

BÀI 9. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTOR

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

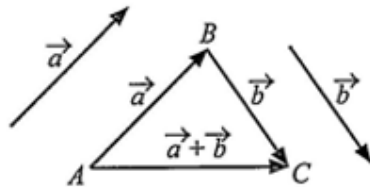
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

I. Tổng của hai vector

1. Định nghĩa

Cho hai vector \vec{a}, \vec{b} . Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

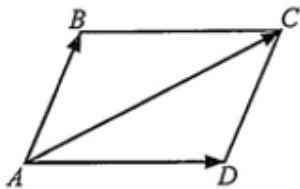
Vector \overrightarrow{AC} được gọi là tổng của hai vector \vec{a} và \vec{b} , kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.



Nhận xét: Công thức trên cho ta cách rút gọn tổng nhiều vector liên tiếp mà điểm cuối của mỗi vector trong tổng là điểm đầu của vector liền sau nó (trừ vector cuối cùng). Đồng thời, ta cũng phân tích được một vector thành tổng của hai hoặc nhiều vector khác. Ta cũng gọi công thức trên là quy tắc cộng.

2. Quy tắc hình bình hành

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$



Nhận xét: Công thức trên cho ta một cách rút gọn tổng của hai vector có cùng điểm đầu.

3. Tính chất

Với ba vector tùy ý $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ta có:

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp);
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (tính chất của vector-không).

Chú ý: Tổng ba vector $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ được xác định theo một trong hai cách: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ hoặc $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

II. Hiệu của hai vector

1. Hai vector đối nhau

Vector có cùng độ dài và ngược hướng với vector \vec{a} được gọi là vector đối của \vec{a} , kí hiệu là $-\vec{a}$.

Với hai điểm A, B bất kì ta có $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$.

Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$.

2. Định nghĩa

Phép trừ vector \vec{a} cho vector \vec{b} là tổng của vector \vec{a} và vector đối của vector \vec{b} , kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Như vậy $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Với ba điểm O, A, B bất kì ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Nhận xét: Công thức trên cho ta cách biểu thị một vector thành hiệu hai vector có cùng điểm đầu. Ta cũng gọi công thức trên là quy tắc trừ.

III. Trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác

I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$.

G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tìm tổng, hiệu của hai hay nhiều vector

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Cho các điểm E, F, G, H, K . Thực hiện các phép cộng vector:

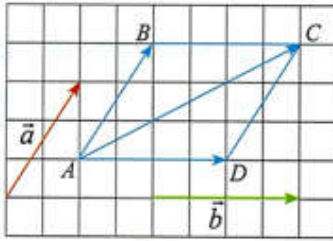
$$\vec{EF} + \vec{FH}; \vec{FK} + \vec{KG}; \vec{EH} + \vec{HE}$$

Lời giải

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$$\vec{EF} + \vec{FH} = \vec{EH}; \quad \vec{FK} + \vec{KG} = \vec{FG}; \quad \vec{EH} + \vec{HE} = \vec{EE} = \vec{0}$$

Tìm tổng của hai vector \vec{a} và \vec{b} trong Hình.



Ta có: $\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{AD}$, suy ra $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AB} + \vec{AD}$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.

Vậy $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$.

Câu 2. Cho tứ giác $ABCD$. Thực hiện các phép cộng vector sau:

a) $(\vec{AB} + \vec{CA}) + \vec{BC}$,

b) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng vector, ta có:

a) $(\vec{AB} + \vec{CA}) + \vec{BC} = (\vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{CB} + \vec{BC} = \vec{CC} = \vec{0}$.

b) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}$.

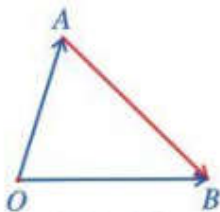
Câu 3. Cho các điểm M, N, P, Q . Thực hiện các phép trừ vector sau: $\vec{MN} - \vec{PN}; \vec{PM} - \vec{PQ}$.

Lời giải

Ta có:

$$\vec{MN} - \vec{PN} = \vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}; \quad \vec{PM} - \vec{PQ} = \vec{PM} + \vec{QP} = \vec{QP} + \vec{PM} = \vec{QM}$$

Câu 4. Cho ba điểm A, B, O .



Vector $\vec{OB} - \vec{OA}$ là vector nào?

Lời giải

Ta có: $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OB} + (-\vec{OA}) = \vec{OB} + \vec{AO} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$.

Câu 5. Cho bốn điểm bất kỳ A, B, C, D . Chứng minh

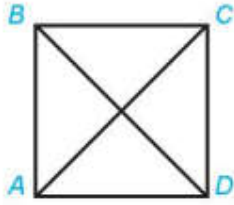
$$\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{CD} - \vec{CB} = \vec{0}.$$

Lời giải

Ta có: $\vec{AB} - \vec{AD} + \vec{CD} - \vec{CB} = (\vec{AB} - \vec{AD}) + (\vec{CD} - \vec{CB}) = \vec{DB} + \vec{BD} = \vec{DD} = \vec{0}$

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$.

Lời giải



Do $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$.

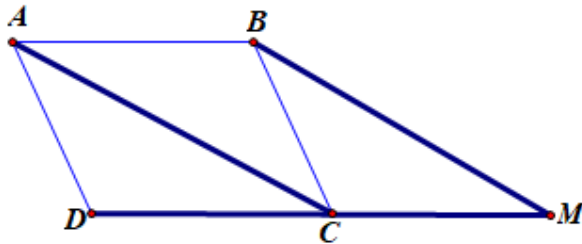
Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = \sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

Do đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}| = AC = \sqrt{2}$.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai vector \overrightarrow{CD} và \overrightarrow{CM}

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (do $ABCD$ là hình bình hành)

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

\Rightarrow Tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$. Mà $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CM}$

$\Rightarrow C$ là trung điểm DM .

Nói cách khác: $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$ hay hai vector \overrightarrow{CD} và \overrightarrow{CM} đối nhau.

Câu 8. Cho tứ giác $ABCD$, thực hiện cả phép cộng và trừ vector sau:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$

c) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$

Câu 9. Cho tứ giác $ABCD$, tìm các vector sau:

a) $\vec{m} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC}$

b) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$

c) $\vec{m} - \vec{n}$.

Lời giải

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép cộng vector, ta có:

a) $\vec{m} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

b) $\vec{n} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AC} + \vec{0} = \overrightarrow{AC}$

c) $\vec{m} - \vec{n} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD}$.

Câu 10. Cho tam giác MNQ , thực hiện các phép trừ vector sau:

- a) $\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{QN}$
- b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QN}$.

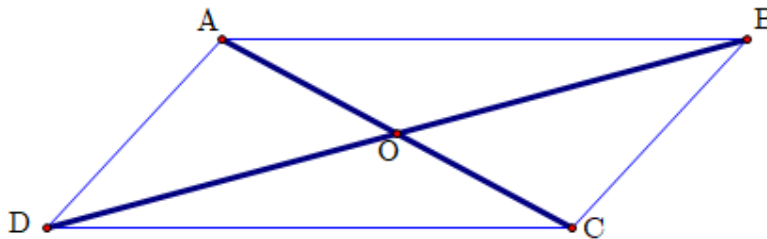
Lời giải

- a) $\overrightarrow{QM} - \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{NM}$
- b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ}$.

Câu 11. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD . Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}|$;
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB}$
- c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

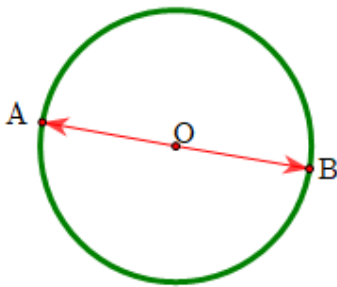
Lời giải



- a) Theo quy tắc hình bình hành nên a) đúng
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{CB}$ nên b) sai
- c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} \neq \vec{0}$ nên c) sai

Câu 12. Cho đường tròn tâm O . Giả sử A, B là hai điểm nằm trên đường tròn. Tìm điều kiện cần và đủ để hai vector \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} đối nhau.

Lời giải



Hai vector đối nhau khi chúng cùng phương, ngược hướng và có độ lớn bằng nhau

Do đó, để hai vector \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} đối nhau khi và chỉ khi AB là đường kính của đường tròn tâm O .

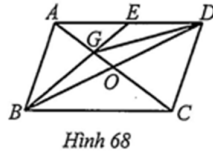
Câu 13. Cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo, E là trung điểm của AD , G là giao điểm của BE và AC . Tính:

- a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$
- b) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD}$.

Lời giải

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của cả hai đoạn thẳng AC và BD . Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ hay $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

b) Vì tam giác ABD (Hình 68) có hai đường trung tuyến AO và BE cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của tam giác. Do đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.



Hình 68

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 14. Cho hai véc-tơ \vec{a} và \vec{b} sao cho $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$.

a) Dựng $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng O là trung điểm của AB .

b) Dựng $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$. Chứng minh rằng $B \equiv O$.

Lời giải.

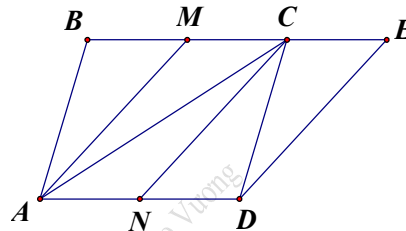
a) $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OB} = -\vec{OA} \Rightarrow O$ là trung điểm của AB .

b) $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OB} = \vec{0} \Rightarrow B \equiv O$.

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Xác định tổng của hai véc-tơ \vec{NC} và \vec{MC} , \vec{AM} và \vec{CD} , \vec{AD} và \vec{NC} , \vec{AM} và \vec{AN} .

Lời giải.

Vì $\vec{MC} = \vec{AN}$ nên $\vec{NC} + \vec{MC} = \vec{NC} + \vec{AN} = \vec{AN} + \vec{NC} = \vec{AC}$.



Vì $\vec{CD} = \vec{BA}$ nên $\vec{AM} + \vec{CD} = \vec{AM} + \vec{BA} = \vec{BA} + \vec{AM} = \vec{BM}$.

Vì $\vec{NC} = \vec{AM}$ nên $\vec{AD} + \vec{NC} = \vec{AD} + \vec{AM} = \vec{AE}$,

với E là đỉnh của hình bình hành $DAME$.

Vì tứ giác $AMCN$ là hình bình hành nên $\vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AC}$.

Câu 16. Cho tam giác ABC . Các điểm M , N và P lần lượt là trung điểm của AB , AC và BC . Xác định hiệu $\vec{AM} - \vec{AN}$; $\vec{MN} - \vec{NC}$; $\vec{MN} - \vec{PN}$; $\vec{BP} - \vec{CP}$.

Lời giải.

Ta có $\vec{AM} - \vec{AN} = \vec{NM}$.

Vì $\vec{NC} = \vec{MP}$ nên $\vec{MN} - \vec{NC} = \vec{MN} - \vec{MP} = \vec{PN}$.

Vì $-\vec{PN} = \vec{NP}$ nên $\vec{MN} - \vec{PN} = \vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}$.

Vì $-\vec{CP} = \vec{PC}$ nên $\vec{BP} - \vec{CP} = \vec{BP} + \vec{PC} = \vec{BC}$.

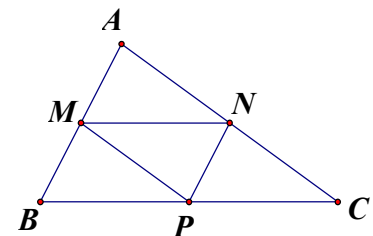
Dạng 2. Chứng minh một đẳng thức vector

Phương pháp:

- Biến đổi từ biểu thức vế này sang vế kia.

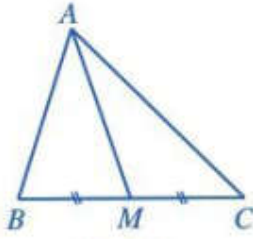
- Chứng minh hai biểu thức vector cùng bằng một vector trung gian

- Chứng minh hai biểu thức vector cùng bằng một biểu thức vector trung gian bằng cách sử dụng quy tắc trừ với điểm đầu là điểm O bất kì.



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 17. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM



Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM}$.

Lời giải

Vì $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BM} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM}$

Câu 18. Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm O bất kì. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Lời giải

Áp dụng quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

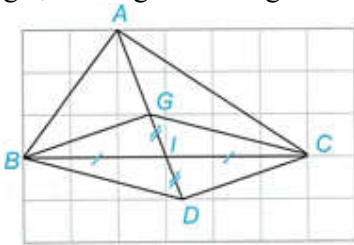
Câu 19. a) Chứng minh rằng nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Lời giải

a) Khi I là trung điểm của AB , thì hai vectơ \overrightarrow{IA} và \overrightarrow{IB} có cùng độ dài và ngược hướng. Do đó, \overrightarrow{IA} và \overrightarrow{IB} đối nhau, suy ra $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

b) Trọng tâm G của tam giác ABC thuộc trung tuyến AI và $GA = 2GI$. Lấy điểm D đối xứng với G qua I . Khi đó tứ giác $GBDC$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là một hình bình hành. Ta có $GA = 2GI = GD$. Hai vectơ \overrightarrow{GA} và \overrightarrow{GD} có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau, do đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

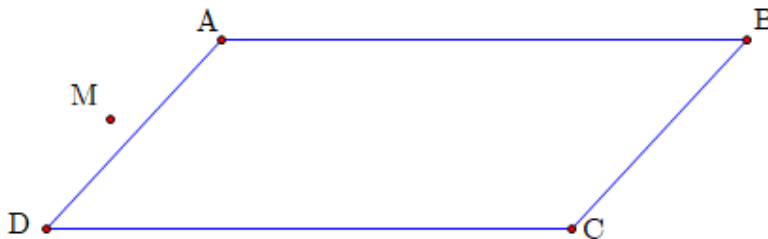


Trong hình bình hành $GBDC$, ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.

Vậy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Câu 20. Cho $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}$ với mỗi điểm M trong mặt phẳng.

Lời giải



Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC} \end{cases}$$

Mà $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên được điều phải chứng minh

Câu 21. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

Từ các đẳng thức trên, ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 22. Cho tứ giác $ABCD$, O là trung điểm của AB . Chứng minh: $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$

Lời giải

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

Câu 23. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

Câu 24. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$

Câu 25. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Chứng minh $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

Suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC, |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = BD$.

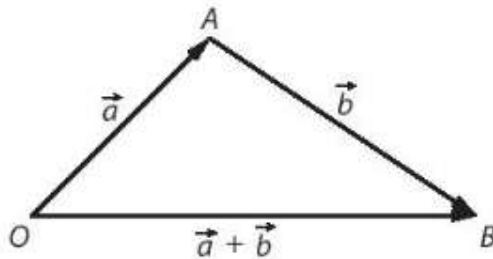
Do $AC = BD$ nên $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

Câu 26. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} không cùng phương. Chứng minh rằng

$$|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Lời giải

Từ một điểm O bất kì, ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ rồi vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$.



Vì \vec{a}, \vec{b} không cùng phương nên O, A, B không thẳng hàng. Khi đó, trong tam giác OAB , ta có $OA - AB < OB < OA + AB$ hay là $|\vec{a}| - |\vec{b}| < |\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

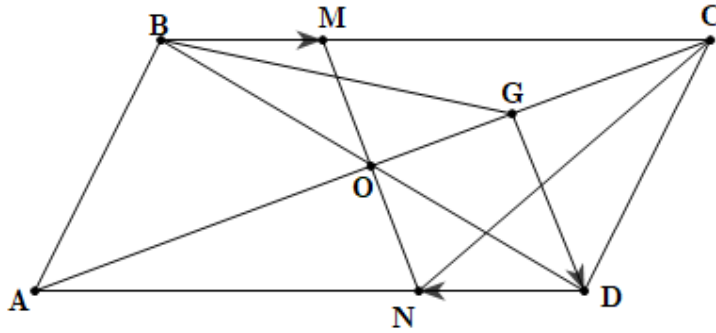
Câu 27. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . M là một điểm tùy ý thuộc cạnh BC , khác B và C . MO cắt cạnh AD tại N .

a) Chứng minh rằng O là trung điểm MN .

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD . Chứng minh rằng G cũng là trọng tâm tam giác MNC .

Lời giải

a) HD. Chứng minh hai tam giác BOM và DON bằng nhau.



b) Do O là trung điểm của BD và MN nên $BMDN$ là một hình bình hành.

Suy ra $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$. (1)

Do G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. (2)

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BM}$ và $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DN}$. Từ đó và (1), (2) suy ra $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GC} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DN}) = (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN}) = \vec{0}$

Suy ra G là trọng tâm tam giác MNC .

Câu 28. Cho tứ giác $ABCD$.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

b) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

a) Theo tính chất kết hợp của phép cộng vector, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}\end{aligned}$$

b) Do $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$.

Do tính kết hợp của phép cộng, ta được $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Từ đó $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Do tính kết hợp, giao hoán của phép cộng vector, tính chất của vector $\vec{0}$, nên

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

Câu 29. Cho tứ giác $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD và O là trung điểm của IJ .

Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Lời giải

Do I, J, O lần lượt là trung điểm của AB, CD và IJ nên:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}; \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD} = \vec{0}; \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} &= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JC}) + (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JD}) \\ &= (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}) + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) = \vec{0}\end{aligned}$$

Câu 30. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo và một điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$

Lời giải

a) $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$$

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})$

$$= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC})$$

$$= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \quad (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0})$$

Câu 31. Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

Lời giải

a) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$

Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

Suy ra, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$

Câu 32. Cho hình thoi $ABCD$ và M là trung điểm cạnh AB , N là trung điểm cạnh CD . Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}.$$

Lời giảiGọi O là tâm của hình thoi. Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MN}$.**Câu 33.** Chứng minh rằng với tứ giác $ABCD$ bất kì, ta luôn có:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

Lời giảia) Theo quy tắc ba điểm của phép cộng vector, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$.

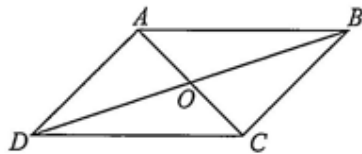
Câu 34. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$;

c) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$;

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Lời giảia) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm AC, BD .

Hình 2

Do đó $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$.

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}.$$

c) Ta có $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$.

Mà $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (do $ABCD$ là hình bình hành) $\Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$.

d) Ta có $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

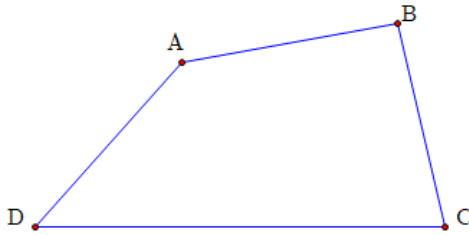
Do đó $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Câu 35. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

Lời giải



$$\begin{aligned} \text{a) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CB} &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} \\ \text{b) } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0} \end{aligned}$$

Câu 36. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.

Lời giải

$$\text{Cách 1: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 3: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} \\ &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AE}. \end{aligned}$$

Câu 37. Cho tam giác ABC . Gọi G là trọng tâm của tam giác. M, N, P là ba điểm bất kì. Chứng minh $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$.

Lời giải

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên ta có: } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} &= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CP} \\ &= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}. \end{aligned}$$

Nhận xét: Ta đã sử dụng quy tắc cộng để tách mỗi vector ở vế trái bằng tổng một vector ở vế phải cộng với một vector khác.

Câu 38. Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F .

$$\text{Chứng minh } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA}.$$

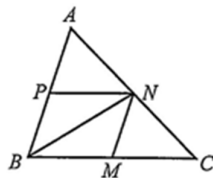
Lời giải

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF}) \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}) - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OF}) \\ &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} \end{aligned}$$

$$\text{Từ hai đẳng thức trên, ta có: } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{FA}. \quad 88$$

Câu 39. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NB}$.

Lời giải



Hình 35

Ta biến đổi tổng của hai vector không cùng điểm đầu về tổng của hai vector cùng điểm đầu và dùng quy tắc hình bình hành.

Vì NP là đường trung bình của tam giác ABC (Hình 35) nên $NP \parallel BC, NP = \frac{1}{2}BC$. Suy ra

$NP \parallel BM, NP = BM$ và tứ giác $BMNP$ là hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$.

Suy ra $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB}$

Câu 40. Cho hai vector \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$. Chứng minh rằng nếu hai vector cùng hướng thì $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.

Lời giải

Từ một điểm A trong mặt phẳng, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Nếu hai vector \vec{a}, \vec{b} cùng hướng thì ba điểm A, B, C thẳng hàng, B nằm giữa A và C . Suy ra $AB + BC = AC$. Vậy $|\vec{a}| + |\vec{b}| = AB + BC = AC = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\vec{a} + \vec{b}|$.

Câu 41. Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có cùng trọng tâm là G . Chứng minh $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

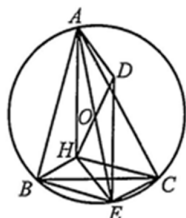
Lời giải

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GC'} \\ &= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}) \\ &= -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'}) = -\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Câu 42. Cho tam giác nhọn ABC có các cạnh đôi một khác nhau. Gọi H, O lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác, D là điểm đối xứng với H qua O . Chứng minh $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$.

Lời giải

Kẻ đường kính AE . Ta có $BH \parallel EC, CH \parallel BE$. Suy ra $BHCE$ là hình bình hành. Tứ giác $AHED$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên cũng là hình bình hành. Ta có: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HD}$



Hình 69

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 43. Chứng minh rằng điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

Lời giải.

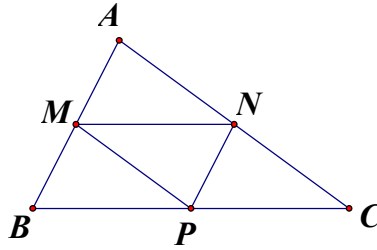
Nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $IA = IB$ và hai véc-tơ $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ ngược hướng. Vậy $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$

Ngược lại, nếu $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$ thì $IA = IB$ và hai véc-tơ $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}$ ngược hướng. Do đó A, I, B thẳng hàng. Vậy I là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Câu 44. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của AB, AC và BC . Chứng minh rằng với điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Lời giải.

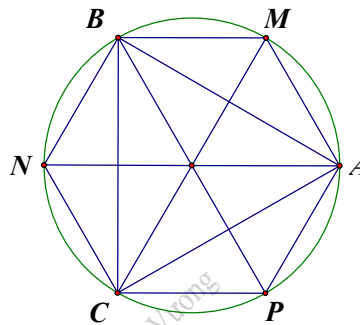
$$\text{Ta có } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}$$



$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{NC} \\
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{AN} \\
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM} \\
 &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} + \vec{0} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}.
 \end{aligned}$$

Câu 45. Gọi O là tâm của tam giác đều ABC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Lời giải.



Vẽ lục giác đều $AMBNCP$ nội tiếp đường tròn (O) .

Vì $BOCN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ON}$.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$.

Câu 46. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Chứng minh rằng

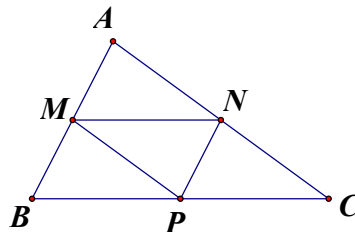
a) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Lời giải.

a) Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $PN \parallel BM, MN \parallel BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$.



Vì N là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$.

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}.$$

b) Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$,
kết hợp với quy tắc trừ $\Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$.
Mà $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC . Vậy $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$.

c) Theo quy tắc ba điểm ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}) \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) - (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP}).\end{aligned}$$

Theo câu a) ta có $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$.

Câu 47. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, suy ra $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AO} = \vec{0}$.

Tương tự: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

c) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$
 $= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Câu 48. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là một điểm bất kì trên đường chéo AC . Qua O kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của hình bình hành. Các đường thẳng này cắt AB và DC lần lượt tại M và N , cắt AD và BC lần lượt tại E và F . Chứng minh

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

b) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN}$

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Vậy $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

b) Tứ giác $AMOE$ và tứ giác $OFCN$ là hình bình hành nên

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{FN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{FC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FO}) + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{FC}) = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC}) \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}.\end{aligned}$$

Câu 49. Cho năm điểm A, B, C, D, E . Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$.

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

a) Biến đổi về trái ta có

$$\overrightarrow{VT} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DA}$$

$$= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{VP} \text{ (đpcm).}$$

b) Đẳng thức tương đương với $(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$

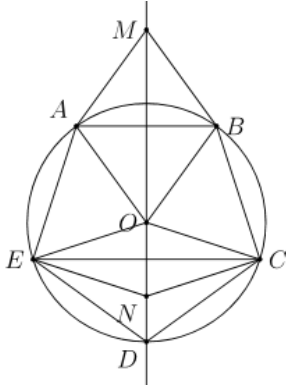
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \text{ (đúng).}$$

Câu 50. Cho ngũ giác đều $ABCDE$ tâm O . Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Lời giải

Ta chứng minh $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ có hai giá khác nhau.

Gọi d là đường thẳng chứa OD thì d là một trục đối xứng của ngũ giác đều.



Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$, trong đó M là đỉnh của hình thoi $OAMB$ và thuộc d .

Tương tự $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{ON}$, trong đó N thuộc d .

Do đó $\vec{v} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE}) + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OD}$ có giá là d .

Ta ghép $\vec{v} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OE}$ thì \vec{v} có giá là đường thẳng OE .

Vì \vec{v} có $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ giá khác nhau nên $\vec{v} = \vec{0}$.

Câu 51. Cho các điểm A, B, C, D, E, F . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$.

Lời giải

Cách 1. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BF}) + (\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FE} = \vec{0} \text{ (đúng).}$$

$$\text{Cách 2. } \overrightarrow{VT} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF})$$

$$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{VP}.$$

Câu 52. Cho lục giác đều $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn tâm O , và M là một điểm bất kì. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}$.

Lời giải

a) Tâm O của lục giác đều là tâm đối xứng của lục giác nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$, $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$.

$$\text{Do đó } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF}) = \vec{0}.$$

b)

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FE}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{FE})$$

$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \\
 &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} + \vec{0} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF}.
 \end{aligned}$$

Dạng 3. Tính độ dài của một vector tổng; vector hiệu

Phương pháp:

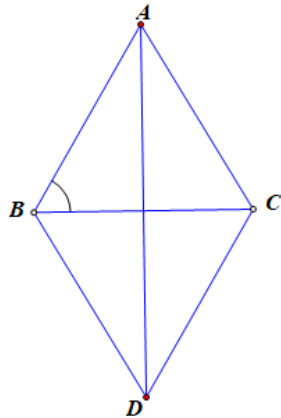
- Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác để tính độ dài.
- Sử dụng tính chất của các tam giác đặc biệt: tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, tam giác vuông cân.
- Sử dụng tính chất của tứ giác đặc biệt: hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành,...

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 53. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Dựng hình bình hành $ABDC$ tâm O như hình vẽ.



Ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD$$

Vì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành, lại có $AB = AC = BD = CD = a$ nên $ABDC$ là hình thoi.

$$\Rightarrow AD = 2AO = 2 \cdot AB \cdot \sin B = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a \text{ và } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$$

Câu 54. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O , độ dài các cạnh bằng 1.

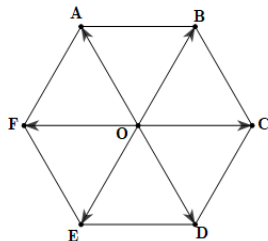
a) Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

b) Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$.

Lời giải

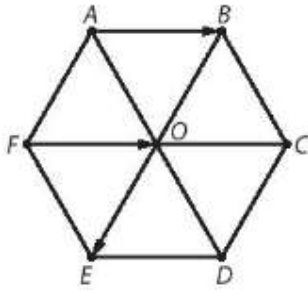
a) Do O là tâm của lục giác đều $ABCDEF$ nên O là trung điểm của các đường chéo AD, BE, CF .



$$\text{Khi đó } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}, \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}.$$

b) Theo kết quả của bài tập 4.4, ta được $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{FE}$



Từ đó, do độ dài các cạnh của lục giác $ABCDEF$ bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OE}| = |\overrightarrow{EF}| = 1$.

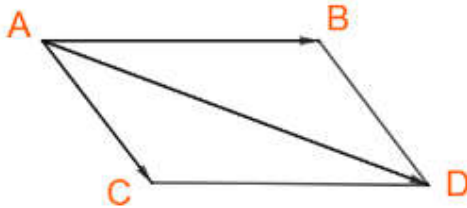
Câu 55. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính độ dài các vectơ:

- a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$
- b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
- c) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

Lời giải

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = BC = a$

b) Vẽ hình bình hành $ABDC$, giao điểm của hai đường chéo là O ta có:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = AD = a\sqrt{3}$$

c) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$
 $\Rightarrow |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = CA = a$

Câu 56. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và ba điểm G, H, K thỏa mãn

$$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}; \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}; \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{AG}$

Lời giải

Ta có $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

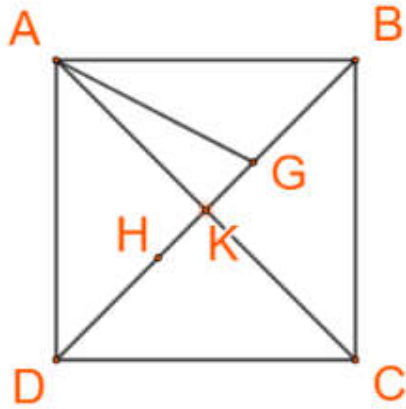
+) $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Suy ra K là trung điểm $AC \Rightarrow AK = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

+) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$, suy ra H là trọng tâm của tam giác ADC

$\Rightarrow DH = \frac{2}{3} DK = \frac{1}{3} DB(1)$

+) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC



$$\Rightarrow BG = \frac{2}{3}BK = \frac{1}{3}BD(2)$$

$$\text{Từ (1,2)} \Rightarrow HG = \frac{1}{3}BD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Mà } KG = KH = \frac{1}{2}HG = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

$$\Rightarrow AG = \sqrt{AK^2 + GK^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{3} \Rightarrow |\overrightarrow{AG}| = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{Vậy } |\overrightarrow{KA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |\overrightarrow{GH}| = \frac{a\sqrt{2}}{3}, |\overrightarrow{AG}| = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 57. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 1. Tính độ dài của các vector sau:

a) $\vec{a} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CB}$

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

a) $\vec{a} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$.

Suy ra $|\vec{a}| = AD = 1$.

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC}$.

Suy ra $|\vec{b}| = AC = \sqrt{2}$.

Câu 58. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1 và M là trung điểm BC . Tính độ dài của các vector sau:

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

b) $\vec{b} = (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})$.

Lời giải

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Suy ra $|\vec{a}| = CB = 1$.

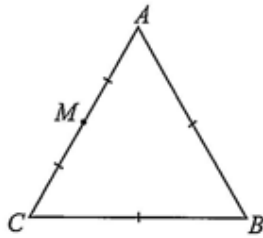
b) $\vec{b} = (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM}) = 2\overrightarrow{AM}$.

Suy ra $|\vec{b}| = 2AM = \sqrt{3}$.

Câu 59. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a . Tính độ dài của các vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = a$. Gọi M là trung điểm cạnh AC .



Hình 1

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = -2\overrightarrow{BM}$.

Khi đó: $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{BM}| = 2BM = a\sqrt{3}$.

Câu 60. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và có cạnh bằng a . Cho 2 điểm M, N thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}; \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$$

Tìm độ dài các vector $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{NO}$.

Lời giải

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$ suy ra M là trung điểm của AD . Khi đó $MA = \frac{a}{2}$.

$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ suy ra N là trọng tâm của tam giác BDC . Ta có $NO = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Câu 61. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính độ dài của các vector sau:

a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$

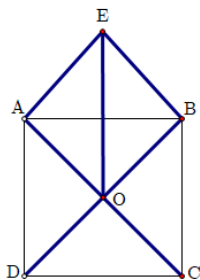
c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ với O là giao điểm của AC và BD .

Lời giải

a) $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = a\sqrt{2}$

b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = a\sqrt{2}$

c) Vẽ hình bình hành $OAEB$ vì góc $\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow OAEB$ là hình vuông nên ta có



$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}| = a\sqrt{2}$$

Câu 62. Cho ABC là tam giác đều cạnh a . Tính:

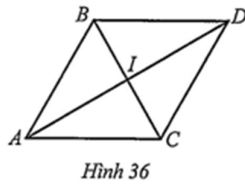
a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$,

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC = a$.

b) Dựng hình bình hành $ABDC$, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. Gọi I là giao điểm của AD và BC , ta có I là trung điểm của BC và AD (Hình 36).



Hình 36

Vì tam giác ABC đều nên $AI \perp BC \Rightarrow AI = AB \cdot \sin B = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AI = a\sqrt{3}$.

Câu 63. Cho tam giác ABC có $AB = 2a, AC = 3a, \widehat{BAC} = 45^\circ$ (Hình 37). Tính:



Hình 37

a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

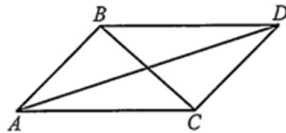
a) Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = BC$.

Áp dụng định lý côsin cho tam giác ABC ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= (2a)^2 + (3a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 45^\circ = (13 - 6\sqrt{2})a^2. \end{aligned}$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{13 - 6\sqrt{2}}$.

b) Dựng hình bình hành $ABDC$ (Hình 38), ta có:



Hình 38

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 135^\circ, BD = AC = 3a.$$

Áp dụng định lý côsin cho tam giác ABD ta có:

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD} \\ &= (2a)^2 + (3a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 135^\circ = (13 + 6\sqrt{2})a^2. \end{aligned}$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$.

Câu 64. Cho tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có: $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = BD = AC$.

Vì $ABCD$ cũng là một hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Từ đó suy ra $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

Câu 65. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = 4a, AC = 5a$. Tính:

a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$;

b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

a) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{41}$ b) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{41}$

Câu 66. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính:

- a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$
 b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$;
 c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

Lời giải

a) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = a$. b) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = a$ c) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

Câu 67. Cho tam giác ABC thỏa mãn $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$. Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .

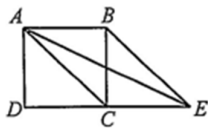
Lời giải

Dựng hình bình hành $ABDC$. Từ giả thiết suy ra $AD = BC$ nên $ABCD$ là hình chữ nhật. Do đó tam giác ABC vuông tại A .

Câu 68. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Dựng hình bình hành $ABEC$ (Hình 67).



Hình 67

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = AE$.

Vì $CD \parallel AB, CE \parallel AB$ nên C, D, E thẳng hàng.

Ta có: $DE = DC + CE = 2a$.

Tam giác ADE vuông tại D , suy ra

$$AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5} .$$

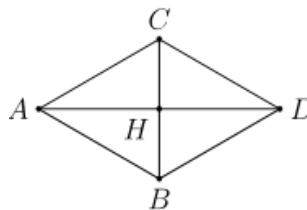
Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}| = a\sqrt{5}$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 69. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ và $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$.

Lời giải

Từ tam giác đều ABC cạnh a , vẽ hình thoi $BACD$ thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ nên $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = AD$



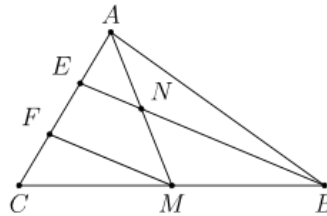
$$= 2AH = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} .$$

Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ nên $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a$.

Câu 70. Cho tam giác ABC có trung tuyến AM . Trên cạnh $AC = b$ lấy hai điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt trung tuyến AM tại N . Tính độ dài vector $\vec{u} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FC}$. Vì $MF \parallel BE$ nên N là trung điểm của AM . Suy ra $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{MN} = \vec{0}$.

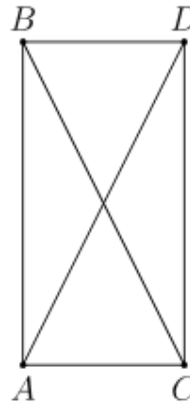


Do đó $\vec{u} = \vec{AE} + \vec{AF} + \vec{AN} + \vec{MN} = \vec{AF} + \vec{FC} = \vec{AC}$ nên $|\vec{u}| = AC = b$.

Câu 71. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $BC = a\sqrt{5}$. Tính độ dài của các vector $\vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{AC} - \vec{BC}$ và $\vec{AB} + \vec{AC}$.

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm ta có $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



$$\text{Mà } \sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \sin \widehat{ABC} = a\sqrt{5} \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Do đó } |\vec{AB} + \vec{BC}| = |\vec{AC}| = AC = \frac{a\sqrt{5}}{2}; \vec{AC} - \vec{BC} = \vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}.$$

$$\text{Ta có: } AC^2 + AB^2 = BC^2 \Rightarrow AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{5a^2 - \frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{Vì vậy } |\vec{AC} - \vec{BC}| = |\vec{AB}| = AB = \frac{a\sqrt{15}}{2}.$$

Gọi D là điểm sao cho tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.

Khi đó theo quy tắc hình bình hành ta có $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$.

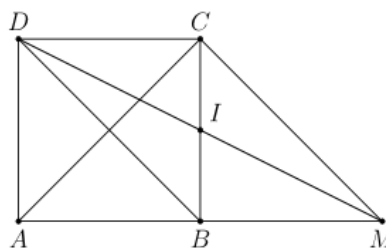
Vì tam giác ABC vuông tại A nên tứ giác $ABDC$ là hình chữ nhật suy ra $AD = BC = a\sqrt{5}$.

$$\text{Vậy } |\vec{AB} + \vec{AC}| = |\vec{AD}| = AD = a\sqrt{5}.$$

Câu 72. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh b . Tính $|\vec{DA} - \vec{AB}|$, $|\vec{DA} + \vec{DC}|$, $|\vec{DB} + \vec{DC}|$

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{DA} - \vec{AB} = \vec{DA} - \vec{DC} = \vec{CA} \text{ nên } |\vec{DA} - \vec{AB}| = |\vec{CA}| = CA = b\sqrt{2}.$$



Ta có $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$ nên $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = b\sqrt{2}$.

Vẽ hình bình hành $CDBM$ thì DM cắt BC tại trung điểm I của mỗi đường.

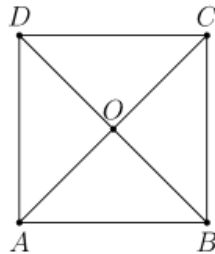
Ta có $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM}$ nên $|\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DM}| = DM = 2DI$.

$$\text{Mà } DI^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}b^2 \Rightarrow |\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}| = b\sqrt{5}.$$

Câu 73. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có O là giao điểm của hai đường chéo. Hãy tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$, $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$ và $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}|$

Lời giải

Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BO}$. Do đó $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Vì $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}| = 2a$.

Ta có $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$. Do đó $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = BD = a\sqrt{2}$.

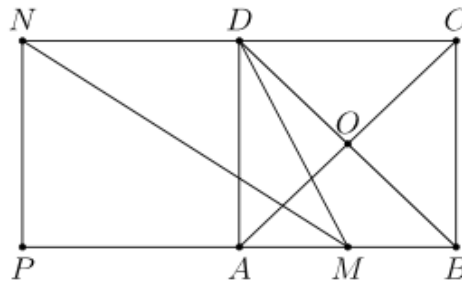
Câu 74. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có tâm O . Gọi M là trung điểm của AB , N là điểm đối xứng với C qua D . Hãy tính độ dài của các vectơ sau $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD ta có

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}. \text{ Suy ra } |\overrightarrow{MD}| = MD = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P .



Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NPM ta có

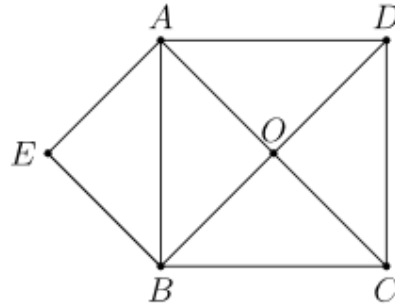
$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}. \text{ Suy ra } |\overrightarrow{MN}| = MN = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Câu 75. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a có tâm O và M là trung điểm của AB . Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Lời giải

Ta có $|\overline{AB}| = AB = a$. $|\overline{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$.

$$|\overline{OA}| = OA = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |\overline{OM}| = OM = \frac{a}{2}.$$



Gọi E là điểm sao cho tứ giác $OBEA$ là hình bình hành. Khi đó nó cũng là hình vuông.

Ta có $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OE} \Rightarrow |\overline{OA} + \overline{OB}| = |\overline{OE}| = OE = AB = a$.

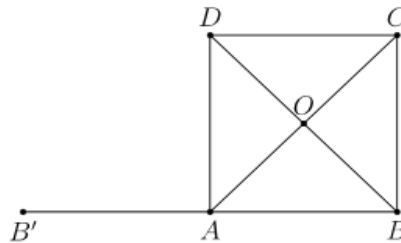
Câu 76. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a . M là một điểm bất kỳ

a) Tính $|\overline{AB} + \overline{OD}|$, $|\overline{AB} - \overline{OC} + \overline{OD}|$

b) Tính độ dài vectơ $\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC} + \overline{MD}$

Lời giải

a) Ta có $\overline{OD} = \overline{BO} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{OD} = \overline{AB} + \overline{BO} = \overline{AO}$. $|\overline{AB} + \overline{OD}| = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Ta có: $\overline{OC} = \overline{AO}$. Suy ra

$$\overline{AB} - \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{AB} - \overline{AO} + \overline{OD} = \overline{OB} + \overline{OD} = \vec{0} \Rightarrow |\overline{AB} - \overline{OC} + \overline{OD}| = 0.$$

b) Áp dụng quy tắc trừ ta có $\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC} + \overline{MD} = (\overline{MA} - \overline{MB}) - (\overline{MC} - \overline{MD}) = \overline{BA} - \overline{DC}$.

Lấy B' là điểm đối xứng của B qua A . Khi đó $-\overline{DC} = \overline{AB'} \Rightarrow \overline{BA} - \overline{DC} = \overline{BA} + \overline{AB'} = \overline{BB'}$

Suy ra $|\overline{MA} - \overline{MB} - \overline{MC} + \overline{MD}| = |\overline{BB'}| = BB' = 2a$.

Câu 77. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh a và M là một điểm bất kỳ. Tính

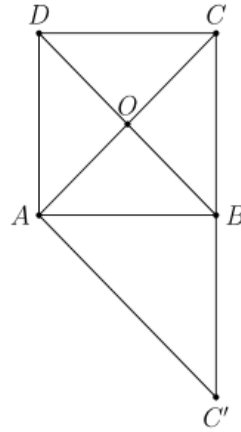
a) Tính $|\overline{AB}| + |\overline{AD}|$

b) Tính $|\overline{OA} - \overline{CB}|$

c) Tính $|\overline{CD} - \overline{DA}|$

Lời giải

a) Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$. Suy ra $|\overline{AB} + \overline{AD}| = |\overline{AC}| = AC$.



Áp dụng định lý Pitago ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = a\sqrt{2}$.

b) Vì O là tâm của hình vuông nên $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$. Suy ra $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}$. Vậy $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BC}| = a$.

c) Do $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Suy ra $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.
Mà $|\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$. Suy ra $|\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}| = BD = a\sqrt{2}$.

Dạng 4. Xác định một điểm thỏa một đẳng thức vector cho trước

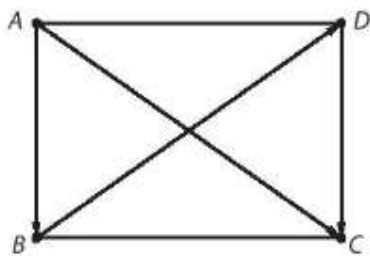
BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 78. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = a, AD = a\sqrt{2}$.

- a) Tính độ dài của vector $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}$.
b) Xác định điểm M sao cho $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$.

Lời giải

a) Do hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ nên độ dài hai đường chéo AC, BD bằng $\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = a\sqrt{3}$.

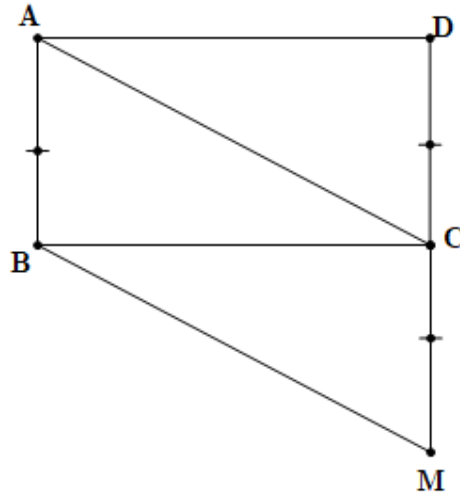


Theo tính chất giao hoán và kết hợp phép cộng vector, ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Do đó $|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$.

b) Do $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$.



Theo kết quả bài tập 4.3, SGK Toán 10 tập 1, đẳng thức $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$ tương đương với tứ giác $ABMC$ là một hình bình hành. Từ đó $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Vậy điểm M cần tìm là điểm đối xứng với D qua C .

Câu 79. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB .

- Xác định vector $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$.
- Xác định điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MA}$.
- Chứng minh rằng $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

a) Do D là trung điểm của BC, E là trung điểm của CA, F là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$.

Do $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$ nên tứ giác $CEFD$ là hình bình hành.

Từ đó $-\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF}$.

Suy ra $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{CB}$

b) Giả sử tìm được điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{MA}$. Khi đó, theo kết quả câu a, ta được $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{MA}$. Suy ra tứ giác $ABCM$ là hình bình hành. Và do đó điểm M cần tìm đối xứng với B qua E .

c) Do $ABCM$ là một hình bình hành, nên $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

Câu 80. Cho hai điểm A, B . Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}|$.

Lời giải

$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow AM = AB.$$

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A bán kính AB .

Câu 81. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}|$

Lời giải

Tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng AC .

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 82. Cho hai điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện sau đây:

- $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM}$

Lời giải

- a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$. Vậy mọi điểm M đều thỏa mãn.
 b) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow A \equiv B$. Vậy không có điểm M nào thỏa mãn
 c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$. Vậy M là trung điểm của đoạn thẳng AB .
 d) $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow M \equiv A$.

Câu 83. Cho tam giác ABC . Tìm điểm M thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$.

Vậy M là điểm xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$ hay M là đỉnh thứ tư trong hình bình hành $ABCM$

Câu 84. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho

- a) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$
 b) $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}|$

Lời giải.

a) Ta có $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow MA = BC$

Vậy M cách điểm A một đoạn bằng BC không đổi nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = BC$.

b) Ta có $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow MA = MC$

Vậy M cách đều 2 điểm A và C nên tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn AC .

Câu 85. Cho 2 điểm A và B . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$

Lời giải.

Vẽ hình bình hành $AMBN$. Gọi O là giao điểm 2 đường chéo, ta có

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = MN = 2MO$$

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = AB$$

$$\text{Điều kiện tương đương } 2MO = AB \Rightarrow MO = \frac{1}{2} AB$$

Tập hợp các điểm M có tính chất $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là đường tròn đường kính AB

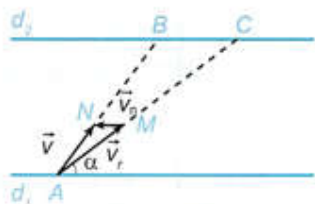
Dạng 5. Bài toán thực tế

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 86. Một con tàu chuyển động từ bờ bên này sang bờ bên kia của một dòng sông với vận tốc riêng không đổi. Giả sử vận tốc dòng nước là không đổi và đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc thực tế của tàu. Nếu không quan tâm đến điểm đến thì cần giữ lái cho tàu tạo với bờ sông một góc bao nhiêu để tàu sang bờ bên kia được nhanh nhất?



Lời giải



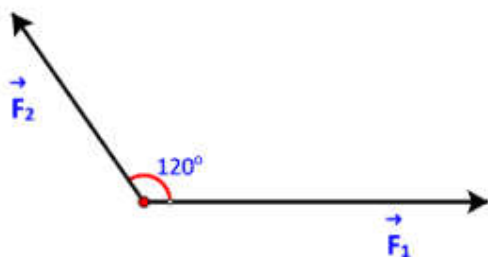
Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Giả sử tàu xuất phát từ $A \in d_1$ và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ góc α . Gọi \vec{v}_r và \vec{v}_n lần lượt là vector vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi M, N là các điểm sao cho $\vec{v}_r = \vec{AM}, \vec{v}_n = \vec{MN}$.

Khi đó tàu chuyển động với vector vận tốc thực tế là $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_n = \vec{AM} + \vec{MN} = \vec{AN}$.

Gọi B, C tương ứng là giao điểm của AN, AM với d_2 . Tàu chuyển động thẳng từ A đến B với vector vận tốc thực tế \vec{AN} , do đó thời gian cần thiết để tàu sang được bờ d_2 là $\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM}$. Mặt

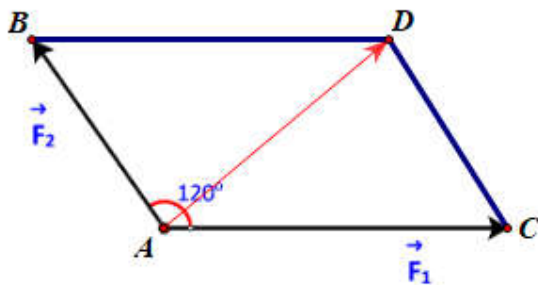
khác, $AM = |\vec{v}_r|$ không đổi nên $\frac{AC}{AM}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC \perp d_2 \Leftrightarrow AM \perp d_2$. Vậy để tàu sang được bờ bên kia nhanh nhất, ta cần giữ bánh lái để tàu luôn vuông góc với bờ.

Câu 87. Hình 4.19 biểu diễn hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 cùng tác động lên một vật, cho $|\vec{F}_1| = 3N, |\vec{F}_2| = 2N$. Tính độ lớn của hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$



Lời giải

Dựng hình bình hành $ABDC$ với hai cạnh là hai vector \vec{F}_1, \vec{F}_2 như hình vẽ



Ta có:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{AC} + \vec{AB} = \vec{AD} \Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{AD}| = AD$$

Xét $\triangle ABD$ ta có:

$$BD = AC = |\vec{F}_1| = 3, AB = |\vec{F}_2| = 2.$$

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Theo định lí cosin ta có:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos \widehat{ABD}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow AD^2 = 19$$

$$\Leftrightarrow AD = \sqrt{19} \text{ V?y } |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{19}$$

Câu 88. Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước.



Lời giải

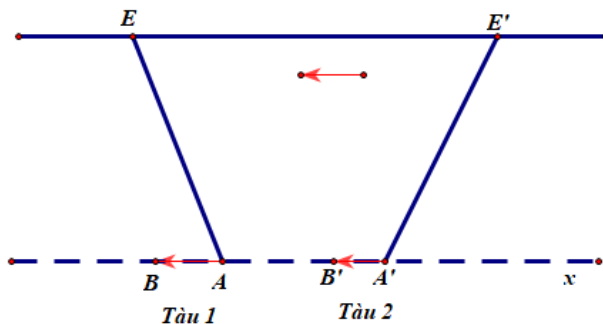
Ta đã biết vector dòng nước và hướng di chuyển (tức là vector vận tốc thực của hai tàu).

Ta cần xác định vector vận tốc của mỗi tàu, chỉ biết chúng có độ lớn bằng nhau.

Giả sử tàu 1 là tàu đi về phía hạ lưu còn tàu 2 là tàu đi về phía thượng nguồn.

Tàu 1 và tàu 2 bắt đầu di chuyển từ điểm A và A' ở bờ bên này đến điểm E, E' ở bờ bên kia.

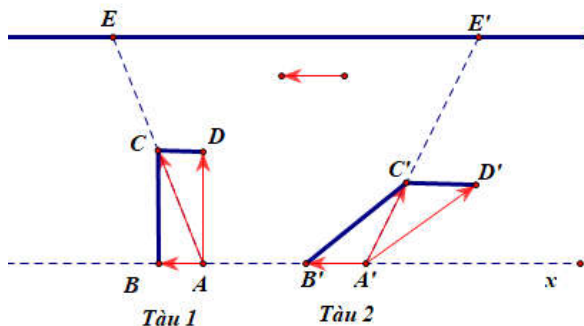
Vector vận tốc dòng nước tác động lên tàu là như nhau, biểu diễn bởi các vector \overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{A'B'}$



Gọi vector vận tốc riêng của hai tàu lần lượt là các vector \overrightarrow{AD} và $\overrightarrow{A'D'}$ Vector vận tốc thực của hai tàu là vector \overrightarrow{AC} và $\overrightarrow{A'C'}$.

Với tàu 1, để xác định các điểm C, D :

Từ B ta kẻ đường vuông góc với bờ, cắt AE tại một điểm, kí hiệu là C . Tiếp theo, dựng hình bình hành $ABCD$ ta được điểm D .



Với tàu 2, để xác định các điểm C', D'

Trên $A'E'$ lấy điểm C' sao cho $B'C' = AD$. Dựng hình bình hành $A'B'C'D'$, ta được điểm D' .

Giải thích:

Tàu 1: Được dòng nước đẩy theo vector \overrightarrow{AB} , và đi với vận tốc thực là vector \overrightarrow{AD} , khi ấy hướng di chuyển là vector tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ chính là vector \overrightarrow{AC}

Tàu 2: Bị dòng nước đẩy theo vector $\overrightarrow{A'B'}$, và đi với vận tốc thực là vector $\overrightarrow{A'D'}$, khi ấy hướng di chuyển là vector tổng $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$ chính là vector $\overrightarrow{A'C'}$

Các vector \overrightarrow{AD} và $\overrightarrow{A'D'}$ có độ dài bằng nhau (cùng bằng $B'C'$).

Do hai tàu chuyển động theo hướng tạo với bờ cùng một góc nhọn nên quãng đường đi khi chạm bờ bên kia là như nhau. Hay $AE = A'E'$.

Tàu nào có độ lớn vận tốc thực lớn hơn thì tàu đó sang bờ bên kia trước.

Xét tam giác $A'B'C'$, theo định lý cosin ta có:

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 - 2A'B' \cdot B'C' \cdot \cos B'$$

$$\text{Mà } 0^\circ < \widehat{B'} < \widehat{C'Ax} < 90^\circ$$

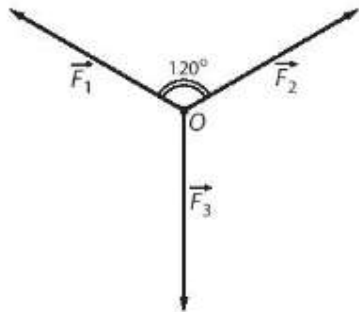
$$\Rightarrow \cos B' > 0 \Rightarrow A'C'^2 < A'B'^2 + B'C'^2$$

Mặt khác, tam giác ABC vuông tại B nên:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow A'C'^2 < AC^2 \text{ hay } A'C' < AC$$

Vậy vận tốc của tàu 1 lớn hơn, nói cách khác tàu đi hướng xuống hạ lưu sẽ sang bờ bên kia trước.

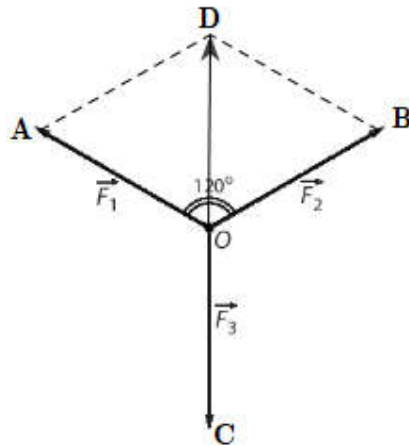
Câu 89. Trên Hình biểu diễn ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng 0. Cho biết cường độ của \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều bằng 100 N và góc tạo bởi \vec{F}_1 và \vec{F}_2 bằng 120° .



Tính cường độ của lực \vec{F}_3 .

Lời giải

Ta sử dụng các vector $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ và \overrightarrow{OD} lần lượt biểu diễn cho các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ và hợp lực \vec{F} của \vec{F}_1, \vec{F}_2 .

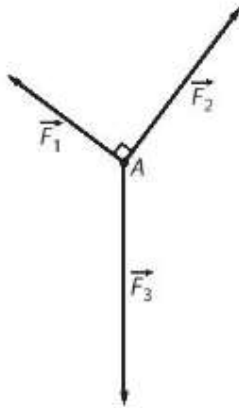


Khi đó, do $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 100$, nên tứ giác $AOBD$ là hình thoi. Từ đó, do $\widehat{AOB} = 120^\circ$, suy ra $\widehat{OAD} = 60^\circ$, do đó tam giác AOD đều. Bởi vậy $|\vec{F}| = OD = OA = 100$.

Do vật ở vị trí cân bằng nên hai lực \vec{F} và \vec{F}_3 ngược hướng và có cường độ bằng nhau, tức là hai vector \overrightarrow{OD} và \overrightarrow{OC} là hai vector đối nhau. Suy ra cường độ của lực \vec{F}_3 bằng

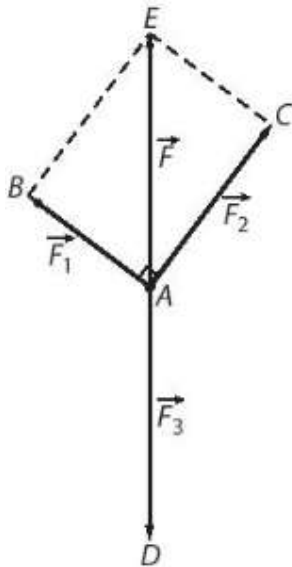
$$|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = 100(N).$$

Câu 90. Trên Hình biểu diễn ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng A . Cho biết $|\vec{F}_1| = 30\text{ N}, |\vec{F}_2| = 40\text{ N}$. Tính cường độ của lực \vec{F}_3 .



Lời giải

Ta sử dụng các vector $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ lần lượt biểu thị cho các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ và vector \vec{AE} biểu thị cho hợp lực \vec{F} của \vec{F}_1, \vec{F}_2 .



Khi đó, do $\widehat{BAC} = 90^\circ$, nên tứ giác $ABEC$ là hình chữ nhật. Từ đó, do $AB = 30(\text{N})$, $AC = 40(\text{N})$, suy ra

$$|\vec{F}| = AE = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50(\text{N}).$$

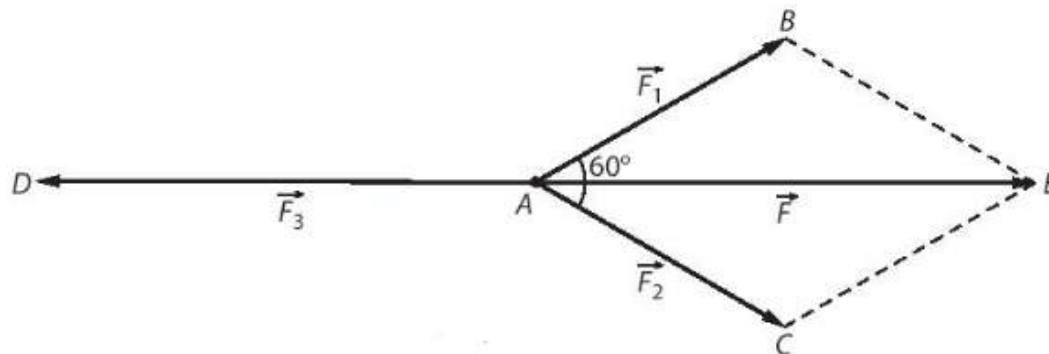
Do vật ở vị trí cân bằng, nên hai lực \vec{F} và \vec{F}_3 có cùng cường độ và ngược hướng, tức là các vector \vec{AE} và \vec{AD} là các vector có cùng độ dài và ngược hướng. Bởi vậy, cường độ của lực \vec{F}_3 bằng $|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = AE = 50(\text{N})$.

Câu 91. Trên mặt phẳng, chất điểm A chịu tác dụng của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ và ở trạng thái cân bằng. Góc giữa hai vector \vec{F}_1, \vec{F}_2 bằng 60° . Tính độ lớn của \vec{F}_3 , biết $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 2\sqrt{3}\text{ N}$

Lời giải

Ta sử dụng các vector $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ lần lượt biểu thị cho các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ và vector \vec{AE} để biểu thị cho hợp lực \vec{F} của hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 . Khi đó, tứ giác $BACE$ là một hình bình hành. Từ đó, do

$AB = AC = 2\sqrt{3}$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $BACE$ là một hình thoi và tam giác ABC là một tam giác đều.



$$\text{Do đó } AE = 2 \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6$$

Do A ở vị trí cân bằng nên hai lực \vec{F} và \vec{F}_3 có cùng cường độ và ngược hướng, tức là các vector \overrightarrow{AD} và \overrightarrow{AE} đối nhau. Bởi vậy, cường độ của lực \vec{F}_3 bằng $|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = AE = 6(N)$.

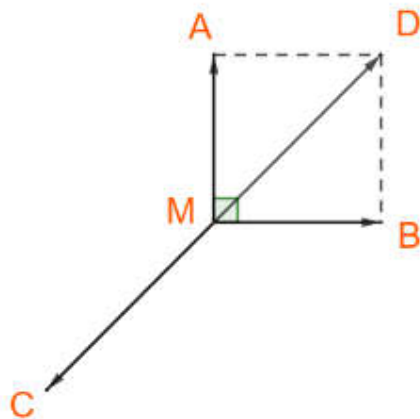
Câu 92. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ và $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều là $10N$ và $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm độ lớn của lực \vec{F}_3 .

Lời giải

Ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ cùng tác dụng vào M và vật đứng yên nên hợp lực của chúng có giá trị bằng không, hay:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Dựng hình bình hành $MADB$, khi đó: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}$



$$\Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MC} \quad (\text{hai vector đối nhau})$$

$$\Rightarrow MD = MC$$

Xét hình bình hành $MADB$, ta có:

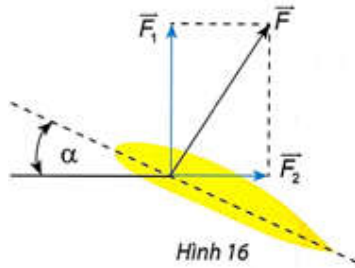
$$AM = AB \text{ và } \widehat{AMB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow MADB \text{ là hình vuông, cạnh } AB = 10$$

$$\Rightarrow MC = MD = AB \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy độ lớn của lực } \vec{F}_3 \text{ là } |\vec{F}_3| = |\overrightarrow{MC}| = MC = 10\sqrt{2} \text{ (N)}$$

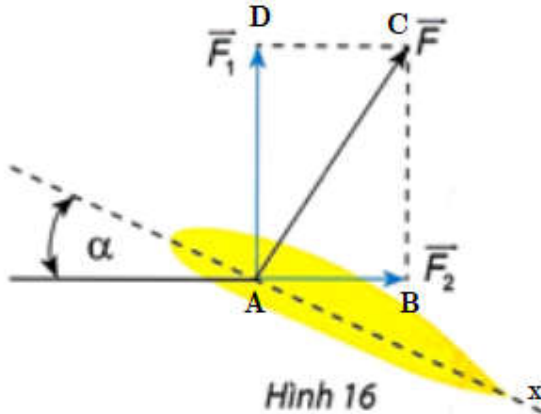
Câu 93. Khi máy bay nghiêng cánh một góc α , lực \vec{F} của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng \vec{F}_1 và lực cản \vec{F}_2 (Hình 16). Cho biết $\alpha = 30^\circ$ và $|\vec{F}| = a$. Tính $|\vec{F}_1|$ và $|\vec{F}_2|$ theo a .



Hình 16

Lời giải

Kí hiệu các điểm như hình dưới



Hình 16

Khi đó các lực $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$ lần lượt là $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ $\alpha = \widehat{BAx} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} = 60^\circ$

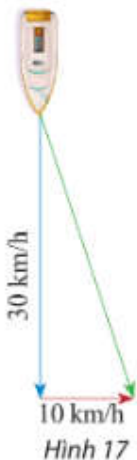
$$AB = AC \cdot \cos \widehat{CAB} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_2| = |\overrightarrow{AB}| = \frac{a}{2} \quad AD = BC = AC \cdot \sin \widehat{CAB} = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_1| = |\overrightarrow{AD}| = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Vậy } |\vec{F}_1| = \frac{a\sqrt{3}}{2}; |\vec{F}_2| = \frac{a}{2}$$

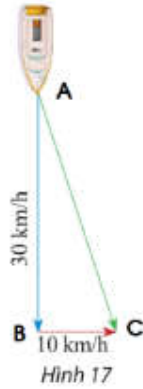
Câu 94. Một con tàu có vector vận tốc chỉ theo hướng nam, vận tốc của dòng nước là một vector theo hướng đông như hình 17. Tính độ dài vector tổng của hai vector nói trên.



Hình 17

Lời giải

Gọi vector vận tốc của tàu là \overrightarrow{AB} , vector vận tốc của dòng nước là vector \overrightarrow{BC}



Hình 17

Ta có vector tổng là $\vec{F} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Độ dài vector tổng là

$$|\vec{F}| = |\vec{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{30^2 + 10^2} = 10\sqrt{10} (km/h)$$

Vậy độ dài vector tổng là $10\sqrt{10} (km/h)$.

- Câu 95.** Một máy bay có vector vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vector theo hướng đông như Hình 7. Tính độ dài vector tổng của hai vector nói trên.



Hình 7

Lời giải

Gọi \vec{AB} và \vec{BC} lần lượt là vector vận tốc của máy bay và vận tốc của gió. Ta có: $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.

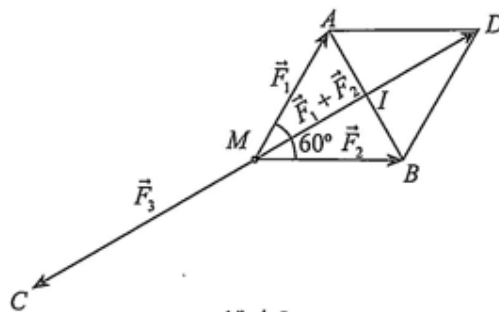
$$\text{Suy ra } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{200^2 + 60^2} \approx 209 (km/h).$$

Vậy độ dài vector tổng của hai vector nói trên là khoảng $209 km/h$.

- Câu 96.** Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{MA}$, $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ và $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết độ lớn của \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều là $100 N$ và $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực \vec{F}_3 .

Lời giải

M đứng yên nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ suy ra $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$.



Hình 3

Ta cần tính $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

$$\text{Cường độ } \vec{F}_1 \text{ và } \vec{F}_2 \text{ đều là } 100 N \Rightarrow |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 100.$$

Dựng hình bình hành $MADB$.

Gọi I là giao điểm của AB và MD , khi đó I là trung điểm của AB và MD .

Mặt khác $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên tam giác ABM đều.

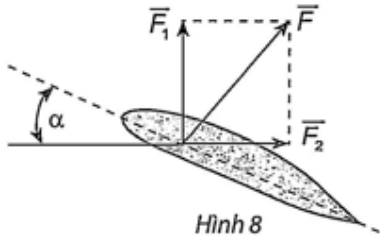
Khi đó $MI \perp AB \Rightarrow \triangle AIM$ vuông tại I .

$$\Rightarrow MI = AM \sin \widehat{MAI} = 100 \cdot \sin 60^\circ = 50\sqrt{3} \Rightarrow MD = 2MI = 2 \cdot 50\sqrt{3} = 100\sqrt{3}.$$

$$\text{Mà } \vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = -(\vec{MA} + \vec{MB}) = -\vec{MD}.$$

Do đó \vec{F}_3 có hướng ngược với hướng của \vec{MD} và có độ lớn $|\vec{F}_3| = |\vec{MD}| = 100\sqrt{3}$.

Câu 97. Khi máy bay nghiêng cánh một góc α , lực \vec{F} của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng \vec{F}_1 và lực cản \vec{F}_2 (Hình 8). Cho biết $\alpha = 45^\circ$ và $|\vec{F}| = a$. Tính $|\vec{F}_1|$ và $|\vec{F}_2|$ theo a .



Lời giải

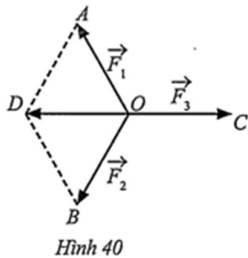
$$\text{Ta có } \cos 45^\circ = \frac{|\vec{F}_2|}{a} \Rightarrow |\vec{F}_2| = |\vec{F}| \cdot \cos 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin 45^\circ = \frac{|\vec{F}_1|}{a} \Rightarrow |\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Câu 98. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \vec{OA}$, $\vec{F}_2 = \vec{OB}$ và $\vec{F}_3 = \vec{OC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm O và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1, \vec{F}_2 đều là 120 N và $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Xác định cường độ và hướng của lực \vec{F}_3 .

Lời giải

Dựng hình bình hành $OADB$ (Hình 40), ta có: $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OD}$. Vì vật đứng yên nên $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$, tức là $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$.



Suy ra $\vec{OD} + \vec{OC} = \vec{0}$ hay O là trung điểm của CD . Như vậy \vec{OD} ngược hướng với \vec{OC} hay hướng của lực \vec{F}_3 ngược hướng với tổng hợp hai lực \vec{F}_1, \vec{F}_2 .

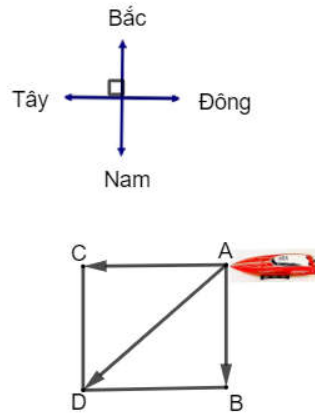
Hình bình hành $OADB$ có $OA = OB$ nên là hình thoi.

Suy ra $\widehat{AOD} = \frac{1}{2} \widehat{AOB} = 60^\circ$ nên tam giác OAD là tam giác đều, do đó $OD = OA$.

Vậy ta có $OC = OA$ và cường độ của lực \vec{F}_3 bằng cường độ của lực \vec{F}_1 và bằng 120 N .

Câu 99. Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là 10 km/h . Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc 40 km/h so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

Lời giải



Ca nô chuyển từ đông sang tây, giả sử ca nô đi theo hướng A sang C , khi đó vận tốc so với mặt nước của ca nô được biểu thị bởi $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AC}$ và có độ lớn $|\vec{v}_1| = 40 \text{ km/h}$, vận tốc dòng chảy được biểu thị bởi $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AB}$ và có độ lớn $|\vec{v}_2| = 10 \text{ km/h}$.

Khi đó vận tốc của ca nô so với bờ sông được biểu thị bởi $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Ta cần tính độ lớn của vector \vec{v} , hay chính là $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$

Dựng hình bình hành ACDB như hình vẽ.

Do hướng nam bắc vuông góc với hướng đông tây nên AB và AC vuông góc với nhau.

Suy ra ACDB là hình chữ nhật.

Nên $AB = CD = 10$, $AC = BD = 40$.

Sử dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông ACD, ta có:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 40^2 + 10^2 = 1700 \Rightarrow AD = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$$

Lại có do ACDB là hình bình hành nên: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ Do đó:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\vec{v}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 10\sqrt{17}$$

Vậy vận tốc của ca nô so với bờ sông là $10\sqrt{17} \text{ km/h}$.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Cho ba điểm M, N, P . Vector $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}$ bằng vector nào sau đây?

- A. \overrightarrow{PN} ;
- B. \overrightarrow{PM}
- C. \overrightarrow{MP} ;
- D. \overrightarrow{NM} .

Lời giải

Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$. **Chọn C**

Câu 2. Cho ba điểm D, E, G . Vector $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG})$ bằng vector nào sau đây?

- A. \overrightarrow{EG}
- B. \overrightarrow{GE} ;
- C. \overrightarrow{GD} ;
- D. \overrightarrow{ED} .

Lời giải

Ta có $\vec{v} = \overrightarrow{DE} + (-\overrightarrow{DG}) = \vec{v} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GE}$. **Chọn B**

Câu 3. Cho ba điểm M, N, P phân biệt. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$
- B. $-\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$

- C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.
D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$.
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA}$.
D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 5. Cho các điểm A, B, O . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.
B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 6. Cho ba điểm A, B, M phân biệt. Điều kiện cần và đủ để M là trung điểm của đoạn thẳng AB là:

- A. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.
B. $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$.
C. $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng.
D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 7. Cho tam giác ABC . Điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm của tam giác ABC là:

- A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GC}$.
B. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG}$.
C. $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB}$.
D. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B

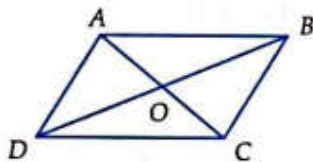
BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 8. Cho hình bình hành tâm O . Kết quả nào sau đây là đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ B. $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB}$

Lời giải

Đáp án B



$$\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$$

Câu 9. Cho ba vector \vec{a} , \vec{b} và \vec{c} khác vector-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. B. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
C. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. D. $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}.$$

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Vector tổng $\vec{CB} + \vec{CD}$ bằng

- A. \vec{CA} . B. \vec{BD} . C. \vec{AC} . D. \vec{DB} .

Lời giải

Chọn A

$$\vec{CB} + \vec{CD} = \vec{CA}.$$

Câu 11. Cho ba điểm phân biệt A, B, C . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. B. $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$.
C. $\vec{CA} + \vec{BC} = \vec{BA}$. D. $\vec{CB} + \vec{AC} = \vec{BA}$.

Lời giải

Chọn D

$$\vec{CB} + \vec{AC} = \vec{AB}.$$

Câu 12. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D . Vector tổng $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA}$ bằng

- A. $\vec{0}$. B. \vec{AC} . C. \vec{BD} . D. \vec{BA} .

Lời giải

Chọn A

$$\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DA} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}.$$

Câu 13. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Vector tổng $\vec{MP} + \vec{NP}$ bằng

- A. \vec{BP} . B. \vec{MN} . C. \vec{CP} . D. \vec{PA} .

Lời giải

Chọn A

$$\vec{MP} + \vec{NP} = \vec{BM} + \vec{MP} = \vec{BP}.$$

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\vec{IA} + \vec{DC} = \vec{IB}$. B. $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{BD}$.
C. $\vec{IA} + \vec{BC} = \vec{IB}$. D. $\vec{AB} + \vec{IA} = \vec{BI}$.

Lời giải

Chọn A

$$\vec{IA} + \vec{DC} = \vec{IA} + \vec{AB} = \vec{IB}.$$

Câu 15. Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A. $\vec{IA} + \vec{DC} = \vec{IB}$. B. $\vec{DA} + \vec{DC} + \vec{BI} = \vec{DI}$.
C. $\vec{ID} + \vec{AB} = \vec{IC}$. D. $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CI} = \vec{IA}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AI}.$$

Câu 16. Cho các điểm phân biệt M, N, P, Q, R . Xác định vector tổng $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$.

- A. \overrightarrow{MP} . B. \overrightarrow{MN} . C. \overrightarrow{MQ} . D. \overrightarrow{MR} .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{MP}.$$

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$.

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Câu 18. Cho tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MP}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PM}.$$

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$, tâm O . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CA}$.
C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$. D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}.$$

Câu 20. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{FE} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

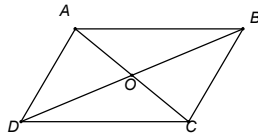
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FA}.$$

Câu 21. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$.
C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. D. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$.

Lời giải

Chọn B



Xét các đáp án:

- Đáp án **A**. Ta có $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Vậy A đúng.
- Đáp án **B**. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$. Vậy B sai.
- Đáp án **C**. Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$. Vậy C đúng.
- Đáp án **D**. Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$. Vậy D đúng.

Câu 22. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

- A. \overrightarrow{BC} . B. \overrightarrow{DA} . C. $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$. D. \overrightarrow{AB} .

Lời giải

Chọn B

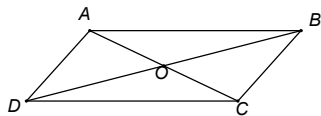
$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}.$$

Câu 23. Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vector $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$ bằng vector nào?

- A. \overrightarrow{BA} . B. \overrightarrow{BC} . C. \overrightarrow{DC} . D. \overrightarrow{AC} .

Lời giải

Chọn B



$$\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

Câu 24. Chọn khẳng định sai:

- A. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- B. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}$.
- C. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
- D. Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{BI} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA} \neq \vec{0}.$$

Câu 25. Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây là đúng:

- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$. B. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
- C. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. D. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

Câu 26. Chỉ ra vector tổng $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RN} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QR}$ trong các vector sau

- A. \overrightarrow{MR} . B. \overrightarrow{MQ} . C. \overrightarrow{MP} . D. \overrightarrow{MN} .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}.$$

Câu 27. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$. B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$.
C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$. D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}. (\text{đúng}).$$

Câu 28. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vector $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$ là:

- A. $\vec{u} = \vec{0}$. B. $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. C. $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$. D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn D

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Câu 29. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vector $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$ bằng:

- A. $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$. B. $\vec{u} = \vec{0}$. C. $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$. D. $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B

$$\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}.$$

Câu 30. Cho 4 điểm A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Câu 31. Cho Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.
C. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. D. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}.$$

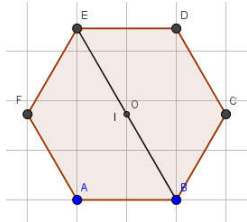
Do $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CO}$ đối nhau, $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DO}$ đối nhau.

Câu 32. Cho Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?

- A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EO} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.
 C. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OC}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{AO} \neq \vec{0}$.

Câu 33. Cho 4 điểm A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}.$$

Câu 34. Cho $\triangle ABC$, vẽ bên ngoài tam giác các hình bình hành ABEF, ACPQ, BCMN. Xét các mệnh đề:

- (I) $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}$
 (II) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{MN}$
 (III) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{MC}$

Mệnh đề đúng là :

- A. Chỉ (I). B. Chỉ (III). C. (I) và (II). D. Chỉ (II).

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{MP}.$$

Câu 35. Cho 5 điểm phân biệt M, N, P, Q, R. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MP}$. B. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.
 C. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MR}$. D. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN}$.

Lời giải

Chọn

D.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}.$$

Câu 36. Cho hình bình hành ABCD, đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.
 C. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn A.

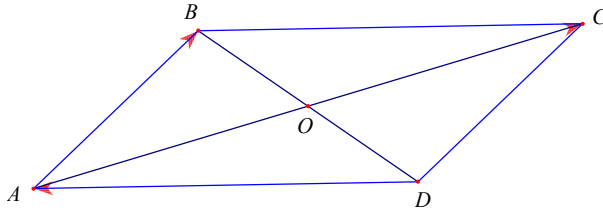
Đẳng thức vectơ $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$ đúng theo quy tắc cộng hình bình hành.

Câu 37. Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Khẳng định nào sau đây là đúng:

- A. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$. B. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO}$.
C. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn #A.



Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ nên $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA}$.

Câu 38. Cho 4 điểm bất kì A, B, C, O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$. B. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$.
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA}$ nên A sai

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CO} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{CO}$ nên B đúng.

Câu 39. Cho 3 điểm phân biệt A, B, C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. B. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn B

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$.

Câu 40. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O . Khi đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO}$ bằng

- A. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$. B. \overrightarrow{AB} . C. $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$. D. \overrightarrow{CD} .

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

Câu 41. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$.
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$.
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$.
D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE}$
 $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA}$
 $= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} = \vec{0}$

Câu 42. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn BC và AD . Tính tổng $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC}$.

A. \overrightarrow{AC} .B. \overrightarrow{NM} .C. \overrightarrow{CA} .D. \overrightarrow{MN} .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}.$$

Câu 43. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F . Tổng véc tơ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ bằng

A. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DB}$.B. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DF}$.C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}$.D. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF}$.

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}.$$

Câu 44. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F . Đẳng thức nào sau đây *sai*?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$.B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$.C. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AC}$.D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \text{ (vô lý).}$$

Câu 45. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.B. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}$.C. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$.D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Câu 46. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên cạnh AC lấy điểm E và F sao cho $AE = EF = FC$, BE cắt AM tại N . Chọn mệnh đề đúng:

A. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.B. $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$.C. $\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NE} = \vec{0}$.D. $\overrightarrow{NE} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{EF}$.

Lời giải

Chọn A

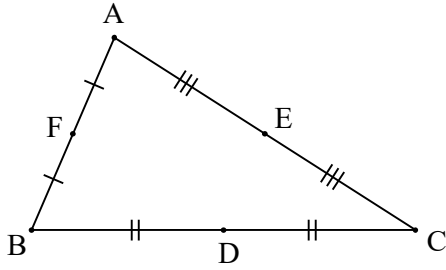
Trong tam giác BCE có MF là đường trung bình nên $MF \parallel BE \Rightarrow MF \parallel NE$

N là trung điểm của AM nên $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NM} = \vec{0}$.

Câu 47. Cho tam giác ABC . Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB . Hệ thức nào là đúng?

A. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$.B. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.D. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$.

Lời giải



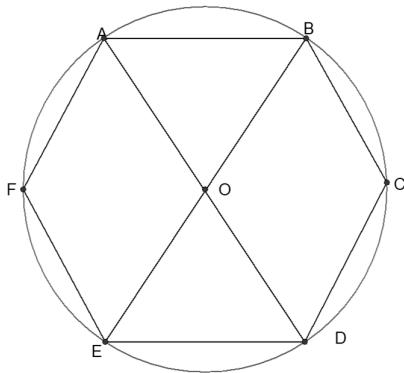
Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{FF} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD} + \vec{0} \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}. \end{aligned}$$

Câu 48. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm O . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$
C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = 6|\overrightarrow{AB}|$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Lời giải



Chọn A

$$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.$$

Câu 49. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm BC , G_1 là điểm đối xứng của G qua M . Vector tổng $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C}$ bằng

- A. \overrightarrow{GA} . B. \overrightarrow{BC} . C. $\overrightarrow{G_1A}$. D. $\overrightarrow{G_1M}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} = \overrightarrow{G_1G} = \overrightarrow{GA}.$$

Câu 50. Xét tam giác ABC có trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

- 1) $\overrightarrow{OG} = \vec{0}$;
- 2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân;
- 3) Tam giác ABC là tam giác đều;

4) Tam giác ABC là tam giác cân.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OG} = \vec{0} \Rightarrow O \equiv G$. Do đó tam giác ABC là tam giác đều.

Câu 51. Xét tam giác ABC nội tiếp có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O . Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$;

2) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HA}$;

3) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$, với H_1 là điểm đối xứng của H qua O ;

4) Nếu $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều.

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

$\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD} \Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH_1}$.

Nếu $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$ thì $\overrightarrow{HH_1} = \vec{0}$, suy ra $H \equiv O$.

Câu 52. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Tìm đẳng thức sai:

A. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$

B. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

C. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NC}$

D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DB}$

Lời giải

+ Tứ giác $AMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow$ A đúng.

+ $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \Rightarrow$ B đúng.

+ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}, \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{NC} \Rightarrow$ C đúng.

Đáp án

D.

Câu 53. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F bất kì trên mặt phẳng. Tìm đẳng thức sai trong các đẳng thức sau:

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}$

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF}$

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$

Lời giải

Đáp án D

Ta có:

$(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow B \equiv A$. Vì A, B bất kì \Rightarrow D sai.

Câu 54. Cho $\triangle ABC$, các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Với O là điểm bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$

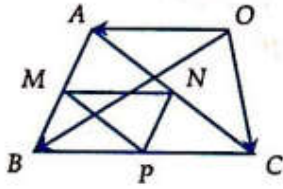
B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

C. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

D. $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP})$

Lời giải

Đáp án B



$$\begin{aligned} \vec{VT} &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \\ &= \vec{OM} + \vec{MA} + \vec{ON} + \vec{NB} + \vec{OP} + \vec{PC} \text{ Mà } \vec{NB} = \vec{NM} + \vec{NP} \\ &\Rightarrow \vec{MA} + \vec{NB} + \vec{PC} = \vec{MA} + \vec{NM} + \vec{NP} + \vec{PC} = \vec{NA} + \vec{NC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{VT} = \vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP} \end{aligned}$$

Câu 55. Cho 4 điểm M, N, P, Q bất kì. Đẳng thức nào sau đây luôn đúng.

- A. $\vec{PQ} + \vec{NP} = \vec{MQ} + \vec{MN}$ B. $\vec{NP} + \vec{MN} = \vec{QP} + \vec{MQ}$
C. $\vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{NP} + \vec{MQ}$ D. $\vec{NM} + \vec{QP} = \vec{NP} + \vec{MQ}$

Lời giải

Đáp án B

Ta có:

$$\vec{NP} + \vec{MN} = \vec{NQ} + \vec{QP} + \vec{MQ} + \vec{QN} = \vec{QP} + \vec{MQ} + (\vec{NQ} + \vec{QN}) = \vec{QP} + \vec{MQ} = \vec{VP}$$

Câu 56. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F phân biệt. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

- A. $\vec{AB} + \vec{DF} + \vec{BD} + \vec{FA} = \vec{0}$ B. $\vec{BE} - \vec{CE} + \vec{CF} - \vec{BF} = \vec{0}$
C. $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD}$ D. $\vec{FD} + \vec{BE} + \vec{AC} = \vec{BD} + \vec{AE} + \vec{CF}$

Lời giải

$$\begin{aligned} + \text{Ta có: } \vec{AB} + \vec{DF} + \vec{BD} + \vec{FA} &= \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DF} + \vec{FA} = \vec{AA} = \vec{0} \Rightarrow A \text{ đúng.} \\ + \vec{BE} - \vec{CE} + \vec{CF} - \vec{BF} &= \vec{BC} + \vec{CB} = \vec{0} \Rightarrow B \text{ đúng.} \\ + \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} &= \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} \Leftrightarrow \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{EB} + \vec{BF} \Leftrightarrow \vec{AF} = \vec{AF} \\ &\Rightarrow C \text{ đúng.} \\ + \vec{FD} + \vec{DB} + \vec{BE} + \vec{EA} + \vec{AC} + \vec{FC} &= \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{FC} = \vec{0} \Leftrightarrow F \equiv C \text{ (mâu thuẫn giả thiết)} \\ &\Rightarrow D \text{ sai.} \end{aligned}$$

Đáp án D.

Câu 57. Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là A_1, A_2, \dots, A_n . Bạn Bình kí hiệu chúng là B_1, B_2, \dots, B_n ($A_i \neq B_n$). Vectơ tổng $\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_nB_n}$ bằng

- A. $\vec{0}$. B. $\vec{A_1A_n}$. C. $\vec{B_1B_n}$. D. $\vec{A_1B_n}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy điểm O bất kì. Khi đó

$$\vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_nB_n} = (\vec{A_1O} + \vec{A_2O} + \dots + \vec{A_nO}) + (\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \dots + \vec{OB_n})$$

Vì $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ nên

$$\vec{OB_1} + \vec{OB_2} + \dots + \vec{OB_n} = \vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \dots + \vec{OA_n}$$

$$\text{Do đó } \vec{A_1B_1} + \vec{A_2B_2} + \dots + \vec{A_nB_n} = (\vec{A_1O} + \vec{OA_1}) + (\vec{A_2O} + \vec{OA_2}) + \dots + (\vec{A_nO} + \vec{OA_n}) = \vec{0}.$$

Câu 58. Cho hai điểm A, B phân biệt. Xác định điểm M sao cho $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$

- A. M ở vị trí bất kì
 B. M là trung điểm của AB
 C. Không tìm được M
 D. M nằm trên đường trung trực của AB

Lời giải

Đáp án B

Câu 59. Cho đoạn thẳng AB , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm AB . B. M trùng A .
 C. M trùng B . D. A là trung điểm MB .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{O} \Leftrightarrow A \text{ là trung điểm } MB.$$

Câu 60. Cho $\triangle ABC$, B . Tìm điểm I để \overrightarrow{IA} và \overrightarrow{CB} cùng phương. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. I là trung điểm AB . B. I thuộc đường trung trực của AB .
 C. Không có điểm I . D. Có vô số điểm I .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{IA} \text{ và } \overrightarrow{CB} \text{ cùng phương nên } AI \parallel CB. \text{ Suy ra có vô số điểm } I.$$

Câu 61. Cho 2 điểm phân biệt A, B . Tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm AB . B. M thuộc đường trung trực của AB .
 C. Không có điểm M . D. Có vô số điểm M .

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \vec{O} \text{ (vô lý).}$$

Câu 62. Cho tam giác ABC , M là điểm thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm AB . B. M là trọng tâm $\triangle ABC$.
 C. M trùng B . D. A là trung điểm MB .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{O} \text{ nên } M \text{ là trọng tâm } \triangle ABC.$$

Câu 63. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng D . B. M trùng A .
 C. M trùng B . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}.$$

Câu 64. Cho $ABCD$ là hình bình hành, M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng D . B. M trùng A .

C. M trùng B .

D. M trùng C .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

Câu 65. Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng O .

B. M trùng A .

C. M trùng B .

D. M trùng C .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OC} \text{ suy ra } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} \text{ (} O \text{ là trung điểm } AC \text{) nên } M \text{ trùng } O.$$

Câu 66. Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng D .

B. M trùng A .

C. M trùng B .

D. M trùng C .

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}, \text{ suy ra } M \text{ trùng } D.$$

Câu 67. Cho $ABCD$ là hình bình hành tâm O , M là điểm thỏa $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng O .

B. M trùng A .

C. M trùng B .

D. M trùng C .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}.$$

Câu 68. Cho tứ giác $PQRN$ có O là giao điểm 2 đường chéo, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{ON}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M trùng P .

B. M trùng Q .

C. M trùng O .

D. M trùng R .

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NO}.$$

Câu 69. Cho $\triangle ABC$, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB .

B. M là trung điểm BC .

C. M là trung điểm CA .

D. M là trọng tâm $\triangle ABC$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra M là trọng tâm $\triangle ABC$.

Câu 70. Cho $\triangle DEF$, tìm M thỏa $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{ED}$. B. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}$. C. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DF}$. D. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{MF} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}.$$

Suy ra M là điểm cuối của vec tơ có điểm đầu là F sao cho $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}$.

Câu 71. Cho $\triangle DEF$, M là điểm thỏa $\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{O}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF}$. B. $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EM}$. C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{EM}$. D. $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DE}$.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{MF} = \vec{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = \overrightarrow{ED}.$$

Suy ra $DEFM$ là hình bình hành. Do đó $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EF}$.

Câu 72. Cho $\triangle ABC$ có O là trung điểm BC , tìm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng A . B. M trùng B .
C. M trùng O . D. M trùng C .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \vec{O}$$

Suy ra M trùng C .

Câu 73. Cho $\triangle ABC$, tìm điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M là trung điểm AB . B. M là trung điểm BC .
C. M là trung điểm CA . D. M là trọng tâm $\triangle ABC$.

Lời giải

Chọn C

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{O}$$

Suy ra M là trung điểm AC .

Câu 74. Cho $\triangle ABC$, điểm M thỏa $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. M trùng A . B. M trùng B .
C. $ACMB$ là hình bình hành. D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA}$$

Suy ra M là điểm thỏa $ABCM$ là hình bình hành. Nên $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM}$.

Câu 75. Cho $\triangle ABC$, D là trung điểm AB , E là trung điểm BC , điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CM}$. B. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{ED}$.

C. M là trung điểm BC .

D. $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{O}$$

Suy ra M là trung điểm AC . Suy ra $BEMD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{BD}$.

Câu 76. Cho tứ giác $ABCD$, điểm M thỏa $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm AB .

B. M là trung điểm BC .

C. D là trung điểm BM .

D. M là trung điểm DC .

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BD}.$$

Câu 77. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm N thỏa mãn:

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}.$$

A. Điểm N là trung điểm cạnh AB

B. Điểm C là trung điểm cạnh BN

C. Điểm C là trung điểm cạnh AM

D. Điểm B là trung điểm cạnh NC

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} - \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{ND} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DN}$$

$\Rightarrow ACND$ là hình bình hành $\Rightarrow C$ là trung điểm cạnh BN .

Đáp án B.

Câu 78. Cho hình bình hành $ABCD$. Tìm vị trí điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD}$.

A. Điểm M là trung điểm cạnh AC

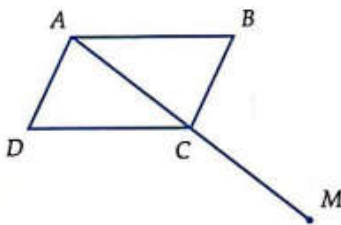
B. Điểm M là trung điểm cạnh BD

C. Điểm C là trung điểm cạnh AM

D. Điểm B là trung điểm cạnh MC

Lời giải

Đáp án C



$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

Vậy C là trung điểm của AM

Câu 79. Trên đường tròn $C(O; R)$ lấy điểm cố định A ; B là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi M là điểm di động sao cho $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Khi đó tập hợp điểm M là:

- A. đường tròn tâm O bán kính $2R$.
 B. đường tròn tâm A bán kính R
 C. đường thẳng song song với OA
 D. đường tròn tâm C bán kính $R\sqrt{3}$

Lời giải

Từ giả thiết $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow O, A, M, B$ theo thứ tự là các đỉnh của hình bình hành. Do $AM = OB = R \Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm A bán kính R .

Đáp án B.

Câu 80. Cho $\triangle ABC$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}|$ là:

- A. một đường tròn tâm C
 B. đường tròn tâm I (I là trung điểm của AB)
 C. một đường thẳng song song với AB
 D. là đường thẳng trung trực của BC

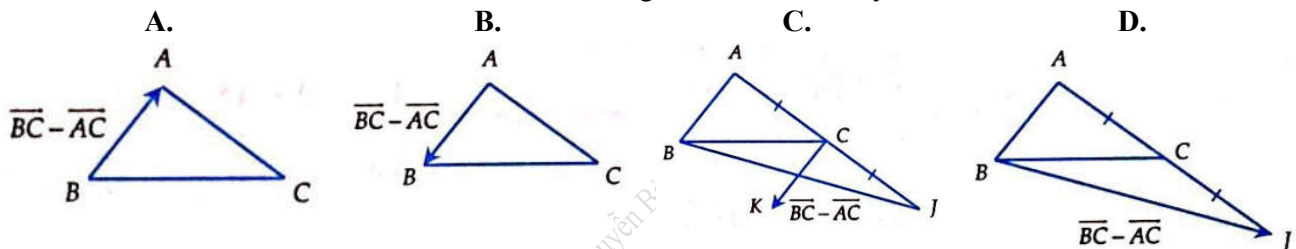
Lời giải

Đáp án A

$$|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{MC}|$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm C bán kính AB .

Câu 81. Cho $\triangle ABC$. Vector $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$ được vẽ đúng ở hình nào sau đây?



Lời giải

$$\text{Vì } \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA}$$

Đáp án A.

Câu 82. Cho tam giác $\triangle ABC$ vuông tại A có $AB = 3\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$. Khi đó độ dài $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$ là:

- A. 4
 B. 8
 C. $2\sqrt{13}$
 D. $\sqrt{13}$

Lời giải

Ta có:

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 4 \Rightarrow AI = 2; |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{BI}| = 2\sqrt{AB^2 + AI^2} = 2\sqrt{13}.$$

Đáp án C.

Câu 83. Cho hình thang cân $ABCD$, có đáy nhỏ và đường cao cùng bằng $2a$ và $\widehat{ABC} = 45^\circ$. Tính $|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}|$.

- A. $a\sqrt{3}$
 B. $2a\sqrt{5}$
 C. $a\sqrt{5}$
 D. $a\sqrt{2}$

Lời giải

$$|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{BH^2 + DH^2} = 2a\sqrt{5}$$

Đáp án B.

Câu 84. Cho 2 vector \vec{a} và \vec{b} tạo với nhau góc 60° . Biết $|\vec{a}| = 6; |\vec{b}| = 3$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$

A. $3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$ B. $3(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ C. $6(\sqrt{5} + 3)$ D. $\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{51})$

Lời giải

Đựng $\vec{OA} = \vec{a}; \vec{OB} = \vec{b}$

Đựng hình bình hành $OACB \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{OC}; \vec{a} - \vec{b} = \vec{BA}$

$$\Rightarrow \triangle OAB \text{ vuông tại } B \Rightarrow IB = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$OI = \sqrt{OB^2 + IB^2} = \frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow OC = \sqrt{63} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{63} + 3\sqrt{3}.$$

Đáp án B.

Câu 85. Cho hình thang $ABCD$ có AB song song với CD . Cho $AB = 2a$, $CD = a$. Gọi O là trung điểm của AD . Khi đó:

A. $|\vec{OB} + \vec{OC}| = 3a$ B. $|\vec{OB} + \vec{OC}| = a$ C. $|\vec{OB} + \vec{OC}| = \frac{3a}{2}$ D. $|\vec{OB} + \vec{OC}| = 0$

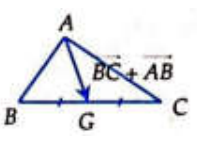
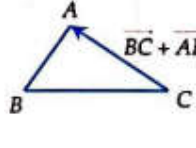
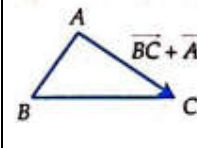
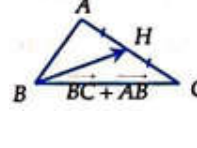
Lời giải

$$|\vec{OB} + \vec{OC}| = |\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{OD} + \vec{DC}| = |\vec{AB} + \vec{DC}| \Rightarrow |\vec{AB}| + |\vec{DC}| = 3a$$

(vì \vec{AB} và \vec{DC} cùng hướng)

Đáp án A.

Câu 86. Cho $\triangle ABC$. Vector $\vec{BC} + \vec{AB}$ được vẽ đúng ở hình nào dưới đây?

A.	B.	C.	D.
			

Lời giải

Đáp án C

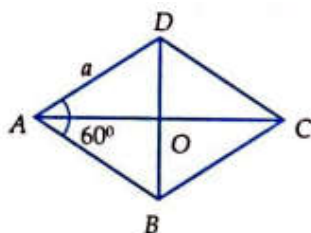
Vì theo quy tắc 3 điểm $\vec{BC} + \vec{AB} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Câu 87. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$ và cạnh là a . Tính độ dài $|\vec{AB} + \vec{AD}|$.

A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $a\sqrt{2}$ D. $2a$

Lời giải

Đáp án A



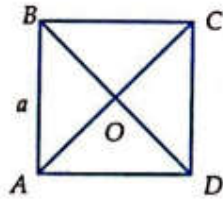
Gọi O là giao của 2 đường chéo $\Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AD}| = |\vec{AC}| = 2AD = a\sqrt{3}$

Câu 88. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là a . O là giao điểm của hai đường chéo. Tính $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$.

- A. $a\sqrt{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $a\sqrt{2}$

Lời giải

Đáp án C



$$|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{OD}| = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Câu 89. Với $\forall \vec{a}, \vec{b}$ độ dài $|\vec{a} + \vec{b}|$:

- A. Bao giờ cũng lớn hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ B. Không nhỏ hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$
C. Bao giờ cũng nhỏ hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ D. Không lớn hơn $|\vec{a}| + |\vec{b}|$

Lời giải

Đáp án D

Theo quy tắc 3 điểm độ dài vector tổng bao giờ cũng nhỏ hơn hoặc bằng tổng độ dài 2 vector thành phần.

Câu 90. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Khi đó $|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}|$ bằng:

- A. 0 B. $3a$ C. a D. $a(\sqrt{3} - 1)$

Lời giải

Đáp án A

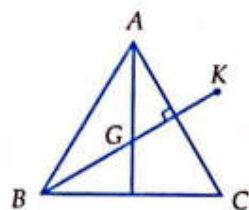
$$|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{AA'}| = 0$$

Câu 91. Cho tam giác ABC đều cạnh a , trọng tâm G . Tính độ dài vector $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$.

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a}{3}$ C. $\frac{2a}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Đáp án A



Gọi K là điểm đối xứng với G qua AC thì $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{GC} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}|$

$$= |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AK}| = |\overrightarrow{KB}| = 2BG = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Câu 92. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là 3. Tính độ dài $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$:

A. 6

B. $6\sqrt{2}$

C. 12

D. 0

Lời giải

Đáp án A

$$|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = |2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OD}| = 2|\overrightarrow{AD}| = 6$$

Câu 93. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O và M là trung điểm AB . Tính độ dài $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$.

A. a

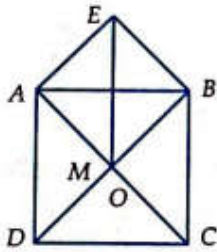
B. $3a$

C. $\frac{a}{2}$

D. $2a$

Lời giải

Đáp án A



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ và $OA = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow OM = \frac{a}{2}$. Gọi E là điểm sao cho $OBEA$ là hình bình hành $\Rightarrow |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OE}| = AB = a$

Câu 94. Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$, M là trung điểm BC . Tính độ dài vector $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}|$.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

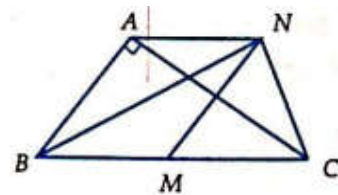
B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{10}}{2}$

Lời giải

Đáp án D



Dựng hình bình hành $ABMN \Rightarrow |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{BN}| = BN$

Ta có: $NC = AM = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BN = \sqrt{BC^2 + NC^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2}$

Câu 95. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 3. H là trung điểm của BC . Tìm mệnh đề sai.

A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{3}$

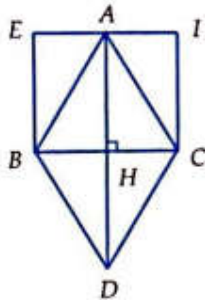
B. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}| = \frac{\sqrt{63}}{2}$

C. $|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}| = 3$

D. $|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}| = \sqrt{3}$

Lời giải

Đáp án D



$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 3\sqrt{3} \Rightarrow A \text{ đúng.}$$

$$|\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{HE}| = |\overrightarrow{AB}| = 3 \Rightarrow B \text{ đúng.}$$

$$|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}| = |\overrightarrow{BI}| = \frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow C \text{ đúng.}$$

$$|\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{BA}| = 3 \Rightarrow D \text{ sai.}$$

Câu 96. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Độ dài $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$ bằng

A. $2a$

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Theo quy tắc đường chéo hình bình hành, ta có

$$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}.$$

Câu 97. Cho tam giác đều ABC cạnh a , mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$.

B. $\overrightarrow{AC} = a$.

C. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

D. $|\overrightarrow{AB}| = a$.

Lời giải

Chọn D.

$$|\overrightarrow{AB}| = AB = a.$$

Câu 98. Cho \overrightarrow{AB} khác $\vec{0}$ và cho điểm C . Có bao nhiêu điểm D thỏa $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$?

A. Vô số.

B. 1 điểm.

C. 2 điểm.

D. Không có điểm nào.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow AB = CD.$$

Suy ra tập hợp các điểm D là đường tròn tâm C bán kính AB .

Câu 99. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vector.

B. $\vec{0}$ cùng phương với mọi vector.

C. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

D. $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Lời giải

Chọn D.

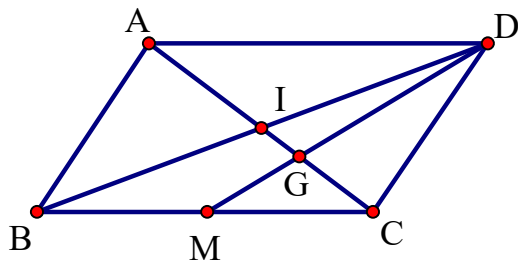
$$\text{Mệnh đề } |\overrightarrow{AB}| > 0 \text{ là mệnh đề sai, vì khi } A \equiv B \text{ thì } |\overrightarrow{AB}| = 0.$$

Câu 100. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I ; G là trọng tâm tam giác BCD . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$. B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.
C. $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}|$. D. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}$ (vô lý) \rightarrow A sai.

G là trọng tâm tam giác BCD ; A là một điểm nằm ngoài tam giác $BCD \rightarrow$ đẳng thức ở đáp án B đúng.

Ta có $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}|$ và $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}|$. Mà $|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{BD}| \rightarrow$ đáp án C đúng.

Ta có \overrightarrow{IA} và \overrightarrow{IC} đối nhau, có độ dài bằng nhau $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$; tương tự $\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \rightarrow$ đáp án D là đúng.

Câu 101. Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB = 5$, H là trung điểm của BC . Tính $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}|$.

- A. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. B. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 5$.
C. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{4}$. D. $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = \frac{5\sqrt{7}}{2}$.

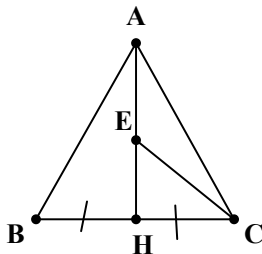
Lời giải

Chọn D.

Gọi M là điểm sao cho $CHMA$ là hình bình hành.

Ta có: $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH}| = |\overrightarrow{CM}| = CM = 2CE$ (E là tâm của hình bình hành $CHMA$).

Ta lại có: $AH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ($\triangle ABC$ đều, AH là đường cao).



Trong tam giác HEC vuông tại H , có:

$$EC = \sqrt{CH^2 + HE^2} = \sqrt{2.5^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{7}}{4} \Rightarrow |\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{HC}| = 2CE = \frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

Câu 102. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

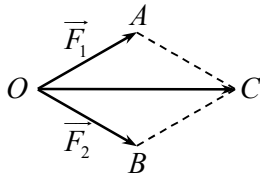
- A. $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$. C. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. D. $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$.

Lời giải

Chọn C.Ta có O là trung điểm của AC nên $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$.

Câu 103. Có hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ cùng tác động vào một vật đứng tại điểm O , biết hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ đều có cường độ là 50 (N) và chúng hợp với nhau một góc 60° . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?

- A. 100 (N). B. $50\sqrt{3}$ (N).
C. $100\sqrt{3}$ (N). D. Đáp án khác.

Lời giải**Chọn B.**Giả sử $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OB}$.Theo quy tắc hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{OC}$, như hình vẽ.Ta có $\widehat{AOB} = 60^\circ$, $OA = OB = 50$, nên tam giác OAB đều, suy ra $OC = 50\sqrt{3}$.Vậy $|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{OC}| = 50\sqrt{3}$ (N).

Câu 104. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. B. $ABCD$ là hình thoi.
C. $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$. D. $ABCD$ là hình thang cân.

Lời giải**Chọn D.**Tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow ABCD$ là hình bình hành (1), nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.Mà $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ (2).Từ (1) và (2) ta có $ABCD$ là hình thoi nên $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}|$.

Câu 105. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

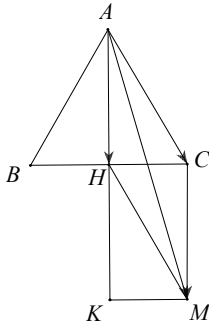
- A. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{2}$. B. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
C. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2a$. D. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$.

Lời giải**Chọn A.**Gọi D là điểm thỏa $ABDC$ là hình bình hành. Tam giác ABC vuông cân tại A suy ra $ABDC$ là hình vuông. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 2AM = BC = a\sqrt{2}$.

Câu 106. Cho tam giác ABC đều cạnh a , có AH là đường trung tuyến. Tính $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}|$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $2a$. C. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải**Chọn C.**



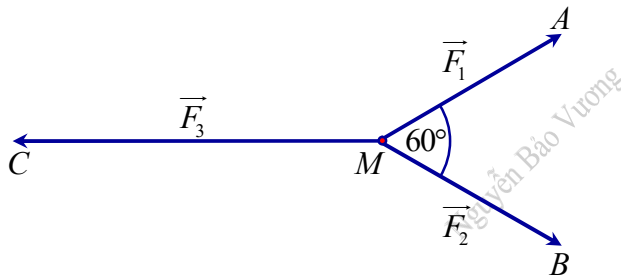
Dựng $\overline{CM} = \overline{AH} \Rightarrow AHMC$ là hình bình hành $\Rightarrow \overline{AC} + \overline{AH} = \overline{AM} \Rightarrow |\overline{AC} + \overline{AH}| = AM$.

Gọi K đối xứng với A qua $BC \Rightarrow \triangle AKM$ vuông tại K .

$$AK = 2AH = a\sqrt{3}; KM = CH = \frac{a}{2}.$$

$$AM = \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

Câu 107. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overline{MA}$, $\vec{F}_2 = \overline{MB}$, $\vec{F}_3 = \overline{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Cho biết cường độ của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 đều bằng $25N$ và góc $\widehat{AMB} = 60^\circ$. Khi đó cường độ lực của \vec{F}_3 là



A. $25\sqrt{3} N$.

B. $50\sqrt{3} N$.

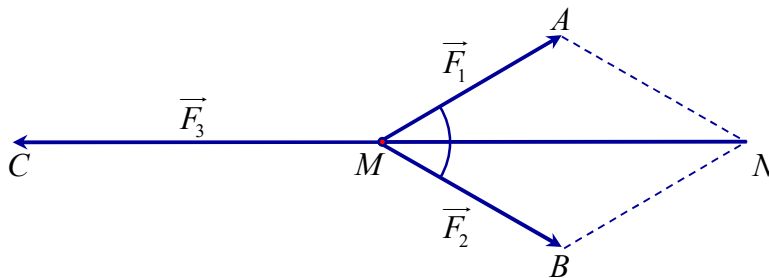
C. $50\sqrt{2} N$.

D. $100\sqrt{3} N$.

Lời giải

Chọn A.

Vật đứng yên nên ba lực đã cho cân bằng. Ta được $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$.



Dựng hình bình hành $AMBN$. Ta có $-\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\overline{MA} - \overline{MB} = -\overline{MN}$.

$$\text{Suy ra } |\vec{F}_3| = |-\overline{MN}| = MN = \frac{2\sqrt{3}MA}{2} = 25\sqrt{3}.$$

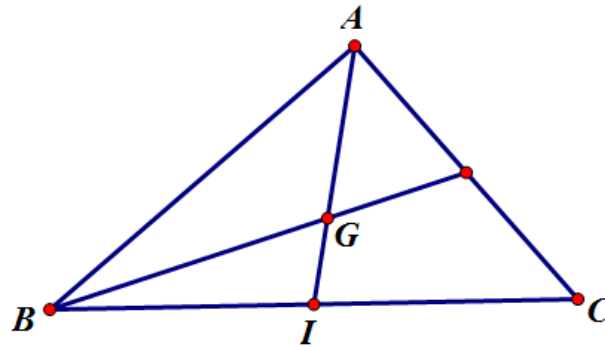
Câu 108. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC . Tìm khẳng định **sai**.

A. $|\overline{IB} + \overline{IC} + \overline{IA}| = IA$. B. $|\overline{IB} + \overline{IC}| = BC$.

C. $|\overline{AB} + \overline{AC}| = 2AI$. D. $|\overline{AB} + \overline{AC}| = 3GA$.

Lời giải

Chọn B.



$|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IA}| = |\vec{0} + \overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{IA}| = IA$ (Do I là trung điểm BC) nên khẳng định ở A đúng.

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AI$ (Gọi D là điểm thỏa $ABDC$ là hình bình hành, I là trung điểm BC) nên khẳng định ở C đúng.

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2AI = 3GA$ (Do G là trọng tâm tam giác ABC) nên khẳng định ở D đúng.

$|\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}| = |\vec{0}| = 0$ (Do I là trung điểm BC) nên khẳng định ở B sai.

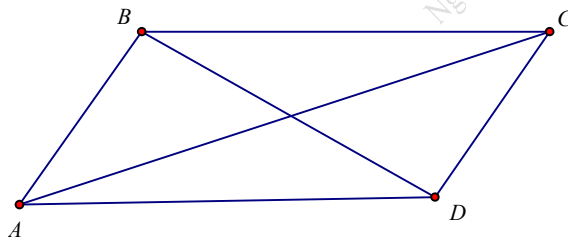
Câu 109. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. B. $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$.

C. $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$. D. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ là đẳng thức sai vì độ dài hai đường chéo của hình bình hành không bằng nhau.

Câu 110. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh $2a$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}|$.

A. $4a\sqrt{2}$.

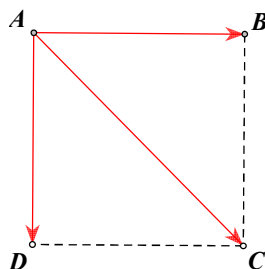
B. $4a$.

C. $2a\sqrt{2}$.

D. $2a$.

Lời giải

Chọn C.



Ta có $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = 2a\sqrt{2}$.

Câu 111. Cho tam giác ABC đều, cạnh $2a$, trọng tâm G . Độ dài vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}$ là

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}) = \overrightarrow{GB} - (-\overrightarrow{GB})$ vì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Khi đó $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{GE}| = 2GB = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{2} = \frac{4a\sqrt{3}}{3}$ (E đối xứng với G qua M).

Câu 112. Tam giác ABC thỏa mãn: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ thì tam giác ABC là

- A. Tam giác vuông A . B. Tam giác vuông C .
C. Tam giác vuông B . D. Tam giác cân tại C .

Lời giải

Chọn A.

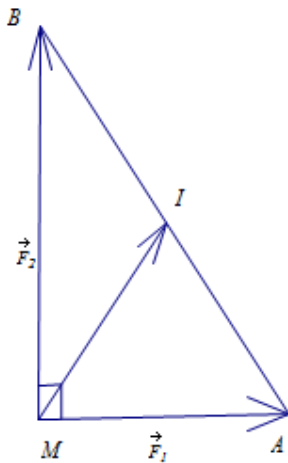
Gọi E là trung điểm BC , M là điểm thỏa $ABCM$ là hình bình hành. Ta có
 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow AE = \frac{1}{2}BC$. Trung tuyến kẻ từ A bằng một nửa cạnh BC nên tam giác ABC vuông tại A .

Câu 113. Cho hai lực $\overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MB}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M cường độ hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ lần lượt là $300(N)$ và $400(N)$. $\widehat{AMB} = 90^\circ$. Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A. $0(N)$. B. $700(N)$. C. $100(N)$. D. $500(N)$.

Lời giải

Chọn D.



Cường độ lực tổng hợp của $|\overrightarrow{F}| = |\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = 2|\overrightarrow{MI}| = AB$ (I là trung điểm của AB).

Ta có $AB = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 500$ suy ra $|\overrightarrow{F}| = 500(N)$.