

# BÀI 10. TÍCH VECTOR VỚI MỘT SỐ

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Tích của một vector với một số

Cho số  $k$  khác 0 và vector  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$ . Tích của số  $k$  với vector  $\vec{a}$  là một vector, kí hiệu là  $k\vec{a}$ . Vector  $k\vec{a}$  cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k| \cdot |\vec{a}|$ .

Ta quy ước  $0\vec{a} = \vec{0}$  và  $k\vec{0} = \vec{0}$ .

### 2. Các tính chất của phép nhân vector với một số

$$a) (k+m) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a} \quad b) k \cdot (\vec{a} \pm \vec{b}) = k \cdot \vec{a} \pm k \cdot \vec{b}$$

$$b) k \cdot (m \cdot \vec{a}) = (k \cdot m) \cdot \vec{a} \quad d) k \cdot \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ \vec{a} = \vec{0} \end{cases}$$

$$c) 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$$

Chú ý: Cho hai vector không cùng phương  $\vec{a}, \vec{b}$ . Khi đó, mọi vector  $\vec{u}$  đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$ , nghĩa là có duy nhất cặp số  $(x; y)$  sao cho  $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$

### 3. Một số ứng dụng

Nếu  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  thì  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$  với điểm  $M$  bất kì.

Nếu  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$  với điểm  $M$  bất kì.

Điều kiện cần và đủ để hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) cùng phương là có một số thực  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng là có số thực  $k$  để  $\vec{AB} = k\vec{AC}$ .

Nhận xét: Trong mặt phẳng, cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Với mỗi vector  $\vec{c}$  có duy nhất cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .

## B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

### Dạng 1. Xác định điểm $M$ bằng đẳng thức vector

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Cho đoạn thẳng  $AB = 6 \text{ cm}$ .

a) Xác định điểm  $C$  thỏa mãn  $\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ .

b) Xác định điểm  $D$  thỏa mãn  $\vec{AD} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$ .

**Câu 2.** Cho tam giác  $ABC$ . Hãy xác định điểm  $M$  để  $\vec{MA} + 3\vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$ .

**Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Tìm điểm  $M$  sao cho  $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = \vec{0}$ .

b) Xác định điểm  $N$  thỏa mãn  $4\vec{NA} - 2\vec{NB} + \vec{NC} = \vec{0}$ .

**Câu 4.** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Xác định điểm  $M$  sao cho  $\vec{MA} + 4\vec{MB} = \vec{0}$

**Câu 5.** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ . Tìm điểm  $K$  sao cho  $3\vec{KA} + 2\vec{KB} = \vec{0}$ .

**Câu 6.** Cho đoạn thẳng  $AB = 3 \text{ cm}$ . Xác định các điểm  $M, N$  thỏa mãn:  $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB}, \vec{AN} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$

**Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$ . Xác định điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{AM} = 2(\vec{AB} + \vec{AC})$ .

**Câu 8.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Xác định điểm  $M$  thỏa mãn  $3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$

**Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$ . Xác định các điểm  $M, N, P$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$

$$\text{b) } \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

c)  $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 10.** Cho hai điểm A và B. Tìm điểm I sao cho  $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

**Câu 11.** Xác định các điểm I, J, K, L biết

a)  $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

b)  $\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$

c)  $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{BC}$

d)  $2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LB} + 3\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

**Câu 12.** Cho tam giác ABC

a) Tìm điểm K sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$

b) Tìm điểm M sao cho  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

**Câu 13.** Cho tứ giác ABCD. Xác định điểm M, N, P sao cho

a)  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

b)  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

c)  $3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$

**Dạng 2. Phân tích (hay tính) một vector thành tổng, hiệu của các vector khác**

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Nếu hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0})$  cùng hướng và  $|\vec{a}| = m \cdot |\vec{b}|$  thì  $\vec{a} = m\vec{b}$ .

- Nếu hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0})$  ngược hướng và  $|\vec{a}| = m \cdot |\vec{b}|$  thì  $\vec{a} = -m\vec{b}$ .

- Sử dụng định nghĩa, tính chất của các phép toán: phép cộng vector, phép trừ vector, phép nhân một số với một vector.

- Sử dụng tính chất trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác, hình bình hành.

**Câu 14.** Thực hiện các phép toán vector sau:

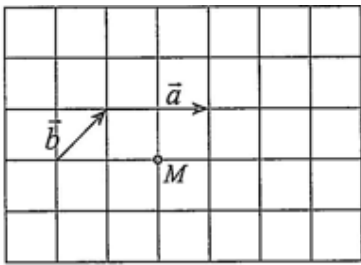
a)  $2(\vec{u} - \vec{v})$

b)  $(a + b)\vec{m}$  ;

c)  $5(-2\vec{e})$ ;

d)  $\vec{c} - 9\vec{c}$  e)  $7\vec{c} - 2\vec{c}$ .

**Câu 15.** Cho hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  và một điểm  $M$  như Hình 3.



**Hình 3**

a) Hãy vẽ các vector  $\overrightarrow{MN} = 2\vec{a}, \overrightarrow{MP} = -2\vec{b}$ .

b) Cho biết mỗi ô vuông có cạnh bằng 1.

Tính:  $|5\vec{a}|, |-5\vec{b}|$ .

**Câu 16.** Cho  $B$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ .

Tìm số  $k$  trong mỗi trường hợp sau:

a)  $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$

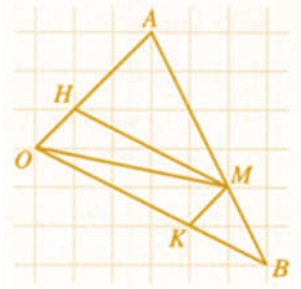
b)  $\overrightarrow{CA} = k \overrightarrow{AB}$

**Câu 17.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm và

$M$  là trung điểm của  $BC$

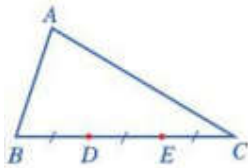
a) Biểu thị  $\overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AM}$ ;

- b) Biểu thị  $\overrightarrow{GA}$  theo  $\overrightarrow{GM}$ .
- Câu 18.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Hãy biểu thị  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AD}$ .
- Câu 19.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E$  tương ứng là trung điểm của  $BC, CA$ . Hãy biểu thị các vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$  theo hai vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BE}$ .
- Câu 20.** Cho tam giác  $OAB$  vuông cân, với  $OA = OB = a$ . Hãy xác định độ dài của các vector sau  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}, 2\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$ .
- Câu 21.** Cho tam giác  $OAB$ . Điểm  $M$  thuộc cạnh  $AB$  sao cho  $AM = \frac{2}{3}AB$ . Kẻ  $MH \parallel OB, MK \parallel OA$

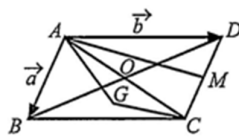


Giả sử  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ .

- a) Biểu thị  $\overrightarrow{OH}$  theo  $\vec{a}$  và  $\overrightarrow{OK}$  theo  $\vec{b}$ .
- b) Biểu thị  $\overrightarrow{OM}$  theo  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- Câu 22.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $D, E$  thuộc cạnh  $BC$  thỏa mãn  $BD = DE = EC$ . Giả sử  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ . Biểu diễn các vector  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$  theo  $\vec{a}, \vec{b}$ .



- Câu 23.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Biểu thị các vector  $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CG}$  theo hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$ .
- Câu 24.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD, M$  là trung điểm của  $CD, G$  là trọng tâm của tam giác  $OBC$  (Hình 46).



Hình 46

- Biểu thị các vector  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CG}$  theo hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$ .
- Câu 25.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và số  $k$  khác 1. Điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ . Với mỗi điểm  $O$ , biểu thị các vector  $\overrightarrow{OM}$  theo hai vector  $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 26.** Cho tam giác  $ABC$ , trên cạnh  $ABC$  lấy  $M$  sao cho  $BM = 3CM$ , trên đoạn  $AM$  lấy  $N$  sao cho  $2AN = 5MN$ .  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .
- a) Phân tích các véc-tơ  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}$  qua các véc-tơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$
- b) Phân tích các véc-tơ  $\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{MN}$  qua các véc-tơ  $\overrightarrow{GA}$  và  $\overrightarrow{GB}$

- Câu 27.** Cho  $\Delta ABC$ . Lấy các điểm  $M, N, P$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$ ,  $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ . Biểu diễn các vector  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{AN}$ ,  $\overrightarrow{AM}$  theo các vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .
- Câu 28.** Cho  $\Delta ABC$ . Đặt  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ .
- a) Hãy dựng các điểm  $M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{BC}$ .
- b) Hãy phân tích  $\overrightarrow{CM}$ ,  $\overrightarrow{AN}$ ,  $\overrightarrow{MN}$  theo các vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .
- Câu 29.** Cho  $\Delta ABC$ . Gọi  $I, J$  là hai điểm được xác định bởi  $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ ,  $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}$ .
- a) Tính  $\overrightarrow{IJ}$  theo  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .
- b) Chứng minh rằng đường thẳng  $IJ$  qua trọng tâm  $G$  của tam giác  $\Delta ABC$ .
- Câu 30.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $E$  là trung điểm của  $CD$ . Hãy biểu diễn  $\overrightarrow{AE}$  theo  $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ .
- Câu 31.** Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\Delta ABC$ . Hãy biểu diễn  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{GC}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CA}$  theo  $\vec{a} = \overrightarrow{GA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{GB}$ .
- Câu 32.** Cho  $\Delta ABC$ . Điểm  $M$  trên cạnh  $BC$  sao cho  $MB = 2MC$ . Hãy phân tích  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vector  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .
- Câu 33.** Cho  $\Delta ABC$ . Điểm  $M$  trung điểm  $AB$  và  $N$  là một điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $NA = 2NC$ . Gọi  $K$  là trung điểm  $MN$ . Phân tích vector  $\overrightarrow{AK}$  theo các vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .
- Câu 34.** Cho tam giác  $OAB$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $OA$ ,  $OB$ . Tìm các số  $m, n$  của mỗi đẳng thức  $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ .
- Câu 35.** Một đường thẳng cắt cạnh  $DA, DC$  và đường chéo  $DB$  của hình bình hành  $ABCD$  lần lượt tại các điểm  $E, F$  và  $M$ . Biết rằng  $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$  ( $m, n > 0$ ). Hãy biểu diễn  $\overrightarrow{DM}$  qua  $\overrightarrow{DB}$  và  $m, n$ .
- Câu 36.** Điểm  $M$  được gọi là điểm chia đoạn thẳng  $AB$  theo tỉ số  $k \neq 1$  nếu  $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$ . Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$  thì  $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1 - k}$ .

### Dạng 3. Chứng minh một đẳng thức vector

Phương pháp:

- Xét hiệu của hai vế.
- Biến đổi từ biểu thức vế này sang vế kia.
- Chứng minh hai biểu thức vector cùng bằng một vector trung gian.
- Chứng minh hai biểu thức vector cùng bằng một biểu thức vector trung gian bằng cách sử dụng quy tắc trừ với điểm đầu là điểm  $O$  bất kì.

### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 37.** Chứng minh rằng hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b} \neq \vec{0}$ ) cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$ .
- Câu 38.** Cho đoạn thẳng  $AB$  có trung điểm  $I$ . Chứng minh rằng với điểm  $O$  tùy ý, ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ .
- Câu 39.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABD$ . Chứng minh rằng:  $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}$ .
- Câu 40.** Cho ba điểm  $A, B, C$ . Chứng minh:
- a)  $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$
- b)  $3(5\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$
- Câu 41.** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chứng minh:
- a)  $\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AN}$
- b)  $\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BA}$

- Câu 42.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ .  
 Chứng minh  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ .
- Câu 43.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  tương ứng là trung điểm của các cạnh  $AB, CD$ . Chứng minh  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
- Câu 44.** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ .  
 a) Hãy xác định điểm  $K$  sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ .  
 b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$ , ta có  $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ .
- Câu 45.** Cho tam giác  $ABC$   
 a) Hãy xác định điểm  $M$  để  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$   
 b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$ , ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$
- Câu 46.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Gọi  $G, G_1, G_2$  theo thứ tự là trọng tâm các tam giác  $ABC, ABM, ACM$ . Chứng minh rằng  $G$  là trung điểm của  $G_1G_2$ .
- Câu 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Trên cạnh  $BC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $BM = 2MC$ .  
 a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .  
 b) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$ .
- Câu 48.** Gọi  $G$  và  $G'$  theo thứ tự là trọng tâm của tam giác  $ABC$  và tam giác  $A'B'C'$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$ .
- Câu 49.** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ , trọng tâm  $G$  và tâm đường tròn ngoại tiếp  $O$ .  
 a) Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ .  
 b) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ .  
 c) Chứng minh rằng ba điểm  $G, H, O$  cùng thuộc một đường thẳng.
- Câu 50.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm các cạnh  $AB, CD$  và gọi  $I$  là trung điểm của  $MN$ . Chứng minh rằng với điểm  $O$  bất kì đều có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OI}$
- Câu 51.** Cho lục giác  $ABCDEF$ . Gọi  $M, N, P, Q, R, S$  theo thứ tự là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DE, EF, FA$ . Chứng minh rằng hai tam giác  $MPR$  và  $NQS$  có cùng trọng tâm.
- Câu 52.** Cho tam giác  $ABC$  đều với trọng tâm  $O$ ,  $M$  là một điểm tùy ý nằm trong tam giác. Gọi  $D, E, F$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $BC, CA, AB$ .  
 Chứng minh rằng  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$ .
- Câu 53.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Với  $M$  là điểm tùy ý, chứng minh rằng:  
 a)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$   
 b)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$
- Câu 54.** Cho tứ giác  $ABCD$  gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $CD$ . Chứng minh rằng  
 a)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$   
 b)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$
- Câu 55.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $E, F, G$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $AB, CD, EF$ . Lấy điểm  $M$  tùy ý, chứng minh rằng:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$
- Câu 56.** Cho 2 điểm phân biệt  $A$  và  $B$   
 a) Xác định điểm  $O$  sao cho  $\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} = \vec{0}$   
 b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $M$ , ta có  $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MO}$
- Câu 57.** Gọi  $AM$  là trung tuyến của tam giác  $ABC$  và  $D$  là trung điểm của đoạn  $AM$ . Chứng minh rằng:

a)  $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

b)  $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$ , với  $O$  là điểm tùy ý.

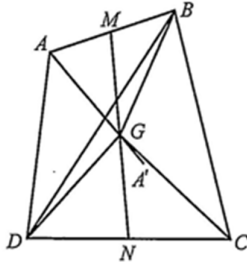
**Câu 58.** Lấy một điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng:

a)  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ .

b)  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .

**Câu 59.** Cho hình bình hành  $ABCD$  và  $M$  là một điểm tùy ý. Chứng minh  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

**Câu 60.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ ,  $A'$  là trọng tâm của tam giác  $BCD$  (Hình 48).



Hình 48

Chứng minh:

a)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$

b)  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

c)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG}$  với  $O$  bất kỳ;

d)  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$

**Câu 61.** Cho tam giác  $ABC$ , kẻ phân giác  $AD$ . Đặt  $AB = b, AC = c$ . Chứng minh:  $b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ .

**Câu 62.** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy các điểm  $A', B', C'$  không trùng với đỉnh của tam giác và lần lượt thuộc các cạnh  $AB, BC, CA$  thỏa mãn  $\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{BC} = \frac{CC'}{CA}$ . Chứng minh hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có cùng trọng tâm.

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 63.** Gọi  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Chứng minh với điểm  $O$  bất kỳ ta có  $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ .

**Câu 64.** Cho đoạn  $AB$  và điểm  $I$  sao cho  $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

a) Tìm số  $k$  mà  $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$ .

b) Chứng minh với mọi điểm  $M$  thì có  $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$ .

**Câu 65.** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ , trọng tâm  $G$  và đường tròn ngoại tiếp  $O$ . Chứng minh rằng

a)  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ .

b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ .

c)  $\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GO} = \vec{0}$ .

**Câu 66.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $H$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $G$  với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

a)  $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

b)  $\overrightarrow{MH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{5}{6}\overrightarrow{AB}$ , với  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

**Câu 67.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Chứng minh

- a) Với mọi điểm  $M$  thì  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ .
- b) Nếu  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$  thì  $M$  là trọng tâm  $G$ .
- Câu 68.** Cho tam giác  $ABC$  có ba trung tuyến  $AM, BN, CP$ . Chứng minh  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ .
- Câu 69.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý.
- a) Hãy xác định các điểm  $D, E, F$  sao cho  $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{CA}$ . Chứng minh rằng các điểm  $D, E, F$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $M$ .
- b) Chứng minh  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$ .
- Câu 70.** Cho tam giác  $ABC$  với cạnh  $AB = c, BC = a, CA = b$ .
- a) Gọi  $CM$  là đường phân giác trong của góc  $C$ . Hãy biểu thị véc-tơ  $\overrightarrow{CM}$  theo các véc-tơ  $\overrightarrow{CA}$  và  $\overrightarrow{CB}$ .
- b) Gọi  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .
- Câu 71.** Cho tam giác  $ABC$  đều, tâm  $O$ . Gọi  $M$  là một điểm tùy ý bên trong tam giác  $ABC$  và  $D, E, F$  lần lượt là hình chiếu của nó trên các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$ .
- Câu 72.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD, O$  là trung điểm của  $IJ$ . Chứng minh rằng
- a)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$ .
- b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .
- c)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$  với  $M$  là điểm bất kỳ.
- Câu 73.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Hãy xác định vị trí của điểm  $G$  sao cho  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ . Chứng minh với mọi điểm  $O$  thì  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ . Điểm  $G$  như thế gọi là trọng tâm của tứ giác  $ABCD$ .
- Câu 74.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh
- a) Với điểm  $M$  bất kỳ ta có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$
- b)  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$
- Câu 75.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB$  và  $CD$ . Chứng minh rằng  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

#### Dạng 4. Chứng minh ba điểm thẳng hàng. Chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định

- Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

- Hai đường thẳng  $AB$  và  $MN$  song song khi  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MN}$  và điểm  $A$  không thuộc đường thẳng  $MN$

**Chú ý:** Việc chọn cơ sở để biểu diễn là 2 véc-tơ cùng gốc và không cùng phương

### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 76.** Cho tam giác  $ABC$  và hai điểm  $M, N$  thỏa mãn:  $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ ;  $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ . Tìm các bộ ba điểm thẳng hàng.
- Câu 77.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AM$  và  $K$  là điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $AK = \frac{1}{3}AC$ .
- a) Tính  $\overrightarrow{BI}$  theo  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ .
- b) Tính  $\overrightarrow{BK}$  theo  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ .
- c) Chứng minh ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.
- Câu 78.** Cho tam giác  $ABC$



a) Xác định các điểm  $M, N, P$  thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AN} = 3 \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PA}$$

b) Biểu thị mỗi vector  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$  theo hai vector  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$

c) Chứng minh ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng

**Câu 79.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $G$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ ,  $E$  là trọng tâm tam giác  $BCD$ . Chứng minh:

a)  $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG}$

b)  $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$

c) Điểm  $G$  thuộc đoạn thẳng  $AE$  và  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AE}$ .

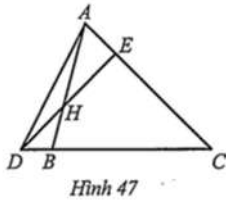
**Câu 80.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $D, E, H$  thỏa mãn

$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}.$$

a) Biểu thị mỗi vector  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{HE}$  theo hai vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

b) Chứng minh  $D, E, H$  thẳng hàng.

**Câu 81.** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy các điểm  $D, E, H$  thỏa mãn  $\overrightarrow{DB} = \frac{1}{5} \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$  (Hình 47)



a) Biểu thị các vector  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{HE}$  theo các vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

b) Chứng minh rằng ba điểm  $D, H, E$  thẳng hàng.

**Câu 82.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Lấy các điểm  $M, N, P$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$ . Đặt  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ . Biểu thị các vector  $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}$  theo các vector  $\vec{a}, \vec{b}$  và chứng minh ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng.

**Câu 83.** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy các điểm  $D, E, M, N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{AN} = k \overrightarrow{AM}$  với  $k$  là số thực. Biểu thị các vector  $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EN}$  theo các vector  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$  và tìm  $k$  để ba điểm  $D, E, N$  thẳng hàng.

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 84.** Cho tam giác  $ABC$

a) Với  $M$  là điểm bất kì. Chứng minh rằng  $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$  không phụ thuộc vào vị trí điểm  $M$

b) Gọi  $D$  là điểm sao cho  $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$ .  $CD$  cắt  $AB$  tại  $K$ . Chứng minh  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CK}$

**Câu 85.** Cho tam giác  $ABC$  cố định và điểm  $M$  di động. Chứng minh rằng  $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $M$

**Câu 86.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  bất kì. Chứng minh rằng  $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $M$ . Đặt điểm  $D$  sao cho  $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$



- Câu 87.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý. Chứng minh rằng  $\vec{v} = \vec{MA} + 2\vec{MB} - 3\vec{MC}$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $M$
- Câu 88.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Chứng minh rằng  $\vec{v} = \vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - 2\vec{MD}$  không phụ thuộc vào vị trí của điểm  $M$
- Câu 89.** Chứng minh rằng  $\vec{AB} = \vec{CD}$  khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng  $AD$  và  $BC$  trùng nhau
- Câu 90.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $A', B', C'$  là các điểm xác định bởi  $2011\vec{A'B} + 2012\vec{A'C} = \vec{0}$ ,  $2011\vec{B'C} + 2012\vec{B'A} = \vec{0}$ ;  $2011\vec{C'A} + 2012\vec{C'B} = \vec{0}$ . Chứng minh hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có cùng trọng tâm.
- Câu 91.** Hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  lần lượt có trọng tâm là  $G, G'$ . Chứng minh rằng  $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = 3\vec{GG'}$ . Từ đó suy ra “Điều kiện cần và đủ để hai tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có cùng trọng tâm là  $\vec{AA'} + \vec{BB'} + \vec{CC'} = \vec{0}$ ”
- Câu 92.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$ ,  $B'$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $C$  và  $C'$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $A$ . Chứng minh rằng các tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  có cùng trọng tâm.
- Câu 93.** Cho tam giác  $ABC$ . Trên các cạnh  $AB, BC, CA$  ta lấy lần lượt các điểm  $M, N, P$  sao cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{CP}{CA}$ . Chứng minh rằng hai tam giác  $ABC$  và  $MNP$  có cùng trọng tâm.
- Câu 94.** Cho hai hình bình hành  $ABCD$  và  $AB'C'D'$  có chung đỉnh  $A$ . Chứng minh rằng hai tam giác  $BC'D$  và  $B'CD'$  có cùng trọng tâm
- Câu 95.** Cho tứ giác  $ABCD$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $G_1, G_2, G_3, G_4$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ . Chứng minh rằng  $G$  cũng là trọng tâm tứ giác  $G_1G_2G_3G_4$
- Câu 96.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Các điểm  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD$  và  $DA$ . Chứng minh rằng hai tam giác  $ANP$  và  $CMQ$  có cùng trọng tâm.
- Câu 97.** Cho điểm  $G$  là trọng tâm tứ giác  $ABCD$  và  $A', B', C', D'$  lần lượt là trọng tâm các tam giác  $BCD, ACD, ABD$  và  $ABC$ .
- Chứng minh rằng  $G$  là điểm chung của các đoạn thẳng  $AA', BB', CC'$  và  $DD'$ .
  - Điểm  $G$  chia các đoạn thẳng  $AA', BB', CC'$  và  $DD'$  theo các tỉ số nào?
  - Chứng minh rằng  $G$  cũng là trọng tâm của tứ giác  $A'B'C'D'$ .
- Câu 98.** Cho điểm  $O$  cố định và đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $A, B$  cố định. Chứng minh rằng điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $d$  khi và chỉ khi có số  $\alpha$  sao cho  $\vec{OM} = \alpha\vec{OA} + (1-\alpha)\vec{OB}$ . Với điều kiện nào của  $\alpha$  thì  $M$  thuộc đoạn thẳng  $AB$ ?
- Câu 99.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $I$  trên cạnh  $AC$  sao cho  $CI = \frac{1}{4}CA$ ,  $J$  là điểm mà  $\vec{BJ} = \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{AB}$ .
- Chứng minh  $\vec{BI} = \frac{3}{4}\vec{AC} - \vec{AB}$
  - Chứng minh  $B, I, J$  thẳng hàng
- Câu 100.** Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn tâm  $O$ ,  $H$  là trực tâm của tam giác,  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$ .
- Chứng minh tứ giác  $HCDB$  là hình bình hành
  - Chứng minh  $\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 2\vec{HO}$ ;  $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$ . Suy ra ba điểm  $O, H, G$  thẳng hàng ( $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ )
- Câu 101.** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AM$  và  $K$  là điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $AK = \frac{1}{3}AC$ . Chứng minh ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.
- Câu 102.** Cho tam giác  $ABC$ . Đặt  $\vec{AB'} = \vec{BC}$ ,  $\vec{CA'} = \vec{AB}$  và  $\vec{BC'} = \vec{CA}$ . Chứng minh các đường thẳng  $AA', BB'$  và  $CC'$  đồng quy.

**Câu 103.** Cho tam giác  $ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý không thuộc các đường thẳng  $AB, BC, CA$ . Gọi  $A', B', C'$  theo thứ tự là các điểm đối xứng của  $M$  qua trung điểm  $I, K, J$  của các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng

- a) Ba đường thẳng  $AA', BB', CC'$  đồng quy
- b) Đường thẳng  $MM_1$  luôn đi qua một điểm cố định khi  $M$  di động

**Câu 104.** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N, P$  lần lượt thuộc các đoạn thẳng  $AB, BC, CA$  sao cho  $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{NB} = n\overrightarrow{NC}$ ,  $\overrightarrow{PC} = p\overrightarrow{PA}$  ( $m, n, p$  đều khác 1). Chứng minh rằng:

- a)  $M, N, P$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $mnp = 1$  (định lý Mê-nê-la-uyt)
- b)  $AN, CM, BP$  đồng quy hoặc song song khi và chỉ khi  $mnp = -1$  (định lý Xê-va)

**Câu 105.** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi các hệ thức  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Chứng minh  $MN \parallel AC$ .

**Câu 106.** Cho ngũ giác  $ABCDE$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DE$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của các đoạn  $MP$  &  $NQ$ . Chứng minh  $IJ \parallel AE$  &  $IJ = \frac{1}{4}AE$ .

**Câu 107.** Trên các cạnh  $AB, BC, CA$  của tam giác  $ABC$  lấy các điểm tương ứng  $C_1; A_1; B_1$  sao cho  $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = \frac{1}{k}$ . Trên các cạnh  $A_1B_1; B_1C_1; C_1A_1$  của tam giác  $A_1B_1C_1$  lấy các điểm tương ứng  $C_2; A_2; B_2$  sao cho  $A_1C_2 : C_2B_1 = B_1A_2 : A_2C_1 = C_1B_2 : B_2A_1 = k$ . Chứng minh rằng:  $A_2C_2 \parallel AC; C_2B_2 \parallel CB; B_2A_2 \parallel BA$ .

**Câu 108.** Cho ba dây cung song song  $AA_1; BB_1; CC_1$  của đường tròn  $(O)$ . Chứng minh rằng trục tâm của tam giác  $ABC_1; BCA_1$  &  $CAB_1$  nằm trên một đường tròn.

#### **Dạng 5. Tìm tập hợp điểm thỏa một hệ thức vectơ**

### **BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP**

**Câu 109.** Cho tam giác  $ABC$ .

- a) Tìm điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .
- b) Tìm tập hợp các điểm  $N$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC}| = 4|\overrightarrow{NB}|$ .

**Câu 110.** Cho tam giác  $ABC$ .

- a) Tìm điểm  $K$  thỏa mãn  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ .
- b) Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$ .

### **BÀI TẬP BỔ SUNG**

**Câu 111.** Cho điểm  $O$  cố định và hai vectơ  $\vec{u}, \vec{v}$  cố định. Với mỗi số  $m$  ta xác định điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{OM} = m\vec{u} + (1-m)\vec{v}$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  khi  $m$  thay đổi.

**Câu 112.** Cho hai điểm  $A, B$ . Tập hợp các điểm  $M$  sao cho

- a)  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ . b)  $|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}|$

**Câu 113.** Cho tam giác  $ABC$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện sau:

- a)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}$
- b)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$ , với  $k$  là số thực thay đổi khác 0.

**Câu 114.** Cho tam giác  $ABC$ .

- a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm  $I$  thỏa  $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .
- b) Tìm quỹ tích điểm thỏa mãn  $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$ .

**Câu 115.** Cho  $\triangle ABC$ . Tập hợp điểm  $M$  trong các trường hợp sau:

$$a) |\overrightarrow{2MA} + 3\overrightarrow{MB}| = |3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}|.$$

$$b) |4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

**Câu 116.** Cho tam giác  $ABC$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  trong mỗi trường hợp sau:

$$a) \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$$

$$b) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

$$c) |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}|.$$

**Câu 117.** Cho tam giác  $ABC$  và ba vectơ cố định  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ . Với mỗi số thực  $t$ , ta lấy các điểm  $A', B', C'$  sao cho  $\overrightarrow{AA'} = t\vec{u}, \overrightarrow{BB'} = t\vec{v}, \overrightarrow{CC'} = t\vec{w}$ . Tìm quỹ tích trọng tâm  $G'$  của tam giác  $A'B'C'$  khi  $t$  thay đổi.

**Câu 118.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Với số  $k$  tùy ý, lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$ . Tìm tập hợp các trung điểm  $I$  của đoạn  $MN$  khi  $k$  thay đổi.

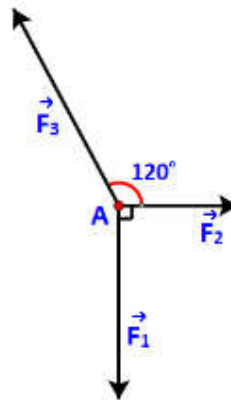
### Dạng 6. Bài toán thực tế

**Câu 119.** Máy bay  $A$  bay với tốc độ  $a \text{ km/h}$ , máy bay  $B$  bay ngược hướng và có tốc độ gấp năm lần máy bay  $A$ . Biểu diễn vectơ vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay  $B$  theo vectơ vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay  $A$ .

**Câu 120.** Máy bay  $A$  bay với vận tốc  $\vec{a}$ , máy bay  $B$  bay cùng hướng và có tốc độ chỉ bằng một nửa máy bay  $A$ . Biểu diễn vectơ vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay  $B$  theo vectơ vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay  $A$ .

**Câu 121.** Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ  $A$  đến  $B$  với tốc độ là  $9 \text{ m/s}$  và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ  $B$  đến  $A$  với tốc độ là  $6 \text{ m/s}$ . Gọi  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  lần lượt là các vectơ vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực  $k$  thỏa mãn  $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ ?

**Câu 122.** Chất điểm  $A$  chịu tác động của ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  như hình và ở trạng thái cân bằng (tức là  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ ). Tính độ lớn của các lực  $\vec{F}_2, \vec{F}_3$  biết  $\vec{F}_1$  có độ lớn là  $20 \text{ N}$ .



**Câu 123.** Một vật đồng chất được thả vào một cốc chất lỏng. Ở trạng thái cân bằng, vật chìm một nửa thể tích trong chất lỏng. Tìm mối liên hệ giữa trọng lực  $\vec{P}$  của vật và lực đẩy Archimedes  $\vec{F}$  mà chất lỏng tác động lên vật. Tính tỉ số giữa trọng lượng riêng của vật và của chất lỏng.

**Câu 124.** Máy bay  $A$  đang bay về hướng Đông Bắc với tốc độ  $600 \text{ km/h}$ . Cùng lúc đó, máy bay  $B$  đang bay về hướng Tây Nam với tốc độ  $800 \text{ km/h}$ . Biểu diễn vectơ vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay  $B$  theo vectơ vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay  $A$ .



### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 1.** Cho hình thang  $MNPQ$ ,  $MN \parallel PQ$ ,  $MN = 2PQ$ . Phát biểu nào sau đây là đúng?
- A.  $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{PQ}$
  - B.  $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{NP}$
  - C.  $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{PQ}$
  - D.  $\overrightarrow{MQ} = -2\overrightarrow{NP}$ .
- Câu 2.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $O$  là trung điểm của  $AB$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A.  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OA}$ .
  - B.  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{OB}$ .
  - C.  $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{OB}$ .
  - D.  $\overrightarrow{AO} = 2\overrightarrow{AB}$ .
- Câu 3.** Cho tam giác  $ABC$  và  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $G$  là trọng tâm của tam giác. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A.  $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{GM}$
  - B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{GM}$ .
  - C.  $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{GM}$ .
  - D.  $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{GM}$ .
- Câu 4.** Cho  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Khẳng định nào sau đây là sai?
- A.  $\vec{a}$  và  $4\vec{a}$  cùng phương.
  - B.  $\vec{a}$  và  $-4\vec{a}$  cùng phương.
  - C.  $\vec{a}$  và  $4\vec{a}$  không cùng hướng.
  - D.  $\vec{a}$  và  $-4\vec{a}$  ngược hướng.
- Câu 5.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và điểm  $C$  nằm giữa hai điểm  $A, B$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A.  $\overrightarrow{AC} = \frac{AC}{AB} \overrightarrow{AB}$
  - B.  $\overrightarrow{AC} = -\frac{AC}{AB} \overrightarrow{AB}$
  - C.  $\overrightarrow{AC} = \frac{AB}{AC} \overrightarrow{AB}$ .
  - D.  $\overrightarrow{AC} = -\frac{AB}{AC} \overrightarrow{AB}$ .
- Câu 6.** Cho đoạn thẳng  $BC$  và điểm  $A$  nằm giữa hai điểm  $B, C$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A.  $\overrightarrow{AC} = \frac{AC}{AB} \overrightarrow{AB}$
  - B.  $\overrightarrow{AC} = -\frac{AC}{AB} \overrightarrow{AB}$
  - C.  $\overrightarrow{AC} = \frac{AB}{AC} \overrightarrow{AB}$ .
  - D.  $\overrightarrow{AC} = -\frac{AB}{AC} \overrightarrow{AB}$ .

## BÀI TẬP SỐ SUNG

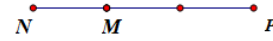
**Câu 7.** Khẳng định nào **sai**?

- A.  $1.\vec{a} = \vec{a}$   
 B.  $k\vec{a}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng khi  $k > 0$   
 C.  $k\vec{a}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng khi  $k < 0$   
 D. Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b} \neq \vec{0}$  cùng phương khi có một số  $k$  để  $\vec{a} = k\vec{b}$

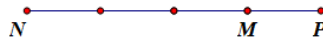
**Câu 8.** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



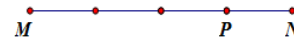
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 3      B. Hình 4      C. Hình 1      D. Hình 2

**Câu 9.** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Nếu  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$  thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$       B.  $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$       C.  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$       D.  $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

**Câu 10.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$       B.  $3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$       C.  $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$       D.  $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

**Câu 11.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

- A.  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$       B.  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$       C.  $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$       D.  $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

**Câu 12.** Cho  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và điểm  $O$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là hai điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$  và  $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$ . Khi đó:

- A.  $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$       B.  $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$       C.  $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$       D.  $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$

**Câu 13.** Tìm giá trị của  $m$  sao cho  $\vec{a} = m\vec{b}$ , biết rằng  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng và  $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

- A.  $m = 3$       B.  $m = -\frac{1}{3}$       C.  $m = \frac{1}{3}$       D.  $m = -3$

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

- A.  $M$  là trung điểm của  $BC$   
 B.  $M$  là trung điểm của  $IC$   
 C.  $M$  là trung điểm của  $IA$   
 D.  $M$  là điểm trên cạnh  $IC$  sao cho  $IM = 2MC$

**Câu 15.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , điểm  $M$  thỏa mãn  $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ . Khi đó điểm  $M$  là:

- A. Trung điểm của  $AC$       B. Điểm  $C$   
 C. Trung điểm của  $AB$       D. Trung điểm của  $AD$

**Câu 16.** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Gọi  $M$  là một điểm trên  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{4}AB$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

A.  $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$ .      B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ .      C.  $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ .      D.  $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$ .

**Câu 17.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$  sao cho  $MA = \frac{1}{5}AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$       B.  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$       C.  $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$       D.  $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

**Câu 18.** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

A.  $AB = AC$       B.  $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$       C.  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$       D.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$  điểm  $M$

**Câu 19.** Cho  $\triangle ABC$ . Đặt  $\vec{a} = \overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ . Các cặp vector nào sau đây cùng phương?

A.  $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{b}$       B.  $\vec{a} - 2\vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}$       C.  $5\vec{a} + \vec{b}, -10\vec{a} - 2\vec{b}$       D.  $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$

**Câu 20.** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Hai vector nào sau đây cùng phương?

A.  $-3\vec{a} + \vec{b}$  và  $-\frac{1}{2}\vec{a} + 6\vec{b}$       B.  $-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$  và  $2\vec{a} + \vec{b}$   
C.  $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$  và  $-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$       D.  $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$  và  $\vec{a} - 2\vec{b}$

**Câu 21.** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương. Hai vector nào sau đây là cùng phương?

A.  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$       B.  $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}$   
C.  $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{v} = 2\vec{a} - 9\vec{b}$       D.  $\vec{u} = 2\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$  và  $\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$

**Câu 22.** Biết rằng hai vec tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai vec tơ  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  và  $(x+1)\vec{a} + 4\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là:

A.  $-7$       B.  $7$       C.  $5$       D.  $6$

**Câu 23.** Biết rằng hai vec tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai vec tơ  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  và  $\vec{a} + (x-1)\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là:

A.  $\frac{1}{2}$       B.  $-\frac{3}{2}$       C.  $-\frac{1}{2}$       D.  $\frac{3}{2}$

**Câu 24.** Cho tam giác  $ABC$  có điểm  $O$  thỏa mãn:  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tam giác  $ABC$  đều      B. Tam giác  $ABC$  cân tại  $C$   
C. Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$       D. Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$

**Câu 25.** Cho tam giác  $OAB$  vuông cân tại  $O$  với  $OA = OB = a$ . Độ dài của vec tơ  $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$  là:

A.  $\frac{a\sqrt{140}}{4}$       B.  $\frac{a\sqrt{321}}{4}$       C.  $\frac{a\sqrt{520}}{4}$       D.  $\frac{a\sqrt{541}}{4}$

**Câu 26.** Cho ngũ giác  $ABCDE$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DE$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm các đoạn  $MP$  và  $NQ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AE}$       B.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}$       C.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AE}$       D.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AE}$

**Câu 27.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $N$  là trung điểm  $AM$ . Đường thẳng  $BN$  cắt  $AC$  tại  $P$ . Khi đó  $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{CP}$  thì giá trị của  $x$  là:

A.  $-\frac{4}{3}$       B.  $-\frac{2}{3}$       C.  $-\frac{3}{2}$       D.  $-\frac{5}{3}$

**Câu 28.** Cho tam giác  $ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi các hệ thức  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A.  $MN \perp AC$       B.  $MN \parallel AC$   
C.  $M$  nằm trên đường thẳng  $AC$       D. Hai đường thẳng  $MN$  và  $AC$  trùng nhau

**Câu 29.** Cho tam giác vuông cân  $OAB$  với  $OA = OB = a$ . Tính độ dài vector  $\vec{v} = \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$ .

A.  $2a$       B.  $\frac{\sqrt{6073}}{28}a$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

**Câu 30.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính độ dài vector:  $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$

A.  $|\vec{u}| = 4a\sqrt{2}$       B.  $|\vec{u}| = a\sqrt{2}$       C.  $|\vec{u}| = 3a\sqrt{2}$       D.  $|\vec{u}| = 2a\sqrt{2}$

**Câu 31.** Cho tam giác vuông cân  $OAB$  với  $OA = OB = a$ . Tính độ dài vector  $\vec{u} = \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2,5\overrightarrow{OB}$

A.  $\frac{\sqrt{541}}{4}a$       B.  $\frac{\sqrt{520}}{4}a$       C.  $\frac{\sqrt{140}}{4}a$       D.  $\frac{\sqrt{310}}{4}a$

**Câu 32.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$  điểm  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính độ dài vector  $\vec{u} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MA} - 2,5\overrightarrow{MB}$ .

A.  $\frac{a\sqrt{127}}{4}$       B.  $\frac{a\sqrt{127}}{8}$       C.  $\frac{a\sqrt{127}}{3}$       D.  $\frac{a\sqrt{127}}{2}$

**Câu 33.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính độ dài vector  $\vec{u} = 4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$ .

A.  $|\vec{u}| = a\sqrt{5}$       B.  $|\vec{u}| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$       C.  $|\vec{u}| = 3a\sqrt{5}$       D.  $|\vec{u}| = 2a\sqrt{5}$

**Câu 34.** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Gọi  $H$  là chân đường cao hạ từ  $A$  sao cho  $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HC}$ .

Điểm  $M$  di động trên  $BC$  sao cho  $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$ . Tìm  $x$  sao cho độ dài vector  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất.

A.  $x = \frac{4}{5}$       B.  $x = \frac{5}{6}$       C.  $x = \frac{6}{5}$       D.  $x = \frac{5}{4}$

**Câu 35.** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ .  $M$  là trung điểm  $BC$ . Tính độ dài  $\left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right|$ .

A.  $\frac{a\sqrt{21}}{3}$       B.  $\frac{a\sqrt{21}}{2}$       C.  $\frac{a\sqrt{21}}{4}$       D.  $\frac{a\sqrt{21}}{7}$

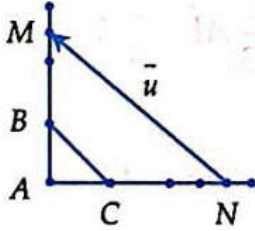


**Câu 36.** Cho  $AK$  và  $BM$  là hai trung tuyến của  $\triangle ABC$ . Hãy phân tích vector  $\overrightarrow{AB}$  theo hai vector  $\overrightarrow{AK}$  và  $\overrightarrow{BM}$ .

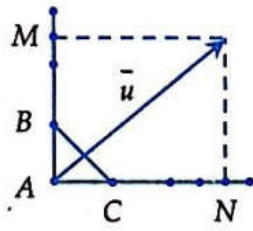
A.  $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$  B.  $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$  C.  $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$  D.  $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BM})$

**Câu 37.** Cho  $\triangle ABC$  vuông cân,  $AB = AC$ . Khi đó vector  $\vec{u} = \frac{11}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{2}\overrightarrow{AC}$  được vẽ đúng ở hình nào sau đây?

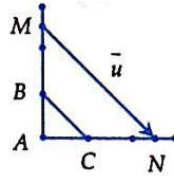
A.



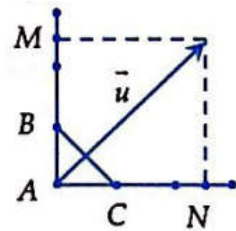
B.



C.

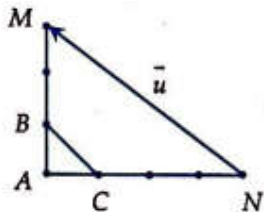


D.

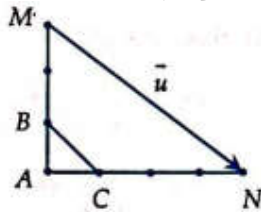


**Câu 38.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ , vector  $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}$  được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

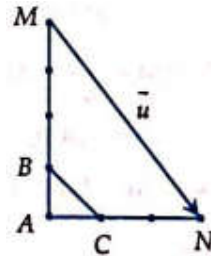
A.



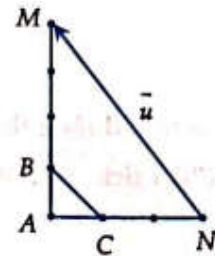
B.



C.



D.



**Câu 39.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Phân tích  $\overrightarrow{AB}$  theo hai vector  $\overrightarrow{BN}$  và  $\overrightarrow{CP}$ .

A.  $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

B.  $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

C.  $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

D.  $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{4}{3}\overrightarrow{CP}$

**Câu 40.** Cho  $\triangle ABC$ . Điểm  $M$  nằm trên đường thẳng  $BC$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$  ( $k \neq 1$ ). Phân tích  $\overrightarrow{AM}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

A.  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1-k}$

B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1+k}$

C.  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1-k}$

D.  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}}{1-k}$

**Câu 41.** Cho  $\triangle OAB$  với  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $OA, OB$ . Tìm số  $m, n$  thích hợp để  $\overrightarrow{NA} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$ .

A.  $m = -1, n = \frac{1}{2}$       B.  $m = 1, n = -\frac{1}{2}$       C.  $m = 1, n = \frac{1}{2}$       D.  $m = -1, n = -\frac{1}{2}$

**Câu 42.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $E, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AE$ . Tìm các số  $p$  và  $q$  sao cho  $\overrightarrow{DN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$ .

A.  $p = \frac{5}{4}; q = \frac{3}{4}$       B.  $p = -\frac{4}{3}; q = \frac{2}{3}$       C.  $p = -\frac{4}{3}; q = -\frac{2}{3}$       D.  $p = \frac{5}{4}; q = -\frac{3}{4}$

**Câu 43.** Trên đường thẳng chứa cạnh  $BC$  của tam giác  $ABC$  lấy một điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$ . Khi đó đẳng thức nào sau đây **đúng**?

A.  $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$       B.  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$   
C.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$       D.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

**Câu 44.** Cho tam giác  $ABC$  biết  $AB = 8, AC = 9, BC = 11$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$  và  $N$  là điểm trên đoạn  $AC$  sao cho  $AN = x (0 < x < 9)$ . Hệ thức nào sau đây **đúng**?

A.  $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{9}\right)\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$       B.  $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$   
C.  $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} + \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$       D.  $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{x}{9} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

**Câu 45.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm và  $H$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $G$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A.  $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$       B.  $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$   
C.  $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$       D.  $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

**Câu 46.** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi các điểm  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, CA$  và  $AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

A.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$       B.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$       C.  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$       D.  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AF}$

**Câu 47.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D$  là điểm sao cho  $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$  và  $I$  là trung điểm của cạnh  $AD$ ,  $M$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ . Vector  $\overrightarrow{BI}$  được phân tích theo hai vector  $\overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{BC}$ . Hãy chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau?

A.  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$       B.  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$   
C.  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$       D.  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$

**Câu 48.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm thuộc  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NA}$ .  $K$  là trung điểm của  $MN$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$       B.  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

C.  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ . D.  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .

**Câu 49.** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $G$  theo thứ tự là trọng tâm của tam giác  $OAB$  và  $OCD$ . Khi đó  $\overrightarrow{GG'}$  bằng:

A.  $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ . B.  $\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ . C.  $3(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ . D.  $\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ .

**Câu 50.** Cho tam giác  $ABC$  với phân giác trong  $AD$ . Biết  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $CA = 7$ . Khi đó  $\overrightarrow{AD}$  bằng:

A.  $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$ . B.  $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$ . C.  $\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{12}\overrightarrow{AC}$ . D.  $\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} - \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$ .

**Câu 51.** Cho  $AD$  và  $BE$  là hai phân giác trong của tam giác  $ABC$ . Biết  $AB = 4$ ,  $BC = 5$  và  $CA = 6$ . Khi đó  $\overrightarrow{DE}$  bằng:

A.  $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ . B.  $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$ . C.  $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ . D.  $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$ .

**Câu 52.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $K, L$  lần lượt là trung điểm  $BC, CD$ . Biết  $\overrightarrow{AK} = \vec{a}, \overrightarrow{AL} = \vec{b}$ . Biểu diễn  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$  theo  $\vec{a}, \vec{b}$

A.  $\overrightarrow{BA} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$  B.  $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$   
C.  $\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$  D.  $\overrightarrow{BA} = -\frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}, \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$

**Câu 53.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $I$  là điểm trên  $BC$  sao cho  $2CI = 3BI$  và  $J$  là điểm trên  $BC$  kéo dài sao cho  $5JB = 2JC$ . Tính  $\overrightarrow{AG}$  theo  $\overrightarrow{AI}$  và  $\overrightarrow{AJ}$

A.  $\overrightarrow{AG} = \frac{15}{16}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$  B.  $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$   
C.  $\overrightarrow{AG} = \frac{15}{16}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$  D.  $\overrightarrow{AG} = \frac{35}{48}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AJ}$

**Câu 54.** Cho  $\triangle ABC$ . Điểm  $M$  nằm trên đường thẳng  $BC$  sao cho  $n\overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BC}$  ( $n, m \neq 0$ ). Phân tích vector  $\overrightarrow{AM}$  theo  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$

A.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{m+n}\overrightarrow{AC}$  B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$   
C.  $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}$  D.  $\overrightarrow{AM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$

**Câu 55.** Một đường thẳng cắt các cạnh  $DA, DC$  và đường chéo  $DB$  của hình bình hành  $ABCD$  lần lượt tại các điểm  $E, F$  và  $M$ . Biết rằng  $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$  ( $m, n > 0$ ). Hãy biểu diễn  $\overrightarrow{DM}$  qua  $\overrightarrow{DB}$  và  $m, n$ .

A.  $\overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m+n}\overrightarrow{DB}$  B.  $\overrightarrow{DM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{DB}$  C.  $\overrightarrow{DM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}$  D.  $\overrightarrow{DM} = \frac{m.n}{m-n}\overrightarrow{DB}$

**Câu 56.** Cho  $\triangle ABC$ . Trên  $BC$  lấy điểm  $D$  sao cho  $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ . Khi đó phân tích  $\overrightarrow{AD}$  theo các vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$ .

A.  $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$     B.  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$   
 C.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$     D.  $\overrightarrow{AD} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

**Câu 57.** Cho  $\triangle ABC$ . Lấy các điểm  $M, N, P$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}, \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$ . Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để  $M, N, P$  thẳng hàng.

A.  $\overrightarrow{MP} = -2\overrightarrow{MN}$     B.  $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$     C.  $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MN}$     D.  $\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{MN}$

**Câu 58.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là các điểm nằm trên cạnh  $AB$  và  $CD$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AB$ ,  $CN = \frac{1}{2}CD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle BMN$ . Gọi  $I$  là điểm xác định bởi  $\overrightarrow{BI} = m\overrightarrow{BC}$ . Xác định  $m$  để  $AI$  đi qua  $G$ .

A.  $m = \frac{6}{11}$     B.  $m = \frac{11}{6}$     C.  $m = \frac{6}{5}$     D.  $m = \frac{18}{11}$

**Câu 59.** Cho  $\triangle ABC$  có trung tuyến  $AD$ . Xét các điểm  $M, N, P$  cho bởi  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AD}$ . Tìm  $m$  để  $M, N, P$  thẳng hàng.

A.  $m = \frac{1}{6}$     B.  $m = \frac{1}{3}$     C.  $m = \frac{1}{4}$     D.  $m = \frac{2}{3}$

**Câu 60.** Cho  $\triangle ABC$ .  $M$  và  $N$  là hai điểm xác định thỏa mãn:  $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ . Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để  $M, N, B$  thẳng hàng?

A.  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$     B.  $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$     C.  $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$     D.  $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BN}$

**Câu 61.** Cho  $\triangle ABC$  với  $H, O, G$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm. Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để  $H, O, G$  thẳng hàng?

A.  $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$     B.  $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{OG}$     C.  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$     D.  $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$

**Câu 62.** Cho ngũ giác  $ABCDE$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của cạnh  $AB, BC, CD, DE$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của các đoạn  $MP$  và  $NQ$ . Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để  $IJ \parallel AE$ ?

A.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$     B.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AE}$     C.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$     D.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

**Câu 63.** Cho  $\triangle ABC$ . Các điểm  $I, J$  thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AC}$ . Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để  $IC \parallel BJ$ ?

A.  $\overrightarrow{CI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$     B.  $\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{BJ}$     C.  $\overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$     D.  $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BJ}$

**Câu 64.** Cho  $\triangle ABC$ . Trên các cạnh  $AB, BC$  lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $AM = \frac{2}{5}MB, \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AN$  và  $CM$ . Tính tỉ số  $\frac{AI}{AN}$  và  $\frac{CI}{IM}$ .

A.  $\frac{AI}{AN} = \frac{3}{7}; \frac{CI}{IM} = \frac{21}{2}$

B.  $\frac{AI}{AN} = \frac{4}{11}; \frac{CI}{IM} = \frac{7}{2}$

C.  $\frac{AI}{AN} = \frac{8}{23}; \frac{CI}{IM} = \frac{7}{4}$

D.  $\frac{AI}{AN} = \frac{8}{23}; \frac{CI}{IM} = \frac{21}{2}$

**Câu 65.** Cho  $\triangle ABC$  và trung tuyến  $AM$ . Một đường thẳng song song với  $AB$  cắt các đoạn thẳng  $AM$ ,  $AC$  và  $BC$  lần lượt tại  $D$ ,  $E$ , và  $F$ . Một điểm  $G$  nằm trên cạnh  $AB$  sao cho  $FG$  song song với  $AC$ . Tính  $\frac{ED}{GB}$ .

A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{1}{4}$

D. 1

**Câu 66.** Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Qua trung điểm  $M$  của  $AB$  dựng đường thẳng  $MO$  cắt  $CD$  tại  $N$ . Biết  $OA = 1, OB = 2, OC = 3, OD = 4$ . Tính  $\frac{CN}{ND}$ .

A. 1

B.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{3}{2}$

D.  $\frac{5}{2}$

**Câu 67.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là các điểm nằm trên các cạnh  $AB$  và  $CD$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AB, CN = \frac{1}{2}CD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle BMN$ . Hãy phân tích  $\overrightarrow{AG}$  theo hai vector  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ .

A.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$

B.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$

C.  $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

D.  $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

**Câu 68.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $I$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $2CI = 3BI$  và  $J$  là điểm trên tia đối của  $BC$  sao cho  $5JB = 2JC$ . Tính  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$  theo  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ .

A.  $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

B.  $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

C.  $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

D.  $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}, \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

**Câu 69.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Trên  $AB$  và  $CD$  lần lượt lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$ ,  $k \neq 1$ . Hãy biểu diễn  $\overrightarrow{MN}$  theo hai vector  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$ .

A.  $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AD} + (1-k)\overrightarrow{BC}$

B.  $\overrightarrow{MN} = (1+k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}$

C.  $\overrightarrow{MN} = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{BC}$

D.  $\overrightarrow{MN} = -k\overrightarrow{AD} + (k+1)\overrightarrow{BC}$

**Câu 70.** Cho  $\triangle ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$  và  $K$  là điểm trên  $AC$  sao cho  $AK = \frac{1}{3}AC$ . Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

A.  $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

B.  $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$

C.  $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BI}$

D.  $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BI}$

**Câu 71.** Cho  $\triangle ABC$ ,  $E$  là trung điểm  $BC$ ,  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Gọi  $D, J, K$  lần lượt là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{IK} = m\overrightarrow{IJ}$ . Tìm  $m$  để  $A, K, D$  thẳng hàng.

A.  $m = \frac{5}{6}$

B.  $m = \frac{1}{3}$

C.  $m = \frac{1}{2}$

D.  $m = \frac{2}{5}$

- Câu 72.** Cho  $\triangle ABC$ . Hai điểm  $M, N$  được xác định bởi hệ thức  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ . Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để  $MN \parallel AC$ .
- A.  $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}$       B.  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$       C.  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{AC}$       D.  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- Câu 73.** Cho  $\triangle ABC$ ;  $M$  và  $N$  xác định bởi  $3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{NB} - 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$ . Trọng tâm  $\triangle ABC$  là  $G$ . Gọi  $P$  là điểm trên cạnh  $AC$  sao cho  $\frac{PA}{PC} = 4$ . Các đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để  $M, G, N, P$  thẳng hàng.
- A.  $7\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$  và  $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$       B.  $5\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$  và  $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$   
 C.  $7\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$  và  $2\overrightarrow{PQ} - 3\overrightarrow{PN} = \vec{0}$       D.  $3\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN} = \vec{0}$  và  $3\overrightarrow{PG} + 2\overrightarrow{PN} = \vec{0}$
- Câu 74.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trọng tâm của  $\triangle ADC$  và  $\triangle BCD$ . Đẳng thức nào là điều kiện cần và đủ để  $IJ \parallel AB$ .
- A.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$       B.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$       C.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$       D.  $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ .
- Câu 75.** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc cạnh  $AB$ ;  $N \in$  cạnh  $AC$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $CM$  và  $BN$ . Tính tỉ số  $\frac{ON}{OB}$  và  $\frac{OM}{OC}$  tương ứng.
- A.  $\frac{1}{9}$  và  $\frac{2}{3}$       B.  $\frac{1}{3}$  và  $\frac{1}{4}$       C.  $\frac{1}{4}$  và  $\frac{1}{6}$       D.  $\frac{1}{6}$  và  $\frac{1}{9}$
- Câu 76.** Cho hình bình hành  $ABCD$ .  $M$  thuộc  $AC$  sao cho:  $AM = kAC$ . Trên cạnh  $AB, BC$  lấy các điểm  $P, Q$  sao cho  $MP \parallel BC, MQ \parallel AB$ . Gọi  $N$  là giao điểm của  $AQ$  và  $CP$ . Tính tỉ số  $\frac{AN}{AQ}$  và  $\frac{CN}{CP}$  theo  $k$ .
- A.  $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 + k - 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1 - k}{k^2 + k + 1}$       B.  $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 - k + 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1 - k}{k^2 - k + 1}$   
 C.  $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 + k + 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1 - k}{k^2 + k - 1}$       D.  $\frac{AN}{AQ} = \frac{k}{k^2 + k + 1}; \frac{CN}{CP} = \frac{1 - k}{k^2 + k + 1}$
- Câu 77.** Cho hai tam giác  $\triangle ABC$  và  $\triangle A'B'C'$  có trọng tâm lần lượt là  $G$  và  $G'$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{C'C} = 3\overrightarrow{GG'}$       B.  $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{GG'}$   
 C.  $\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{GG'}$       D.  $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$
- Câu 78.** Cho 5 điểm  $A, B, C, D, E$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?
- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = 2(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$       B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$   
 C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED})$       D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$
- Câu 79.** Cho  $\triangle ABC$  và một điểm  $M$  tùy ý. Chọn hệ thức đúng?
- A.  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$       B.  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$   
 C.  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$       D.  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$
- Câu 80.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $CD$ . Chọn đẳng thức đúng.

A.  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$       B.  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$   
 C.  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$       D.  $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

**Câu 81.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $A_1, B_1, C_1$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Chọn đẳng thức sai.

A.  $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1} = \vec{0}$       B.  $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$       C.  $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$       D.  $\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GC_1}$

**Câu 82.** Cho  $\triangle ABC$  với  $H, O, G$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp trọng tâm. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{OH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$       B.  $\overrightarrow{HO} = 3\overrightarrow{OG}$       C.  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$       D.  $2\overrightarrow{GO} = -3\overrightarrow{OH}$

**Câu 83.** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Đẳng thức nào sau đây là sai?

A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$       B.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$       C.  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$       D.  $2\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

**Câu 84.** Cho  $\triangle ABC$ ,  $M$  là một điểm trên cạnh  $BC$ . Khi đó đẳng thức nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$       B.  $\overrightarrow{BM} = \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{MB}{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$   
 C.  $3\overrightarrow{CM} = \frac{MB}{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MA}{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$       D.  $2\overrightarrow{AM} = \frac{MC}{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{MB}{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

**Câu 85.** Cho  $\triangle ABC$ ,  $AM, BN, CP$  là các trung tuyến.  $D, E, F$  là trung điểm của  $AM, BN$  và  $CP$ . Với  $O$  là điểm bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$       B.  $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$   
 C.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$       D.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$

**Câu 86.** Cho tam giác  $ABC$  đều tâm  $O$ ,  $M$  là điểm bất kì trong tam giác. Hình chiếu của  $M$  xuống ba cạnh lần lượt là  $D, E, F$ . Hệ thức nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$       B.  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$   
 C.  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$       D.  $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

**Câu 87.** Cho tứ giác  $ABCD$ .  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $DC$ .  $G$  là trung điểm của  $IJ$ . Xét các mệnh đề:

(I)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$  (II)  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IG}$  (III)  $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JI}$

Mệnh đề sai là:

A. (I) và (II)      B. (II) và (III)      C. Chỉ (I)      D. Tất cả đều sai

**Câu 88.** Cho tứ giác  $ABCD$ , các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các đoạn  $AD$  và  $BC$  sao cho  $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = \frac{m}{n}$ .

Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A.  $\overrightarrow{MN} = \frac{n\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{DC}}{m+n}$       B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{n\overrightarrow{AC} + m\overrightarrow{AB}}{m+n}$       C.  $\overrightarrow{BN} = \frac{n\overrightarrow{BC} + m\overrightarrow{CD}}{m+n}$       D.  $\overrightarrow{DM} = \frac{n\overrightarrow{CD} + m\overrightarrow{AD}}{m+n}$

**Câu 89.** Cho  $\triangle ABC$  và một điểm  $M$  bất kì trong tam giác. Đặt  $S_{MBC} = S_a$ ,  $S_{MCA} = S_b$ ,  $S_{MAB} = S_c$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?



A.  $S_a \cdot \overrightarrow{MA} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

B.  $S_a \cdot \overrightarrow{AB} + S_b \cdot \overrightarrow{BC} + S_c \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

C.  $S_a \cdot \overrightarrow{MC} + S_b \cdot \overrightarrow{MB} + S_c \cdot \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

D.  $S_a \cdot \overrightarrow{AC} + S_b \cdot \overrightarrow{AB} + S_c \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{0}$

**Câu 90.** Cho  $\triangle ABC$  với  $BC = a, AC = b, AB = c$ .  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ , đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA, AB$  lần lượt tại  $M, N, P$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A.  $a \cdot \overrightarrow{IM} + b \cdot \overrightarrow{IN} + c \cdot \overrightarrow{IP} = \vec{0}$

B.  $a \cdot \overrightarrow{MA} + b \cdot \overrightarrow{NB} + c \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{0}$

C.  $a \cdot \overrightarrow{AM} + b \cdot \overrightarrow{BN} + c \cdot \overrightarrow{CP} = \vec{0}$

D.  $a \cdot \overrightarrow{AB} + b \cdot \overrightarrow{BC} + c \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

**Câu 91.** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ . Tìm điểm  $I$  sao cho  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

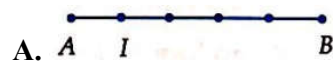
A. Điểm  $I$  ngoài đoạn  $AB$  sao cho  $IB = \frac{1}{3} AB$

B. Điểm  $I$  thuộc đoạn  $AB$  sao cho  $IB = \frac{1}{3} AB$

C. Điểm  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$

D. Điểm  $I$  nằm khác phía với  $B$  đối với  $A$  và  $IB = \frac{1}{3} AB$ .

**Câu 92.** Cho đoạn thẳng  $AB$ . Hình nào sau đây biểu diễn điểm  $I$  sao cho  $\overrightarrow{AI} = -\frac{3}{5} \overrightarrow{BA}$ .



**Câu 93.** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ . Hình vẽ nào sau đây xác định đúng vị trí điểm  $M$ .



**Câu 94.** Cho đoạn thẳng  $AB$  và điểm  $M$  là một điểm trong đoạn  $AB$  sao cho  $AM = \frac{1}{5} AB$ . Tìm  $k$  để

$\overrightarrow{MA} = k \overrightarrow{MB}$ .

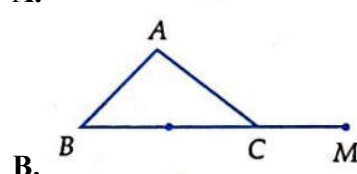
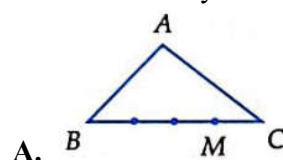
A.  $k = \frac{1}{4}$

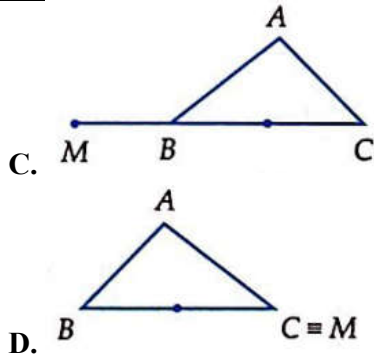
B.  $k = 4$

C.  $k = -\frac{1}{4}$

D.  $k = -4$

**Câu 95.** Cho  $\triangle ABC$ . Trên đường thẳng  $BC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$ . Điểm  $M$  được vẽ đúng trong hình nào sau đây?





**Câu 96.** Cho  $\triangle ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Xác định điểm  $M$  sao cho:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

- A. Điểm  $M$  là trung điểm cạnh  $AC$ .
- B. Điểm  $M$  là trung điểm cạnh  $GC$ .
- C. Điểm  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số 4.
- D. Điểm  $M$  chia đoạn  $GC$  thỏa mãn  $\overline{GC} = 4\overline{GM}$ .

**Câu 97.** Cho  $\triangle ABC$ ,  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Vị trí điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$  xác định bởi hệ thức:

- A.  $\overline{BN} = \frac{1}{3}\overline{BI}$
- B.  $\overline{BN} = 2\overline{BI}$
- C.  $\overline{BN} = \frac{2}{3}\overline{BI}$
- D.  $\overline{BN} = 3\overline{BI}$

**Câu 98.** Cho 2 điểm  $A, B$  là hai số thực  $a, b$  sao cho  $a + b \neq 0$ . Xét các mệnh đề:

(I) Tồn tại duy nhất một điểm  $M$  thỏa mãn  $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

(II)  $\overrightarrow{MA} = -\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ .

(III)  $M$  là điểm nằm trên đường thẳng  $AB$ .

Trong các mệnh đề trên thì:

- A. (I) và (III) tương đương nhau
- B. (II) và (III) tương đương nhau
- C. (I) và (II) tương đương nhau
- D. (I), (II), (III) tương đương nhau

**Câu 99.** Cho  $\triangle ABC$  với  $BC = a, AC = b, AB = c$ . Nếu điểm  $I$  thỏa mãn hệ thức  $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$  thì:

- A. Điểm  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .
- B. Điểm  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp  $\triangle ABC$ .
- C. Điểm  $I$  là trực tâm của  $\triangle ABC$ .
- D. Điểm  $I$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ .

**Câu 100.** Cho  $\triangle ABC$ . Xác định điểm  $I$  sao cho:  $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} = 3\overrightarrow{BC}$ .

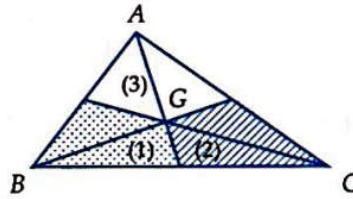
- A. Điểm  $I$  là trung điểm của cạnh  $AC$
- B. Điểm  $C$  là trung điểm của cạnh  $IA$
- C. Điểm  $C$  chia đoạn  $IA$  theo tỉ số  $-2$
- D. Điểm  $I$  chia đoạn  $AC$  theo tỉ số 2

**Câu 101.** Cho  $\triangle ABC$  có  $M$  là trung điểm  $AB$  và  $N$  trên cạnh  $AC$  sao cho  $NC = 2NA$ . Xác định điểm  $K$  sao cho  $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 12\overrightarrow{AK} = \vec{0}$ .

- A. Điểm  $K$  là trung điểm cạnh  $AM$
- B. Điểm  $K$  là trung điểm cạnh  $BN$
- C. Điểm  $K$  là trung điểm cạnh  $BC$
- D. Điểm  $K$  là trung điểm cạnh  $MN$

**Câu 102.** Cho  $\triangle ABC$ . Tìm điểm  $N$  sao cho:  $2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ .

- A.**  $N$  là trọng tâm  $\triangle ABC$                       **B.**  $N$  là trung điểm của  $BC$   
**C.**  $N$  là trung điểm của  $AK$  với  $K$  là trung điểm của  $BC$   
**D.**  $N$  là đỉnh thứ tư của hình bình hành nhận  $AB$  và  $AC$  làm 2 cạnh
- Câu 103.** Cho  $\triangle ABC$ . Xác định điểm  $M$  sao cho:  $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CB}$ .  
**A.**  $M$  là trung điểm cạnh  $AB$                       **B.**  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$   
**C.**  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số 2                      **D.**  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$
- Câu 104.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ , điểm  $M$  thỏa mãn  $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Khi đó điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức nào sau đây?  
**A.**  $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$                       **B.**  $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CA}$                       **C.**  $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$                       **D.**  $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$
- Câu 105.** Gọi  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ . Nối điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = \vec{0}$  thì  $M$  ở vị trí nào trong hình vẽ:



- A. Miền (1)                      B. Miền (2)                      C. Miền (3)                      D. Ở ngoài  $\triangle ABC$

**Câu 106.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AM}$ . Khi đó điểm  $M$  trùng với điểm:  
A.  $O$                                       B.  $I$  là trung điểm đoạn  $OA$   
C.  $I$  là trung điểm đoạn  $OC$                                       D.  $C$

**Câu 107.** Cho ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Gọi điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{MB} + \beta\overrightarrow{MC}$ ;  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Nếu  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$  thì  $\alpha, \beta$  thỏa mãn điều kiện nào sau đây?  
A.  $\alpha^2 - \beta^2 = 0$                       B.  $\alpha\beta = 1$                       C.  $\alpha - \beta = 0$                       D. Cả A, B, C đều đúng

**Câu 108.** Cho  $\triangle ABC$ . Nếu điểm  $D$  thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$  với  $M$  tùy ý, thì  $D$  là đỉnh của hình bình hành:  
A.  $ABCD$                                       B.  $ACBD$   
C.  $ABED$  với  $E$  là trung điểm của  $BC$                                       D.  $ACED$  với  $B$  là trung điểm của  $EC$

**Câu 109.** Cho đoạn  $AB$  và điểm  $I$  sao cho  $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ . Tìm số  $k \in \mathbb{R}$  sao cho  $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$ .  
A.  $k = \frac{3}{4}$                                       B.  $k = \frac{3}{5}$                                       C.  $k = \frac{2}{5}$                                       D.  $k = \frac{3}{2}$

**Câu 110.** Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Tập hợp điểm  $M$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6$  là:  
A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .                                      B. Đường tròn tâm  $G$  bán kính là 1.  
C. Đường tròn tâm  $G$  bán kính là 2.                                      D. Đường tròn tâm  $G$  bán kính là 6.

**Câu 111.** Cho  $\triangle ABC$  có trọng tâm  $G$ .  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Tập hợp điểm  $M$  sao cho:  
 $2|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$  là:  
A. đường trung trực của đoạn  $GI$                                       B. đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$   
C. đường thẳng  $GI$                                       D. đường trung trực của đoạn  $AI$

- Câu 112.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  tâm  $O$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$  là
- A. một đoạn thẳng      B. một đường tròn      C. một điểm      D. tập hợp rỗng
- Câu 113.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  tâm  $O$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}| = k, k > 0$  là:
- A. đường tròn tâm  $O$  bán kính là  $\frac{k}{4}$       B. đường tròn đi qua  $A, B, C, D$   
C. đường trung trực của  $AB$       D. tập rỗng
- Câu 114.** Cho  $\triangle ABC$  trọng tâm  $G$ . Gọi  $I, J, K$  lần lượt là trung điểm  $BC, AB, CA$ . Quỹ tích các điểm  $M$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}|$  là:
- A. đường tròn tâm  $I$  bán kính  $\frac{1}{2}JK$       B. đường tròn tâm  $G$  bán kính  $\frac{1}{3}IJ$   
C. đường tròn tâm  $G$  bán kính  $\frac{1}{3}CA$       D. trung trực  $AC$
- Câu 115.** Cho đường tròn  $(O; R)$  và hai điểm  $A, B$  cố định. Với mỗi điểm  $M$  ta xác định điểm  $M'$  sao cho  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ , lúc đó:
- A. Khi  $M$  chạy trên  $(O; R)$  thì  $M'$  chạy trên đường thẳng  $AB$   
B. Khi  $M$  chạy trên  $(O; R)$  thì  $M'$  chạy trên đường thẳng đối xứng với  $AB$  qua  $O$   
C. Khi  $M$  chạy trên  $(O; R)$  thì  $M'$  chạy trên một đường tròn cố định  
D. Khi  $M$  chạy trên  $(O; R)$  thì  $M'$  chạy trên một đường tròn cố định bán kính  $R$
- Câu 116.** Cho  $\triangle ABC$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = k\overrightarrow{BC}$  với  $k \in \mathbb{R}$
- A. là một đoạn thẳng      B. là một đường thẳng      C. là một đường tròn      D. là một điểm
- Câu 117.** Cho  $\triangle ABC$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn:  $|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$  là:
- A. đường thẳng qua  $A$       B. đường thẳng qua  $B$  và  $C$   
C. đường tròn      D. một điểm duy nhất
- Câu 118.** Tập hợp điểm  $M$  mà  $k\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MC}, k \neq 1$  là:
- A. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ  $C$       B. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ  $B$   
C. đường thẳng chứa trung tuyến vẽ từ  $A$       D. đường trung trực của  $AB$
- Câu 119.** Cho  $\triangle ABC$ . Tìm quỹ tích điểm  $M$  thỏa mãn:  $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$
- A. Quỹ tích điểm  $M$  là một đường tròn bán kính  $\frac{AB}{3}$   
B. Quỹ tích điểm  $M$  là một đường tròn bán kính  $\frac{AB}{4}$   
C. Quỹ tích điểm  $M$  là một đường tròn bán kính  $\frac{AB}{9}$   
D. Quỹ tích điểm  $M$  là một đường tròn bán kính  $\frac{AB}{2}$
- Câu 120.** Cho  $\triangle ABC$ . Tìm quỹ tích điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}), k \in \mathbb{R}$ .

- A. Tập hợp điểm  $M$  là đường trung trực của  $EF$ , với  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC$
- B. Tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng qua  $A$  và song song với  $BC$
- C. Tập hợp điểm  $M$  là đường tròn tâm  $I$  bán kính  $\frac{AB}{9}$
- D. Với  $H$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$  thì tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $E$  và song song với  $HB$  với  $E$  là trung điểm của  $AB$
- Câu 121.** Cho tứ giác  $ABCD$  với  $K$  là số tùy ý. Lấy cả điểm  $M, N$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DC}$ . Tìm tập hợp trung điểm  $I$  của đoạn  $MN$  khi  $k$  thay đổi.
- A. Tập hợp điểm  $I$  là đường thẳng  $OO'$  với  $O$  và  $O'$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BD$
- B. Tập hợp điểm  $I$  là đường thẳng  $OO'$  với  $O$  và  $O'$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC$
- C. Tập hợp điểm  $I$  là đường thẳng  $OO'$  với  $O$  và  $O'$  lần lượt là trung điểm của  $AB, DC$
- D. Cả A, B, C đều sai.
- Câu 122.** Cho lục giác đều  $ABCDEF$ . Tìm tập hợp điểm  $M$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}|$  nhận giá trị nhỏ nhất.
- A. Tập hợp điểm  $M$  là một đường thẳng
- B. Tập hợp điểm  $M$  là một đoạn thẳng
- C. Tập hợp điểm  $M$  là một đường tròn
- D. Là một điểm
- Câu 123.** Tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức:  $2\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + (1-k)\overrightarrow{MC} = \vec{0}, k \in \mathbb{R}$  là:
- A. đường thẳng
- B. đường tròn
- C. đoạn thẳng
- D. một điểm
- Câu 124.** Cho  $\triangle ABC$  và điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức:  $|\overrightarrow{3MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$ . Tập hợp điểm  $M$  là
- A. một đoạn thẳng
- B. nửa đường tròn
- C. một đường tròn
- D. một đường thẳng
- Câu 125.** Tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức:  $|\overrightarrow{3MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$
- A. là một đường tròn có bán kính là  $\frac{AB}{2}$
- B. là một đường tròn có bán kính là  $\frac{BC}{3}$
- C. là một đường thẳng qua  $A$  và song song với  $BC$
- D. là một điểm
- Câu 126.** Tìm tập hợp điểm thỏa mãn hệ thức:  $2\overrightarrow{MA} - (1+k)\overrightarrow{MB} - 3k\overrightarrow{MC} = \vec{0}, k$  là giá trị thay đổi trên  $\mathbb{R}$ .
- A. Tập hợp điểm  $M$  là một đoạn thẳng.
- B. Tập hợp điểm  $M$  là một đường tròn.
- C. Tập hợp điểm  $M$  là một đường thẳng.
- D. Tập hợp điểm  $M$  là một nửa đường tròn.