BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

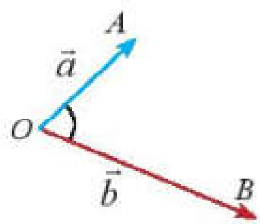
1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Góc $\widehat{AOB}$ với số đo từ 0° đến 180° được gọi là ***góc giữa hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

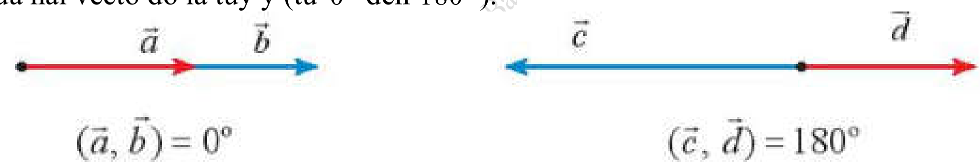
Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Nếu $(\vec{a}, \vec{b})=90^{\circ}$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, ki hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Chú ý:

- Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b})=(\vec{b}, \vec{a})$.
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0°.
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180°.
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ là vectơ $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tuỳ ý (từ 0° đến 180°).



2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$

Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b}=|\vec{a}| \cdot|\vec{b}| \cdot \cos (\vec{a}, \vec{b}).}$$

Chú ý:

a) Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b}=0$.

b) Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}=0$.

c) Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2=|\vec{a}| \cdot|\vec{a}| \cdot \cos 0^{\circ}=|\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

3. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k, ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b}=\vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a} \cdot \vec{b}+\vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k \vec{a}) \cdot \vec{b}=k(\vec{a} \cdot \vec{b})=\vec{a} \cdot(k \vec{b})$;

4. Một số ứng dụng

Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vectơ bất kì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vectơ $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng b.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ, góc của hai vectơ

Phương pháp:

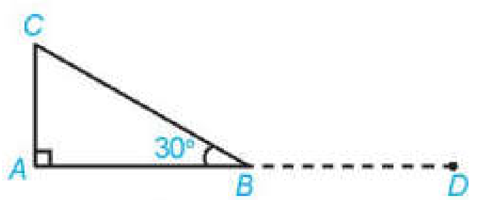
Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Với hai vectơ khác vectơ $\vec{0}$, sử dụng công thức $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} = 30^\circ$.

Tinh$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Lời giải



Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 90^\circ, (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{ACB} = 60^\circ$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{DBC} = 150^\circ$.

Câu 2. Tính $(\vec{a}, \vec{b})$ biết rằng $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \vec{a}.\vec{b} = -6\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{-6\sqrt{3}}{3.4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$. Do đó, $(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$.

Câu 3. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}| = 6 |\vec{b}| = 8$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$.

a) Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

b) Tính số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải

HD. Từ một điểm O, dựng vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, rồi dựng vectơ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ và tam giác OAB vuông tại A.

a) Đáp số. $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 36$.

b) Đáp số. $(\vec{a}; \vec{a} + \vec{b}) \approx 53^\circ 7' 48''$.

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các góc:

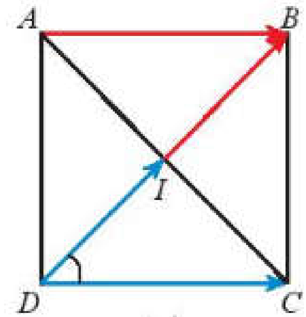
a) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB})$

b) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI})$

c) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB})$

d) $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC})$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{IB},\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, suy ra $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DC})=\widehat{IDC}=45^\circ$.

b) Ta có: $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AI}$, suy ra $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{AI})=(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC})=\widehat{BIC}=90^\circ$.

c) Do hai vectơ $\overrightarrow{IB},\overrightarrow{DB}$ cùng hướng nên ta có $(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{DB})=0^\circ$.

d) Do hai vectơ $\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}$ ngược hướng nên ta có $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC})=180^\circ$.

Câu 5. Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 3 và 4 có tích vô hướng là -6. Tính góc giữa hai vectơ đó.

Lời giải

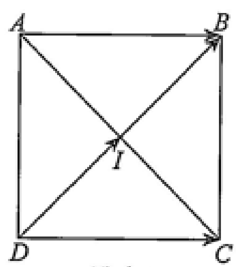
Ta cho: $|\vec{a}|=3;|\vec{b}|=4$ và $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6$

Ta có công thức:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=3\cdot4\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})\vec{a}\cdot\vec{b}=-6\Rightarrow 3\cdot4\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=-6$

$\Rightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I. Tìm các góc:



Hình 2

a) $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB});(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB})$

b) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$.

Lời giải

a) Do hai vectơ $\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên ta có $(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{AB})=0^\circ$.

Do hai vecto $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB}$ ngược hướng nên ta có $(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB})=180^\circ$.

b) Do hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ vuông góc nên ta có $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=90^\circ$.

Câu 7. Cho hai vectơ $\vec{i},\vec{j}$ vuông góc có cùng độ dài bằng 1 và cho biết $\vec{a}=4\vec{i}-\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}\cdot\vec{b}$ và tính số đo góc $(\vec{a},\vec{b})$.

Lời giải

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=(4\vec{i}-\vec{j})\cdot(\vec{i}+4\vec{j})=4\vec{i}^2+16\vec{i}\cdot\vec{j}-\vec{j}\cdot\vec{i}-4\vec{j}^2=4-4=0$.

Vậy $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Suy ra $(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$.

Câu 8. Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 6 và 8 và có tích vô hướng là 24. Tính góc giữa hai vectơ đó.

Lời giải

Gọi α là góc giữa hai vectơ. Ta có $\cos\alpha=\dfrac{24}{6.8}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=60^\circ$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 9. Tìm điều kiện của $\vec{u},\vec{v}$ để:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

Lời giải

a) Ta có: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

$\Rightarrow\cos(\vec{u},\vec{v})=1\Leftrightarrow(\vec{u},\vec{v})=0^o$

Nói cách khác: $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng.

b) Ta có: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

$\Rightarrow\cos(\vec{u},\vec{v})=-1\Leftrightarrow(\vec{u},\vec{v})=180^\circ$

Nói cách khác: $\vec{u},\vec{v}$ ngược hướng.

Câu 10. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4 và có đường cao AH. Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=4\cdot4\cdot\cos60^\circ=16\cdot\frac{1}{2}=8$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=4\cdot4\cdot\cos120^\circ=16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-8$;

c) $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AH}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC})=|\overrightarrow{AH}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos90^\circ=0$

Câu 11. Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $|\vec{a}|=6,|\vec{b}|=7,(\vec{a},\vec{b})=45^\circ$;

b) $|\vec{a}|=8,|\vec{b}|=9,(\vec{a},\vec{b})=150^\circ$

Lời giải

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=6\cdot7\cdot\cos45^\circ=42\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=21\sqrt{2}$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=8\cdot9\cdot\cos150^\circ=72\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=-36\sqrt{3}$.

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB=4cm$.

a) Tính độ dài cạnh huyền BC.

b) Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

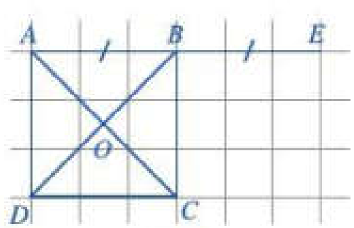
a) $BC=AB\sqrt{2}=4\sqrt{2}(cm)$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=4\cdot4\cdot\cos\widehat{BAC}=16\cdot\cos90^\circ=16\cdot0=0$.

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

$=4\cdot4\sqrt{2}\cdot\cos\widehat{ABC}=16\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ=16\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=16$

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a. Tính:



a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}$ b) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}$

Lời giải

a) Ta có: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})=\widehat{BAO}=45°$.

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{OC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\right)=a.\frac{a}{\sqrt{2}}.\cos 45°=\frac{a^2}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2}{2}$

b) Vẽ vectơ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}$. Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BD}\right)=\widehat{EBD}=135°$.

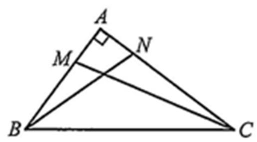
Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})$

$=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 135^{\circ}=a^2\sqrt{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}=-a^2$.

c) Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE},\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD})=(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BO})=\widehat{EBO}=135°$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{OD}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD})=a\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\cos 135°=\frac{a^2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}=\frac{-a^2}{2}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB=3$, $AC=4$. Các điểm M,N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC thoả mãn $AM=AN=1$ (Hình 49). Tính $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}$.



Hình 49

Lời giải

Vì $\hat{A}=90^{\circ}$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$.

Ta có: $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}=(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=0-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AC}+0=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{AC}.$

Vì hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=AB.AM=3.1=3$.

Vì hai vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AN}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AN}=AC.AN=4.1=4$.

Suy ra $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CM}=-4-3=-7$.

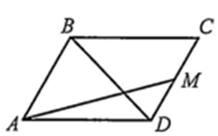
Câu 15. Cho tam giác ABC có $AB=4, AC=6.M$ là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2\right)=\frac{1}{2}\left(6^2-4^2\right)=10.$

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=3$, $AD=4,\hat{A}=60^{\circ}$. M là trung điểm của CD (Hình 50). Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$.



Hình 50

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.

Suy ra

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2$$

$$=AD^2-\frac{1}{2}AD\cdot AB\cdot\cos\widehat{BAD}-\frac{1}{2}AB^2$$

$$=4^2-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\cos 60^\circ-\frac{1}{2}\cdot 3^2=\frac{17}{2}.$$

Câu 17. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$

Lời giải

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

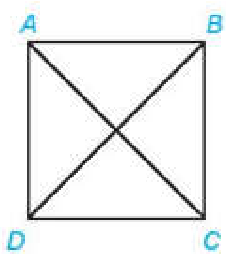
$=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos 90^\circ$

$=AB\cdot AC\cdot 0=0$

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a.

Tinh các tích vô hướng sau: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$.

Lời giải



Vì $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=90^\circ$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

Hình vuông có cạnh bằng a nên có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$.

Mặt khác, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=45^\circ,(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})=135^\circ$, do đó

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos 45^\circ=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=AB\cdot BD\cdot\cos 135^\circ=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-a^2.$$

Câu 19. Cho tam giác đều ABC tâm O, có độ dài các cạnh bằng 1.

a) Xác định góc giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{CB}$.

b) Tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{OB}$ và $\overrightarrow{CB}$

Lời giải

a) Do tam giác ABC đều, nên $\widehat{CAB}=\widehat{ABC}=\widehat{BCA}=60^\circ$.

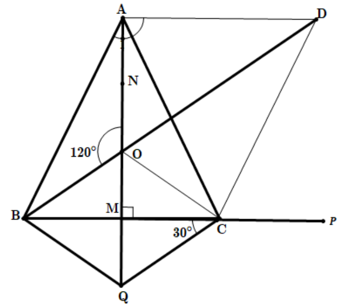
Suy ra $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\widehat{CAB}=60^\circ$.

Gọi D là điểm đối xứng với B qua CA. Khi đó tứ giác $ABCD$ là một hình thoi, do đó $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ và $\widehat{BAD}=180^\circ-\widehat{ABC}=120^\circ$.

Suy ra $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{BAD}=120^\circ$.

Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm của OA,P là điểm đối xứng với M qua **C.**

Khi đó, do O là tâm của tam giác đều ABC, nên A,N,O,M thẳng hàng, $AM\perp BC,\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BC}$.



Suy ra $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MP})=90^{\circ}$.

Lấy điểm Q đối xứng với O qua M. Khi đó tứ giác $BOCQ$ là một hình thoi, có $\widehat{OCQ}=60^{\circ}$.

Suy ra $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{CB})=(\overrightarrow{CQ};\overrightarrow{CB})=\widehat{BCQ}=30^{\circ}$.

b) Do $AM\perp BC$ nên $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do O là tâm của tam giác đều ABC, nên $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=OA=\frac{2}{3}AM=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=1\cdot1\cdot\cos60^{\circ}=\frac{1}{2}$

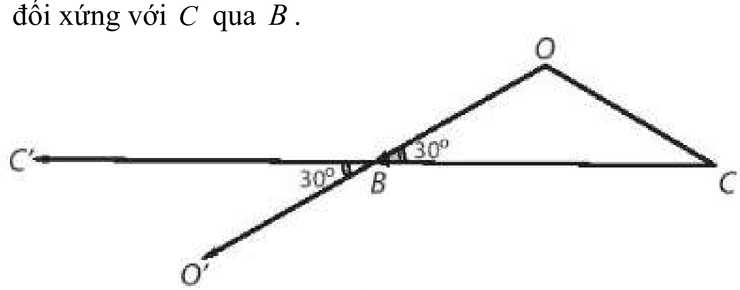
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC})=1\cdot1\cdot\cos120^{\circ}=-\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\cos120^{\circ}=-\frac{1}{6}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BC})=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot1\cdot\cos90^{\circ}=0$;

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{OB}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{CB})=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot1\cdot\cos30^{\circ}=\frac{1}{2}$

Nhận xét. Ta có thể xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{CB}$ như sau: Lấy O' đối xứng với O qua B và C' đối xứng với C qua B.



Câu 20. Cho tam giác ABC cân tại A, có $\hat{A}=120^{\circ}, AB=3$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$.

b) Tính độ dài cạnh BC.

c) Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MB=2MC$. Tính $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

Lời giải

a) Do tam giác ABC cân tại $A, \hat{A}=120^{\circ}, AB=3$, nên

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=3\cdot3\cdot\cos120^{\circ}=-\frac{9}{2}$.

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ và do đó:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3^2-\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{27}{2}$

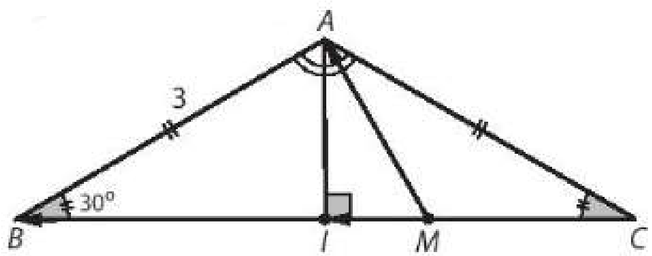
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}^2=\left(-\frac{9}{2}\right)-3^2=-\frac{27}{2}.$

b) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. Từ đó

$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=3^2+3^2-2\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)=27$

Suy ra $BC=3\sqrt{3}$.

c) Gọi I là trung điểm của BC.



Do M thuộc cạnh BC và $MB=2MC$, I là trung điểm của BC, ta có $\overrightarrow{MB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB},\overrightarrow{IB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Suy ra

$\overrightarrow{MI}$

$=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{IB}$

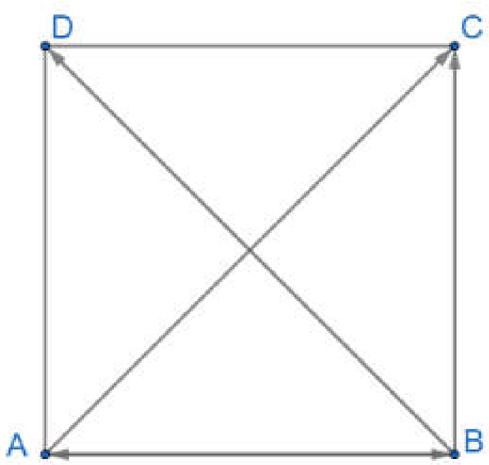
$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CB}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CB}.$

Từ đó, theo định lí chiếu, ta được

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{CB}^2=3$

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$

Lời giải



Ta có: $AC=BD=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$

+) $AB\perp AD\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=a\cdot a\cdot\cos 45^\circ=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=a\sqrt{2}\cdot a\cdot\cos 135^\circ=-a^2$

+) $AC\perp BD\Rightarrow\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

Câu 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và cho $AD=a, AB=2a$. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}$

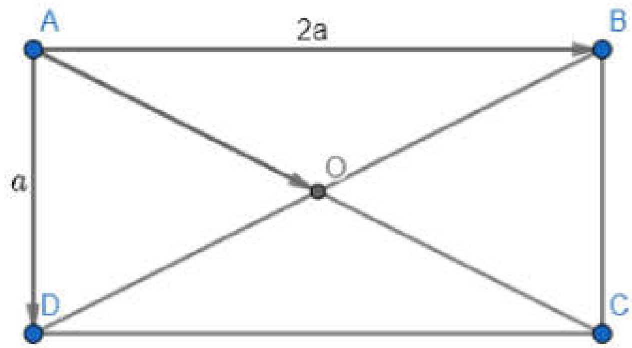
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

Lời giải

a)

$AC=BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=a\sqrt{5}\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})$

$=\cos\widehat{OAB}=\cos\widehat{CAB}=\frac{AB}{AC}=\frac{2a}{a\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AO}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})$

$=AB\cdot\frac{1}{2}AC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})=2a\cdot\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=2a^2$

b) $AB\perp AD\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

Câu 23. Cho ba điểm O,A,B thẳng hàng và $OA=a, OB=b$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ trong hai trường hợp:

a) Điểm O nằm ngoài đoạn thẳng AB;

b) Điểm O nằm trong đoạn thẳng AB

Lời giải

a) Ta có:

Ta thấy hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=0^\circ$

$\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=a\cdot b\cdot\cos 0^\circ=ab$

b) Ta có:

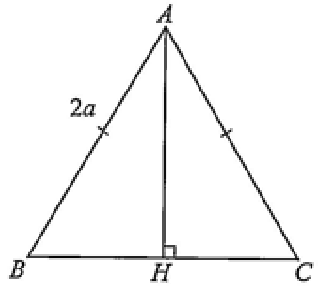
Ta thấy hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ ngược hướng nên

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=180^\circ\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=a\cdot b\cdot\cos 180^\circ=-ab$

Câu 24. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và có đường cao AH. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC};\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$.

Lời giải



Hình 3

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=2a\cdot 2a\cdot\cos 60^{\circ}=4a^2\cdot\frac{1}{2}=2a^2$

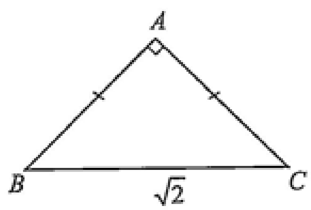
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{BC}|.\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=2a\cdot 2a\cdot\cos 120^{\circ}=4a^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-2a^2$

$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AH}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC})=|\overrightarrow{AH}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos 90^{\circ}=0$

$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=|\overrightarrow{HB}|\cdot|\overrightarrow{HC}|\cdot\cos(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC})=a\cdot a\cdot\cos 180^{\circ}=a^2(-1)=-a^2$

Câu 25. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, có cạnh BC bằng $\sqrt{2}$. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

Lời giải



Hình 4

Tam giác ABC vuông cân tại A có $BC=\sqrt{2}$ suy ra $AB=AC=1$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=1\cdot 1\cdot\cos 90^{\circ}=0$

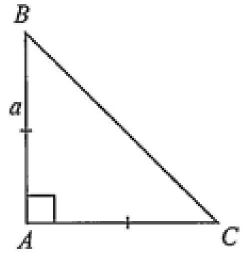
$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})=1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 45^{\circ}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=1\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 135^{\circ}=\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1.$

Câu 26. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB=AC=a$.
Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$;



Hình 1

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=(-\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CB}=-(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})$.

Ta có: $CB=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

Vậy $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})=-|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos\widehat{ACB}$

$= -CA \cdot CB \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -a^2.$

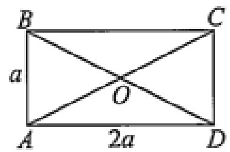
Câu 27. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và cho $AD = 2a, AB = a$. Tính:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

Lời giải

a) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \cos \widehat{BAC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.



Hình 2

Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = a \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Câu 28. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$;

b) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$;

c) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng;

d) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Lời giải

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| . \cos\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ từ đó suy ra

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 . \cos 30^\circ = 12 . \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30 . \cos 120^\circ = -15$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 . \cos 0^\circ = 6$

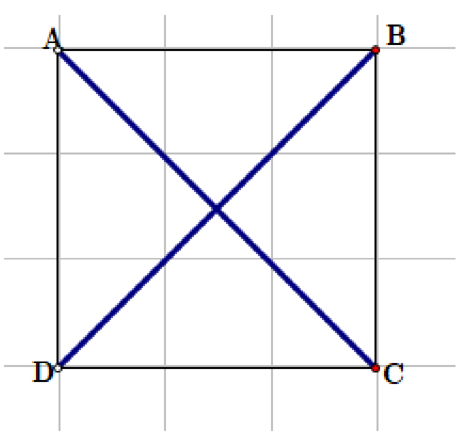
d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 . \cos 180^\circ = -6$

Câu 29. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

Lời giải



a) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| . \left|\overrightarrow{AC}\right| . \cos 45^\circ = a . a\sqrt{2} . \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|.\cos 90^\circ=0$

Câu 30. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\hat{A}=120^\circ$. Tính $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}=0+a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}a^2$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 31. Cho tam giác ABC đều cạnh a, tâm O. Hãy tính:

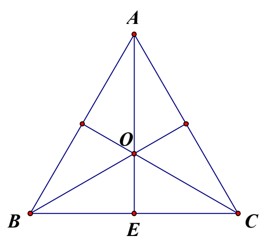
a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

c). $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

d). $\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)$

Lời giải



a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=AB.AC.\cos 60^0=a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

b). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$

$=-BA.BC.\cos 60^0=-a.a.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{a^2}{2}$

c). Gọi E là trung điểm của BC có $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$;

Do đó $\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CB}=2\left|\overrightarrow{OE}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|.\cos\left(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{CB}\right)$

$=2.\mathrm{OE}.\mathrm{CB}\cos 90^0=0$.

d). Khai triển biểu thức, ta được

$D=\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-6\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

Chú ý rằng: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2}{2}$

Từ đó $D=a^2+\dfrac{3a^2}{2}+a^2-3a^2=\dfrac{a^2}{2}$.

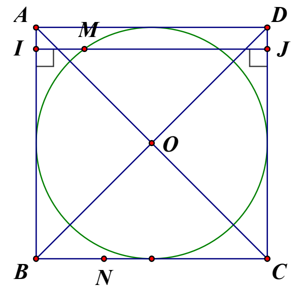
Câu 32. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Hãy tính:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$; $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)$;$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)$

b). $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC.

c). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

Lời giải



a).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=-BA.BC.\cos 90^0=0$

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=-\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)=-BA.BD.\cos 45^0=-a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-a^2$

- $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$

$=0+\left|\overrightarrow{AC}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\right)=AC.BC.\cos 45^0=a^2$

b).

- $\overrightarrow{ON}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BO}\right).\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{AB}$ (do $\overrightarrow{BN}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}=0$)

$=\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BA}=\left|\overrightarrow{BO}\right|.\left|\overrightarrow{BA}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

- $\overrightarrow{NA}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BN}\right)\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}^2=-a^2$

c).

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)$

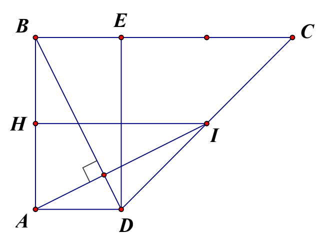
$=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{HA}\right)=MH^2-HA^2$

Câu 33. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC=3a$, đáy nhỏ $AD=a$, đường cao $AB=2a$

a). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b). Gọi I là trung điểm của CD. Hãy tính góc giữa AI và BD.

Lời giải



– Dựng $DE\perp BC,E\in BC\Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật. Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CD}$

$=-\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DC}=-\left|\overrightarrow{DE}\right|.\left|\overrightarrow{DC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DC}\right)=-DE.DC.\cos 45^0=-2a.2a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-4a^2$

– $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{BD}=3.\left|\overrightarrow{BE}\right|.\left|\overrightarrow{BD}\right|.\cos\widehat{DBE}=3BE.BD.\dfrac{BE}{BD}=3.a^2$

– $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}-\underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}}_{0}-\underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}}_{0}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB}$

$=\left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|.\cos 0^0-\overrightarrow{AB}^2=BC.AD-AB^2=3a.a-4a^2=-a^2$

(Vì $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = 0$; $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD} = 0$).

b). Gọi H trung điểm của AB, suy ra HI là đường trung bình của hình thang ABCD, do đó $HI = \dfrac{AD+BC}{2} = 2a$

Có $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AB}}_{0} - \underbrace{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD}}_{0} + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB}$

Mà $\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AD} = HI.AD.\cos 0^0 = 2a.a = 2a^2$

$\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{AB} = 0\left(do\ \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB}\right)$; $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AD} = 0\left(do\ \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD}\right)$.

$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AB} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$

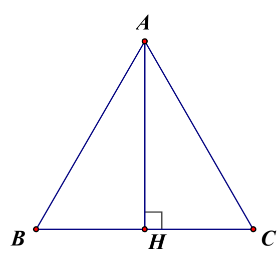
Vậy $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ góc giữa AI và BD bằng 90^0.

Câu 34. Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường cao AH. Tính:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH}$.

b). $\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}\right)$

Lời giải



a).

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\widehat{BAC} = a.a.\cos 60^0 = \dfrac{a^2}{2}$

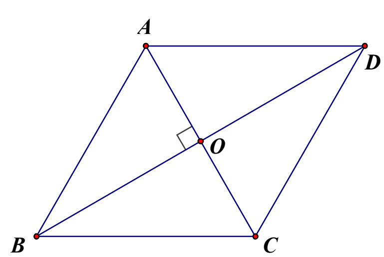
– $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -AB.AH.\cos\widehat{BAH} = -a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 30^0 = -\dfrac{3a^2}{4}$

b). $\left(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right)\left(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}\right) = \overrightarrow{AB}\left(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}\right) = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

$= -2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = -2.\dfrac{a^2}{2} - 3.\dfrac{3a^2}{4} = -\dfrac{13a^2}{4}$

Câu 35. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60^0$. Tính: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}$

Lời giải



Do $\widehat{BAC} = 60^0 \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow AC = 7, BO = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ (đường cao tam giác đều $= \dfrac{canh.\sqrt{3}}{2}$)

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}=7.7.\cos 60^0=\dfrac{49}{2}$.

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}=-AB.AO.\cos 60^0=-7.\dfrac{7}{2}.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{49}{4}$

– $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0\left(do\ \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\right)$

– $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BO}=BA.BO.\cos\widehat{ABO}=a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\cos 30^0=\dfrac{3a^2}{4}$

Câu 36. Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=3$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Lời giải

Ta có $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=4\Leftrightarrow\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2=16\Leftrightarrow 4\vec{a}^2-12\vec{a}.\vec{b}+9\vec{b}^2=16$

$\Leftrightarrow 4a^2-12.\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+9b^2=16$

$\Leftrightarrow 4-12\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)+9=16\Rightarrow\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{4}$.

Câu 37. Cho các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng 60^0. Xác định cosin góc giữa hai vec tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ với $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{v}=\vec{a}-\vec{b}$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}^2+\vec{a}.\vec{b}-2\vec{b}^2=a^2+\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)-2b^2=-\dfrac{1}{2}$.

- $\vec{u}^2=\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+4\vec{a}.\vec{b}+4\vec{b}^2=1+4.1.1.\cos 60^0+4.1=7\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=\sqrt{7}$
- $\vec{v}^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2-2.\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=1-2.1.1\cos 60^0+1=1\Rightarrow\left|\vec{v}\right|=1$

$\vec{u}.\vec{v}=\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|.\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\Rightarrow\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}}{\sqrt{7}.1}=-\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

Câu 38. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Cho biết $\left|\vec{a}\right|=6,\ \left|\vec{b}\right|=3,\ \left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^o$. Hãy tính các tích vô hướng $\vec{a}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right),\ \left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)$.

Lời giải

Trước hết ta có: $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2=36,\ \vec{b}^2=\left|\vec{b}\right|^2=9,\ \vec{a}\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 45^o=6.3.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=9\sqrt{2}$.

Vậy:

- $\vec{a}\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}=2.36-9\sqrt{2}=72-9\sqrt{2}$
- $\left(3\vec{a}+4\vec{b}\right)\left(-2\vec{a}+3\vec{b}\right)=-6\vec{a}^2+12\vec{b}^2+\vec{a}\vec{b}=-6.36+12.9-9\sqrt{2}=-108-9\sqrt{2}$.

Câu 39. Cho $\left|\vec{a}\right|=3,\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2},\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|=3$. Tính $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|$

Lời giải

– $\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2-6\vec{a}.\vec{b}+9\vec{b}^2\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{\left|\vec{a}-3\vec{b}\right|^2-\vec{a}^2-9\vec{b}^2}{6}=\dfrac{3^2-3^2-9.\sqrt{2}^2}{6}=-3$

– $\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|^2=4\vec{a}^2+\vec{b}^2+4\vec{a}.\vec{b}=4.3^2+\sqrt{2}^2+4.(-3)=26\Rightarrow\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{26}$

Câu 40. Cho hai vectơ đơn vị $\vec{a},\ \vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}$. Tính $\vec{a}.\vec{b};\ \left|\vec{a}+\vec{b}\right|$

Lời giải

$\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{3}\Rightarrow\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)^2=3\Leftrightarrow 4\vec{a}^2-4\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=3\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=\dfrac{3-4-1}{4}=-\dfrac{1}{2}$

Có $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+2\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2=1+2.\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1=1\Rightarrow\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng

Phương pháp:

- Biến đổi từ biểu thức vế này sang vế kia.
- Chứng minh hai biểu thức cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Sử dụng các tính chất của phép toán vectơ, tính chất của tích vô hướng.
- Tách vectơ, biến đổi về các tích vô hướng khác.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 41. Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, chứng minh rằng: $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.

Lời giải

Ta có: $(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.

Vậy $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.

Nhận xét: Chứng minh tương tự, ta cũng có

$(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$; $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2$.

Câu 42. Cho hình thoi $ABCD$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=0$

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AC\perp BD$. Khi đó, ta có:

$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})+\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

Câu 43. Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB. Với mỗi điểm M, chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Cách 1: $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BA}$.

Cách 2: $\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2-(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2$

$=\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{MO}^2-2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}^2$

$=2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BA}$.

Câu 44. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

a) $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IB}=0$

b) $\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)$.

Lời giải

a) Vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{OI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})=\overrightarrow{OI}\cdot\vec{0}=0$

b) Vì I là trung điểm AB nên $2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})$.

Vậy $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot(-\overrightarrow{OA})$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)$

Câu 45. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có: $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$

Lời giải

Ta có:

$MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$

$=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$

$=\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}^2$

$=3\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2$

$=3\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot\vec{0}+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2$

(do G là trọng tâm tam giác ABC)

$=3\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2$

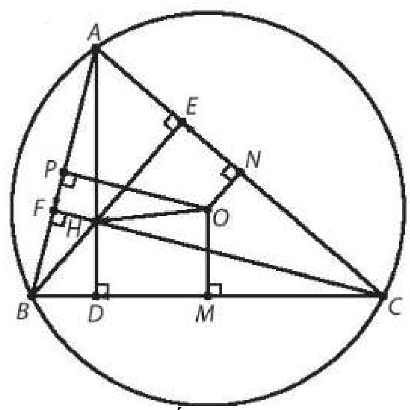
$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$ (đpcm).

Câu 46. Cho tam giác ABC không cân. Gọi D,E,F theo thứ tự là chân các đường cao kẻ tử A,B,C; gọi M,N,P tương ứng là trung điểm các cạnh BC,CA,AB. Chứng minh rằng

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

Lời giải

Gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Khi đó D,E,F tương ứng là hình chiếu vuông góc của H trên BC,CA,AB và M,N,P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của O trên BC,CA,AB.



Theo định lí chiếu ta có:

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OC}$

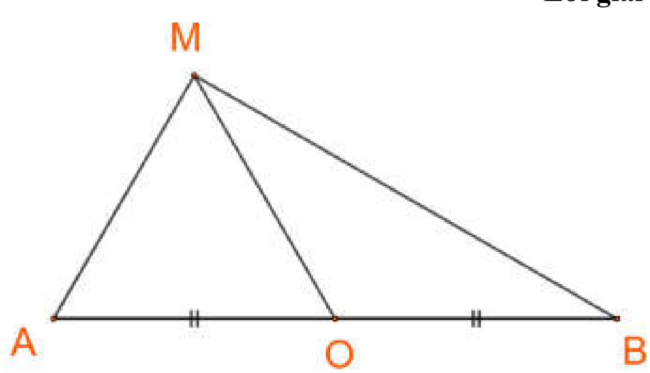
$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OA}.$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{NE}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

Câu 47. Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm và cho điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2$

Lời giải



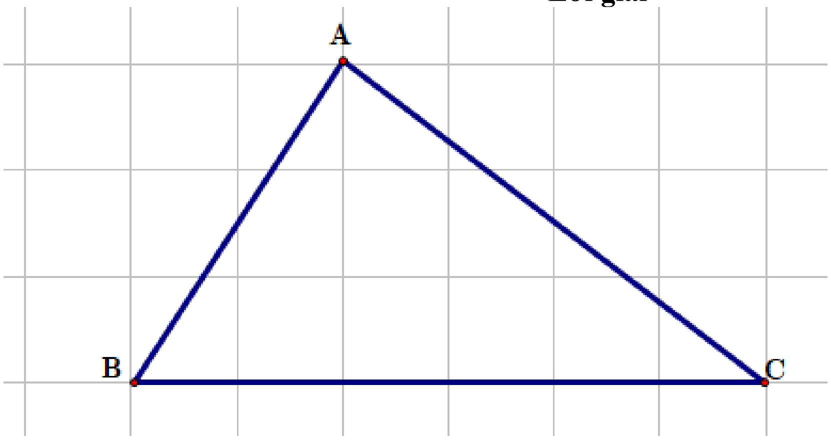
Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}\Leftrightarrow -\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2=(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MA}$ (đpcm)

Câu 48. Cho tam giác ABC. Chứng minh:

$AB^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

Lời giải



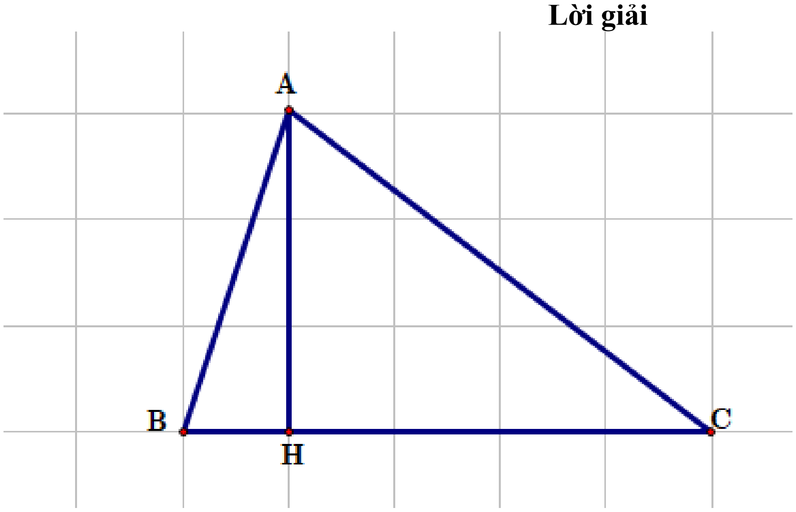
Ta có $AB^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=AB^2+\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=AB^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}=AB^2-AB^2=0$ (đpcm)

Câu 49. Cho tam giác nhọn ABC, kẻ đường cao AH. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}.\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB}=0$ (đpcm)

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{HB}\right)=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=0$ (đpcm)

Câu 50. Cho bốn điểm A,B,C,D. Chứng minh $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$

Câu 51. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác. Với mỗi điểm M, chứng minh rằng $MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$.

Lời giải

$MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$

$=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$

$=3\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2+2\overrightarrow{MG}\cdot(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$.

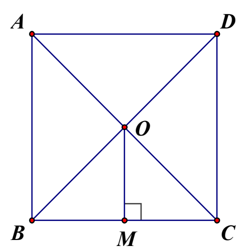
BẢI TẬP BỔ SUNG

Câu 52. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh $AC=a\sqrt{2}$, gọi O là giao điểm của AC và BD.

a). Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ theo a.

b). Gọi M là trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=2\left(OC^2-OM^2\right)$

Lời giải



a).

Do ABCD là hình vuông $\Rightarrow AC=AB\sqrt{2} \Leftrightarrow AB\sqrt{2}=a\sqrt{2} \Leftrightarrow AB=a$.

Theo định nghĩa có: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=AD.AC.\cos\widehat{CAD}=a.a\sqrt{2}.\cos 45^0=a^2$.

b).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}AB.AC.\cos\widehat{BAC}=\frac{1}{2}a.a\sqrt{2}.\cos 45^0=\frac{a^2}{2}$ (1)
- $2\left(OC^2-OM^2\right)=2MC^2=\frac{BC^2}{2}=\frac{a^2}{2}$ (2)

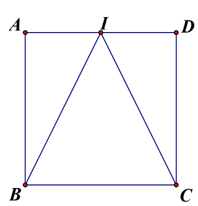
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=2\left(OC^2-OM^2\right)$

Câu 53. Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.

a). Tính $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$

b). Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

Lời giải



a).

$\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right)\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)\left(2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{4}\left[\left(2\overrightarrow{BA}\right)^2-\overrightarrow{BC}^2\right]$

$=\frac{1}{4}\left(4BA^2-BC^2\right)=\frac{1}{4}.3AB^2=\frac{9a^2}{4}$

b). Ta có:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}\right).\left(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{DC}$ (do $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{DC}$)

$=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}+\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{DC}$

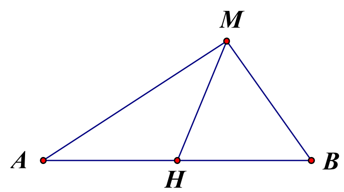
$=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}+\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}\right)\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$ (Do $\overrightarrow{DA}\perp\overrightarrow{DC}\Rightarrow\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=0$)

Câu 54. Cho H là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=HM^2-HA^2$

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)=\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{HA}\right)$

$=\overrightarrow{MH}^2-\overrightarrow{HA}^2=HM^2-HA^2$ (Do H trung điểm của AB nên có $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{HB}=-\overrightarrow{HA}$)

Câu 55. Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì A,B,C,D ta có:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=0$ (hệ thức Ơ – le).

Lời giải

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

$=\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}\right)$

$=\vec{0}$

Câu 56. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

b). $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A$

Lời giải

a).

$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=AC^2+AB^2-2.\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$ (1)

b). $BC^2=AB^2+AC^2-2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=AB^2+AC^2-2.\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A$

$=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos A$ (2)

Chú ý: *Các công thức* (1) *và* (2) *thường xuyên được sử dụng trong khi giải các bài tập khác. Đặc biệt,* (2) *được gọi là định lí hàm số cosin, trong chương sau ta sẽ đề cập nhiều đến định lí này.*

Câu 57. Cho tam giác ABC có I trung điểm của BC. Chứng minh:

a). $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

b). $AB^2-AC^2=2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IH}$ (Với H là hình chiếu của A xuống BC).

Lời giải

a). Ta có: $AB^2 + AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$

$= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}\right)^2$ (I trung điểm của BC $\Rightarrow \overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{IB}$)

$= 2AI^2 + 2BI^2 = 2AI^2 + 2.\left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 = 2AI^2 + \dfrac{BC^2}{2}$ (đpcm).

b). $AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2 = \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{CB}.2\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{HI}$

$= 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IH}$

Câu 58. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Chứng minh rằng

a). $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AM^2 - \dfrac{1}{4}BC^2$

b). $AM^2 = \dfrac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4}$

Lời giải

a). Cách 1:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \dfrac{\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)^2 - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2}{4} = \dfrac{\left(2\overrightarrow{AM}\right)^2 - \overrightarrow{CB}^2}{4}$

$= \dfrac{4AM^2 - BC^2}{4} = AM^2 - \dfrac{BC^2}{4}$

Cách 2: Gọi I là trung điểm BC

Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AI^2 - IB^2 = AI^2 - \dfrac{BC^2}{4}$

b). $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

$\Rightarrow AM^2 = \dfrac{1}{4}\left(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

$= \dfrac{1}{4}\left[2\left(AB^2 + AC^2\right) - \left(AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)\right]$

$= \dfrac{1}{4}\left[2\left(AB^2 + AC^2\right) - \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)^2\right]$

$= \dfrac{2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2}{4}$ (đpcm).

Đây chính là công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác, sẽ được đề cập nhiều ở phần sau.

Câu 59. Cho tam giác ABC, biết $AB = c, BC = a, AC = b$. Có trọng tâm G. Chứng minh rằng $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \dfrac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$ (hệ thức Lep – nit).

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\left(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}\right) = 0$

$$\Rightarrow 3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)-\left(GA^2+GB^2-2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}\right)$$

$$-\left(GB^2+GC^2-2\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}\right)-\left(GC^2+GA^2-2\overrightarrow{GC}.\overrightarrow{GA}\right)=0$$

$$\Rightarrow 3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=\left(\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}\right)^2+\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}\right)^2$$

$$\Rightarrow 3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=AB^2+BC^2+CA^2$$

$$\Rightarrow GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right) \text{ (đpcm)}$$

Câu 60. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có
$MA^2+MB^2+MC^2=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2$

Lời giải

Ta có

$$MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$$

$$=3MG^2+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$$

Nhận xét:

a). Điểm có tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tam giác nhỏ nhất chính là trọng tâm của tam giác.

b). Nếu tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ thì:

$3\left(R^2-OG^2\right)=GA^2+GB^2+GC^2$ (Với $M\equiv O$).

Câu 61. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh với điểm M bất kỳ ta luôn có:

$$MG^2=\frac{1}{3}\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\frac{1}{9}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$$

Lời giải

Theo tính chất trọng tâm, ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

$$\Rightarrow 9\overrightarrow{MG}^2=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 9MG^2=MA^2+MB^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow 9MG^2=MA^2+MB^2+MC^2+\left(MA^2+MB^2-AB^2\right)+\left(MB^2+MC^2-BC^2\right)$$

$$+\left(MA^2+MC^2-AC^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 9MG^2=3\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$$

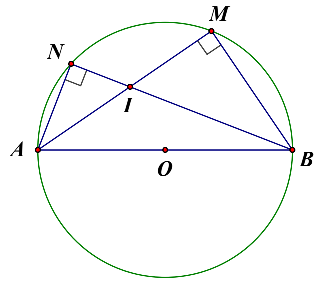
$$\Leftrightarrow MG^2=\frac{1}{3}\left(MA^2+MB^2+MC^2\right)-\frac{1}{9}\left(AB^2+BC^2+CA^2\right)$$

Câu 62. Cho hai điểm M,N nằm trên đường tròn đường kính $AB=2R$. Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$

b). $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}=4R^2$

Lời giải



Vì $BM \perp AI$ nên $\overrightarrow{AM}$ là hình chiếu của vec tơ $\overrightarrow{AB}$ trên đường thẳng AI. Vậy ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}$

Chứng minh tương tự $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$

b). Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IB}$

$= \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4R^2$

Câu 63. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và M là một điểm tùy ý. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

b). $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$

Lời giải

a). Vì AC là đường kính, ta có:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}\right)$

$= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - R^2$ (do $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$)

Tương tự: $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = MO^2 - R^2$

Vậy $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

b). $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MO}$

Câu 64. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R.

a). Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ khi và chỉ khi M thuộc (O).

b). Chứng minh với mọi điểm M :

$AM^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right)$

Lời giải

a). Vì tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác, do đó ta có

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{MC}^2 = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO}.\left(\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\vec{0}}\right)$$

$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + 3R^2$

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2 \Leftrightarrow 3MO^2 + 3R^2 = 6R^2 \Leftrightarrow MO^2 = R^2 \Leftrightarrow MO = R \Leftrightarrow$ M thuộc đường tròn (O).

b). $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 - 3\overrightarrow{MC}^2$

$=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2-3\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2$

$=\left(\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}^2\right)+2\left(\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2\right)-3\left(\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}^2\right)$

$=2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}\right)$

$=2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{OM}-3\overrightarrow{MC}\right)$

$=2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$ (đpcm).

Câu 65. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I,J theo thứ tự là trung điểm của AC,BD. Chứng minh rằng $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$

Lời giải

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$

$\Leftrightarrow AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(AD^2-AC^2\right)-\left(BD^2-BC^2\right)=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)-\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right)=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{CD}.2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ (đúng).

Câu 66. Cho tam giác ABC, biết $AB=c,BC=a,CA=b$, các đường trung tuyến tương ứng AA',BB',CC'. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi M bất kì, ta có $2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=3MG^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{6}$

Lời giải

$VT=2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA'}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)$

$=2\left(\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MG}\right)+\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MGB}.\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GA'}$

$=3\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{MG}\left(2\overrightarrow{GA'}+2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$

Vì G là trọng tâm nên $2\overrightarrow{GA'}=-\overrightarrow{GA}$

Vậy $VT=3\overrightarrow{MG}^2+\overrightarrow{MG}\left(\underbrace{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}}_{\vec{0}}\right)-\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}$

Mà:

$\overrightarrow{GA}^2=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}\right)^2=\dfrac{4}{9}AA'^2=\dfrac{4}{9}.\left(\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}\right)=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{9}$

$\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}=\dfrac{GB^2+GC^2-BC^2}{2}=\dfrac{\dfrac{2a^2+2c^2-b^2}{9}+\dfrac{2a^2+2b^2-c^2}{9}-a^2}{2}$

$=\dfrac{b^2+c^2-5a^2}{18}$.

$\Rightarrow VT=3MG^2-\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{9}+\dfrac{b^2+c^2-5a^2}{18}=3MG^2-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{6}$

Câu 67. Cho tam giác ABC, gọi H là trực tâm, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$

Lời giải

$$\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{CH}\right)\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA}\right)$$

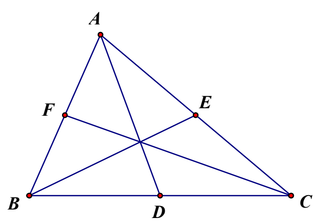
$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CA}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{BH}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)+\overrightarrow{CH}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{CH}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2$$

Câu 68. Cho tam giác ABC, có AD,BE,CF lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}=0$

Lời giải



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}=$$

$$=\overrightarrow{AB}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{BC}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{CA}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA}}_{\vec{0}}\right)+\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}}_{\vec{0}}\right)+\left(\underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}++\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}}_{\vec{0}}\right)\right]$$

$$=0$$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE}=0$

Dạng 3. Tính khoảng cách giữa hai điểm, chứng minh đẳng thức độ dài

Phương pháp: Sử dụng tính chất:

Với hai điểm A,B phân biệt, ta có $\overrightarrow{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2$, do đó $AB=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

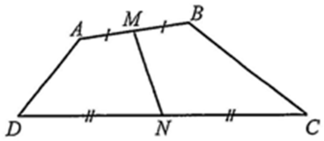
Câu 69. (Định lí cosin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có;
$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos A$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Suy ra: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

Câu 70. Cho tứ giác $ABCD$ có M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD (Hình 51). Biết $AD=2,BC=3,AD\perp BC$. Tính độ dài đoạn thẳng MN.



Hình 51

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$.

Từ đó, ta có:

$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN})+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

Do đó $MN^2=\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{AD}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+0\right)=\frac{1}{4}\left(2^2+3^2\right)=\frac{13}{4}.$

Vậy $MN=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Câu 71. Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB. Với mỗi điểm M, chứng minh rằng $MA^2+MB^2=2MO^2+OA^2+OB^2$.

Lời giải

$MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2$

$=\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2$

$=2\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=2MO^2+OA^2+OB^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\vec{0}$

$=2MO^2+OA^2+OB^2$.

Câu 72. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$.

Lời giải

Đặt $A=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2\cdot AC^2-(AB\cdot AC\cdot\cos A)^2}$

$\Leftrightarrow A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2\cdot AC^2\left(1-\cos^2 A\right)}$

Mà $1-\cos^2 A=\sin^2 A$

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2\cdot AC^2\cdot\sin^2 A}$

$\Leftrightarrow A=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot\sin A\left(Vi 0^\circ<\hat{A}<180^\circ \text{ nên } \sin A>0\right)$

Do đó $A=S_{ABC}$ hay $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$. (đpcm)

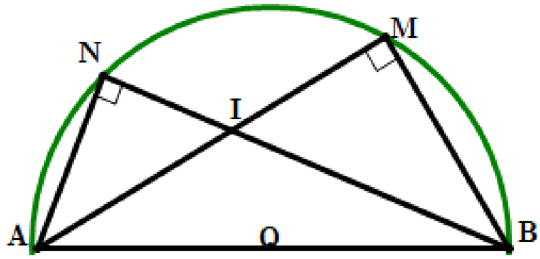
Câu 73. Cho nửa đường tròn với đường kính $AB=2R$. Gọi M và N là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại một điểm I.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) Tinh $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BN}$ theo R.

Lời giải

a) Do M thuộc nửa đường tròn với đường kinh AB nên $\widehat{AMB}=90^{\circ}$.



Suy ra $AM = AB\cdot\cos\widehat{BAM}$. Từ đó, để ý rằng $\widehat{BAM}=(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AB})$, ta có

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}=|\overrightarrow{AI}|\cdot|\overrightarrow{AM}|\cdot\cos(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{AM})=AI\cdot AM=AI\cdot AB\cdot\cos\widehat{BAM}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$

b) Tương tự như phần a), ta cũng được $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AB}$.

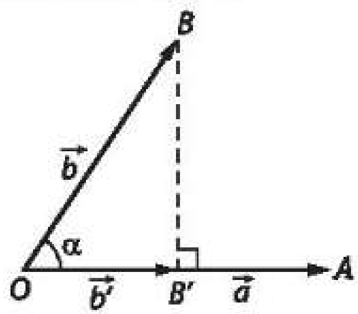
Suy ra

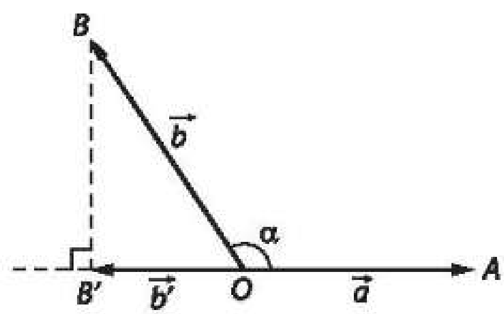
$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BN}$

$=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})=\overrightarrow{AB}^2=4R^2$

Nhận xét. Một cách khái quát, ta chứng minh được $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b'}$, trong đó $\vec{b'}$ là hình chiếu vuông góc của vectơ $\vec{b}$ trên giá của vectơ $\vec{a}$. Kết quả này được gọi là định lí chiếu.





Câu 74. Cho tam giác đều ABC có độ dài các cạnh bằng 1.

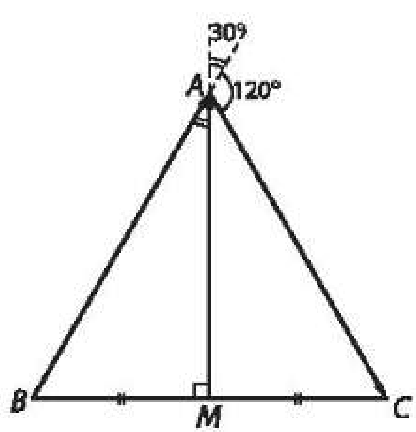
a) Gọi M là trung điểm của BC. Tính tích vô hướng của các cặp vectơ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi N là điểm đối xứng với B qua C. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$.

c) Lấy điểm P thuộc đoạn AN sao cho $AP=3PN$. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{MP}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Tính độ dài đoạn MP.

Lời giải

a) Do tam giác ABC là tam giác đều với độ dài các cạnh bằng $1, M$ là trung điểm BC, nên $MA=\frac{\sqrt{3}}{2}$,



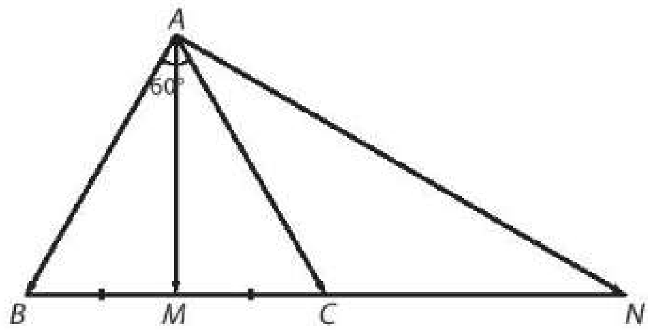
$(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{BA})=30^\circ,(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{AC})=120^\circ$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BA}=|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cdot\cos(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{BA})=\frac{3}{2},\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{AC})=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

b) Do tam giác ABC đều, nên $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=60^\circ$. (1)

Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. (2)

Do N đối xứng với B qua C, nên C là trung điểm của BN.



Suy ra $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$. (3)

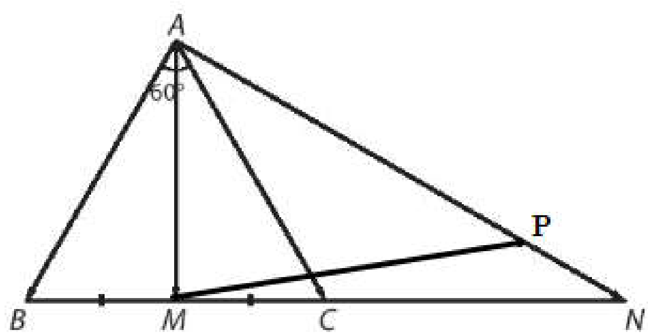
Từ (1), (2) và (3) suy ra

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB})$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2\right)=\frac{3}{4}$.

c) Do P thuộc đoạn AN thoả mãn $AP=3PN$ nên $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

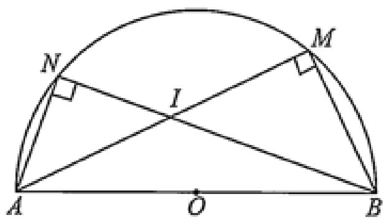


Suy ra $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AC}-\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$.

Từ đó $MP^2=\overrightarrow{MP}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{AC}^2+\frac{25}{16}\overrightarrow{AB}^2-2\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}=1+\frac{25}{16}-\frac{5}{2}\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{21}{16}$

Suy ra $MP=\frac{\sqrt{21}}{4}$.

Câu 75. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB=2R$. Gọi M và N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho AM và BN cắt nhau tại I như Hình 5.



Hình 5

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$.

b) Tính $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BN}$ theo R.

Lời giải

a) AB là đường kính nên $\widehat{AMB}=\widehat{ANB}=90^{\circ}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

$AM\perp MB$ và $AN\perp NB$.

Ta có: $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AI}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BM}$

Mà $\overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{BM}$ (do $AM\perp BM$) nên $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BM}=0$.

Vậy $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}+0=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Tương tự, ta có: $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\cdot(-\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=4R^2$

Câu 76. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Các điểm M,N lần lượt thuộc các tia BC và CA thoả mãn $BM=\frac{1}{3}BC, CN=\frac{5}{4}CA$. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}$

b) MN.

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=a\cdot a\cdot\cos 60^{\circ}=\frac{a^2}{2}$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\cdot\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}$

$=a^2\cos 120^{\circ}+\frac{5}{4}a^2\cos 120^{\circ}+\frac{1}{3}a^2+\frac{5}{12}a^2\cos 120^{\circ}$

$=-a^2$.

b) $MN^2=(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN})^2=\left(\frac{-1}{3}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2$

$=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\right)^2+2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos 120^{\circ}+\left(\frac{5}{4}\overrightarrow{CA}\right)^2=\frac{4}{9}a^2-\frac{5}{6}a^2+\frac{25}{16}a^2=\frac{169}{144}a^2$. Vậy $MN=\frac{13}{12}a$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 77. Cho tam giác ABC có $AB=2, AC=3, \widehat{BAC}=60^0$. Cho điểm M thỏa $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. Tính độ dài AM.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)+2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right)=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2-2.\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow AM^2=\frac{1}{9}AB^2+\frac{4}{9}AC^2-\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

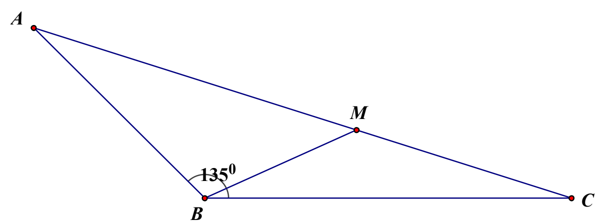
$\Leftrightarrow AM^2=\frac{1}{9}.2^2+\frac{4}{9}.3^2-\frac{4}{9}.3=\frac{28}{9}\Rightarrow AM=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

Câu 78. Cho tam giác ABC có $AB=a\sqrt{2},BC=5a,\widehat{ABC}=135^0$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho $AM=\frac{3}{2}MC$

a). Tính $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

b). Tìm x,y sao cho $\overrightarrow{BM}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$ và tính BM.

Lời giải



a). $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{BA}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos\widehat{ABC}=a\sqrt{2}.5a.\cos135^0=-5a^2$

b). Do M thuộc AC sao cho $AM=\frac{3}{2}MC\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BM}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ $(*)$. Vì $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ là hai vectơ không cùng phương nên biểu thức $(*)$ duy nhất $\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{5}\\y=\frac{3}{5}\end{cases}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BM}^2=\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\right)^2\Leftrightarrow BM^2=\frac{4}{25}BA^2+\frac{9}{25}BC^2+2.\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}.\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow BM^2=\frac{4}{25}BA^2+\frac{9}{25}BC^2+\frac{12}{25}.\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow BM^2=\frac{4}{25}.2a^2+\frac{9}{25}.25a^2+\frac{12}{25}.\left(-5a^2\right)=\frac{173}{25}a^2$

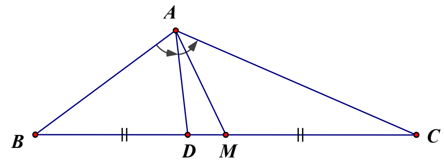
$\Rightarrow BM=\frac{a\sqrt{173}}{5}$

Câu 79. Cho tam giác ABC có $AB=2,AC=3,\widehat{BAC}=120^0$

a). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và độ dài trung tuyến AM.

b). Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC. Phân tích $\overrightarrow{AD}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD.

Lời giải



a). Có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos A=2.3.\cos120^0=-3$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}^2=\left[\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\right]^2$

$\Leftrightarrow AM^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+AC^2+2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$

$\Leftrightarrow AM^2=\frac{1}{4}\left(2^2+3^2+2.(-3)\right)=\frac{7}{4}\Rightarrow AM=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

b).

Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{3}\Rightarrow DB=\frac{2}{3}DC$, do $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$ là hai vectơ ngược hướng nên có $\overrightarrow{DB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)\Leftrightarrow\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}\right)^2\Leftrightarrow AD^2=\frac{9}{25}AB^2+\frac{4}{25}AC^2+\frac{12}{25}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow AD^2=\frac{9}{25}.2^2+\frac{4}{25}.3^2+\frac{12}{25}.(-3)$

$\Leftrightarrow AD^2=\frac{36}{25}$

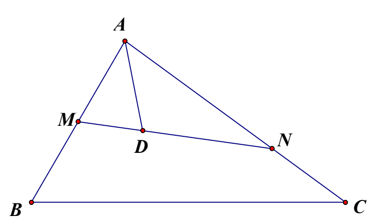
$\Leftrightarrow AD=\frac{6}{5}$.

Câu 80. Cho tam giác ABC có $AB=2a$, $BC=a\sqrt{7}$, $AC=3a$. Gọi M trung điểm của AB,N thuộc AC sao cho $AN=2NC$ và D thuộc MN sao cho $2DM=DN$

a). Tìm x,y sao cho $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

b). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn AD theo a.

Lời giải



Do $AN=2NC\Rightarrow AN=\frac{2}{3}AC\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

- $2DM=DN\Rightarrow2\overrightarrow{DM}=-\overrightarrow{DN}\Leftrightarrow2\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right)=-\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AD}\right)$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{9} \end{cases}$$

b). Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

Do đó $\overrightarrow{BC}^2=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2 \Leftrightarrow BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2}=\frac{(2a)^2+(3a)^2-\left(a\sqrt{7}\right)^2}{2}=3a^2$$

Theo câu a) thì $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AC}\right)^2$

$$\Leftrightarrow AD^2=\frac{1}{9}AB^2+\frac{4}{9}AC^2+\frac{4}{27}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AD^2=\frac{1}{9}(2a)^2+\frac{4}{9}(3a)^2+\frac{4}{27}.3a^2$$

$$\Leftrightarrow AD^2=\frac{44}{9}a^2 \Rightarrow AD=\frac{2a\sqrt{11}}{3}$$

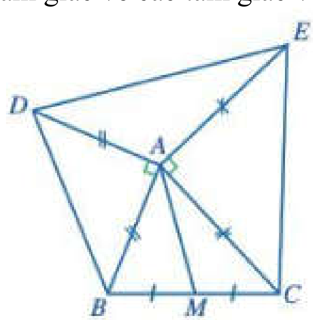
Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp: Sử dụng các tính chất:

Hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u}.\vec{v}=0$, trong đó $\vec{u}\neq\vec{0},\vec{v}\neq\vec{0}$, giá của vectơ $\vec{u}$ song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vectơ $\vec{v}$ song song hoặc trùng với đường thẳng b.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 81. Cho tam giác ABC có $AB=3, AC=4$, $\widehat{A}=60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC. Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE



a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$;

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $AM\perp DE$.

Lời giải

a) Do $\widehat{BAE}=\widehat{BAC}+\widehat{CAE}=150^\circ, \widehat{CAD}=\widehat{CAB}+\widehat{BAD}=150^\circ$ nên

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=AB\cdot AE\cdot\cos\widehat{BAE}=3\cdot4\cdot\cos150^\circ=12\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=-6\sqrt{3}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$=AC\cdot AD\cdot\cos\widehat{CAD}=4\cdot3\cdot\cos150^\circ=12\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}=-6\sqrt{3}$$

b) Ta có:

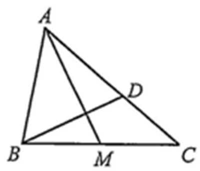
$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}), \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD})$

Vì $AB\perp AD, AC\perp AE$ ňn $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0, \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

Suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(-6\sqrt{3}+0-0+6\sqrt{3})=0. \Rightarrow AM\perp DE$

Câu 82. Cho tam giác ABC có $AB=2, AC=3$, $\widehat{BAC}=60^{\circ}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Điểm D thuộc cạnh AC thoả mãn $AD=\frac{7}{12}AC$ (Hình 52).



Hình 52

Chứng minh $AM\perp BD$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}), \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\left(\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$

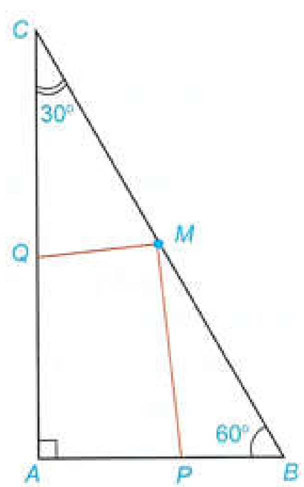
$=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{12}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{12}\cdot 3^2-2^2-2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(7-4-3)=0.$

Vậy $AM\perp BD$

Câu 83. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B}=60^{\circ}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm P, Q. Chứng minh rằng $\widehat{PMQ}=90^{\circ}$ khi và chỉ khi $BP+\sqrt{3}CQ=BC$.

Lời giải

Đặt $MB=MC=a$.



Ta có $\widehat{PMQ}=90^{\circ}\Leftrightarrow\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP})\cdot(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CQ})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=0.$ (1)

Mặt khác,

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=MB\cdot MC\cdot\cos 180^\circ=-a^2;$

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CQ}=MB\cdot CQ\cdot\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot CQ;$

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{MC}=BP\cdot MC\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}a\cdot BP;$

$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=BP\cdot CQ\cdot\cos 90^\circ=0.$

Do đó

$$(1)\quad \Leftrightarrow -a^2+\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot CQ+\frac{1}{2}a\cdot BP=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}CQ+\frac{1}{2}BP-a=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}CQ+BP=2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}CQ+BP=BC$$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 84. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1, BC=\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AD.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AC và BM vuông góc với nhau.

b) Gọi H là giao điểm của AC, BM. Gọi N là trung điểm của AH và P là trung điểm của CD. Chứng minh rằng tam giác NBP là một tam giác vuông.

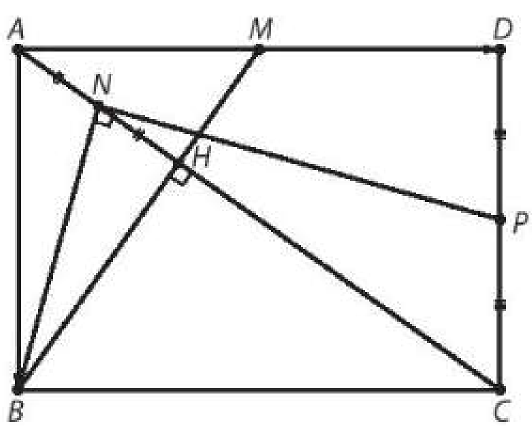
Lời giải

a) Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AD}=\vec{d}$ với $|\vec{b}|=1, |\vec{d}|=\sqrt{2}$ và $\vec{b}\cdot\vec{d}=0$. Khi đó $\overrightarrow{AC}=\vec{b}+\vec{d}$. Hơn nữa, do M là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\vec{d}$ và do đó $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{d}-\vec{b}$

Suy ra $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM}=(\vec{b}+\vec{d})\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{d}-\vec{b}\right)=-\vec{b}^2+\frac{1}{2}\vec{d}^2=-1+\frac{1}{2}\cdot 2=0$

Từ đó $AC\perp BM$.

b) Theo định li Pythagore ta có $AC=\sqrt{3}$



và $AH=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Suy ra $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Do N là trung điểm của AH nên

$\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}(\vec{b}+\vec{d})\right]+\vec{b}=\frac{5}{6}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{d}$ (1)

Do P là trung điểm của CD và N là trung điểm của HA, nên theo kết quả bài 4. 12, Toán 10 tập một, ta có

$\overrightarrow{NP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{HC})=\frac{1}{2}\left[\vec{d}+\frac{2}{3}(\vec{b}+\vec{d})\right]=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{d}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$\overrightarrow{NB}\cdot\overrightarrow{NP}=\left(\frac{5}{6}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{d}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{5}{6}\vec{d}\right)=\frac{5}{18}\vec{b}^2-\frac{5}{36}\vec{d}^2=\frac{5}{18}\cdot 1-\frac{5}{36}\cdot 2=0$

Suy ra $NB\perp NP$ và do đó tam giác NBP vuông tại N.

Câu 85. Cho tam giác ABC có $\hat{A}<90^\circ$. Dựng ra phía ngoài tam giác hai tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M,N,P theo thứ tự là trung điểm BC, BD,CE. Chứng minh rằng:

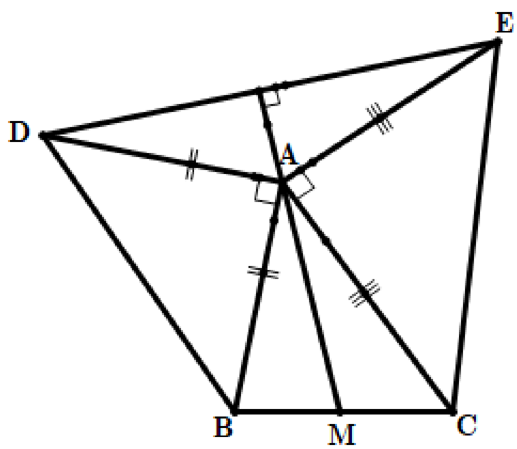
a) AM vuông góc với DE;

b) BE vuông góc với CD;

c) Tam giác MNP là một tam giác vuông cân.

Lời giải

Do $\hat{A}<90^\circ$ nên $\widehat{BAE}=90^\circ+\hat{A}=\widehat{CAD}$. (1)



a) Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$. (2)

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}$.

Từ đó và (1), (2) suy ra

$2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ (do $AB\perp AD, AC\perp AE$)

$=AB\cdot AE\cdot\cos\overrightarrow{BAE}-AC\cdot AD\cdot\cos\widehat{CAD}=0$(do $AB=AD, AE=AC$ và (1))

b) Từ giả thiết suy ra $\widehat{DAE}=360^\circ-\widehat{DAB}-\widehat{BAC}-\widehat{CAE}=180^\circ-\hat{A}$. (3)

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$. Suy ra

$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=AB\cdot AC\cdot\cos\overrightarrow{BAC}+AE\cdot AD\cdot\cos\widehat{DAE}=0$ (do $AB=AD, AC=AE$ và (3)).

Tứ đó $BE\perp CD$.

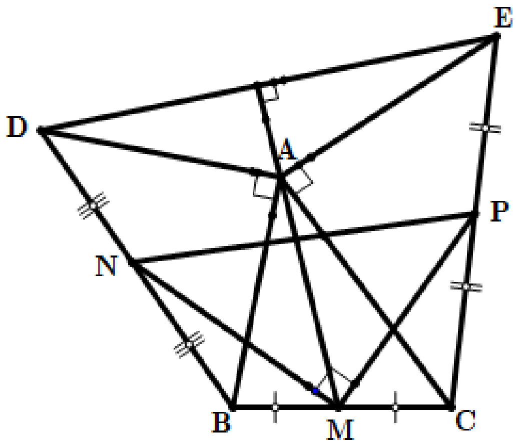
Hơn nữa

$BE^2=\overrightarrow{BE}^2=(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})^2=AE^2+AB^2-2AE\cdot AB\cdot\cos\widehat{BAE}$

$=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos\widehat{CAD}=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{CD}^2=CD^2$.

Suy ra $BE=CD$.

c) Do M là trung điểm của BC và N là trung điểm của BD, nên MN là đường trung bình của tam giác BCD.



Do đó $MN//CD, MN=\frac{1}{2}CD$. (4)

Cũng vậy, MP là đường trung bình của tam giác BCE.

Do đó $MP//BE, MP=\frac{1}{2}BE$. (5)

Từ $(4),(5)$ và kết quả của phần b) suy ra $MN=MP$ và $MN\perp MP$, hay tam giác MNP vuông cân tại M.

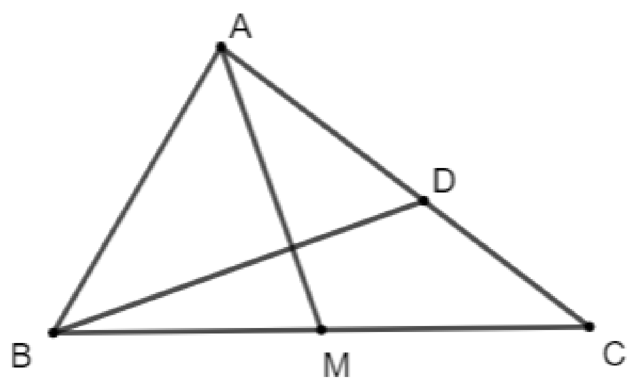
Câu 86. Cho tam giác ABC có $AB=2, AC=3, \widehat{BAC}=60^{\circ}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD}=\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

a) Tính $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh $AM\perp BD$.

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}=2\cdot 3\cdot\cos 60^{\circ}=3$.

b) + Do M là trung điểm của BC nên với điểm A ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Do đó: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

+ Ta có: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=(-\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{AD}$. Mà $\overrightarrow{AD}=\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

Nên $\overrightarrow{BD}=(-\overrightarrow{AB})+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

Vậy $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

c) Ta có:

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{7}{24}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{7}{24}\overrightarrow{AC}^2$$

$$=\frac{-1}{2}\cdot AB^2+\frac{7}{24}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{24}\cdot AC^2=\frac{-1}{2}\cdot 2^2+\frac{7}{24}\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{7}{24}\cdot 3^2=0$$

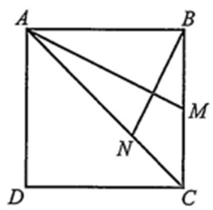
Suy ra: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

Vậy $AM\perp BD$.

Câu 87. Cho hình vuông $ABCD, M$ là trung điểm của $BC.N$ là điểm nằm giữa hai điểm A và C. Đặt $x=\frac{AN}{AC}$. Tìm x thoả mãn $AM\perp BN$.

Lời giải

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$.



Hình 70

$\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BA}=x(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})$

$\Rightarrow\overrightarrow{BN}=x\overrightarrow{BC}+(1-x)\overrightarrow{BA}.$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\cdot[x\overrightarrow{BC}+(1-x)\overrightarrow{BA}]$

$=\left[\frac{x}{2}-(1-x)\right]BC^2=\left(\frac{3x}{2}-1\right)BC^2$

$AM\perp BN\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=0\Leftrightarrow\left(\frac{3x}{2}-1\right)BC^2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$

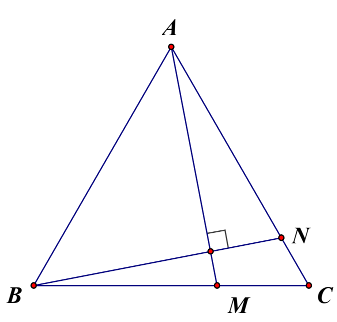
BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 88. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Gọi M,N là các điểm sao cho $3\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BC},\ 5\overrightarrow{AN}=4\overrightarrow{AC}$.

a). Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}$

b). Chứng minh AM vuông góc với BN.

Lời giải



a).

- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}=a.a.\cos 60^0=\dfrac{a^2}{2}$
- $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA}=CB.CA.\cos\widehat{BCA}=a.a.\cos 60^0=\dfrac{a^2}{2}$.

b).

- $3\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)=2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
- $5\overrightarrow{AN}=4\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 5\left(\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BA}\right)=4\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AC}$

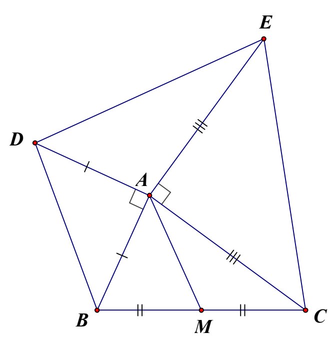
Ta có: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BN}=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)\left(-\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\dfrac{8}{15}\overrightarrow{AC}^2-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{4}{15}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$=-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\dfrac{8}{15}\overrightarrow{AC}^2-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2$

$=-\dfrac{2}{5}.\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{8}{15}.a^2-\dfrac{1}{3}a^2=0\Rightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BN}\Leftrightarrow$ AM vuông góc với BN.

Câu 89. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE. Gọi M trung điểm của đoạn BC. Chứng minh rằng AM vuông góc với DE.

Lời giải



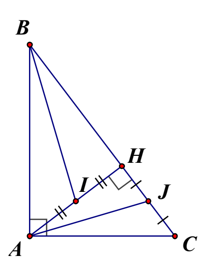
Ta chứng minh $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE}=0$. Thật vậy:

$2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=AB.AE.\cos\left(90^0+A\right)-AC.AD.\cos\left(90^0+A\right)=0$ (do $AB=AD,\ AE=AC$).

Câu 90. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AH và HC. Chứng minh $BI\perp AJ$

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\right)$; $\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}\right)$

$\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BI}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}\right)$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}\right)$$

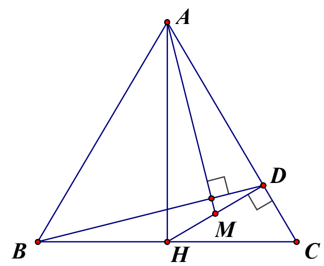
$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{BH}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\overrightarrow{AH}^2-\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}\right)=\frac{1}{4}\left(-AH^2-HB.HC.\cos\widehat{BHC}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(-AH^2+HB.HC\right)=0$$

Câu 91. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của đoạn BC, D là hình chiếu vuông góc của H trên AC, M trung điểm của đoạn HD. Chứng minh AM vuông góc với DB.

Lời giải



Vì M trung điểm của HD, nên có $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}$

Ta có $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HD}\right)=\underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}}_{0}+\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}+\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HD}}_{0}$

$$=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD}+\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD}\right)\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HD}+\underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}}_{0}+\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{BH}$$

$$=\overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{BH}\right)=\overrightarrow{HD}\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=\overrightarrow{HD}.\overrightarrow{AC}=0$$

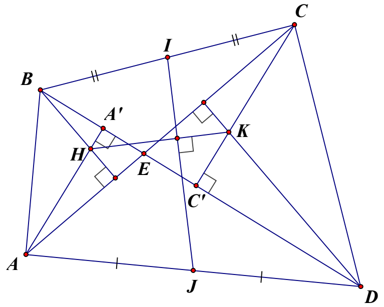
$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BD}$. Vậy AM vuông góc với BD.

Câu 92. Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao của hai đường chéo AC và BD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD và H, K là trực tâm của các tam giác ABE, CDE.

a). Chứng minh $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b). Chứng minh $HK\perp IJ$

Lời giải



a). Hạ AA', CC' lần lượt vuông góc BD, ta có:

$\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$

b) Tương tự ta cũng có: $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC}$

suy ra $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD}$

Thành tử $\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{HK}.\left(\dfrac{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{AC}\right)=0$

Vậy $HK \perp IJ$

Câu 93. Cho tứ giác ABC có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M. Gọi P là trung điểm của cạnh AD. Chứng minh MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$

Lời giải

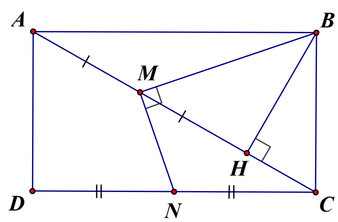
Ta có $2\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)$

$=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\underbrace{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}}_{\vec{0}}-\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$

Do đó $MP\perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MB}$

Câu 94. Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $BH \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và DC. Chứng minh $BM \perp MN$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}\right)$; $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{HC}\right)$

Nên $\overrightarrow{BM}\,\overrightarrow{MN}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}\right)\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{HC}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(\underbrace{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AD}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AD}+\underbrace{\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{HC}}_{\vec{0}}\right)$

Mà $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HC}=HA.HC.\cos\widehat{AHC}=HA.HC.\cos 180^0=-HA.HC=-BH^2$

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH}=BH^2$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{BM}\,\overrightarrow{MN}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{MN}$.

Cách 2:

$\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NH}\right)=-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CH}\right)$

$=-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CH}\right)$

$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BH}\right)$

Ta có $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{BM}=\left[-\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CH}\right)\right]\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BH}\right)$

$=-\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BH}\right)+\frac{1}{8}\left(-\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{CH}\right)\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BH}\right)$

$=-\frac{1}{8}\left(\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+\underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}}_{\vec{0}}\right)+\frac{1}{8}\left(-\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BH}+2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CD}+2\underbrace{\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BH}}_{\vec{0}}\right)$

$=-\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}+CD^2+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BH}-2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CD}\right)$ $(*)$

Ta có:

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH}=BH^2$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{CD}=\underbrace{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA}=-AB^2$

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BH}=BH^2$

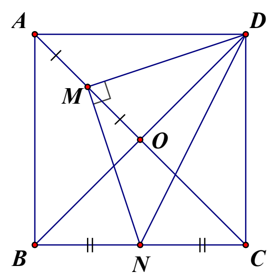
$2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{CH}\left(\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HA}\right)=2\underbrace{\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{BH}}_{0}+2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{HA}$

$=2\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{HA}=2CH.AH=2BH^2$

Do đó $(*)=-\frac{1}{8}\left(BH^2-AB^2+CD^2+BH^2-2BH^2\right)=0$

Câu 95. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AM=\frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng DMN là tam giác vuông cân.

Lời giải



Gọi $a>0$ là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$. Nên có $AC=a\sqrt{2},\ CM=\frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Áp dụng định lí hàm số cosin cho các tam giác CMN và CDM:

- $MN^2=CN^2+CM^2-2CN.CM.\cos\widehat{MCN}$

$=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2-2.\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\cos45^0=\frac{5a^2}{8}\Rightarrow MN=\frac{a\sqrt{10}}{4}\ (1)$

- $MD^2=CD^2+CM^2-2CD.CM.\cos\widehat{DCM}$

$=a^2+\left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2-2.a.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\cos45^0=\frac{5a^2}{8}\Rightarrow MD=\frac{a\sqrt{10}}{4}\ (2)$

- $DN^2=CD^2+CN^2=a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5a^2}{4}$

Ta có $MN^2+MD^2=ND^2=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow$ DMN vuông tại M (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra DMN vuông cân tại M.

Cách 2:

Đặt $\overrightarrow{CB}=\vec{a},\overrightarrow{CD}=\vec{b}$. Vì ABCD là hình vuông nên $\vec{a}.\vec{b}=0\ \&\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}=-\frac{1}{4}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CD}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\vec{b}-\frac{3}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=-\frac{1}{4}\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)$

Ta có $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MD}=\frac{1}{16}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{16}\left(3\vec{a}^2+8\vec{a}.\vec{b}-3\vec{b}^2\right)$

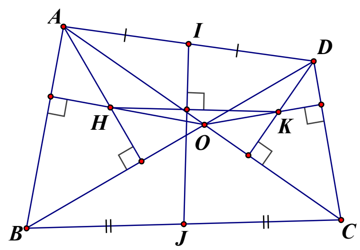
$=\frac{1}{16}\left(3a^2-3b^2\right)=0 \Rightarrow \overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{MD}\ \ (4)$.

- $\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{16}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)^2=\frac{1}{16}\left(\vec{a}^2+6\vec{a}.\vec{b}+9\vec{b}^2\right)=\frac{5a^2}{8}\ \ (5)$
- $\overrightarrow{MD}^2=\frac{1}{16}\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\frac{1}{16}\left(9\vec{a}^2-6\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}^2\right)=\frac{5a^2}{8}\ \ (6)$

Từ $(4),(5),(6)$ suy ra DMN vuông cân tại M.

Câu 96. Cho tứ giác ABC D có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H,K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh $HK\perp IJ$.

Lời giải



$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=\underbrace{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DI}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}}+2\overrightarrow{IJ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}}{2}$$

$$2\overrightarrow{IJ}\,\overrightarrow{HK}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)\left(\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OH}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{OH}$$

Câu 97. Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy M,N,P lần lượt trên 3 cạnh BC,CA,AB sao cho $BM=a, CN=2a, AP=x$. Tìm x để AM vuông góc với PN.

Lời giải

Chọn hệ vec tơ cơ sở $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}$

$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{x}{3a}\vec{b}$

Để $AM\perp PN\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN}=0\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)\left(\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{x}{3a}\vec{b}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\vec{c}+2\vec{b}\right)\left(a\vec{c}-x\vec{b}\right)=0\Leftrightarrow a.\vec{c}^2-x\vec{b}.\vec{c}+2a.\vec{b}.\vec{c}-2x.\vec{b}^2=0$

$\Leftrightarrow a.\vec{c}^2+(2a-x)\vec{b}.\vec{c}-2x.\vec{b}^2=0$

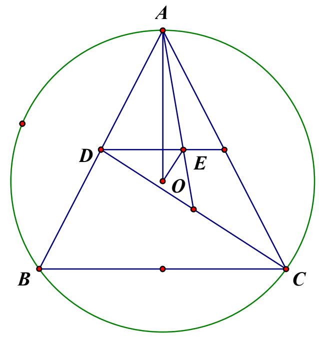
$\Leftrightarrow a.9a^2+(2a-x).a.a.\cos 60^0-2x.9a^2=0$

$\Leftrightarrow a^2\left(9a+a-\frac{x}{2}-2x\right)=0$

$\Leftrightarrow 10a-\frac{5}{2}x=0\Leftrightarrow x=4a$

Câu 98. Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). D là trung điểm của AB, E là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh $OE\perp CD$

Lời giải



Ta có

– $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right)$

– $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OC}\right]$

$=\frac{1}{6}\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)$

Do đó $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{OE}=\frac{1}{12}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}\right)\left(3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}\right)$

$=\frac{1}{12}\left(3OA^2+OB^2-4OC^2+4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right)$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{CB}=0$, tức $OE\perp CD$

Dạng 5. Bài toán thực tế

Trong Vật lí, tích vô hướng giúp tính công A sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển là vectơ $\vec{d}$. Ta có công thức: $A=\vec{F}\cdot\vec{d}$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 99. Tính công sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn 20 N kéo một vật dịch chuyển theo một vectơ $\vec{d}$ có độ dài $50m$ và cho biết $(\vec{F},\vec{d})=60^\circ$.

Lời giải

Ta có $A=\vec{F}\cdot\vec{d}=|\vec{F}|\cdot|\vec{d}|\cdot\cos(\vec{F},\vec{d})=20\cdot 50\cdot\cos 60^\circ=20\cdot 50\cdot\frac{1}{2}=500$ (J).

Câu 100. Tính công sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn 60 N kéo một vật dịch chuyển một vectơ $\vec{d}$ có độ dài $200m$. Cho biết $(\vec{F},\vec{d})=60^\circ$.

Lời giải

$A=|\vec{F}|\cdot|\vec{d}|\cdot\cos 60^\circ=60\cdot 200\cdot\cos 60^\circ=6000(J)$.

Câu 101. Cho ba điểm M,N,P. Nếu một lực $\vec{F}$ không đổi tác động lên một chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, thì các công sinh bởi lực $\vec{F}$ trong hai trường hợp sau có mối quan hệ gì với nhau?

a) Chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ M đến N rồi tiếp tục từ N đến P.

b) Chất điểm chuyển động thẳng từ M đến P.

Lời giải

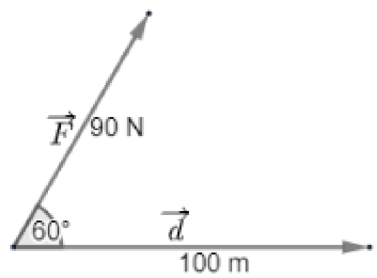
Do lực $\vec{F}$ không đổi, tác động lên chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, nên công sinh bởi lực $\vec{F}$ khi chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ M tới N rồi từ N tới

P bằng $A_1 = \vec{F}\cdot\overrightarrow{MN} + \vec{F}\cdot\overrightarrow{NP}$ (1) và công sinh bởi lực F khi chất điểm chuyển động thẳng từ M tới P bằng $A_2 = \vec{F}\cdot\overrightarrow{MP}$.(2)

Từ (1),(2), để ý rằng $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$, suy ra $A_1 = A_2$.

Câu 102. Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là $90\,N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100\,m$. Biết lực hợp $\vec{F}$ với hướng dịch chuyển là một góc 60°. Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$

Lời giải



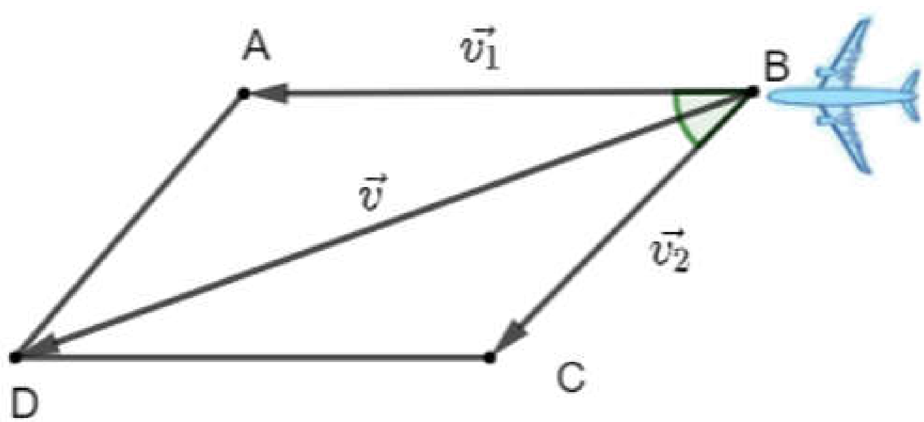
Công sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức

$A = \vec{F}\cdot\vec{d} = |\vec{F}|\cdot|\vec{d}|\cdot\cos(\vec{F},\vec{d}) = 90.100\cdot\cos 60^\circ = 4500\,(\mathrm{J})$

Vậy công sinh bởi lực $\vec{F}$ có độ lớn bằng 4500 (J)

Câu 103. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ $700\,km/h$ thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ $40\,km/h$ (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).

Lời giải



Khi đó ta có: $ABCD$ là hình bình hành có $\widehat{ABC} = 45^\circ$.

Suy ra: $\widehat{DAB} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ; AD = |\vec{v_2}| = 40, AB = |\vec{v_1}| = 700$.

Ta cần tính độ dài đoạn thẳng BD, đây chính là độ dài vectơ $\vec{v}$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABD, ta có:

$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2\cdot AD\cdot AB\cdot\cos A$

$= 40^2 + 700^2 - 2\cdot 40\cdot 700\cdot\cos 135^\circ \approx 531197,98$

Suy ra $BD \approx 728,83(km/h)$.

Vậy tốc độ mới của máy bay sau khi gặp gió thổi là 728,83km/h.

Câu 104. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ $650 km/h$ thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ $35 km/h$. Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

Lời giải

Gọi $\vec{v}_0$ là vận tốc của máy bay khi không có gió, $|\vec{v}_0| = 650(km/h)$;

$\vec{v}_1$ là vận tốc của gió, $|\vec{v}_1| = 35(km/h)$; $\vec{v}_2$ là vận tốc của máy bay khi có gió.

Ta có: $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$. Vì $(\vec{v}_1, \vec{v}_0) = 45^\circ$ nên

$$\vec{v}_2^2 = (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)^2 = \vec{v}_0^2 + \vec{v}_1^2 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2 + 2|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos 45^\circ$$

$$= 650^2 + 35^2 + 2.650.35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 455898,36$$

Suy ra $|\vec{v}_2| \approx 675,2(km/h)$.

Dạng 6. Tập hợp điểm

BÀI TẬP BỔ SUNG

Dạng 1: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k$ (1) (A, B là hai điểm cố định).

- $k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.
- $k \neq 0$: Gọi I trung điểm của AB.

$$(1) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

\+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$

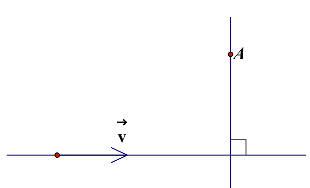
\+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp điểm M là điểm I.

\+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là rỗng.

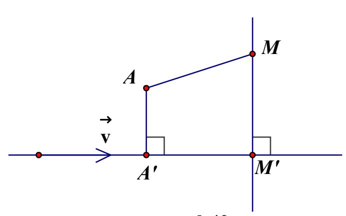
Dạng 2: $\overrightarrow{AM}.\vec{v} = k$ (2) (A cố định, $\vec{v}$ có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của $\vec{v}$

$k \neq 0$: Gọi $\overline{A'M'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AM}$ trên giá của vectơ $\vec{v}$; ta có: $(2) \Leftrightarrow \overline{A'M'}.\vec{v} = k$ (định lí hình chiếu). A' cố định $\Rightarrow M'$ cố định (M' nằm trên giá của $\vec{v}$ định bởi $\overline{A'M'} = \frac{k}{v}$). Tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vectơ $\vec{v}$ tại M'.



k=0



k≠0

Dạng 3: $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ (3) (A, B cố định α, β là hằng số và $\alpha + \beta \neq 0$).

Gọi I là điểm thỏa $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow$ I là điểm cố định.

$$(3) \Leftrightarrow \alpha\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \beta\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 = k$$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)MI^2 + 2\left(\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}\right)\overrightarrow{MI} + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)MI^2 = k - \left(\alpha IA^2 + \beta IB^2\right)$

$\Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{k-\left(\alpha IA^2+\beta IB^2\right)}{\alpha+\beta}$

Nếu $\dfrac{k-\left(\alpha IA^2+\beta IB^2\right)}{\alpha+\beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{\dfrac{k-\left(\alpha IA^2+\beta IB^2\right)}{\alpha+\beta}}$.

Nếu $\dfrac{k-\left(\alpha IA^2+\beta IB^2\right)}{\alpha+\beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu $\dfrac{k-\left(\alpha IA^2+\beta IB^2\right)}{\alpha+\beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

– Cho hai điểm A, B cố định α,β là hằng số thỏa $\alpha+\beta\neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$.

– Cho ba điểm A, B, C cố định α,β,χ là hằng số thỏa $\alpha+\beta+\chi\neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\chi\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\chi\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\chi)\overrightarrow{MI}$.

Câu 105. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow AB\perp CM$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua C vuông góc với AB.

Câu 106. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp điểm M thỏa:

a). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0$

b). $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$

c). $\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0$

d). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+9\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=3MB^2+4MC^2$

Lời giải

a). Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

Do đó $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.2\overrightarrow{MI}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow MA\perp MI$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp các điểm M là đường là đường tròn đường kính IA.

b). $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, nên có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

Do đó $\overrightarrow{MB}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.3\overrightarrow{MG}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BG.

c). $\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0$

Gọi điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=0 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow I$ là điểm cố định.

Ta có $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=4\overrightarrow{MI}+\underbrace{\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}=4\overrightarrow{MI}$

Gọi điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA}+2\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=0$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ J là điểm cố định.

Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+2\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)+3\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}\right)$

$=6\overrightarrow{MJ}+\left(\underbrace{\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}}\right)=6\overrightarrow{MJ}$

Do đó $\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI}.6\overrightarrow{MJ}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\perp\overrightarrow{MJ}$

$\Leftrightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ, với I, J xác định ở trên.

d). $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+9\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=3MB^2+4MC^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}^2=4\overrightarrow{MB}^2+4\overrightarrow{MC}^2-8\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)+\overrightarrow{MB}.\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\right)=4\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=4\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}.2\overrightarrow{MF}=4\overrightarrow{CB}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{CB}^2$ (Với E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB).

Gọi K trung điểm của EF

$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{CB}^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KE}\right)\left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KF}\right)=BC^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KE}\right)\left(\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{KE}\right)=BC^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MK}^2-\overrightarrow{KE}^2=BC^2$

$\Leftrightarrow MK^2=BC^2+KE^2=BC^2+\frac{1}{4}EF^2=BC^2+\frac{1}{16}AC^2$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm K, bán kính $R=\sqrt{BC^2+\frac{1}{16}AC^2}$

Câu 107. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn điều kiện sau: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB}=0 \Leftrightarrow$ MA vuông góc với BC.

Vì A, B, C cố định $\Leftrightarrow$ tập hợp những điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

Câu 108. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=AB^2$

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=AB^2 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BC}=AB^2$

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M và G trên BC, thì K cố định và hình chiếu của $\overrightarrow{MG}$ trên BC là $\overrightarrow{HK}$, theo định lí hình chiếu ta có: $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BC}$, suy ra $(*) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{BC}=AB^2$, suy ra H cố định (H thuộc đường thẳng BC định bởi $\overline{HK}=\dfrac{AB^2}{3\overline{BC}}$). Vậy tập hợp những điểm M là đường thẳng vuông góc với BC tại H.

Câu 109. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB=AC=a, BC=3a$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $2MA^2+3MB^2-MC^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0$

Lời giải

$2MA^2+3MB^2-MC^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0$

$\Leftrightarrow 2MA^2+4MB^2=MB^2-2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+MC^2$

$\Leftrightarrow 2MA^2+4MB^2=\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)^2=BC^2 \quad (*)$

Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ I là điểm cố định và nằm giữa hai điểm A và B. Do

$\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AI}\right|=\dfrac{2}{3}\left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow AI=\dfrac{2}{3}AB=\dfrac{2a}{3} \Rightarrow BI=\dfrac{a}{3}$

$(*) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}^2+4\overrightarrow{MB}^2=BC^2 \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=BC^2 \quad (*)$

$\Leftrightarrow 6MI^2+2IA^2+4IB^2+4\overrightarrow{MI}\left(\underbrace{\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}\right)=BC^2$

$\Rightarrow 6MI^2=BC^2-\left(2IA^2+4IB^2\right)=9a^2-\left[2.\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2+4.\left(\dfrac{a}{3}\right)^2\right]=\dfrac{23a^2}{3}$

$\Rightarrow MI^2=\dfrac{23a^2}{18} \Leftrightarrow MI=a\sqrt{\dfrac{23}{18}}$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $R=a\sqrt{\dfrac{23}{18}}$.

Câu 110. Cho A,B,C,D là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)=0$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của đoạn AD ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MI}$

Gọi J là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA}+2\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC} \Rightarrow J$ là điểm cố định.

Ta có $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+2\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)+3\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JC}\right)$

$=6\overrightarrow{MJ}+\underbrace{\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}}=6\overrightarrow{MJ}$

Do đó $\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right)=0 \Leftrightarrow 6\overrightarrow{MJ}.2\overrightarrow{MI}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}.\overrightarrow{MI}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}\perp\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow$ MJ vuông góc với MI.

Do I, J cố định nên tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ.

Câu 111. Cho đoạn $AB = a > 0$ và số k. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k$

Lời giải

Gọi O là trung điểm của đoạn AB.

Ta có $MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}\right)^2$

$$= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO}\left(\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}_{\vec{0}}\right) = 2MO^2 + OA^2$$

$$= 2MO^2 + \frac{a^2}{2}$$

Do $MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MO^2 + \frac{a^2}{2} = k \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}$

Nếu $\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}}$. Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}}$.

Nếu $\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 = 0 \Leftrightarrow MO = 0 \Rightarrow M \equiv O$

Nếu $\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 < 0$ nên tập điểm là rỗng.

Câu 112. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$;

b) $\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$.

Lời giải

a) Gọi I là trung điểm đoạn BC. Khi đó $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MI$.

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn đường kính AI.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow CA \perp MG$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua G và vuông góc với AC.

Câu 113. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$;

b) $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$;

c) $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 0$;

d) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -MA.MB$.

Lời giải

a) Giả sử M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn đường kính AB.

b) Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow MA\perp BC \Leftrightarrow$ M nằm trên đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

c) Gọi I là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.3\overrightarrow{MG}=0 \Leftrightarrow MI\perp MG \Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn đường kính IG.

d) Giả sử $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-MA.MB \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MA}\right|\left|\overrightarrow{MB}\right|\cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=-MA.MB$

$\Leftrightarrow \cos\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=-1 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=180^0 \Leftrightarrow$ M nằm bên trong đoạn thẳng AB

Câu 114. Cho hai điểm A,B và k là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm M thoả điều kiện: $MA^2+MB^2=k^2$.

Lời giải

Với O là trung điểm AB. Ta có:

$MA^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2=MO^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}+OA^2$

$MB^2=\overrightarrow{MB}^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2=MO^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}+OB^2$

$\Rightarrow MA^2+MB^2=2MO^2+2\overrightarrow{MO}.\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+OA^2+OB^2$ (1)

Vì O là trung điểm AB nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$ và OA = OB, do đó (1) trở thành

$MA^2+MB^2=2MO^2+2OA^2$.

Gọi tập hợp các điểm M cần tìm là (L). Ta có:

$MA^2+MB^2=k^2 \Leftrightarrow 2(MO^2+OA^2)=k^2 \Leftrightarrow MO^2=\dfrac{k^2}{2}-OA^2$ (2)

Đặt $OA^2=\dfrac{m^2}{2}$. (2) trở thành $MO^2=\dfrac{1}{2}(k^2-m^2)$. Xảy ra:

i) $k^2<m^2$ thì $MO^2<0$: (L) $=\varnothing$.

ii) $k^2=m^2$ thì $MO^2=0 \Leftrightarrow M\equiv O$: (L) = { O }.

iii) $k^2>m^2 \Leftrightarrow MO=\sqrt{\dfrac{1}{2}(k^2-m^2)}$: (L) là đường tròn tâm O có bán kính là

$R=\sqrt{\dfrac{1}{2}(k^2-m^2)}$.

Câu 115. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của BC, D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DB}=\vec{0}$, E là trung điểm của DC. Ta có $\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\right)=0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}.6\overrightarrow{ME}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{ME}=0 \Leftrightarrow MI\perp ME$. Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính IE.

Câu 116. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

a). $MB^2+MC^2-MA^2=0$

b). $MB^2+MC^2-2MA^2=0$

Lời giải

Dựng hình bình hành ABEC, ta có:

$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EA}=\vec{0}$

$\Rightarrow MB^2+MC^2-MA^2=\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2+\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}\right)^2-\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2$

$=ME^2+2\overrightarrow{ME}\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EA}\right)+EB^2+EC^2-EA^2$

Do đó $(1)\Leftrightarrow ME^2=EA^2-\left(EB^2+EC^2\right)$

$\Leftrightarrow ME^2=\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\right)^2-\left(EB^2+EC^2\right)$

$\Leftrightarrow ME^2=2\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC}\Leftrightarrow ME^2=2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow ME^2=2AB.AC.\cos A$

Nếu $\widehat{A}$ tù: Tập hợp điểm M là $\varnothing$

Nếu $\widehat{A}$ vuông: Tập hợp điểm M là $\{E\}$

Nếu $\widehat{A}$ nhọn: Tập hợp điểm M là đường tròn $\left(E;\sqrt{2AB.AC.\cos A}\right)$

b).

Cách 1: Gọi I trung điểm của BC, J là trung điểm của AI. Ta có $MB^2+MC^2-2MA^2=0$

$\Leftrightarrow 2IM^2+\frac{BC^2}{2}-2MA^2=0$

$\Leftrightarrow MA^2-MI^2=\frac{BC^2}{4}$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng vuông góc với AI tại điểm H, xác định bởi:

$\overline{JH}=\frac{BC^2}{8\overline{AI}}$

Cách 2: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác ABC.

Ta có $(2)\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OA}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}\left(3\overrightarrow{OG}-3\overrightarrow{OA}\right)=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{AG}=0\Leftrightarrow MO\perp AG$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng qua O vuông góc với AG.

Câu 117. Cho hai điểm A,B cố định và số k cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right)^2=\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MA}^2-2.\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\Rightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\frac{\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{AB}^2}{2}\quad(*)$

Gọi I trung điểm của AB, khi đó có $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$

Thay vào $(*)$ ta được: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}\Leftrightarrow MI^2-\frac{AB^2}{4}=k$

$\Leftrightarrow MI^2=k+\frac{AB^2}{4}$.

- $k+\frac{AB^2}{4}<0\Rightarrow M$ tập rỗng.

- $k+\frac{AB^2}{4}=0\Rightarrow M\equiv I$
- $k+\frac{AB^2}{4}>0\Rightarrow M$ chạy trên đường tròn tâm I bán kính $R=\sqrt{k+\frac{AB^2}{4}}$

Câu 118. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG}=AB^2$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

Lời giải

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG}=AB^2\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}\right)=AB^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{GC}=AB^2\Leftrightarrow MB.GC.\cos\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{GC}}\right)=AB^2\ (*)$

Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B trên GC, trên CB_1 ta lấy điểm H thỏa mãn $\overline{B_1H}=\frac{AB^2}{GC}$

$\overrightarrow{B_1H}\uparrow\uparrow\overrightarrow{B_1C}\uparrow\uparrow\overrightarrow{GC}$, vì B_1 cố định nên H cố định $\Rightarrow M$ chạy trên đường thẳng CG đi qua H.

Câu 119. Trong mặt phẳng Oxy cho cho tam giác ABC có trọng tâm G.

a). Xác định vị trí điểm P thỏa $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}$.

b). Chứng minh C,G,P thẳng hàng.

c). Tìm tập hợp diểm M thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$

Lời giải

a). Gọi I là trung điểm của AB, theo tính chất đường trung tuyến $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PI}$

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{PI}+4\overrightarrow{PC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{CI}-\overrightarrow{CP}\right)-4\overrightarrow{CP}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{CP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CI}\ \ (1)$

b). Theo tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IG}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}+\overrightarrow{IC}-3\overrightarrow{IG}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IG}\ (2)$

Từ $(1)\&(2)\Rightarrow \overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GI}$

c). $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|\Leftrightarrow\left|2\overrightarrow{MI}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{CI}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{CI}\right|$

$\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{HI}-\overrightarrow{HM}+2\left(\overrightarrow{HC}-\overrightarrow{HM}\right)\right|=\left|\overrightarrow{CI}\right|\Leftrightarrow\left|\underbrace{\overrightarrow{HI}+2\overrightarrow{HC}}_{\vec{0}}-3\overrightarrow{HM}\right|=\left|\overrightarrow{CI}\right|$

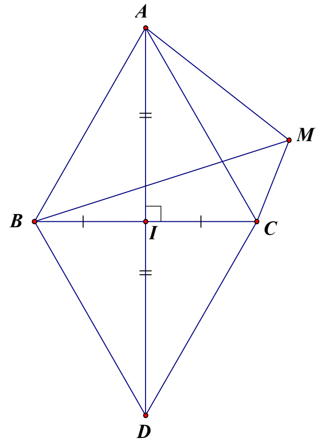
$\Leftrightarrow 3\left|\overrightarrow{HM}\right|=\left|\overrightarrow{CI}\right|\Leftrightarrow\Leftrightarrow HM=\frac{CI}{3}\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm H bán kính $R=\frac{CI}{3}$.

Câu 120. Cho tam giác ABC đều cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC và M là một điểm thay đổi:

a). Chứng minh $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}^2$ không đổi.

b). Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=k$ (k là số thực cho trước).

Lời giải



a). Nhận xét: AD và BC có trung điểm I chung.

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IB}^2=MI^2-\frac{a^2}{4}$$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}^2=\overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}\right)=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MD}$$

$$=-\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)=-\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2=-MI^2+\frac{3a^2}{4}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{a^2}{2}$ không đổi.

b). Theo câu a), ta có:

$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=k\Leftrightarrow AM^2+\frac{a^2}{2}=k\Leftrightarrow AM^2=k-\frac{a^2}{2}$$

– Nếu $k<\dfrac{a^2}{2}$ thì quỹ tích là tập rỗng.

– Nếu $k=\dfrac{a^2}{2}$ thì quỹ tích chỉ gồm một điểm A.

– Nếu $k>\dfrac{a^2}{2}$ thì quỹ tích là đường tròn tâm A, bán kính là $\sqrt{k-\dfrac{a^2}{2}}$.

Câu 121. Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn:

a). $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=k$

b). $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM}-2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=k$

(với k là một số cho trước).

Lời giải

a).

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}-2\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{CA}+2\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AB}\right)+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$$

$$=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

(Với D là điểm sao cho $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AB}$).

Do đó điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}-4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=k$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}=k+4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}'.\overrightarrow{AD}=k+4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overline{AM'} = \dfrac{k + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\overline{AD}}$ (Với M' là hình chiếu của M trên AD).

Vậy quỹ tích điểm M là đường thẳng vuông góc với AD tại điểm M' sao cho $\overline{AM'} = \dfrac{k + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\overline{AD}}$

.

b).

trước hết ta có

$2\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - \left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\right)^2 = MB^2 + MC^2 - BC^2$ nên

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} = \dfrac{MB^2 + MC^2 - BC^2}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = \dfrac{3}{2}MB^2 - \dfrac{1}{2}MC^2 - \dfrac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2$

Do vậy điểm M thỏa mãn $\dfrac{3}{2}MB^2 - \dfrac{1}{2}MC^2 - \dfrac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2 = k$

$\Leftrightarrow 3MB^2 - MC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2$ (1)

Gọi G là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 3GB^2 - GC^2$, mà $GB = \dfrac{BC}{2}, GC = \dfrac{2BC}{2}$ nên

$3MB^2 - MC^2 = 2MG^2 - \dfrac{3}{2}BC^2$

Thành thử điều kiện (1) trở thành: $2MG^2 - \dfrac{3}{2}BC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2$

$\Leftrightarrow MG^2 = k + \dfrac{5a^2}{4} - b^2 + c^2$ (với a, b, c là độ dài ba cạnh BC, CA, AB).

– Nếu $k < -\dfrac{5a^2}{4} + b^2 - c^2$ thì quỹ tích là tập rỗng.

– Nếu $k = -\dfrac{5a^2}{4} + b^2 - c^2$ thì quỹ tích chỉ gồm một điểm M.

– Nếu $k > -\dfrac{5a^2}{4} + b^2 - c^2$ thì quỹ tích điểm M là đường tròn tâm G bán kính $\sqrt{k + \dfrac{5a^2}{4} - b^2 + c^2}$.

Câu 122. Cho tam giác ABC số a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$.

Lời giải:

Chú ý, tổng các hệ số $3 + 1 - 4 = 0$ nên không tồn tại tâm tỉ cự của hệ điểm A, B, C.

Gọi I là điểm sao cho $3\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{IA} + \left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$

Do đó I cố định và

$3MA^2 + MB^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0}$

$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2$.

Ta có

$3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a \Leftrightarrow 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 - 4MC^2 = a$

$\Leftrightarrow MC^2 - MI^2 = \dfrac{3IA^2 + IB^2 - a}{4}$.

Đặt $k = \dfrac{3IA^2 + IB^2 - a}{4}$ không đổi, bài toán đưa về tìm tập hợp các điểm M sao cho $MC^2 - MI^2 = k$.

Gọi O là trung điểm của CI và H là hình chiếu của M trên CI, ta có

$MC^2 - MI^2 = \overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MI}^2 = \left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MI}\right)\left(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MI}\right) = 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{HO}.\overrightarrow{IC}$.

Do đó

$MC^2 - MI^2 = k \Leftrightarrow 2\overline{HO}.\overline{IC} = k \Leftrightarrow 2\overline{OH}.\overline{CI} = k$

$\Leftrightarrow 2\overline{OH}.\overline{CI} = k \Leftrightarrow 2\overline{OH}.\left(\overline{CI}\right)^2 = k.\overline{CI}$

$\Leftrightarrow \overline{OH} = \dfrac{k}{2CI^2}\overline{CI}$.

Nên điểm H cố định. Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H xác định ở trên.

Câu 123. Cho tam giác ABC và số k. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$.

Lời giải:

Gọi I là điểm sao cho

$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{IA} + 3\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}\right) + 5\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} = 10\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \dfrac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Do đó điểm I xác định duy nhất và

$2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 + 5\overrightarrow{MC}^2$

$= 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 + 5\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2$

$= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 + 2\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC}\right)$

$= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0}$

$= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$.

Vậy

$2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = k^2 \Leftrightarrow 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 = k^2$

$\Leftrightarrow MI^2 = \dfrac{1}{10}\left(k^2 - 2IA^2 - 3IB^2 - 5IC^2\right)$.

- Nếu $k^2 > 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{\dfrac{1}{10}\left(k^2 - 2IA^2 - 3IB^2 - 5IC^2\right)}$.
- Nếu $k^2 = 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M gồm chỉ một điểm O.
- Nếu $k^2 < 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M là rỗng.