

## Bài 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là bất phương trình có một trong các dạng sau:  
 $ax + by < c, ax + by > c, ax + by \leq c, ax + by \geq c$ ,

trong đó  $a, b, c$  là những số thực cho trước với  $a, b$  không đồng thời bằng 0;  $x, y$  là các ẩn.

- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đường thẳng  $d: ax + by = c$  chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ , nửa mặt phẳng còn lại (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by > c$ .

- Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :

**Bước 1:** Vẽ đường thẳng  $d: ax + by = c$ . Đường thẳng  $d$  chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng.

**Bước 2:** Lấy một điểm  $M(x_0; y_0)$  không nằm trên  $d$  (ta thường lấy gốc tọa độ  $O$  nếu  $c \neq 0$ ).

Tính  $ax_0 + by_0$  và so sánh với  $c$ .

**Bước 3:** Kết luận

- Nếu  $ax_0 + by_0 < c$  thì nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) chứa điểm  $M$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ .

- Nếu  $ax_0 + by_0 > c$  thì nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) không chứa điểm  $M$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ .

### B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

#### Dạng 1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là bất phương trình có một trong các dạng sau:  
 $ax + by < c, ax + by > c, ax + by \leq c, ax + by \geq c$ ,

trong đó  $a, b, c$  là những số thực cho trước với  $a, b$  không đồng thời bằng 0;  $x, y$  là các ẩn.

- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đường thẳng  $d: ax + by = c$  chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ , nửa mặt phẳng còn lại (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by > c$ .

### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

$2x + 3y < 1; \quad 2x^2 + 3y < 1.$

**Câu 2.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x + 2y > 5$ . Cặp số nào sau đây là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên?

a)  $(x; y) = (3; 4)$ ; b)  $(x; y) = (0; -1)$ .

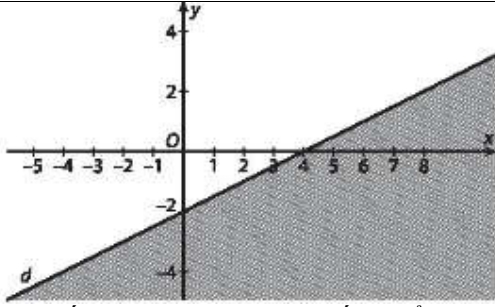
**Câu 3.** Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a)  $2x + 3y > 6$

b)  $2^2x + y \leq 0$

c)  $2x^2 - y \geq 1$

**Câu 4.** Xác định một bất phương trình bậc nhất hai ẩn nhận nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng  $d$  (miền không bị gạch) làm miền nghiệm (H. 2.3).



**Câu 5.** Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau đây:

a)  $x - 5y + 2 < 0$

b)  $9x^2 + 8y - 7 \geq 0$

c)  $3x - 2 > 0$

d)  $4y + 11 \leq 0$ .

**Câu 6.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $20x + 50y - 700 < 0$  ?

a) (5; 6)

b) (9; 11).

**Câu 7.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x - 2y + 6 > 0$

a) (0; 0) có phải là một nghiệm của bất phương trình đã cho không?

b) Chỉ ra ba cặp số (x; y) là nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đã cho trên mặt phẳng tọa độ Oxy

**Câu 8.** Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau:

a)  $9x - 7y - 5 \leq 0$  b)  $y \geq 9x + 9$  ; c)  $y + 2022 > 0$  d)  $x - y^2 + 1 > 0$ .

**Câu 9.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $10x + 20y \leq 420$  ?

a) (9; 5) b) (2; 400).

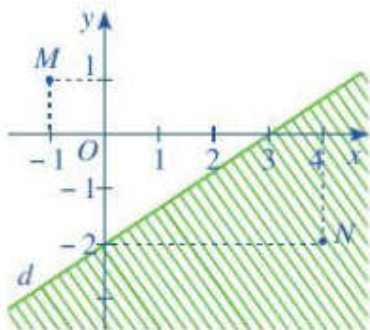
**Câu 10.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $3x + 2y \geq -5$  ?

a) (2; -1);

b) (-2; 0);

c) (-1; -1).

**Câu 11.** Nửa mặt phẳng không bị gạch trong hình dưới (không kể d) biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Hỏi tọa độ hai điểm  $M(-1; 1)$ ,  $N(4; -2)$  có là nghiệm của bất phương trình đó không?



**Câu 12.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $2x - 3y < 3$  ?

a) (0; -1)

b) (2; 1)

c) (3; 1)

**Câu 13.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $-5x + 2y > 10$  ?

a) (-2; 1); b) (1; 5); c) (0; 5).

**BÀI TẬP BỔ SUNG**

- Câu 14.** Cho bất phương trình:  $2x - y < 0$ . Trong các cặp số  $(-1; 2)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(0; 1)$ ,  $(3; -2)$ ,  $(-1; -2)$ , cặp nào là nghiệm của bất phương trình, cặp nào không phải là nghiệm của bất phương trình?
- Câu 15.** Tìm các nghiệm  $(x; y)$  của bất phương trình  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1$ , trong đó  $x, y$  là số nguyên dương.
- Câu 16.** Tìm giá trị của tham số  $m$  sao cho  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$  là nghiệm của bất phương trình  $mx + (m-1)y > 2$ .

**Dạng 2. Biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn**

- Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :  
**Bước 1:** Vẽ đường thẳng  $d: ax + by = c$ . Đường thẳng  $d$  chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng.

**Bước 2:** Lấy một điểm  $M(x_0; y_0)$  không nằm trên  $d$  (ta thường lấy gốc tọa độ  $O$  nếu  $c \neq 0$ ).  
 Tính  $ax_0 + by_0$  và so sánh với  $c$ .

**Bước 3:** Kết luận

- Nếu  $ax_0 + by_0 < c$  thì nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) chứa điểm  $M$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ .

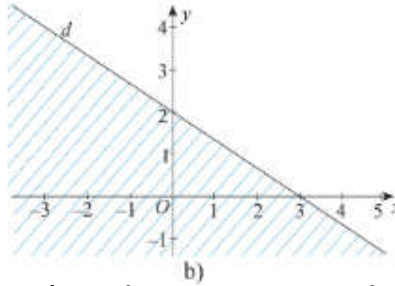
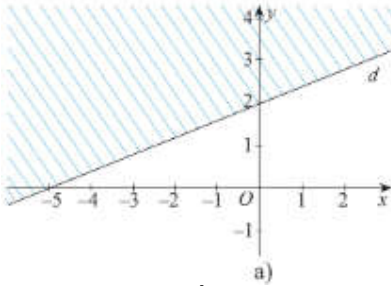
- Nếu  $ax_0 + by_0 > c$  thì nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) không chứa điểm  $M$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ .

**BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP**

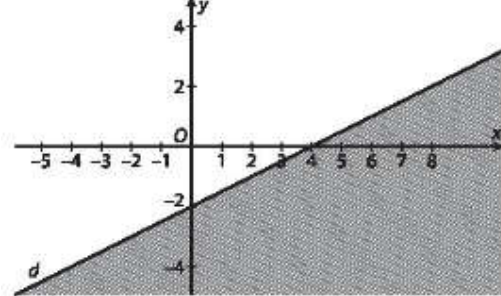
- Câu 17.** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $x + y \geq 100$  trên mặt phẳng tọa độ.
- Câu 18.** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $5x - 7y \leq 0$  trên mặt phẳng tọa độ.
- Câu 19.** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:  
 a)  $3x + 2y \geq 300$   
 b)  $7x + 20y < 0$
- Câu 20.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x + 2y \leq 3$ .  
 a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng tọa độ.  
 b) Từ đó xác định miền nghiệm của bất phương trình  $x + 2y < 3$  và miền nghiệm của bất phương trình  $x + 2y > 3$ .
- Câu 21.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $-3x + y < 4$ .  
 a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng tọa độ.  
 b) Từ đó suy ra miền nghiệm của bất phương trình  $-3x + y \leq 4$  và miền nghiệm của bất phương trình  $-3x + y \geq 4$ .
- Câu 22.** Cho bất phương trình  $2x + 3y + 3 \leq 5x + 2y + 3$ .  
 Bằng cách chuyển vế, hãy đưa bất phương trình trên về dạng tổng quát của bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn đó trên mặt phẳng tọa độ.
- Câu 23.** Cho bất phương trình  $x + 2y \geq -4$ .  
 a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng tọa độ.  
 b) Miền nghiệm có chứa bao nhiêu điểm  $(x; y)$  với  $x, y$  là các số nguyên âm?
- Câu 24.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:  
 a)  $x - 2y - 1 > 0$   
 b)  $x + y - 1 \leq 0$ .
- Câu 25.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :  
 a)  $-x + y + 2 > 0$   
 b)  $y + 2 \geq 0$   
 c)  $-x + 2 \leq 0$
- Câu 26.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :  
 a)  $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$

b)  $3(x-1) + 4(y-2) < 5x-3$

**Câu 27.** Miền không gạch chéo (không kể bờ d) trong mỗi hình dưới đây là miền nghiệm của bất phương trình nào?



**Câu 28.** Xác định một bất phương trình bậc nhất hai ẩn nhận nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng  $d$  (miền không bị gạch) làm miền nghiệm (H. 2.3).



**Câu 29.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a)  $2x + 3y - 6 > 0$ ; b)  $x + 2y - 8 \leq 0$ ; c)  $y - 3 \leq 0$ .

**Câu 30.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn:  $2x - 5y + 10 > 0$ .

a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình trên mặt phẳng  $Oxy$ .

b)  $(1; 3)$  có phải là nghiệm của bất phương trình trên không?

c) Chỉ ra 2 cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn bất phương trình trên.

**Câu 31.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :

a)  $x + y - 1 > 0$

b)  $x - 1 \geq 0$ ;

c)  $-y + 2 \leq 0$ .

**Câu 32.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :

a)  $3x + 2y < x - y + 8$ ;

b)  $2(x-1) + 3(y-2) > 2$ .

**Câu 33.** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:  $x + y > -1$ ;  $x + y \geq -1$ .

**Câu 34.** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

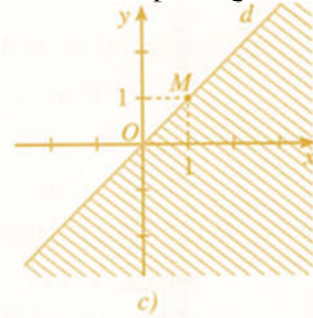
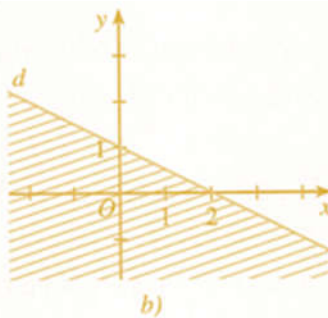
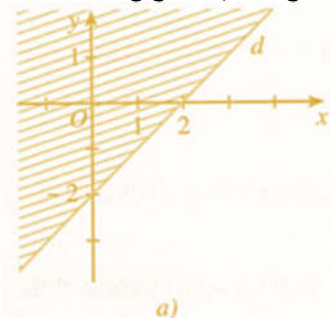
a)  $x + 2y < 3$ ;

b)  $3x - 4y \geq -3$

c)  $y \geq -2x + 4$

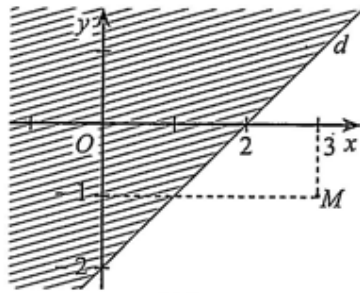
d)  $y < 1 - 2x$ .

**Câu 35.** Phần không gạch chéo (không kể d) ở mỗi Hình a, b, c là miền nghiệm của bất phương trình nào?



**Câu 36.** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình:  $x + 2y < 3$ .

**Câu 37.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể  $d$ ) ở Hình 2 là miền nghiệm của bất phương trình nào?

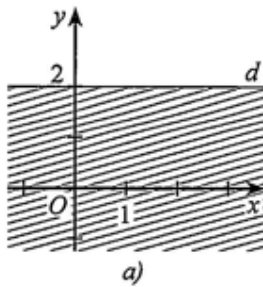


Hình 2

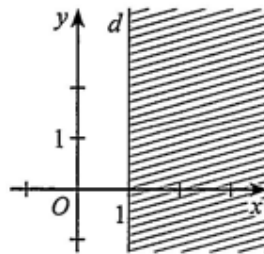
**Câu 38.** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

- a)  $3x + 5y < 15$ ;
- b)  $x - 2y \geq 6$ ;
- c)  $y > -x + 3$ ;
- d)  $y \leq 4 - 2x$ .

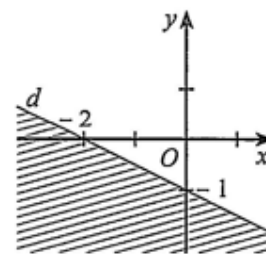
**Câu 39.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể  $d$ ) ở mỗi Hình 5a, 5b, 5c là miền nghiệm của bất phương trình nào?



a)



b)



c)

Hình 5

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 40.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình  $x - 2y > 1$ ?

**Câu 41.** Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau

a)  $2x - y \geq 0$ .

b)  $\frac{x - 2y}{2} > \frac{2x + y + 1}{3}$ .

### Dạng 3. Ứng dụng – bài toán thực tế

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Phương pháp giải:

Bước 1. Chọn các ẩn và đặt điều kiện cho các ẩn.

Bước 2. Biểu thị các đại lượng chưa biết hoặc cần tính toán theo các đại lượng đã biết.

Bước 3. Thiết lập bất phương trình theo dữ kiện của bài toán.

Bước 4. Tìm miền nghiệm của bất phương trình nhận được.

Bước 5. Từ miền nghiệm rút ra kết luận theo yêu cầu đề bài.

**Câu 42.** Nhân ngày Quốc tế Thiếu nhi 1-6, một rạp chiếu phim phục vụ các khán giả một bộ phim hoạt hình. Vé được bán ra có hai loại:



Loại 1 (dành cho trẻ từ 6-13 tuổi): 50000 đồng/vé;



Loại 2 (dành cho người trên 13 tuổi): 100000 đồng/vé.

Người ta tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 20 triệu đồng.

Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?

**Câu 43.** Ông An muốn thuê một chiếc ô tô (có lái xe) trong một tuần. Giá thuê xe được cho như bảng sau:

	Phi cố định (nghìn đồng/ngày)	Phí tính theo quãng đường di chuyển (nghìn đồng/kilômét)
Từ thứ Hai đến thứ Sáu	900	8
Thứ Bảy và Chủ nhật	1500	10

a) Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số kilômét ông An đi trong các ngày từ thứ Hai đến thứ Sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$  sao cho tổng số tiền ông An phải trả không quá 14 triệu đồng.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

**Câu 44.** Anh An là nhân viên bán hàng tại siêu thị điện máy. Anh An kiếm được một khoản hoa hồng 600 nghìn đồng cho mỗi máy giặt và 1,3 triệu đồng cho mỗi tủ lạnh mà anh ấy bán được. Hỏi để nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng thì anh An cần bán bao nhiêu máy giặt và tủ lạnh?

**Câu 45.** Một cửa hàng bán lẻ bán hai loại hạt cà phê. Loại thứ nhất giá 140 nghìn đồng/kg và loại thứ hai giá 180 nghìn đồng/kg. Cửa hàng trộn  $x$  kg loại thứ nhất và  $y$  kg loại thứ hai sao cho hạt cà phê đã trộn có giá không quá 170 nghìn đồng/kg.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  thỏa mãn điều kiện đề bài.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

**Câu 46.** Bạn Cúc muốn pha hai loại nước cam. Để pha một lít nước cam loại I cần 30 g bột cam, còn một lít nước cam loại II cần 20 g bột cam. Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số lít nước cam loại I và II pha chế được. Biết rằng Cúc chỉ có thể dùng không quá 100 gam bột cam. Hãy lập các bất phương trình mô tả lít nước cam loại I và II mà bạn Cúc có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đó trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

**Câu 47.** Bạn Hoa để dành được 420 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em khuyết tật, Hoa đã ủng hộ  $x$  tờ tiền loại 10 nghìn đồng,  $y$  tờ tiền loại 20 nghìn đồng.

a) Tính tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ theo  $x, y$ .

b) Giải thích tại sao ta lại có bất phương trình  $10x + 20y \leq 420$ .

**Câu 48.** Cho biết 226 g thịt bò chứa khoảng 59 g protein. Một quả trứng nặng 46 g có chứa khoảng 6 g protein (nguồn: Bộ Nông nghiệp Hoa Kỳ). Giả sử có một người mỗi ngày cần không quá 60 g protein. Gọi số gam thịt bò và số gam trứng mà người đó ăn trong một ngày lần lượt là  $x, y$ .

a) Lập bất phương trình theo  $x, y$  diễn tả giới hạn về lượng protein mà người đó cần mỗi ngày.

b) Dùng bất phương trình ở câu a) để trả lời hai câu hỏi sau:

- Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì có phù hợp không?

- Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì có phù hợp không?

**Câu 49.** Bạn Nga muốn pha hai loại nước rửa xe. Để pha một lít loại I cần 600ml dung dịch chất tẩy rửa, còn loại II chỉ cần 400ml. Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số lít nước rửa xe loại I và II pha chế được và biết rằng Nga chỉ cần 2400ml chất tẩy rửa, hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại I và II mà bạn Nga có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

**Câu 50.** Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng  $60m^2$ . Diện tích để kê một chiếc ghế là  $0,5m^2$ , một chiếc bàn là  $1,2m^2$ . Gọi  $x$  là số chiếc ghế,  $y$  là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là  $12m^2$ .

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

**Câu 51.** Trong 1 lạng (100 g thịt bò chứa khoảng 26 g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46 g protein.

(Nguồn: <https://vinmec.com> và <https://thanhvien.vn>) Gọi  $x, y$  lần lượt là số lượng thịt bò và số lượng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

**Câu 52.** Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng  $60m^2$ . Diện tích để kê một chiếc ghế là  $0,5m^2$ , một chiếc bàn là  $1,2m^2$ . Gọi  $x$  là số chiếc ghế,  $y$  là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là  $12m^2$ .

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

**Câu 53.** Hà, Châu, Liên và Ngân cùng đi mua trà sữa. Cả bốn bạn có tất cả 185 nghìn đồng. Bốn bạn mua 4 cốc trà sữa với giá tiền 35 nghìn đồng một cốc. Các bạn gọi thêm trân châu cho vào trà sữa. Một phần trân châu đen có giá 5 nghìn đồng, một phần trân châu trắng có giá 10 nghìn đồng. Gọi  $x, y$  lần lượt là số phần trân châu đen, trân châu trắng mà bốn bạn định mua thêm.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  để thể hiện số tiền các bạn có đủ khả năng chi trả cho phần trân châu đen, trắng.

b) Chỉ ra một nghiệm nguyên của bất phương trình đó.

### BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 54.** Ông An trồng hai loại hoa gồm hoa hồng và hoa ly để bán vào dịp Tết Nguyên Đán. Hoa hồng có giá 80000 đồng/chậu và hoa ly có giá 120000 đồng/chậu. Ông An tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền bán hoa thu được phải đạt tối thiểu 30 triệu đồng. Hỏi số lượng chậu hoa bán được trong những trường hợp nào thì ông An phải bù lỗ?

**Câu 55.** Trong Lễ hội văn hoá dân gian, lớp 10 A tổ chức một gian hàng có hai trò chơi dân gian truyền thống cho cả giáo viên và học sinh. Vé tham gia chơi có hai loại:

- Loại 1 (dành cho học sinh): 2000 đồng/vé;

- Loại 2 (dành cho giáo viên): 3000 đồng/vé.

Lớp 10 A tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được khi vào cổng này phải đạt tối thiểu 3 triệu đồng. Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì lớp 10 A phải bù lỗ?

**Câu 56.** Một gian hàng rộng  $60m^2$  trưng bày bàn và ghế. Diện tích để kê một chiếc ghế là  $0,5m^2$ ; diện tích để kê một chiếc bàn là  $1,2m^2$ . Gọi  $x$  là số chiếc ghế,  $y$  là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là  $12m^2$ .

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

**Câu 57.** Trong 100 gram thịt bò chứa khoảng 26 gram protein, 100 gram cá rô phi chứa khoảng 20 gram protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46 gram protein. Gọi  $x, y$  lần lượt là số gram thịt bò và số gram cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

**Câu 58.** Một cửa hàng dự định kinh doanh hai loại áo loại I và II với số vốn nhập hàng nhỏ hơn 70 triệu đồng. Giá mua vào một chiếc áo loại I và II lần lượt là 70 nghìn đồng, 140 nghìn đồng.

a) Gọi  $x, y$  lần lượt là số áo loại I và loại II cửa hàng dự định nhập về ( $x, y$  là số tự nhiên). Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$  sao cho số vốn nhập hàng nhỏ hơn 70 triệu đồng.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $-3x + 5y \leq 6$  ?

A. (2; 8).

B. (-10; -3).

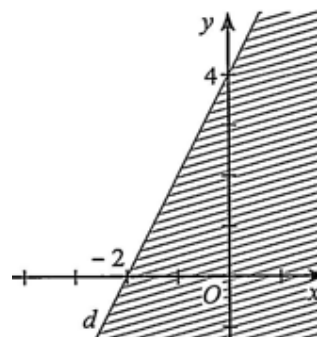
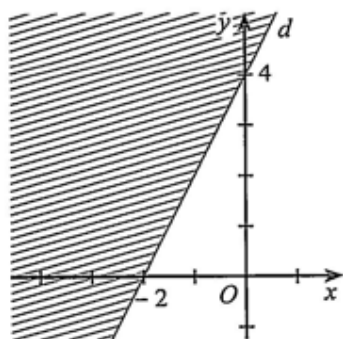
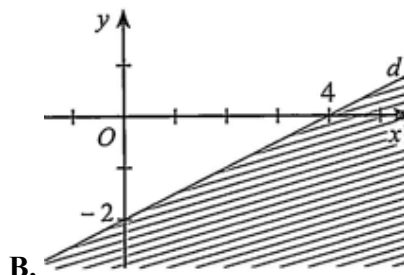
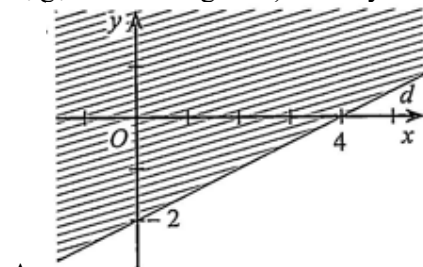
C. (3; 3).

D. (0; 2).

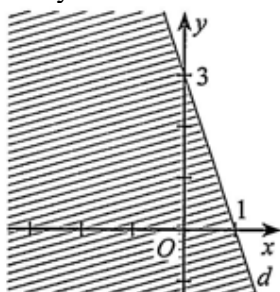
**Câu 2.** Miền nghiệm của bất phương trình  $2x - 3y > 5$  là nửa mặt phẳng (không kể đường thẳng  $d: 2x - 3y = 5$ ) không chứa điểm có tọa độ nào sau đây?

- A.  $(0;0)$ .      B.  $(3;0)$ .      C.  $(1;-2)$ .      D.  $(-3;-4)$ .

**Câu 3.** Miền nghiệm của bất phương trình  $x - 2y < 4$  được xác định bởi miền nào (nửa mặt phẳng không bị gạch và không kể  $d$ ) sau đây?



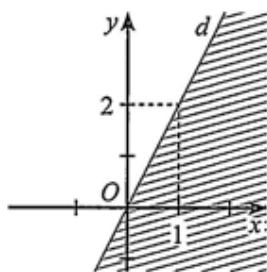
**Câu 4.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể  $d$ ) ở Hình 3 là miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?



Hình 3

- A.  $3x + y < 3$ .      B.  $x + 3y > 3$ .      C.  $x + 3y < 3$ .      D.  $3x + y > 3$ .

**Câu 5.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (kể cả  $d$ ) ở Hình 4 là miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?



Hình 4

- A.  $2x - y \leq 0$ .      B.  $2x - y \geq 0$ .      C.  $x - 2y \geq 0$ .      D.  $x - 2y \leq 0$ .

### BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 6.** Câu nào sau đây **sai**?

Miền nghiệm của bất phương trình  $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$  là nửa mặt phẳng chứa điểm

- A.  $(0;0)$ .      B.  $(1;1)$ .      C.  $(4;2)$ .      D.  $(1;-1)$ .

**Câu 7.** Câu nào sau đây đúng?



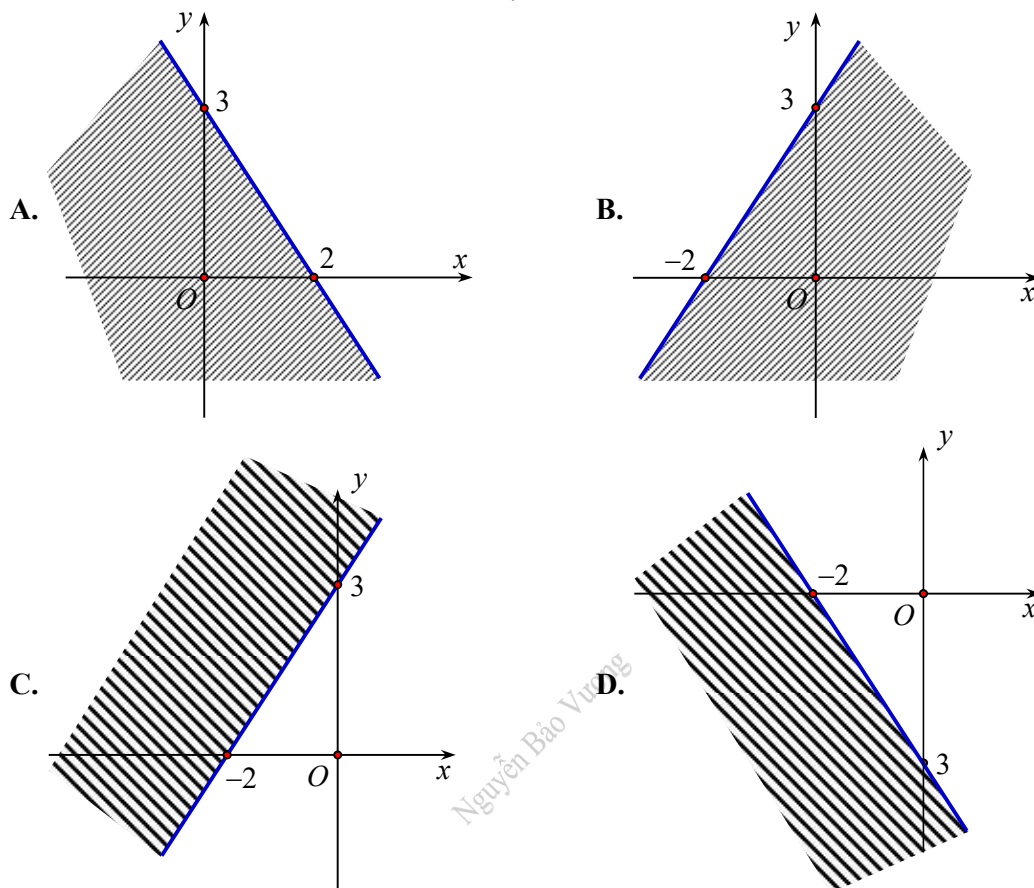
- Miền nghiệm của bất phương trình  $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$  là nửa mặt phẳng chứa điểm
- A.  $(0;0)$ .                      B.  $(-4;2)$ .                      C.  $(-2;2)$ .                      D.  $(-5;3)$ .
- Câu 8.** Câu nào sau đây **sai**?.  
Miền nghiệm của bất phương trình  $x+3+2(2y+5)<2(1-x)$  là nửa mặt phẳng chứa điểm
- A.  $(-3;-4)$ .                      B.  $(-2;-5)$ .                      C.  $(-1;-6)$ .                      D.  $(0;0)$ .
- Câu 9.** Câu nào sau đây **đúng**?.  
Miền nghiệm của bất phương trình  $4(x-1)+5(y-3)>2x-9$  là nửa mặt phẳng chứa điểm
- A.  $(0;0)$ .                      B.  $(1;1)$ .                      C.  $(-1;1)$ .                      D.  $(2;5)$ .
- Câu 10.** Miền nghiệm của bất phương trình  $3x+2(y+3)>4(x+1)-y+3$  là phần mặt phẳng chứa điểm nào?
- A.  $(3;0)$ .                      B.  $(3;1)$ .                      C.  $(1;1)$ .                      D.  $(0;0)$ .
- Câu 11.** Miền nghiệm của bất phương trình  $5(x+2)-9<2x-2y+7$  là phần mặt phẳng **không** chứa điểm nào?
- A.  $(-2;1)$ .                      B.  $(2;3)$ .                      C.  $(2;-1)$ .                      D.  $(0;0)$ .
- Câu 12.** Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình  $2x+y<1$ ?
- A.  $(-2;1)$ .                      B.  $(3;-7)$ .                      C.  $(0;1)$ .                      D.  $(0;0)$ .
- Câu 13.** Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình  $x-4y+5\geq 0$ ?
- A.  $(-5;0)$ .                      B.  $(-2;1)$ .                      C.  $(1;-3)$ .                      D.  $(0;0)$ .
- Câu 14.** Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?
- A.  $2x-5y+3z\leq 0$ .                      B.  $3x^2+2x-4>0$ .                      C.  $2x^2+5y>3$ .                      D.  $2x+3y<5$ .
- Câu 15.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình  $2x+y-3>0$ ?
- A.  $Q(-1;-3)$ .                      B.  $M\left(1;\frac{3}{2}\right)$ .                      C.  $N(1;1)$ .                      D.  $P\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ .
- Câu 16.** Miền nghiệm của bất phương trình  $-3x+y+2\leq 0$  không chứa điểm nào sau đây?
- A.  $A(1;2)$ .                      B.  $B(2;1)$ .                      C.  $C\left(1;\frac{1}{2}\right)$ .                      D.  $D(3;1)$ .
- Câu 17.** Miền nghiệm của bất phương trình  $x+3+2(2y+5)<2(1-x)$  không chứa điểm nào sau đây?
- A.  $A(-1;-2)$ .                      B.  $B\left(-\frac{1}{11};-\frac{2}{11}\right)$ .                      C.  $C(0;-3)$ .                      D.  $D(-4;0)$ .
- Câu 18.** Miền nghiệm của bất phương trình  $2x+y>1$  không chứa điểm nào sau đây?
- A.  $A(1;1)$ .                      B.  $B(2;2)$ .                      C.  $C(3;3)$ .                      D.  $D(-1;-1)$ .
- Câu 19.** Miền nghiệm của bất phương trình  $(1+\sqrt{3})x-(1-\sqrt{3})y\geq 2$  chứa điểm nào sau đây?
- A.  $A(1;-1)$ .                      B.  $B(-1;-1)$ .                      C.  $C(-1;1)$ .                      D.  $D(-\sqrt{3};\sqrt{3})$ .
- Câu 20.** Miền nghiệm của bất phương trình  $x-2+2(y-1)>2x+4$  chứa điểm nào sau đây?
- A.  $A(1;1)$ .                      B.  $B(1;5)$ .                      C.  $C(4;3)$ .                      D.  $D(0;4)$ .
- Câu 21.** Miền nghiệm của bất phương trình  $2x-\sqrt{2}y+\sqrt{2}-2\leq 0$  chứa điểm nào sau đây?
- A.  $A(1;1)$ .                      B.  $B(1;0)$ .                      C.  $C(\sqrt{2};\sqrt{2})$ .                      D.  $D(\sqrt{2};-\sqrt{2})$ .
- Câu 22.** Cho bất phương trình  $2x+4y<5$  có tập nghiệm là  $S$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.  $(1;1) \in S$ .      B.  $(1;10) \in S$ .      C.  $(1;-1) \in S$ .      D.  $(1;5) \in S$ .

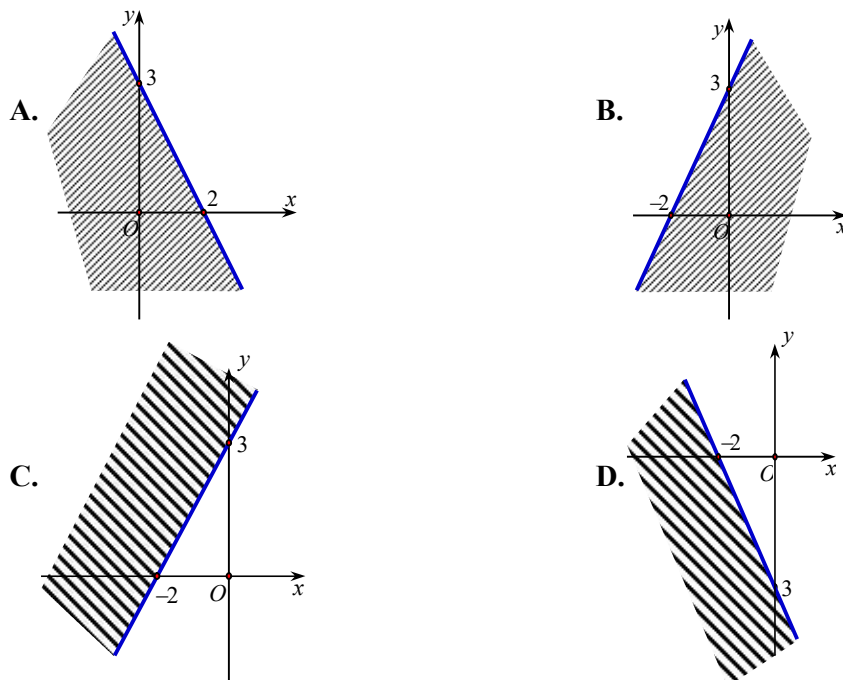
**Câu 23.** Cho bất phương trình  $x - 2y + 5 > 0$  có tập nghiệm là  $S$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.  $(2;2) \in S$ .      B.  $(1;3) \in S$ .      C.  $(-2;2) \in S$ .      D.  $(-2;4) \in S$ .

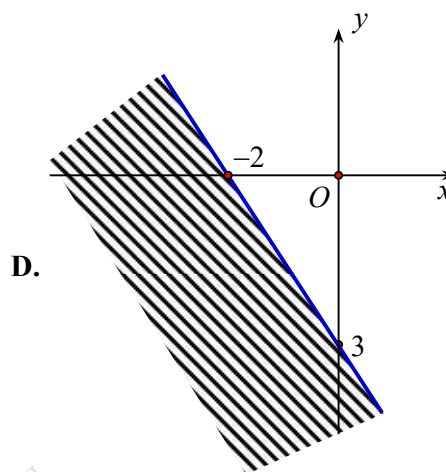
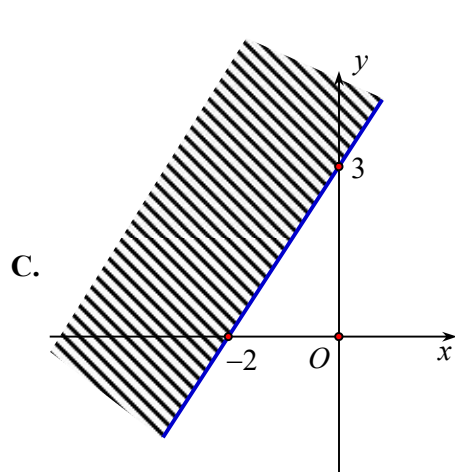
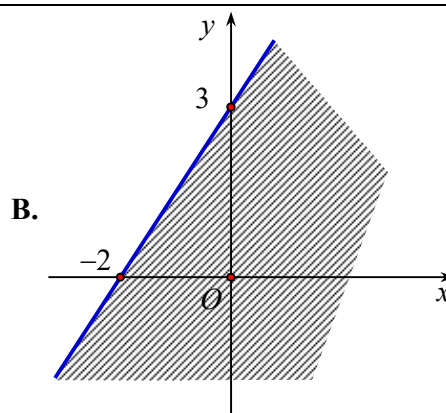
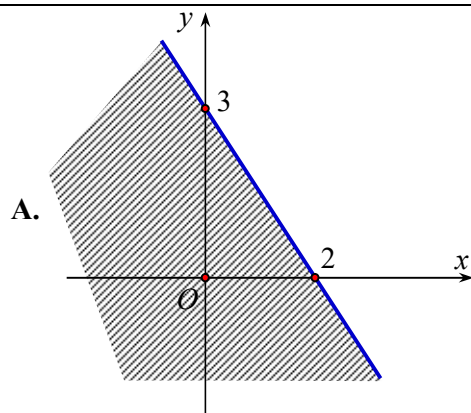
**Câu 24.** Miền nghiệm của bất phương trình  $3x - 2y > -6$  là



**Câu 25.** Miền nghiệm của bất phương trình  $3x + 2y > 6$  là



**Câu 26.** Miền nghiệm của bất phương trình  $3x + 2y > -6$  là



**Câu 27.** Cho bất phương trình  $-2x + \sqrt{3}y + \sqrt{2} \leq 0$  có tập nghiệm là  $S$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.  $(1; 1) \in S$ .      B.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \in S$ .      C.  $(1; -2) \notin S$ .      D.  $(1; 0) \notin S$ .

**Câu 28.** Cặp số  $(x; y) = (2; 3)$  là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- A.  $4x > 3y$ .      B.  $x - 3y + 7 < 0$ .      C.  $2x - 3y - 1 > 0$ .      D.  $x - y < 0$ .

**Câu 29.** Cặp số  $(x_0; y_0)$  nào là nghiệm của bất phương trình  $3x - 3y \geq 4$ .

- A.  $(x_0; y_0) = (-2; 2)$ .      B.  $(x_0; y_0) = (5; 1)$ .      C.  $(x_0; y_0) = (-4; 0)$ .      D.  $(x_0; y_0) = (2; 1)$ .

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ☞ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** ☞ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ☞ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: **Nguyễn Vương**

☞ [https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUBT3nwJfA?view\\_as=subscriber](https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUBT3nwJfA?view_as=subscriber)

☞ Tải nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>

## BÀI 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là bất phương trình có một trong các dạng sau:  
 $ax + by < c, ax + by > c, ax + by \leq c, ax + by \geq c$ ,

trong đó  $a, b, c$  là những số thực cho trước với  $a, b$  không đồng thời bằng 0;  $x, y$  là các ẩn.

- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đường thẳng  $d: ax + by = c$  chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ , nửa mặt phẳng còn lại (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by > c$ .

- Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :  
**Bước 1:** Vẽ đường thẳng  $d: ax + by = c$ . Đường thẳng  $d$  chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng.

**Bước 2:** Lấy một điểm  $M(x_0; y_0)$  không nằm trên  $d$  (ta thường lấy gốc tọa độ  $O$  nếu  $c \neq 0$ ).  
 Tính  $ax_0 + by_0$  và so sánh với  $c$ .

**Bước 3:** Kết luận

- Nếu  $ax_0 + by_0 < c$  thì nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) chứa điểm  $M$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ .

- Nếu  $ax_0 + by_0 > c$  thì nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) không chứa điểm  $M$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ .

### B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

#### Dạng 1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  là bất phương trình có một trong các dạng sau:  
 $ax + by < c, ax + by > c, ax + by \leq c, ax + by \geq c$ ,

trong đó  $a, b, c$  là những số thực cho trước với  $a, b$  không đồng thời bằng 0;  $x, y$  là các ẩn.

- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đường thẳng  $d: ax + by = c$  chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ , nửa mặt phẳng còn lại (không kể  $d$ ) là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by > c$ .

### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

$$2x + 3y < 1; \quad 2x^2 + 3y < 1.$$

**Lời giải**

Bất phương trình  $2x + 3y < 1$  là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bất phương trình  $2x^2 + 3y < 1$  không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì chứa  $x^2$ .

**Câu 2.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x + 2y > 5$ . Cặp số nào sau đây là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên?

a)  $(x; y) = (3; 4)$ ; b)  $(x; y) = (0; -1)$ .

**Lời giải**

a) Vì  $3 + 2 \cdot 4 = 11 > 5$  nên cặp số  $(3; 4)$  là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Vì  $0 + 2 \cdot (-1) = -2 < 5$  nên cặp số  $(0; -1)$  không phải là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

**Câu 3.** Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- a)  $2x + 3y > 6$
- b)  $2^2x + y \leq 0$
- c)  $2x^2 - y \geq 1$

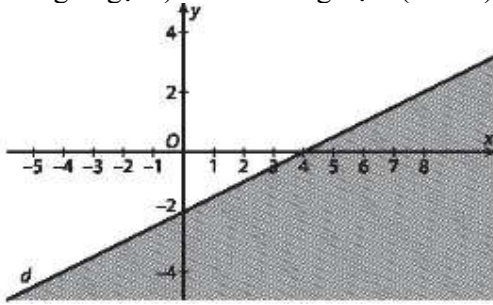
**Lời giải**

- a) Ta có hệ số  $a = 2, b = 3, c = 6$  và các ẩn là  $x$  và  $y$ .  
 $\Rightarrow$  bất phương trình  $2x + 3y > 6$  là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- b) Ta có  $2^2x + y \leq 0 \Leftrightarrow 4x + y \leq 0$   
 $\Rightarrow a = 4, b = 1$  và  $c = 0$ . Các ẩn là  $x$  và  $y$   
 $\Rightarrow 2^2x + y \leq 0$  là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- c)  $2x^2 - y \geq 1$  có bậc của  $x$  là 2 nên đây không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

**Chú ý**

Khi bậc của  $x$  và  $y$  lớn hơn 1 thì bất phương trình bài cho không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

**Câu 4.** Xác định một bất phương trình bậc nhất hai ẩn nhận nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng  $d$  (miền không bị gạch) làm miền nghiệm (H. 2.3).



**Lời giải**

Đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $(0; -2)$  và  $(4; 0)$  có phương trình  $x - 2y = 4$ . Vì miền nghiệm chứa gốc tọa độ nên bất phương trình cần tìm là  $x - 2y \leq 4$ .

**Câu 5.** Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau đây:

- a)  $x - 5y + 2 < 0$
- b)  $9x^2 + 8y - 7 \geq 0$
- c)  $3x - 2 > 0$
- d)  $4y + 11 \leq 0$ .

**Lời giải**

Các bất phương trình a), c), d) là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bất phương trình b) không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có chứa  $x^2$ .

**Câu 6.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $20x + 50y - 700 < 0$  ?

- a)  $(5; 6)$
- b)  $(9; 11)$ .

**Lời giải**

- a) Vì  $20.5 + 50.6 - 700 = -300 < 0$  nên  $(5; 6)$  là nghiệm của bất phương trình  $20x + 50y - 700 < 0$
- b) Vì  $20.9 + 50.11 - 700 = 30 > 0$  nên  $(9; 11)$  không phải là nghiệm của bất phương trình  $20x + 50y - 700 < 0$ .

**Câu 7.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x - 2y + 6 > 0$

- a)  $(0; 0)$  có phải là một nghiệm của bất phương trình đã cho không?
- b) Chỉ ra ba cặp số  $(x; y)$  là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- c) Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đã cho trên mặt phẳng tọa độ Oxy

**Lời giải**

- a) Vì  $0 - 2.0 + 6 = 6 > 0$  nên  $(0; 0)$  là một nghiệm của bất phương trình đã cho.
- b) Vì  $0 - 2.1 + 6 = 4 > 0$  nên  $(0; 1)$  là một nghiệm của bất phương trình đã cho.



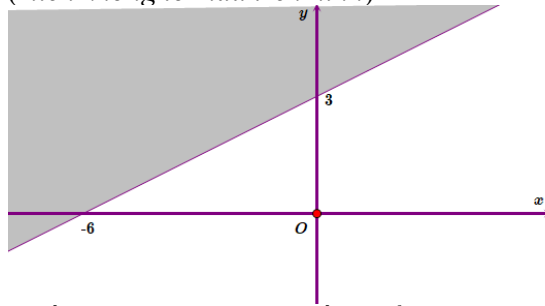
Vì  $1 - 2 \cdot 0 + 6 = 7 > 0$  nên  $(1; 0)$  là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vì  $1 - 2 \cdot 1 + 6 = 5 > 0$  nên  $(1; 1)$  là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Vẽ đường thẳng  $\Delta: x - 2y + 6 = 0$  đi qua hai điểm  $A(0; 3)$  và  $B(-2; 2)$

Xét gốc tọa độ  $O(0; 0)$ . Ta thấy  $O \notin \Delta$  và  $0 - 2 \cdot 0 + 6 = 6 > 0$

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không kể bờ  $\Delta$ , chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không tô màu trên hình)



**Câu 8.** Tìm bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong các bất phương trình sau:

a)  $9x - 7y - 5 \leq 0$  b)  $y \geq 9x + 9$  c)  $y + 2022 > 0$  d)  $x - y^2 + 1 > 0$ .

**Lời giải**

Các bất phương trình a), b), c) là các bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bất phương trình d) không là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì có chứa  $y^2$ .

**Câu 9.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $10x + 20y \leq 420$  ?

a)  $(9; 5)$  b)  $(2; 400)$ .

**Lời giải**

a) Ta có:  $10 \cdot 9 + 20 \cdot 5 = 190 < 420$ .

Vậy  $(9; 5)$  là nghiệm của bất phương trình  $10x + 20y \leq 420$ .

b) Ta có:  $10 \cdot 2 + 20 \cdot 400 = 8020 > 420$ .

Vậy  $(2; 400)$  không phải là nghiệm của bất phương trình  $10x + 20y \leq 420$ .

**Câu 10.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $3x + 2y \geq -5$  ?

a)  $(2; -1)$ ;

b)  $(-2; 0)$ ;

c)  $(-1; -1)$ .

**Lời giải**

a) Thay  $x = 2, y = -1$ , ta có:  $3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \geq -5$  là mệnh đề đúng.

Vậy  $(2; -1)$  là nghiệm của bất phương trình.

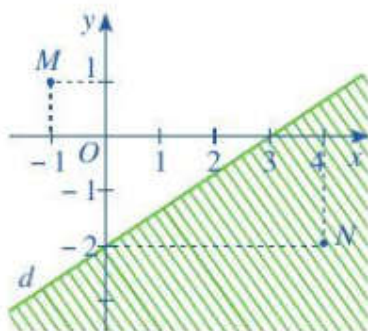
b) Thay  $x = -2, y = 0$ , ta có:  $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \geq -5$  là mệnh đề sai.

Vậy  $(-2; 0)$  không là nghiệm của bất phương trình.

c) Thay  $x = -1, y = -1$ , ta có:  $3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \geq -5$  là mệnh đề đúng.

Vậy  $(-1; -1)$  là nghiệm của bất phương trình.

**Câu 11.** Nửa mặt phẳng không bị gạch trong hình dưới (không kể d) biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Hỏi tọa độ hai điểm  $M(-1; 1)$ ,  $N(4; -2)$  có là nghiệm của bất phương trình đó không?



**Lời giải**

- Điểm  $M(-1;1)$  thuộc nửa mặt phẳng không bị gạch nên  $(-1;1)$  là nghiệm của bất phương trình đó.
- Điểm  $N(4;-2)$  thuộc nửa mặt phẳng bị gạch nên  $(4;-2)$  không là nghiệm của bất phương trình đó.

**Câu 12.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $2x - 3y < 3$  ?

- a)  $(0;-1)$
- b)  $(2;1)$
- c)  $(3;1)$

**Lời giải**

a) Thay  $x = 0, y = -1$  vào bất phương trình  $2x - 3y < 3$  ta được:

$$2 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) < 3 \Leftrightarrow 3 < 3 \text{ (Vô lý)}$$

Vậy  $(0;-1)$  không là nghiệm.

b) Thay  $x = 2, y = 1$  vào bất phương trình  $2x - 3y < 3$  ta được:

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 < 3 \Leftrightarrow 1 < 3 \text{ (Luôn đúng)}$$

Vậy  $(2;1)$  là nghiệm.

c) Thay  $x = 3, y = 1$  vào bất phương trình  $2x - 3y < 3$  ta được:

$$2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 < 3 \Leftrightarrow 3 < 3 \text{ (Vô lý)}$$

Vậy  $(3;1)$  không là nghiệm.

**Câu 13.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $-5x + 2y > 10$  ?

- a)  $(-2;1)$ ; b)  $(1;5)$ ; c)  $(0;5)$ .

**Lời giải**

$(-2;1)$ .

**BÀI TẬP BỔ SUNG**

**Câu 14.** Cho bất phương trình:  $2x - y < 0$ . Trong các cặp số  $(-1;2)$ ,  $(2;0)$ ,  $(0;1)$ ,  $(3;-2)$ ,  $(-1;-2)$ , cặp nào là nghiệm của bất phương trình, cặp nào không phải là nghiệm của bất phương trình?

**Lời giải**

Bằng cách thử trực tiếp, các cặp  $(-1;2)$ ,  $(0;1)$  là nghiệm, các cặp còn lại không phải là nghiệm của bất phương trình.

**Câu 15.** Tìm các nghiệm  $(x;y)$  của bất phương trình  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1$ , trong đó  $x, y$  là số nguyên dương.

**Lời giải**

**Cách 1:** Do  $x > 0$ ,  $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} \leq 1$  nên ta có  $\frac{y}{4} < 1 \Leftrightarrow y < 4$ .

Do  $y$  nguyên dương nên  $y \in \{1;2;3\}$ .

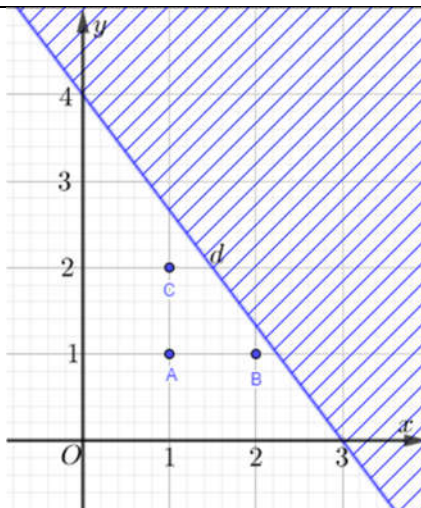
+ Với  $y = 1$ , ta có  $0 < \frac{x}{3} \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow x \in \{1;2\}$ .

+ Với  $y = 2$ , ta có  $0 < \frac{x}{3} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1$ .

+ Với  $y = 3$ , ta có  $0 < \frac{x}{3} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x \in \emptyset$ .

Vậy bất phương trình có các nghiệm nguyên dương là  $(1;1)$ ,  $(2;1)$  và  $(1;2)$ .

**Cách 2:** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình lên hệ trục tọa độ (là miền không gạch chéo trên hình vẽ):



Từ biểu diễn hình học, ta thấy các điểm nguyên dương trong miền nghiệm của bất phương trình là  $A(1;1)$ ,  $B(2;1)$  và  $C(1;2)$

**Câu 16.** Tìm giá trị của tham số  $m$  sao cho  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$  là nghiệm của bất phương trình  $mx + (m-1)y > 2$ .

**Lời giải**

Ta có  $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$  là nghiệm của bất phương trình  $mx + (m-1)y > 2$  khi và chỉ khi

$$-m + 2(m-1) > 2 \Leftrightarrow m > 4$$

### Dạng 2. Biểu diễn miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Các bước biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$  trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  :  
**Bước 1:** Vẽ đường thẳng  $d : ax + by = c$ . Đường thẳng  $d$  chia mặt phẳng tọa độ thành hai nửa mặt phẳng.

**Bước 2:** Lấy một điểm  $M(x_0; y_0)$  không nằm trên  $d$  (ta thường lấy gốc tọa độ  $O$  nếu  $c \neq 0$ ).  
 Tính  $ax_0 + by_0$  và so sánh với  $c$ .

**Bước 3:** Kết luận

- Nếu  $ax_0 + by_0 < c$  thì nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) chứa điểm  $M$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ .

- Nếu  $ax_0 + by_0 > c$  thì nửa mặt phẳng (không kể  $d$ ) không chứa điểm  $M$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$ .

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 17.** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $x + y \geq 100$  trên mặt phẳng tọa độ.

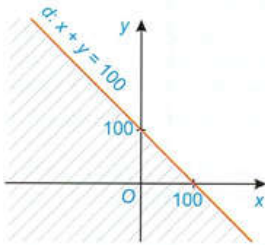
**Lời giải**

Ta biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x + y \geq 100$  như sau:

**Bước 1.** Vẽ đường thẳng  $d : x + y = 100$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

**Bước 2.** Lấy một điểm bất kì không thuộc  $d$  trên mặt phẳng rồi thay vào biểu thức  $cx + y$ . Chẳng hạn, lấy  $O(0;0)$ , ta có: rồi thay vào  $0 + 0 < 100$ .

Do đó miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng bờ  $d$  không chứa gốc tọa độ (miền không bị gạch).



**Câu 18.** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình  $5x - 7y \leq 0$  trên mặt phẳng tọa độ.

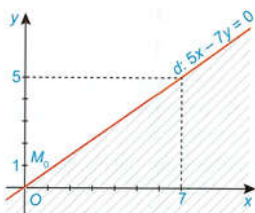
**Lời giải**

**Bước 1.** Vẽ đường thẳng  $d : 5x - 7y = 0$  trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

**Bước 2.** Lấy điểm  $M_0(0;1)$  không thuộc  $d$  và thay  $x=0, y=1$  vào biểu thức  $5x - 7y$  ta được:  $5 \cdot 0 - 7 \cdot 1 = -7 < 0$ .

Do đó miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ  $d$  chứa điểm  $M_0$  (miền không bị gạch).

**Chú ý.** Miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by < c$  là miền nghiệm của bất phương trình  $ax + by \leq c$  bỏ đi đường thẳng  $ax + by = c$  và biểu diễn đường thẳng bằng nét đứt.



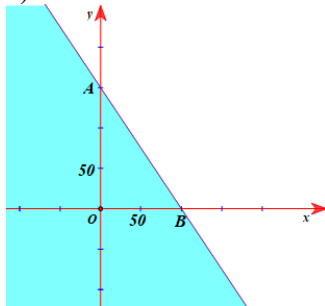
**Câu 19.** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

a)  $3x + 2y \geq 300$

b)  $7x + 20y < 0$

**Lời giải**

a)



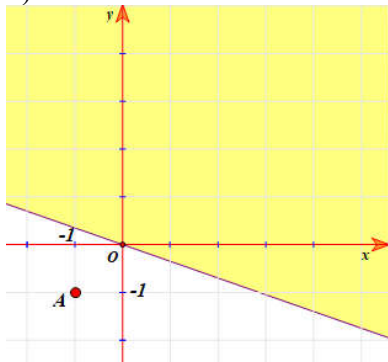
Bước 1: Vẽ đường thẳng  $3x + 2y = 300$

Bước 2: Thay tọa độ điểm  $O(0;0)$  vào  $3x + 2y$  ta được  $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 < 300$

$\Rightarrow$  Điểm O không thuộc miền nghiệm.

$\Rightarrow$  Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng có bờ  $3x + 2y = 300$  và không chứa điểm O.

b)



Bước 1: Vẽ đường thẳng  $7x + 20y = 0$

Bước 2: Vì  $c=0$  nên ta thay tọa độ điểm  $A(-1; -1)$  vào biểu thức  $7x + 20y$  ta được:

$$7 \cdot (-1) + 20 \cdot (-1) = -27 < 0$$

$\Rightarrow$  Điểm A thuộc miền nghiệm

$\Rightarrow$  Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng  $7x + 20y = 0$  và không chứa điểm A (không kể đường thẳng  $7x + 20y = 0$ )

**Câu 20.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x + 2y \leq 3$ .

a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng tọa độ.

b) Từ đó xác định miền nghiệm của bất phương trình  $x + 2y < 3$  và miền nghiệm của bất phương trình  $x + 2y > 3$ .

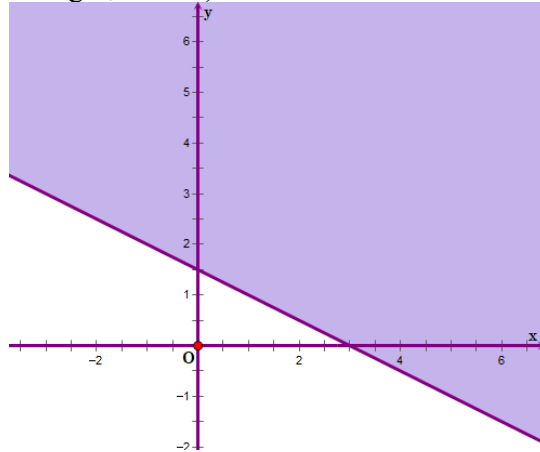
#### Lời giải

a) Ta biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng  $d: x + 2y = 3$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

Bước 2. Trong bất phương trình này, ta thấy  $c = 3 \neq 0$ . Ta chọn  $O(0; 0)$  là điểm không thuộc  $d$  và thay vào biểu thức  $x + 2y$ , ta có:  $0 + 2 \cdot 0 = 0 < 3$ .

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng bờ  $d$  chứa gốc tọa độ (miền không bị tô màu).



b) Miền nghiệm của bất phương trình  $x + 2y < 3$  chính là nửa mặt phẳng bờ  $d$  chứa gốc tọa độ không kể đường thẳng  $d$ .

Tương tự, miền nghiệm của bất phương trình  $x + 2y > 3$  là nửa mặt phẳng bờ  $d$  không chứa gốc tọa độ mà bỏ đi đường thẳng  $d$ .

**Câu 21.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $-3x + y < 4$ .

a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng tọa độ.

b) Từ đó suy ra miền nghiệm của bất phương trình  $-3x + y \leq 4$  và miền nghiệm của bất phương trình  $-3x + y \geq 4$ .

#### Lời giải

a) Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ  $d: -3x + y = 4$  chứa gốc tọa độ và bỏ đi đường thẳng  $d$ .

b) Miền nghiệm của bất phương trình  $-3x + y \leq 4$  là nửa mặt phẳng bờ  $d: -3x + y = 4$  chứa gốc tọa độ.

Miền nghiệm của bất phương trình  $-3x + y \geq 4$  là nửa mặt phẳng bờ  $d: -3x + y = 4$  không chứa gốc tọa độ.

**Câu 22.** Cho bất phương trình  $2x + 3y + 3 \leq 5x + 2y + 3$ .

Bằng cách chuyển vế, hãy đưa bất phương trình trên về dạng tổng quát của bất phương trình bậc nhất hai ẩn. Biểu diễn miền nghiệm của bất phương bậc nhất hai ẩn đó trên mặt phẳng tọa độ.

#### Lời giải

Xét bất phương trình  $2x + 3y + 3 \leq 5x + 2y + 3$ .

Chuyển vế ta được  $3x - y \geq 0$ . Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ  $d: 3x - y = 0$  chứa điểm  $(1; 0)$ .



**Câu 23.** Cho bất phương trình  $x + 2y \geq -4$ .

- a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình đã cho trên mặt phẳng tọa độ.
- b) Miền nghiệm có chứa bao nhiêu điểm  $(x; y)$  với  $x, y$  là các số nguyên âm?

**Lời giải**

- a) Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ  $d: x + 2y = -4$  chứa gốc tọa độ.
- b) Các điểm  $(x; y)$  cần tìm là  $(-1; -1), (-2; -1)$ .

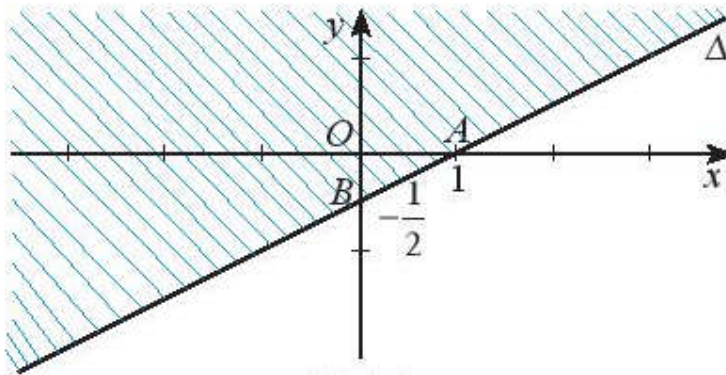
**Câu 24.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

- a)  $x - 2y - 1 > 0$
- b)  $x + y - 1 \leq 0$ .

**Lời giải**

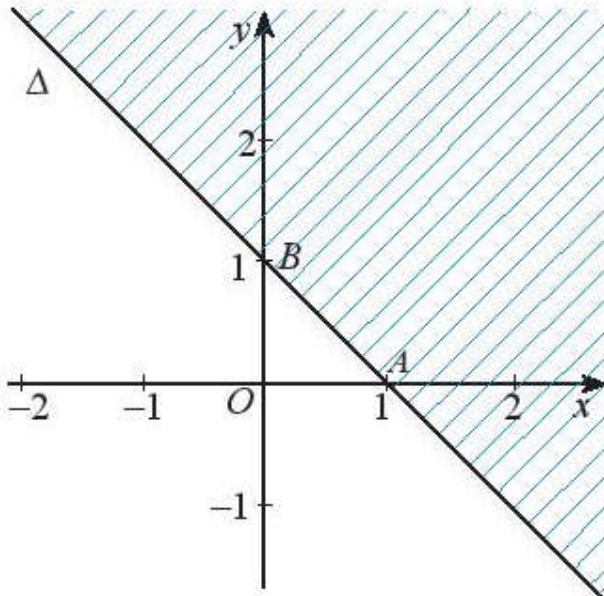
- a) Vẽ đường thẳng  $\Delta: x - 2y - 1 = 0$  đi qua hai điểm  $A(1; 0)$  và  $B\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ .

Xét gốc tọa độ  $O(0; 0)$ . Ta thấy  $O \notin \Delta$  và  $0 - 2 \cdot 0 - 1 < 0$ . Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không kể bờ  $\Delta$ , không chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không gạch chéo trên Hình).



- b) Vẽ đường thẳng  $\Delta: x + y - 1 = 0$  đi qua hai điểm  $A(1; 0)$  và  $B(0; 1)$ .

Xét gốc tọa độ  $O(0; 0)$ . Ta thấy  $O \notin \Delta$  và  $0 + 0 - 1 < 0$ . Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ  $\Delta$ , chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không gạch chéo trên Hình).



**Câu 25.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy:

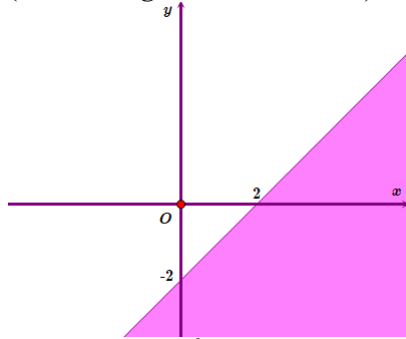
- a)  $-x + y + 2 > 0$
- b)  $y + 2 \geq 0$
- c)  $-x + 2 \leq 0$

**Lời giải**

a) Vẽ đường thẳng  $\Delta: -x + y + 2 = 0$  đi qua hai điểm  $A(2;0)$  và  $B(0;-2)$

Xét gốc tọa độ  $O(0;0)$ . Ta thấy  $O \notin \Delta$  và  $-0 + 0 + 2 = 2 > 0$

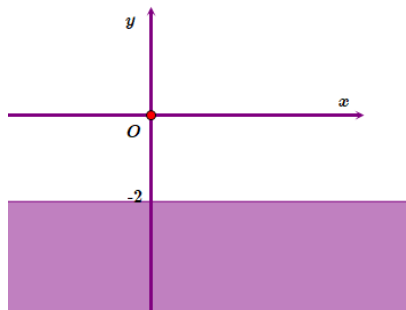
Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không kể bờ  $\Delta$ , chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không tô màu trên hình)



b) Vẽ đường thẳng  $\Delta: y + 2 = 0$  đi qua hai điểm  $A(0;-2)$  và  $B(1;-2)$

Xét gốc tọa độ  $O(0;0)$ . Ta thấy  $O \notin \Delta$  và  $0 + 2 = 2 > 0$

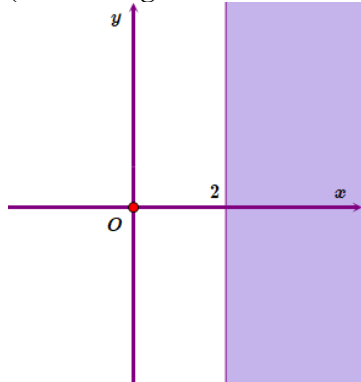
Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ  $\Delta$ , chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không tô màu trên hình)



c) Vẽ đường thẳng  $\Delta: -x + 2 = 0$  đi qua hai điểm  $A(2;0)$  và  $B(2;1)$

Xét gốc tọa độ  $O(0;0)$ . Ta thấy  $O \notin \Delta$  và  $-0 + 2 = 2 > 0$

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ  $\Delta$ , không chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không tô màu trên hình)



**Câu 26.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ Oxy:

a)  $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$

b)  $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$

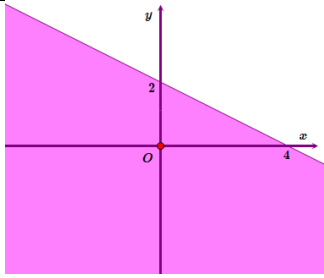
**Lời giải**

a) Ta có:  $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x) \Leftrightarrow 2y + x - 4 < 0$

Vẽ đường thẳng  $\Delta: 2y + x - 4 = 0$  đi qua hai điểm  $A(2;1)$  và  $B(0;2)$

Xét gốc tọa độ  $O(0;0)$ . Ta thấy  $O \notin \Delta$  và  $2 \cdot 0 + 0 - 4 = -4 < 0$

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không kể bờ  $\Delta$ , chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không tô màu trên hình)



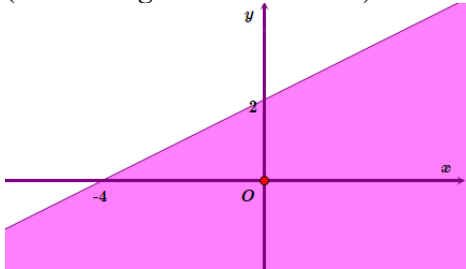
b) Ta có:

$$3(x-1) + 4(y-2) < 5x-3 \Leftrightarrow 4y-2x-8 < 0 \Leftrightarrow 2y-x$$

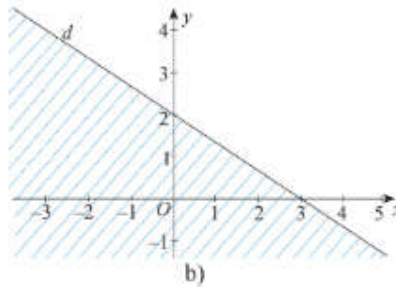
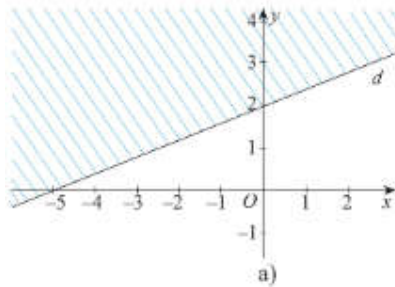
Vẽ đường thẳng  $\Delta: 2y-x-4=0$  đi qua hai điểm  $A(0;2)$  và  $B(1;-2)$

Xét gốc tọa độ  $O(0;0)$ . Ta thấy  $O \notin \Delta$  và  $2.0-0-4=-4 < 0$

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không kể bờ  $\Delta$ , chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không tô màu trên hình)



**Câu 27.** Miền không gạch chéo (không kể bờ d) trong mỗi hình dưới đây là miền nghiệm của bất phương trình nào?



**Lời giải**

Gọi phương trình đường thẳng  $d: ax + by + c = 0$

a) Từ hình a) ta thấy d đi qua hai điểm  $A(0;2)$  và  $B(-5;0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} b.2 + c = 0 \\ -5a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 5a = -2b$$

Chọn  $a = 2 \Rightarrow b = -5; c = 10$  và  $d: 2x - 5y + 10 = 0$

Điểm  $O(0;0)$  thuộc miền nghiệm và  $2.0 - 5.0 + 10 = 10 > 0$

Vậy bất phương trình cần tìm là  $2x - 5y + 10 > 0$

b) Từ hình b) ta thấy d đi qua hai điểm  $A(0;2)$  và  $B(3;0)$

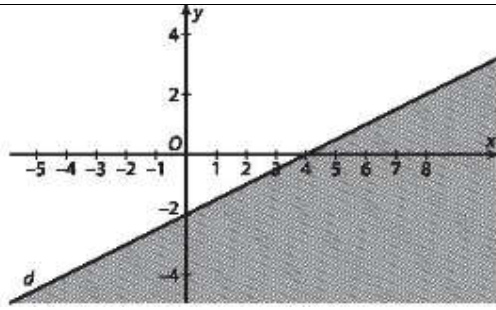
$$\Rightarrow \begin{cases} 2b + c = 0 \\ 3a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow -c = 3a = 2b$$

Chọn  $a = 2 \Rightarrow b = 3; c = -6$  và  $d: 2x + 3y - 6 = 0$

Điểm  $O(0;0)$  không thuộc miền nghiệm và  $2.0 + 3.0 - 6 = -6 < 0$

Vậy bất phương trình cần tìm là  $2x + 3y - 6 > 0$

**Câu 28.** Xác định một bất phương trình bậc nhất hai ẩn nhận nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d (miền không bị gạch) làm miền nghiệm (H. 2.3).

**Lời giải**

Đường thẳng  $d$  đi qua hai điểm  $(0; -2)$  và  $(4; 0)$  có phương trình  $x - 2y = 4$ . Vì miền nghiệm chứa gốc tọa độ nên bất phương trình cần tìm là  $x - 2y \leq 4$ .

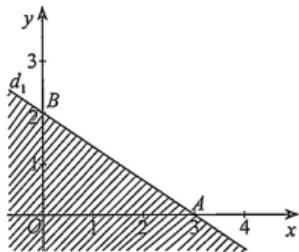
**Câu 29.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a)  $2x + 3y - 6 > 0$ ; b)  $x + 2y - 8 \leq 0$ ; c)  $y - 3 \leq 0$ .

**Lời giải**

a) Vẽ đường thẳng  $d_1 : 2x + 3y = 6$  đi qua hai điểm  $A(3; 0)$  và  $B(0; 2)$ .

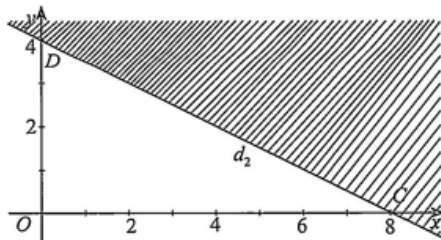
Xét gốc tọa độ  $O(0; 0)$ . Ta thấy  $O \notin d_1$  và  $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 < 0$ . Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng không kể bờ  $d_1$ , không chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không gạch chéo trên Hình 1).



Hình 1

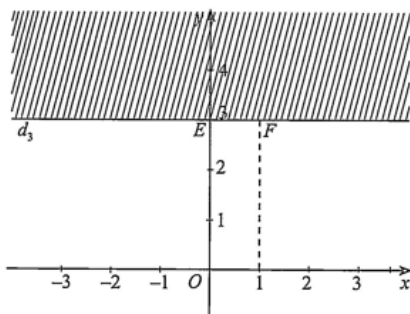
b) Vẽ đường thẳng  $d_2 : x + 2y = 8$  đi qua hai điểm  $C(8; 0)$  và  $D(0; 4)$ .

Xét gốc tọa độ  $O(0; 0)$ . Ta thấy  $O \notin d_2$  và  $0 + 2 \cdot 0 - 8 < 0$ . Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ  $d_2$ , chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không gạch chéo trên Hình 2).



Hình 2

c) Vẽ đường thẳng  $d_3 : y = 3$  đi qua hai điểm  $E(0; 3)$  và  $F(1; 3)$ . Xét gốc tọa độ  $O(0; 0)$ . Ta thấy  $O \notin d_3$  và  $0 - 3 < 0$ . Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ  $d_3$ , chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không gạch chéo trên Hình 3)



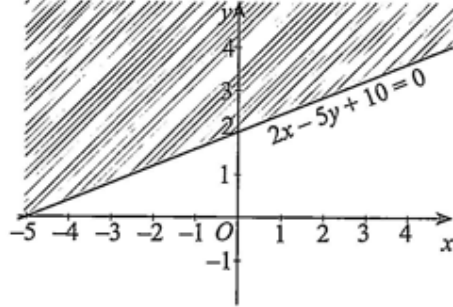
Hình 3

**Câu 30.** Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn:  $2x - 5y + 10 > 0$ .

- a) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình trên mặt phẳng  $Oxy$ .
- b)  $(1;3)$  có phải là nghiệm của bất phương trình trên không?
- c) Chỉ ra 2 cặp số  $(x; y)$  thỏa mãn bất phương trình trên.

**Lời giải**

a)



Hình 1

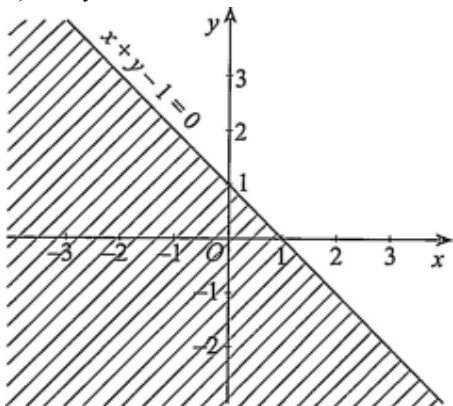
- b)  $(1;3)$  không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.
- c)  $(1;1)$  và  $(2;2)$ .

**Câu 31.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình bậc nhất hai ẩn sau trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :

- a)  $x + y - 1 > 0$
- b)  $x - 1 \geq 0$ ;
- c)  $-y + 2 \leq 0$ .

**Lời giải**

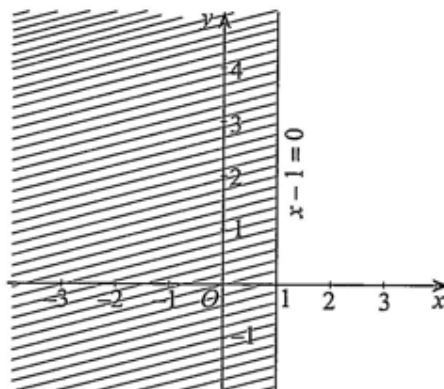
a)  $x + y - 1 > 0$



Hình 2

b)  $x - 1 \geq 0$

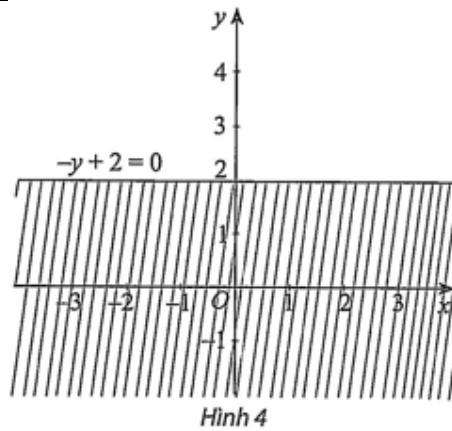
b)  $x - 1 \geq 0$



Hình 3

c)  $-y + 2 \leq 0$



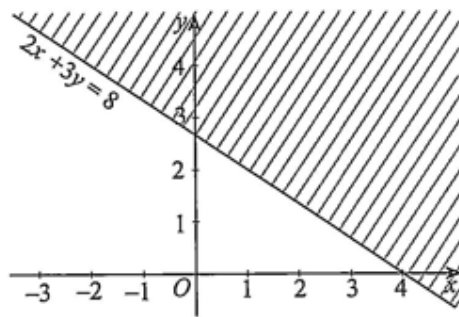


**Câu 32.** Biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :

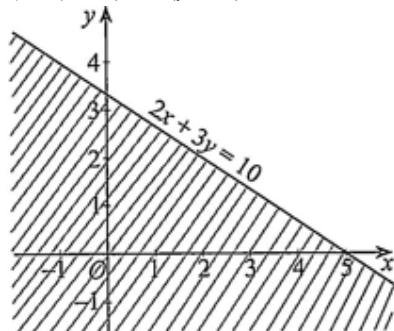
- a)  $3x + 2y < x - y + 8$ ;  
b)  $2(x - 1) + 3(y - 2) > 2$ .

**Lời giải**

a)  $3x + 2y < x - y + 8 \Leftrightarrow 2x + 3y < 8$



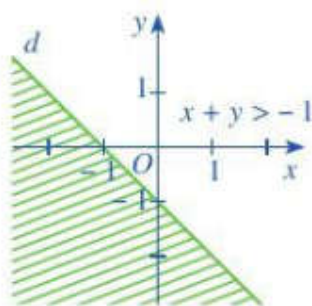
b)  $2(x - 1) + 3(y - 2) > 2 \Leftrightarrow 2x + 3y > 10$ .



**Câu 33.** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:  $x + y > -1$ ;  $x + y \geq -1$ .

**Lời giải**

- Vẽ đường thẳng  $d : x + y = -1$ .

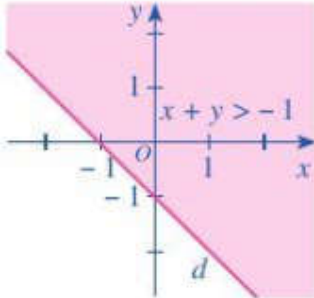


- Lấy điểm  $O(0;0)$ . Ta có:  $0+0=0 > -1$ .

- Vậy miền nghiệm của bất phương trình  $x+y > -1$  là nửa mặt phẳng không bị gạch ở hình trên chứa điểm  $O(0;0)$  không kể đường thẳng  $d$ ; miền nghiệm của bất phương trình  $x+y \geq -1$  là nửa mặt phẳng không bị gạch ở hình trên chứa điểm  $O(0;0)$  kể cả đường thẳng  $d$ .

Chú ý: Thông thường khi sử dụng phần mềm toán học để biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn, miền nghiệm của bất phương trình đó được tô màu.

Chẳng hạn, miền nghiệm của bất phương trình  $x+y > -1$  được tô màu như hình sau



**Câu 34.** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

a)  $x+2y < 3$ ;

b)  $3x-4y \geq -3$

c)  $y \geq -2x+4$

d)  $y < 1-2x$ .

**Lời giải**

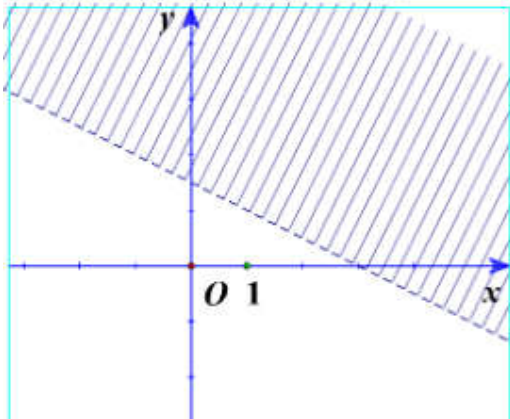
a) Ta vẽ đường thẳng  $d'$ :  $x+2y=3 \Leftrightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

Thay tọa độ điểm  $O(0;0)$  vào bất phương trình  $x+2y < 3$  ta được:

$0+2.0=0 < 3$  (Luôn đúng)

Vậy  $O$  nằm trong miền nghiệm.

Ta có miền nghiệm:



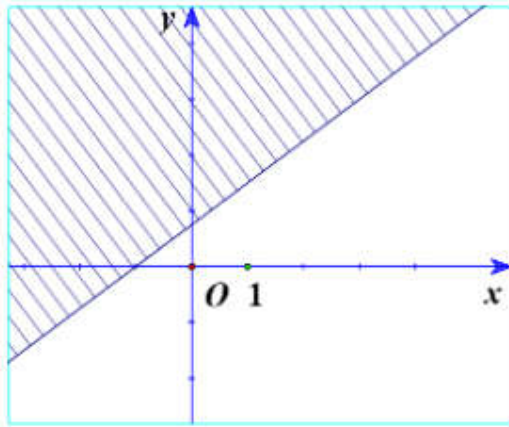
b) Ta vẽ đường thẳng  $d$ :  $3x-4y=-3 \Leftrightarrow y = \frac{3x}{4} + \frac{3}{4}$

Thay tọa độ điểm  $O(0;0)$  vào bất phương trình  $3x-4y \geq -3$  ta được:

$3.0-4.0=0 \geq -3$  (Luôn đúng)

Vậy  $O$  nằm trong miền nghiệm.

Ta có miền nghiệm:



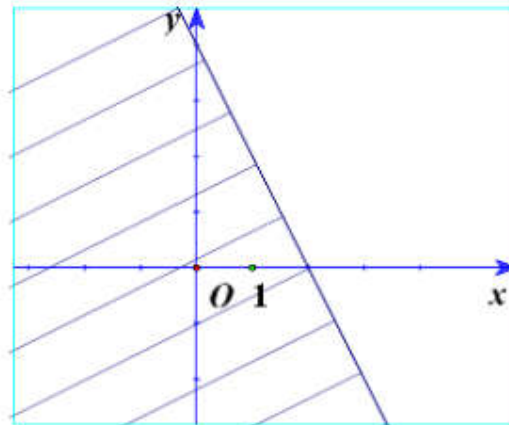
c) Ta vẽ đường thẳng  $d: y = -2x + 4$

Thay tọa độ điểm  $O(0;0)$  vào bất phương trình  $y \geq -2x + 4$  ta được:

$$0 \geq -2 \cdot 0 + 4 \Leftrightarrow 0 \geq 4 \text{ (Vô lí)}$$

Vậy  $O$  không nằm trong miền nghiệm.

Ta có miền nghiệm:



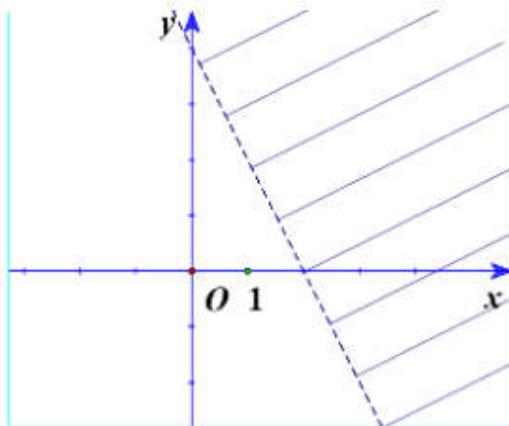
d) Ta vẽ đường thẳng  $d: y = 1 - 2x$

Thay tọa độ điểm  $O(0;0)$  vào bất phương trình  $y < 1 - 2x$  ta được:

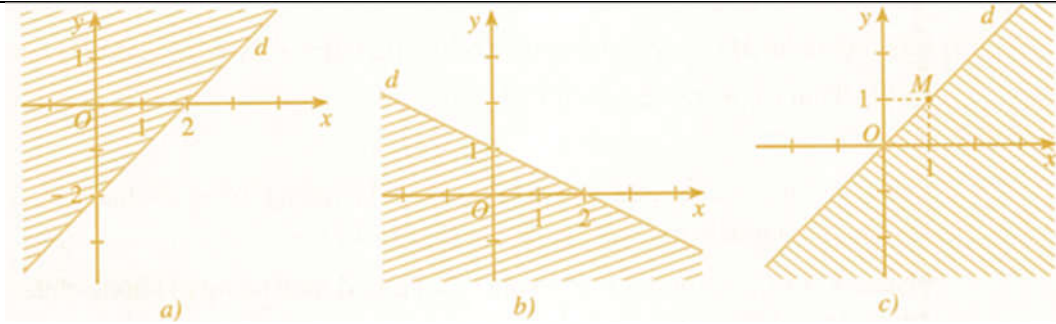
$$0 < 1 - 2 \cdot 0 \text{ (Luôn đúng)}$$

Vậy  $O$  nằm trong miền nghiệm.

Ta có miền nghiệm:



**Câu 35.** Phần không gạch (không kẻ d) ở mỗi Hình a, b, c là miền nghiệm của bất phương trình nào?



**Lời giải**

a) Đường thẳng qua điểm  $(2;0)$  và  $(0;-2)$  nên phương trình đường thẳng là  $x - y - 2 = 0$

Lấy điểm  $(3;0)$  thuộc miền nghiệm ta có  $3 - 0 - 2 = 1 > 0$

$\Rightarrow$  Bất phương trình cần tìm là  $x - y - 2 \geq 0$

b) Đường thẳng qua điểm  $(2;0)$  và  $(0;1)$  nên phương trình đường thẳng là

Thay  $x = 2, y = 0$  vào phương trình  $y = ax + b$  ta được  $0 = 2a + b$

Thay  $x = 0, y = 1$  vào phương trình  $y = ax + b$  ta được  $1 = 0.a + b \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 1$

$\Rightarrow$  phương trình đường thẳng là  $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Lấy điểm  $(3;0)$  thuộc miền nghiệm ta có  $-\frac{1}{2}x + 1 - y = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$  Bất phương trình cần tìm là

$$-\frac{1}{2}x - y + 1 \leq 0$$

c) Đường thẳng qua điểm  $(0;0)$  và  $(1;1)$  nên phương trình đường thẳng là

$$x - y = 0$$

Lấy điểm  $(0;1)$  thuộc miền nghiệm ta có  $x - y = -1 < 0$

$\Rightarrow$  Bất phương trình cần tìm là  $x - y \leq 0$

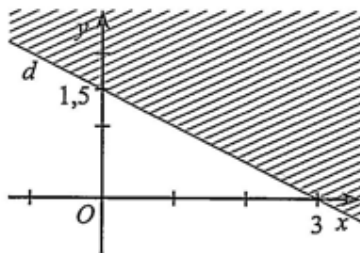
**Câu 36.** Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình:  $x + 2y < 3$ .

**Lời giải**

- Vẽ đường thẳng  $d: x + 2y = 3$ .

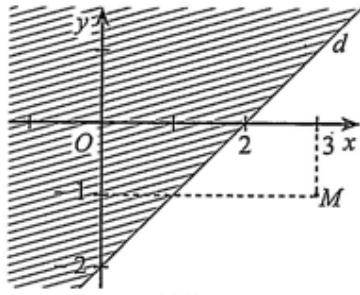
- Lấy điểm  $O(0;0)$ . Ta có:  $0 + 0 = 0 < 3$ .

Vậy miền nghiệm của bất phương trình  $x + 2y < 3$  là nửa mặt phẳng chứa điểm  $O(0;0)$  không kể đường thẳng  $d$  (nửa mặt phẳng không bị gạch) (Hình 1).



Hình 1

**Câu 37.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể d) ở Hình 2 là miền nghiệm của bất phương trình nào?



Hình 2

**Lời giải**

Nhận thấy, đường thẳng  $d$  có hệ số góc khác 0. Gọi phương trình đường thẳng  $d$  có dạng:

$$y = ax + b. \text{ Do đường thẳng } d \text{ đi qua điểm } (2; 0) \text{ và } (0; -2) \text{ nên ta có: } \begin{cases} 2a + b = 0 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

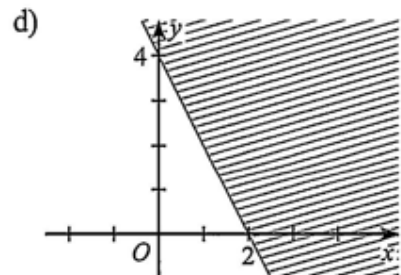
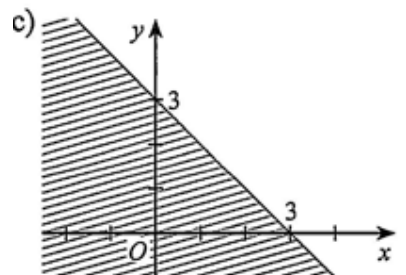
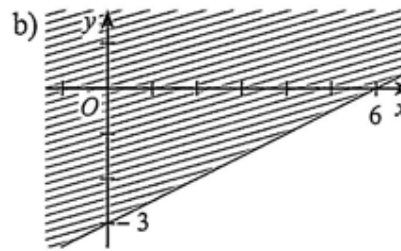
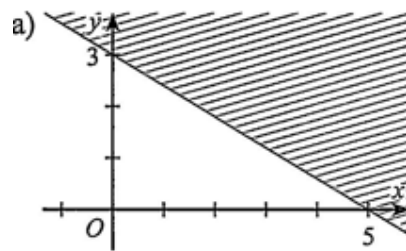
Vậy đường thẳng  $d$  có phương trình  $y = x - 2$  hay  $x - y = 2$ .

Lấy điểm  $M(3; -1)$  thuộc miền nghiệm của bất phương trình. Ta có:  $3 - (-1) = 4 > 2$ .

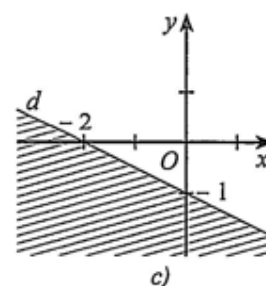
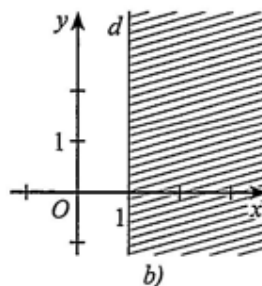
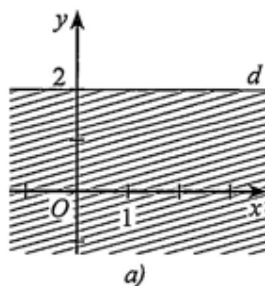
Vậy nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể  $d$ ) ở Hình 2 là miền nghiệm của bất phương trình  $x - y > 2$ .

**Câu 38.** Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

- a)  $3x + 5y < 15$ ;
- b)  $x - 2y \geq 6$ ;
- c)  $y > -x + 3$ ;
- d)  $y \leq 4 - 2x$ .

**Lời giải**

**Câu 39.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể  $d$ ) ở mỗi Hình 5a, 5b, 5c là miền nghiệm của bất phương trình nào?



Hình 5

**Lời giải**

- a)  $y > 2$ .



b)  $x < 1$ .

c)  $x + 2y > -2$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

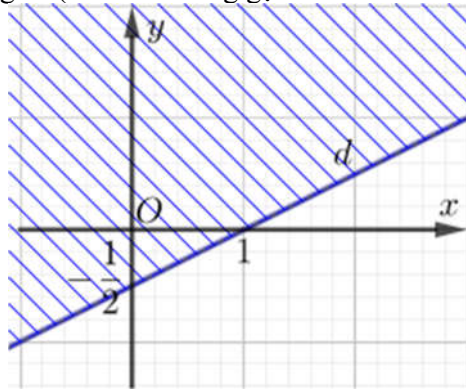
**Câu 40.** Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình  $x - 2y > 1$ ?

**Lời giải**

+ Đường thẳng  $d: x - 2y = 1$  đi qua hai điểm  $A(1; 0)$  và  $B\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ .

+  $x = y = 0$  không phải là nghiệm của bất phương trình.

+ Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng  $d: x - 2y = 1$ , không chứa gốc tọa độ  $O$ , không bao gồm đường thẳng  $d$  (là miền không gạch chéo trên hình vẽ)



**Câu 41.** Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau

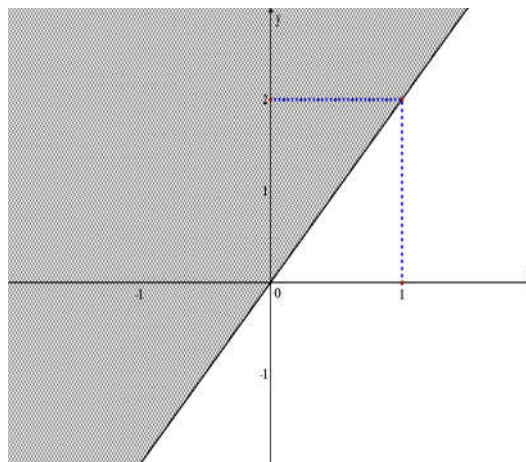
a)  $2x - y \geq 0$ .

b)  $\frac{x-2y}{2} > \frac{2x+y+1}{3}$ .

**Lời giải.**

a) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , vẽ đường thẳng  $d: 2x - y = 0$ . Ta có  $d$  chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm  $M(1; 0)$ .

Ta thấy  $(1; 0)$  là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng chứa bờ  $d$  và chứa điểm  $M(1; 0)$  (miền không được tô màu trên hình vẽ).



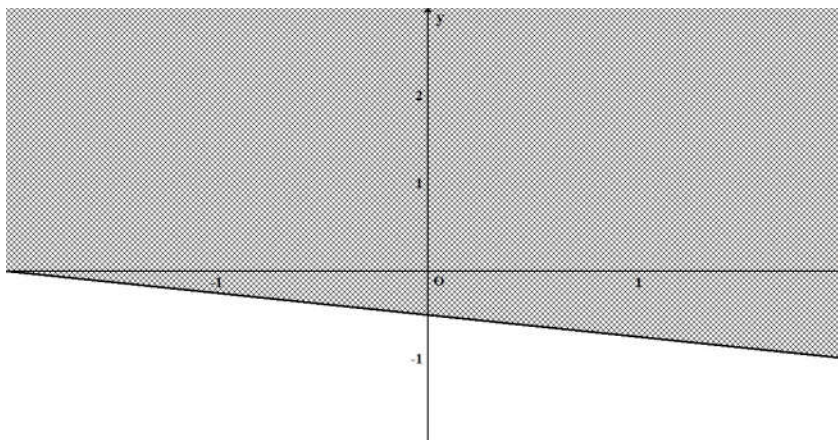
b) Ta có  $\frac{x-2y}{2} > \frac{2x+y+1}{3} \Leftrightarrow 3(x-2y) - 2(2x+y+1) > 0 \Leftrightarrow -x-4y-2 > 0 \Leftrightarrow x+4y+2 < 0$ .

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , vẽ đường thẳng  $\Delta: x + 4y + 2 = 0$ .

Ta có  $\Delta$  chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm  $O(0;0)$ .

Ta thấy  $(0;0)$  không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ  $\Delta$  (Không kể đường thẳng  $\Delta$ ) và không chứa điểm  $O(0;0)$  (miền không được tô màu trên hình vẽ).



### Dạng 3. Ứng dụng – bài toán thực tế

## BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Phương pháp giải:

Bước 1. Chọn các ẩn và đặt điều kiện cho các ẩn.

Bước 2. Biểu thị các đại lượng chưa biết hoặc cần tính toán theo các đại lượng đã biết.

Bước 3. Thiết lập bất phương trình theo dữ kiện của bài toán.

Bước 4. Tìm miền nghiệm của bất phương trình nhận được.

Bước 5. Từ miền nghiệm rút ra kết luận theo yêu cầu đề bài.

**Câu 42.** Nhân ngày Quốc tế Thiếu nhi 1-6, một rạp chiếu phim phục vụ các khán giả một bộ phim hoạt hình. Vé được bán ra có hai loại:



Loại 1 (dành cho trẻ từ 6-13 tuổi): 50000 đồng/vé;

Loại 2 (dành cho người trên 13 tuổi): 100000 đồng/vé.

Người ta tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được ở rạp chiếu phim này phải đạt tối thiểu 20 triệu đồng.

Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì rạp chiếu phim phải bù lỗ?

### Lời giải

Gọi  $x$  là số lượng vé loại 1 bán được ( $x \in \mathbb{N}$ ) và  $y$  là số lượng vé loại 2 bán được ( $y \in \mathbb{N}$ ) thì số tiền bán vé thu được là  $50x + 100y$  (nghìn đồng). Người ta sẽ phải bù lỗ trong trường hợp số tiền bán vé nhỏ hơn 20 triệu đồng, tức là:  $50x + 100y < 20000$  hay  $x + 2y < 400$ .

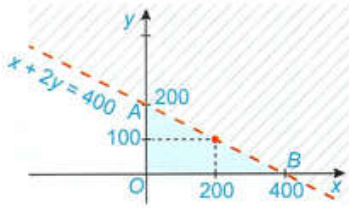
Như vậy, việc giải quyết bài toán mở đầu dẫn đến việc đi tìm miền nghiệm của bất phương trình  $x + 2y < 400$ .

Miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn này được xác định như sau:

- Vẽ đường thẳng  $d: x + 2y = 400$ .

- Ta lấy gốc tọa độ  $O(0;0)$  và tính  $0 + 2 \cdot 0 = 0 < 400$ . Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ  $d$  chứa gốc tọa độ không kể đường thẳng  $d$

Vậy, nếu bán được số vé loại 1 là  $x$  và số vé loại 2 là  $y$  mà điểm  $(x; y)$  nằm trong miền tam giác  $OAB$  không hề cạnh  $AB$  thì rạp chiếu phim sẽ phải bù lỗ.  
Nếu điểm  $(x; y)$  nằm trên đoạn thẳng  $AB$  thì rạp chiếu phim hoà vốn.



#### Nhận xét

- Nếu bán được 150 vé loại 1 và 150 vé loại 2 thì rạp chiếu phim có lãi.
- Nếu bán được 200 vé loại 1 và 100 vé loại 2 thì rạp chiếu phim hoà vốn.
- Nếu bán được 100 vé loại 1 và 100 vé loại 2 thì rạp chiếu phim phải bù lỗ.

**Câu 43.** Ông An muốn thuê một chiếc ô tô (có lái xe) trong một tuần. Giá thuê xe được cho như bảng sau:

	Phi cố định (nghìn đồng/ngày)	Phi tính theo quãng đường đi chuyển (nghìn đồng/kilômét)
Từ thứ Hai đến thứ Sáu	900	8
Thứ Bảy và Chủ nhật	1500	10

- a) Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số kilômét ông An đi trong các ngày từ thứ Hai đến thứ Sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$  sao cho tổng số tiền ông An phải trả không quá 14 triệu đồng.  
b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

#### Lời giải

a)

Ta có 14 triệu = 14000 (nghìn đồng)

Số tiền ông An đi  $x$  km trong các ngày từ thứ Hai đến thứ Sáu là  $8x$  (nghìn đồng)

Số tiền ông An đi  $y$  km trong 2 cuối tuần là  $10y$  (nghìn đồng)

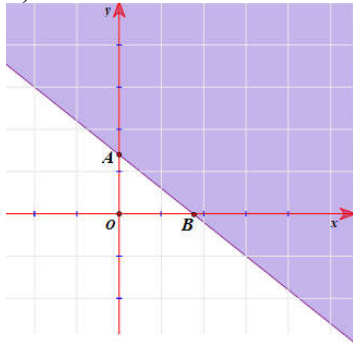
Số tiền ông An đi trong một tuần là  $8x + 10y$  (nghìn đồng)

Vì số tiền không quá 14 triệu đồng nên ta có:

$$8x + 10y \leq 14000 \Leftrightarrow 4x + 5y \leq 7000$$

Vậy bất phương trình cần tìm là  $4x + 5y \leq 7000$

b)



Bước 1: Vẽ đường thẳng  $4x + 5y = 7000$  (nét liền)

Bước 2: Thay tọa độ điểm  $O(0;0)$  vào biểu thức  $4x + 5y$  ta được:

$$4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0 < 7000$$

$\Rightarrow$  Điểm  $O$  thuộc miền nghiệm

$\Rightarrow$  Miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng  $4x + 5y = 7000$  và chứa gốc tọa độ và  $(x; y)$  nằm trong miền tam giác  $OAB$  kể cả đoạn  $AB$ .

#### Chú ý

Khi bài cho số ki lô mét thì ta cần tính theo quãng đường đi chuyển.

**Câu 44.** Anh An là nhân viên bán hàng tại siêu thị điện máy. Anh An kiếm được một khoản hoa hồng 600 nghìn đồng cho mỗi máy giặt và 1,3 triệu đồng cho mỗi tủ lạnh mà anh ấy bán được. Hỏi để nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng thì anh An cần bán bao nhiêu máy giặt và tủ lạnh?

**Lời giải**

Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số máy giặt và số tủ lạnh anh An bán được. Khi đó số tiền hoa hồng mà anh An nhận được là  $0,6x + 1,3y$  (triệu đồng). Theo đề bài, ta có:

$$0,6x + 1,3y \geq 10$$

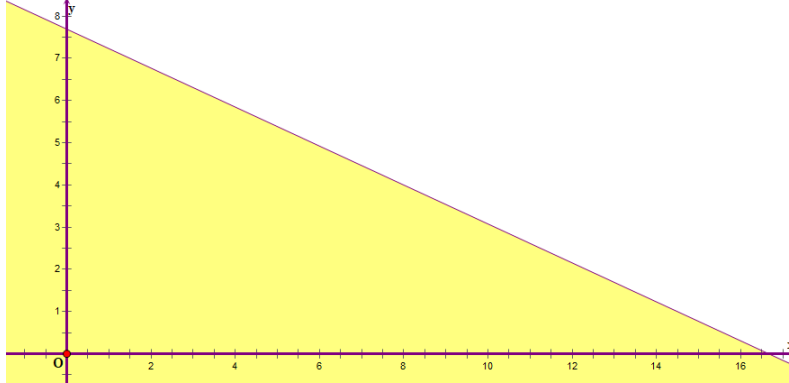
Tiếp theo ta xác định miền nghiệm của bất phương trình  $0,6x + 1,3y \geq 10$  như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng  $d: 0,6x + 1,3y = 10$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

Bước 2. Lấy điểm  $O(0;0)$  không thuộc  $d$  và thay vào biểu thức  $0,6x + 1,3y$  ta được:

$$0,6 \cdot 0 + 1,3 \cdot 0 = 0 < 10.$$

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ  $d$  không chứa gốc tọa độ (miền không bị tô màu).



Vậy nếu anh An bán được số máy giặt là  $x(x \in \mathbb{N})$  và số tủ lạnh là  $y(y \in \mathbb{N})$  sao cho điểm  $(x; y)$  nằm trong nửa mặt phẳng bờ  $d$  không chứa gốc tọa độ thì anh An nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng.

**Câu 45.** Một cửa hàng bán lẻ bán hai loại hạt cà phê. Loại thứ nhất giá 140 nghìn đồng/kg và loại thứ hai giá 180 nghìn đồng/kg. Cửa hàng trộn  $x$  kg loại thứ nhất và  $y$  kg loại thứ hai sao cho hạt cà phê đã trộn có giá không quá 170 nghìn đồng/kg.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  thỏa mãn điều kiện đề bài.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

**Lời giải**

a) Theo đề bài, ta có:  $140x + 180y \leq 170(x + y)$ .

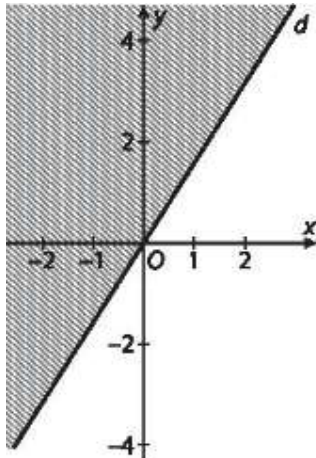
Bằng cách chuyển vế ta được bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $30x - 10y \geq 0$  hay  $3x - y \geq 0$ .

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $3x - y \geq 0$ .

Bước 1. Vẽ đường thẳng  $d: 3x - y = 0$  trên mặt phẳng tọa độ.

Bước 2. Lấy điểm  $M(1;0)$  không thuộc  $d$  và điểm  $M$  thỏa mãn  $3 \cdot 1 - 0 = 3 > 0$ .

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ  $d$  chứa điểm  $M(1;0)$ .



**Câu 46.** Bạn Cúc muốn pha hai loại nước cam. Để pha một lít nước cam loại I cần 30 g bột cam, còn một lít nước cam loại II cần 20 g bột cam. Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số lít nước cam loại I và II pha chế

được. Biết rằng Cúc chỉ có thể dùng không quá 100 gam bột cam. Hãy lập các bất phương trình mô tả lít nước cam loại I và II mà bạn Cúc có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đó trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

**Lời giải**

Để pha  $x$  lít nước cam loại I cần  $30x$  g bột cam,

Để pha  $y$  lít nước cam loại II cần  $20y$  g bột cam,

Vì Cúc chỉ có thể dùng không quá 100 gam bột cam nên ta có bất phương trình  $30x + 20y \leq 100$

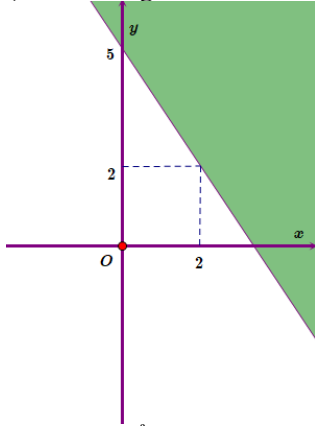
$$\Leftrightarrow 3x + 2y - 10 \leq 0$$

Vẽ đường thẳng  $\Delta: 3x + 2y - 10 = 0$  đi qua hai điểm  $A(0;5)$  và  $B(2;2)$

Xét gốc tọa độ  $O(0;0)$ . Ta thấy  $O \notin \Delta$  và

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 10 = -10 < 0$$

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng kể cả bờ  $\Delta$ , chứa gốc tọa độ  $O$  (miền không tô màu trên hình)



**Câu 47.** Bạn Hoa đã dành được 420 nghìn đồng. Trong một đợt ủng hộ trẻ em khuyết tật, Hoa đã ủng hộ  $x$  tờ tiền loại 10 nghìn đồng,  $y$  tờ tiền loại 20 nghìn đồng.

a) Tính tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ theo  $x, y$ .

b) Giải thích tại sao ta lại có bất phương trình  $10x + 20y \leq 420$ .

**Lời giải**

a) Tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ là  $10x + 20y$ .

b) Vì bạn Hoa chỉ có tất cả là 420 nghìn đồng, nên tổng số tiền bạn Hoa đã ủng hộ không thể vượt quá 420 nghìn đồng. Vậy ta có  $10x + 20y \leq 420$ .

**Câu 48.** Cho biết 226 g thịt bò chứa khoảng 59 g protein. Một quả trứng nặng 46 g có chứa khoảng 6 g protein (nguồn: Bộ Nông nghiệp Hoa Kỳ). Giả sử có một người mỗi ngày cần không quá 60 g protein. Gọi số gam thịt bò và số gam trứng mà người đó ăn trong một ngày lần lượt là  $x, y$ .

a) Lập bất phương trình theo  $x, y$  diễn tả giới hạn về lượng protein mà người đó cần mỗi ngày.

b) Dùng bất phương trình ở câu a) để trả lời hai câu hỏi sau:

- Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì có phù hợp không?

- Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng, mỗi quả 46 g, trong một ngày thì có phù hợp không?

**Lời giải**

a) Bất phương trình theo  $x, y$  diễn tả giới hạn về lượng protein mà người đó cần mỗi ngày là:

$$\frac{59}{226}x + \frac{6}{46}y = \frac{59}{226}x + \frac{3}{23}y \leq 60.$$

b) Ta có:  $\frac{59}{226} \cdot 150 + \frac{3}{23} \cdot 2 \cdot 46 \approx 51,16 < 60$   $\frac{59}{226} \cdot 200 + \frac{3}{23} \cdot 2 \cdot 46 \approx 64,21 > 60$ .

Suy ra:

- Nếu người đó ăn 150 g thịt bò và 2 quả trứng trong một ngày thì phù hợp.

- Nếu người đó ăn 200 g thịt bò và 2 quả trứng trong một ngày thì không phù hợp.



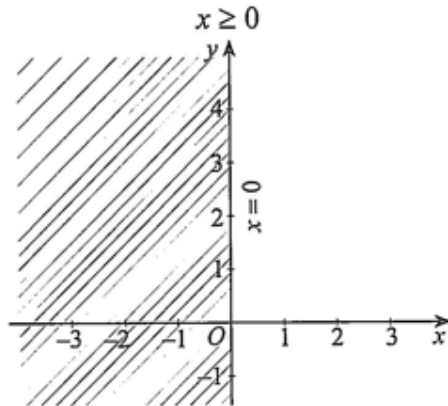
**Câu 49.** Bạn Nga muốn pha hai loại nước rửa xe. Để pha một lít loại I cần  $600ml$  dung dịch chất tẩy rửa, còn loại II chỉ cần  $400ml$ . Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số lít nước rửa xe loại I và II pha chế được và biết rằng Nga chỉ còn  $2400ml$  chất tẩy rửa, hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại I và II mà bạn Nga có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ .

**Lời giải**

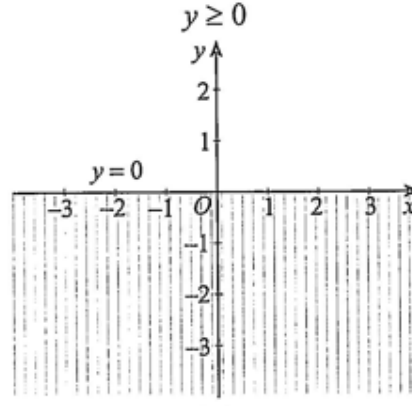
Các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại I và II mà bạn Nga có thể pha chế được:  
 $x \geq 0; y \geq 0;$

$$600x + 400y \leq 2400 \Leftrightarrow 3x + 2y \leq 12.$$

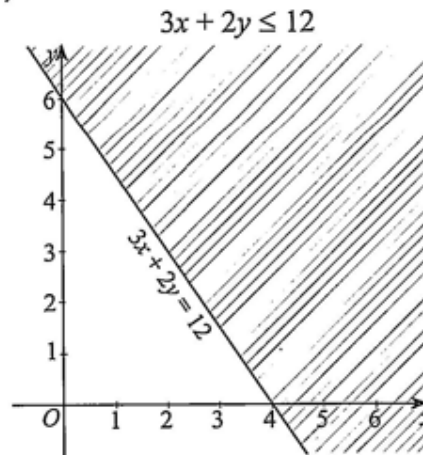
Biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ :



Hình 7



Hình 8



Hình 9

**Câu 50.** Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng  $60m^2$ . Diện tích để kê một chiếc ghế là  $0,5m^2$ , một chiếc bàn là  $1,2m^2$ . Gọi  $x$  là số chiếc ghế,  $y$  là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là  $12m^2$ .

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

**Lời giải**

a)

Bước 1: Biểu diễn diện tích  $x$  chiếc ghế và  $y$  chiếc bàn.

Diện tích của  $x$  chiếc ghế là  $0,5x(m^2)$  và  $y$  chiếc bàn là  $1,2y(m^2)$

Bước 2: Biểu diễn diện tích lưu thông và cho lớn hơn hoặc bằng  $12m^2$ .

Tổng diện tích  $x$  chiếc ghế và  $y$  chiếc bàn là  $0,5x + 1,2y(m^2)$

Diện tích lưu thông là  $60 - 0,5x - 1,2y(m^2)$

Bất phương trình cần tìm là

$$60 - 0,5x - 1,2y \geq 12 \Leftrightarrow 0,5x + 1,2y \leq 48$$

b)

+) Thay  $x = 10, y = 10$  ta được

$$0,5.10 + 1,2.10 = 17 \leq 48$$

$\Rightarrow (10; 10)$  là nghiệm của bất phương trình

+) Thay  $x = 10, y = 20$  ta được

$$0,5.10 + 1,2.20 = 29 \leq 48$$

$\Rightarrow (10; 20)$  là nghiệm của bất phương trình

+) Thay  $x = 20, y = 10$  ta được

$$0,5.20 + 1,2.10 = 22 \leq 48$$

$\Rightarrow (20; 10)$  là nghiệm của bất phương trình

**Câu 51.** Trong 1 lạng (100 g thịt bò chứa khoảng 26 g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20 g protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46 g protein. (Nguồn: <https://vinmec.com> và <https://thanhnien.vn>) Gọi  $x, y$  lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

#### Lời giải

Bước 1: Biểu diễn lượng protein có trong  $x$  lạng thịt bò và  $y$  lạng cá rô phi.

Lượng protein trong  $x$  lạng thịt bò là  $26x$  (g)

Lượng protein trong  $y$  lạng cá rô phi là  $20y$  (g)

Lượng protein trong  $x$  lạng thịt bò và  $y$  lạng cá rô phi là  $26x + 20y$  (g).

Bước 2: Biểu diễn bất phương trình.

Vì lượng protein tối thiểu là 46 g nên ta có bất phương trình:

$$26x + 20y \geq 46$$

Bước 3: Tìm nghiệm của bất phương trình

Thay  $x = 1, y = 1$  vào bất phương trình ta được

Thay  $x = 2, y = 1$  vào bất phương trình ta được

Thay  $x = 1, y = 2$  vào bất phương trình ta được

Vậy  $(1; 1), (2; 1), (1; 2)$  là các nghiệm cần tìm.

Chú ý

Có thể chọn các nghiệm khác, miễn là nghiệm nguyên.

**Câu 52.** Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng  $60m^2$ . Diện tích để kê một chiếc ghế là  $0,5m^2$ , một chiếc bàn là  $1,2m^2$ . Gọi  $x$  là số chiếc ghế,  $y$  là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là  $12m^2$ .

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

#### Lời giải

a) Diện tích để kê  $x$  chiếc ghế,  $y$  chiếc bàn là:  $0,5x + 1,2y$  ( $m^2$ ).

Diện tích tối đa để kê bàn và ghế là:  $60 - 12 = 48$  ( $m^2$ ).

Ta có bất phương trình:  $0,5x + 1,2y \leq 48$ .

b) Ba nghiệm có thể chỉ ra được của bất phương trình trên là:  $(20; 30), (30; 20), (50; 15)$ .

**Câu 53.** Hà, Châu, Liên và Ngân cùng đi mua trà sữa. Cả bốn bạn có tất cả 185 nghìn đồng. Bốn bạn mua 4 cốc trà sữa với giá tiền 35 nghìn đồng một cốc. Các bạn gọi thêm trân châu cho vào trà sữa. Một phần trân châu đen có giá 5 nghìn đồng, một phần trân châu trắng có giá 10 nghìn đồng. Gọi  $x, y$  lần lượt là số phần trân châu đen, trân châu trắng mà bốn bạn định mua thêm.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  để thể hiện số tiền các bạn có đủ khả năng chi trả cho phần trân châu đen, trắng.

b) Chỉ ra một nghiệm nguyên của bất phương trình đó.

#### Lời giải

a)  $5x+10y \leq 45$  hay  $x+2y \leq 9$ . b)  $(4;2)$ .

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 54.** Ông An trồng hai loại hoa gồm hoa hồng và hoa ly để bán vào dịp Tết Nguyên Đán. Hoa hồng có giá 80000 đồng/chậu và hoa ly có giá 120000 đồng/chậu. Ông An tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền bán hoa thu được phải đạt tối thiểu 30 triệu đồng. Hỏi số lượng chậu hoa bán được trong những trường hợp nào thì ông An phải bù lỗ?

### Lời giải

Gọi  $x$  và  $y$  lần lượt là số chậu hoa hồng và hoa ly bán được. Điều kiện:  $x, y \in \mathbb{N}$ . Khi đó, số tiền bán hoa thu được là  $80x+120y$  (nghìn đồng).

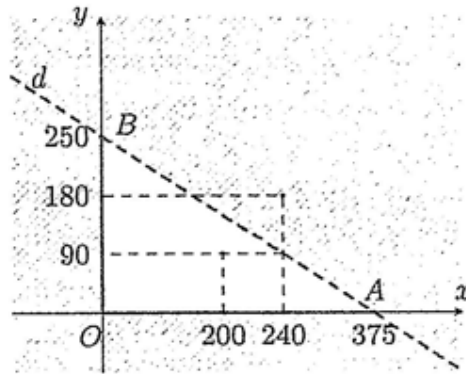
Ông An sẽ phải bù lỗ trong trường hợp số tiền bán hoa nhỏ hơn 30 triệu đồng, nghĩa là  $80x+120y < 30000 \Leftrightarrow 2x+3y < 750$ .

Ta tìm miền nghiệm của bất phương trình  $2x+3y < 750$ :

Bước 1. Vẽ đường thẳng  $d: 2x+3y = \Leftrightarrow 3y = -2x+750 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x+250$ .

Bước 2. Chọn  $O(0;0)$  không thuộc  $d$ .

Bước 3. Thay  $x=0, y=0$  vào biểu thức  $2x+3y$  ta được  $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 < 750$  nên điểm  $O$  không thuộc miền nghiệm của bất phương trình. Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ  $d$  chứa gốc toạ độ không kể đường thẳng  $d$ .



Do  $x, y \in \mathbb{N}$  nghĩa là  $x, y \geq 0$  nên những điểm thoả mãn yêu cầu đề bài là những điểm có toạ độ nguyên nằm trong miền tam giác  $OAB$  không kể cạnh  $AB$  với  $A$  và  $B$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng  $d$  với trục  $Ox$  và  $Oy$ .

Vậy ông An sẽ bù lỗ trong trường hợp số chậu hoa hồng và hoa ly bán ra tạo thành điểm trên mặt phẳng toạ độ nằm trong miền tam giác  $OAB$  không kể cạnh  $AB$  như trên.

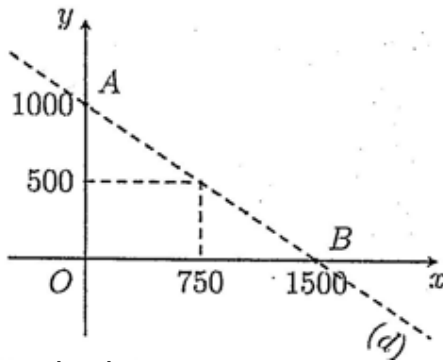
**Câu 55.** Trong Lễ hội văn hoá dân gian, lớp 10A tổ chức một gian hàng có hai trò chơi dân gian truyền thống cho cả giáo viên và học sinh. Vé tham gia chơi có hai loại:

- Loại 1 (dành cho học sinh): 2000 đồng/vé;
- Loại 2 (dành cho giáo viên): 3000 đồng/vé.

Lớp 10A tính toán rằng, để không phải bù lỗ thì số tiền vé thu được khi vào cổng này phải đạt tối thiểu 3 triệu đồng. Hỏi số lượng vé bán được trong những trường hợp nào thì lớp 10A phải bù lỗ?

### Lời giải

$d: 2x+3y = 3000$ .



Vậy nếu số lượng vé loại 1 bán được là  $x$  và số lượng vé loại 2 bán được là  $y$  mà điểm  $(x; y)$  nằm trong miền tam giác  $OAB$  không kể cạnh  $AB$  thì lớp 10A phải bù lỗ.

**Câu 56.** Một gian hàng rộng  $60m^2$  trưng bày bàn và ghế. Diện tích để kê một chiếc ghế là  $0,5m^2$ ; diện tích để kê một chiếc bàn là  $1,2m^2$ . Gọi  $x$  là số chiếc ghế,  $y$  là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là  $12m^2$ .

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

**Lời giải**

a) Diện tích kê  $x$  chiếc ghế là  $0,5x(m^2)$ .

Diện tích kê  $y$  chiếc bàn là  $1,2y(m^2)$ .

Theo đề bài, ta có bất phương trình:  $0,5x + 1,2y \leq 60 - 12 \Leftrightarrow 0,5x + 1,2y \leq 48 \Leftrightarrow 5x + 12y \leq 480$ .

b) Cho  $x = 60$  ta có  $5 \cdot 60 + 12y \leq 480 \Leftrightarrow y \leq 15$ .

Vậy ba nghiệm của bất phương trình là  $(60; 15), (60; 14), (60; 13)$ .

**Câu 57.** Trong 100 gram thịt bò chứa khoảng 26 gram protein, 100 gram cá rô phi chứa khoảng 20 gram protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46 gram protein. Gọi  $x, y$  lần lượt là số gram thịt bò và số gram cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày. Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn  $x, y$  để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày và chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

**Lời giải**

Theo đề bài, ta có bất phương trình:  $\frac{26x}{100} + \frac{20y}{100} \geq 46 \Leftrightarrow 13x + 10y \geq 2300$ .

Chọn  $x = 100$ , ta có  $13 \cdot 100 + 10y \geq 2300 \Leftrightarrow y \geq 100$ .

Suy ra ba nghiệm của bất phương trình là  $(100; 100), (100; 200), (100; 300)$ .

**Câu 58.** Một cửa hàng dự định kinh doanh hai loại áo loại I và II với số vốn nhập hàng nhỏ hơn 70 triệu đồng. Giá mua vào một chiếc áo loại I và II lần lượt là 70 nghìn đồng, 140 nghìn đồng.

a) Gọi  $x, y$  lần lượt là số áo loại I và loại II cửa hàng dự định nhập về ( $x, y$  là số tự nhiên). Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$  sao cho số vốn nhập hàng nhỏ hơn 70 triệu đồng.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

**Lời giải**

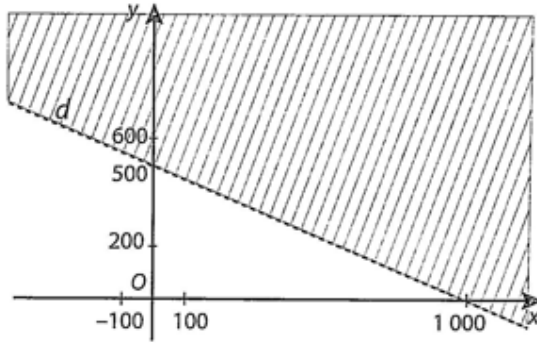
a) Bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa  $x$  và  $y$  sao cho số vốn nhập hàng nhỏ hơn 70 triệu đồng là:  $70x + 140y < 70000$  hay  $x + 2y < 1000$ .

b) Bước 1: Vẽ đường thẳng  $d: x + 2y = 1000$  trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$

Bước 2: Lấy điểm  $O(0; 0)$  không thuộc  $d$  và thay  $x = 0, y = 0$  vào biểu thức  $x + 2y$ , ta được:

$$0 + 2 \cdot 0 = 0 < 1000.$$

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ  $d$  chứa gốc tọa độ không kể đường thẳng  $d$ .



### C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

**Câu 1.** Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình  $-3x + 5y \leq 6$  ?

A. (2;8).

B. (-10;-3).

C. (3;3).

D. (0;2).

Lời giải

Chọn C

**Câu 2.** Miền nghiệm của bất phương trình  $2x - 3y > 5$  là nửa mặt phẳng (không kể đường thẳng  $d: 2x - 3y = 5$ ) không chứa điểm có tọa độ nào sau đây?

A. (0;0).

B. (3;0).

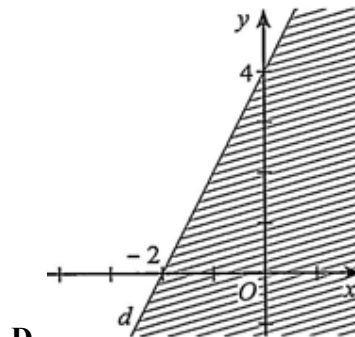
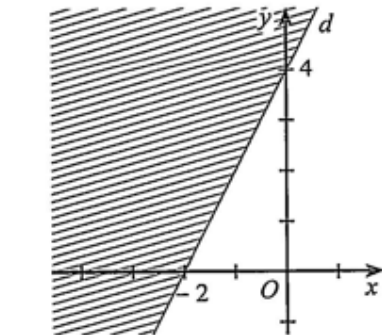
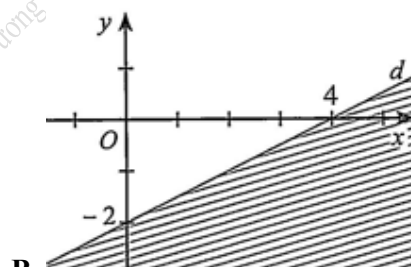
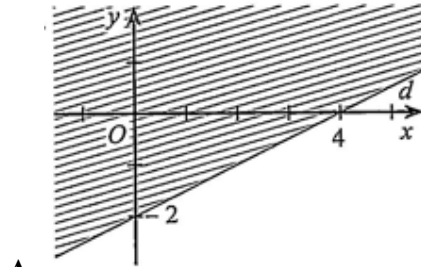
C. (1;-2).

D. (-3;-4).

Lời giải

Chọn A

**Câu 3.** Miền nghiệm của bất phương trình  $x - 2y < 4$  được xác định bởi miền nào (nửa mặt phẳng không bị gạch và không kể d) sau đây?

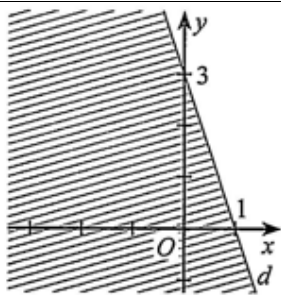


Lời giải

Chọn B

**Câu 4.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (không kể d) ở Hình 3 là miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?





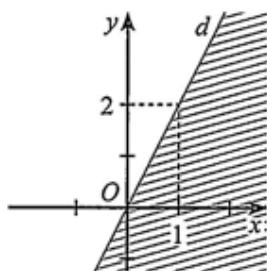
Hình 3

- A.  $3x + y < 3$ .      B.  $x + 3y > 3$ .      C.  $x + 3y < 3$ .      D.  $3x + y > 3$ .

Lời giải

Chọn D

**Câu 5.** Nửa mặt phẳng không bị gạch (kể cả  $d$ ) ở Hình 4 là miền nghiệm của bất phương trình nào sau đây?



Hình 4

- A.  $2x - y \leq 0$ .      B.  $2x - y \geq 0$ .      C.  $x - 2y \geq 0$ .      D.  $x - 2y \leq 0$ .

Lời giải

Chọn A

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**Câu 6.** Câu nào sau đây sai?

Miền nghiệm của bất phương trình  $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x)$  là nửa mặt phẳng chứa điểm

- A.  $(0; 0)$ .      B.  $(1; 1)$ .      C.  $(4; 2)$ .      D.  $(1; -1)$ .

Lời giải

Chọn C.

Ta có:  $-x + 2 + 2(y - 2) < 2(1 - x) \Leftrightarrow -x + 2 + 2y - 4 < 2 - 2x \Leftrightarrow x + 2y < 4$ .

Để thấy tại điểm  $(4; 2)$  ta có:  $4 + 2 \cdot 2 = 8 > 4$ .

**Câu 7.** Câu nào sau đây đúng?

Miền nghiệm của bất phương trình  $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3$  là nửa mặt phẳng chứa điểm

- A.  $(0; 0)$ .      B.  $(-4; 2)$ .      C.  $(-2; 2)$ .      D.  $(-5; 3)$ .

Lời giải

Chọn A.

Ta có:  $3(x - 1) + 4(y - 2) < 5x - 3 \Leftrightarrow 3x - 3 + 4y - 8 < 5x - 3 \Leftrightarrow 2x - 4y + 8 > 0 \Leftrightarrow x - 2y + 4 > 0$

Để thấy tại điểm  $(0; 0)$  ta có:  $0 - 2 \cdot 0 + 4 = 4 > 0$ .

**Câu 8.** Câu nào sau đây sai?

Miền nghiệm của bất phương trình  $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$  là nửa mặt phẳng chứa điểm

- A.  $(-3; -4)$ .      B.  $(-2; -5)$ .      C.  $(-1; -6)$ .      D.  $(0; 0)$ .

Lời giải

Chọn D.

Ta có:  $x+3+2(2y+5) < 2(1-x) \Leftrightarrow x+3+4y+10 < 2-2x \Leftrightarrow 3x+4y+8 < 0$ .

Để thấy tại điểm  $(0;0)$  ta có:  $3.0+4.0+8 > 0$  (mâu thuẫn).

**Câu 9.** Câu nào sau đây đúng?

Miền nghiệm của bất phương trình  $4(x-1)+5(y-3) > 2x-9$  là nửa mặt phẳng chứa điểm

- A.  $(0;0)$ .                      B.  $(1;1)$ .                      C.  $(-1;1)$ .                      D.  $(2;5)$ .

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có:  $4(x-1)+5(y-3) > 2x-9 \Leftrightarrow 4x-4+5y-15 > 2x-9 \Leftrightarrow 2x+5y-10 > 0$ .

Để thấy tại điểm  $(2;5)$  ta có:  $2.2+5.5-10 > 0$  (đúng).

**Câu 10.** Miền nghiệm của bất phương trình  $3x+2(y+3) > 4(x+1)-y+3$  là phần mặt phẳng chứa điểm nào?

- A.  $(3;0)$ .                      B.  $(3;1)$ .                      C.  $(1;1)$ .                      D.  $(0;0)$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Nhận xét: chỉ có cặp số  $(1;1)$  thỏa bất phương trình.

**Câu 11.** Miền nghiệm của bất phương trình  $5(x+2)-9 < 2x-2y+7$  là phần mặt phẳng **không** chứa điểm nào?

- A.  $(-2;1)$ .                      B.  $(2;3)$ .                      C.  $(2;-1)$ .                      D.  $(0;0)$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Nhận xét: chỉ có cặp số  $(2;3)$  không thỏa bất phương trình.

**Câu 12.** Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình  $2x+y < 1$ ?

- A.  $(-2;1)$ .                      B.  $(3;-7)$ .                      C.  $(0;1)$ .                      D.  $(0;0)$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Nhận xét: chỉ có cặp số  $(0;1)$  không thỏa bất phương trình.

**Câu 13.** Trong các cặp số sau đây, cặp nào **không** là nghiệm của bất phương trình  $x-4y+5 \geq 0$ ?

- A.  $(-5;0)$ .                      B.  $(-2;1)$ .                      C.  $(1;-3)$ .                      D.  $(0;0)$ .

**Lời giải**

**Chọn B.**

Ta thay cặp số  $(-2;1)$  vào bất phương trình  $x-4y+5 \geq 0$  được  $-2-4+5 \geq 0$  (sai) do đó cặp số  $(-2;1)$  không là nghiệm của bất phương trình  $x-4y+5 \geq 0$ .

**Câu 14.** Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

- A.  $2x-5y+3z \leq 0$ .                      B.  $3x^2+2x-4 > 0$ .                      C.  $2x^2+5y > 3$ .                      D.  $2x+3y < 5$ .

**Lời giải**

**Chọn D.**

Theo định nghĩa bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

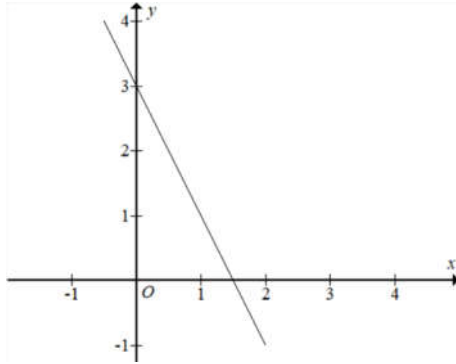
**Câu 15.** Điểm nào sau đây thuộc miền nghiệm của bất phương trình  $2x+y-3 > 0$ ?

- A.  $Q(-1;-3)$ .                      B.  $M\left(1;\frac{3}{2}\right)$ .                      C.  $N(1;1)$ .                      D.  $P\left(-1;\frac{3}{2}\right)$ .

**Lời giải**

Chọn

B.



Tập hợp các điểm biểu diễn nghiệm của bất phương trình  $2x + y - 3 > 0$  là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng  $2x + y - 3 = 0$  và không chứa gốc tọa độ.

Từ đó ta có điểm  $M\left(1; \frac{3}{2}\right)$  thuộc miền nghiệm của bất phương trình  $2x + y - 3 > 0$ .

**Câu 16.** Miền nghiệm của bất phương trình  $-3x + y + 2 \leq 0$  không chứa điểm nào sau đây?

A.  $A(1; 2)$ .

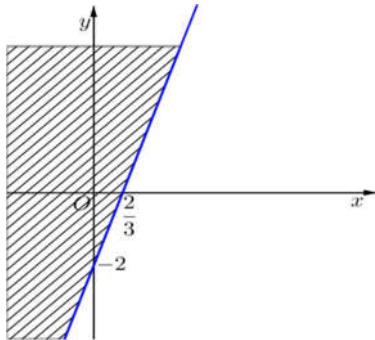
B.  $B(2; 1)$ .

C.  $C\left(1; \frac{1}{2}\right)$ .

D.  $D(3; 1)$ .

**Lời giải**

Chọn **A.**



Trước hết, ta vẽ đường thẳng  $(d): -3x + y + 2 = 0$ .

Ta thấy  $(0; 0)$  không là nghiệm của bất phương trình.

Vậy miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ  $(d)$  không chứa điểm  $(0; 0)$ .

**Câu 17.** Miền nghiệm của bất phương trình  $x + 3 + 2(2y + 5) < 2(1 - x)$  không chứa điểm nào sau đây?

A.  $A(-1; -2)$ .

B.  $B\left(-\frac{1}{11}; -\frac{2}{11}\right)$ .

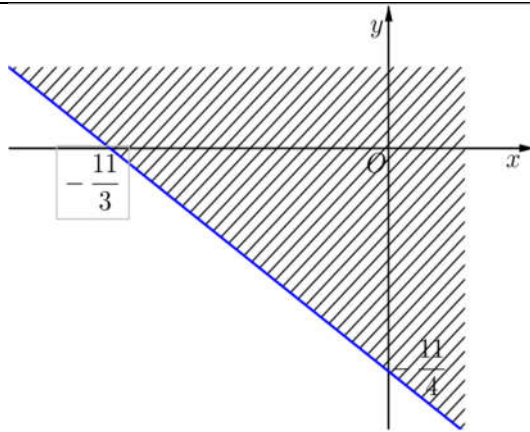
C.  $C(0; -3)$ .

D.  $D(-4; 0)$ .

**Lời giải**

Chọn

B.



Đầu tiên, thu gọn bất phương trình đề bài đã cho về thành  $3x + 4y + 11 < 0$ .

Ta vẽ đường thẳng  $(d): 3x + 4y + 11 = 0$ .

Ta thấy  $(0; 0)$  không là nghiệm của bất phương trình.

Vậy miền nghiệm là nửa mặt phẳng (không kể bờ  $(d)$ ) không chứa điểm  $(0; 0)$ .

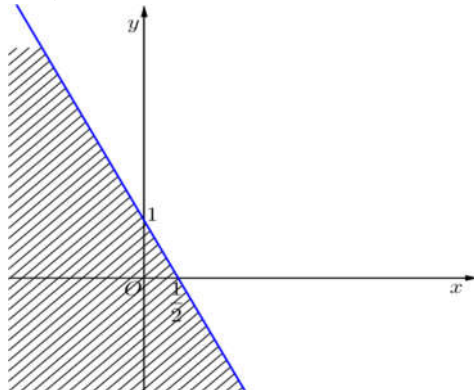
**Câu 18.** Miền nghiệm của bất phương trình  $2x + y > 1$  không chứa điểm nào sau đây?

- A.  $A(1; 1)$ .      B.  $B(2; 2)$ .      C.  $C(3; 3)$ .      D.  $D(-1; -1)$ .

**Lời giải**

**Chọn**

**D.**



Trước hết, ta vẽ đường thẳng  $(d): 2x + y = 1$ .

Ta thấy  $(0; 0)$  không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

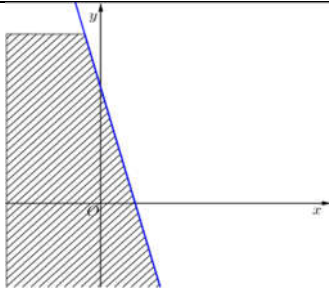
Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (không kể bờ  $(d)$ ) không chứa điểm  $(0; 0)$ .

**Câu 19.** Miền nghiệm của bất phương trình  $(1 + \sqrt{3})x - (1 - \sqrt{3})y \geq 2$  chứa điểm nào sau đây?

- A.  $A(1; -1)$ .      B.  $B(-1; -1)$ .      C.  $C(-1; 1)$ .      D.  $D(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ .

**Lời giải**

**Chọn** A.



Trước hết, ta vẽ đường thẳng  $(d): (1 + \sqrt{3})x - (1 - \sqrt{3})y = 2$ .

Ta thấy  $(0; 0)$  không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

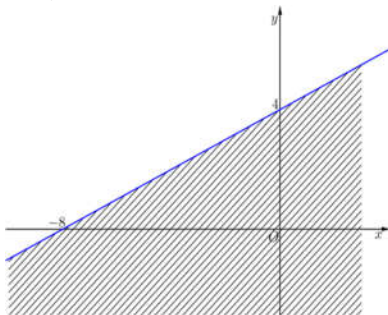
Vậy miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ  $(d)$  không chứa điểm  $(0; 0)$ .

**Câu 20.** Miền nghiệm của bất phương trình  $x - 2 + 2(y - 1) > 2x + 4$  chứa điểm nào sau đây?

- A.  $A(1; 1)$ .      B.  $B(1; 5)$ .      C.  $C(4; 3)$ .      D.  $D(0; 4)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**



Đầu tiên ta thu gọn bất phương trình đã cho về thành  $-x + 2y - 8 > 0$ .

Vẽ đường thẳng  $(d): -x + 2y - 8 = 0$ .

Ta thấy  $(0; 0)$  không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

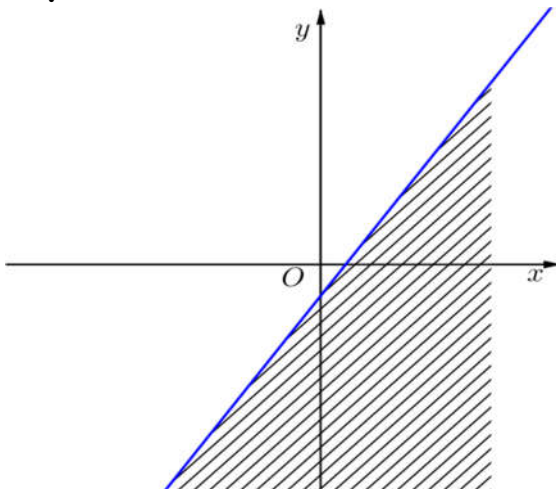
Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (không kể bờ  $(d)$ ) không chứa điểm  $(0; 0)$ .

**Câu 21.** Miền nghiệm của bất phương trình  $2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 \leq 0$  chứa điểm nào sau đây?

- A.  $A(1; 1)$ .      B.  $B(1; 0)$ .      C.  $C(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .      D.  $D(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**



Trước hết, ta vẽ đường thẳng  $(d): 2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} - 2 = 0$ .



Ta thấy  $(0; 0)$  là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ  $(d)$  chứa điểm  $(0; 0)$ .

**Câu 22.** Cho bất phương trình  $2x + 4y < 5$  có tập nghiệm là  $S$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.  $(1; 1) \in S$ .      B.  $(1; 10) \in S$ .      C.  $(1; -1) \in S$ .      D.  $(1; 5) \in S$ .

**Lời giải**

**Chọn C.**

Ta thấy  $(1; -1)$  thỏa mãn hệ phương trình do đó  $(1; -1)$  là một cặp nghiệm của hệ phương trình.

**Câu 23.** Cho bất phương trình  $x - 2y + 5 > 0$  có tập nghiệm là  $S$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

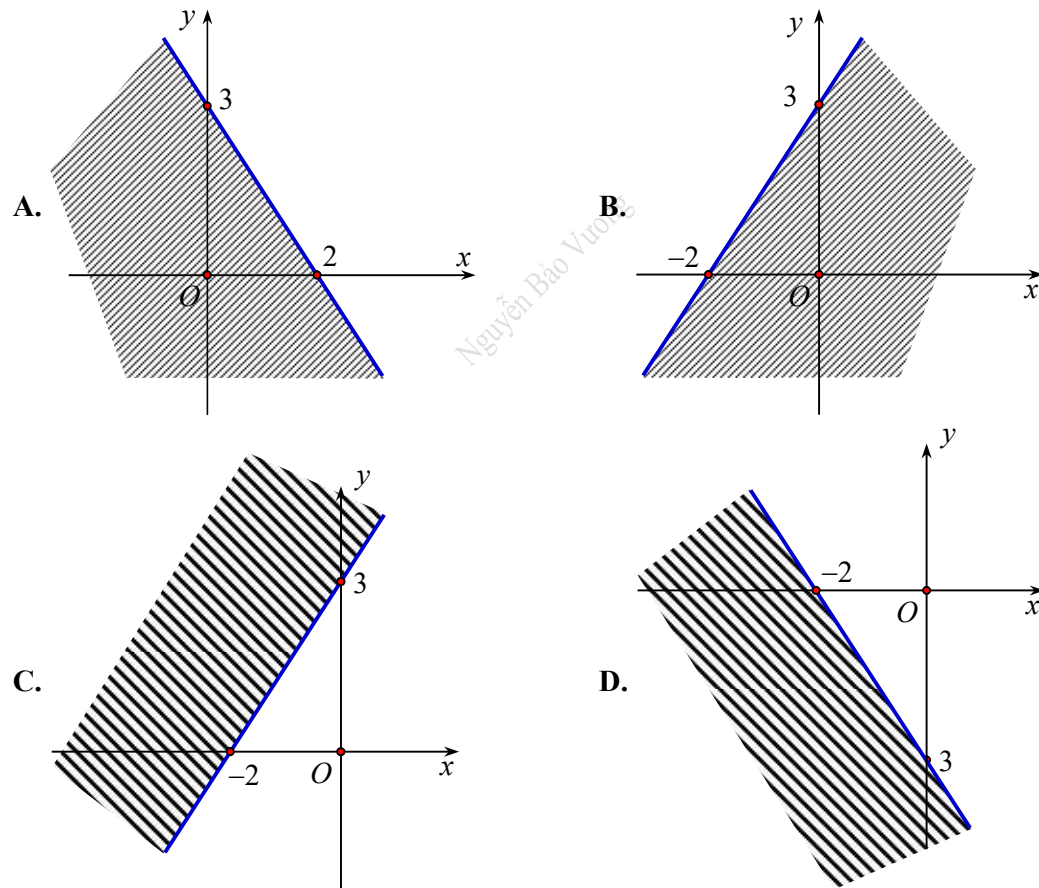
- A.  $(2; 2) \in S$ .      B.  $(1; 3) \in S$ .      C.  $(-2; 2) \in S$ .      D.  $(-2; 4) \in S$ .

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta thấy  $(2; 2) \in S$  vì  $2 - 2 \cdot 2 + 5 > 0$ .

**Câu 24.** Miền nghiệm của bất phương trình  $3x - 2y > -6$  là



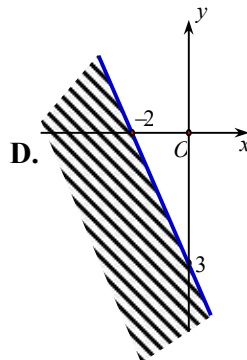
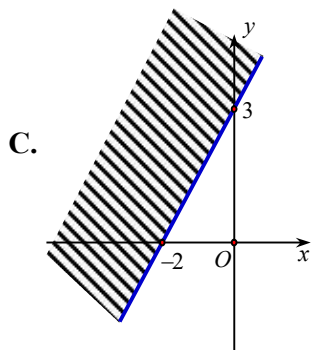
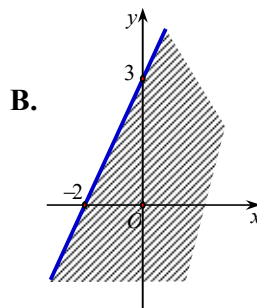
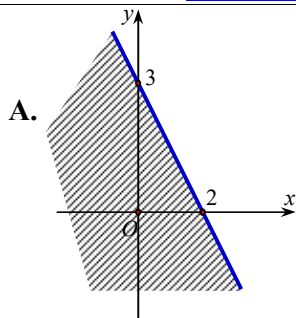
**Lời giải**

**Chọn C.**

Trước hết, ta vẽ đường thẳng  $(d): 3x - 2y = -6$ .

Ta thấy  $(0; 0)$  là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ  $(d)$  chứa điểm  $(0; 0)$ .

**Câu 25.** Miền nghiệm của bất phương trình  $3x + 2y > 6$  là



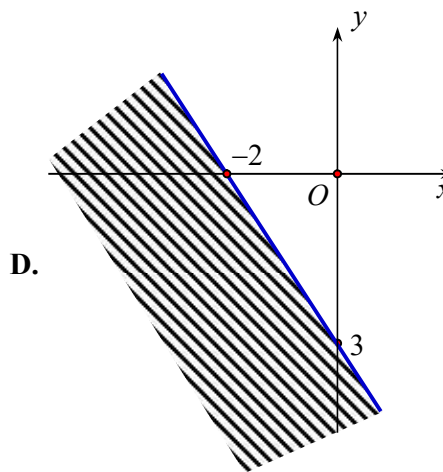
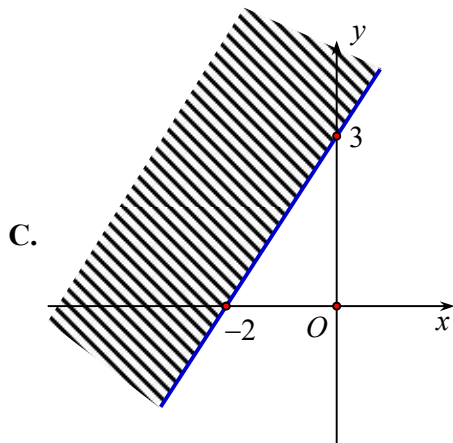
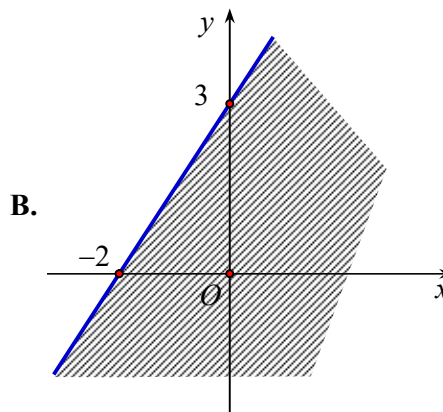
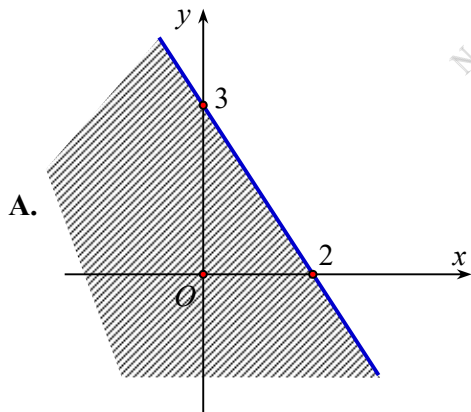
Lời giải

Chọn#A.

Trước hết, ta vẽ đường thẳng  $(d): 3x + 2y = 6$ .

Ta thấy  $(0; 0)$  không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (không kể bờ  $(d)$ ) không chứa điểm  $(0; 0)$ .

**Câu 26.** Miền nghiệm của bất phương trình  $3x + 2y > -6$  là

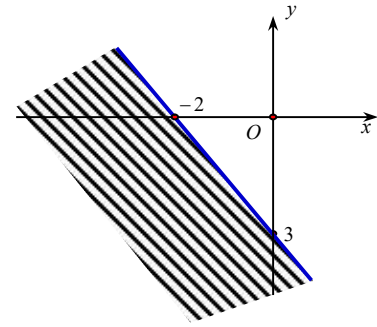


## Lời giải

## Chọn D

Trước hết, ta vẽ đường thẳng  $(d): 3x + 2y = -6$ .

Ta thấy  $(0; 0)$  là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng (không kể bờ  $(d)$ ) chứa điểm  $(0; 0)$ .



**Câu 27.** Cho bất phương trình  $-2x + \sqrt{3}y + \sqrt{2} \leq 0$  có tập nghiệm là  $S$ . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.  $(1; 1) \in S$ .      B.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \in S$ .      C.  $(1; -2) \notin S$ .      D.  $(1; 0) \notin S$ .

## Lời giải

## Chọn B.

Ta thấy  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right) \in S$  vì  $-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} \cdot 0 + \sqrt{2} = 0$ .

**Câu 28.** Cặp số  $(x; y) = (2; 3)$  là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

- A.  $4x > 3y$ .      B.  $x - 3y + 7 < 0$ .      C.  $2x - 3y - 1 > 0$ .      D.  $x - y < 0$ .

## Lời giải

## Chọn

## D.

Ta có  $2 - 3 = -1 < 0$  nên Chọn

## D.

**Câu 29.** Cặp số  $(x_0; y_0)$  nào là nghiệm của bất phương trình  $3x - 3y \geq 4$ .

- A.  $(x_0; y_0) = (-2; 2)$ .      B.  $(x_0; y_0) = (5; 1)$ .      C.  $(x_0; y_0) = (-4; 0)$ .      D.  $(x_0; y_0) = (2; 1)$ .

## Lời giải

## Chọn

## B.

Thế các cặp số  $(x_0; y_0)$  vào bất phương trình:

$$(x_0; y_0) = (-2; 2) \Rightarrow 3x - 3y \geq 4 \Leftrightarrow 3(-2) - 3 \cdot 2 \geq 4 \text{ (vô lí)}$$

$$(x_0; y_0) = (5; 1) \Rightarrow 3x - 3y \geq 4 \Leftrightarrow 3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \geq 4 \text{ (đúng)}$$

$$(x_0; y_0) = (-4; 0) \Rightarrow 3x - 3y \geq 4 \Leftrightarrow 3(-4) - 3 \cdot 0 \geq 4 \text{ (vô lí)}$$

$$(x_0; y_0) = (2; 1) \Rightarrow 3x - 3y \geq 4 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \geq 4 \text{ (vô lí)}.$$

Theo dõi Fanpage: **Nguyễn Bảo Vương** ☞ <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

Hoặc Facebook: **Nguyễn Vương** ☞ <https://www.facebook.com/phong.baovuong>

Tham gia ngay: **Nhóm Nguyễn Bảo Vương (TÀI LIỆU TOÁN)** ☞ <https://www.facebook.com/groups/703546230477890/>

Ấn sub kênh Youtube: **Nguyễn Vương**

☞ [https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUBT3nwJfA?view\\_as=subscriber](https://www.youtube.com/channel/UCQ4u2J5gIEI1iRUBT3nwJfA?view_as=subscriber)

☞ Tải nhiều tài liệu hơn tại: <https://www.nbv.edu.vn/>