. Tam giác ABC có $AB=9$ cm, $BC=15$ cm, $AC=12$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là

- A. 10 cm. B. 9 cm. C. 7,5 cm. D. 8 cm.

Câu 24. Cho tam giác ABC có $AB=3, BC=5$ và độ dài đường trung tuyến $BM=\sqrt{13}$. Tính độ dài AC .

- A. $\sqrt{11}$. B. 4. C. $\frac{9}{2}$. D. $\sqrt{10}$.

Câu 25. Cho $\triangle ABC$ vuông ở A , biết $\widehat{C}=30^{\circ}$, $AB=3$. Tính độ dài trung tuyến AM ?

- A. 3 B. 4 C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{7}{2}$

Câu 26. Tam giác ABC có $a=6, b=4\sqrt{2}, c=2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM=3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?

- A. $\sqrt{9}$. B. 9. C. 3. D. $\frac{1}{2}\sqrt{108}$.

Câu 27. Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC . Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

- A. $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$. B. $S = a^2 + b^2 + c^2$.

- C. $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$. D. $S = 3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Câu 28. Cho $\triangle ABC$ có $AB=2; AC=3; \widehat{A}=60^{\circ}$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC .

- A. $\frac{12}{5}$. B. $\frac{6\sqrt{2}}{5}$. C. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$. D. $\frac{6}{5}$.

Câu 29. Cho tam giác ABC . Tìm công thức sai:

- A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$. B. $\sin A = \frac{a}{2R}$. C. $b \sin B = 2R$. D. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

Câu 30. Cho $\triangle ABC$ với các cạnh $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

- A. $S = \frac{abc}{4R}$. B. $R = \frac{a}{\sin A}$.
C. $S = \frac{1}{2}ab \sin C$. D. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

Câu 31. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và cạnh $BC = \sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $R = 4$. B. $R = 1$. C. $R = 2$. D. $R = 3$.

Câu 32. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC có $AC = 4$ cm, góc $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Độ dài cạnh BC là

- A. $2\sqrt{6}$. B. $2 + 2\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3} - 2$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 33. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 5$; $\widehat{A} = 40^\circ$; $\widehat{B} = 60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

- A. 3,7. B. 3,3. C. 3,5. D. 3,1.

Câu 34. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$. B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.

- C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$. D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Câu 35. Tam giác ABC có $a = 16,8$; $\widehat{B} = 56^\circ 13'$; $\widehat{C} = 71^\circ$. Cạnh c bằng bao nhiêu?

- A. 29,9. B. 14,1. C. 17,5. D. 19,9.

Câu 36. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 68^\circ 12'$, $\widehat{B} = 34^\circ 44'$, $AB = 117$. Tính AC ?

- A. 68. B. 168. C. 118. D. 200.

Câu 37. Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A. $S = \frac{1}{2}bc \sin A$. B. $S = \frac{1}{2}ac \sin A$. C. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$. D. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$.

Câu 38. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a . Góc $\widehat{BAD} = 30^\circ$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

- A. $\frac{a^2}{4}$. B. $\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. a^2 .

Câu 39. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB = 3, BC = 5, CA = 6$.

- A. $\sqrt{56}$. B. $\sqrt{48}$. C. 6. D. 8.

Câu 40. Cho $\triangle ABC$ có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là:

- A. 48. B. 24. C. 12. D. 30.

Câu 41. Cho $\triangle ABC$ có $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

- A. $5\sqrt{3}$. B. 5. C. 10. D. $10\sqrt{3}$.

Câu 42. Một tam giác có ba cạnh là 13, 14, 15. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

- A. 84. B. $\sqrt{84}$. C. 42. D. $\sqrt{168}$.

Câu 43. Cho các điểm $A(1; -2), B(-2; 3), C(0; 4)$. Diện tích $\triangle ABC$ bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{13}{2}$. B. 13. C. 26. D. $\frac{13}{4}$.

Câu 44. Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích ΔABC là

- A. 12. B. 6. C. $6\sqrt{2}$. D. 9.

Câu 45. Cho tam giác ABC có $a=4, b=6, c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

- A. $9\sqrt{15}$. B. $3\sqrt{15}$. C. 105. D. $\frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Câu 46. Cho tam giác ABC . Biết $AB=2$; $BC=3$ và $\widehat{ABC}=60^\circ$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .

- A. $5+\sqrt{7}$ và $\frac{3}{2}$. B. $5+\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
C. $5\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $5+\sqrt{19}$ và $\frac{3}{2}$.

Câu 47. Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a=15, m_b=12, m_c=9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng

- A. 72. B. 144. C. 54. D. 108.

Câu 48. Cho tam giác ΔABC có $b=7; c=5; \cos A=\frac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác ΔABC là.

- A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. B. 8. C. $8\sqrt{3}$ D. $80\sqrt{3}$

Câu 49. Cho tam giác ABC có $AB=2a; AC=4a$ và $\widehat{BAC}=120^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC ?

- A. $S=8a^2$. B. $S=2a^2\sqrt{3}$. C. $S=a^2\sqrt{3}$. D. $S=4a^2$.

Câu 50. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 51. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác ABC bằng

- A. 12. B. 3. C. 6. D. 24.

Câu 52. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$. C. $\frac{8a}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{6a}{\sqrt{3}}$.

Câu 53. Cho tam giác ABC có $BC=\sqrt{6}, AC=2$ và $AB=\sqrt{3}+1$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

- A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. 2.

Câu 54. Cho tam giác ABC có $AB=3, AC=4, BC=5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

- A. 1. B. $\frac{8}{9}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 55. Cho ΔABC có $S=84, a=13, b=14, c=15$. Độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác trên là:

- A. 8,125. B. 130. C. 8. D. 8,5.

Câu 56. Cho ΔABC có $S=10\sqrt{3}$, nửa chu vi $p=10$. Độ dài bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác trên là:

- A. 3. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 57. Một tam giác có ba cạnh là 26,28,30. Bán kính đường tròn nội tiếp là:

- A. 16. B. 8. C. 4. D. $4\sqrt{2}$.

Câu 58. Một tam giác có ba cạnh là 52,56,60. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là:

- A. $\frac{65}{8}$. B. 40. C. 32,5. D. $\frac{65}{4}$.

Câu 59. Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn ngoại tiếp là?

- A. 6. B. 8. C. $\frac{13}{2}$. D. $\frac{11}{2}$.

Câu 60. Tam giác với ba cạnh là 5;12;13 có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

- A. 2. B. $2\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. 3.

Câu 61. Tam giác với ba cạnh là 6;8;10 có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng bao nhiêu?

- A. 5. B. $4\sqrt{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. 6.

Câu 62. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC , N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

- A. $3\sqrt{5}$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 63. Cho tam giác đều ABC ; gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ADC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

- A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{5+7\sqrt{7}}{9}$. C. $\frac{7+5\sqrt{5}}{9}$. D. $\frac{7+5\sqrt{7}}{9}$.

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ☞ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** ☞ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ☞ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: **Nguyễn Vương**

☞ https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber

☞ Tải nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>