

## BÀI 9. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTOR

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

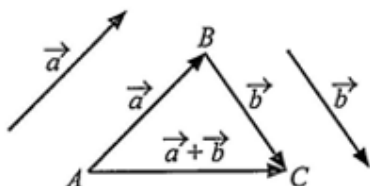
### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I. Tổng của hai vector

##### 1. Định nghĩa

Cho hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$ . Lấy một điểm  $A$  tùy ý, vẽ  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ .

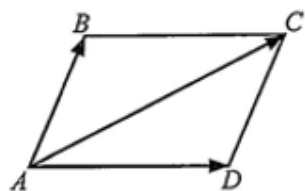
Vector  $\overrightarrow{AC}$  được gọi là tổng của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ .



Nhận xét: Công thức trên cho ta cách rút gọn tổng nhiều vector liên tiếp mà điểm cuối của mỗi vector trong tổng là điểm đầu của vector liền sau nó (trừ vector cuối cùng). Đồng thời, ta cũng phân tích được một vector thành tổng của hai hoặc nhiều vector khác. Ta cũng gọi công thức trên là quy tắc cộng.

##### 2. Quy tắc hình bình hành

Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Nhận xét: Công thức trên cho ta một cách rút gọn tổng của hai vector có cùng điểm đầu.

#### 3. Tính chất

Với ba vector tùy ý  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  (tính chất của vector-không).

Chú ý: Tổng ba vector  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  được xác định theo một trong hai cách:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  hoặc  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

#### II. Hiệu của hai vector

##### 1. Hai vector đối nhau

Vector có cùng độ dài và ngược hướng với vector  $\vec{a}$  được gọi là vector đối của  $\vec{a}$ , kí hiệu là  $-\vec{a}$ .

Với hai điểm  $A, B$  bất kì ta có  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .

Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ .

Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ .

##### 2. Định nghĩa

Phép trừ vector  $\vec{a}$  cho vector  $\vec{b}$  là tổng của vector  $\vec{a}$  và vector đối của vector  $\vec{b}$ , kí hiệu là  $\vec{a} - \vec{b}$ .

Như vậy  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

Với ba điểm  $O, A, B$  bất kì ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ .

Nhận xét: Công thức trên cho ta cách biểu thị một vector thành hiệu hai vector có cùng điểm đầu. Ta cũng gọi công thức trên là quy tắc trừ.

#### III. Trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác

$I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

$G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### Dạng 1. Tìm tổng, hiệu của hai hay nhiều vector

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Cho các điểm  $E, F, G, H, K$ . Thực hiện các phép cộng vector:

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FH}; \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KG}; \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HE}$$

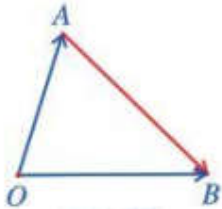
**Câu 2.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Thực hiện các phép cộng vector sau:

a)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BC}$ ,

b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ .

**Câu 3.** Cho các điểm  $M, N, P, Q$ . Thực hiện các phép trừ vector sau:  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}; \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PQ}$ .

**Câu 4.** Cho ba điểm  $A, B, O$ .



Vector  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$  là vector nào?

**Câu 5.** Cho bốn điểm bất kì  $A, B, C, D$ . Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}.$$

**Câu 6.** Cho hình vuông  $ABCD$  với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài của các vector

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}.$$

**Câu 7.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hãy tìm điểm  $M$  để  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ . Tìm mối quan hệ giữa hai vector  $\overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{CM}$

**Câu 8.** Cho tứ giác  $ABCD$ , thực hiện cả phép cộng và trừ vector sau:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

c)  $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$

**Câu 9.** Cho tứ giác  $ABCD$ , tìm các vector sau:

a)  $\vec{m} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC}$

b)  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$

c)  $\vec{m} - \vec{n}$ .

**Câu 10.** Cho tam giác  $MNQ$ , thực hiện các phép trừ vector sau:

a)  $\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{QN}$

b)  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QN}$ .

**Câu 11.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Các khẳng định sau đúng hay sai?

a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$ ;

b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$

c)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ .

**Câu 12.** Cho đường tròn tâm  $O$ . Giả sử  $A, B$  là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vector  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  đối nhau.

**Câu 13.** Cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo,  $E$  là trung điểm của  $AD$ ,  $G$  là giao điểm của  $BE$  và  $AC$ . Tính:

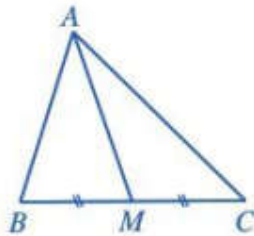
a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$

b)  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GD}$ .

**BÀI TẬP BỔ SUNG****Câu 14.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  sao cho  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .a) Dựng  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ . Chứng minh rằng  $O$  là trung điểm của  $AB$ .b) Dựng  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{AB} = \vec{b}$ . Chứng minh rằng  $B \equiv O$ .**Câu 15.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Xác định tổng của hai véc-tơ  $\vec{NC}$  và  $\vec{MC}$ ,  $\vec{AM}$  và  $\vec{CD}$ ,  $\vec{AD}$  và  $\vec{NC}$ ,  $\vec{AM}$  và  $\vec{AN}$ .**Câu 16.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M$ ,  $N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm của  $AB$ ,  $AC$  và  $BC$ . Xác định hiệu  $\vec{AM} - \vec{AN}$ ;  $\vec{MN} - \vec{NC}$ ;  $\vec{MN} - \vec{PN}$ ;  $\vec{BP} - \vec{CP}$ .**Dạng 2. Chứng minh một đẳng thức vector***Phương pháp:*

- Biến đổi từ biểu thức về này sang về kia.

- Chứng minh hai biểu thức vector cùng bằng một vector trung gian

- Chứng minh hai biểu thức vector cùng bằng một biểu thức vector trung gian bằng cách sử dụng quy tắc trừ với điểm đầu là điểm  $O$  bất kì.**BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP****Câu 17.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ Chứng minh  $\vec{AB} + \vec{MC} = \vec{AM}$ .**Câu 18.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và một điểm  $O$  bất kì. Chứng minh rằng  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OD}$ .**Câu 19.** a) Chứng minh rằng nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .b) Chứng minh rằng nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .**Câu 20.** Cho  $ABCD$  là hình bình hành. Chứng minh  $\vec{MB} - \vec{MA} = \vec{MC} - \vec{MD}$  với mỗi điểm  $M$  trong mặt phẳng.**Câu 21.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh  $\vec{BC} + \vec{AB} = \vec{DC} + \vec{AD}$ .**Câu 22.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Chứng minh:  $\vec{OC} + \vec{OD} = \vec{AC} + \vec{BD}$ **Câu 23.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh

$$\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} = \vec{AD}.$$

**Câu 24.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh rằng:

a)  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$

b)  $\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{BC} - \vec{BD}$

**Câu 25.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Chứng minh  $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{BA} + \vec{BC}|$ .**Câu 26.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Chứng minh rằng

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

**Câu 27.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ .  $M$  là một điểm tùy ý thuộc cạnh  $BC$ , khác  $B$  và  $C$ .  $MO$  cắt cạnh  $AD$  tại  $N$ .a) Chứng minh rằng  $O$  là trung điểm  $MN$ .b) Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Chứng minh rằng  $G$  cũng là trọng tâm tam giác  $MNC$ .**Câu 28.** Cho tứ giác  $ABCD$ .

- a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ .
- b) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .
- Câu 29.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $O$  là trung điểm của  $IJ$ . Chứng minh  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .
- Câu 30.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm hai đường chéo và một điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng:
- a)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$
- b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$
- Câu 31.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Chứng minh rằng:
- a)  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$
- b)  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$
- Câu 32.** Cho hình thoi  $ABCD$  và  $M$  là trung điểm cạnh  $AB, N$  là trung điểm cạnh  $CD$ . Chứng minh rằng:
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}$ .
- Câu 33.** Chứng minh rằng với tứ giác  $ABCD$  bất kì, ta luôn có:
- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
- b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ .
- Câu 34.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Chứng minh rằng:
- a)  $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ ;
- b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$ ;
- c)  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ ;
- d)  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .
- Câu 35.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh:
- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
- b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
- Câu 36.** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ .
- Câu 37.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác.  $M, N, P$  là ba điểm bất kì. Chứng minh  $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$ .
- Câu 38.** Cho sáu điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA}$ .
- Câu 39.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NB}$ .
- Câu 40.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Chứng minh rằng nếu hai vectơ cùng hướng thì  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ .
- Câu 41.** Cho hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có cùng trọng tâm là  $G$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ .
- Câu 42.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có các cạnh đôi một khác nhau. Gọi  $H, O$  lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác,  $D$  là điểm đối xứng với  $H$  qua  $O$ . Chứng minh  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 43.** Chứng minh rằng điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ .
- Câu 44.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Chứng minh rằng với điểm  $O$  bất kì ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ .
- Câu 45.** Gọi  $O$  là tâm của tam giác đều  $ABC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .
- Câu 46.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng
- a)  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ .

- b)  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ .
- c)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$  với  $O$  là điểm bất kì.
- Câu 47.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ ,  $M$  là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng
- a)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .
- b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .
- c)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ .
- Câu 48.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $O$  là một điểm bất kì trên đường chéo  $AC$ . Qua  $O$  kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt  $AB$  và  $DC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ , cắt  $AD$  và  $BC$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ . Chứng minh
- a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ .
- b)  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$
- Câu 49.** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Chứng minh rằng
- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$ .
- b)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$ .
- Câu 50.** Cho ngũ giác đều  $ABCDE$  tâm  $O$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ .
- Câu 51.** Cho các điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$ .
- Câu 52.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ , và  $M$  là một điểm bất kì. Chứng minh rằng
- a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .
- b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}$ .

### Dạng 3. Tính độ dài của một vector tổng; vector hiệu

#### Phương pháp:

- Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính độ dài.
- Sử dụng tính chất của các tam giác đặc biệt: tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, tam giác vuông cân.
- Sử dụng tính chất của tứ giác đặc biệt: hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành,...

### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 53.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính độ dài của các vector  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .
- Câu 54.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ , độ dài các cạnh bằng 1.
- a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .
- b) Tính độ dài của các vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}$ ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ .
- Câu 55.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$ . Tính độ dài các vector:
- a)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
- b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- c)  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$
- Câu 56.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và ba điểm  $G, H, K$  thỏa mãn  $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$ ;  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ;  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$
- Tính độ dài các vector  $\overrightarrow{KA}$ ,  $\overrightarrow{GH}$ ,  $\overrightarrow{AG}$
- Câu 57.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 1. Tính độ dài của các vector sau:
- a)  $\vec{a} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CB}$
- b)  $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ .
- Câu 58.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng 1 và  $M$  là trung điểm  $BC$ . Tính độ dài của các vector sau:
- a)  $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

b)  $\vec{b} = (\vec{MC} - \vec{MA}) + (\vec{MB} - \vec{MA})$ .

**Câu 59.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$ . Tính độ dài của các vector  $\vec{AB} + \vec{BC}$  và  $\vec{AB} - \vec{BC}$ .

**Câu 60.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $O$  và có cạnh bằng  $a$ . Cho 2 điểm  $M, N$  thỏa mãn:

$$\vec{MA} + \vec{MD} = \vec{0}; \vec{NB} + \vec{ND} + \vec{NC} = \vec{0}$$

Tìm độ dài các vector  $\vec{MA}, \vec{NO}$ .

**Câu 61.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Tính độ dài của các vector sau:

a)  $\vec{DA} + \vec{DC}$ ;

b)  $\vec{AB} - \vec{AD}$

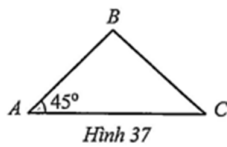
c)  $\vec{OA} + \vec{OB}$  với  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

**Câu 62.** Cho  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ . Tính:

a)  $|\vec{AB} - \vec{AC}|$ ,

b)  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

**Câu 63.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a, AC = 3a, \widehat{BAC} = 45^\circ$  (Hình 37). Tính:



a)  $|\vec{AB} - \vec{AC}|$

b)  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$ .

**Câu 64.** Cho tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật. Chứng minh  $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AB} - \vec{AD}|$ .

**Câu 65.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A, AB = 4a, AC = 5a$ . Tính:

a)  $|\vec{AB} - \vec{AC}|$ ;

b)  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$ .

**Câu 66.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính:

a)  $|\vec{AB} + \vec{BC}|$

b)  $|\vec{AB} - \vec{AC}|$ ;

c)  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$

**Câu 67.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AB} - \vec{AC}|$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

**Câu 68.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 69.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$  và  $|\vec{AB} - \vec{AC}|$ .

**Câu 70.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Trên cạnh  $AC = b$  lấy hai điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $AE = EF = FC$ ,  $BE$  cắt trung tuyến  $AM$  tại  $N$ . Tính độ dài vector  $\vec{u} = \vec{AE} + \vec{AF} + \vec{AN} + \vec{MN}$

**Câu 71.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{ABC} = 30^\circ$  và  $BC = a\sqrt{5}$ . Tính độ dài của các vector  $\vec{AB} + \vec{BC}$ ,  $\vec{AC} - \vec{BC}$  và  $\vec{AB} + \vec{AC}$ .

**Câu 72.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $b$ . Tính  $|\vec{DA} - \vec{AB}|, |\vec{DA} + \vec{DC}|, |\vec{DB} + \vec{DC}|$

**Câu 73.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính  $|\vec{OA} - \vec{CB}|, |\vec{AB} + \vec{DC}|$  và  $|\vec{CD} - \vec{DA}|$

**Câu 74.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  có tâm  $O$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $D$ . Hãy tính độ dài của các vector sau  $\vec{MD}, \vec{MN}$ .

**Câu 75.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  có tâm  $O$  và  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Tính độ dài của các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$  và  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .

**Câu 76.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $O$  và cạnh  $a$ .  $M$  là một điểm bất kỳ

a) Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}|, |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|$

b) Tính độ dài vectơ  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

**Câu 77.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $O$  và cạnh  $a$  và  $M$  là một điểm bất kỳ. Tính

a) Tính  $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AD}|$

b) Tính  $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$

c) Tính  $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

#### Dạng 4. Xác định một điểm thỏa một đẳng thức vectơ cho trước

### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 78.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ .

a) Tính độ dài của vectơ  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$ .

b) Xác định điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$ .

**Câu 79.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ .

a) Xác định vectơ  $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$ .

b) Xác định điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MA}$ .

c) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ .

**Câu 80.** Cho hai điểm  $A, B$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  trong mặt phẳng thỏa mãn  $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}|$ .

**Câu 81.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  trong mặt phẳng thỏa mãn  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}|$

### BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 82.** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện sau đây:

a)  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

b)  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

c)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

d)  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM}$

**Câu 83.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

**Câu 84.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho

a)  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

b)  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|$

**Câu 85.** Cho 2 điểm  $A$  và  $B$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$

#### Dạng 5. Bài toán thực tế

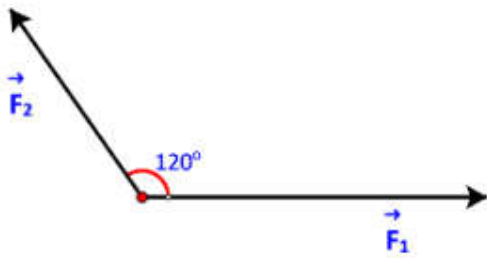
### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 86.** Một con tàu chuyển động từ bờ bên này sang bờ bên kia của một dòng sông với vận tốc riêng không đổi. Giả sử vận tốc dòng nước là không đổi và đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc thực tế của tàu. Nếu không quan tâm đến điểm đến thì cần giữ lái cho tàu tạo với bờ sông một góc bao nhiêu để tàu sang bờ bên kia được nhanh nhất?





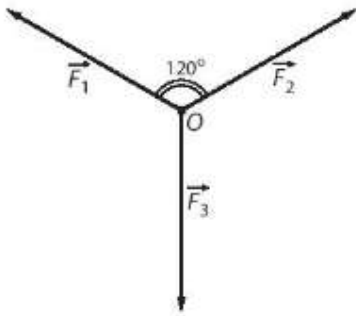
**Câu 87.** Hình 4.19 biểu diễn hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cùng tác động lên một vật, cho  $|\vec{F}_1| = 3N, |\vec{F}_2| = 2N$ . Tính độ lớn của hợp lực  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$



**Câu 88.** Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước.



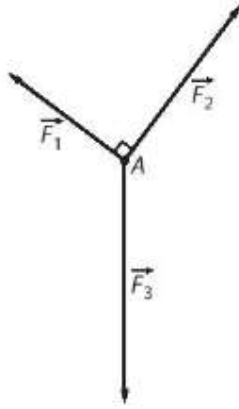
**Câu 89.** Trên Hình biểu diễn ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng 0. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng  $100N$  và góc tạo bởi  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  bằng  $120^\circ$ .



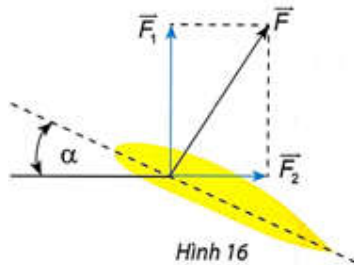
Tính cường độ của lực  $\vec{F}_3$ .

**Câu 90.** Trên Hình biểu diễn ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng A. Cho biết  $|\vec{F}_1| = 30N, |\vec{F}_2| = 40N$ . Tính cường độ của lực  $\vec{F}_3$ .



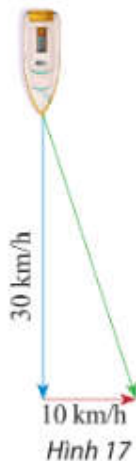


- Câu 91.** Trên mặt phẳng, chất điểm  $A$  chịu tác dụng của ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  và ở trạng thái cân bằng. Góc giữa hai vector  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  bằng  $60^\circ$ . Tính độ lớn của  $\vec{F}_3$ , biết  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 2\sqrt{3} \text{ N}$
- Câu 92.** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}, \vec{F}_2 = \vec{MB}$  và  $\vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều là  $10 \text{ N}$  và  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ . Tìm độ lớn của lực  $\vec{F}_3$ .
- Câu 93.** Khi máy bay nghiêng cánh một góc  $\alpha$ , lực  $\vec{F}$  của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng  $\vec{F}_1$  và lực cản  $\vec{F}_2$  (Hình 16). Cho biết  $\alpha = 30^\circ$  và  $|\vec{F}| = a$ . Tính  $|\vec{F}_1|$  và  $|\vec{F}_2|$  theo  $a$ .



Hình 16

- Câu 94.** Một con tàu có vector vận tốc chỉ theo hướng nam, vận tốc của dòng nước là một vector theo hướng đông như hình 17. Tính độ dài vector tổng của hai vector nói trên.



Hình 17

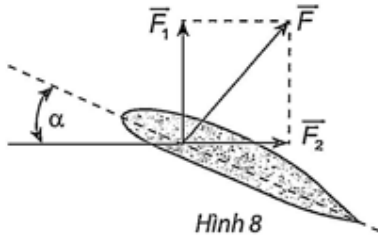
- Câu 95.** Một máy bay có vector vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vector theo hướng đông như Hình 7. Tính độ dài vector tổng của hai vector nói trên.



Hình 7

**Câu 96.** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$  và  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết độ lớn của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều là  $100\text{ N}$  và  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Tìm độ lớn của lực  $\vec{F}_3$ .

**Câu 97.** Khi máy bay nghiêng cánh một góc  $\alpha$ , lực  $\vec{F}$  của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng  $\vec{F}_1$  và lực cản  $\vec{F}_2$  (Hình 8). Cho biết  $\alpha = 45^\circ$  và  $|\vec{F}| = a$ . Tính  $|\vec{F}_1|$  và  $|\vec{F}_2|$  theo  $a$ .



Hình 8

**Câu 98.** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$  và  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{OC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $O$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều là  $120\text{ N}$  và  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ . Xác định cường độ và hướng của lực  $\vec{F}_3$ .

**Câu 99.** Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là  $10\text{ km/h}$ . Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc  $40\text{ km/h}$  so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Cho ba điểm  $M, N, P$ . Vector  $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$  bằng vector nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{PN}$ ;
- B.  $\overrightarrow{PM}$
- C.  $\overrightarrow{MP}$ ;
- D.  $\overrightarrow{NM}$ .

**Câu 2.** Cho ba điểm  $D, E, G$ . Vector  $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG})$  bằng vector nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{EG}$
- B.  $\overrightarrow{GE}$ ;
- C.  $\overrightarrow{GD}$ ;
- D.  $\overrightarrow{ED}$ .

**Câu 3.** Cho ba điểm  $M, N, P$  phân biệt. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
- B.  $-\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
- C.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ .
- D.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{MP}$ .

**Câu 4.** Cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .

- B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$ .  
 D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$ .
- Câu 5.** Cho các điểm  $A, B, O$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?  
 A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ .  
 B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .  
 D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ .
- Câu 6.** Cho ba điểm  $A, B, M$  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là:  
 A.  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .  
 B.  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ .  
 C.  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$  ngược hướng.  
 D.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .
- Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$ . Điều kiện cần và đủ để  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  là:  
 A.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$ .  
 B.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$ .  
 C.  $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB}$ .  
 D.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .
- BÀI TẬP BỔ SUNG**
- Câu 8.** Cho hình bình hành tâm  $O$ . Kết quả nào sau đây là đúng?  
 A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$       B.  $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$       C.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$       D.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB}$
- Câu 9.** Cho ba vector  $\vec{a}, \vec{b}$  và  $\vec{c}$  khác vector-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?  
 A.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .      B.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .  
 C.  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .      D.  $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$ .
- Câu 10.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Vector tổng  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$  bằng  
 A.  $\overrightarrow{CA}$ .      B.  $\overrightarrow{BD}$ .      C.  $\overrightarrow{AC}$ .      D.  $\overrightarrow{DB}$ .
- Câu 11.** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?  
 A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .      B.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ .  
 C.  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}$ .      D.  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$ .
- Câu 12.** Cho bốn điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Vector tổng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$  bằng  
 A.  $\vec{0}$ .      B.  $\overrightarrow{AC}$ .      C.  $\overrightarrow{BD}$ .      D.  $\overrightarrow{BA}$ .
- Câu 13.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Vector tổng  $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP}$  bằng  
 A.  $\overrightarrow{BP}$ .      B.  $\overrightarrow{MN}$ .      C.  $\overrightarrow{CP}$ .      D.  $\overrightarrow{PA}$ .
- Câu 14.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?  
 A.  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ .  
 C.  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IB}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$ .
- Câu 15.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?  
 A.  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{IB}$ .      B.  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DI}$ .  
 C.  $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{IA}$ .

**Câu 16.** Cho các điểm phân biệt  $M, N, P, Q, R$ . Xác định vector tổng  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ .

- A.  $\overrightarrow{MP}$ .                      B.  $\overrightarrow{MN}$ .                      C.  $\overrightarrow{MQ}$ .                      D.  $\overrightarrow{MR}$ .

**Câu 17.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$ .                      B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .  
C.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$ .                      D.  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$ .

**Câu 18.** Cho tam giác  $ABC$  và  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ .                      B.  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ .  
C.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$ .                      D.  $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$ .

**Câu 19.** Cho hình vuông  $ABCD$ , tâm  $O$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$ .                      B.  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CA}$ .  
C.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .                      D.  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ .

**Câu 20.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .                      B.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$ .  
C.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$ .                      D.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ .

**Câu 21.** Gọi  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$ .                      B.  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ .                      D.  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$ .

**Câu 22.** Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ .

- A.  $\overrightarrow{BC}$ .                      B.  $\overrightarrow{DA}$ .                      C.  $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ .                      D.  $\overrightarrow{AB}$ .

**Câu 23.** Cho  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Hỏi vector  $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$  bằng vector nào?

- A.  $\overrightarrow{BA}$ .                      B.  $\overrightarrow{BC}$ .                      C.  $\overrightarrow{DC}$ .                      D.  $\overrightarrow{AC}$ .

**Câu 24.** Chọn khẳng định sai:

- A. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .  
B. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}$ .  
C. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .  
D. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ .

**Câu 25.** Cho 4 điểm bất kỳ  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng:

- A.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$ .                      B.  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .  
C.  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ .                      D.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$ .

**Câu 26.** Chỉ ra vector tổng  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RN} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QR}$  trong các vector sau

- A.  $\overrightarrow{MR}$ .                      B.  $\overrightarrow{MQ}$ .                      C.  $\overrightarrow{MP}$ .                      D.  $\overrightarrow{MN}$ .

**Câu 27.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và điểm  $M$  tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ .                      B.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$ .  
C.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$ .                      D.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ .

**Câu 28.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Khi đó vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$  là:

- A.  $\vec{u} = \vec{0}$ .                      B.  $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ .                      C.  $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ .                      D.  $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 29.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Khi đó vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$  bằng:

- A.  $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ .                      B.  $\vec{u} = \vec{0}$ .                      C.  $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ .                      D.  $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 30.** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$ .                      B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .                      D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB}$ .

**Câu 31.** Cho Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ . B.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ . D.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ .
- Câu 32.** Cho Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?  
 A.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EO} = \vec{0}$ . B.  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ .  
 C.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OC}$ . D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \vec{0}$ .
- Câu 33.** Cho 4 điểm  $A, B, C,$  D. Đẳng thức nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ . D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$ .
- Câu 34.** Cho  $\triangle ABC$ , vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành  $ABEF, ACPQ, BCMN$ . Xét các mệnh đề:  
 (I)  $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}$   
 (II)  $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{MN}$   
 (III)  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MC}$   
 Mệnh đề đúng là :  
 A. Chỉ (I). B. Chỉ (III). C. (I) và (II). D. Chỉ (II).
- Câu 35.** Cho 5 điểm phân biệt  $M, N, P, Q, R$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP}$ . B.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .  
 C.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$ . D.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$ .
- Câu 36.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , đẳng thức véc tơ nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ .  
 C.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$ . D.  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .
- Câu 37.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Khẳng định nào sau đây là đúng:  
 A.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$ . B.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$ . D.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD}$ .
- Câu 38.** Cho 4 điểm bất kì  $A, B, C, O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$ . B.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ . D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ .
- Câu 39.** Cho 3 điểm phân biệt  $A, B, C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ . B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ . D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$ .
- Câu 40.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Khi đó  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$  bằng  
 A.  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$ . B.  $\overrightarrow{AB}$ . C.  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ . D.  $\overrightarrow{CD}$ .
- Câu 41.** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$ .  
 B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ .  
 D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$ .
- Câu 42.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của đoạn  $BC$  và  $AD$ . Tính tổng  $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC}$ .  
 A.  $\overrightarrow{AC}$ . B.  $\overrightarrow{NM}$ . C.  $\overrightarrow{CA}$ . D.  $\overrightarrow{MN}$ .
- Câu 43.** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Tổng véc tơ:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$  bằng

A.  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DB}$ . B.  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DF}$ .

C.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$ . D.  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF}$ .

**Câu 44.** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D, E, F$ . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$ .

C.  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC}$ . D.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$ .

**Câu 45.** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ . B.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$ .

C.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$ . D.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ .

**Câu 46.** 6Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyến  $AM$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $AE = EF = FC$ ,  $BE$  cắt  $AM$  tại  $N$ . Chọn mệnh đề đúng:

A.  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$ . B.  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ .

C.  $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} = \vec{0}$ . D.  $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{EF}$ .

**Câu 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ . Hệ thức nào là đúng?

A.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$ . B.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ .

C.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ . D.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 48.** Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$ , tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$

C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = 6|\overrightarrow{AB}|$ . D.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .

**Câu 49.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $G_1$  là điểm đối xứng của  $G$  qua  $M$ . Vector tổng  $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}$  bằng

A.  $\overrightarrow{GA}$ .

B.  $\overrightarrow{BC}$ .

C.  $\overrightarrow{G_1A}$ .

D.  $\overrightarrow{G_1M}$ .

**Câu 50.** Xét tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1)  $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ ;

2) Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân;

3) Tam giác  $ABC$  là tam giác đều;

4) Tam giác  $ABC$  là tam giác cân.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

**Câu 51.** Xét tam giác  $ABC$  nội tiếp có  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp,  $H$  là trực tâm. Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$ . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1)  $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ ;

2)  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HA}$ ;

3)  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$ , với  $H_1$  là điểm đối xứng của  $H$  qua  $O$ ;

4) Nếu  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$  thì tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

**Câu 52.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hai điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Tìm đẳng thức sai:

A.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$  B.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

C.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NC}$

D.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DB}$

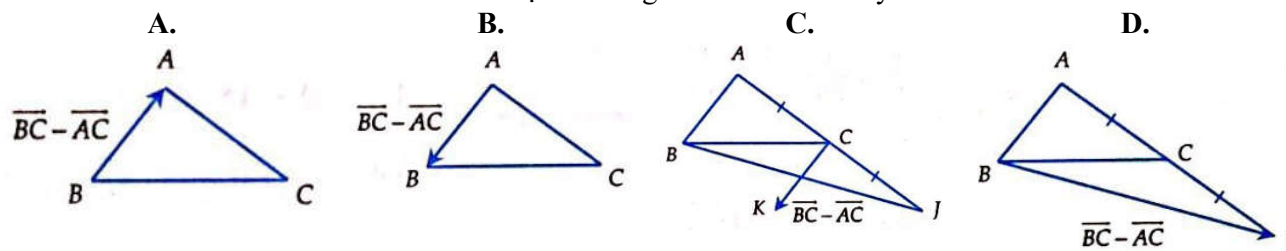
- Câu 53.** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$  bất kì trên mặt phẳng. Tìm đẳng thức sai trong các đẳng thức sau:  
**A.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$  **B.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$   
**C.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF}$  **D.**  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$
- Câu 54.** Cho  $\triangle ABC$ , các điểm  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC, BC$ . Với  $O$  là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$  **B.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$   
**C.**  $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$  **D.**  $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$
- Câu 55.** Cho 4 điểm  $M, N, P, Q$  bất kì. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng.  
**A.**  $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MN}$  **B.**  $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ}$   
**C.**  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$  **D.**  $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MQ}$
- Câu 56.** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$  phân biệt. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?  
**A.**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$  **B.**  $\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BF} = \vec{0}$   
**C.**  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$  **D.**  $\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CF}$
- Câu 57.** Cho  $n$  điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Bạn Bình kí hiệu chúng là  $B_1, B_2, \dots, B_n$  ( $A_i \neq B_n$ ). Vector tổng  $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n}$  bằng  
**A.**  $\vec{0}$ . **B.**  $\overrightarrow{A_1A_n}$ . **C.**  $\overrightarrow{B_1B_n}$ . **D.**  $\overrightarrow{A_1B_n}$ .
- Câu 58.** Cho hai điểm  $A, B$  phân biệt. Xác định điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$   
**A.**  $M$  ở vị trí bất kì  
**B.**  $M$  là trung điểm của  $AB$   
**C.** Không tìm được  $M$   
**D.**  $M$  nằm trên đường trung trực của  $AB$
- Câu 59.** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  là trung điểm  $AB$ . **B.**  $M$  trùng  $A$ .  
**C.**  $M$  trùng  $B$ . **D.**  $A$  là trung điểm  $MB$ .
- Câu 60.** Cho  $\triangle ABC$ ,  $B$ . Tìm điểm  $I$  để  $\overrightarrow{IA}$  và  $\overrightarrow{CB}$  cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $I$  là trung điểm  $AB$ . **B.**  $I$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .  
**C.** Không có điểm  $I$ . **D.** Có vô số điểm  $I$ .
- Câu 61.** Cho 2 điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  là trung điểm  $AB$ . **B.**  $M$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .  
**C.** Không có điểm  $M$ . **D.** Có vô số điểm  $M$ .
- Câu 62.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  là trung điểm  $AB$ . **B.**  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ .  
**C.**  $M$  trùng  $B$ . **D.**  $A$  là trung điểm  $MB$ .
- Câu 63.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  trùng  $D$ . **B.**  $M$  trùng  $A$ .  
**C.**  $M$  trùng  $B$ . **D.**  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 64.** Cho  $ABCD$  là hình bình hành,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
**A.**  $M$  trùng  $D$ . **B.**  $M$  trùng  $A$ .  
**C.**  $M$  trùng  $B$ . **D.**  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 65.** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?



- A.  $M$  trùng  $O$ .      B.  $M$  trùng  $A$ .  
C.  $M$  trùng  $B$ .      D.  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 66.** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $M$  trùng  $D$ .      B.  $M$  trùng  $A$ .  
C.  $M$  trùng  $B$ .      D.  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 67.** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $M$  trùng  $O$ .      B.  $M$  trùng  $A$ .  
C.  $M$  trùng  $B$ .      D.  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 68.** Cho tứ giác  $PQRN$  có  $O$  là giao điểm 2 đường chéo,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{ON}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $M$  trùng  $P$ .      B.  $M$  trùng  $Q$ .  
C.  $M$  trùng  $O$ .      D.  $M$  trùng  $R$ .
- Câu 69.** Cho  $\triangle ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .      B.  $M$  là trung điểm  $BC$ .  
C.  $M$  là trung điểm  $CA$ .      D.  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ .
- Câu 70.** Cho  $\triangle DEF$ , tìm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ED}$ .      B.  $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}$ .      C.  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DF}$ .      D.  $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$ .
- Câu 71.** Cho  $\triangle DEF$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF}$ .      B.  $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EM}$ .      C.  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EM}$ .      D.  $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$ .
- Câu 72.** Cho  $\triangle ABC$  có  $O$  là trung điểm  $BC$ , tìm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $M$  trùng  $A$ .      B.  $M$  trùng  $B$ .  
C.  $M$  trùng  $O$ .      D.  $M$  trùng  $C$ .
- Câu 73.** Cho  $\triangle ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .      B.  $M$  là trung điểm  $BC$ .  
C.  $M$  là trung điểm  $CA$ .      D.  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ .
- Câu 74.** Cho  $\triangle ABC$ , điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $M$  trùng  $A$ .      B.  $M$  trùng  $B$ .  
C.  $ACMB$  là hình bình hành.      D.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$ .
- Câu 75.** Cho  $\triangle ABC$ ,  $D$  là trung điểm  $AB$ ,  $E$  là trung điểm  $BC$ , điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CM}$ .      B.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ED}$ .  
C.  $M$  là trung điểm  $BC$ .      D.  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$ .
- Câu 76.** Cho tứ giác  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .      B.  $M$  là trung điểm  $BC$ .  
C.  $D$  là trung điểm  $BM$ .      D.  $M$  là trung điểm  $DC$ .
- Câu 77.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tìm vị trí điểm  $N$  thỏa mãn:  
 $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$ .

- A. Điểm  $N$  là trung điểm cạnh  $AB$   
 B. Điểm  $C$  là trung điểm cạnh  $BN$   
 C. Điểm  $C$  là trung điểm cạnh  $AM$   
 D. Điểm  $B$  là trung điểm cạnh  $NC$
- Câu 78.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tìm vị trí điểm  $M$  thỏa mãn:  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$ .  
 A. Điểm  $M$  là trung điểm cạnh  $AC$   
 B. Điểm  $M$  là trung điểm cạnh  $BD$   
 C. Điểm  $C$  là trung điểm cạnh  $AM$   
 D. Điểm  $B$  là trung điểm cạnh  $MC$
- Câu 79.** Trên đường tròn  $C(O; R)$  lấy điểm cố định  $A$ ;  $B$  là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi  $M$  là điểm di động sao cho  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ . Khi đó tập hợp điểm  $M$  là:  
 A. đường tròn tâm  $O$  bán kính  $2R$ .  
 B. đường tròn tâm  $A$  bán kính  $R$   
 C. đường thẳng song song với  $OA$   
 D. đường tròn tâm  $C$  bán kính  $R\sqrt{3}$
- Câu 80.** Cho  $\triangle ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = \overrightarrow{MC}$  là:  
 A. một đường tròn tâm  $C$   
 B. đường tròn tâm  $I$  ( $I$  là trung điểm của  $AB$ )  
 C. một đường thẳng song song với  $AB$   
 D. là đường thẳng trung trực của  $BC$

**Câu 81.** Cho  $\triangle ABC$ . Vector  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$  được vẽ đúng ở hình nào sau đây?



**Câu 82.** Cho tam giác  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm}$ . Khi đó độ dài  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$  là:

- A. 4  
 B. 8  
 C.  $2\sqrt{13}$   
 D.  $\sqrt{13}$

**Câu 83.** Cho hình thang cân  $ABCD$ , có đáy nhỏ và đường cao cùng bằng  $2a$  và  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ . Tính  $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}|$ .

- A.  $a\sqrt{3}$   
 B.  $2a\sqrt{5}$   
 C.  $a\sqrt{5}$   
 D.  $a\sqrt{2}$

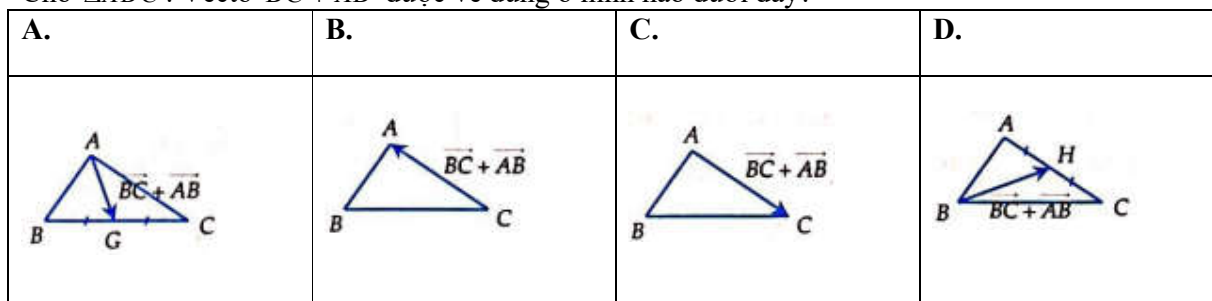
**Câu 84.** Cho 2 vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo với nhau góc  $60^\circ$ . Biết  $|\vec{a}| = 6$ ;  $|\vec{b}| = 3$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$

- A.  $3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$   
 B.  $3(\sqrt{7} + \sqrt{3})$   
 C.  $6(\sqrt{5} + 3)$   
 D.  $\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{51})$

**Câu 85.** Cho hình thang  $ABCD$  có  $AB$  song song với  $CD$ . Cho  $AB = 2a$ ,  $CD = a$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $AD$ . Khi đó:

- A.  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$   
 B.  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = a$   
 C.  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = \frac{3a}{2}$   
 D.  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 0$

**Câu 86.** Cho  $\triangle ABC$ . Vector  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$  được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?



**Câu 87.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\widehat{BAD} = 60^\circ$  và cạnh là  $a$ . Tính độ dài  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$ .

- A.  $a\sqrt{3}$       B.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$       C.  $a\sqrt{2}$       D.  $2a$

**Câu 88.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh là  $a$ .  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Tính  $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$ .

- A.  $a\sqrt{3}$       B.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$       D.  $a\sqrt{2}$

**Câu 89.** Với  $\forall \vec{a}, \vec{b}$  độ dài  $|\vec{a} + \vec{b}|$ :

- A. Bao giờ cũng lớn hơn  $|\vec{a}| + |\vec{b}|$       B. Không nhỏ hơn  $|\vec{a}| + |\vec{b}|$   
C. Bao giờ cũng nhỏ hơn  $|\vec{a}| + |\vec{b}|$       D. Không lớn hơn  $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

**Câu 90.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ . Khi đó  $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}|$  bằng:

- A. 0      B.  $3a$       C.  $a$       D.  $a(\sqrt{3} - 1)$

**Câu 91.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , trọng tâm  $G$ . Tính độ dài vector  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$ .

- A.  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{a}{3}$       C.  $\frac{2a}{3}$       D.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

**Câu 92.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh là 3. Tính độ dài  $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$ :

- A. 6      B.  $6\sqrt{2}$       C. 12      D. 0

**Câu 93.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$  và  $M$  là trung điểm  $AB$ . Tính độ dài  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$ .

- A.  $a$       B.  $3a$       C.  $\frac{a}{2}$       D.  $2a$

**Câu 94.** Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $BC = a\sqrt{2}$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ . Tính độ dài vector  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}|$ .

- A.  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$       B.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$       D.  $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

**Câu 95.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng 3.  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Tìm mệnh đề sai.

- A.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{3}$       B.  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}| = \frac{\sqrt{63}}{2}$       C.  $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = 3$       D.  $|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}| = \sqrt{3}$

**Câu 96.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Độ dài  $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$  bằng

- A.  $2a$       B.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$       D.  $a\sqrt{2}$

**Câu 97.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$       B.  $\overrightarrow{AC} = a$       C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$       D.  $|\overrightarrow{AB}| = a$

**Câu 98.** Cho  $\overrightarrow{AB}$  khác  $\vec{0}$  và cho điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ?

- A. Vô số.      B. 1 điểm.      C. 2 điểm.      D. Không có điểm nào.

**Câu 99.** Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

- A.  $\vec{0}$  cùng hướng với mọi vector.      B.  $\vec{0}$  cùng phương với mọi vector.  
C.  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$       D.  $|\overrightarrow{AB}| > 0$

**Câu 100.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $I$ ;  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Đẳng thức nào sau đây **sai**?

- A.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$       B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$   
C.  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$       D.  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

**Câu 101.** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh  $AB = 5$ ,  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$ .

- A.  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ .    B.  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 5$ .  
 C.  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$ .    D.  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$ .

**Câu 102.** Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ .    B.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ .    C.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ .    D.  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ .

**Câu 103.** Có hai lực  $\overrightarrow{F_1}$ ,  $\overrightarrow{F_2}$  cùng tác động vào một vật đứng tại điểm  $O$ , biết hai lực  $\overrightarrow{F_1}$ ,  $\overrightarrow{F_2}$  đều có cường độ là  $50$  (N) và chúng hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

- A.  $100$  (N).    B.  $50\sqrt{3}$  (N).  
 C.  $100\sqrt{3}$  (N).    D. Đáp án khác.

**Câu 104.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  và  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- A.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .    B.  $ABCD$  là hình thoi.  
 C.  $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$ .    D.  $ABCD$  là hình thang cân.

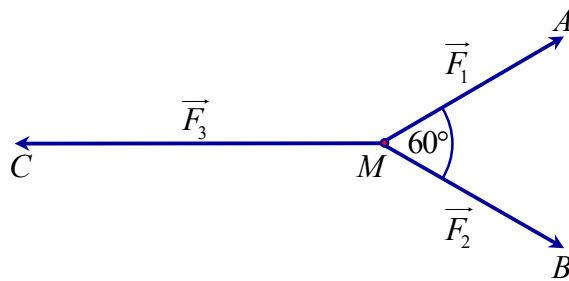
**Câu 105.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = a$ . Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .

- A.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$ .    B.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .  
 C.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$ .    D.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$ .

**Câu 106.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , có  $AH$  là đường trung tuyến. Tính  $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}|$ .

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .    B.  $2a$ .    C.  $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ .    D.  $a\sqrt{3}$ .

**Câu 107.** Cho ba lực  $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$ ,  $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\overrightarrow{F_1}$ ,  $\overrightarrow{F_2}$  đều bằng  $25$  N và góc  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Khi đó cường độ lực của  $\overrightarrow{F_3}$  là



- A.  $25\sqrt{3}$  N.    B.  $50\sqrt{3}$  N.    C.  $50\sqrt{2}$  N.    D.  $100\sqrt{3}$  N.

**Câu 108.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Tìm khẳng định sai.

- A.  $|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}| = IA$ .    B.  $|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}| = BC$ .  
 C.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2AI$ .    D.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3GA$ .

**Câu 109.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ .    B.  $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$ .  
 C.  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ .    D.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ .

**Câu 110.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $2a$ . Tính  $|\overline{AB} + \overline{AD}|$ .

- A.  $4a\sqrt{2}$ .      B.  $4a$ .      C.  $2a\sqrt{2}$ .      D.  $2a$ .

**Câu 111.** Cho tam giác  $ABC$  đều, cạnh  $2a$ , trọng tâm  $G$ . Độ dài vectơ  $\overline{AB} - \overline{GC}$  là

- A.  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .      B.  $\frac{2a}{3}$ .      C.  $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 112.** Tam giác  $ABC$  thỏa mãn:  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AB} - \overline{AC}|$  thì tam giác  $ABC$  là

- A. Tam giác vuông  $A$ .    B. Tam giác vuông  $C$ .  
C. Tam giác vuông  $B$ .    D. Tam giác cân tại  $C$ .

**Câu 113.** Cho hai lực  $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$ ,  $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\overrightarrow{F_1}$ ,  $\overrightarrow{F_2}$  lần lượt là  $300(\text{N})$  và  $400(\text{N})$ .  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A.  $0(\text{N})$ .      B.  $700(\text{N})$ .      C.  $100(\text{N})$ .      D.  $500(\text{N})$ .

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ☞ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** ☞ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ☞ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: **Nguyễn Vương**

☞ [https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view\\_as=subscriber](https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUbT3nwJfA?view_as=subscriber)

☞ Tải nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>

# BÀI 9. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTOR

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

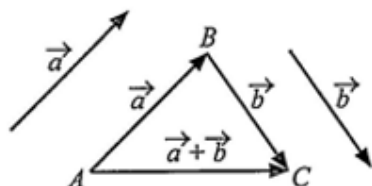
## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### I. Tổng của hai vector

#### 1. Định nghĩa

Cho hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$ . Lấy một điểm  $A$  tùy ý, vẽ  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ .

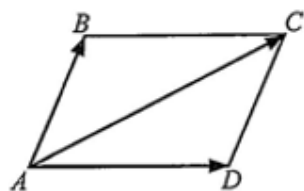
Vector  $\overrightarrow{AC}$  được gọi là tổng của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , kí hiệu  $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ .



Nhận xét: Công thức trên cho ta cách rút gọn tổng nhiều vector liên tiếp mà điểm cuối của mỗi vector trong tổng là điểm đầu của vector liền sau nó (trừ vector cuối cùng). Đồng thời, ta cũng phân tích được một vector thành tổng của hai hoặc nhiều vector khác. Ta cũng gọi công thức trên là quy tắc cộng.

#### 2. Quy tắc hình bình hành

Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Nhận xét: Công thức trên cho ta một cách rút gọn tổng của hai vector có cùng điểm đầu.

### 3. Tính chất

Với ba vector tùy ý  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$  (tính chất của vector-không).

Chú ý: Tổng ba vector  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  được xác định theo một trong hai cách:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  hoặc  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .

### II. Hiệu của hai vector

#### 1. Hai vector đối nhau

Vector có cùng độ dài và ngược hướng với vector  $\vec{a}$  được gọi là vector đối của  $\vec{a}$ , kí hiệu là  $-\vec{a}$ .

Với hai điểm  $A, B$  bất kì ta có  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .

Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$ .

Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$ .

#### 2. Định nghĩa

Phép trừ vector  $\vec{a}$  cho vector  $\vec{b}$  là tổng của vector  $\vec{a}$  và vector đối của vector  $\vec{b}$ , kí hiệu là  $\vec{a} - \vec{b}$ .

Như vậy  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ .

Với ba điểm  $O, A, B$  bất kì ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ .

Nhận xét: Công thức trên cho ta cách biểu thị một vector thành hiệu hai vector có cùng điểm đầu. Ta cũng gọi công thức trên là quy tắc trừ.

### III. Trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác

$I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .

$G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### Dạng 1. Tìm tổng, hiệu của hai hay nhiều vector

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Cho các điểm  $E, F, G, H, K$ . Thực hiện các phép cộng vector:

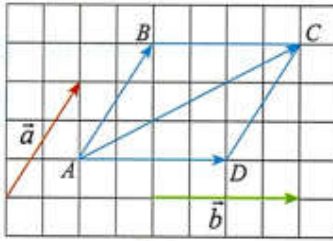
$$\vec{EF} + \vec{FH}; \vec{FK} + \vec{KG}; \vec{EH} + \vec{HE}$$

**Lời giải**

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\vec{EF} + \vec{FH} = \vec{EH}; \quad \vec{FK} + \vec{KG} = \vec{FG}; \quad \vec{EH} + \vec{HE} = \vec{EE} = \vec{0}$$

Tìm tổng của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  trong Hình.



Ta có:  $\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{AD}$ , suy ra  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{AD}$ .

Theo quy tắc hình bình hành, ta có  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$ .

Vậy  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$ .

**Câu 2.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Thực hiện các phép cộng vector sau:

a)  $(\vec{AB} + \vec{CA}) + \vec{BC}$ ,

b)  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA}$ .

**Lời giải**

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng vector, ta có:

a)  $(\vec{AB} + \vec{CA}) + \vec{BC} = (\vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{CB} + \vec{BC} = \vec{CC} = \vec{0}$ .

b)  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}$ .

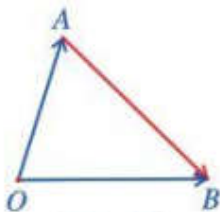
**Câu 3.** Cho các điểm  $M, N, P, Q$ . Thực hiện các phép trừ vector sau:  $\vec{MN} - \vec{PN}; \vec{PM} - \vec{PQ}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\vec{MN} - \vec{PN} = \vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}; \quad \vec{PM} - \vec{PQ} = \vec{PM} + \vec{QP} = \vec{QP} + \vec{PM} = \vec{QM}$$

**Câu 4.** Cho ba điểm  $A, B, O$ .



Vector  $\vec{OB} - \vec{OA}$  là vector nào?

**Lời giải**

Ta có:  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OB} + (-\vec{OA}) = \vec{OB} + \vec{AO} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$ .

**Câu 5.** Cho bốn điểm bất kỳ  $A, B, C, D$ . Chứng minh

$$\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{CD} - \vec{CB} = \vec{0}.$$

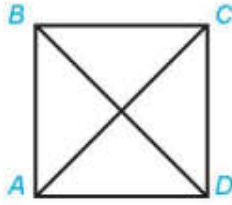
**Lời giải**

Ta có:  $\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{CD} - \vec{CB} = (\vec{AB} - \vec{AD}) + (\vec{CD} - \vec{CB}) = \vec{DB} + \vec{BD} = \vec{DD} = \vec{0}$



**Câu 6.** Cho hình vuông  $ABCD$  với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài của các vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải**



Do  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  nên  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$ .

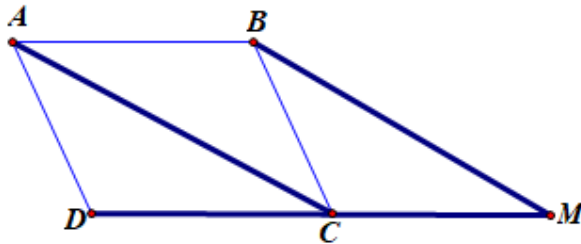
Vậy  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = \sqrt{2}$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

Do đó  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}| = AC = \sqrt{2}$ .

**Câu 7.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hãy tìm điểm  $M$  để  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ . Tìm mối quan hệ giữa hai vector  $\overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{CM}$

**Lời giải**



Ta có:  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  (do  $ABCD$  là hình bình hành)

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $ABMC$  là hình bình hành.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$ . Mà  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CM}$

$\Rightarrow C$  là trung điểm  $DM$ .

Nói cách khác:  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$  hay hai vector  $\overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{CM}$  đối nhau.

**Câu 8.** Cho tứ giác  $ABCD$ , thực hiện cả phép cộng và trừ vector sau:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

c)  $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$

**Lời giải**

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

c)  $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$

**Câu 9.** Cho tứ giác  $ABCD$ , tìm các vector sau:

a)  $\vec{m} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC}$

b)  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$

c)  $\vec{m} - \vec{n}$ .

**Lời giải**

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng vector, ta có:

a)  $\vec{m} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

b)  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AC} + \vec{0} = \overrightarrow{AC}$

c)  $\vec{m} - \vec{n} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}$ .

**Câu 10.** Cho tam giác  $MNQ$ , thực hiện các phép trừ vector sau:

- a)  $\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{QN}$
- b)  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QN}$ .

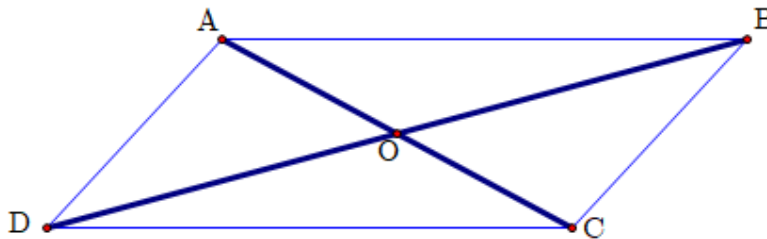
**Lời giải**

- a)  $\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{NM}$
- b)  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ}$ .

**Câu 11.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$ ;
- b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$
- c)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ .

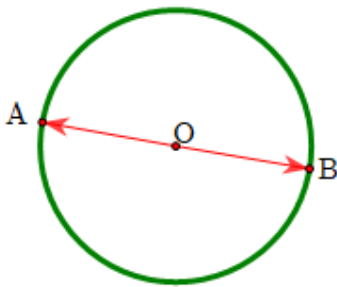
**Lời giải**



- a) Theo quy tắc hình bình hành nên a) đúng
- b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{CB}$  nên b) sai
- c)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} \neq \vec{0}$  nên c) sai

**Câu 12.** Cho đường tròn tâm  $O$ . Giả sử  $A, B$  là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vector  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  đối nhau.

**Lời giải**



Hai vector đối nhau khi chúng cùng phương, ngược hướng và có độ lớn bằng nhau

Do đó, để hai vector  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OB}$  đối nhau khi và chỉ khi  $AB$  là đường kính của đường tròn tâm  $O$ .

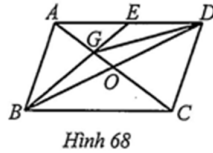
**Câu 13.** Cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo,  $E$  là trung điểm của  $AD$ ,  $G$  là giao điểm của  $BE$  và  $AC$ . Tính:

- a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$
- b)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}$ .

**Lời giải**

a) Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $O$  là trung điểm của cả hai đoạn thẳng  $AC$  và  $BD$ . Ta có:  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ . Suy ra  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$  hay  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

b) Vì tam giác  $ABD$  (Hình 68) có hai đường trung tuyến  $AO$  và  $BE$  cắt nhau tại  $G$  nên  $G$  là trọng tâm của tam giác. Do đó  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .



Hình 68

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 14.** Cho hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  sao cho  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ .

a) Dựng  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{OB} = \vec{b}$ . Chứng minh rằng  $O$  là trung điểm của  $AB$ .

b) Dựng  $\vec{OA} = \vec{a}$ ,  $\vec{AB} = \vec{b}$ . Chứng minh rằng  $B \equiv O$ .

**Lời giải.**

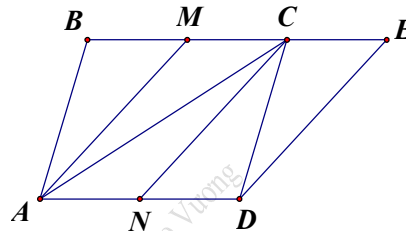
a)  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OB} = -\vec{OA} \Rightarrow O$  là trung điểm của  $AB$ .

b)  $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OB} = \vec{0} \Rightarrow B \equiv O$ .

**Câu 15.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Xác định tổng của hai véc-tơ  $\vec{NC}$  và  $\vec{MC}$ ,  $\vec{AM}$  và  $\vec{CD}$ ,  $\vec{AD}$  và  $\vec{NC}$ ,  $\vec{AM}$  và  $\vec{AN}$ .

**Lời giải.**

Vì  $\vec{MC} = \vec{AN}$  nên  $\vec{NC} + \vec{MC} = \vec{NC} + \vec{AN} = \vec{AN} + \vec{NC} = \vec{AC}$ .



Vì  $\vec{CD} = \vec{BA}$  nên  $\vec{AM} + \vec{CD} = \vec{AM} + \vec{BA} = \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{BM}$ .

Vì  $\vec{NC} = \vec{AM}$  nên  $\vec{AD} + \vec{NC} = \vec{AD} + \vec{AM} = \vec{AE}$ ,

với  $E$  là đỉnh của hình bình hành  $DAME$ .

Vì tứ giác  $AMCN$  là hình bình hành nên  $\vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AC}$ .

**Câu 16.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M$ ,  $N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm của  $AB$ ,  $AC$  và  $BC$ . Xác định hiệu  $\vec{AM} - \vec{AN}$ ;  $\vec{MN} - \vec{NC}$ ;  $\vec{MN} - \vec{PN}$ ;  $\vec{BP} - \vec{CP}$ .

**Lời giải.**

Ta có  $\vec{AM} - \vec{AN} = \vec{NM}$ .

Vì  $\vec{NC} = \vec{MP}$  nên  $\vec{MN} - \vec{NC} = \vec{MN} - \vec{MP} = \vec{PN}$ .

Vì  $-\vec{PN} = \vec{NP}$  nên  $\vec{MN} - \vec{PN} = \vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}$ .

Vì  $-\vec{CP} = \vec{PC}$  nên  $\vec{BP} - \vec{CP} = \vec{BP} + \vec{PC} = \vec{BC}$ .

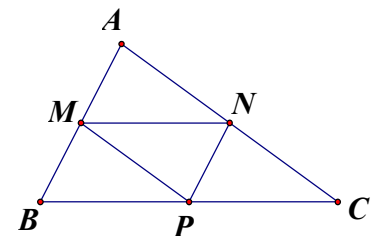
### Dạng 2. Chứng minh một đẳng thức vector

**Phương pháp:**

- Biến đổi từ biểu thức vế này sang vế kia.

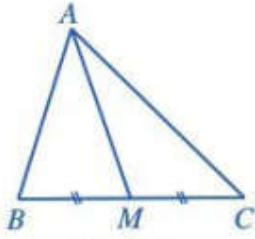
- Chứng minh hai biểu thức vector cùng bằng một vector trung gian

- Chứng minh hai biểu thức vector cùng bằng một biểu thức vector trung gian bằng cách sử dụng quy tắc trừ với điểm đầu là điểm  $O$  bất kì.



## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 17.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$



Chứng minh  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$ .

**Lời giải**

Vì  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$

**Câu 18.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và một điểm  $O$  bất kì. Chứng minh rằng  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ .

**Lời giải**

Áp dụng quy tắc hiệu, ta có  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC}$ .

Mặt khác  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  nên  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ .

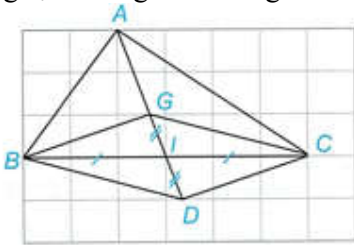
**Câu 19.** a) Chứng minh rằng nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

a) Khi  $I$  là trung điểm của  $AB$ , thì hai vectơ  $\overrightarrow{IA}$  và  $\overrightarrow{IB}$  có cùng độ dài và ngược hướng. Do đó,  $\overrightarrow{IA}$  và  $\overrightarrow{IB}$  đối nhau, suy ra  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

b) Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  thuộc trung tuyến  $AI$  và  $GA = 2GI$ . Lấy điểm  $D$  đối xứng với  $G$  qua  $I$ . Khi đó tứ giác  $GBDC$  có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là một hình bình hành. Ta có  $GA = 2GI = GD$ . Hai vectơ  $\overrightarrow{GA}$  và  $\overrightarrow{GD}$  có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau, do đó  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .

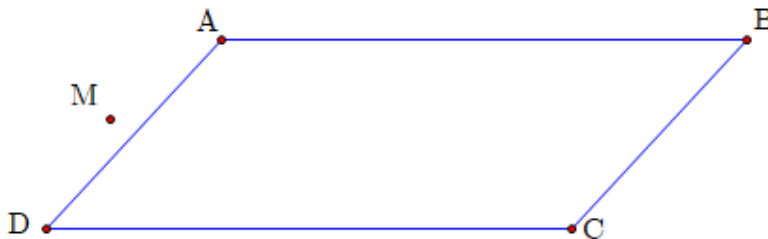


Trong hình bình hành  $GBDC$ , ta có  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$ .

Vậy  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .

**Câu 20.** Cho  $ABCD$  là hình bình hành. Chứng minh  $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$  với mỗi điểm  $M$  trong mặt phẳng.

**Lời giải**



Ta có 
$$\begin{cases} \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC} \end{cases}$$

Mà  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  nên được điều phải chứng minh

**Câu 21.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$ .

**Lời giải**

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

Từ các đẳng thức trên, ta có:  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$ .

**Câu 22.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Chứng minh:  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

**Câu 23.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

**Câu 24.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

b)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$

**Lời giải**

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

b)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$

**Câu 25.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Chứng minh  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ .

**Lời giải**

Theo quy tắc hình bình hành, ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ .

Suy ra  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC, |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = BD$ .

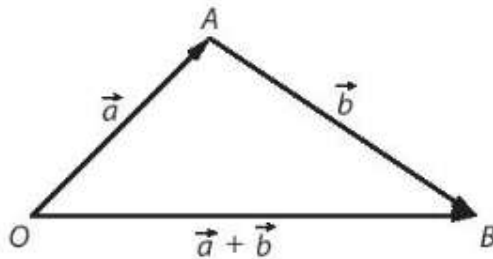
Do  $AC = BD$  nên  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ .

**Câu 26.** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Chứng minh rằng

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

**Lời giải**

Từ một điểm  $O$  bất kì, ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  rồi vẽ  $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ . Khi đó  $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ .



Vì  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương nên  $O, A, B$  không thẳng hàng. Khi đó, trong tam giác  $OAB$ , ta có  $OA - AB < OB < OA + AB$  hay là  $|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

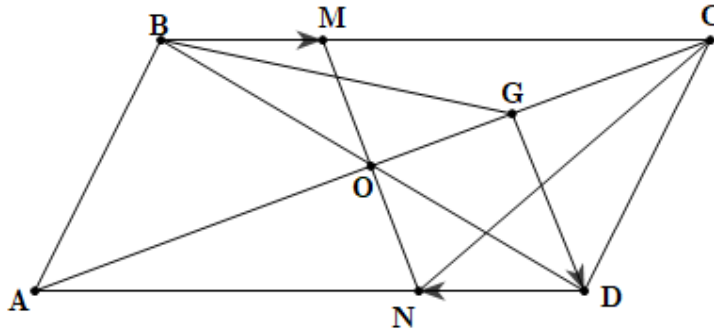
**Câu 27.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ .  $M$  là một điểm tùy ý thuộc cạnh  $BC$ , khác  $B$  và  $C$ .  $MO$  cắt cạnh  $AD$  tại  $N$ .

a) Chứng minh rằng  $O$  là trung điểm  $MN$ .

b) Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Chứng minh rằng  $G$  cũng là trọng tâm tam giác  $MNC$ .

**Lời giải**

a) HD. Chứng minh hai tam giác  $BOM$  và  $DON$  bằng nhau.



b) Do  $O$  là trung điểm của  $BD$  và  $MN$  nên  $BMDN$  là một hình bình hành.

Suy ra  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$ . (1)

Do  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$  nên  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ . (2)

Theo quy tắc ba điểm, ta có  $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BM}$  và  $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DN}$ . Từ đó và (1), (2) suy ra  $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GC} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DN}) = (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN}) = \vec{0}$

Suy ra  $G$  là trọng tâm tam giác  $MNC$ .

**Câu 28.** Cho tứ giác  $ABCD$ .

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải**

a) Theo tính chất kết hợp của phép cộng vector, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}\end{aligned}$$

b) Do  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$  nên  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$ .

Do tính kết hợp của phép cộng, ta được  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ .

Từ đó  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

Do tính kết hợp, giao hoán của phép cộng vector, tính chất của vector  $\vec{0}$ , nên

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

**Câu 29.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $O$  là trung điểm của  $IJ$ .

Chứng minh  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

Do  $I, J, O$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$  và  $IJ$  nên:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}; \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}; \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC}) + (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JD}) \\ &= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) = \vec{0}\end{aligned}$$

**Câu 30.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm hai đường chéo và một điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

**Lời giải**

a)  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$$

b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})$

$$= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \quad (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0})$$

**Câu 31.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

b)  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

**Lời giải**

a)  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ ;  $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$

Do  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ 

Suy ra,  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

b)  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

**Câu 32.** Cho hình thoi  $ABCD$  và  $M$  là trung điểm cạnh  $AB$ ,  $N$  là trung điểm cạnh  $CD$ . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}.$$

**Lời giải**Gọi  $O$  là tâm của hình thoi. Ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}$ .**Câu 33.** Chứng minh rằng với tứ giác  $ABCD$  bất kì, ta luôn có:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ .

**Lời giải**a) Theo quy tắc ba điểm của phép cộng vector, ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ;  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Vậy  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ .

b) Ta có:  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$  và  $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ .

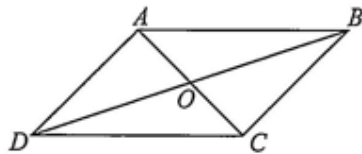
**Câu 34.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ ;

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$ ;

c)  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ ;

d)  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .

**Lời giải**a) Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $O$  là trung điểm  $AC, BD$ .

Hình 2

Do đó  $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ .

b) Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}.$$

c) Ta có  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$ .

Mà  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$  (do  $ABCD$  là hình bình hành)  $\Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ .

d) Ta có  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ .

Do đó  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

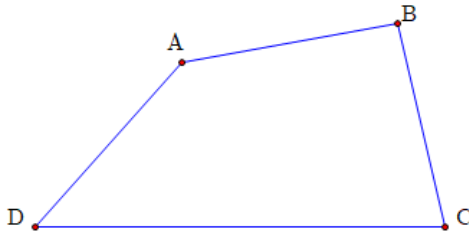
**Câu 35.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$ . Chứng minh:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

**Lời giải**





$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} \\ \text{b) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} \end{aligned}$$

**Câu 36.** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ .

**Lời giải**

$$\text{Cách 1: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 3: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} \\ &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AE}. \end{aligned}$$

**Câu 37.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác.  $M, N, P$  là ba điểm bất kì. Chứng minh  $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$ .

**Lời giải**

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên ta có: } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP} \\ &= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}. \end{aligned}$$

Nhận xét: Ta đã sử dụng quy tắc cộng để tách mỗi vector ở vế trái bằng tổng một vector ở vế phải cộng với một vector khác.

**Câu 38.** Cho sáu điểm  $A, B, C, D, E, F$ .

$$\text{Chứng minh } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA}.$$

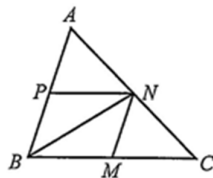
**Lời giải**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}) \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OF}) \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} \end{aligned}$$

$$\text{Từ hai đẳng thức trên, ta có: } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA}. \quad 88$$

**Câu 39.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NB}$ .

**Lời giải**



Hình 35

Ta biến đổi tổng của hai vector không cùng điểm đầu về tổng của hai vector cùng điểm đầu và dùng quy tắc hình bình hành.

Vì  $NP$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  (Hình 35) nên  $NP \parallel BC, NP = \frac{1}{2}BC$ . Suy ra

$NP \parallel BM, NP = BM$  và tứ giác  $BMNP$  là hình bình hành.

Ta có:  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB}$

**Câu 40.** Cho hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Chứng minh rằng nếu hai vector cùng hướng thì  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ .

**Lời giải**

Từ một điểm  $A$  trong mặt phẳng, vẽ  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$  và  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . Nếu hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng hướng thì ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng,  $B$  nằm giữa  $A$  và  $C$ . Suy ra  $AB + BC = AC$ . Vậy  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = AB + BC = AC = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ .

**Câu 41.** Cho hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có cùng trọng tâm là  $G$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ .

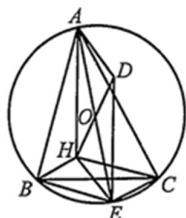
**Lời giải**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC'} \\ &= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}) \\ &= -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}) = -\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

**Câu 42.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có các cạnh đôi một khác nhau. Gọi  $H, O$  lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác,  $D$  là điểm đối xứng với  $H$  qua  $O$ . Chứng minh  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ .

**Lời giải**

Kẻ đường kính  $AE$ . Ta có  $BH \parallel EC, CH \parallel BE$ . Suy ra  $BHCE$  là hình bình hành. Tứ giác  $AHED$  có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên cũng là hình bình hành. Ta có:  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HD}$



Hình 69

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 43.** Chứng minh rằng điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$ .

**Lời giải.**

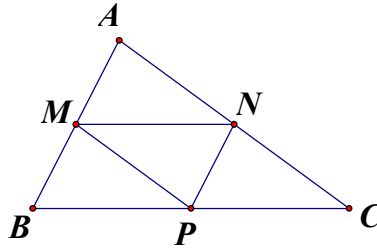
Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $IA = IB$  và hai véc-tơ  $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$  ngược hướng. Vậy  $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

Ngược lại, nếu  $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$  thì  $IA = IB$  và hai véc-tơ  $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$  ngược hướng. Do đó  $A, I, B$  thẳng hàng. Vậy  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .

**Câu 44.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Chứng minh rằng với điểm  $O$  bất kì ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ .

**Lời giải.**

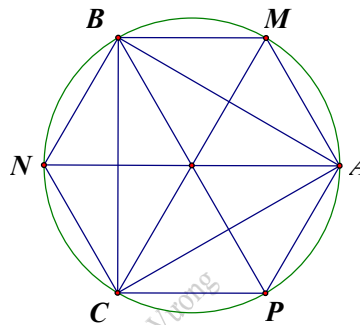
$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}$$



$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{NC} \\
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AN} \\
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} \\
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \vec{0} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}.
 \end{aligned}$$

**Câu 45.** Gọi  $O$  là tâm của tam giác đều  $ABC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ .

**Lời giải.**



Vẽ lục giác đều  $AMBNCP$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ .

Vì  $BOCN$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ON}$ .

Do đó  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$ .

**Câu 46.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $P$  lần lượt là trung điểm của  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Chứng minh rằng

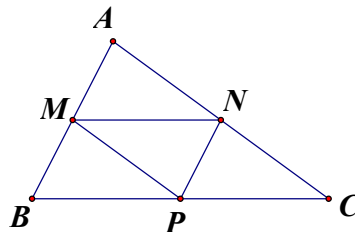
a)  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ .

b)  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ .

c)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$  với  $O$  là điểm bất kì.

**Lời giải.**

a) Vì  $PN$ ,  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $PN \parallel BM$ ,  $MN \parallel BP$  suy ra tứ giác  $BMNP$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$ .



Vì  $N$  là trung điểm của  $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$ .

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}.$$

b) Vì tứ giác  $APMN$  là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$ , kết hợp với quy tắc trừ  $\Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$ .  
Mà  $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$  do  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Vậy  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ .

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}) \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) - (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP}).\end{aligned}$$

Theo câu a) ta có  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$  suy ra  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ .

**Câu 47.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ ,  $M$  là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

c)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ .

**Lời giải.**

a) Ta có  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$ .

Theo quy tắc hình bình hành ta có  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ , suy ra  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

b) Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên ta có  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$ .

Tương tự:  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

c) Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$   
 $= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ .

**Câu 48.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $O$  là một điểm bất kì trên đường chéo  $AC$ . Qua  $O$  kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt  $AB$  và  $DC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ , cắt  $AD$  và  $BC$  lần lượt tại  $E$  và  $F$ . Chứng minh

a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ .

b)  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$

**Lời giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ .

Vì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  nên  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ .

Vậy  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ .

b) Tứ giác  $AMOE$  và tứ giác  $OFCN$  là hình bình hành nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FO}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FC}) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}) \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

**Câu 49.** Cho năm điểm  $A, B, C, D, E$ . Chứng minh rằng

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$ .

b)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải**

a) Biến đổi về trái ta có

$$\overrightarrow{VT} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA}$$

$$= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{VP} \text{ (đpcm).}$$

b) Đẳng thức tương đương với  $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

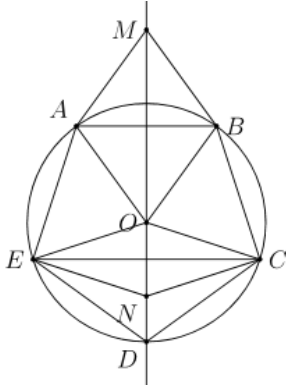
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \text{ (đúng).}$$

**Câu 50.** Cho ngũ giác đều  $ABCDE$  tâm  $O$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

Ta chứng minh  $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$  có hai giá khác nhau.

Gọi  $d$  là đường thẳng chứa  $OD$  thì  $d$  là một trục đối xứng của ngũ giác đều.



Ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$ , trong đó  $M$  là đỉnh của hình thoi  $OAMB$  và thuộc  $d$ .

Tương tự  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{ON}$ , trong đó  $N$  thuộc  $d$ .

Do đó  $\vec{v} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}) + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OD}$  có giá là  $d$ .

Ta ghép  $\vec{v} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OE}$  thì  $\vec{v}$  có giá là đường thẳng  $OE$ .

Vì  $\vec{v}$  có  $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$  giá khác nhau nên  $\vec{v} = \vec{0}$ .

**Câu 51.** Cho các điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$ .

**Lời giải**

Cách 1. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BF}) + (\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} = \vec{0} \text{ (đúng).}$$

Cách 2.  $\overrightarrow{VT} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF})$

$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{VP}.$$

**Câu 52.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  nội tiếp đường tròn tâm  $O$ , và  $M$  là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .

b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}$ .

**Lời giải**

a) Tâm  $O$  của lục giác đều là tâm đối xứng của lục giác nên  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .

Do đó  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}) = \vec{0}$ .

b)

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FE}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FE})$$

$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \\
 &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + \vec{0} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}.
 \end{aligned}$$

### Dạng 3. Tính độ dài của một vector tổng; vector hiệu

#### Phương pháp:

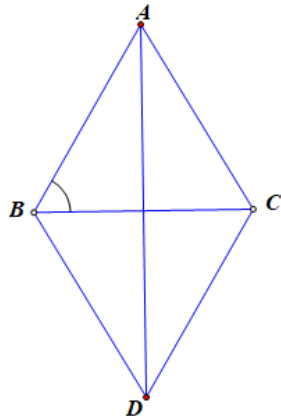
- Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính độ dài.
- Sử dụng tính chất của các tam giác đặc biệt: tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, tam giác vuông cân.
- Sử dụng tính chất của tứ giác đặc biệt: hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành,...

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 53.** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính độ dài của các vector  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

#### Lời giải

Dựng hình bình hành  $ABDC$  tâm  $O$  như hình vẽ.



Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD$$

Vì tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành, lại có  $AB = AC = BD = CD = a$  nên  $ABDC$  là hình thoi.

$$\Rightarrow AD = 2AO = 2 \cdot AB \cdot \sin B = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a \text{ và } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$$

**Câu 54.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ , độ dài các cạnh bằng 1.

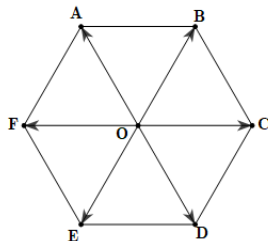
a) Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

b) Tính độ dài của các vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}$ ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ .

#### Lời giải

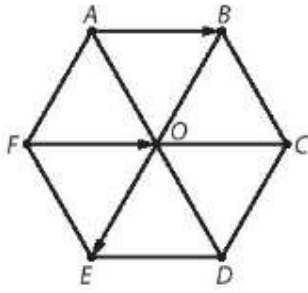
a) Do  $O$  là tâm của lục giác đều  $ABCDEF$  nên  $O$  là trung điểm của các đường chéo  $AD, BE, CF$ .



$$\text{Khi đó } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}, \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

b) Theo kết quả của bài tập 4.4, ta được  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FE}$



Từ đó, do độ dài các cạnh của lục giác  $ABCDEF$  bằng 1 nên  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}| = |\overrightarrow{EF}| = 1$ .

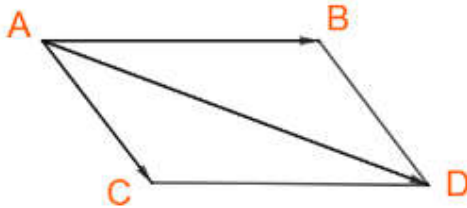
**Câu 55.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$ . Tính độ dài các vectơ:

- a)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
- b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- c)  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

**Lời giải**

a)  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = BC = a$

b) Vẽ hình bình hành  $ABDC$ , giao điểm của hai đường chéo là  $O$  ta có:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = AD = a\sqrt{3}$$

c)  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$   
 $\Rightarrow |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = a$

**Câu 56.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và ba điểm  $G, H, K$  thỏa mãn

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}; \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}; \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

Tính độ dài các vectơ  $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{AG}$

**Lời giải**

Ta có  $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

+)  $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

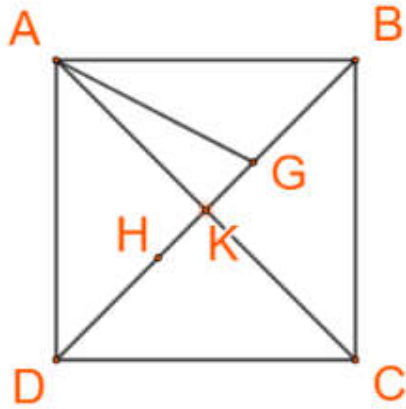
Suy ra K là trung điểm  $AC \Rightarrow AK = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

+)  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ , suy ra  $H$  là trọng tâm của tam giác ADC

$$\Rightarrow DH = \frac{2}{3} DK = \frac{1}{3} DB(1)$$

+)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ , suy ra  $G$  là trọng tâm của tam giác ABC





$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BK = \frac{1}{3}BD(2)$$

$$\text{Từ (1,2)} \Rightarrow HG = \frac{1}{3}BD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Mà } KG = KH = \frac{1}{2}HG = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow AG = \sqrt{AK^2 + GK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3} \Rightarrow |\overrightarrow{AG}| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{KA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |\overrightarrow{GH}| = \frac{a\sqrt{2}}{3}, |\overrightarrow{AG}| = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

**Câu 57.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 1. Tính độ dài của các vector sau:

a)  $\vec{a} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CB}$

b)  $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ .

**Lời giải**

a)  $\vec{a} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ .

Suy ra  $|\vec{a}| = AD = 1$ .

b)  $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$ .

Suy ra  $|\vec{b}| = AC = \sqrt{2}$ .

**Câu 58.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng 1 và  $M$  là trung điểm  $BC$ . Tính độ dài của các vector sau:

a)  $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

b)  $\vec{b} = (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})$ .

**Lời giải**

a)  $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ . Suy ra  $|\vec{a}| = CB = 1$ .

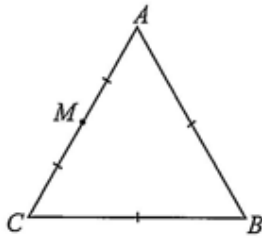
b)  $\vec{b} = (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}) = 2\overrightarrow{AM}$ .

Suy ra  $|\vec{b}| = 2AM = \sqrt{3}$ .

**Câu 59.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng  $a$ . Tính độ dài của các vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  và  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . Khi đó  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = a$ . Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $AC$ .



Hình 1

Ta có:  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = -2\overrightarrow{BM}$ .

Khi đó:  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{BM}| = 2BM = a\sqrt{3}$ .

**Câu 60.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $O$  và có cạnh bằng  $a$ . Cho 2 điểm  $M, N$  thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}; \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$$

Tìm độ dài các vector  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NO}$ .

**Lời giải**

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$  suy ra  $M$  là trung điểm của  $AD$ . Khi đó  $MA = \frac{a}{2}$ .

$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$  suy ra  $N$  là trọng tâm của tam giác  $BDC$ . Ta có  $NO = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ .

**Câu 61.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh  $a$ . Tính độ dài của các vector sau:

a)  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ ;

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

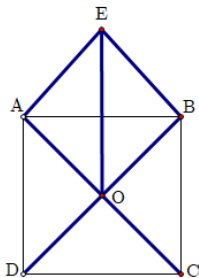
c)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$  với  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

**Lời giải**

a)  $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = a\sqrt{2}$

b)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = a\sqrt{2}$

c) Vẽ hình bình hành  $OAEB$  vì góc  $\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow OAEB$  là hình vuông nên ta có



$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}| = a\sqrt{2}$$

**Câu 62.** Cho  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ . Tính:

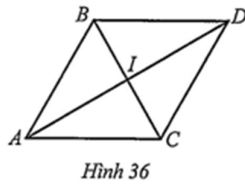
a)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ ,

b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

**Lời giải**

a) Ta có:  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC = a$ .

b) Dựng hình bình hành  $ABDC$ , ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $BC$ , ta có  $I$  là trung điểm của  $BC$  và  $AD$  (Hình 36).



Hình 36

Vì tam giác  $ABC$  đều nên  $AI \perp BC \Rightarrow AI = AB \cdot \sin B = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Do đó  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AI = a\sqrt{3}$ .

**Câu 63.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a, AC = 3a, \widehat{BAC} = 45^\circ$  (Hình 37). Tính:



Hình 37

a)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$

b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .

### Lời giải

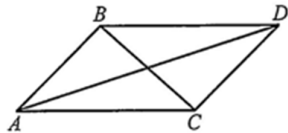
a) Ta có:  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC$ .

Áp dụng định lý côsin cho tam giác  $ABC$  ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= (2a)^2 + (3a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 45^\circ = (13 - 6\sqrt{2})a^2. \end{aligned}$$

Vậy  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$ .

b) Dựng hình bình hành  $ABDC$  (Hình 38), ta có:



Hình 38

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 135^\circ, BD = AC = 3a.$$

Áp dụng định lý côsin cho tam giác  $ABD$  ta có:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD} \\ &= (2a)^2 + (3a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 135^\circ = (13 + 6\sqrt{2})a^2. \end{aligned}$$

Vậy  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$ .

**Câu 64.** Cho tứ giác  $ABCD$  là hình chữ nhật. Chứng minh  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$ .

### Lời giải

Vì  $ABCD$  là hình chữ nhật nên ta có:  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = BD = AC$ .

Vì  $ABCD$  cũng là một hình bình hành nên  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$ .

Từ đó suy ra  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$ .

**Câu 65.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A, AB = 4a, AC = 5a$ . Tính:

a)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ ;

b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .

### Lời giải

a)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{41}$  b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{41}$

**Câu 66.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính:

- a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$   
 b)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ ;  
 c)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

**Lời giải**

a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = a$  . b)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a$  c)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$  .

**Câu 67.** Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$  . Chứng minh tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  .

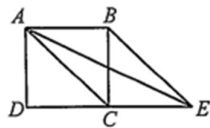
**Lời giải**

Dựng hình bình hành  $ABDC$  . Từ giả thiết suy ra  $AD = BC$  nên  $ABCD$  là hình chữ nhật. Do đó tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  .

**Câu 68.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  . Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$  .

**Lời giải**

Dựng hình bình hành  $ABEC$  (Hình 67).



Hình 67

Ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = AE$  .

Vì  $CD \parallel AB, CE \parallel AB$  nên  $C, D, E$  thẳng hàng.

Ta có:  $DE = DC + CE = 2a$  .

Tam giác  $ADE$  vuông tại  $D$  , suy ra

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5} .$$

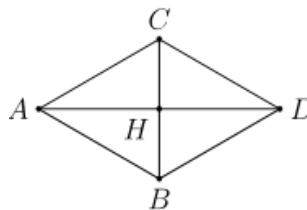
Vậy  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = a\sqrt{5}$  .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 69.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$  . Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$  và  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$  .

**Lời giải**

Từ tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$  , vẽ hình thoi  $BACD$  thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$  nên  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = AD$



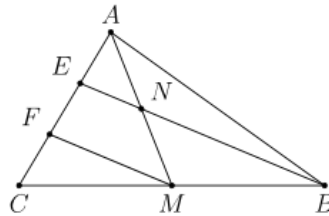
$$= 2AH = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} .$$

Ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$  nên  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a$  .

**Câu 70.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$  . Trên cạnh  $AC = b$  lấy hai điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $AE = EF = FC$  ,  $BE$  cắt trung tuyến  $AM$  tại  $N$  . Tính độ dài vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN}$

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FC}$  . Vì  $MF \parallel BE$  nên  $N$  là trung điểm của  $AM$  . Suy ra  $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}$  .

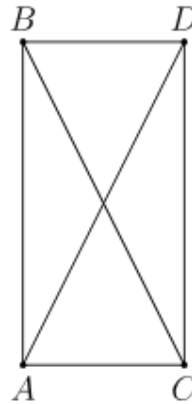


Do đó  $\vec{u} = \vec{AE} + \vec{AF} + \vec{AN} + \vec{MN} = \vec{AF} + \vec{FC} = \vec{AC}$  nên  $|\vec{u}| = AC = b$ .

**Câu 71.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\widehat{ABC} = 30^\circ$  và  $BC = a\sqrt{5}$ . Tính độ dài của các vector  $\vec{AB} + \vec{BC}$ ,  $\vec{AC} - \vec{BC}$  và  $\vec{AB} + \vec{AC}$ .

**Lời giải**

Theo quy tắc ba điểm ta có  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .



$$\text{Mà } \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin \widehat{ABC} = a\sqrt{5} \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Do đó } |\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}; \vec{AC} - \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}.$$

$$\text{Ta có: } AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Vì vậy } |\vec{AC} - \vec{BC}| = |\vec{AB}| = AB = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Gọi  $D$  là điểm sao cho tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ .

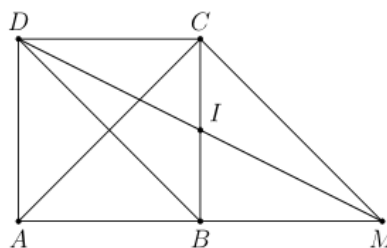
Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên tứ giác  $ABDC$  là hình chữ nhật suy ra  $AD = BC = a\sqrt{5}$ .

$$\text{Vậy } |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = a\sqrt{5}.$$

**Câu 72.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $b$ . Tính  $|\vec{DA} - \vec{AB}|$ ,  $|\vec{DA} + \vec{DC}|$ ,  $|\vec{DB} + \vec{DC}|$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \vec{DA} - \vec{AB} = \vec{DA} - \vec{DC} = \vec{CA} \text{ nên } |\vec{DA} - \vec{AB}| = |\vec{CA}| = CA = b\sqrt{2}.$$



Ta có  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$  nên  $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = b\sqrt{2}$ .

Vẽ hình bình hành  $CDBM$  thì  $DM$  cắt  $BC$  tại trung điểm  $I$  của mỗi đường.

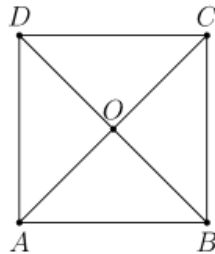
Ta có  $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM}$  nên  $|\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DM}| = DM = 2DI$ .

$$\text{Mà } DI^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}b^2 \Rightarrow |\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}| = b\sqrt{5}.$$

**Câu 73.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính  $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$ ,  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$  và  $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

**Lời giải**

Ta có  $AC = BD = a\sqrt{2}$ ,  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BO}$ . Do đó  $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .



Vì  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  cùng hướng nên  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}| = 2a$ .

Ta có  $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$ . Do đó  $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = BD = a\sqrt{2}$ .

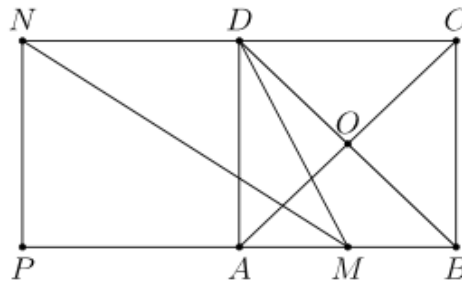
**Câu 74.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  có tâm  $O$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $D$ . Hãy tính độ dài của các vectơ sau  $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MN}$ .

**Lời giải**

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông  $MAD$  ta có

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}. \text{ Suy ra } |\overrightarrow{MD}| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Qua  $N$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $AB$  tại  $P$ .



Khi đó tứ giác  $ADNP$  là hình vuông và  $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$ .

Áp dụng định lý Piatgo trong tam giác vuông  $NPM$  ta có

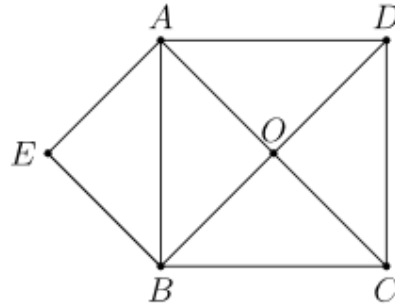
$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{13}}{2}. \text{ Suy ra } |\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

**Câu 75.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  có tâm  $O$  và  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Tính độ dài của các vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$  và  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .

**Lời giải**

Ta có  $|\overline{AB}| = AB = a$ .  $|\overline{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$ .

$$|\overline{OA}| = OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |\overline{OM}| = OM = \frac{a}{2}.$$



Gọi  $E$  là điểm sao cho tứ giác  $OBEA$  là hình bình hành. Khi đó nó cũng là hình vuông.

Ta có  $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OE} \Rightarrow |\overline{OA} + \overline{OB}| = |\overline{OE}| = OE = AB = a$ .

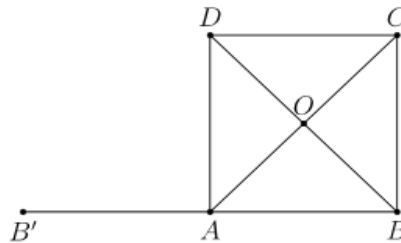
**Câu 76.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $O$  và cạnh  $a$ .  $M$  là một điểm bất kỳ

a) Tính  $|\overline{AB} + \overline{OD}|$ ,  $|\overline{AB} - \overline{OC} + \overline{OD}|$

b) Tính độ dài vectơ  $\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC} + \overline{MD}$

**Lời giải**

a) Ta có  $\overline{OD} = \overline{BO} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{OD} = \overline{AB} + \overline{BO} = \overline{AO}$ .  $|\overline{AB} + \overline{OD}| = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .



Ta có:  $\overline{OC} = \overline{AO}$ . Suy ra

$$\overline{AB} - \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{AB} - \overline{AO} + \overline{OD} = \overline{OB} + \overline{OD} = \vec{0} \Rightarrow |\overline{AB} - \overline{OC} + \overline{OD}| = 0.$$

b) Áp dụng quy tắc trừ ta có  $\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC} + \overline{MD} = (\overline{MA} - \overline{MB}) - (\overline{MC} - \overline{MD}) = \overline{BA} - \overline{DC}$ .

Lấy  $B'$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $A$ . Khi đó  $-\overline{DC} = \overline{AB'} \Rightarrow \overline{BA} - \overline{DC} = \overline{BA} + \overline{AB'} = \overline{BB'}$

Suy ra  $|\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC} + \overline{MD}| = |\overline{BB'}| = BB' = 2a$ .

**Câu 77.** Cho hình vuông  $ABCD$  có tâm  $O$  và cạnh  $a$  và  $M$  là một điểm bất kỳ. Tính

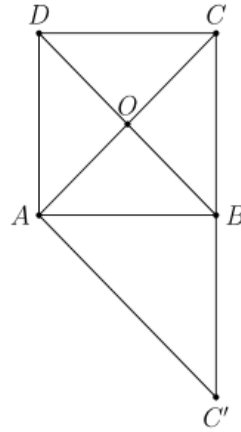
a) Tính  $|\overline{AB}| + |\overline{AD}|$

b) Tính  $|\overline{OA} - \overline{CB}|$

c) Tính  $|\overline{CD} - \overline{DA}|$

**Lời giải**

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ . Suy ra  $|\overline{AB} + \overline{AD}| = |\overline{AC}| = AC$ .



Áp dụng định lý Pitago ta có  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

Vậy  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{2}$ .

b) Vì  $O$  là tâm của hình vuông nên  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$ . Suy ra  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$ . Vậy  $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BC}| = a$ .

c) Do  $ABCD$  là hình vuông nên  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ . Suy ra  $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ .  
Mà  $|\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$ . Suy ra  $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = BD = a\sqrt{2}$ .

#### Dạng 4. Xác định một điểm thỏa một đẳng thức vector cho trước

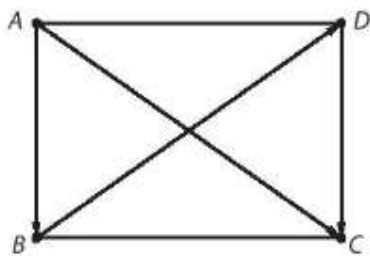
### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 78.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  với  $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ .

- a) Tính độ dài của vector  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$ .  
b) Xác định điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$ .

**Lời giải**

a) Do hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a, AD = a\sqrt{2}$  nên độ dài hai đường chéo  $AC, BD$  bằng  $\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$ .



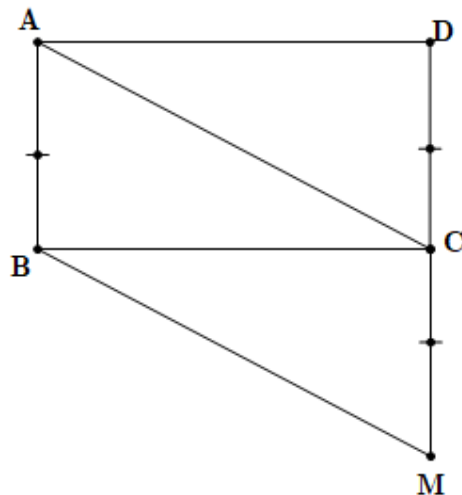
Theo tính chất giao hoán và kết hợp phép cộng vector, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Do đó  $|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$ .

b) Do  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$  nên  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$ .





Theo kết quả bài tập 4.3, SGK Toán 10 tập 1, đẳng thức  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$  tương đương với tứ giác  $ABMC$  là một hình bình hành. Từ đó  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . Vậy điểm  $M$  cần tìm là điểm đối xứng với  $D$  qua  $C$ .

**Câu 79.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ .

- Xác định vector  $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$ .
- Xác định điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MA}$ .
- Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ .

**Lời giải**

a) Do  $D$  là trung điểm của  $BC, E$  là trung điểm của  $CA, F$  là trung điểm của  $AB$  nên  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$ .

Do  $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$  nên tứ giác  $CEFD$  là hình bình hành.

Từ đó  $-\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF}$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{CB}$

b) Giả sử tìm được điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MA}$ . Khi đó, theo kết quả câu a, ta được  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MA}$ . Suy ra tứ giác  $ABCM$  là hình bình hành. Và do đó điểm  $M$  cần tìm đối xứng với  $B$  qua  $E$ .

c) Do  $ABCM$  là một hình bình hành, nên  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ .

**Câu 80.** Cho hai điểm  $A, B$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  trong mặt phẳng thỏa mãn  $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}|$ .

**Lời giải**

$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow AM = AB.$$

Tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn tâm  $A$  bán kính  $AB$ .

**Câu 81.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  trong mặt phẳng thỏa mãn  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}|$

**Lời giải**

Tập hợp các điểm  $M$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AC$ .

**BÀI TẬP BỔ SUNG**

**Câu 82.** Cho hai điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện sau đây:

- $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM}$

**Lời giải**

- a)  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$ . Vậy mọi điểm  $M$  đều thỏa mãn.  
b)  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A \equiv B$ . Vậy không có điểm  $M$  nào thỏa mãn  
c)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ . Vậy  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ .  
d)  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow M \equiv A$ .

**Câu 83.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$ .

Vậy  $M$  là điểm xác định bởi hệ thức  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$  hay  $M$  là đỉnh thứ tư trong hình bình hành  $ABCM$

**Câu 84.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  sao cho

- a)  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$   
b)  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|$

**Lời giải.**

a) Ta có  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MA = BC$

Vậy  $M$  cách điểm  $A$  một đoạn bằng  $BC$  không đổi nên tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn tâm  $A$ , bán kính  $R = BC$ .

b) Ta có  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow MA = MC$

Vậy  $M$  cách đều 2 điểm  $A$  và  $C$  nên tập hợp các điểm  $M$  là đường trung trực của đoạn  $AC$ .

**Câu 85.** Cho 2 điểm  $A$  và  $B$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$

**Lời giải.**

Vẽ hình bình hành  $AMBN$ . Gọi  $O$  là giao điểm 2 đường chéo, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = MN = 2MO$$

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = AB$$

$$\text{Điều kiện tương đương } 2MO = AB \Rightarrow MO = \frac{1}{2}AB$$

Tập hợp các điểm  $M$  có tính chất  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$  là đường tròn đường kính  $AB$

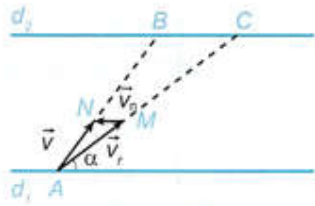
### Dạng 5. Bài toán thực tế

### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 86.** Một con tàu chuyển động từ bờ bên này sang bờ bên kia của một dòng sông với vận tốc riêng không đổi. Giả sử vận tốc dòng nước là không đổi và đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc thực tế của tàu. Nếu không quan tâm đến điểm đến thì cần giữ lái cho tàu tạo với bờ sông một góc bao nhiêu để tàu sang bờ bên kia được nhanh nhất?



**Lời giải**



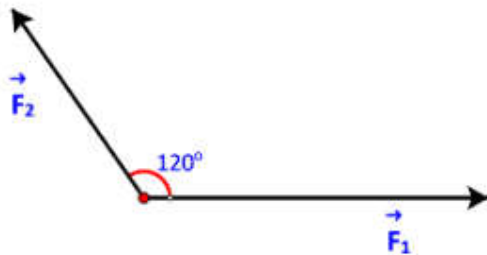
Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng song song  $d_1, d_2$ . Giả sử tàu xuất phát từ  $A \in d_1$  và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ góc  $\alpha$ . Gọi  $\vec{v}_r$  và  $\vec{v}_n$  lần lượt là vector vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi  $M, N$  là các điểm sao cho  $\vec{v}_r = \vec{AM}, \vec{v}_n = \vec{MN}$ .

Khi đó tàu chuyển động với vector vận tốc thực tế là  $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_n = \vec{AM} + \vec{MN} = \vec{AN}$ .

Gọi  $B, C$  tương ứng là giao điểm của  $AN, AM$  với  $d_2$ . Tàu chuyển động thẳng từ  $A$  đến  $B$  với vector vận tốc thực tế  $\vec{AN}$ , do đó thời gian cần thiết để tàu sang được bờ  $d_2$  là  $\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM}$ . Mặt

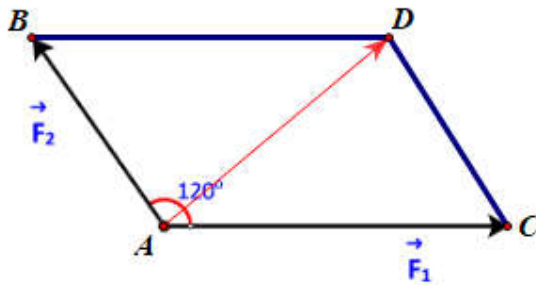
khác,  $AM = |\vec{v}_r|$  không đổi nên  $\frac{AC}{AM}$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow AC$  nhỏ nhất  $\Leftrightarrow AC \perp d_2 \Leftrightarrow AM \perp d_2$ . Vậy để tàu sang được bờ bên kia nhanh nhất, ta cần giữ bánh lái để tàu luôn vuông góc với bờ.

**Câu 87.** Hình 4.19 biểu diễn hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cùng tác động lên một vật, cho  $|\vec{F}_1| = 3N, |\vec{F}_2| = 2N$ . Tính độ lớn của hợp lực  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$



### Lời giải

Dựng hình bình hành  $ABDC$  với hai cạnh là hai vector  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  như hình vẽ



Ta có:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{AC} + \vec{AB} = \vec{AD} \Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{AD}| = AD$$

Xét  $\triangle ABD$  ta có:

$$BD = AC = |\vec{F}_1| = 3, AB = |\vec{F}_2| = 2.$$

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Theo định lí cosin ta có:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow AD^2 = 19$$

$$\Leftrightarrow AD = \sqrt{19} \text{ V?y } |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{19}$$

**Câu 88.** Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước.



### Lời giải

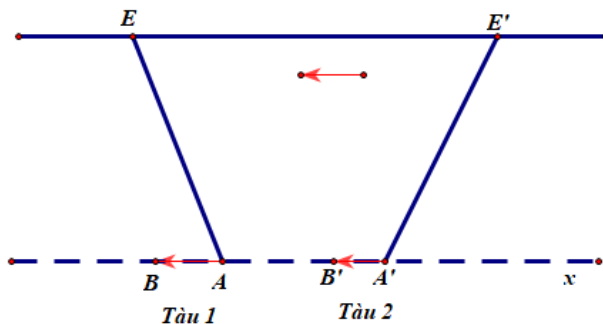
Ta đã biết vector dòng nước và hướng di chuyển (tức là vector vận tốc thực của hai tàu).

Ta cần xác định vector vận tốc của mỗi tàu, chỉ biết chúng có độ lớn bằng nhau.

Giả sử tàu 1 là tàu đi về phía hạ lưu còn tàu 2 là tàu đi về phía thượng nguồn.

Tàu 1 và tàu 2 bắt đầu di chuyển từ điểm  $A$  và  $A'$  ở bờ bên này đến điểm  $E, E'$  ở bờ bên kia.

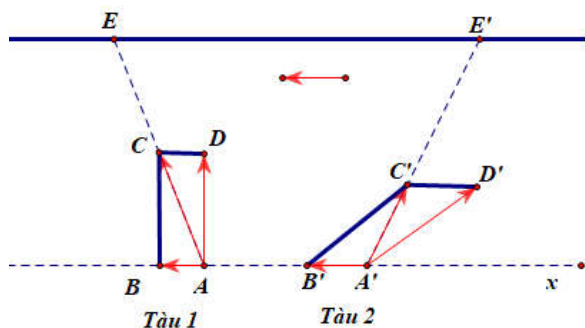
Vector vận tốc dòng nước tác động lên tàu là như nhau, biểu diễn bởi các vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{A'B'}$



Gọi vector vận tốc riêng của hai tàu lần lượt là các vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{A'D'}$  Vector vận tốc thực của hai tàu là vector  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{A'C'}$ .

Với tàu 1, để xác định các điểm  $C, D$ :

Từ  $B$  ta kẻ đường vuông góc với bờ, cắt  $AE$  tại một điểm, kí hiệu là  $C$ . Tiếp theo, dựng hình bình hành  $ABCD$  ta được điểm  $D$ .



Với tàu 2, để xác định các điểm  $C', D'$

Trên  $A'E'$  lấy điểm  $C'$  sao cho  $B'C' = AD$ . Dựng hình bình hành  $A'B'C'D'$ , ta được điểm  $D'$ .

Giải thích:

Tàu 1: Được dòng nước đẩy theo vector  $\overrightarrow{AB}$ , và đi với vận tốc thực là vector  $\overrightarrow{AD}$ , khi ấy hướng di chuyển là vector tổng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  chính là vector  $\overrightarrow{AC}$

Tàu 2: Bị dòng nước đẩy theo vector  $\overrightarrow{A'B'}$ , và đi với vận tốc thực là vector  $\overrightarrow{A'D'}$ , khi ấy hướng di chuyển là vector tổng  $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$  chính là vector  $\overrightarrow{A'C'}$

Các vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{A'D'}$  có độ dài bằng nhau (cùng bằng  $B'C'$ ).

Do hai tàu chuyển động theo hướng tạo với bờ cùng một góc nhọn nên quãng đường đi khi chạm bờ bên kia là như nhau. Hay  $AE = A'E'$ .

Tàu nào có độ lớn vận tốc thực lớn hơn thì tàu đó sang bờ bên kia trước.

Xét tam giác  $A'B'C'$ , theo định lý cosin ta có:

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 - 2A'B' \cdot B'C' \cdot \cos B'$$

$$\text{Mà } 0^\circ < \widehat{B'} < \widehat{C'Ax} < 90^\circ$$

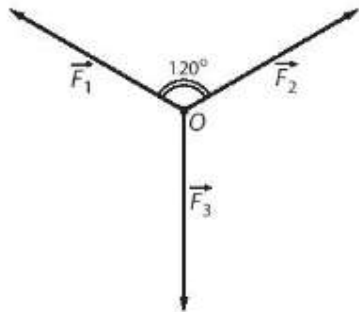
$$\Rightarrow \cos B' > 0 \Rightarrow A'C'^2 < A'B'^2 + B'C'^2$$

Mặt khác, tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  nên:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow A'C'^2 < AC^2 \text{ hay } A'C' < AC$$

Vậy vận tốc của tàu 1 lớn hơn, nói cách khác tàu đi hướng xuống hạ lưu sẽ sang bờ bên kia trước.

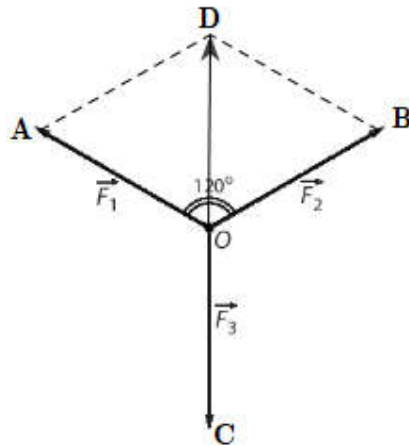
**Câu 89.** Trên Hình biểu diễn ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng 0. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng 100 N và góc tạo bởi  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  bằng  $120^\circ$ .



Tính cường độ của lực  $\vec{F}_3$ .

**Lời giải**

Ta sử dụng các vector  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$  và  $\overrightarrow{OD}$  lần lượt biểu diễn cho các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  và hợp lực  $\vec{F}$  của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ .

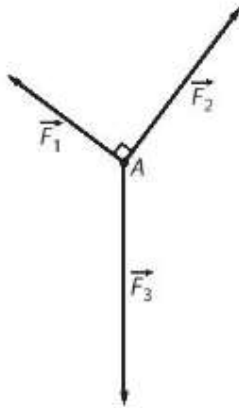


Khi đó, do  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  và  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 100$ , nên tứ giác  $AOBD$  là hình thoi. Từ đó, do  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ , suy ra  $\widehat{OAD} = 60^\circ$ , do đó tam giác  $AOD$  đều. Bởi vậy  $|\vec{F}| = OD = OA = 100$ .

Do vật ở vị trí cân bằng nên hai lực  $\vec{F}$  và  $\vec{F}_3$  ngược hướng và có cường độ bằng nhau, tức là hai vector  $\overrightarrow{OD}$  và  $\overrightarrow{OC}$  là hai vector đối nhau. Suy ra cường độ của lực  $\vec{F}_3$  bằng

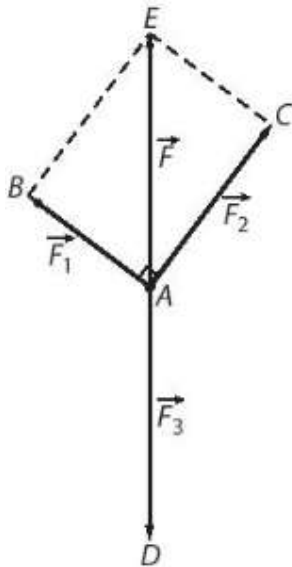
$$|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = 100(N).$$

**Câu 90.** Trên Hình biểu diễn ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng  $A$ . Cho biết  $|\vec{F}_1| = 30\text{ N}, |\vec{F}_2| = 40\text{ N}$ . Tính cường độ của lực  $\vec{F}_3$ .



### Lời giải

Ta sử dụng các vector  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  lần lượt biểu thị cho các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  và vector  $\vec{AE}$  biểu thị cho hợp lực  $\vec{F}$  của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ .



Khi đó, do  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ , nên tứ giác  $ABEC$  là hình chữ nhật. Từ đó, do  $AB = 30(\text{N})$ ,  $AC = 40(\text{N})$ , suy ra

$$|\vec{F}| = AE = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50(\text{N}).$$

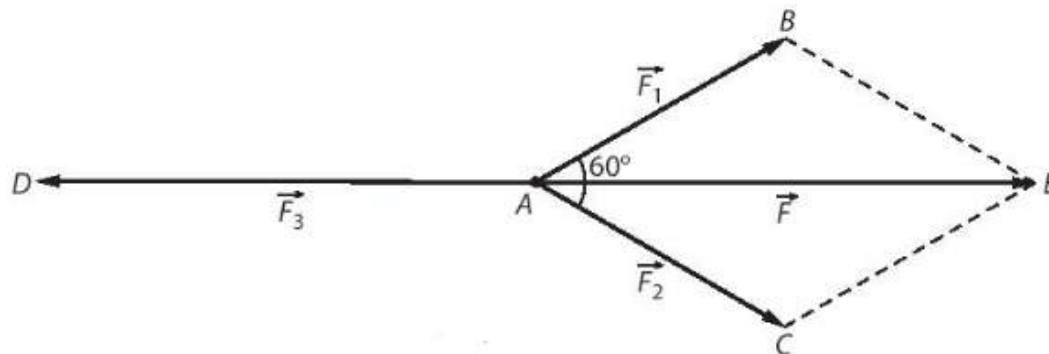
Do vật ở vị trí cân bằng, nên hai lực  $\vec{F}$  và  $\vec{F}_3$  có cùng cường độ và ngược hướng, tức là các vector  $\vec{AE}$  và  $\vec{AD}$  là các vector có cùng độ dài và ngược hướng. Bởi vậy, cường độ của lực  $\vec{F}_3$  bằng  $|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = AE = 50(\text{N})$ .

**Câu 91.** Trên mặt phẳng, chất điểm  $A$  chịu tác dụng của ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  và ở trạng thái cân bằng. Góc giữa hai vector  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  bằng  $60^\circ$ . Tính độ lớn của  $\vec{F}_3$ , biết  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 2\sqrt{3}\text{ N}$

### Lời giải

Ta sử dụng các vector  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  lần lượt biểu thị cho các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  và vector  $\vec{AE}$  để biểu thị cho hợp lực  $\vec{F}$  của hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ . Khi đó, tứ giác  $BACE$  là một hình bình hành. Từ đó, do

$AB = AC = 2\sqrt{3}$  và  $\widehat{BAC} = 60^\circ$  nên  $BACE$  là một hình thoi và tam giác  $ABC$  là một tam giác đều.



$$\text{Do đó } AE = 2 \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6$$

Do  $A$  ở vị trí cân bằng nên hai lực  $\vec{F}$  và  $\vec{F}_3$  có cùng cường độ và ngược hướng, tức là các vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{AE}$  đối nhau. Bởi vậy, cường độ của lực  $\vec{F}_3$  bằng  $|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = AE = 6(N)$ .

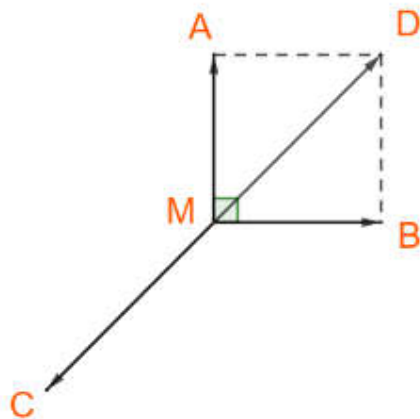
**Câu 92.** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$  và  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều là  $10N$  và  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ . Tìm độ lớn của lực  $\vec{F}_3$ .

#### Lời giải

Ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác dụng vào  $M$  và vật đứng yên nên hợp lực của chúng có giá trị bằng không, hay:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Dựng hình bình hành  $MADB$ , khi đó:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}$



$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC} \quad (\text{hai vector đối nhau})$$

$$\Rightarrow MD = MC$$

Xét hình bình hành  $MADB$ , ta có:

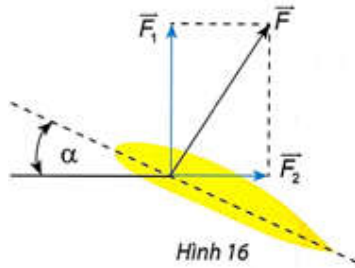
$$AM = AB \text{ và } \widehat{AMB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow MADB \text{ là hình vuông, cạnh } AB = 10$$

$$\Rightarrow MC = MD = AB \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy độ lớn của lực } \vec{F}_3 \text{ là } |\vec{F}_3| = |\overrightarrow{MC}| = MC = 10\sqrt{2} \text{ (N)}$$

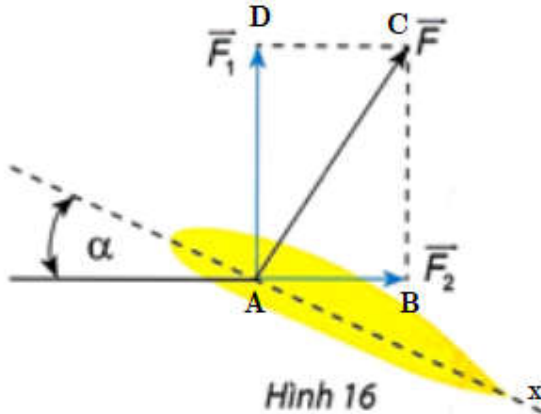
**Câu 93.** Khi máy bay nghiêng cánh một góc  $\alpha$ , lực  $\vec{F}$  của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng  $\vec{F}_1$  và lực cản  $\vec{F}_2$  (Hình 16). Cho biết  $\alpha = 30^\circ$  và  $|\vec{F}| = a$ . Tính  $|\vec{F}_1|$  và  $|\vec{F}_2|$  theo  $a$ .



Hình 16

Lời giải

Kí hiệu các điểm như hình dưới



Hình 16

Khi đó các lực  $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$  lần lượt là  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$   $\alpha = \widehat{BAx} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} = 60^\circ$

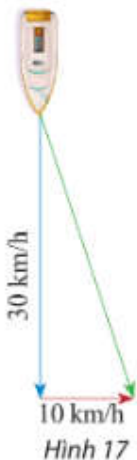
$$AB = AC \cdot \cos \widehat{CAB} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_2| = |\overrightarrow{AB}| = \frac{a}{2} \quad AD = BC = AC \cdot \sin \widehat{CAB} = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_1| = |\overrightarrow{AD}| = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } |\vec{F}_1| = \frac{a\sqrt{3}}{2}; |\vec{F}_2| = \frac{a}{2}$$

**Câu 94.** Một con tàu có vector vận tốc chỉ theo hướng nam, vận tốc của dòng nước là một vector theo hướng đông như hình 17. Tính độ dài vector tổng của hai vector nói trên.

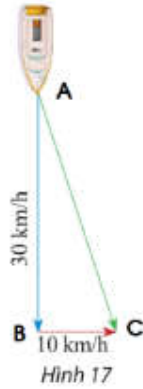


Hình 17

Lời giải

Gọi vector vận tốc của tàu là  $\overrightarrow{AB}$ , vector vận tốc của dòng nước là vector  $\overrightarrow{BC}$





Hình 17

Ta có vector tổng là  $\vec{F} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Độ dài vector tổng là

$$|\vec{F}| = |\vec{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{30^2 + 10^2} = 10\sqrt{10} (km/h)$$

Vậy độ dài vector tổng là  $10\sqrt{10} (km/h)$ .

- Câu 95.** Một máy bay có vector vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vector theo hướng đông như Hình 7. Tính độ dài vector tổng của hai vector nói trên.



Hình 7

### Lời giải

Gọi  $\vec{AB}$  và  $\vec{BC}$  lần lượt là vector vận tốc của máy bay và vận tốc của gió. Ta có:  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .

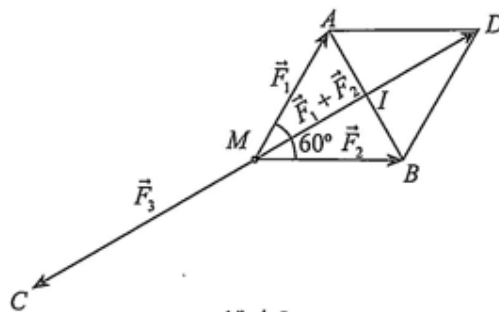
$$\text{Suy ra } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{200^2 + 60^2} \approx 209 (km/h).$$

Vậy độ dài vector tổng của hai vector nói trên là khoảng  $209 km/h$ .

- Câu 96.** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$  và  $\vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết độ lớn của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều là  $100 N$  và  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Tìm độ lớn của lực  $\vec{F}_3$ .

### Lời giải

$M$  đứng yên nên  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$  suy ra  $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ .



Hình 3

Ta cần tính  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ .

$$\text{Cường độ } \vec{F}_1 \text{ và } \vec{F}_2 \text{ đều là } 100 N \Rightarrow |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 100.$$

Dựng hình bình hành  $MADB$ .

Gọi  $I$  là giao điểm của  $AB$  và  $MD$ , khi đó  $I$  là trung điểm của  $AB$  và  $MD$ .

Mặt khác  $\widehat{AMB} = 60^\circ$  nên tam giác  $ABM$  đều.

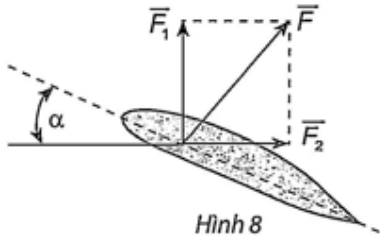
Khi đó  $MI \perp AB \Rightarrow \triangle AIM$  vuông tại  $I$ .

$$\Rightarrow MI = AM \sin \widehat{MAI} = 100 \cdot \sin 60^\circ = 50\sqrt{3} \Rightarrow MD = 2MI = 2 \cdot 50\sqrt{3} = 100\sqrt{3}.$$

$$\text{Mà } \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -(\vec{MA} + \vec{MB}) = -\vec{MD}.$$

Do đó  $\vec{F}_3$  có hướng ngược với hướng của  $\vec{MD}$  và có độ lớn  $|\vec{F}_3| = |\vec{MD}| = 100\sqrt{3}$ .

**Câu 97.** Khi máy bay nghiêng cánh một góc  $\alpha$ , lực  $\vec{F}$  của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng  $\vec{F}_1$  và lực cản  $\vec{F}_2$  (Hình 8). Cho biết  $\alpha = 45^\circ$  và  $|\vec{F}| = a$ . Tính  $|\vec{F}_1|$  và  $|\vec{F}_2|$  theo  $a$ .



**Lời giải**

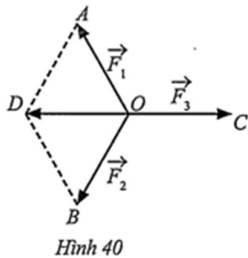
$$\text{Ta có } \cos 45^\circ = \frac{|\vec{F}_2|}{a} \Rightarrow |\vec{F}_2| = |\vec{F}| \cdot \cos 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin 45^\circ = \frac{|\vec{F}_1|}{a} \Rightarrow |\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

**Câu 98.** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{OA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{OB}$  và  $\vec{F}_3 = \vec{OC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $O$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều là  $120\text{ N}$  và  $\widehat{AOB} = 120^\circ$ . Xác định cường độ và hướng của lực  $\vec{F}_3$ .

**Lời giải**

Dựng hình bình hành  $OADB$  (Hình 40), ta có:  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OD}$ . Vì vật đứng yên nên  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ , tức là  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ .



Suy ra  $\vec{OD} + \vec{OC} = \vec{0}$  hay  $O$  là trung điểm của  $CD$ . Như vậy  $\vec{OD}$  ngược hướng với  $\vec{OC}$  hay hướng của lực  $\vec{F}_3$  ngược hướng với tổng hợp hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ .

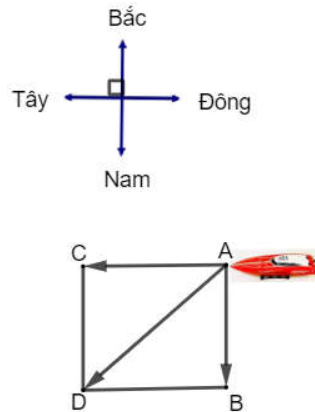
Hình bình hành  $OADB$  có  $OA = OB$  nên là hình thoi.

Suy ra  $\widehat{AOD} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 60^\circ$  nên tam giác  $OAD$  là tam giác đều, do đó  $OD = OA$ .

Vậy ta có  $OC = OA$  và cường độ của lực  $\vec{F}_3$  bằng cường độ của lực  $\vec{F}_1$  và bằng  $120\text{ N}$ .

**Câu 99.** Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là  $10\text{ km/h}$ . Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc  $40\text{ km/h}$  so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

**Lời giải**



Ca nô chuyển từ đông sang tây, giả sử ca nô đi theo hướng  $A$  sang  $C$ , khi đó vận tốc so với mặt nước của ca nô được biểu thị bởi  $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AC}$  và có độ lớn  $|\vec{v}_1| = 40 \text{ km/h}$ , vận tốc dòng chảy được biểu thị bởi  $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AB}$  và có độ lớn  $|\vec{v}_2| = 10 \text{ km/h}$ .

Khi đó vận tốc của ca nô so với bờ sông được biểu thị bởi  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Ta cần tính độ lớn của vector  $\vec{v}$ , hay chính là  $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$

Dựng hình bình hành ACDB như hình vẽ.

Do hướng nam bắc vuông góc với hướng đông tây nên  $AB$  và  $AC$  vuông góc với nhau.

Suy ra ACDB là hình chữ nhật.

Nên  $AB = CD = 10$ ,  $AC = BD = 40$ .

Sử dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông ACD, ta có:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 40^2 + 10^2 = 1700 \Rightarrow AD = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$$

Lại có do ACDB là hình bình hành nên:  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  Do đó:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\vec{v}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 10\sqrt{17}$$

Vậy vận tốc của ca nô so với bờ sông là  $10\sqrt{17} \text{ km/h}$ .

### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Cho ba điểm  $M, N, P$ . Vector  $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$  bằng vector nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{PN}$ ;
- B.  $\overrightarrow{PM}$
- C.  $\overrightarrow{MP}$ ;
- D.  $\overrightarrow{NM}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ . **Chọn C**

**Câu 2.** Cho ba điểm  $D, E, G$ . Vector  $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG})$  bằng vector nào sau đây?

- A.  $\overrightarrow{EG}$
- B.  $\overrightarrow{GE}$ ;
- C.  $\overrightarrow{GD}$ ;
- D.  $\overrightarrow{ED}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG}) = \vec{v} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GE}$ . **Chọn B**

**Câu 3.** Cho ba điểm  $M, N, P$  phân biệt. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
- B.  $-\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

- C.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ .  
D.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{MP}$ .

Lời giải

Chọn C

Câu 4. Cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .  
B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$ .  
D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$ .

Lời giải

Chọn A

Câu 5. Cho các điểm  $A, B, O$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ .  
B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ .  
D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ .

Lời giải

Chọn B

Câu 6. Cho ba điểm  $A, B, M$  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là:

- A.  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .  
B.  $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ .  
C.  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$  ngược hướng.  
D.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

Lời giải

Chọn D

Câu 7. Cho tam giác  $ABC$ . Điều kiện cần và đủ để  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  là:

- A.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$ .  
B.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$ .  
C.  $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB}$ .  
D.  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

Lời giải

Chọn B

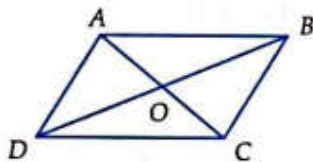
BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 8. Cho hình bình hành tâm  $O$ . Kết quả nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$       B.  $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$       C.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$       D.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB}$

Lời giải

Đáp án B



$$\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

Câu 9. Cho ba vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  khác vector-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .      B.  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ .  
C.  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .      D.  $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$ .

## Lời giải

Chọn D

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

**Câu 10.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Vector tổng  $\vec{CB} + \vec{CD}$  bằng

- A.  $\vec{CA}$ .                      B.  $\vec{BD}$ .                      C.  $\vec{AC}$ .                      D.  $\vec{DB}$ .

## Lời giải

Chọn A

$$\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}.$$

**Câu 11.** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ .                      B.  $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$ .  
C.  $\vec{CA} + \vec{BC} = \vec{BA}$ .                      D.  $\vec{CB} + \vec{AC} = \vec{BA}$ .

## Lời giải

Chọn D

$$\vec{CB} + \vec{AC} = \vec{AB}.$$

**Câu 12.** Cho bốn điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Vector tổng  $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA}$  bằng

- A.  $\vec{0}$ .                      B.  $\vec{AC}$ .                      C.  $\vec{BD}$ .                      D.  $\vec{BA}$ .

## Lời giải

Chọn A

$$\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}.$$

**Câu 13.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Vector tổng  $\vec{MP} + \vec{NP}$  bằng

- A.  $\vec{BP}$ .                      B.  $\vec{MN}$ .                      C.  $\vec{CP}$ .                      D.  $\vec{PA}$ .

## Lời giải

Chọn A

$$\vec{MP} + \vec{NP} = \vec{BM} + \vec{MP} = \vec{BP}.$$

**Câu 14.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.  $\vec{IA} + \vec{DC} = \vec{IB}$ .                      B.  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BD}$ .  
C.  $\vec{IA} + \vec{BC} = \vec{IB}$ .                      D.  $\vec{AB} + \vec{IA} = \vec{BI}$ .

## Lời giải

Chọn A

$$\vec{IA} + \vec{DC} = \vec{IA} + \vec{AB} = \vec{IB}.$$

**Câu 15.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $\vec{IA} + \vec{DC} = \vec{IB}$ .                      B.  $\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{BI} = \vec{DI}$ .  
C.  $\vec{ID} + \vec{AB} = \vec{IC}$ .                      D.  $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CI} = \vec{IA}$ .

## Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI}.$$

**Câu 16.** Cho các điểm phân biệt  $M, N, P, Q, R$ . Xác định vector tổng  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ .

- A.  $\overrightarrow{MP}$ .                      B.  $\overrightarrow{MN}$ .                      C.  $\overrightarrow{MQ}$ .                      D.  $\overrightarrow{MR}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{MP}.$$

**Câu 17.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$ .                      B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .  
C.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$ .                      D.  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

**Câu 18.** Cho tam giác  $ABC$  và  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ .                      B.  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ .  
C.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$ .                      D.  $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PM}.$$

**Câu 19.** Cho hình vuông  $ABCD$ , tâm  $O$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A.  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$ .                      B.  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CA}$ .  
C.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .                      D.  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}.$$

**Câu 20.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  có tâm  $O$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$ .                      B.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$ .  
C.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$ .                      D.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

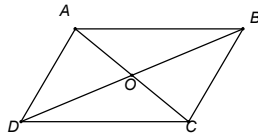
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA}.$$

**Câu 21.** Gọi  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$ .                      B.  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ .                      D.  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Xét các đáp án:

- Đáp án **A**. Ta có  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ . Vậy A đúng.
- Đáp án **B**. Ta có  $\begin{cases} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$ . Vậy B sai.
- Đáp án **C**. Ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ . Vậy C đúng.
- Đáp án **D**. Ta có  $\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$ . Vậy D đúng.

**Câu 22.** Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ .

- A.  $\overrightarrow{BC}$ .      B.  $\overrightarrow{DA}$ .      C.  $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ .      D.  $\overrightarrow{AB}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

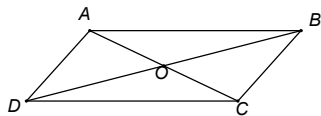
$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}.$$

**Câu 23.** Cho  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Hỏi vector  $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$  bằng vector nào?

- A.  $\overrightarrow{BA}$ .      B.  $\overrightarrow{BC}$ .      C.  $\overrightarrow{DC}$ .      D.  $\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



$$\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

**Câu 24.** Chọn khẳng định sai:

- A. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .
- B. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}$ .
- C. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .
- D. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA} \neq \vec{0}.$$

**Câu 25.** Cho 4 điểm bất kỳ  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng:

- A.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$ .
- B.  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .
- C.  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ .
- D.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

**Câu 26.** Chỉ ra vector tổng  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RN} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QR}$  trong các vector sau

- A.  $\overrightarrow{MR}$ . B.  $\overrightarrow{MQ}$ . C.  $\overrightarrow{MP}$ . D.  $\overrightarrow{MN}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}.$$

**Câu 27.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và điểm  $M$  tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ . B.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$ .  
C.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$ . D.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}. (\text{đúng}).$$

**Câu 28.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Khi đó vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$  là:

- A.  $\vec{u} = \vec{0}$ . B.  $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ . C.  $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ . D.  $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

**Câu 29.** Cho bốn điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Khi đó vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$  bằng:

- A.  $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ . B.  $\vec{u} = \vec{0}$ . C.  $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$ . D.  $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}.$$

**Câu 30.** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ . D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

**Câu 31.** Cho Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ . B.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ .  
C.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ . D.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}.$$

Do  $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CO}$  đối nhau,  $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DO}$  đối nhau.

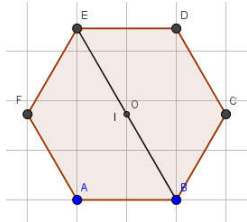
**Câu 32.** Cho Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?



- A.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EO} = \vec{0}$ . B.  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ .  
 C.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OC}$ . D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \vec{0}$ .

Lời giải

Chọn D



Ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{AO} \neq \vec{0}$ .

Câu 33. Cho 4 điểm A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ . D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$ .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}.$$

Câu 34. Cho  $\triangle ABC$ , vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành ABEF, ACPQ, BCMN. Xét các mệnh đề:

- (I)  $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}$   
 (II)  $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{MN}$   
 (III)  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MC}$

Mệnh đề đúng là :

- A. Chỉ (I). B. Chỉ (III). C. (I) và (II). D. Chỉ (II).

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}.$$

Câu 35. Cho 5 điểm phân biệt M, N, P, Q, R. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP}$ . B.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ .  
 C.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$ . D.  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$ .

Lời giải

Chọn

D.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}.$$

Câu 36. Cho hình bình hành ABCD, đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ .  
 C.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$ . D.  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

Lời giải

Chọn A.

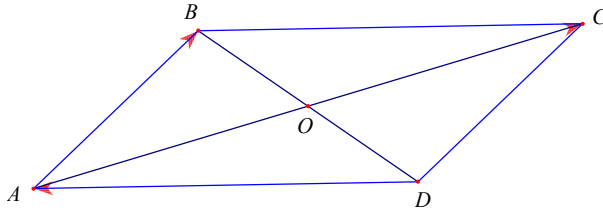
Đẳng thức vectơ  $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$  đúng theo quy tắc cộng hình bình hành.

Câu 37. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Khẳng định nào sau đây là đúng:

- A.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$ .      B.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$ .  
C.  $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$ .      D.  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải**

**Chọn #A.**



Ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ . Do  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$  nên  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$ .

**Câu 38.** Cho 4 điểm bất kì  $A, B, C, O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$ .      B.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA}$  nên A sai

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{CO}$  nên B đúng.

**Câu 39.** Cho 3 điểm phân biệt  $A, B, C$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 40.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Khi đó  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$  bằng

- A.  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$ .      B.  $\overrightarrow{AB}$ .      C.  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ .      D.  $\overrightarrow{CD}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ .

**Câu 41.** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$ .  
B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ .  
D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0} \end{aligned}$$

**Câu 42.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của đoạn  $BC$  và  $AD$ . Tính tổng  $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC}$ .

A.  $\overrightarrow{AC}$ .B.  $\overrightarrow{NM}$ .C.  $\overrightarrow{CA}$ .D.  $\overrightarrow{MN}$ .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}.$$

**Câu 43.** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$ . Tổng véc tơ:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$  bằng

A.  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DB}$ .B.  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DF}$ .C.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$ .D.  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF}$ .

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}.$$

**Câu 44.** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D, E, F$ . Đẳng thức nào sau đây *sai*?

A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$ .B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$ .C.  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC}$ .D.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$ .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \text{ (vô lý).}$$

**Câu 45.** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ .B.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$ .C.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$ .D.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

**Câu 46.** Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyến  $AM$ . Trên cạnh  $AC$  lấy điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $AE = EF = FC$ ,  $BE$  cắt  $AM$  tại  $N$ . Chọn mệnh đề đúng:

A.  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$ .B.  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ .C.  $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} = \vec{0}$ .D.  $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{EF}$ .

Lời giải

Chọn A

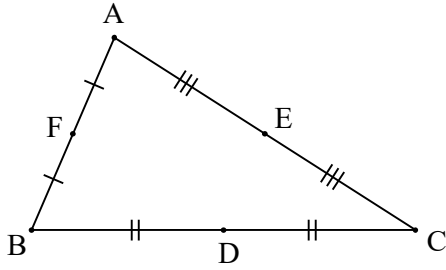
Trong tam giác  $BCE$  có  $MF$  là đường trung bình nên  $MF \parallel BE \Rightarrow MF \parallel NE$

$N$  là trung điểm của  $AM$  nên  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$ .

**Câu 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA, AB$ . Hệ thức nào là đúng?

A.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$ .B.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ .C.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ .D.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$ .

Lời giải



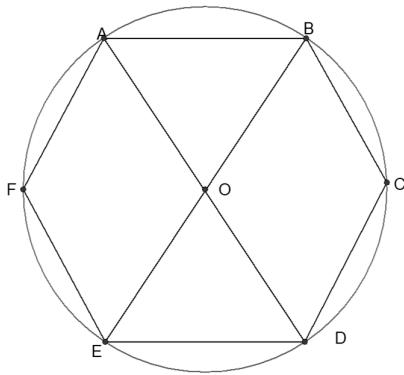
**Chọn A**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FF} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \vec{0} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}. \end{aligned}$$

**Câu 48.** Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$ , tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$   
C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = 6|\overrightarrow{AB}|$ . D.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .

**Lời giải**



**Chọn A**

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.$$

**Câu 49.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ ,  $G_1$  là điểm đối xứng của  $G$  qua  $M$ . Vector tổng  $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}$  bằng

- A.  $\overrightarrow{GA}$ . B.  $\overrightarrow{BC}$ . C.  $\overrightarrow{G_1A}$ . D.  $\overrightarrow{G_1M}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \overrightarrow{G_1G} = \overrightarrow{GA}.$$

**Câu 50.** Xét tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$  thỏa mãn  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

- 1)  $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ ;
- 2) Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông cân;
- 3) Tam giác  $ABC$  là tam giác đều;

4) Tam giác  $ABC$  là tam giác cân.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} = \vec{0} \Rightarrow O \equiv G$ . Do đó tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

**Câu 51.** Xét tam giác  $ABC$  nội tiếp có  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp,  $H$  là trực tâm. Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$ . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1)  $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ ;

2)  $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HA}$ ;

3)  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$ , với  $H_1$  là điểm đối xứng của  $H$  qua  $O$ ;

4) Nếu  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$  thì tam giác  $ABC$  là tam giác đều.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD} \Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$ .

Nếu  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$  thì  $\overrightarrow{HH_1} = \vec{0}$ , suy ra  $H \equiv O$ .

**Câu 52.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hai điểm  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Tìm đẳng thức sai:

A.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$

B.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

C.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NC}$

D.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DB}$

**Lời giải**

+ Tứ giác  $AMCN$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow$  A đúng.

+  $ABCD$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \Rightarrow$  B đúng.

+  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NC} \Rightarrow$  C đúng.

**Đáp án**

**D.**

**Câu 53.** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$  bất kì trên mặt phẳng. Tìm đẳng thức sai trong các đẳng thức sau:

A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$

C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF}$

D.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

**Lời giải**

**Đáp án D**

Ta có:

$(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow B \equiv A$ . Vì  $A, B$  bất kì  $\Rightarrow$  D sai.

**Câu 54.** Cho  $\triangle ABC$ , các điểm  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC, BC$ . Với  $O$  là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$

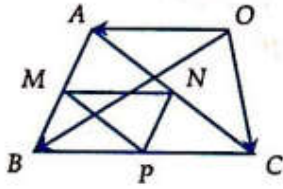
B.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

C.  $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

D.  $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$

**Lời giải**

**Đáp án B**



$$\begin{aligned} \vec{VT} &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \\ &= \vec{OM} + \vec{MA} + \vec{ON} + \vec{NB} + \vec{OP} + \vec{PC} \text{ Mà } \vec{NB} = \vec{NM} + \vec{NP} \\ &\Rightarrow \vec{MA} + \vec{NB} + \vec{PC} = \vec{MA} + \vec{NM} + \vec{NP} + \vec{PC} = \vec{NA} + \vec{NC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{VT} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP} \end{aligned}$$

**Câu 55.** Cho 4 điểm  $M, N, P, Q$  bất kì. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng.

- A.  $\vec{PQ} + \vec{NP} = \vec{MQ} + \vec{MN}$  B.  $\vec{NP} + \vec{MN} = \vec{QP} + \vec{MQ}$   
C.  $\vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{NP} + \vec{MQ}$  D.  $\vec{NM} + \vec{QP} = \vec{NP} + \vec{MQ}$

**Lời giải**

**Đáp án B**

Ta có:

$$\vec{NP} + \vec{MN} = \vec{NQ} + \vec{QP} + \vec{MQ} + \vec{QN} = \vec{QP} + \vec{MQ} + (\vec{NQ} + \vec{QN}) = \vec{QP} + \vec{MQ} = \vec{VP}$$

**Câu 56.** Cho 6 điểm  $A, B, C, D, E, F$  phân biệt. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

- A.  $\vec{AB} + \vec{DF} + \vec{BD} + \vec{FA} = \vec{0}$  B.  $\vec{BE} - \vec{CE} + \vec{CF} - \vec{BF} = \vec{0}$   
C.  $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD}$  D.  $\vec{FD} + \vec{BE} + \vec{AC} = \vec{BD} + \vec{AE} + \vec{CF}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} + \text{Ta có: } \vec{AB} + \vec{DF} + \vec{BD} + \vec{FA} &= \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DF} + \vec{FA} = \vec{AD} + \vec{FA} = \vec{AD} + \vec{DA} = \vec{0} \Rightarrow A \text{ đúng.} \\ + \vec{BE} - \vec{CE} + \vec{CF} - \vec{BF} &= \vec{BC} + \vec{CB} = \vec{0} \Rightarrow B \text{ đúng.} \\ + \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} &= \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{EB} + \vec{BF} \Leftrightarrow \vec{AF} = \vec{AF} \\ &\Rightarrow C \text{ đúng.} \\ + \vec{FD} + \vec{DB} + \vec{BE} + \vec{EA} + \vec{AC} + \vec{FC} &= \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow F \equiv C \text{ (mâu thuẫn giả thiết)} \\ &\Rightarrow D \text{ sai.} \end{aligned}$$

**Đáp án D.**

**Câu 57.** Cho  $n$  điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Bạn Bình kí hiệu chúng là  $B_1, B_2, \dots, B_n$  ( $A_i \neq B_n$ ). Vectơ tổng  $\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_nB_n}$  bằng

- A.  $\vec{0}$ . B.  $\vec{A_1A_n}$ . C.  $\vec{B_1B_n}$ . D.  $\vec{A_1B_n}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Lấy điểm  $O$  bất kì. Khi đó

$$\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_nB_n} = (\vec{A_1O} + \vec{A_2O} + \dots + \vec{A_nO}) + (\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \dots + \vec{OB_n})$$

Vì  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  nên

$$\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \dots + \vec{OB_n} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n}$$

$$\text{Do đó } \vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_nB_n} = (\vec{A_1O} + \vec{OA_1}) + (\vec{A_2O} + \vec{OA_2}) + \dots + (\vec{A_nO} + \vec{OA_n}) = \vec{0}.$$

**Câu 58.** Cho hai điểm  $A, B$  phân biệt. Xác định điểm  $M$  sao cho  $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$

- A.  $M$  ở vị trí bất kì  
 B.  $M$  là trung điểm của  $AB$   
 C. Không tìm được  $M$   
 D.  $M$  nằm trên đường trung trực của  $AB$

**Lời giải**

**Đáp án B**

**Câu 59.** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \vec{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .                      B.  $M$  trùng  $A$ .  
 C.  $M$  trùng  $B$ .                      D.  $A$  là trung điểm  $MB$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{O} \Leftrightarrow A \text{ là trung điểm } MB.$$

**Câu 60.** Cho  $\triangle ABC$ ,  $B$ . Tìm điểm  $I$  để  $\overrightarrow{IA}$  và  $\overrightarrow{CB}$  cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $I$  là trung điểm  $AB$ .    B.  $I$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .  
 C. Không có điểm  $I$ .    D. Có vô số điểm  $I$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$\overrightarrow{IA}$  và  $\overrightarrow{CB}$  cùng phương nên  $AI \parallel CB$ . Suy ra có vô số điểm  $I$ .

**Câu 61.** Cho 2 điểm phân biệt  $A, B$ . Tìm điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .                      B.  $M$  thuộc đường trung trực của  $AB$ .  
 C. Không có điểm  $M$ .    D. Có vô số điểm  $M$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \vec{O} \text{ (vô lý).}$$

**Câu 62.** Cho tam giác  $ABC$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .                      B.  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ .  
 C.  $M$  trùng  $B$ .                      D.  $A$  là trung điểm  $MB$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{O} \text{ nên } M \text{ là trọng tâm } \triangle ABC.$$

**Câu 63.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M$  trùng  $D$ .                      B.  $M$  trùng  $A$ .  
 C.  $M$  trùng  $B$ .                      D.  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

**Câu 64.** Cho  $ABCD$  là hình bình hành,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M$  trùng  $D$ .                      B.  $M$  trùng  $A$ .

C.  $M$  trùng  $B$ .

D.  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

**Câu 65.** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $M$  trùng  $O$ .

B.  $M$  trùng  $A$ .

C.  $M$  trùng  $B$ .

D.  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC} \text{ suy ra } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} \text{ (} O \text{ là trung điểm } AC \text{) nên } M \text{ trùng } O.$$

**Câu 66.** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $M$  trùng  $D$ .

B.  $M$  trùng  $A$ .

C.  $M$  trùng  $B$ .

D.  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}, \text{ suy ra } M \text{ trùng } D.$$

**Câu 67.** Cho  $ABCD$  là hình bình hành tâm  $O$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $M$  trùng  $O$ .

B.  $M$  trùng  $A$ .

C.  $M$  trùng  $B$ .

D.  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}.$$

**Câu 68.** Cho tứ giác  $PQRN$  có  $O$  là giao điểm 2 đường chéo,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{ON}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $M$  trùng  $P$ .

B.  $M$  trùng  $Q$ .

C.  $M$  trùng  $O$ .

D.  $M$  trùng  $R$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO}.$$

**Câu 69.** Cho  $\triangle ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .

B.  $M$  là trung điểm  $BC$ .

C.  $M$  là trung điểm  $CA$ .

D.  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ .



**Câu 70.** Cho  $\triangle DEF$ , tìm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ED}$ .      B.  $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}$ .      C.  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DF}$ .      D.  $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{MF} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}.$$

Suy ra  $M$  là điểm cuối của vec tơ có điểm đầu là  $F$  sao cho  $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}$ .

**Câu 71.** Cho  $\triangle DEF$ ,  $M$  là điểm thỏa  $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{O}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF}$ .      B.  $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EM}$ .      C.  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EM}$ .      D.  $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{MF} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}.$$

Suy ra  $DEFM$  là hình bình hành. Do đó  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF}$ .

**Câu 72.** Cho  $\triangle ABC$  có  $O$  là trung điểm  $BC$ , tìm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M$  trùng  $A$ .      B.  $M$  trùng  $B$ .  
C.  $M$  trùng  $O$ .      D.  $M$  trùng  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \vec{O}$$

Suy ra  $M$  trùng  $C$ .

**Câu 73.** Cho  $\triangle ABC$ , tìm điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .      B.  $M$  là trung điểm  $BC$ .  
C.  $M$  là trung điểm  $CA$ .      D.  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{O}$$

Suy ra  $M$  là trung điểm  $AC$ .

**Câu 74.** Cho  $\triangle ABC$ , điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $M$  trùng  $A$ .      B.  $M$  trùng  $B$ .  
C.  $ACMB$  là hình bình hành.      D.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$$

Suy ra  $M$  là điểm thỏa  $ABCM$  là hình bình hành. Nên  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$ .

**Câu 75.** Cho  $\triangle ABC$ ,  $D$  là trung điểm  $AB$ ,  $E$  là trung điểm  $BC$ , điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CM}$ .      B.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ED}$ .

C.  $M$  là trung điểm  $BC$ .

D.  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra  $M$  là trung điểm  $AC$ . Suy ra  $BEMD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$ .

**Câu 76.** Cho tứ giác  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $M$  là trung điểm  $AB$ .

B.  $M$  là trung điểm  $BC$ .

C.  $D$  là trung điểm  $BM$ .

D.  $M$  là trung điểm  $DC$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BD}.$$

**Câu 77.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tìm vị trí điểm  $N$  thỏa mãn:

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.$$

A. Điểm  $N$  là trung điểm cạnh  $AB$

B. Điểm  $C$  là trung điểm cạnh  $BN$

C. Điểm  $C$  là trung điểm cạnh  $AM$

D. Điểm  $B$  là trung điểm cạnh  $NC$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{ND} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DN}$$

$\Rightarrow ACND$  là hình bình hành  $\Rightarrow C$  là trung điểm cạnh  $BN$ .

**Đáp án B.**

**Câu 78.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tìm vị trí điểm  $M$  thỏa mãn:  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$ .

A. Điểm  $M$  là trung điểm cạnh  $AC$

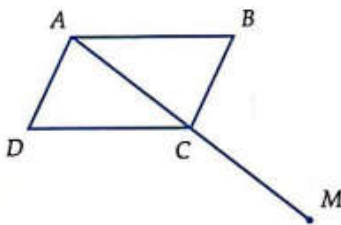
B. Điểm  $M$  là trung điểm cạnh  $BD$

C. Điểm  $C$  là trung điểm cạnh  $AM$

D. Điểm  $B$  là trung điểm cạnh  $MC$

**Lời giải**

**Đáp án C**



$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

Vậy  $C$  là trung điểm của  $AM$

**Câu 79.** Trên đường tròn  $C(O; R)$  lấy điểm cố định  $A$ ;  $B$  là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi  $M$  là điểm di động sao cho  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ . Khi đó tập hợp điểm  $M$  là:

- A. đường tròn tâm  $O$  bán kính  $2R$ .  
 B. đường tròn tâm  $A$  bán kính  $R$   
 C. đường thẳng song song với  $OA$   
 D. đường tròn tâm  $C$  bán kính  $R\sqrt{3}$

**Lời giải**

Từ giả thiết  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow O, A, M, B$  theo thứ tự là các đỉnh của hình bình hành. Do  $AM = OB = R \Rightarrow$  Tập hợp điểm  $M$  là đường tròn tâm  $A$  bán kính  $R$ .

**Đáp án B.**

**Câu 80.** Cho  $\triangle ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}|$  là:

- A. một đường tròn tâm  $C$   
 B. đường tròn tâm  $I$  ( $I$  là trung điểm của  $AB$ )  
 C. một đường thẳng song song với  $AB$   
 D. là đường thẳng trung trực của  $BC$

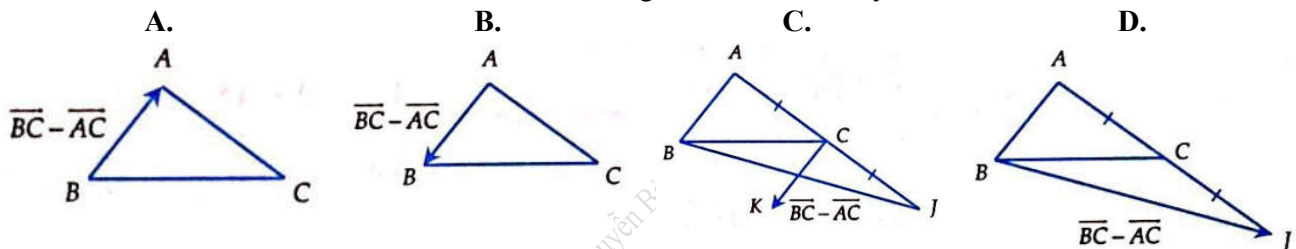
**Lời giải**

**Đáp án A**

$$|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{MC}|$$

Vậy tập hợp điểm  $M$  là đường tròn tâm  $C$  bán kính  $AB$ .

**Câu 81.** Cho  $\triangle ABC$ . Vector  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$  được vẽ đúng ở hình nào sau đây?



**Lời giải**

$$\text{Vì } \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

**Đáp án A.**

**Câu 82.** Cho tam giác  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3\text{ cm}$ ,  $BC = 5\text{ cm}$ . Khi đó độ dài  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$  là:

- A. 4  
 B. 8  
 C.  $2\sqrt{13}$   
 D.  $\sqrt{13}$

**Lời giải**

Ta có:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4 \Rightarrow AI = 2; |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{BI}| = 2\sqrt{AB^2 + AI^2} = 2\sqrt{13}.$$

**Đáp án C.**

**Câu 83.** Cho hình thang cân  $ABCD$ , có đáy nhỏ và đường cao cùng bằng  $2a$  và  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ . Tính  $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}|$ .

- A.  $a\sqrt{3}$   
 B.  $2a\sqrt{5}$   
 C.  $a\sqrt{5}$   
 D.  $a\sqrt{2}$

**Lời giải**

$$|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{BH^2 + DH^2} = 2a\sqrt{5}$$

**Đáp án B.**

**Câu 84.** Cho 2 vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo với nhau góc  $60^\circ$ . Biết  $|\vec{a}| = 6; |\vec{b}| = 3$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$

- A.  $3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$       B.  $3(\sqrt{7} + \sqrt{3})$       C.  $6(\sqrt{5} + 3)$       D.  $\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{51})$

**Lời giải**

Đựng  $\vec{OA} = \vec{a}; \vec{OB} = \vec{b}$

Đựng hình bình hành  $OACB \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{OC}; \vec{a} - \vec{b} = \vec{BA}$

$$\Rightarrow \triangle OAB \text{ vuông tại } B \Rightarrow IB = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$OI = \sqrt{OB^2 + IB^2} = \frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow OC = \sqrt{63} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{63} + 3\sqrt{3}.$$

**Đáp án B.**

**Câu 85.** Cho hình thang  $ABCD$  có  $AB$  song song với  $CD$ . Cho  $AB = 2a$ ,  $CD = a$ . Gọi  $O$  là trung điểm của  $AD$ . Khi đó:

- A.  $|\vec{OB} + \vec{OC}| = 3a$       B.  $|\vec{OB} + \vec{OC}| = a$       C.  $|\vec{OB} + \vec{OC}| = \frac{3a}{2}$       D.  $|\vec{OB} + \vec{OC}| = 0$

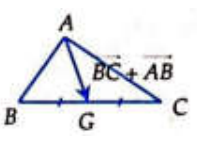
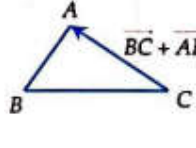
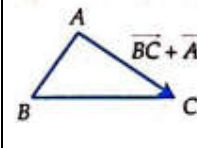
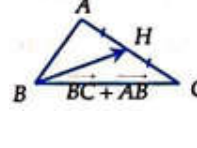
**Lời giải**

$$|\vec{OB} + \vec{OC}| = |\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{OD} + \vec{DC}| = |\vec{AB} + \vec{DC}| \Rightarrow |\vec{AB}| + |\vec{DC}| = 3a$$

(vì  $\vec{AB}$  và  $\vec{DC}$  cùng hướng)

**Đáp án A.**

**Câu 86.** Cho  $\triangle ABC$ . Vector  $\vec{BC} + \vec{AB}$  được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

A.	B.	C.	D.
			

**Lời giải**

**Đáp án C**

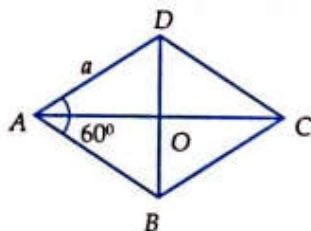
Vì theo quy tắc 3 điểm  $\vec{BC} + \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

**Câu 87.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\widehat{BAD} = 60^\circ$  và cạnh là  $a$ . Tính độ dài  $|\vec{AB} + \vec{AD}|$ .

- A.  $a\sqrt{3}$       B.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$       C.  $a\sqrt{2}$       D.  $2a$

**Lời giải**

**Đáp án A**



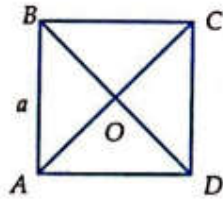
Gọi  $O$  là giao của 2 đường chéo  $\Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}| = 2AD = a\sqrt{3}$

**Câu 88.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh là  $a$ .  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Tính  $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$ .

- A.  $a\sqrt{3}$       B.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$       C.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$       D.  $a\sqrt{2}$

**Lời giải**

**Đáp án C**



$$|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{OD}| = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

**Câu 89.** Với  $\forall \vec{a}, \vec{b}$  độ dài  $|\vec{a} + \vec{b}|$ :

- A. Bao giờ cũng lớn hơn  $|\vec{a}| + |\vec{b}|$       B. Không nhỏ hơn  $|\vec{a}| + |\vec{b}|$   
C. Bao giờ cũng nhỏ hơn  $|\vec{a}| + |\vec{b}|$       D. Không lớn hơn  $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

**Lời giải**

**Đáp án D**

Theo quy tắc 3 điểm độ dài vectơ tổng bao giờ cũng nhỏ hơn hoặc bằng tổng độ dài 2 vectơ thành phần.

**Câu 90.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ . Khi đó  $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}|$  bằng:

- A. 0      B.  $3a$       C.  $a$       D.  $a(\sqrt{3} - 1)$

**Lời giải**

**Đáp án A**

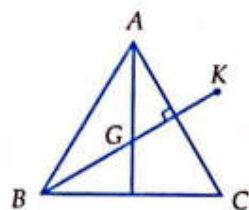
$$|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AA'}| = 0$$

**Câu 91.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , trọng tâm  $G$ . Tính độ dài vectơ  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$ .

- A.  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{a}{3}$       C.  $\frac{2a}{3}$       D.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

**Lời giải**

**Đáp án A**



Gọi  $K$  là điểm đối xứng với  $G$  qua  $AC$  thì  $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{GC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$

$$= |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AK}| = |\overrightarrow{KB}| = 2BG = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

**Câu 92.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh là 3. Tính độ dài  $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$ :

A. 6

B.  $6\sqrt{2}$

C. 12

D. 0

**Lời giải**

**Đáp án A**

$$|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = |2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OD}| = 2|\overrightarrow{AD}| = 6$$

**Câu 93.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , tâm  $O$  và  $M$  là trung điểm  $AB$ . Tính độ dài  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$ .

A.  $a$

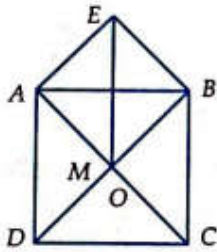
B.  $3a$

C.  $\frac{a}{2}$

D.  $2a$

**Lời giải**

**Đáp án A**



Ta có:  $AC = a\sqrt{2}$  và  $OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow OM = \frac{a}{2}$ . Gọi  $E$  là điểm sao cho  $OBEA$  là hình bình hành  $\Rightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}| = AB = a$

**Câu 94.** Cho  $\triangle ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $BC = a\sqrt{2}$ ,  $M$  là trung điểm  $BC$ . Tính độ dài vector  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}|$ .

A.  $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

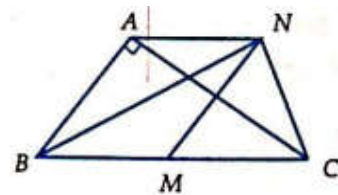
B.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D.  $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

**Lời giải**

**Đáp án D**



Dựng hình bình hành  $ABMN \Rightarrow |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{BN}| = BN$

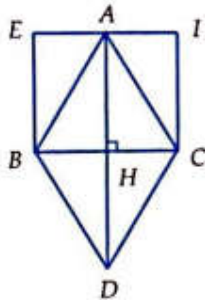
Ta có:  $NC = AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BN = \sqrt{BC^2 + NC^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

**Câu 95.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh bằng 3.  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Tìm mệnh đề sai.

A.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{3}$     B.  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}| = \frac{\sqrt{63}}{2}$     C.  $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = 3$     D.  $|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}| = \sqrt{3}$

## Lời giải

## Đáp án D



$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 3\sqrt{3} \Rightarrow A \text{ đúng.}$$

$$|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{HE}| = |\overrightarrow{AB}| = 3 \Rightarrow B \text{ đúng.}$$

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}| = |\overrightarrow{BI}| = \frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow C \text{ đúng.}$$

$$|\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{BA}| = 3 \Rightarrow D \text{ sai.}$$

**Câu 96.** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Độ dài  $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$  bằng

A.  $2a$

B.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

D.  $a\sqrt{2}$ .

## Lời giải

## Chọn D.

Theo quy tắc đường chéo hình bình hành, ta có

$$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

**Câu 97.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ , mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ .

B.  $\overrightarrow{AC} = a$ .

C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .

D.  $|\overrightarrow{AB}| = a$ .

## Lời giải

## Chọn D.

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = a.$$

**Câu 98.** Cho  $\overrightarrow{AB}$  khác  $\vec{0}$  và cho điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ?

A. Vô số.

B. 1 điểm.

C. 2 điểm.

D. Không có điểm nào.

## Lời giải

## Chọn A.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow AB = CD.$$

Suy ra tập hợp các điểm  $D$  là đường tròn tâm  $C$  bán kính  $AB$ .

**Câu 99.** Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A.  $\vec{0}$  cùng hướng với mọi vector.

B.  $\vec{0}$  cùng phương với mọi vector.

C.  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ .

D.  $|\overrightarrow{AB}| > 0$ .

## Lời giải

## Chọn D.

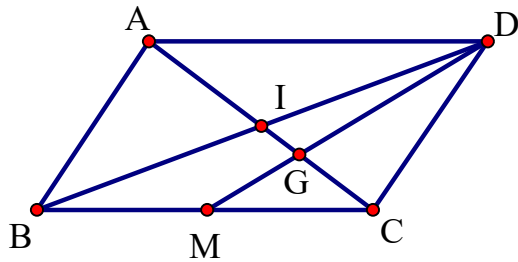
$$\text{Mệnh đề } |\overrightarrow{AB}| > 0 \text{ là mệnh đề sai, vì khi } A \equiv B \text{ thì } |\overrightarrow{AB}| = 0.$$

**Câu 100.** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $I$ ;  $G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$ . B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$ .  
C.  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$ . D.  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**



Ta có  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$  (vô lý)  $\rightarrow$  A sai.

$G$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ ;  $A$  là một điểm nằm ngoài tam giác  $BCD \rightarrow$  đẳng thức ở đáp án B đúng.

Ta có  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}|$  và  $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}|$ . Mà  $|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{BD}| \rightarrow$  đáp án C đúng.

Ta có  $\overrightarrow{IA}$  và  $\overrightarrow{IC}$  đối nhau, có độ dài bằng nhau  $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ ; tương tự  $\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \rightarrow$  đáp án D là đúng.

**Câu 101.** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh  $AB = 5$ ,  $H$  là trung điểm của  $BC$ . Tính  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$ .

- A.  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ . B.  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 5$ .  
C.  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$ . D.  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$ .

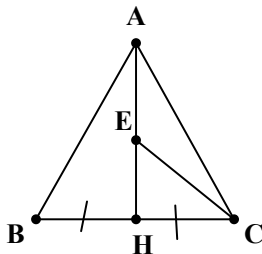
**Lời giải**

**Chọn D.**

Gọi  $M$  là điểm sao cho  $CHMA$  là hình bình hành.

Ta có:  $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}| = |\overrightarrow{CM}| = CM = 2CE$  ( $E$  là tâm của hình bình hành  $CHMA$ ).

Ta lại có:  $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$  ( $\triangle ABC$  đều,  $AH$  là đường cao).



Trong tam giác  $HEC$  vuông tại  $H$ , có:

$$EC = \sqrt{CH^2 + HE^2} = \sqrt{2.5^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \Rightarrow |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 2CE = \frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

**Câu 102.** Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ . B.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ . C.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ . D.  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ .

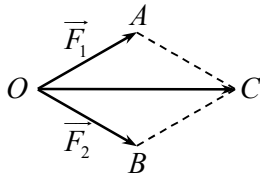
**Lời giải**



**Chọn C.**Ta có  $O$  là trung điểm của  $AC$  nên  $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$ .

**Câu 103.** Có hai lực  $\overrightarrow{F_1}$ ,  $\overrightarrow{F_2}$  cùng tác động vào một vật đứng tại điểm  $O$ , biết hai lực  $\overrightarrow{F_1}$ ,  $\overrightarrow{F_2}$  đều có cường độ là  $50$  (N) và chúng hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

- A.  $100$  (N).                      B.  $50\sqrt{3}$  (N).  
C.  $100\sqrt{3}$  (N).                  D. Đáp án khác.

**Lời giải****Chọn B.**Giả sử  $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$ .Theo quy tắc hình bình hành, suy ra  $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OC}$ , như hình vẽ.Ta có  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ ,  $OA = OB = 50$ , nên tam giác  $OAB$  đều, suy ra  $OC = 50\sqrt{3}$ .Vậy  $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{OC}| = 50\sqrt{3}$  (N).

**Câu 104.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  và  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .                      B.  $ABCD$  là hình thoi.  
C.  $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$ .                  D.  $ABCD$  là hình thang cân.

**Lời giải****Chọn D.**Tứ giác  $ABCD$  có  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$  là hình bình hành (1), nên  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .Mà  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$  (2).Từ (1) và (2) ta có  $ABCD$  là hình thoi nên  $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$ .

**Câu 105.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = a$ . Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .

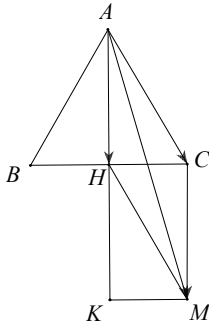
- A.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$ .      B.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .  
C.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$ .      D.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$ .

**Lời giải****Chọn A.**Gọi  $D$  là điểm thỏa  $ABDC$  là hình bình hành. Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  suy ra  $ABDC$  là hình vuông.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 2AM = BC = a\sqrt{2}$ .

**Câu 106.** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$ , có  $AH$  là đường trung tuyến. Tính  $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}|$ .

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $2a$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ .                      D.  $a\sqrt{3}$ .

**Lời giải****Chọn C.**



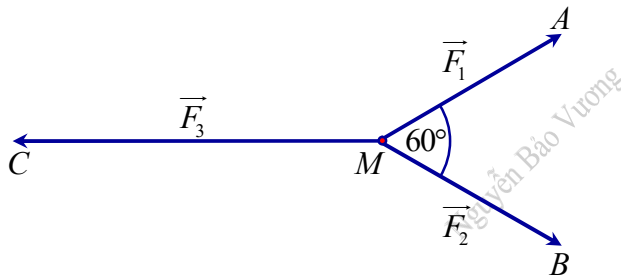
Dựng  $\overline{CM} = \overline{AH} \Rightarrow AHMC$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overline{AC} + \overline{AH} = \overline{AM} \Rightarrow |\overline{AC} + \overline{AH}| = AM$ .

Gọi  $K$  đối xứng với  $A$  qua  $BC \Rightarrow \triangle AKM$  vuông tại  $K$ .

$$AK = 2AH = a\sqrt{3} ; KM = CH = \frac{a}{2}.$$

$$AM = \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

**Câu 107.** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overline{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overline{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \overline{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng  $25N$  và góc  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ . Khi đó cường độ lực của  $\vec{F}_3$  là



A.  $25\sqrt{3} N$ .

B.  $50\sqrt{3} N$ .

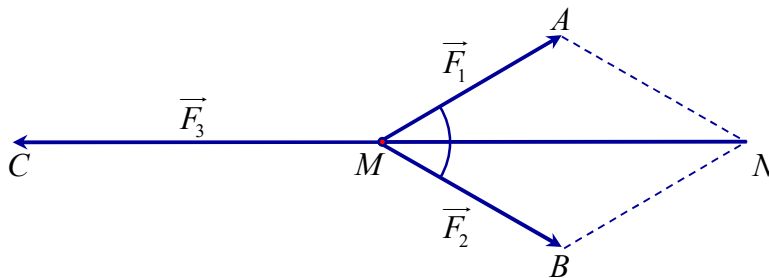
C.  $50\sqrt{2} N$ .

D.  $100\sqrt{3} N$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Vật đứng yên nên ba lực đã cho cân bằng. Ta được  $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ .



Dựng hình bình hành  $AMBN$ . Ta có  $-\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\overline{MA} - \overline{MB} = -\overline{MN}$ .

$$\text{Suy ra } |\vec{F}_3| = |-\overline{MN}| = MN = \frac{2\sqrt{3}MA}{2} = 25\sqrt{3}.$$

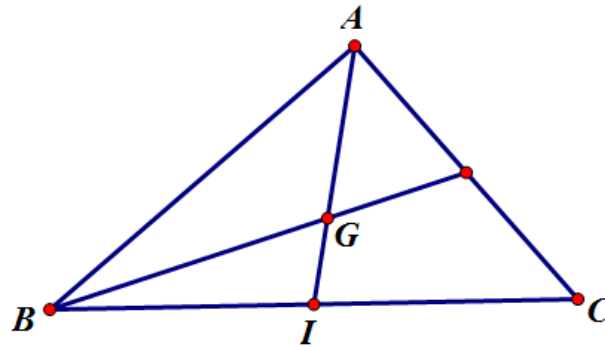
**Câu 108.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $I$  là trung điểm  $BC$ . Tìm khẳng định **sai**.

A.  $|\overline{IB} + \overline{IC} + \overline{IA}| = IA$ .    B.  $|\overline{IB} + \overline{IC}| = BC$ .

C.  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = 2AI$ .    D.  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = 3GA$ .

**Lời giải**

Chọn B.



$|\vec{IB} + \vec{IC} + \vec{IA}| = |\vec{0} + \vec{IA}| = |\vec{IA}| = IA$  (Do  $I$  là trung điểm  $BC$ ) nên khẳng định ở A đúng.

$|\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = 2AI$  (Gọi  $D$  là điểm thỏa  $ABDC$  là hình bình hành,  $I$  là trung điểm  $BC$ ) nên khẳng định ở C đúng.

$|\vec{AB} + \vec{AC}| = 2AI = 3GA$  (Do  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ ) nên khẳng định ở D đúng.

$|\vec{IB} + \vec{IC}| = |\vec{0}| = 0$  (Do  $I$  là trung điểm  $BC$ ) nên khẳng định ở B sai.

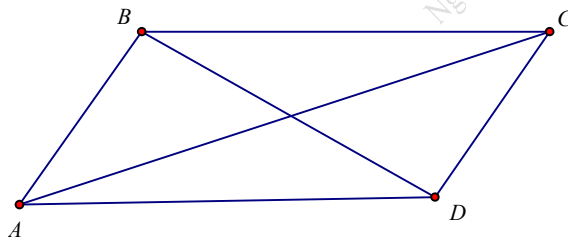
**Câu 109.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

A.  $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ .      B.  $|\vec{BC}| = |\vec{DA}|$ .

C.  $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$ .      D.  $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ .

Lời giải

Chọn A.



Ta có  $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$  là đẳng thức sai vì độ dài hai đường chéo của hình bình hành không bằng nhau.

**Câu 110.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $2a$ . Tính  $|\vec{AB} + \vec{AD}|$ .

A.  $4a\sqrt{2}$ .

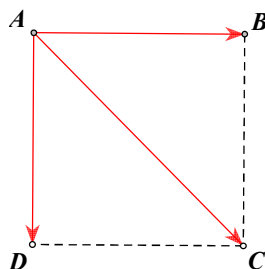
B.  $4a$ .

C.  $2a\sqrt{2}$ .

D.  $2a$ .

Lời giải

Chọn C.



Ta có  $|\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}| = AC = 2a\sqrt{2}$ .

**Câu 111.** Cho tam giác  $ABC$  đều, cạnh  $2a$ , trọng tâm  $G$ . Độ dài vectơ  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}$  là

- A.  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .      B.  $\frac{2a}{3}$ .      C.  $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ .      D.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta có :  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{GB} - (-\overrightarrow{GB})$  vì  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

Khi đó  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{GE}| = 2GB = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$  ( $E$  đối xứng với  $G$  qua  $M$ ).

**Câu 112.** Tam giác  $ABC$  thỏa mãn:  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$  thì tam giác  $ABC$  là

- A. Tam giác vuông  $A$ .    B. Tam giác vuông  $C$ .  
C. Tam giác vuông  $B$ .    D. Tam giác cân tại  $C$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**

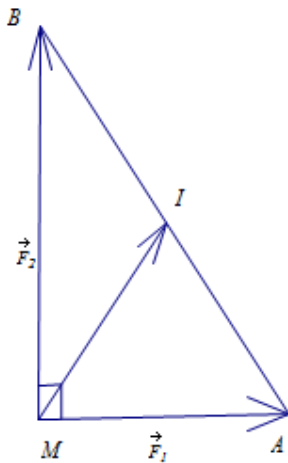
Gọi  $E$  là trung điểm  $BC$ ,  $M$  là điểm thỏa  $ABCM$  là hình bình hành. Ta có  
 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow AE = \frac{1}{2}BC$ . Trung tuyến kẻ từ  $A$  bằng một nửa cạnh  $BC$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

**Câu 113.** Cho hai lực  $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$ ,  $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\overrightarrow{F_1}$ ,  $\overrightarrow{F_2}$  lần lượt là  $300(N)$  và  $400(N)$ .  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A.  $0(N)$ .      B.  $700(N)$ .      C.  $100(N)$ .      D.  $500(N)$ .

**Lời giải**

**Chọn D.**



Cường độ lực tổng hợp của  $|\overrightarrow{F}| = |\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MI}| = AB$  ( $I$  là trung điểm của  $AB$ ).

Ta có  $AB = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 500$  suy ra  $|\overrightarrow{F}| = 500(N)$ .