

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

- | FanPage: Nguyễn Bảo Vương

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 1. Nếu hai điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

- A. $MN = 4$
- B. $MN = 2$
- C. $MN = 16$;
- D. $MN = 256$.

Lời giải

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4 = |\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{NM}| \cdot \cos 180^\circ = -4 \Leftrightarrow MN^2 = 4 \Rightarrow MN = 2. \text{ Chọn A}$$

Câu 2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$;
- B. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;
- C. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;
- D. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

Lời giải

Chọn C

Câu 3. Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$ bằng:

- A. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$.
- B. $-AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$.
- C. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$.
- D. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ACB}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 4. Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng:

- A. $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$.
- B. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$.
- C. $-AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$.
- D. $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 5. Cho đoạn thẳng AB . Tập hợp các điểm M nằm trong mặt phẳng thoả mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là:

- A. Đường tròn tâm A bán kính AB .
- B. Đường tròn tâm B bán kính AB .
- C. Đường trung trực của đoạn thẳng AB .
- D. Đường tròn đường kính AB .

Lời giải

Chọn D

Câu 6. Nếu hai điểm M, N thoả mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -9$ thì:

- A. $MN = 9$.
- B. $MN = 3$.
- C. $MN = 81$.
- D. $MN = 6$.

Lời giải

Chọn B

BÀI TẬP BỒ SUNG

- Câu 7.** Cho \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Do \vec{a} và \vec{b} là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$.

- Câu 8.** Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} khi $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$.
A. $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

- Câu 9.** Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a}.\vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
A. $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{-3}{3.2} = -\frac{1}{2} \rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

- Câu 10.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$$\textbf{A. } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2a^2. \quad \textbf{B. } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2} \quad \textbf{C. } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2} \quad \textbf{D. } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc \hat{A} nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a.a.\cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

- Câu 11.** Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

- A.** $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$.
C. $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{MN}$. **D.** $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

Lời giải

Chọn B

Đáp án A đúng theo tính chất phân phôi.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

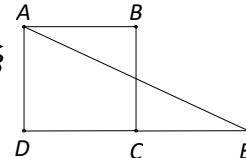
- A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2a$.

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2. \end{aligned}$$



Câu 14. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 15. Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$. D. $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta đi tính tích vô hướng ở các phương án. So sánh về trái với về phải.

Phương án A: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos 60^\circ = 2x \Rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$ nên loại #A.

Phương án B: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = BC \cdot CA \cos 120^\circ = -2$ nên loại #B.

Phương án C: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -2$ nên chọn #C.

Câu 16. Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = BA \cdot CA \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}a^2$.

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$.
 C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn C

Phương án A: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ nên loại #A.

Phương án B: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ và $\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ nên loại B.

Phương án C: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = AB \cdot AB \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = AB^2$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot DC \cdot \cos 180^\circ = -AB^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ nên chọn C.

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$.
 C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương án A: Do $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = DA \cdot CB \cdot \cos 0^\circ = a^2$ nên loại A.

Phương án B: Do $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot CD \cdot \cos 180^\circ = -a^2$ nên chọn B.

Câu 19. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$ bằng :

- A. $\frac{9a^2}{2}$. B. $-\frac{9a^2}{2}$. C. 0. D. $9a^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} = -\frac{9a^2}{2}$ nên chọn B.

Câu 20. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hết thúc nào sau đây là **sai**?

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 130^\circ$ nên loại #A.

Phương án B: $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 40^\circ$ nên loại B.

Phương án C: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 50^\circ$ nên loại C.

Phương án D: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 140^\circ$ nên chọn D.

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đầu tiên ta đi tìm số đo của góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$ sau đó mới tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

$$\text{Vì } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 135^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 22. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$. C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a \cdot a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

Câu 23. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

- A. 0 . B. a . C. $\frac{a^2}{2}$. D. a^2 .

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \cdot a \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Câu 24. Cho M là trung điểm AB , tìm biểu thức sai:

- A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. D. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

Lời giải**Chọn D**

Phương án A: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = MA \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot AB$ nên loại#A.

Phương án B: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên loại B.

Phương án C: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = AM \cdot AB$ nên loại C.

Phương án D: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên chọn D.

Câu 25. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$

- A. $\frac{3a^2}{4}$. B. $\frac{-3a^2}{4}$. C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $\frac{-3a^2}{2}$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA} = AH \cdot CA \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CA}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 150^\circ = -\frac{3a^2}{4}.$$

Câu 26. Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Câu nào sau đây đúng

- A. \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.
B. \vec{a} và \vec{b} nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 120° .
C. \vec{a} và \vec{b} ngược hướng.
D. A, B, C đều sai.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \text{ nên } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ ngược hướng}$$

Câu 27. Cho 2 vectơ \vec{a} và \vec{b} có $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

A. $\sqrt{21}$.

B. $\sqrt{61}$.

C. 21.

D. 61.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{21}.$$

Câu 28. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $3a^2$.

B. $-3a^2$.

C. $3a$.

D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot BC \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$$

Câu 29. Cho 2 vectơ đơn vị \vec{a} và \vec{b} thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. Hãy xác định $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$

A. 7.

B. 5.

C. -7.

D. -5.

Lời giải

Chọn C

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, (3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 20\vec{b}^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} = -7.$$

Câu 30. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $-9a^2$.

B. $15a^2$.

C. 0.

D. $9a^2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -9a^2 \text{ nên chọn A.}$$

Câu 31. Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC = 9$, $BC = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

A. 9.

B. 81.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 81 \text{ nên chọn B.}$$

Câu 32. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

A. $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$.

B. $\sqrt{7 - \sqrt{3}}$.

C. $\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$.

D. $\sqrt{7 + 2\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}}.$$

Câu 33. Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

A. Đường tròn đường kính BC .

B. Đường tròn $(B; BC)$.

C. Đường tròn $(C; CB)$.

D. Một đường khác.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC .

Câu 34. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :

- A. Đường tròn đường kính AB .
- B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
- C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
- D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 35. Cho hai điểm $A(2, 2), B(5, -2)$. Tìm M trên tia Ox sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$

- A. $M(1, 6)$.
- B. $M(6, 0)$.
- C. $M(1, 0)$ hay $M(6, 0)$.
- D. $M(0, 1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; 0)$, với $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\overrightarrow{AM} = (x-2; -2), \overrightarrow{BM} = (x-5; 2)$. Theo YCBT ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) - 4 = x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow M(1; 0) \\ x=6 \Rightarrow M(6; 0) \end{cases}, \text{nên chọn C.}$$

Câu 36. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$
- B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
- C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
- D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) \cdot \frac{1}{4}$ nên thử kiểm

tra đáp án C và **D**.

Ta có $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ **Chọn C.**

• A đúng, vì $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

• B đúng, vì $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$$\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$$

Câu 37. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$
- B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$
- C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$
- D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn C

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc \hat{B} nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$

Câu 38. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc \hat{A} nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

Do đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$

Câu 39. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$

Câu 40. Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2\text{ cm}$, $BC = 3\text{ cm}$, $CA = 5\text{ cm}$ Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$ B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$ C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$ D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và $AC \longrightarrow I(4; -1)$. nằm giữa A, C .

Khi đó $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$

Cách khác. Ta có $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$

$$\longrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$$

Câu 41. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

- A. $P = b^2 - c^2$ B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$$

Câu 42. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

- A. $P = -1$ B. $P = 3a^2$ C. $P = -3a^2$ D. $P = 2a^2$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$

$$\text{Ta có } P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2$$

$$= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2$$

Câu 43. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
 C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2}$$

Câu 44. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

- A. tam giác OAB đều. B. tam giác OAB cân tại O .
 C. tam giác OAB vuông tại O . D. tam giác OAB vuông cân tại O .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA$$

Câu 45. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BD} theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64.$$

Câu 46. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải**Chọn D**

Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vecto \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} theo các vecto có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2} AC^2 = 32.$$

- Câu 47.** Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:

A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải**Chọn** **D.**

Gọi I là trung điểm $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}. (*)$$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI .

- Câu 48.** Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải**Chọn** **D.**

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}. (*)$$

Biểu thức $(*)$ chứng tỏ $MB \perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG .

- Câu 49.** Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:

A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải**Chọn** **B.**

Gọi C là điểm đối xứng của A qua B . Khi đó $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2.$$

Kết hợp với giả thiết, ta có $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB.$$

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với AB .

- Câu 50.** Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là:

A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải**Chọn#A.**

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Theo giả thiết, ta có } MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 16 = \frac{8^2}{4} - 16 = 0 \rightarrow M \equiv I.$$

Câu 51. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4a^2$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2$.

Lời giải

Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB})$$

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$

Câu 52. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

A. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$.

B. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$.

C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$.

D. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$.

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Do đó $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \widehat{ACB}$

($\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$)

Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và theo định lý Pitago ta có:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

Suy ra $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$.

Câu 53. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $CD = BD = 5\sqrt{2}$, $AD = 3\sqrt{10}$, $AC = 10$. Tìm cosin góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{DB}

A. $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$.

B. $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$.

C. $\frac{4}{5\sqrt{2}}$.

D. $\frac{3}{5\sqrt{2}}$.

Lời giải

Với điểm O bất kỳ ta có:

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\text{Mặt khác } 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{BC}^2$$

Xây dựng các đẳng thức tương tự thay vào ta tính được

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \frac{AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2}{AC \cdot BD} = \frac{20 + 50 - 20 - 90}{10 \cdot 5\sqrt{2}} = -\frac{4}{5\sqrt{2}}.$$

- Câu 54.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết $AB = CD = 2a$, $MN = a\sqrt{3}$.

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 50^\circ$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 80^\circ$. D. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ suy ra

$$MN^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2a^2.$$

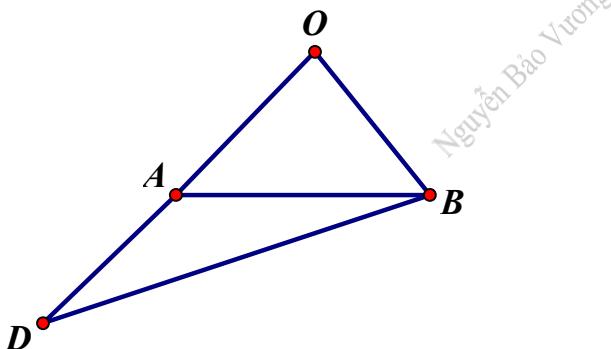
$$\text{Do đó } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{2a^2}{2a \cdot 2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ.$$

- Câu 55.** Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.

- A. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$. B. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$.
 C. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$. D. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng của O qua A .

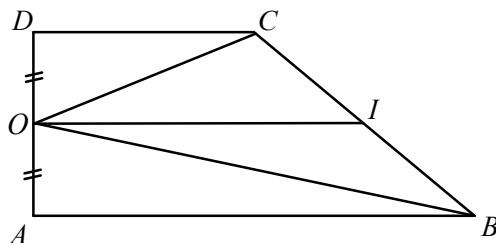
$$|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

- Câu 56.** Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D ; $AB \parallel CD$; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. O là trung điểm của AD . Độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. a . D. $3a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2|OI|$.

Xét hình thang $ABCD$ có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI = \frac{AB+CD}{2} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$.

Câu 57. Cho ABC đều cạnh $2a$ với M là trung điểm BC . Khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Độ dài đường cao AM trong tam giác đều cạnh $2a$ là: $\frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy khẳng định đúng là $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.

Câu 58. Cho tam giác vuông cân ABC với $AB = AC = a$. Khi đó $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{5}$. C. $5a$. D. $2a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|)^2 = (2\overrightarrow{AB})^2 + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 4AB^2 + AC^2$ (vì $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$)
 $= 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow |2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{5}$.

Câu 59. Cho hai véctơ \vec{a}, \vec{b} thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai véctơ \vec{a}, \vec{b} . Chọn phát biểu **đúng**.

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}| = 4 &\Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + \vec{b}^2 = 16 \\ &\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

Câu 60. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} là

- A. $8a^2$. B. $8a$. C. $8\sqrt{3}a^2$. D. $8\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn A

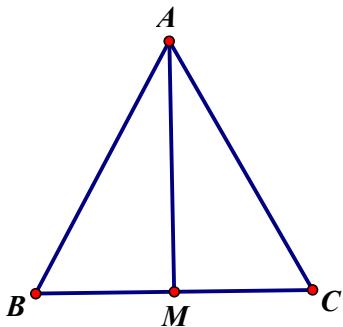
Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4a.4a.\cos 60^\circ = 4a.4a.\frac{1}{2} = 8a^2$.

Câu 61. Cho ΔABC đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$ bằng

- A. -18 . B. 27 . C. 18 . D. -27 .

Lời giải

Chọn D



Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \widehat{BAM} = 30^\circ$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -27.$$

- Câu 62.** Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.
- A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (\vec{a} + \vec{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b}),$$

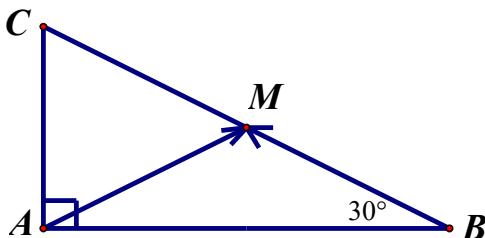
$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}.$$

- Câu 63.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

- A. $P = -2$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = 2$. D. $P = -2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$$

$$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$$

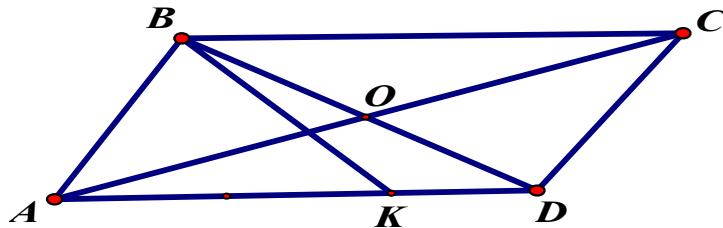
$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

- Câu 64.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. $3a^2$. B. $6a^2$. C. 0. D. a^2 .

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Khi đó $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3}2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$$

Câu 65. Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=8$, $BC=7$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:

A. -20.

B. 40.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

Câu 66. Cho hai vecto \vec{a} , \vec{b} sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai véc tơ \vec{a} và \vec{b} .

A. 120° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C

Vì hai véc tơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) &= 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ. \end{aligned}$$

Câu 67. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$.

C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$.

D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải

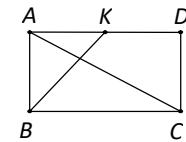
Chọn A

Ta có $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có
$$\begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0.$$



$$\rightarrow \cos \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} (\text{vì } \widehat{ABC} \text{ nhọn}).$$

Mặt khác góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc \widehat{ABC}

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos \widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

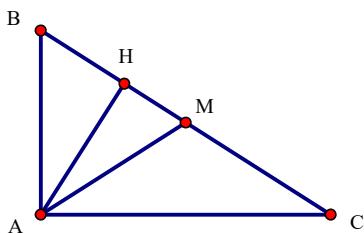
- Câu 68.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC và có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Tính cạnh AB, AC .

A. $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. **B.** $AB = a, AC = a$.

C. $AB = a\sqrt{2}, AC = a$. **D.** $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$.

Lời giải



Chọn A

Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$.

Có \overrightarrow{HM} là hình chiếu của \overrightarrow{AM} lên BC .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{BC}, \text{ mà } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}, BC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{HM} \text{ cùng chiều } \overrightarrow{BC} \text{ và } HM \cdot BC = \frac{a^2}{2}, HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Có } BH = BM - HM = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

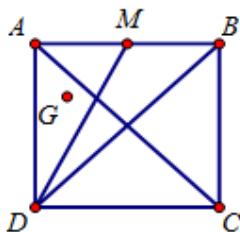
$$\text{Có } AB^2 = BH \cdot BC = a^2 \Rightarrow AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

Vậy $AB = a$ và $AC = a\sqrt{2}$.

- Câu 69.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

A. $\frac{21a^2}{4}$. **B.** $\frac{11a^2}{4}$. **C.** $\frac{9a^2}{4}$. **D.** $\frac{a^2}{4}$.

Lời giải



Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\vec{CA} = -(\vec{AB} + \vec{AD})$ và

$$\vec{CM} = \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{CA}) = \frac{1}{2}[\vec{CB} - (\vec{AB} + \vec{AD})] = -\frac{1}{2}(\vec{AB} + 2\vec{AD})$$

$$\text{Suy ra } \vec{CG} = -\vec{AB} - (\vec{AB} + \vec{AD}) - \frac{1}{2}(\vec{AB} + 2\vec{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\vec{AB} + 2\vec{AD}\right)$$

$$\text{Ta lại có } \vec{CA} + \vec{DM} = -(\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{AM} - \vec{AD} = -\left(\frac{1}{2}\vec{AB} + 2\vec{AD}\right)$$

$$\text{Nên } \vec{CG} \cdot (\vec{CA} + \vec{DM}) = \left(\frac{5}{2}\vec{AB} + 2\vec{AD}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{AB} + 2\vec{AD}\right)$$

$$= \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}.$$

Câu 70. Cho các vectơ \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và thoả mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$

- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7} \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 7 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$$

Câu 71. Cho các vectơ \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vec tơ bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ \vec{u} và \vec{v} với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

- A. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{2}$. B. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{6}$. C. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{4}$. D. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác: } \vec{u}^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \Leftrightarrow |\vec{u}| = 3$$

$$\vec{v}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Leftrightarrow |\vec{v}| = 1$$

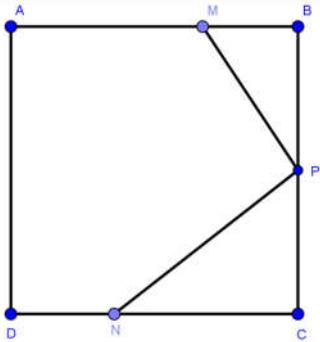
$$\text{Suy ra } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = -\frac{1}{6}$$

Câu 72. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos \widehat{MNP}$.

- A. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$. B. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{4\sqrt{10}}$.

- C. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{\sqrt{10}}$. D. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$$

$$\text{Mặt khác } |\overrightarrow{NM}| = \sqrt{10}, |\overrightarrow{NP}| = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}.$$

- Câu 73.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$

- A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ADM \text{ nên } 3\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{CG} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$$

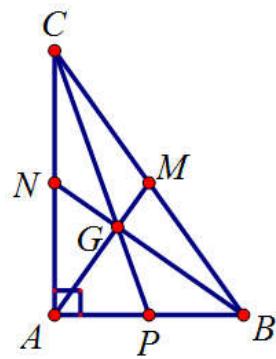
$$\Rightarrow \overrightarrow{GC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \right) = \frac{3}{8}.$$

- Câu 74.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

- A. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$. B. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$.
 C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$.

Lời giải



Vì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ nên

$$\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

$$\text{Để thấy tam giác } ABM \text{ đều nên } GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

$$\text{Suy ra } \vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$$

- Câu 75.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2 . Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$.

Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = -4$. B. $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 0$. C. $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 4$. D. $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 16$.

Lời giải

Chọn B

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ \vec{MB} , \vec{MN} theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

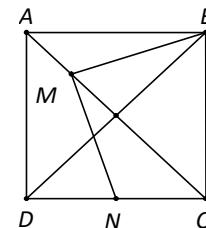
$$\bullet \vec{MB} = \vec{AB} - \vec{AM} = \vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC} = \vec{AB} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD}.$$

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \vec{AD} + \vec{DN} - \frac{1}{4}\vec{AC} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD})$$

$$= \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AB}. \text{ Suy ra:}$$

$$\vec{MB} \cdot \vec{MN} = \left(\frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD}\right) \left(\frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AB}\right) = \frac{1}{16} \left(3\vec{AB} \cdot \vec{AD} + 3\vec{AB}^2 - 3\vec{AD}^2 - \vec{AD} \cdot \vec{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{16} (0 + 3a^2 - 3a^2 - 0) = 0.$$



- Câu 76.** Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R . Tính R .

A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

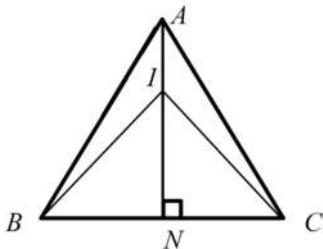
B. $R = \frac{a}{4}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm đoạn BC .

Gọi I là điểm thỏa: $4\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{IA} + 2\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{IA} + \vec{IN} = \vec{0}$, nên điểm I thuộc đoạn thẳng AN sao cho $IN = 2IA$.

Khi đó: $IA = \frac{1}{3}AN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, và $IN = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$IB^2 = IC^2 = IN^2 + BN^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}.$$

Ta có: $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow 4(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = \frac{5a^2}{2}$.

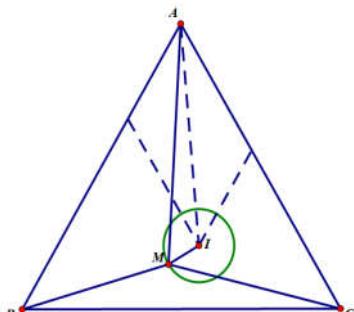
$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 4IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 6MI^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{12} + 2 \cdot \frac{7a^2}{12} = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Câu 77. Cho tam giác đều ABC cạnh 18cm . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$ là

- A. Tập rỗng. B. Đường tròn cố định có bán kính $R = 2\text{cm}$.
C. Đường tròn cố định có bán kính $R = 3\text{cm}$. D. Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B



Ta có $|\vec{MA} - \vec{MB}| = |\vec{AB}| = 18$.

Dựng điểm I thỏa mãn $2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{9}\vec{AC}$.

Khi đó: $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow 9|\vec{MI}| = 18 \Leftrightarrow IM = 2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đường tròn cố định có bán kính $R = 2\text{cm}$.

Câu 78. Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\vec{AK} = 3\vec{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\vec{KA} + \vec{KB} + 2\vec{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

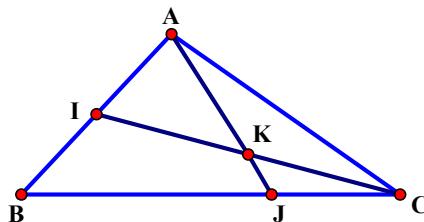
A. Đường tròn đường kính IJ .

B. Đường tròn đường kính IK .

C. Đường tròn đường kính JK .

D. Đường trung trực đoạn JK .

Lời giải



Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ nên

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}$.

Như vậy $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}) \cdot (4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0$.

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK .

Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định (đpcm).

Câu 79. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .

A. $x = \frac{5a}{12}$.

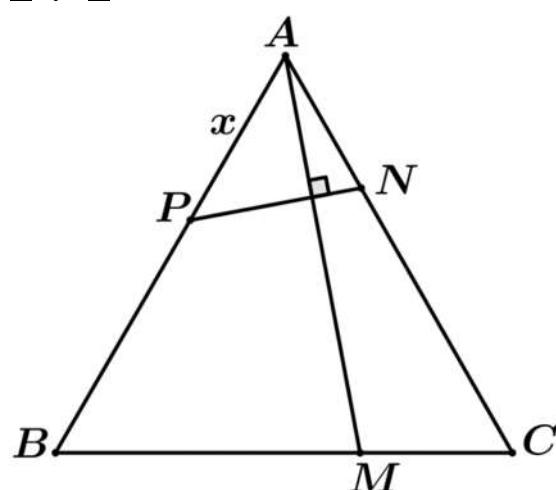
B. $x = \frac{a}{2}$.

C. $x = \frac{4a}{5}$.

D. $x = \frac{7a}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}$, ta có $|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{b} \cdot \vec{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3} (\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3} (\vec{b} + 2\vec{c})$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{x}{a} \overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} = \frac{1}{3a} (-3x\vec{b} + a\vec{c})$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán ta có } AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c})(-3x\vec{b} + a\vec{c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x\vec{b}^2 + a(\vec{b} \cdot \vec{c}) - 6x(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 2a\vec{c}^2 = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}.$$

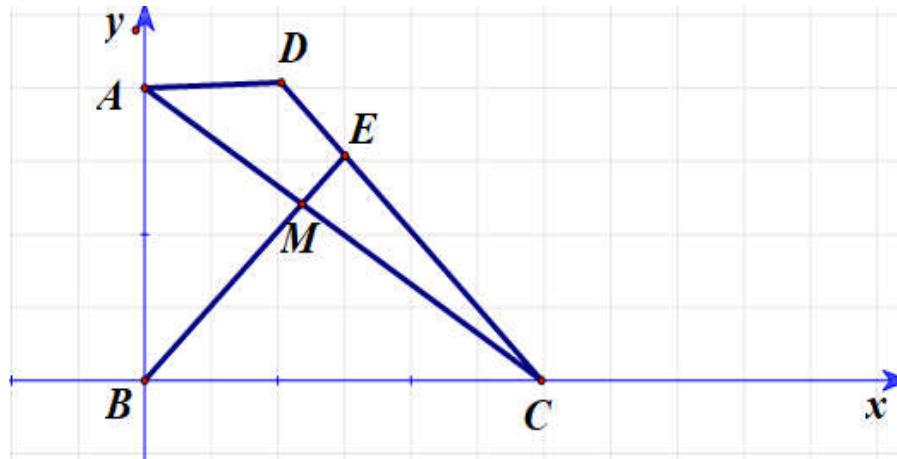
- Câu 80.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B , điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox .



Theo bài ra ta có $B(0;0)$, $A(0;2)$, $C(3;0)$, $D(1;2)$

Khi đó $\overrightarrow{AC} = (3; -2)$. Phương trình tham số của đường thẳng AC là $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Gọi $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2 - 2t)$. Ta có $\overrightarrow{BM} = (3t; 2 - 2t)$ và $\overrightarrow{DC} = (2; -2)$.

Để $BM \perp DC$ thì $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{6}{5}; \frac{-4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$ và $\overrightarrow{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.

Vì $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}$ cùng chiều $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$.