BÀI 10. TÍCH VECTƠ VỚI MỘT SỐ

- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tích của một vectơ với một số

Cho số k khác 0 và vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$. Vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

Ta quy ước $0\vec{a}=\vec{0}$ và $k\vec{0}=\vec{0}$.

2. Các tính chất của phép nhân vectơ với một số

a) $(k+m).\vec{a}=k.\vec{a}+m.\vec{a}$ b) $k.(\vec{a}\pm\vec{b})=k.\vec{a}\pm k.\vec{b}$

c) $k.(m.\vec{a})=(k.m).\vec{a}$ d) $k.\vec{a}=\vec{0}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\ \vec{a}=\vec{0}\end{array}\right.$

e) $1.\vec{a}=\vec{a},(-1).\vec{a}=-\vec{a}$

Chú ý: Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a},\vec{b}$. Khi đó, mọi vectơ $\vec{u}$ đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $(x;y)$ sao cho $\vec{u}=x\vec{a}+y\vec{b}$

3. Một số ứng dụng

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ với điểm M bất kì.

Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ với điểm M bất kì.

Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ cùng phương là có một số thực k để $\vec{a}=k\vec{b}$.

Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng là có số thực k để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Nhận xét: Trong mặt phẳng, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vectơ $\vec{c}$ có duy nhất cặp số $(x;y)$ thoả mãn $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Xác định điểm M bằng đẳng thức vectơ

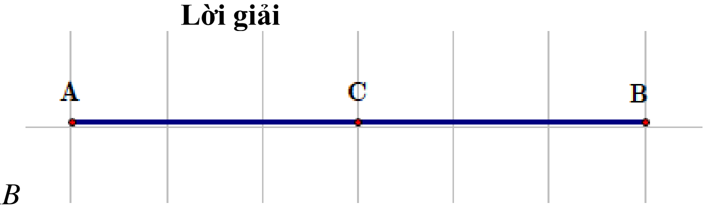
BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Cho đoạn thẳng $AB=6cm$.

a) Xác định điểm C thoả mãn $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

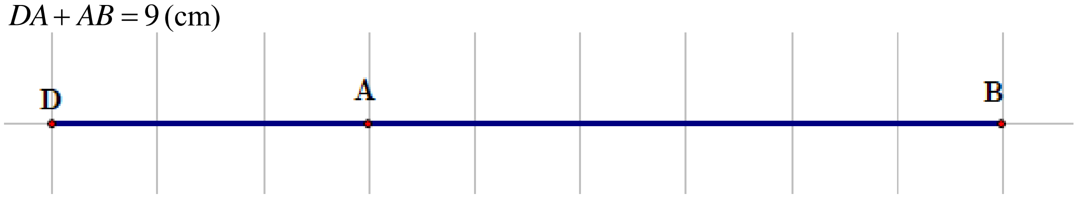
b) Xác định điểm D thoả mãn $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải



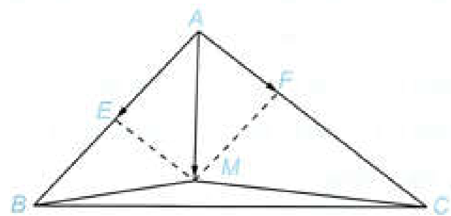
a) C là trung điểm của đoạn AB

b) D là điểm ngoài đoạn AB (nằm trên đường thẳng AB) sao cho $DA+AB=9$ (cm)



Câu 2. Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Lời giải



Để xác định vị trí của M, trước hết ta biểu thị $\overrightarrow{AM}$ (với gốc A đã biết) theo hai vectơ đã biết $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

Đẳng thức vectơ đã cho tương đương với: $\overrightarrow{MA}+3(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lấy điểm E là trung điểm của AB và điểm F thuộc cạnh AC sao cho $AF=\frac{1}{3}AC$.

Khi đó $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Vì vậy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

Suy ra M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $EAFM$.

Câu 3. Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Xác định điểm N thoả mãn $4\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$.

Lời giải

a) Giả sử tìm được điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Gọi I là trung điểm của AB và J là trung điểm của IC. Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

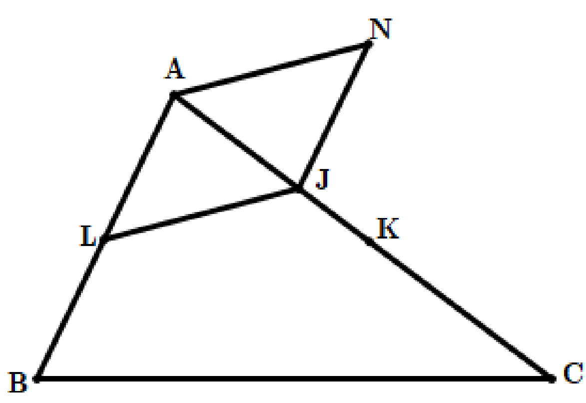
Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MJ}$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MJ}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ}=\vec{0}$ hay $M\equiv J$.

b) Giả sử tìm được điểm N thoả mãn $4\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$

Gọi K là trung điểm của CA. Khi đó

$4\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=2(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB})+(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC})+\overrightarrow{NA}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{NA}.$



Gọi J là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{JA}=\vec{0}$.

Khi đó $2\overrightarrow{NK}+\overrightarrow{NA}=3\overrightarrow{NJ}$.

Do đó $4\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{NJ}$.

Từ đó $4\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{NJ}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{NJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ (1)

Lấy điểm L thuộc cạnh AB sao cho $\overrightarrow{AL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow \overrightarrow{NJ}=\overrightarrow{AL}$.

Từ đó, do A, L, J không thẳng hàng, nên tứ giác $ALJN$ là một hình bình hành.

Vậy, điểm N cần tìm là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ALJN$.

Câu 4. Cho hai điểm phân biệt A và B. Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Lời giải

Cách 1:

$\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=-4\overrightarrow{MB} \Rightarrow \frac{MA}{MB}=\frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|}=\frac{|-4\overrightarrow{MB}|}{|\overrightarrow{MB}|}=4$

và hai vectơ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng

Suy ra M nằm giữa AB sao cho $\frac{MA}{MB}=4$

Cách 2:

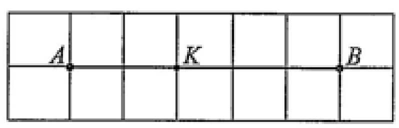
$\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$

Vậy A, M, B thẳng hàng, M nằm giữa A và B sao cho $MB=\frac{1}{5}AB$

Câu 5. Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm K sao cho $3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

Lời giải

Vì $3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ nên $3\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$.



Hình 2

Suy ra $\overrightarrow{KA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{KB}=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB})$

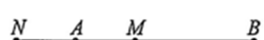
Do đó $\frac{5}{3}\overrightarrow{KA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Nên $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Vậy K nằm giữa A và B sao cho $AK=\frac{2}{5}AB$.

Câu 6. Cho đoạn thẳng $AB=3cm$. Xác định các điểm M, N thoả mãn: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Lời giải



Hình 42

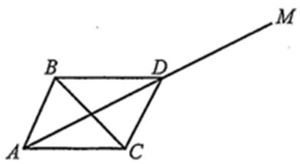
Do $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng, $AM=\frac{1}{3}AB$. Vậy điểm M thuộc tia AB thoả mãn

$AM=\frac{1}{3}AB=1cm$

Do $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ nên $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng, $AN=\frac{1}{3}AB$. Vậy điểm N thuộc tia đối của tia AB thoả mãn $AN=\frac{1}{3}AB=1cm$.

Câu 7. Cho tam giác ABC. Xác định điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

Lời giải



Hình 43

Dựng hình bình hành $ABDC$, theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AM}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AD}$.

Vậy M là điểm thuộc tia AD thoả mãn $AM=2AD$

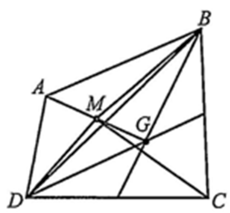
Câu 8. Cho tứ giác $ABCD$. Xác định điểm M thoả mãn $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD, ta có:

Nhận thấy $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MG}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MG}=\vec{0}$

Vậy M là trung điểm của đoạn thẳng AG (Hình 44).



Hình 44

Câu 9. Cho tam giác ABC. Xác định các điểm M, N, P trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{AN}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

c) $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

Lời giải

a) Điểm M nằm ở vị trí thoả mãn tứ giác $AMBC$ là hình bình hành.

b) Lấy K là trung điểm BC. Điểm N đối xứng với K qua A.

c) Điểm P nằm trên tia Cx song song với AB, cùng phía A so với BC và $2PC=AB$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 10. Cho hai điểm A và B. Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow -\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Vậy I là điểm thuộc đoạn AB mà $AI=\frac{3}{4}AB$

Câu 11. Xác định các điểm I, J, K, L biết

a) $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{BC}$

d) $2\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{IB}$

Vậy I là điểm đối xứng của A qua B

b) Ta có $\overrightarrow{JA}-\overrightarrow{JB}-2\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow \overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

c) Ta có $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}=2\overrightarrow{BK}\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

d) Ta có $2\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=2\overrightarrow{LA}-\left(\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AB}\right)+3\left(\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AC}\right)=4\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

nên $2\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{LB}+3\overrightarrow{LC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{LA}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{LA}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Câu 12. Cho tam giác ABC

a) Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$

b) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC}\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Vậy K là trọng tâm của tam giác ABC

b) Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (I là trung điểm của AB)

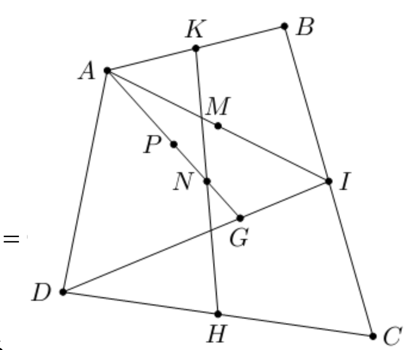
Vậy M là trung điểm của BC

Câu 13. Cho tứ giác ABCD. Xác định điểm M, N, P sao cho

a) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ b) $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

c) $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}$

Lời giải.



a) Gọi I là trung điểm BC suy ra $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

Do đó

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MI}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MI}=\vec{0}$.

Suy ra M là trung điểm AI với I là trung điểm BC

b) Gọi K, H lần lượt là trung điểm của AB, CD ta có

$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{NK}+2\overrightarrow{NH}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{NK}+\overrightarrow{NH}=$

Vậy N là trung điểm của KH

c) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, khi đó ta có $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=3\overrightarrow{PG}$

Suy ra $3\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PG}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PG}=\vec{0}$

Vậy P là trung điểm AG

Dạng 2. Phân tích (hay tính) một vectơ thành tổng, hiệu của các vectơ khác

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ cùng hướng và $|\vec{a}|=m.|\vec{b}|$ thì $\vec{a}=m\vec{b}$.

- Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ ngược hướng và $|\vec{a}|=m.|\vec{b}|$ thì $\vec{a}=-m\vec{b}$.

- Sử dụng định nghĩa, tính chất của các phép toán: phép cộng vectơ, phép trừ vectơ, phép nhân một số với một vectơ.

- Sử dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác, hình bình hành.

Câu 14. Thực hiện các phép toán vectơ sau:

a) $2(\vec{u}-\vec{v})$ b) $(a+b)\vec{m}$;

c) $5(-2\vec{e})$; d) $\vec{c}-9\vec{c}$ e) $7\vec{c}-2\vec{c}$.

Lời giải

a) $2(\vec{u}-\vec{v})=2\vec{u}-2\vec{v}$

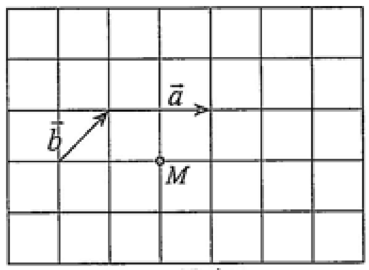
b) $(a+b)\vec{m} = a\vec{m} + b\vec{m}$;

c) $5(-2\vec{e}) = (-5.2)\vec{e} = -10\vec{e}$;

d) $\vec{c} - 9\vec{c} = (1-9)\vec{c} = (-8)\vec{c} = -8\vec{c}$;

e) $7\vec{c} - 2\vec{c} = (7-2)\vec{c} = 5\vec{c}$.

Câu 15. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và một điểm M như Hình 3.



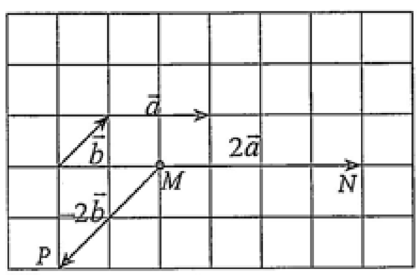
Hình 3

a) Hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{MN} = 2\vec{a}, \overrightarrow{MP} = -2\vec{b}$.

b) Cho biết mỗi ô vuông có cạnh bằng 1.

Tính: $|5\vec{a}|, |-5\vec{b}|$.

Lời giải



Hình 4

a)

b) $|5\vec{a}| = 5|\vec{a}| = 5.2 = 10; |-5\vec{b}| = |-5|.|\vec{b}| = 5.|\vec{b}| = 5\sqrt{2}$.

Câu 16. Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC.

Tìm số k trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{AB}$

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ là hai vectơ cùng hương và $\left|\overrightarrow{CA}\right| = 2\left|\overrightarrow{CB}\right|$

Suy ra $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}$. Vậy $k = 2$.

b) Ta có: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ là hai vectơ ngược hướng và $|\overrightarrow{CA}| = 2|\overrightarrow{AB}|$.

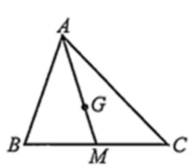
Suy ra $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB}$. Vậy $k = -2$.

Câu 17. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm và M là trung điểm của BC

a) Biểu thị $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AM}$;

b) Biểu thị $\overrightarrow{GA}$ theo $\overrightarrow{GM}$.

Lời giải



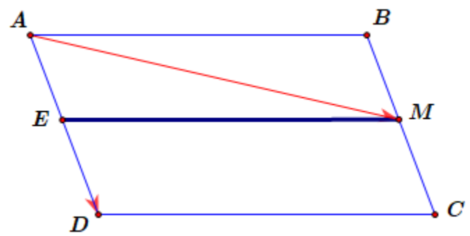
Hình 45

a) Vì $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng và $|\overrightarrow{AG}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AM}|$ nên $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

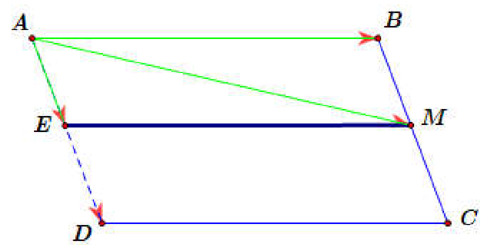
b) Vì $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GM}$ ngược hướng và $|\overrightarrow{GA}|=2|\overrightarrow{GM}|$ nên $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GM}$.

Câu 18. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$

Lời giải



Từ M kẻ đường thẳng song song với AB, cắt AD tại E.
Khi đó tứ giác ABME là hình bình hành.
Do đó: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$.



Dễ thấy: $AE=BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$

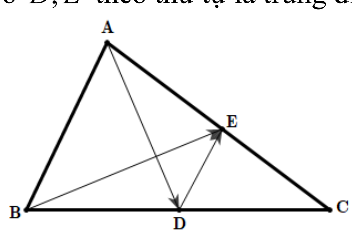
$\Rightarrow \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Vậy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Câu 19. Cho tam giác ABC. Gọi D,E tương ứng là trung điểm của BC, CA. Hãy biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BE}$.

Lời giải

Do D,E theo thứ tự là trung điểm của BC,CA, nên



$\overrightarrow{DE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(1)$

$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}.(2)$

Theo quy tắc ba điểm, ta có:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EB}(3)$

$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB}(4)$

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}(5)$

Từ (1) và (3) suy ra $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BE}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$.

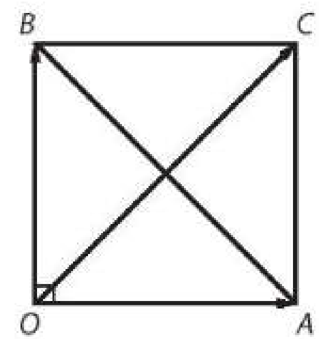
Từ (3) và (4) suy ra $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}-2\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$.

Từ (4) và (5) suy ra $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AD}-\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}\right)=-\frac{4}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$.

Câu 20. Cho tam giác OAB vuông cân, với $OA=OB=a$. Hãy xác định độ dài của các vectơ sau $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB},2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

a) Theo quy tắc hình bình hành, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ với C là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OACB$ dựng trên hai cạnh OA,OB.



Do tam giác OAB vuông cân tại O, nên $OACB$ là hình vuông. Khi đó

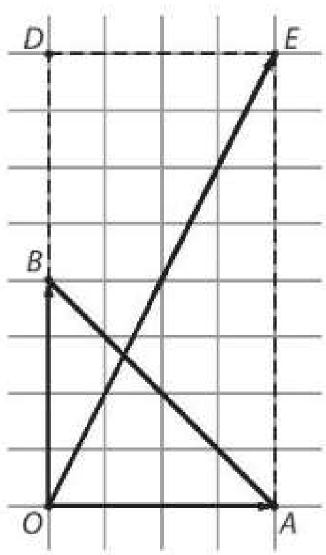
$|\overrightarrow{OC}|=OC=\sqrt{OA^2+OB^2}=a\sqrt{2}.$

b) Theo quy tắc ba điểm, $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

Từ đó, do tam giác OAB vuông cân tại O, nên

$|\overrightarrow{BA}|=AB=a\sqrt{2}.$

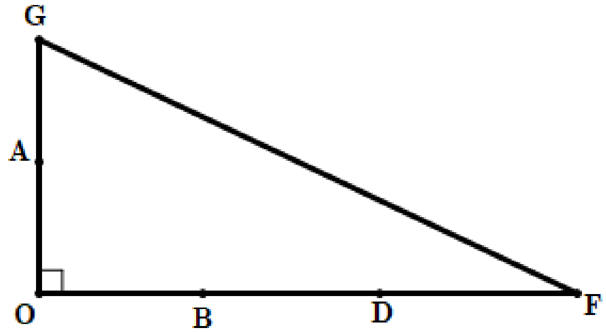
c) Lấy điểm D đối xứng với O qua B.



Khi đó $\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OB}$. Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}$ với E là đỉnh thứ tư của hình bình hành $OAED$ dựng trên hai cạnh OA, OD. Do tam giác OAB vuông cân tại O nên $OAED$ là hình chữ nhật, với $OA=a,OD=2a$.

Suy ra $|\overrightarrow{OE}|=OE=\sqrt{OA^2+OD^2}=a\sqrt{5}$.

d) Lấy F đối xứng B qua D và lấy G đối xứng với O qua A. Khi đó $\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}=3\overrightarrow{OB}$.



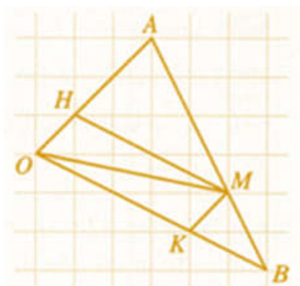
Suy ra $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{FG}$. (1)

Do cách dựng các điểm F, G, tam giác OFG vuông tại $O, OG=2OA=2a$, $OF=3OB=3a$.

Từ đó và (1) suy ra

$|2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{FG}|=FG=\sqrt{OF^2+OG^2}=a\sqrt{13}$.

Câu 21. Cho tam giác OAB. Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM=\frac{2}{3}AB$. Kẻ $MH//OB, MK//OA$



Giả sử $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{OH}$ theo $\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK}$ theo $\vec{b}$.

b) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

a) Ta có: $MK//OA, MH//OB$ suy ra

$\frac{OK}{OB}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}, \frac{OH}{OA}=\frac{BM}{AB}=\frac{1}{3}$.

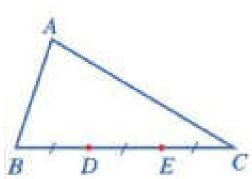
Vì $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và $OH=\frac{1}{3}OA$ nên $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{a}$.

Vì $\overrightarrow{OK}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và $OK=\frac{2}{3}OB$ nên $\overrightarrow{OK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\vec{b}$.

b) Vì tứ giác $OHMK$ là hình bình hành nên

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$.

Câu 22. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E thuộc cạnh BC thoả mãn $BD=DE=EC$. Giả sử $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$. Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.



Lời giải

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{BD}=\dfrac{\overrightarrow{BC}}{3}=\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}}{3}$

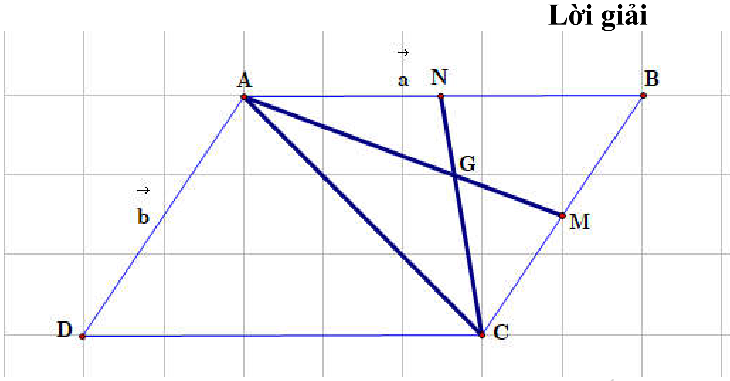
$\overrightarrow{BE}=\dfrac{2.\overrightarrow{BC}}{3}=\dfrac{2}{3}\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\vec{a}+\dfrac{-\vec{a}+\vec{b}}{3}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\vec{a}+\dfrac{2}{3}\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

Câu 23. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AG},\overrightarrow{CG}$ theo hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

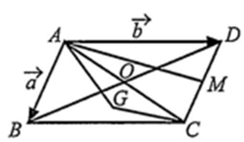
Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{1}{3}\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$

Ta có $\overrightarrow{CG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CN}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{1}{3}\left(-2\vec{b}-\vec{a}\right)$

Câu 24. Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Gọi O là giao điểm của AC và BD,M là trung điểm của CD,G là trọng tâm của tam giác OBC (Hình 46).



Hình 46

Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AG},\overrightarrow{CG}$ theo hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$.

Vì $\overrightarrow{AO}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$ và $|\overrightarrow{AO}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ nên $\overrightarrow{AO}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$. Vì M là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{b})=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$. Vì G là trọng tâm của tam giác OBC nên $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{3}\left[\left(\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}\right)+\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})\right]=\dfrac{5}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}.$

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AC}=\dfrac{5}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})=-\dfrac{1}{6}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}.$

Câu 25. Cho đoạn thẳng AB và số k khác 1. Điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$. Với mỗi điểm O, biểu thị các vectơ $\overrightarrow{OM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

$\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Rightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$

$\Rightarrow (1-k)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}\Rightarrow \overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{1-k}(\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}).$

Nhận xét: Khi $k=-1$, tức là M là trung điểm của AB, thì $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{1-(-1)}[\overrightarrow{OA}-(-1)\overrightarrow{OB}]=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

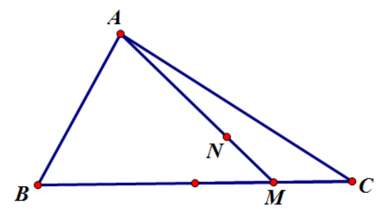
BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 26. Cho tam giác ABC, trên cạnh ABC lấy M sao cho $BM=3CM$, trên đoạn AM lấy N sao cho $2AN=5MN$. G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$

b) Phân tích các véc-tơ $\overrightarrow{GC};\overrightarrow{MN}$ qua các véc-tơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GB}$

Lời giải.



a) Theo giả thiết $\overrightarrow{BM}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AN}=\dfrac{5}{7}\overrightarrow{AM}$

Suy ra:

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{7}\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{5}{7}\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{23}{28}\overrightarrow{AB}+\dfrac{15}{28}\overrightarrow{AC}.$

b) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}$.

Ta có $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{2}{7}\overrightarrow{AM}=-\dfrac{2}{7}\left(\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{1}{14}\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\right)-\dfrac{3}{14}\left(\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GA}\right)$

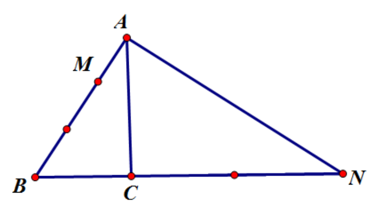
$=-\dfrac{1}{14}\left(\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\right)-\dfrac{3}{14}\left(-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}+\dfrac{1}{7}\overrightarrow{GB}.$

Câu 27. Cho ΔABC. Lấy các điểm M, N, P sao cho $\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$. Biểu diễn các vecto $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AM}$ theo các vec tơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Câu 28. Cho ΔABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.



a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}$.

b) Hãy phân tích $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vec tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Lời giải.

a) Vì $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ nên M thuộc cạnh AB và $AM=\dfrac{1}{3}AB$.

Vì $\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{BC}$ nên N thuộc tia BC và $CN=2BC$.

b) Ta có $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$.

Và $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+3\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-2\vec{a}+3\vec{b}$.

Tương tự $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}-2\vec{a}+3\vec{b}=-\dfrac{7}{3}\vec{a}+3\vec{b}$.

Câu 29. Cho ΔABC. Gọi I, J là hai điểm được xác định bởi $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}=\vec{0}$.

a) Tính $\overrightarrow{IJ}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng IJ qua trọng tâm G của tam giác ΔABC

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{IJ}=-2\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{IG}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{6}{5}\overrightarrow{IG}$. Suy ra IJ qua trọng tâm G của tam giác ΔABC.

Câu 30. Cho hình bình hành $ABCD$ có E là trung điểm của CD. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AE}$ theo $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải.

Do hình bình hành $ABCD$ nên $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Do E là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{u}+\dfrac{1}{2}\vec{v}$.

Câu 31. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo $\vec{a}=\overrightarrow{GA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{GB}$.

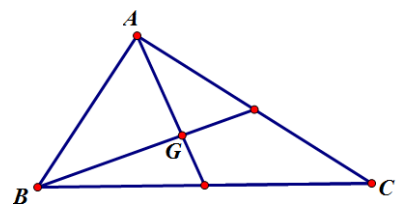
Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}=\vec{b}-\vec{a}$.

Vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}$.

Ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{b}=-\vec{a}-2\vec{b}$.

Và $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}=\vec{a}-\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)=2\vec{a}+\vec{b}$.

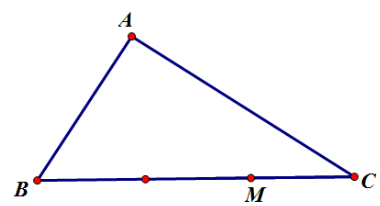


Câu 32. Cho ΔABC. Điểm M trên cạnh BC sao cho $MB=2MC$. Hãy phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo hai vec tơ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.



Câu 33. Cho ΔABC. Điểm M trung điểm AB và N là một điểm trên cạnh AC sao cho $NA=2NC$. Gọi K là trung điểm MN. Phân tích vec tơ $\overrightarrow{AK}$ theo các vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AK}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 34. Cho tam giác OAB. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của cạnh OA, OB. Tìm các số m,n của mỗi đẳng thức $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+0.\overrightarrow{OB}$, nên $m=\dfrac{1}{2}$, $n=0$.

Và $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$, nên $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+1.\overrightarrow{OB}$, nên $m=-\frac{1}{2}$, $n=1$.

Câu 35. Một đường thẳng cắt cạnh DA, DC và đường chéo DB của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm E, F và M. Biết rằng $\overrightarrow{DE}=m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF}=n\overrightarrow{DC}$ $(m,n>0)$. Hãy biểu diễn $\overrightarrow{DM}$ qua $\overrightarrow{DB}$ và m,n.

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EM}=y\overrightarrow{FM}$ thì $\overrightarrow{DM}=x\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}$.

Do đó $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}-m\overrightarrow{DA}=(x-m)\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}$.

Và $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{DM}-\overrightarrow{DF}=x\overrightarrow{DA}+(x-n)\overrightarrow{DC}$.

Ta có $\overrightarrow{EM}=y\overrightarrow{FM}\Leftrightarrow(x-m)\overrightarrow{DA}+x\overrightarrow{DC}=xy\overrightarrow{DA}+y(x-n)\overrightarrow{DC}$.

Do $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DC}$ không cùng phương nên $\begin{cases} x-m=xy \\ x=y(x-n)=xy-yn \end{cases}$.

Giải hệ trên ta được $y=-\frac{m}{n}$ và $x=\frac{mn}{m+n}$.

Vậy $\overrightarrow{DM}=\frac{mn}{m+n}\overrightarrow{DB}$.

Câu 36. Điểm M được gọi là điểm chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k\neq 1$ nếu $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$. Chứng minh rằng với mọi điểm O thì $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}=k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)\Leftrightarrow(1-k)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}$.

Vì $k\neq 1$ nên $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.

Dạng 3. Chứng minh một đẳng thức vectơ

Phương pháp:

- Xét hiệu của hai vế.
- Biến đổi từ biểu thức vế này sang vế kia.
- Chứng minh hai biểu thức vectơ cùng bằng một vectơ trung gian.
- Chứng minh hai biểu thức vectơ cùng bằng một biểu thức vectơ trung gian bằng cách sử dụng quy tắc trừ với điểm đầu là điểm O bất kì.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 37. Chứng minh rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k để $\vec{a}=k\vec{b}$.

Lời giải

Thật vậy, nếu $\vec{a}=k\vec{b}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Ngược lại, giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Ta lấy $k=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng và lấy $k=-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Khi đó $\vec{a}=k\vec{b}$.

Câu 38. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Chứng minh rằng với điểm O tùy ý, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$.

Lời giải

Vì I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Do đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA})+(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB})=2\overrightarrow{OI}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})=2\overrightarrow{OI}$.

Câu 39. Cho hình bình hành $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$.

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Ta có: $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}=2\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AG}$.

Câu 40. Cho ba điểm A,B,C. Chứng minh:

a) $2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}$

b) $3(5\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{CB}-14\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$

Lời giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=2\overrightarrow{AC}$.

b) Ta có: $3(5\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{CB}-14\overrightarrow{AC}=15\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-14\overrightarrow{AC}$

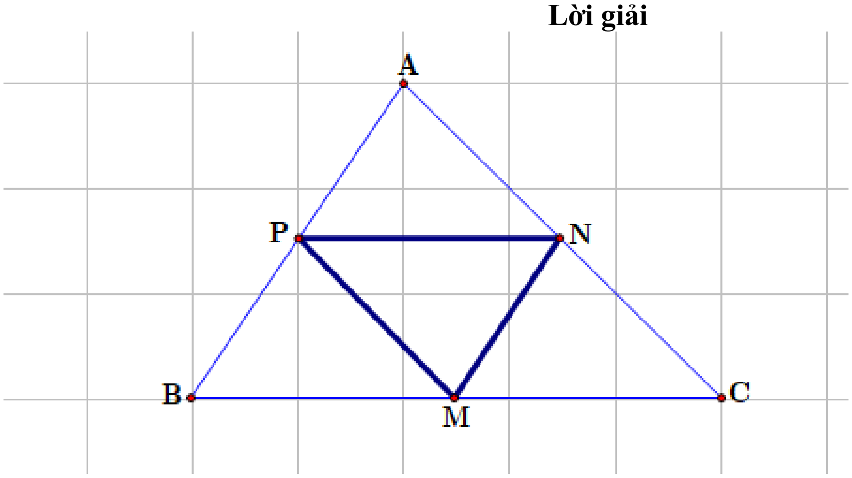
$=15\overrightarrow{AC}-14\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.$

Câu 41. Cho tam giác ABC có M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AN}$

b) $\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BA}$

Lời giải



a) $\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{AN}$ (đpcm)

b) $\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$ (đpcm)

Câu 42. Cho tứ giác $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Chứng minh $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Lời giải

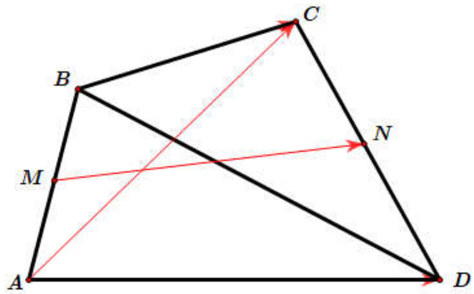
Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$.

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$.

Suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=2(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN})=2.\vec{0}=\vec{0}$.

Câu 43. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB,CD. Chứng minh $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Lời giải



Ta có:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$

Mặt khác: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN})+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Tương tự ta cũng có

$\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}\end{cases}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN})+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Vậy $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Câu 44. Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

a)

Cách 1:

Ta có: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$

Suy ra vecto $\overrightarrow{KA}$ và vecto $\overrightarrow{KB}$ cùng phương, ngược chiều và $KA=2.KB$ $\Rightarrow K,A,B$ thẳng hàng, K nằm giữa A và B thỏa mãn: $KA=2.KB$

Cách 2:

Ta có: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BA})+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\cdot\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3.\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{KB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Vậy K thuộc đoạn AB sao cho $KB=\frac{1}{3}AB$.

b)

Để $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KA})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KB})$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OK}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OK}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OK}\right)+\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{KA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{KB}\right)$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OK}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB})$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OK}+\frac{1}{3}\cdot\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OK}$

Hiển nhiên đúng với mọi điểm O.

Vậy với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Câu 45. Cho tam giác ABC

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}$

Lời giải

a) Ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

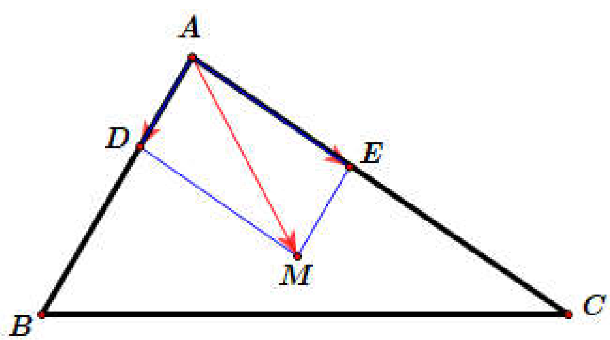
$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB})+2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Trên cạnh AB, AC lấy điểm D, E sao cho $AD=\frac{1}{4}AB; AE=\frac{1}{2}AC$



Khi đó $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ hay M là đỉnh thứ tư của hình bình hành AEMD.

Cách 2:

Ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB})+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

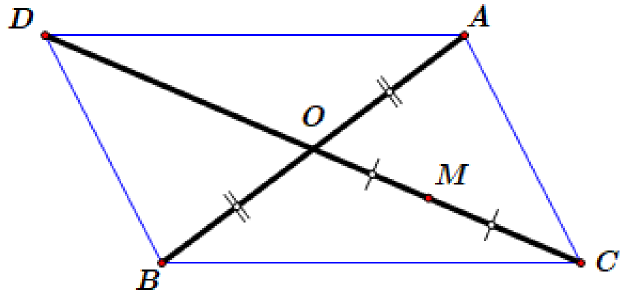
$\Leftrightarrow 4.\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBD$.

Khi đó: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\Rightarrow 4.\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CO}$

Với O là tâm hình bình hành $ACBD$, cũng là trung điểm đoạn AB.



Vậy M là trung điểm của trung tuyến kẻ từ C của tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm 0, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}$

Với mọi điểm O, ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\\ \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\\ \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}\end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})$

$+2(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC})$

$=4\overrightarrow{OM}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})=4\overrightarrow{OM}+\vec{0}=4\overrightarrow{OM}$

Vậy với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}$.

Câu 46. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Gọi G, G_1, G_2 theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ABC, ABM, ACM. Chứng minh rằng G là trung điểm của G_1G_2.

Lời giải

Do M là trung điểm của $BC; G, G_1, G_2$ theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ABC, ABM, ACM nên với mọi điểm O, ta có

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OG_1}, \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OG_2}$.

Từ đó suy ra

$3\left(\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}\right)=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM})$

$=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=6\overrightarrow{OG}$

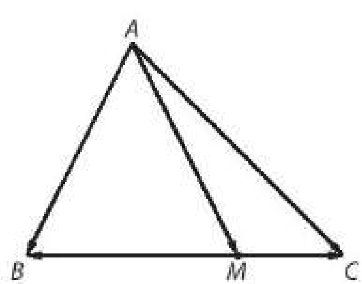
Suy ra $\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_2}=2\overrightarrow{OG}$. Do đó G là trung điểm của G_1G_2.

Câu 47. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM=2MC$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AM}$.

Lời giải



a) Do M thuộc cạnh BC và $BM=2MC$ nên hai vecto $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ ngược hướng và $|\overrightarrow{MB}|=2|\overrightarrow{MC}|$. Suy ra $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$ và do đó $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}$.

Từ đó $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})+2(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC})=3\overrightarrow{AM}+(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})=3\overrightarrow{AM}$.

Nhận xét

- Điểm M trong ví dụ này được gọi là điểm chia đoạn thẳng BC theo tỉ số -2.

- Bằng lập luận tương tự ta chứng minh được điểm M chia đoạn AB theo ti số k (tức là $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}$) khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA}-k\overrightarrow{OB}=(1-k)\overrightarrow{OM},\forall O$.

Câu 48. Gọi G và G' theo thứ tự là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

Lời giải

Do G là trọng tâm tam giác ABC, G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$ nên ta có:

$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}\ (1)$ và $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}\,(2)$

Theo quy tắc ba điểm, ta có

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$

$=(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG})+3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}\right)+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG}+\overrightarrow{G'B'}\right)+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}\right)$

Từ đó và (1), (2) suy ra $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$.

Câu 49. Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O.

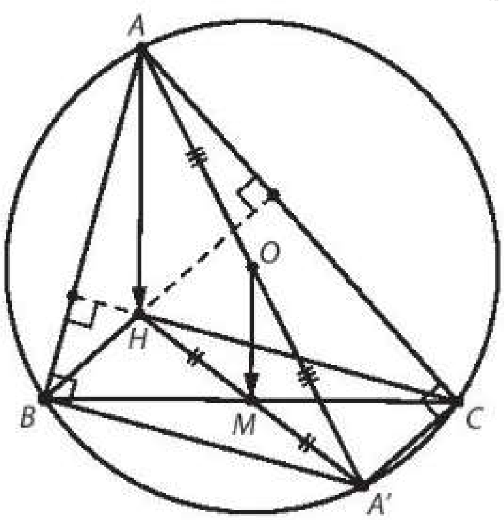
a) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

c) Chứng minh rằng ba điểm G, H, O cùng thuộc một đường thẳng.

Lời giải

a) Do H là trực tâm của tam giác ABC, nên $BH\perp CA, CH\perp AB\,(1)$. Kẻ đường kính AA' của đường tròn ngoại tiếp (O). Khi đó O là trung điểm của AA'.



Hơn nữa $\widehat{A'CA}=90^{\circ}=\widehat{A'BA}$, do đó $A'C\perp CA, A'B\perp AB$. Từ đó và (1) suy ra $A'C//BH, A'B//CH$ và do đó tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành. Mà M là trung điểm của BC, suy ra M cũng là trung điểm của HA'.

Trong tam giác AHA' có O là trung điểm của AA', M là trung điểm của $A'H$, suy ra OM là đường trung bình. Từ đó $AH//OM$ và $AH=2OM$. Suy ra $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$.

b) Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AH}$.

Suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OH}$. (1)

c) Gọi G là trọng tâm ΔABC nên ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$. Từ đó và (1) suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$. Bởi vậy hai vectơ $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OG}$ cùng phương hay O,G,H cùng thuộc một đường thẳng.

Câu 50. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm các cạnh AB,CD và gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh rằng với điểm O bất kì đều có
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OI}$

Lời giải

Do I là trung điểm của MN nên ta có $\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0}$. (1)

Do M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{M}$. (2)

Do N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{N}$. (3)

Từ (1), (2), (3), theo quy tắc ba điểm, ta có

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA})+(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IC})+(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{ID})$

$=4\overrightarrow{OI}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID})=4\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{IM}+2\overrightarrow{IN}.$

Từ đó và (1) suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OI}$.

Câu 51. Cho lục giác $ABCDEF$. Gọi M,N,P,Q,R,S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DE,EF,FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Lời giải

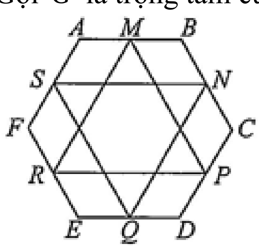
MN là đường trung bình của tam giác ABC nên ta có: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Tương tự ta có: $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CE};\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Vậy $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\vec{0}$.

Gọi G là trọng tâm của tam giác MPR, ta có: $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR}=\vec{0}$



Hình 3

Mặt khác:
Suy ra

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{RG})+(\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS})=\vec{0}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}$

(vì $\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{RG}=-\overrightarrow{GM}-\overrightarrow{GP}-\overrightarrow{GR}=-(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{GR})=\vec{0}$).

Do đó $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}$.

Mà $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}=\vec{0}$ nên $\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$

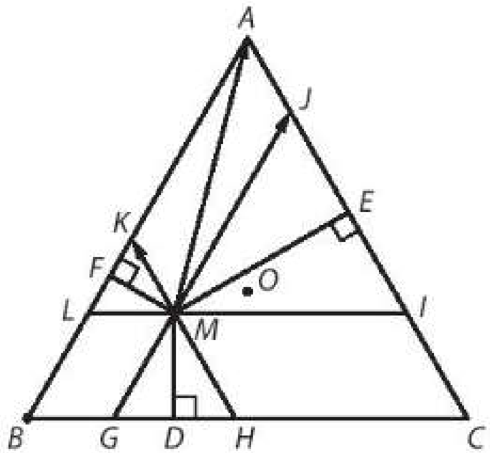
Vậy G là trọng tâm của tam giác NQS.

Câu 52. Cho tam giác ABC đều với trọng tâm O, M là một điểm tuỳ ý nằm trong tam giác. Gọi D,E,F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên BC,CA,AB.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải

Đường thẳng đi qua M và song song với BC cắt AB,AC tại L,I; đường thẳng đi qua M song song với CA cắt BC,AB tại H,K; đường thẳng đi qua M song song với AB cắt CA,BC tại J,G.



Do tam giác ABC đều và $MG//AB, MH//AC$ nên tam giác MGH cũng là một tam giác đều. Từ đó, do $MD \perp GH$ nên D là trung điểm của GH.

Suy ra $2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH}$. (1)

Tương tự cũng có $2\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{Mj}; 2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}$. (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra $2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}$. (3)

Do $MK//AC, MJ//AB$ nên tứ giác $AKMJ$ là hình bình hành. Suy ra

$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MA}$. (4)

Tương tự, cũng có $\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MC}$. (5)

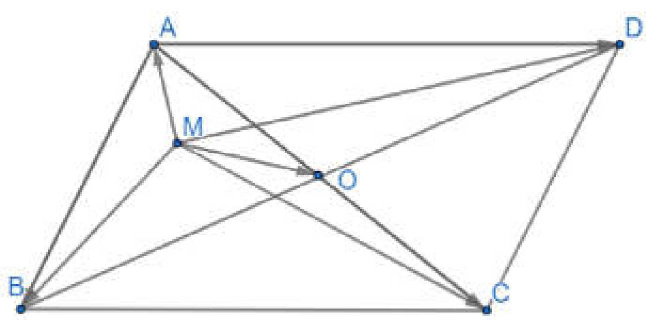
Từ (3), (4), (5) suy ra $2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO}$ (do O là trọng tâm của tam giác đều ABC). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu 53. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Với M là điểm tùy ý, chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$

Lời giải



a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{MO}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = 4\overrightarrow{MO}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO} + \vec{0} + \vec{M} = 4\overrightarrow{MO}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO} = 4\overrightarrow{MO}$

(luôn đúng)

(vì O là giao điểm 2 đường chéo nên là trung điểm của AB, CD)

b) $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Suy ra

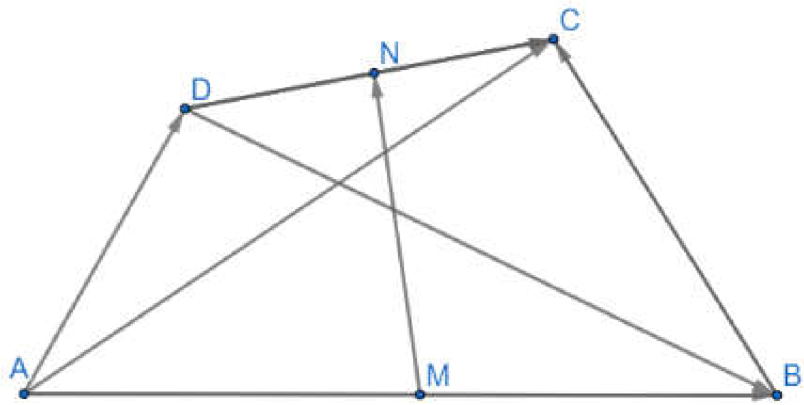
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$ (đpcm)

Câu 54. Cho tứ giác $ABCD$ gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Lời giải



a)

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}$

$=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM})+(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN})+(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND})$

$=\vec{0}+2\overrightarrow{MN}+\vec{0}=2\overrightarrow{MN}$ (đpcm)

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Cách 1.

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}$

$(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AM})+(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN})+(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND})=2\overrightarrow{MN}$

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$

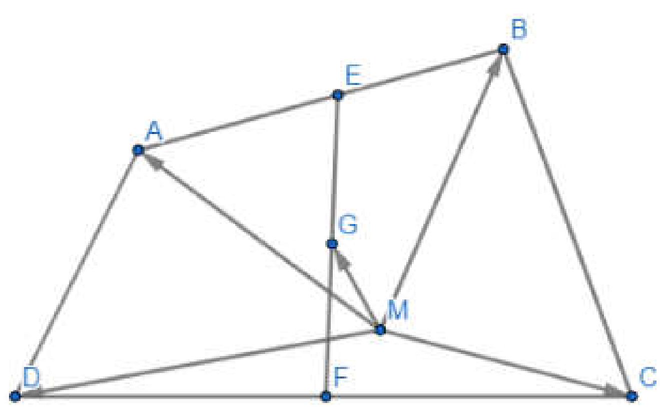
Suy ra $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Cách 2:

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}$ (đpcm)

Câu 55. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E,F,G lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB,CD,EF. Lấy điểm M tùy ý, chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

Lời giải



$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EA})$

$+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EB})$

$+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FC})+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FD})$

$=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MG})+2(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF})$

$+(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB})+(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD})$

$=4\overrightarrow{MG}+2\cdot\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=4\overrightarrow{MG}$ (đpcm)

Câu 56. Cho 2 điểm phân biệt A và B

a) Xác định điểm O sao cho $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MO}$

Lời giải

a) $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

$\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

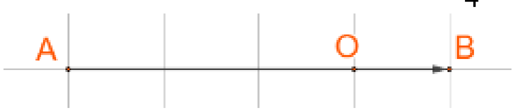
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{BA}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Vậy O thuộc đoạn AB sao cho $OB=\frac{1}{4}AB$



b) Ta có:

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})+3(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{MO}+3\overrightarrow{MO})+(\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB})=4\overrightarrow{MO}+\vec{0}=4\overrightarrow{MO}\cdot$(đpcm)

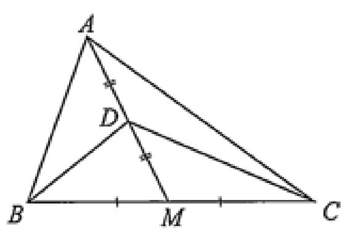
Câu 57. Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của đoạn AM. Chứng minh rằng:

a) $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

b) $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tuỳ ý.

Lời giải

a) Vì M là trung điểm của BC nên:



Hình 1

$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DM}$.

Mặt khác, do D là trung điểm của đoạn AM nên $\overrightarrow{DM}=-\overrightarrow{DA}$. Suy ra $\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

Khi đó: $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DM}=2(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DM})=\vec{0}$. C

b) Ta có: $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}$

$=(2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-4\overrightarrow{OD}=\vec{0}.$

Vậy $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tuỳ ý.

Câu 58. Lấy một điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng:

a) I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

b) G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải

a) Với điểm M bất kì, ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$. Vì I là trung điểm của AB nên: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Do đó: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}+\vec{0}=2\overrightarrow{MI}$.

b) Với điểm M bất kì, ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Do đó: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Câu 59. Cho hình bình hành $ABCD$ và M là một điểm tuỳ ý. Chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

Lời giải

Cách 1:

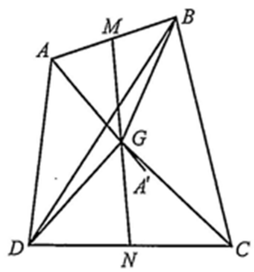
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD})=(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})-(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC})=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

Cách 2:

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC và BD.

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$. Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Câu 60. Cho tứ giác $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN, A' là trọng tâm của tam giác BCD (Hình 48).



Hình 48

Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$

b) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$ với O bất kì;

d) $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA}$

Lời giải

a) Vì M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}, \overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$. Do đó $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}$

$=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM})+(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND})+2\overrightarrow{MN}=-\vec{0}+\vec{0}+2\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MN}$

b) Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$.

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$.

Suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=2(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN})=2\vec{0}=\vec{0}$

c)

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GD}$

$=4\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{OG}+\vec{0}=4\overrightarrow{OG}$

d) Sử dụng kết quả câu c) khi điểm O trùng điểm A, ta có:

$\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG}$

Vì A' là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AA'}$.

Từ hai đẳng thức trên suy ra $3\overrightarrow{AA'}=4\overrightarrow{AG}$. Vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$.

Câu 61. Cho tam giác ABC, kẻ phân giác AD. Đặt $AB=b, AC=c$. Chứng minh: $b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

Lời giải

Vì hai vectơ $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ ngược hướng và $|\overrightarrow{DB}|=\frac{DB}{DC}.\ |\overrightarrow{DC}|$ nên $\overrightarrow{DB}=-\frac{DB}{DC}\overrightarrow{DC}=-\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}=-\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}\Rightarrow b\overrightarrow{DB}+c\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

Câu 62. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm A',B',C' không trùng với đỉnh của tam giác và lần lượt thuộc các cạnh AB,BC,CA thoả mãn $\frac{AA'}{AB}=\frac{BB'}{BC}=\frac{CC'}{CA}$. Chứng minh hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải

Giả sử hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có trọng tâm lần lượt là G,G'.

Ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$

$=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}=3\overrightarrow{GG'}$

Đặt $\frac{AA'}{AB}=\frac{BB'}{BC}=\frac{CC'}{CA}=k$, ta có: $\overrightarrow{AA'}=k\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BB'}=k\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CC'}=k\overrightarrow{CA}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CA}=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=k\vec{0}=\vec{0}$.

Từ các đẳng thức trên, ta có: $3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$ hay G và G' trùng nhau.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 63. Gọi I là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh với điểm O bất kỳ ta có $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AI}\\ \overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BI}\end{cases}\Rightarrow 2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Vậy $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

Câu 64. Cho đoạn AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

a) Tìm số k mà $\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AB}$.

b) Chứng minh với mọi điểm M thì có $\overrightarrow{MI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.

Lời giải

a) $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

Vậy $k=\frac{3}{5}$.

b) $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI}\right)+3\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MI}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MI}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{MI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{MA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$.

Câu 65. Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và đườn tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng

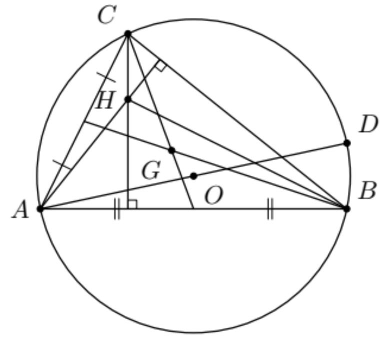
a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

c) $\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$.

Lời giải

a) Dễ thấy $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông.



Nếu tam giác ABC không vuông, gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó:

BH // DC (vì cùng vuông góc với AC);

BD // CH (vì cùng vuông góc với AB).

Suy ra BDCH là hình bình hành, theo quy tắc hình bình hành thì

$\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$. (1)

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

b) Theo câu a) ta có

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}\right)=2\overrightarrow{HO}$.

$\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ (đpcm).

c) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.

Mặt khác theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$.

Suy ra $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GH}\right)-3\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GH}+2\overrightarrow{GO}=\vec{0}$ (đpcm).

Câu 66. Cho tam giác ABC. Gọi H là điểm đối xứng với B qua G với G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CH}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$, với M là trung điểm của BC.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Ta có $\overrightarrow{MH}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CH}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$.

Câu 67. Cho tam giác ABC có trọng tậm G. Chứng minh

a) Với mọi điểm M thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

b) Nếu $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ thì M là trọng tâm G.

Lời giải

a) Ta có

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)$

$=3\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=3\overrightarrow{MG}+\vec{0}=3\overrightarrow{MG}$

b) Áp dụng câu a) ta có

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Rightarrow3\overrightarrow{MG}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MG}=\vec{0}\Rightarrow M\equiv G$

Câu 68. Cho tam giác ABC có ba trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$.

Lời giải

Cách 1

Vì M, N, P là trung điểm 3 cạnh nên

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)=\vec{0}$$

Cách 2

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$$

Câu 69. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý.

a) Hãy xác định các điểm D, E, F sao cho $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}$.Chứng minh rằng các điểm D, E, F không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

b) Chứng minh $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.

Vậy D là đỉnh của hình bình hành $BACD$, không phụ thuộc vào vị trí của M . Tương tự E và F lần lượt là các đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCE$ và $BCAF$.

b) Ta có

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right).$$

Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}$.

Câu 70. Cho tam giác ABC với cạnh $AB=c, BC=a, CA=b$.

a) Gọi CM là đường phân giác trong của góc C. Hãy biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{CM}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Lời giải

a) Theo tính chất đường phân giác, ta có $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{b}{a}$ suy ra $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{b}{a}\overrightarrow{MB}$.

Do đó $\overrightarrow{CM}=\dfrac{\overrightarrow{CA}+\frac{b}{a}\overrightarrow{CB}}{1+\frac{b}{a}}=\dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{CA}+\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}$.

b) Cách 1

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên AI là phân giác của tam giác ACM. Bởi vậy theo câu a) ta có thể biểu thị véc-tơ $\overrightarrow{AI}$ theo các véc-tơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AI}=\frac{AC}{AC+AM}\overrightarrow{AM}+\frac{AM}{AC+AM}\overrightarrow{AC}=\frac{b}{b+\frac{bc}{a+b}}\cdot\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}+\frac{\frac{bc}{a+b}}{b+\frac{bc}{a+b}}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}=\frac{b}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IA}\right)+\frac{c}{a+b+c}\left(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{IA}\right).$$

Suy ra $\left(1-\dfrac{b+c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{IA}+\dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{IB}+\dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Cách 2

Ta có $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}+c\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC}=\dfrac{-a}{c}\overrightarrow{IA}+\dfrac{-b}{c}\overrightarrow{IB}$.

Qua đỉnh C, vẽ 2 đường thẳng song song với 2 phân giác AI, BI tạo thành hình bình hành CA'IB'.
Sử dụng quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{IA'}+\overrightarrow{IB'}$ và dùng tính chất đường phân giác để suy ra kết quả.

Câu 71. Cho tam giác ABC đều, tâm O. Gọi M là một điểm tùy ý bên trong tam giác ABC và D, E, F lần lượt là hình chiếu của nó trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Lời giải

Qua M dựng các đoạn $A_1B_2//AB$; $B_1C_2//BC$; $C_1A_2//CA$ với $A_1, A_2 \in AC$; $B_1, B_2 \in BC$; $C_1, C_2 \in AB$.

Các tam giác $MA_1A_2, MB_1B_2, MC_1C_2$ là những tam giác đều và E, D, F là trung điểm của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

Ta có

$$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}\right)+\left(\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}\right)+\left(\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC_2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MC_2}\right)+\left(\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MA_2}\right)+\left(\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MB_2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$$

$=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$ (Vì O là trọng tâm của tam giác đều ABC).

Câu 72. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$.

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ với M là điểm bất kỳ.

Lời giải

a) Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}$

Tương tự $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}$

Mà I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD nên $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$, $\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$.

Vậy $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}\right)+\left(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}\right)+2\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IJ}$ (đpcm).

b) Theo hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$.

Mặt khác O là trung điểm IJ nên $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\right)=\vec{0}$ (đpcm).

c) Theo câu b) ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

Do đó với mọi điểm M thì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$ (đpcm).

Câu 73. Cho tứ giác *ABCD*. Hãy xác định vị trí của điểm G sao cho $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Chứng minh với mọi điểm O thì $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$. Điểm G như thế gọi là trọng tâm của tứ giác ABCD

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD

$\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$ và $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$

Do đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}\right)=\vec{0}$

Vậy G là trung điểm của đoạn MN

Ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=2.2\overrightarrow{OG}=4\overrightarrow{OG}$

Vậy $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

Câu 74. Cho hình bình hành ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh

a) Với điểm M bất kì ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

b) $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AC}$

Lời giải.

a) Vì O là trung điểm của AC, BD nên $\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}\\ \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}\end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

b) Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Do đó $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)+2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}$

Câu 75. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Chứng minh rằng $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

Lời giải.

Theo quy tắc ba điểm ta có

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$

Vậy $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ (vì M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD)

Dạng 4. Xác định điểm thỏa mãn đẳng thức véc tơ

* Ta biến đổi đẳng thức véc – tơ về dạng $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$ trong đó điểm A và $\vec{a}$ đã biết. Khi đó tồn tại duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=\vec{a}$, để dựng điểm M ta lấy A làm gốc dựng một véc – tơ bằng véc – tơ $\vec{a}$ suy ra điểm ngọn véc – tơ này chính là điểm M

* Ta biến đổi về đẳng thức véc – tơ đã biết của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng. Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định

- Ba điểm A,B,C thẳng hàng khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

- Hai đường thẳng AB và MN song song khi $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{MN}$ và điểm A không thuộc đường thẳng MN

Chú ý: Việc chọn cơ sở để biểu diễn là 2 véc- tơ cùng gốc và không cùng phương

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 76. Cho tam giác ABC và hai điểm M,N thoả mãn: $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Tìm các bộ ba điểm thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ suy ra B,C,M thẳng hàng;

$\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ suy ra C,N,A thẳng hàng.

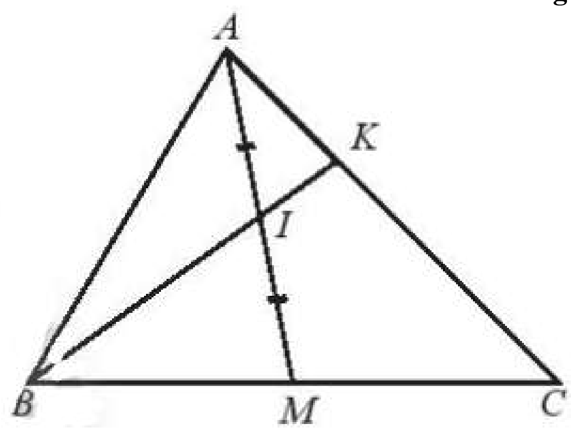
Câu 77. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$.

a) Tính $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.

b) Tính $\overrightarrow{BK}$ theo $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.

c) Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải



a) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ (1)

b) $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (2)

c) Ta có: (1) $\Rightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, (2) $\Rightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$. (3)

Từ (3) ta suy ra ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Chú ý: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mỗi vectơ $\vec{c}$ luôn tồn tại duy nhất cặp số thực $(m;n)$ sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Câu 78. Cho tam giác ABC

a) Xác định các điểm M, N, P thỏa mãn:

$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PA}$

b) Biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$

c) Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng

Lời giải

a) Ta có:

+) $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng; tỉ số độ dài $\frac{BC}{MB} = 2$

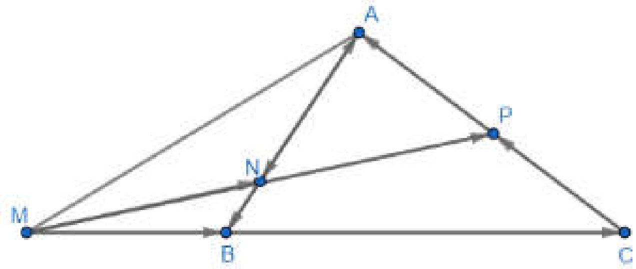
$\Rightarrow M$ nằm ngoài đoạn thẳng BC sao cho $MB = \frac{1}{2}BC$

$\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{NB} \Rightarrow 4\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{NB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow N$ thuộc đoạn thẳng AB và $NB = \frac{1}{4}AB$

+) $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PA} \Leftrightarrow \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} = \vec{0}$

$\Rightarrow P$ là trung điểm của CA



b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})$

$=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

c) Ta có:

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA};\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MN}$

Vậy M,N,P thẳng hàng

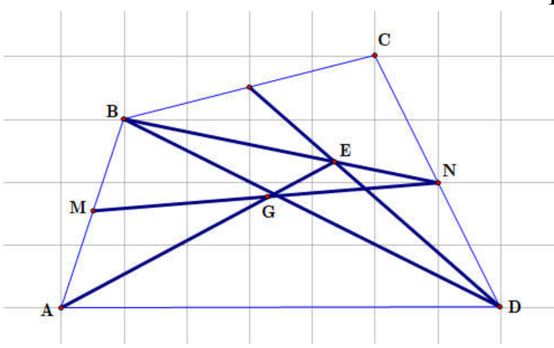
Câu 79. Cho tứ giác $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN,E là trọng tâm tam giác BCD. Chứng minh:

a) $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=4\overrightarrow{EG}$

b) $\overrightarrow{EA}=4\overrightarrow{EG}$

c) Điểm G thuộc đoạn thẳng AE và $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

Lời giải



a)

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GD}$

$=4\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=4\overrightarrow{EG}+\vec{0}=4\overrightarrow{EG}$

b) Vì E là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$, theo câu a) ta được $\overrightarrow{EA}=4\overrightarrow{EG}$

c) Theo câu b) ta suy ra ba điểm E,A,G thẳng hàng và vì $\overrightarrow{EA}=4\overrightarrow{EG}$ nên G thuộc đoạn EA.

Ta có $\overrightarrow{EA}=4\overrightarrow{EG}\Leftrightarrow\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}=4\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EG}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{GE}$ (1)

Từ câu b) ta có $\overrightarrow{AE}=4\overrightarrow{GE}\Rightarrow\overrightarrow{GE}=\frac{\overrightarrow{AE}}{4}$ (2). Lấy (2) thay vào (1) ta được điều phải chứng minh

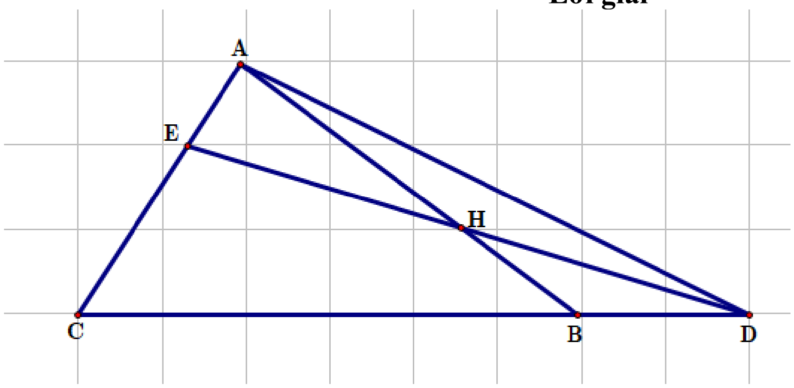
Câu 80. Cho tam giác ABC. Các điểm D,E,H thoả mãn

$\overrightarrow{DB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$

a) Biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{HE}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh D, E, H thẳng hàng.

Lời giải



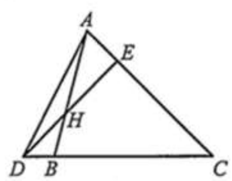
a) Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{4\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}{3}$

Ta có $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Ta có $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) Ta thấy $\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{HE}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, nên 3 điểm D, E, H thẳng hàng.

Câu 81. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E, H thoả mãn $\overrightarrow{DB}=\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ (Hình 47)



Hình 47

a) Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{HE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng ba điểm D, H, E thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có:

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\left(\frac{6}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{-8}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

b) Từ các đẳng thức trên, ta có: $\overrightarrow{HE}=\frac{5}{4}\left(\frac{-8}{15}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{5}{4}\overrightarrow{DH}$.

Vậy hai vectơ $\overrightarrow{HE}, \overrightarrow{DH}$ cùng phương nên D, H, E thẳng hàng.

Nhận xét: Nếu bỏ câu a) thì việc chứng minh câu b) trở nên khó khăn.
Khi đó, ta chuyển bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng về bài toán chứng minh hai vectơ cùng phương, chuyển bài toán chứng minh hai vectơ cùng phương về bài toán biểu diễn hai vectơ theo hai vectơ (không cùng phương) cho trước.

Câu 82. Cho hình bình hành $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P thoả mãn $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NP}$ theo các vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})$,

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{-3}{10}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$,

$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{5}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{-1}{5}\vec{a}+\frac{2}{15}\vec{b}$

Suy ra $\overrightarrow{NP}=\frac{2}{3}\left(\frac{-3}{10}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}$. Vậy M, N, P thẳng hàng.

Câu 83. Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E, M, N thoả mãn $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{AM}$ với k là số thực. Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EN}$ theo các vectơ $\vec{a}=\overrightarrow{AB}, \vec{b}=\overrightarrow{AC}$ và tìm k để ba điểm D, E, N thẳng hàng.

Lời giải

$\overrightarrow{AN}=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})=k\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)=k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{2k}{3}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}$,

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$,

$\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AN}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{2k}{3}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}-\frac{2}{5}\vec{b}=\frac{2k}{3}\vec{a}+\frac{5k-6}{15}\vec{b}$.

Ba điểm phân biệt D, E, N thẳng hàng khi và chỉ khi có số thực t thoả mãn

$\overrightarrow{EN}=t\overrightarrow{DE} \Leftrightarrow \frac{2k}{3}\vec{a}+\frac{5k-6}{15}\vec{b}=t\left(-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{2k}{3}+\frac{t}{3}\right)\vec{a}=-\left(\frac{5k-6}{15}-\frac{2t}{5}\right)\vec{b}.$

Vì $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và không cùng phương nên $\frac{2k}{3}+\frac{t}{3}=\frac{5k-6}{15}-\frac{2t}{5}=0$. Suy ra $k=\frac{6}{17}$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 84. Cho tam giác ABC

a) Với M là điểm bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) Gọi D là điểm sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$. CD cắt AB tại K. Chứng minh $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CK}$

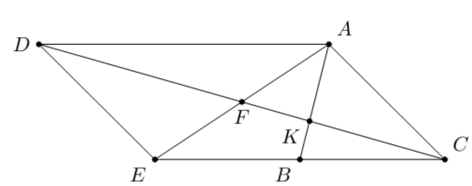
Lời giải.

a) Ta có $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

$=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right)+2\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}\right)-3\overrightarrow{MC}$

$=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CB}$ (không đổi vì A, B, C cố định)

Do đó $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M



b) Gọi E là điểm đối xứng của C qua B, ta có $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{CB}$

Với $\overrightarrow{CD}=\vec{v}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}$ nên ACED là hình bình hành

Gọi F là trung điểm của AE, K là trọng tâm của ΔACE

Ta có $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CF}=2.\frac{3}{2}.\overrightarrow{CK}=3\overrightarrow{CK}$

Câu 85. Cho tam giác ABC cố định và điểm M di động. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

$\vec{v}=\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}-5\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right)+4\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}\right)-5\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+4\overrightarrow{CB}$

Vì A, B, C cố định nên $\vec{v}$ không đổi

Vậy $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Câu 86. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M. Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{CD}=\vec{v}$

Lời giải.

Ta có $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CO}$

(Với O là trung điểm của AB)

Vậy $\vec{v}=2\overrightarrow{CO}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Vì $\overrightarrow{CD}=\vec{v}=2\overrightarrow{CO}$ nên D là điểm đối xứng của C qua O

Câu 87. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

$\vec{v}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

Vậy $\vec{v}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Câu 88. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Chứng minh rằng $\vec{v}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Lời giải.

Gọi O là tâm hình vuông

Theo quy tắc ba điểm ta có

$\vec{v}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)-2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)+3\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}\right)-2\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}\right)$

$=\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OD}$

Mà $\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}\Rightarrow\vec{v}=-2\overrightarrow{OA}$

Suy ra $\vec{v}=\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M

Câu 89. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau

Lời giải.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC suy ra $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{ID};\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{JB}$

Do đó $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{ID}\Leftrightarrow\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JI}\Leftrightarrow\overrightarrow{IJ}=\vec{0}$ hay I trùng với J

Câu 90. Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' là các điểm xác định bởi $2011\overrightarrow{A'B}+2012\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$, $2011\overrightarrow{B'C}+2012\overrightarrow{B'A}=\vec{0}$; $2011\overrightarrow{C'A}+2012\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$. Chứng minh hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Ta có $2011\overrightarrow{A'B}+2012\overrightarrow{A'C}=\vec{0}\Leftrightarrow2011\left(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}\right)+2012\left(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4023\overrightarrow{A'A}+2011\overrightarrow{AB}+2012\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Tương tự ta có $4023\overrightarrow{B'B}+2011\overrightarrow{BC}+2012\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

$4023\overrightarrow{C'C}+2011\overrightarrow{CA}+2012\overrightarrow{CB}=\vec{0}$

Cộng về với vế lại ta được

$4023\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}\right)+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}\Rightarrow \overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$

Do đó G là trọng tâm của tam giác A'B'C'

Câu 91. Hai tam giác ABC và A'B'C' lần lượt có trọng tâm là G, G'. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=3\overrightarrow{GG'}$. Từ đó suy ra " Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}$ (1)

$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}$ (2)

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}$ (3)

Cộng vế với vế ta được

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}\right)=3\overrightarrow{GG'}$

Vì G, G' là trọng tâm của tam giác ABC, $A'B'C'$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}\\ \overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}=\vec{0}\end{cases}$.

Từ đẳng thức trên ta thấy G trùng G' khi và chỉ khi $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$ tức là $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$.

Câu 92. Cho tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua B, B' là điểm đối xứng với B qua C và C' là điểm đối xứng với C qua A. Chứng minh rằng các tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CA}=2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$

Vậy hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

Câu 93. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA ta lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{BN}{BC}=\frac{CP}{CA}$. Chứng minh rằng hai tâm giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

Lời giải

Giả sử $\frac{AM}{AB}=k$ suy ra $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{CA}$.

Cách 1. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của ΔABC và ΔMNP.

Suy ra $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{MG'}+\overrightarrow{NG'}+\overrightarrow{PG'}=\vec{0}$ $(*)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'M}=k\overrightarrow{AB}$.

Tương tự $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'N}=k\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'M}=k\overrightarrow{BC}$.

Cộng vế theo vế từng đẳng thức trên ta được

$\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)+3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{G'M}+\overrightarrow{G'N}+\overrightarrow{G'P}\right)=k\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$.

Kết hợp với $(*)$ ta được $\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

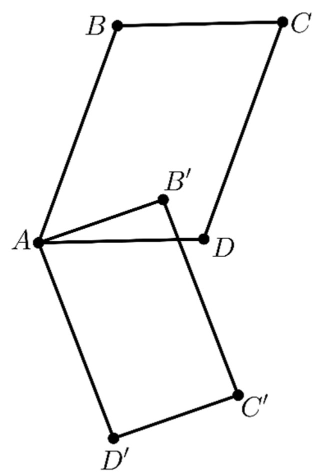
Cách 2. Gọi G là trọng tâm của ΔABC suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ta có
$$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}$$
$$=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$$
$$=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{BC}+k\overrightarrow{CA}$$
$$=k\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)$$
$$=\vec{0}$$

Vậy hai tam giác ABC và NMP có cùng trọn tâm.

Câu 94. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ có cùng trọng tâm

Lời giải



Gọi G là trọng tâm tam giác $BC'D$ suy ra

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD'}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$. (1)

Mặt khác theo quy tắc phép trừ và hình bình hành ta có

$\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'}\right)+\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD'}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'}\right)+\overrightarrow{AC'}$

$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC'}$

$=\vec{0}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD'}=\vec{0}$ hay G là trọng tâm tam giác $B'CD'$

Câu 95. Cho tứ giác $ABCD$ có trọng tâm G. Gọi G_1,G_2,G_3,G_4 lần lượt là trọng tâm các tam giác $\Delta ABC,\ \Delta BCD,\Delta CDA,\Delta DAB$. Chứng minh rằng G cùng là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4$

Lời giải

Ta cần chứng minh

$\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GG_2}+\overrightarrow{GG_3}+\overrightarrow{GG_4}=\vec{0}.$ (*)

Vì G_1 là trọng tâm ΔABC nên

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GG_1}$.

Tương tự

$$\begin{cases}\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{GG_2}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{GG_3}\\ \overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{GG_4}.\end{cases}$$

Do đó

(*) $\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (đpcm).

Câu 96. Cho tứ giác $ABCD$. Các điểm M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của AB,BC,CD và DA. Chứng minh rằng hai tam giác ANP và CMQ có cùng trọng tâm.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ANP.

Ta có

$\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PQ}$

$=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}\right)+\left(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{PQ}\right)+\overrightarrow{AC}$

$=\vec{0}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$

$=\vec{0}$.

Vậy G cũng là trọng tâm của tam giác CMQ.

Câu 97. Cho điểm G là trọng tâm tứ giác $ABCD$ và A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, ACD, ABD và ABC.

a. Chứng minh rằng G là điểm chung của các đoạn thẳng AA', BB', CC' và DD'.

b. Điểm G chia các đoạn thẳng AA', BB', CC' và DD' theo các tỉ số nào?

c. Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm của tứ giác $A'B'C'D'$.

Lời giải

a. Vì G là trọng tâm tứ giác $ABCD$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Mà A' là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{GA'}$

Do đó $\overrightarrow{GA}=-3\overrightarrow{GA'}$ nên G, A và A' thẳng hàng

Chứng minh tương tự

$\overrightarrow{GB}=-3\overrightarrow{GB'}$, $\overrightarrow{GC}=-3\overrightarrow{GC'}$, $\overrightarrow{GC}=-3\overrightarrow{GC'}$, $\overrightarrow{GD}=-3\overrightarrow{GD'}$

Nên G, B, B' thẳng hàng; G, C, C' thẳng hàng; G, D, D' thẳng hàng.

Vậy G là điểm chung của bốn đoạn AA', BB', CC' và DD'.

b. Từ kết quả trên ta có điểm G chia các đoạn AA', BB', CC' và DD' theo tỉ số $k=-3$.

c. Ta có

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-3\left(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{GD'}\right)=\vec{0}$

Nên $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{GD'}=\vec{0}$.

Vậy G cũng là trọng tâm của tứ giác $A'B'C'D'$.

Câu 98. Cho điểm O cố định và đường thẳng d đi qua hai điểm A,B cố định. Chứng minh rằng điểm M thuộc dường thẳng d khi và chỉ khi có số α sao cho $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB}$. Với điều kiện nào của α thì M thuộc đoạn thẳng AB?

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OM}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\alpha\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)+\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}=\alpha\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow M\in d$

Vì $\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BA}$ nên M thuộc đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $0\le\alpha\le 1$

Câu 99. Cho tam giác ABC. Điểm I trên cạnh AC sao cho $CI=\frac{1}{4}CA$, J là điểm mà $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ b) Chứng minh B,I,J thẳng hàng

Lời giải

a) $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

b) $\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}=\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Vậy $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$. Suy ra ba điểm B,I,J thẳng hàng

Câu 100. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O, H là trực tâm của tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O.

a) Chứng minh tú giác $HCDB$ là hình bình hành

b) Chứng minh $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$; $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$. Suy ra ba điểm O,H,G thẳng hàng (G là trọng tâm tam giác ABC)

Lời giải

a) Vì AD là đường kính của đường tròn tâm O nên $BD\perp AB, DC\perp AC.$ Ta có:

$$\begin{cases}CH\perp AB\\BH\perp AC\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}CH//BD\\BH//DC\end{cases}$$

Vậy tứ giác $HCDB$ là hình bình hành.

b) Vì $HCDB$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$

Do đó, $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$

Theo quy tắc ba điểm:

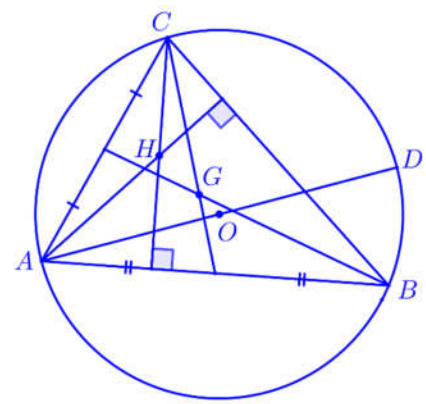
$\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{HO}$

Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}\Rightarrow\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

Vậy ba điểm O, H, G thẳng hàng.



Câu 101. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK=\frac{1}{3}AC.$ Chứng minh ba điểm B,I,K thẳng hàng.

Lời giải

Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{BA};\vec{v}=\overrightarrow{BC}$, ta có:

$\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}$

$=\vec{u}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$=\vec{u}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)$

$=\vec{u}+\frac{1}{3}\left(\vec{v}-\vec{u}\right)=\frac{2}{3}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

Và

$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

Do đó $3\overrightarrow{BK}=4\overrightarrow{BI}$ nên $\overrightarrow{BK}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$

Vậy ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Câu 102. Cho tam giác ABC. Dựng $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$. Chứng minh các đường thẳng AA', BB' và CC' đồng quy.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$ nên tứ giác $ACBC'$ là hình bình hành.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$.

$\Rightarrow A$ là trung điểm của $B'C'$

Vì tứ giác $ACBC'$ là hình bình hành nên CC' chứa trung tuyến của tam giác ABC xuất phát từ đỉnh C.

Tương tự với AA', BB', do đó AA', BB', CC' đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.

Câu 103. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý không thuộc các đường thẳng AB, BC, CA. Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua trung điểm I, K, J của các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng

a) Ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy

b) Đường thẳng MM_1 luôn đi qua một điểm cố định khi M di động

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{KJ}$ và $\overrightarrow{B'A'} = 2\overrightarrow{KJ} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$

Vậy $ABB'A'$ là hình bình hành, nên AA' và BB' cắt nhau tại trung điểm chung M_1 của chúng.

Tương tự, BB' và CC' cũng cắt nhau tại trung điểm chung M_1 của chúng.

b) Ta có $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'}$ và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = 2\overrightarrow{MM_1}$

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MM_1} = 3\overrightarrow{MG}$ (G là trọng tâm ΔABC) hay $\overrightarrow{MM_1} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$

Nên M, M_1, G thẳng hàng. Vậy đường thẳng MM_1 luôn đi qua điểm G cố định khi M di động.

Câu 104. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, BC, CA sao cho $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB},\ \overrightarrow{NB} = n\overrightarrow{NC},\ \overrightarrow{PC} = p\overrightarrow{PA}$ (m, n, p đều khác 1). Chứng minh rằng:

a) M, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi $mnp = 1$ (định lý Mê-nê-la-uýt)

b) AN, CM, BP đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi $mnp = -1$ (định lý Xê-va)

Lời giải

a) Ta chọn gốc C. Theo giả thiết thì có

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} - m\overrightarrow{CB}}{1-m};\ \overrightarrow{CN} = \frac{\overrightarrow{CB}}{1-n};\ \overrightarrow{CP} = \frac{-p\overrightarrow{CA}}{1-p}.$$

Nên $\overrightarrow{CB} = (1-n)\overrightarrow{CN};\ \overrightarrow{CA} = \frac{p-1}{p}\overrightarrow{CP}$

Do đó $\overrightarrow{CM} = \frac{p-1}{p(1-m)}\overrightarrow{CP} - \frac{m(1-n)}{1-m}\overrightarrow{CN}$.

Điều kiện cần và đủ để ba điểm M, N, P thẳng hàng là

$$\frac{p-1}{p(1-m)} - \frac{m(1-n)}{1-m} = 1 \Leftrightarrow p - 1 - pm(1-n) = p(1-m) \Leftrightarrow mnp = 1.$$

b) Ta chuyển về điều kiện thẳng hàng ở trên và điều kiện cùng phương.

Câu 105. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $MN // AC$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

hay $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MN}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

nên $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}$

Do đó $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$.

mà M không thuộc đường thẳng AC nên $MN\,//\,AC$.

Câu 106. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DE. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của các đoạn $MP\,\&\,NQ$. Chứng minh $IJ\,//\,AE\;\&\;IJ=\dfrac{1}{4}AE$.

Lời giải

Ta có: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD})+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

Do đó: $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$

Vậy: $IJ\,//\,AE$ và $IJ=\dfrac{1}{4}AE$

Câu 107. Trên các cạnh AB,BC,CA của tam giác ABC lấy các điểm tương ứng $C_1;A_1;B_1$ sao cho $AC_1:C_1B=BA_1:A_1C=CB_1:B_1A=\dfrac{1}{k}$. Trên các cạnh $A_1B_1;B_1C_1;C_1A_1$ của tam giác $A_1B_1C_1$ lấy các điểm tương ứng $C_2;A_2;B_2$ sao cho $A_1C_2:C_2B_1=B_1A_2:A_2C_1=C_1B_2:B_2A_1=k$. Chứng minh rằng: $A_2C_2\,//\,AC;C_2B_2\,//\,CB;B_2A_2\,//\,BA$.

Lời giải

Lấy điểm O bất kì làm gốc, đặt: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}\\ \overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{b_1},\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{c_1}\\ \overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{a_2},\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{b_2},\overrightarrow{OC_2}=\overrightarrow{c_2}\end{cases}$

Theo giả thiết, ta có $(k>0)$: $\begin{cases}\overrightarrow{c_1}=\dfrac{\vec{b}+k\vec{a}}{1+k},\overrightarrow{a_1}=\dfrac{\vec{c}+k\vec{b}}{1+k},\overrightarrow{b_1}=\dfrac{\vec{a}+k\vec{c}}{1+k}\\ \overrightarrow{a_2}=\dfrac{\overrightarrow{b_1}+k\overrightarrow{c_1}}{1+k},\overrightarrow{b_2}=\dfrac{\overrightarrow{c_1}+k\overrightarrow{a_1}}{1+k},\overrightarrow{c_2}=\dfrac{\overrightarrow{a_1}+k\overrightarrow{b_1}}{1+k}\end{cases}$

Do đó:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_2C_2}=\overrightarrow{c_2}-\overrightarrow{a_2}&=\frac{1}{1+k}\left[(\overrightarrow{a_1}+k\overrightarrow{b_1})-(\overrightarrow{b_1}+k\overrightarrow{c_1})\right]\\&=\frac{1}{k+1}\left[\overrightarrow{a_1}+(k-1)\overrightarrow{b_1}-k\overrightarrow{c_1}\right]\\&=\frac{1}{(k+1)^2}\left[\vec{c}+k\vec{b}+(k-1)\vec{a}+k(k-1)\vec{c}-k\vec{b}-k^2\vec{a}\right]\\&=\frac{1}{(k+1)^2}\left[\left(k^2-k+1\right)\vec{c}-\left(k^2-k+1\right)\vec{a}\right]\\&=\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}(\vec{c}-\vec{a})\\&=\frac{k^2-k+1}{(k+1)^2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Vì $k^2-k+1>0$ nên $A_2C_2\,//\,AC$.

Chứng minh tương tự ta được $C_2B_2 // CB; B_2A_2 // BA$.

Câu 108. Cho ba dây cung song song $AA_1; BB_1; CC_1$ của đường tròn (O). Chứng minh rằng trực tâm của tam giác $ABC_1; BCA_1$ & CAB_1 nằm trên một đường tròn.

Lời giải

Gọi $H_1; H_2; H_3$ lần lượt là trực tâm của ba tam giác $ABC_1; BCA_1; CAB_1$. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1} \\ \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1} \\ \overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1} \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{AA_1} \\ \overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{OH_3} - \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{BB_1} \end{cases}$

Vì các dây cung $AA_1; BB_1; CC_1$ song song với nhau nên ba vecto $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ cùng phương. Do đó hai vecto $\overrightarrow{H_1H_2}; \overrightarrow{H_1H_3}$ cùng phương, hay ba điểm $H_1; H_2; H_3$ thẳng hàng.

Dạng 5. Tìm tập hợp điểm thỏa một hệ thức vectơ

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 109. Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

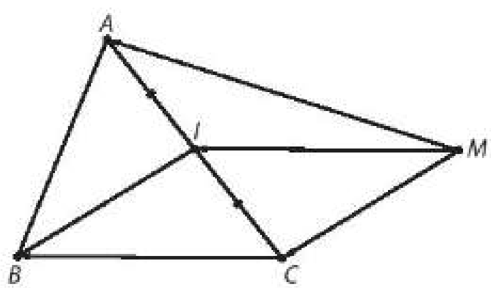
b) Tìm tập hợp các điểm N thoả mãn $|\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC}| = 4|\overrightarrow{NB}|$.

Lời giải

a) Giả sử tìm được điểm M thoả mãn (H.4.9a). Khi đó, với / là trung điểm AC, ta có

$\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) - 2(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{CB})$.

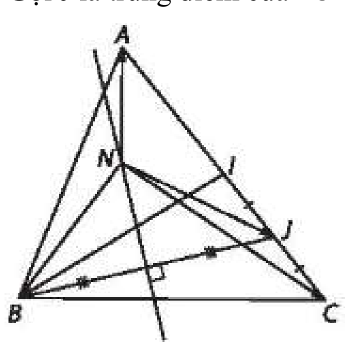
Khi đó $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{CB}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \overrightarrow{CB}$.



Do B, C, I không cùng thuộc một đường thẳng, nên điều này tương đương với tứ giác BCMI là một hình bình hành.

Vậy điểm M cần tìm là đỉnh thứ tư của hình bình hành dựng trên hai cạnh BC, BI tức là M đối xứng với B qua trung điểm của IC.

b) Gọi J là trung điểm của IC



Khi đó $JA = 3JC$ và do đó $\overrightarrow{JA} = -3\overrightarrow{JC}$.

Từ đó suy ra

$\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}=(\overrightarrow{NJ}+\overrightarrow{JA})+3(\overrightarrow{NJ}+\overrightarrow{JC})=4\overrightarrow{NJ}$.

Do đó $|\overrightarrow{NA}+3\overrightarrow{NC}|=4|\overrightarrow{NB}| \Leftrightarrow 4|\overrightarrow{NJ}|=4|\overrightarrow{NB}|$

$\Leftrightarrow |\overrightarrow{NJ}|=|\overrightarrow{NB}|$,

tức là N thuộc trung trực của đoạn JB.

Vậy tập hợp các điểm N cần tìm là đường trung trực của đoạn JB.

Câu 110. Cho tam giác ABC.

a) Tìm điểm K thoả mãn $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

b) Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|$.

Lời giải

a) Giả sử tìm được điểm K thoả mãn $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Gọi I là trung điểm của AC, gọi J là trung điểm của BC. Khi đó

$\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KC})+2(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC})=2\overrightarrow{KI}+4\overrightarrow{KJ}$ (1)

Lấy điểm L thuộc đoạn IJ sao cho $LI=2LJ$. Khi đó, theo kết quả Ví dụ 2, ta được $\overrightarrow{LI}+2\overrightarrow{LJ}=\vec{0}$. Suy ra $\overrightarrow{KI}+2\overrightarrow{KJ}=3\overrightarrow{KL}$. Từ đó và (1) suy ra $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ $\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{KI}+2\overrightarrow{KJ})=\vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{KL}=\vec{0}$, điều này tương đương với $K\equiv L$.

b) Với mỗi điểm M ta có $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CB}$. (2)

Theo kết quả phần a), $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{ML}$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra

$|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 6|\overrightarrow{ML}|=|\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow LM=\dfrac{BC}{6}$.

Từ đó suy ra tập hợp tất cả các điểm M cần tìm là đường tròn tâm L, bán kinh bằng $\dfrac{BC}{6}$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 111. Cho điểm O cố định và hai vecto $\vec{u},\vec{v}$ cố định. Với mỗi số m ta xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=m.\vec{u}+(1-m)\vec{v}$. Tìm tập hợp các điểm M khi m thay đổi.

Lời giải

Ta có:

$\overrightarrow{OM}=m\vec{u}+(1-m)\vec{v}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}+(1-m)\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OB}=m(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}=m\overrightarrow{BA}$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng BC.

Câu 112. Cho hai điểm A,B. Tập hợp các điểm M sao cho

a) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$. b) $|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}|$

Lời giải

a) Ta có: $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow 2MI=AB \Leftrightarrow MI=\dfrac{AB}{2}$ (với I là trung điểm của AB).

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{AB}{2}$, với I là trung điểm AB.

b) Gọi K là điểm thoả mãn $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}; L$ là điểm thoả mãn $\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$.

Ta có: $|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow \overrightarrow{MK}=\overrightarrow{ML}$

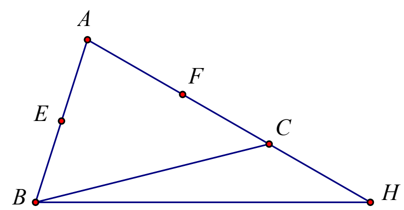
Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn KL.

Câu 113. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right)$, với k là số thực thay đổi khác 0.

Lời giải



Gọi E,F lần lượt là trung điểm AB,AC suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{ME}$ và $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MF}$

Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow \left|2\overrightarrow{ME}\right|=\left|2\overrightarrow{MF}\right| \Leftrightarrow ME=MF$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực EF.

a) Ta có

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{HB}$ (với H là điểm thỏa mãn $,\overrightarrow{AH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$)

Suy ra $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}=2k\overrightarrow{HB} \Leftrightarrow \overrightarrow{ME}=k\overrightarrow{HB}$.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB.

Câu 114. Cho tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm I thoả $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

b) Tìm quỹ tích điểm thoả mãn $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right|$.

Lời giải

a) Ta có $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)+4\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=-\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}}{9}$

suy ra I tồn tại và duy nhất.

b) Với I là điểm được xác định ở câu a), ta có

$2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=9\overrightarrow{MI}+\left(2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}\right)=9\overrightarrow{MI}$

và $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AB}$ nên $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right| \Leftrightarrow \left|9\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow MI=\frac{AB}{9}$.

Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính $\frac{AB}{9}$.

Câu 115. Cho ΔABC. Tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

a) $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right|$.

b) $\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$

Lời giải

a) Gọi K là điểm thoả $2\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{KB}=\vec{0}, L$ là điểm thoả mãn $3\overrightarrow{LB}+2\overrightarrow{LC}=\vec{0}$.

Ta có: $\left|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right| \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MK}\right|=\left|\overrightarrow{ML}\right|$.

Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn KL.

b) Với I là trung điểm BC. Gọi J là điểm thoả $4\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Ta có:

$$\left|4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|6\overrightarrow{MJ}\right|=\left|2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MI}\right|\Leftrightarrow\left|6\overrightarrow{MJ}\right|=\left|2\overrightarrow{IA}\right|\Leftrightarrow MJ=\frac{1}{3}IA.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn tâm J bán kính $R=\frac{1}{3}IA.$

Câu 116. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$

b) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$

c) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|.$

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow B\equiv A$ trái với giả thiết.

Vậy không có điểm M thoả mãn.

b) Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC.

c) Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB,AC ta được:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI};\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MJ}$

Nên $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right|\Leftrightarrow\left|\overrightarrow{MI}\right|=\left|\overrightarrow{MJ}\right|\Leftrightarrow MI=MJ$

Như vậy M cách đều 2 điểm cố định I,J nên tập hợp các điểm M thoả điều kiện đề Câu là đường trung trực của IJ.

Câu 117. Cho tam giác ABC và ba vecto cố định $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$. Với mỗi số thực t, ta lấy các điểm A',B',C' sao cho $\overrightarrow{AA'}=t\vec{u},\overrightarrow{BB'}=t\vec{v},\overrightarrow{CC'}=t\vec{w}$. Tìm quỹ tích trọng tâm G' của tam giác $A'B'C'$ khi t thay đổi.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì

$$\begin{aligned}3\overrightarrow{GG'}&=\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CC'}\\&=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=t\vec{u}+t\vec{v}+t\vec{w}\\&=t\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right)\end{aligned}$$

Đặt $\vec{\alpha}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ thì vecto α xác định và $\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}t\vec{\alpha}$

Suy ra nếu $\vec{\alpha}=\vec{0}$ thì các điểm G' trùng với điểm G, còn nếu $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$ thì quỹ tích các điểm G' là đường thẳng đi qua G và song song với giá của vecto $\vec{\alpha}$.

Câu 118. Cho tứ giác $ABCD$. Với số k tuỳ ý, lấy các điểm M,N sao cho $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DN}=k\overrightarrow{DC}$. Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn MN khi k thay đổi.

Lời giải

Gọi O,O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'B};\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'C}.$

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{OO'}$

Tương tự vì O,I lần lượt là trung điểm của $AD\,\&\,MN$ nên $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{OI}$

Do đó $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{DC}\right)=k\overrightarrow{OO'}$ Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO'.

Dạng 6. Bài toán thực tế

Câu 119. Máy bay A bay với tốc độ $a\,km/h$, máy bay B bay ngược hướng và có tốc độ gấp năm lần máy bay A. Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B theo vectơ vận tốc $\vec{a}$ của máy bay A.

Lời giải

Vectơ vận tốc của máy bay B là: $\vec{b}=-5\vec{a}$.

Câu 120. Máy bay A bay với vận tốc $\vec{a}$, máy bay B bay cùng hướng và có tốc độ chỉ bằng một nửa máy A. Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B theo vectơ vận tốc $\vec{a}$ của máy bay A.

Lời giải

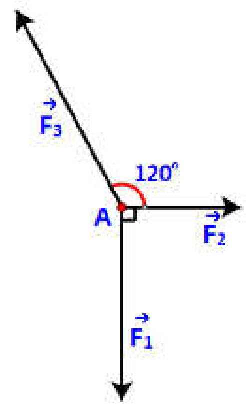
Vectơ vận tốc của máy bay B là: $\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}$.

Câu 121. Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ A đến B với tốc độ là $9m/s$ và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ B đến A với tốc độ là $6m/s$. Gọi $\vec{v}_1,\vec{v}_2$ lần lượt là các vectơ vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực k thoả mãn $\vec{v}_1=k\vec{v}_2$?

Lời giải

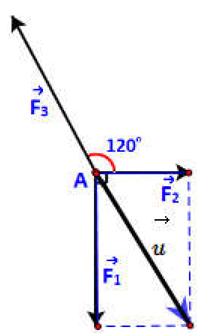
Do tỉ số tốc độ của vật thứ nhất và vật thứ hai là $\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$ đồng thời hai vật chuyển động ngược hướnng nên hai vectơ vận tốc ngược hướng. Suy ra $\vec{v}_1=\frac{-3}{2}\vec{v}_2$. Vậy $k=\frac{-3}{2}$.

Câu 122. Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ như hình và ở trạng thái cân bằng (tức là $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ biết $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là $20N$.



Lời giải

Bước 1: Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$. Ta xác định các điểm như hình dưới.



Dễ dàng xác định điểm C, là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCD$. Do đó vecto $\vec{u}$ chính là vecto $\overrightarrow{AC}$

Vì chất điểm A ở trang thái cân bằng nên $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$ hay

$\vec{u}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}$ và $\overrightarrow{F_3}$ là hai vecto đối nhau.

$\Leftrightarrow A$ là trung điểm của EC.

Bước 2:

Ta có: $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=AD=20,\left|\overrightarrow{F_2}\right|=AB,\left|\overrightarrow{F_3}\right|=AC$

Do A,C,E thẳng hàng nên $\widehat{CAB}=180^{\circ}-\widehat{EAB}=60^{\circ}$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow \begin{cases} AC = \dfrac{AD}{\cos 30^\circ} = \dfrac{40\sqrt{3}}{3} \\ AB = DC = AC \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{20\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Vậy $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}, \left|\overrightarrow{F_3}\right| = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.

Câu 123. Một vật đồng chất được thả vào một cốc chất lỏng. Ở trạng thái cân bằng, vật chìm một nửa thể tích trong chất lỏng. Tìm mối liên hệ giữa trọng lực $\vec{P}$ của vật và lực đẩy Archimedes $\vec{F}$ mà chất lỏng tác động lên vật. Tính tỉ số giữa trọng lượng riêng của vật và của chất lỏng.

Lời giải

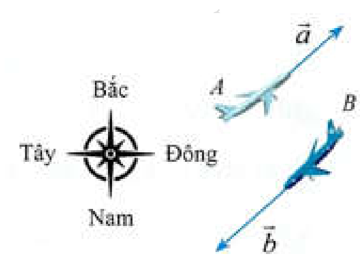
Lực đẩy Archimedes $\overrightarrow{F_A}$ và trọng lực $\vec{P}$ đều tác động lên vật theo phương thẳng đứng, hai lực này ngược hướng. Do ở trạng thái cân bằng vật nổi (chìm một nửa), nên hai lực này có cường đọ bằng nhau.

Gọi d, d' tương ứng là trọng lượng riêng của vật và trọng lượng riêng của chất lỏng: gọi V là thể tích của vật. Khi đó trọng lượng của vật bằng $P = |\vec{P}| = dV$. (1)

Lực đẩy Archimedes tác động lên vật có cường độ bằng $F_A = \left|\overrightarrow{F_a}\right| = d' \cdot \dfrac{V}{2}$. (2)

Từ (1) và (2), để ý rằng $P = F_A$, suy ra $\dfrac{d}{d'} = 2$.

Câu 124. Máy bay A đang bay về hướng Đông Bắc với tốc độ $600 km/h$. Cùng lúc đó, máy bay B đang bay về hướng Tây Nam với tốc độ $800 km/h$. Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay B theo vectơ vận tốc $\vec{a}$ của máy bay A



Lời giải

Vecto $\vec{a}, \vec{b}$ là vecto vận tốc của máy bay A và máy bay b.

Do đó $|\vec{a}|, |\vec{b}|$ lần lượt là độ lớn của vecto vận tốc tương ứng.

Ta có: $|\vec{a}| = 600, |\vec{b}| = 800 \Rightarrow \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \dfrac{800}{600} = \dfrac{4}{3}$

Hai hướng Đông Bắc và Tây Nam là ngược nhau, do đó $\vec{b} = -\dfrac{4}{3}\vec{a}$