

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

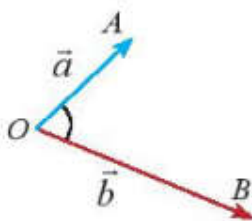
1. Góc giữa hai vector

Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} đều khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Góc \widehat{AOB} với số đo từ 0° đến 180° được gọi là **góc giữa hai vector** \vec{a} và \vec{b} .

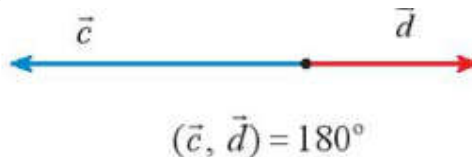
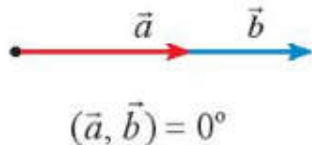
Ta kí hiệu góc giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} là (\vec{a}, \vec{b}) .

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng \vec{a} và \vec{b} vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Chú ý:

- Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Góc giữa hai vector cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0° .
- Góc giữa hai vector ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180° .
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vector \vec{a} hoặc \vec{b} là vector $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vector đó là tùy ý (từ 0° đến 180°).



2. Tích vô hướng của hai vector

Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} đều khác $\vec{0}$

Tích vô hướng của \vec{a} và \vec{b} là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Chú ý:

- Trường hợp ít nhất một trong hai vector \vec{a} và \vec{b} bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Với hai vector \vec{a} và \vec{b} , ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được kí hiệu là \vec{a}^2 và được gọi là bình phương vô hướng của vector \vec{a} .

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vector luôn bằng bình phương độ dài của vector đó.

3. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;

4. Một số ứng dụng

Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\overline{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\overline{AB}^2}$.

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vectơ bất kì \vec{a} và \vec{b} khác vectơ $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vectơ \vec{u} song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vectơ \vec{v} song song hoặc trùng với đường thẳng b .

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ, góc của hai vectơ

Phương pháp:

Tích vô hướng của \vec{a} và \vec{b} là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Với hai vectơ khác vectơ $\vec{0}$, sử dụng công thức $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} = 30^\circ$.

Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Câu 2. Tính (\vec{a}, \vec{b}) biết rằng $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$.

Câu 3. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 8$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$.

a) Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

b) Tính số đo của góc giữa hai vectơ \vec{a} và $\vec{a} + \vec{b}$.

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các góc:

a) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB})$

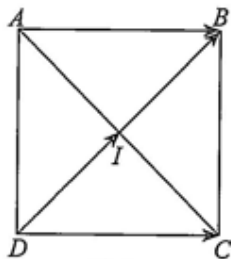
b) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI})$

c) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB})$

d) $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC})$

Câu 5. Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 3 và 4 có tích vô hướng là -6 . Tính góc giữa hai vectơ đó.

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I . Tìm các góc:



Hình 2

a) $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}); (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Câu 7. Cho hai vectơ \vec{i}, \vec{j} vuông góc có cùng độ dài bằng 1 và cho biết $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và tính số đo góc (\vec{a}, \vec{b}) .

Câu 8. Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 6 và 8 và có tích vô hướng là 24. Tính góc giữa hai vectơ đó.

Câu 9. Tìm điều kiện của \vec{u}, \vec{v} để:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

Câu 10. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4 và có đường cao AH . Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Câu 11. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 7, (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$;

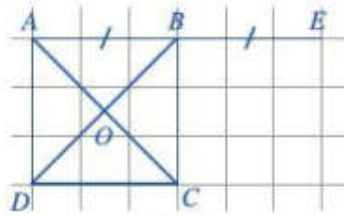
b) $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 9, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4\text{ cm}$.

a) Tính độ dài cạnh huyền BC .

b) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a . Tính:

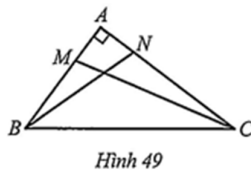


a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$

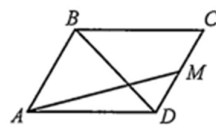
Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3$, $AC = 4$. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB , AC thỏa mãn $AM = AN = 1$ (Hình 49). Tính $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$.



Hình 49

Câu 15. Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$. M là trung điểm của BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 3$, $AD = 4$, $\hat{A} = 60^\circ$. M là trung điểm của CD (Hình 50). Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$.



Hình 50

Câu 17. Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a .

Tính các tích vô hướng sau: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Câu 19. Cho tam giác đều ABC tâm O , có độ dài các cạnh bằng 1.

a) Xác định góc giữa các cặp vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{OB} và \overrightarrow{CB} .

b) Tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

\overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{OB} và \overrightarrow{CB}

Câu 20. Cho tam giác ABC cân tại A , có $\hat{A} = 120^\circ$, $AB = 3$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

b) Tính độ dài cạnh BC .

c) Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Tính $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

- Câu 21.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- Câu 22.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và cho $AD = a$, $AB = 2a$. Tính:
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- Câu 23.** Cho ba điểm O, A, B thẳng hàng và $OA = a$, $OB = b$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ trong hai trường hợp:
a) Điểm O nằm ngoài đoạn thẳng AB ;
b) Điểm O nằm trong đoạn thẳng AB
- Câu 24.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và có đường cao AH . Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$.
- Câu 25.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có cạnh BC bằng $\sqrt{2}$. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- Câu 26.** Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$.
Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.
- Câu 27.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và cho $AD = 2a$, $AB = a$. Tính:
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- Câu 28.** Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:
a) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$;
b) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$;
c) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và \vec{b} cùng hướng;
d) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và \vec{b} ngược hướng.
- Câu 29.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính các tích vô hướng sau:
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- Câu 30.** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\hat{A} = 120^\circ$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 31.** Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Hãy tính:
a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
b). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
c). $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
d). $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$
- Câu 32.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Hãy tính:
a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
b). $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC .
c). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.
- Câu 33.** Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$
a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
b). Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .
- Câu 34.** Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường cao AH . Tính:
a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$.

b). $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$

Câu 35. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính:
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$

Câu 36. Cho các vector \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Câu 37. Cho các vector \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vector bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vector \vec{u} và \vec{v} với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Câu 38. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} . Cho biết $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Hãy tính các tích vô hướng
 $\vec{a}(2\vec{a} - \vec{b})$, $(3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b})$.

Câu 39. Cho $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $|2\vec{a} + \vec{b}|$

Câu 40. Cho hai vector đơn vị \vec{a}, \vec{b} thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $|\vec{a} + \vec{b}|$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng

Phương pháp:

- Biến đổi từ biểu thức về này sang về kia.
- Chứng minh hai biểu thức cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Sử dụng các tính chất của phép toán vector, tính chất của tích vô hướng.
- Tách vector, biến đổi về các tích vô hướng khác.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 41. Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, chứng minh rằng: $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

Câu 42. Cho hình thoi $ABCD$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = 0$

Câu 43. Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB . Với mỗi điểm M , chứng minh rằng
 $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}$.

Câu 44. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2)$.

Câu 45. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có:
 $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Câu 46. Cho tam giác ABC không cân. Gọi D, E, F theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C ; gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Câu 47. Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm và cho điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$

Câu 48. Cho tam giác ABC . Chứng minh:

$$AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

Câu 49. Cho tam giác nhọn ABC , kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Câu 50. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Câu 51. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác. Với mỗi điểm M , chứng minh rằng
 $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 52.** Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh $AC = a\sqrt{2}$, gọi O là giao điểm của AC và BD .
- Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a .
 - Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$
- Câu 53.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.
- Tính $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$
 - Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
- Câu 54.** Cho H là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$
- Câu 55.** Chứng minh rằng với bốn điểm bất kỳ A, B, C, D ta có:
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (hệ thức Ô - le).
- Câu 56.** Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
 - $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$
- Câu 57.** Cho tam giác ABC có I trung điểm của BC . Chứng minh:
- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$
 - $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$ (Với H là hình chiếu của A xuống BC).
- Câu 58.** Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Chứng minh rằng
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2$
 - $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$
- Câu 59.** Cho tam giác ABC , biết $AB = c, BC = a, AC = b$. Có trọng tâm G . Chứng minh rằng
 $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ (hệ thức Lép - nit).
- Câu 60.** Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có
 $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$
- Câu 61.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh với điểm M bất kỳ ta luôn có:
 $MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$
- Câu 62.** Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN . Chứng minh:
- $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$
 - $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = 4R^2$
- Câu 63.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và M là một điểm tùy ý. Chứng minh:
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
 - $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$
- Câu 64.** Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R .
- Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ khi và chỉ khi M thuộc (O) .
 - Chứng minh với mọi điểm M :
 $AM^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$

- Câu 65.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD . Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$
- Câu 66.** Cho tam giác ABC , biết $AB = c, BC = a, CA = b$, các đường trung tuyến tương ứng AA', BB', CC' . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng với mọi M bất kì, ta có $2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$
- Câu 67.** Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm, M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}^2$
- Câu 68.** Cho tam giác ABC , có AD, BE, CF lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

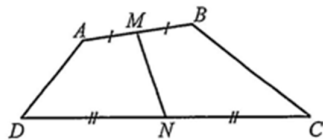
Dạng 3. Tính khoảng cách giữa hai điểm, chứng minh đẳng thức độ dài

Phương pháp: Sử dụng tính chất:

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$, do đó $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

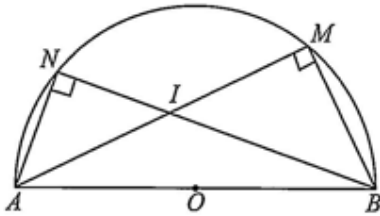
BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 69.** (Định lí cosin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$
- Câu 70.** Cho tứ giác $ABCD$ có M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD (Hình 51). Biết $AD = 2, BC = 3, AD \perp BC$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .



Hình 51

- Câu 71.** Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB . Với mỗi điểm M , chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + OA^2 + OB^2$.
- Câu 72.** Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.
- Câu 73.** Cho nửa đường tròn với đường kính $AB = 2R$. Gọi M và N là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại một điểm I .
- Chứng minh rằng $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$.
 - Tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$ theo R .
- Câu 74.** Cho tam giác đều ABC có độ dài các cạnh bằng 1.
- Gọi M là trung điểm của BC . Tính tích vô hướng của các cặp vector \overrightarrow{MA} và $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MA}$ và \overrightarrow{AC} .
 - Gọi N là điểm đối xứng với B qua C . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$.
 - Lấy điểm P thuộc đoạn AN sao cho $AP = 3PN$. Hãy biểu thị các vector $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{MP}$ theo hai vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} . Tính độ dài đoạn MP .
- Câu 75.** Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi M và N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho AM và BN cắt nhau tại I như Hình 5.



Hình 5

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$.

b) Tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$ theo R .

Câu 76. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Các điểm M, N lần lượt thuộc các tia BC và CA thỏa mãn

$$BM = \frac{1}{3}BC, CN = \frac{5}{4}CA. \text{ Tính:}$$

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}$

b) MN .

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 77. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Cho điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính độ dài AM .

Câu 78. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{2}, BC = 5a, \widehat{ABC} = 135^\circ$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho

$$AM = \frac{3}{2}MC$$

a). Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

b). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ và tính BM .

Câu 79. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 120^\circ$

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài trung tuyến AM .

b). Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC . Phân tích \overrightarrow{AD} theo hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD .

Câu 80. Cho tam giác ABC có $AB = 2a, BC = a\sqrt{7}, AC = 3a$. Gọi M trung điểm của AB, N thuộc AC sao cho $AN = 2NC$ và D thuộc MN sao cho $2DM = DN$

a). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

b). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn AD theo a .

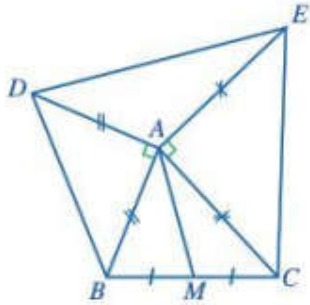
Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp: Sử dụng các tính chất:

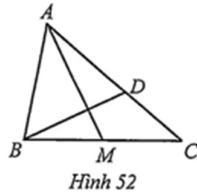
Hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vector \vec{u} song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vector \vec{v} song song hoặc trùng với đường thẳng b .

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 81. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, \widehat{A} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE



- a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$;
 b) Biểu diễn \overrightarrow{AM} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $AM \perp DE$.
- Câu 82.** Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm D thuộc cạnh AC thỏa mãn $AD = \frac{7}{12}AC$ (Hình 52).



- Chứng minh $AM \perp BD$.
- Câu 83.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm P, Q . Chứng minh rằng $\widehat{PMQ} = 90^\circ$ khi và chỉ khi $BP + \sqrt{3}CQ = BC$.
- Câu 84.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1, BC = \sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AD .
 a) Chứng minh rằng các đường thẳng AC và BM vuông góc với nhau.
 b) Gọi H là giao điểm của AC, BM . Gọi N là trung điểm của AH và P là trung điểm của CD . Chứng minh rằng tam giác NBP là một tam giác vuông.
- Câu 85.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$. Dựng ra phía ngoài tam giác hai tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm BC, BD, CE . Chứng minh rằng:
 a) AM vuông góc với DE ;
 b) BE vuông góc với CD ;
 c) Tam giác MNP là một tam giác vuông cân.
- Câu 86.** Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.
 a) Tính $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
 b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
 c) Chứng minh $AM \perp BD$.
- Câu 87.** Cho hình vuông $ABCD, M$ là trung điểm của BC, N là điểm nằm giữa hai điểm A và C . Đặt $x = \frac{AN}{AC}$. Tìm x thỏa mãn $AM \perp BN$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 88.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M, N là các điểm sao cho $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}, 5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$.
 a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$
 b). Chứng minh AM vuông góc với BN .
- Câu 89.** Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Về bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M trung điểm của đoạn BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với DE .

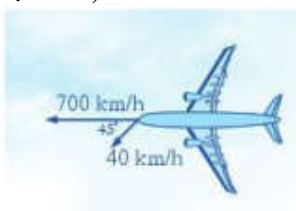
- Câu 90.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và HC . Chứng minh $BI \perp AJ$
- Câu 91.** Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của đoạn BC , D là hình chiếu vuông góc của H trên AC , M trung điểm của đoạn HD . Chứng minh AM vuông góc với DB .
- Câu 92.** Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao của hai đường chéo AC và BD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD và H, K là trực tâm của các tam giác ABE, CDE .
- a). Chứng minh $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- b). Chứng minh $HK \perp IJ$
- Câu 93.** Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M . Gọi P là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
- Câu 94.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $BH \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và DC . Chứng minh $BM \perp MN$.
- Câu 95.** Cho hình vuông $ABCD$, điểm M thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh rằng DMN là tam giác vuông cân.
- Câu 96.** Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh $HK \perp IJ$.
- Câu 97.** Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy M, N, P lần lượt trên 3 cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x$. Tìm x để AM vuông góc với PN .
- Câu 98.** Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . D là trung điểm của AB , E là trọng tâm tam giác ACD . Chứng minh $OE \perp CD$

Dạng 5. Bài toán thực tế

Trong Vật lý, tích vô hướng giúp tính công A sinh bởi một lực \vec{F} có độ dịch chuyển là vector \vec{d} . Ta có công thức: $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 99.** Tính công sinh bởi một lực \vec{F} có độ lớn 20 N kéo một vật dịch chuyển theo một vector \vec{d} có độ dài 50m và cho biết $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$.
- Câu 100.** Tính công sinh bởi một lực \vec{F} có độ lớn 60 N kéo một vật dịch chuyển một vector \vec{d} có độ dài 200m. Cho biết $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$.
- Câu 101.** Cho ba điểm M, N, P . Nếu một lực \vec{F} không đổi tác động lên một chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, thì các công sinh bởi lực \vec{F} trong hai trường hợp sau có mối quan hệ gì với nhau?
- a) Chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ M đến N rồi tiếp tục từ N đến P .
- b) Chất điểm chuyển động thẳng từ M đến P .
- Câu 102.** Một người dùng một lực \vec{F} có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100m. Biết lực hợp \vec{F} với hướng dịch chuyển là một góc 60° . Tính công sinh bởi lực \vec{F}
- Câu 103.** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



Câu 104. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 650 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 35 km/h . Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

Dạng 6. Tập hợp điểm

Dạng 1: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (1) (A, B là hai điểm cố định).

- $k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.
- $k \neq 0$: Gọi I trung điểm của AB.

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

$$+ \text{ Nếu } k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}: \text{ Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính } \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$$

$$+ \text{ Nếu } k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4}: \text{ Tập hợp điểm M là điểm I.}$$

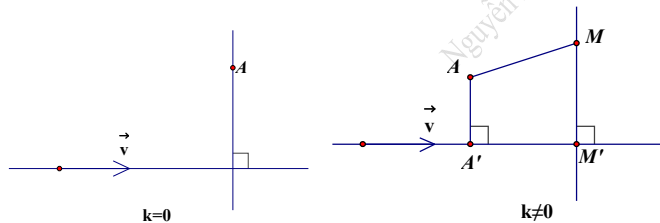
$$+ \text{ Nếu } k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}: \text{ Tập hợp các điểm M là rỗng.}$$

Dạng 2: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k$ (2) (A cố định, \vec{v} có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của \vec{v}

$k \neq 0$: Gọi $\overrightarrow{A'M'}$ là hình chiếu của \overrightarrow{AM} trên giá của vector \vec{v} ; ta có: (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{v} = k$ (định lý hình chiếu). A' cố định $\Rightarrow M'$ cố định (M' nằm trên giá của \vec{v} định bởi $\overrightarrow{A'M'} = \frac{k}{v}$). Tập hợp các

điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vector \vec{v} tại M' .



Dạng 3: $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ (3) (A, B cố định, α, β là hằng số và $\alpha + \beta \neq 0$).

Gọi I là điểm thỏa $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$ là điểm cố định.

$$(3) \Leftrightarrow \alpha (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) MI^2 + 2(\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{MI} + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) MI^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính

$$\sqrt{\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}}.$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

– Cho hai điểm A, B cố định α, β là hằng số thỏa $\alpha + \beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MI}$.

– Cho ba điểm A, B, C cố định α, β, γ là hằng số thỏa $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MI}$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 105. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Câu 106. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp điểm M thỏa:

a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

b). $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

c). $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

d). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MB^2 + 4MC^2$

Câu 107. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn điều kiện sau: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$

Câu 108. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = AB^2$

Câu 109. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = a, BC = 3a$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

Câu 110. Cho A, B, C, D là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0$

Câu 111. Cho đoạn $AB = a > 0$ và số k. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k$

Câu 112. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$;

b) $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

Câu 113. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$;

b) $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$;

c) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$;

d) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.

Câu 114. Cho hai điểm A, B và k là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm M thỏa điều kiện: $MA^2 + MB^2 = k^2$.

Câu 115. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

Câu 116. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

a). $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$

b). $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

Câu 117. Cho hai điểm A, B cố định và số k cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ **Câu 118.** Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).**Câu 119.** Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm G .

a). Xác định vị trí điểm P thỏa $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

b). Chứng minh C, G, P thẳng hàng.

c). Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$

Câu 120. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC và M là một điểm thay đổi:

a). Chứng minh $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$ không đổi.

b). Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k$ (k là số thực cho trước).

Câu 121. Cho tam giác ABC . Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn:

a). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$

b). $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$

(với k là một số cho trước).**Câu 122.** Cho tam giác ABC số a . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$.**Câu 123.** Cho tam giác ABC và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$.**C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP****Câu 1.** Nếu hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

A. $MN = 4$

B. $MN = 2$

C. $MN = 16$;

D. $MN = 256$.

Câu 2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$;

B. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;

C. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;

D. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

Câu 3. Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$ bằng:

A. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$.

B. $-AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$.

C. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

D. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ACB}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng:

A. $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

B. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

C. $-AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

D. $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}$.

Câu 5. Cho đoạn thẳng AB . Tập hợp các điểm M nằm trong mặt phẳng thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là:

A. Đường tròn tâm A bán kính AB .

B. Đường tròn tâm B bán kính AB .

- C. Đường trung trực của đoạn thẳng AB .
D. Đường tròn đường kính AB .

Câu 6. Nếu hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -9$ thì:
A. $MN = 9$.
B. $MN = 3$.
C. $MN = 81$.
D. $MN = 6$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 7. Cho \vec{a} và \vec{b} là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 8. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Câu 9. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} .
A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.

Câu 10. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 11. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?
A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. B. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$. D. $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Câu 14. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:
A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 15. Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
A. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$. D. $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$.

Câu 16. Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$
A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
A. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$.

- C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
- Câu 19.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$ bằng:
- A. $\frac{9a^2}{2}$. B. $-\frac{9a^2}{2}$. C. 0 . D. $9a^2$.
- Câu 20.** Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là sai?
- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.
- Câu 21.** Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$
- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 22.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$. C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.
- Câu 23.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- A. 0 . B. a . C. $\frac{a^2}{2}$. D. a^2 .
- Câu 24.** Cho M là trung điểm AB , tìm biểu thức sai:
- A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. D. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.
- Câu 25.** Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$
- A. $\frac{3a^2}{4}$. B. $-\frac{3a^2}{4}$. C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $-\frac{3a^2}{2}$.
- Câu 26.** Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Câu nào sau đây đúng
- A. \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.
B. \vec{a} và \vec{b} nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 120° .
C. \vec{a} và \vec{b} ngược hướng.
D. A, B, C đều sai.
- Câu 27.** Cho 2 vectơ \vec{a} và \vec{b} có $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$
- A. $\sqrt{21}$. B. $\sqrt{61}$. C. 21 . D. 61 .
- Câu 28.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$
- A. $3a^2$. B. $-3a^2$. C. $3a$. D. 0 .
- Câu 29.** Cho 2 vectơ đơn vị \vec{a} và \vec{b} thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. Hãy xác định $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$
- A. 7 . B. 5 . C. -7 . D. -5 .
- Câu 30.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- A. $-9a^2$. B. $15a^2$. C. 0 . D. $9a^2$.
- Câu 31.** Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC = 9$, $BC = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- A. 9 . B. 81 . C. 3 . D. 5 .
- Câu 32.** Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

A. $\sqrt{7+\sqrt{3}}$. B. $\sqrt{7-\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$. D. $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$.

Câu 33. Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.

Câu 34. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :

- A. Đường tròn đường kính AB .
B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Câu 35. Cho hai điểm $A(2, 2), B(5, -2)$. Tìm M trên tia Ox sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$

- A. $M(1, 6)$. B. $M(6, 0)$. C. $M(1, 0)$ hay $M(6, 0)$. D. $M(0, 1)$.

Câu 36. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Câu 37. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 38. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Câu 39. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c, AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Câu 40. Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2 \text{ cm}, BC = 3 \text{ cm}, CA = 5 \text{ cm}$ Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$ B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$ C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$ D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Câu 41. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

- A. $P = b^2 - c^2$ B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Câu 42. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

- A. $P = -1$ B. $P = 3a^2$ C. $P = -3a^2$ D. $P = 2a^2$

Câu 43. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Câu 44. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

- A. tam giác OAB đều. B. tam giác OAB cân tại O .
C. tam giác OAB vuông tại O . D. tam giác OAB vuông cân tại O .

- Câu 45.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
 A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.
- Câu 46.** Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
 A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.
- Câu 47.** Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:
 A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.
- Câu 48.** Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.
 A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.
- Câu 49.** Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:
 A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.
- Câu 50.** Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là:
 A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.
- Câu 51.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
 A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2$.
 C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2$.
- Câu 52.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$
 A. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$. B. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$.
 C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$. D. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$.
- Câu 53.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $CD = BD = 5\sqrt{2}$, $AD = 3\sqrt{10}$, $AC = 10$. Tìm cosin góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{DB}
 A. $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$. B. $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$. C. $\frac{4}{5\sqrt{2}}$. D. $\frac{3}{5\sqrt{2}}$.
- Câu 54.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết $AB = CD = 2a$, $MN = a\sqrt{3}$.
 A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 50^\circ$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 80^\circ$. D. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$.
- Câu 55.** Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.
 A. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$. B. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$.
 C. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$. D. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$.
- Câu 56.** Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D ; $AB \parallel CD$; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. O là trung điểm của AD . Độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ bằng
 A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. a . D. $3a$.
- Câu 57.** Cho ABC đều cạnh $2a$ với M là trung điểm BC . Khẳng định nào đúng?
 A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.
- Câu 58.** Cho tam giác vuông cân ABC với $AB = AC = a$. Khi đó $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng
 A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{5}$. C. $5a$. D. $2a$.

- Câu 59.** Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ \vec{a}, \vec{b} . Chọn phát biểu **đúng**.
- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.
- Câu 60.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} là
- A. $8a^2$. B. $8a$. C. $8\sqrt{3}a^2$. D. $8\sqrt{3}a$.
- Câu 61.** Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng
- A. -18 . B. 27 . C. 18 . D. -27 .
- Câu 62.** Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Biết $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.
- A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.
- Câu 63.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 30^\circ, AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.
- A. $P = -2$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = 2$. D. $P = -2\sqrt{3}$.
- Câu 64.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a, AD = 3a, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$
- A. $3a^2$. B. $6a^2$. C. 0 . D. a^2 .
- Câu 65.** Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8, BC = 7$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:
- A. -20 . B. 40 . C. 10 . D. 20 .
- Câu 66.** Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
- A. 120° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .
- Câu 67.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$. C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.
- Câu 68.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC và có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Tính cạnh AB, AC .
- A. $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. B. $AB = a, AC = a$.
C. $AB = a\sqrt{2}, AC = a$. D. $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$.
- Câu 69.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$
- A. $\frac{21a^2}{4}$. B. $\frac{11a^2}{4}$. C. $\frac{9a^2}{4}$. D. $\frac{a^2}{4}$.
- Câu 70.** Cho các vectơ \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|\vec{2a} - \vec{3b}| = \sqrt{7}$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$
- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}$.
- Câu 71.** Cho các vectơ \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ \vec{u} và \vec{v} với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$
- A. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{2}$. B. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{6}$. C. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{4}$. D. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{3}$.

- Câu 72.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos \widehat{MNP}$.
- A. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$. B. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{4\sqrt{10}}$.
 C. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{\sqrt{10}}$. D. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$.
- Câu 73.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$
- A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$.
- Câu 74.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$
- A. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$. B. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$.
 C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$.
- Câu 75.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.
- Câu 76.** Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R . Tính R .
- A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $R = \frac{a}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.
- Câu 77.** Cho tam giác đều ABC cạnh 18cm. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là
- A. Tập rỗng. B. Đường tròn có định có bán kính $R = 2$ cm.
 C. Đường tròn có định có bán kính $R = 3$ cm. D. Một đường thẳng.
- Câu 78.** Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$. Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.
- A. Đường tròn đường kính IJ . B. Đường tròn đường kính IK .
 C. Đường tròn đường kính JK . D. Đường trung trực đoạn JK .
- Câu 79.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .
- A. $x = \frac{5a}{12}$. B. $x = \frac{a}{2}$. C. $x = \frac{4a}{5}$. D. $x = \frac{7a}{12}$.
- Câu 80.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$
- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

Nguyễn Bảo Vương

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

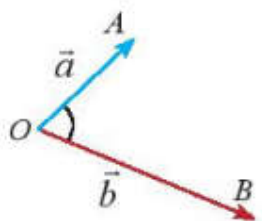
1. Góc giữa hai vector

Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} đều khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Góc \widehat{AOB} với số đo từ 0° đến 180° được gọi là **góc giữa hai vector** \vec{a} và \vec{b} .

Ta kí hiệu góc giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} là (\vec{a}, \vec{b}) .

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng \vec{a} và \vec{b} vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



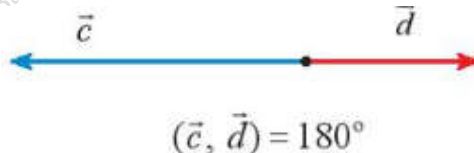
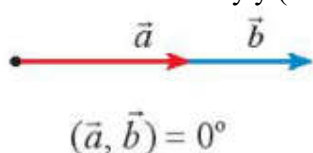
Chú ý:

- Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

- Góc giữa hai vector cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0° .

- Góc giữa hai vector ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180° .

- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vector \vec{a} hoặc \vec{b} là vector $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vector đó là tùy ý (từ 0° đến 180°).



2. Tích vô hướng của hai vector

Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} đều khác $\vec{0}$

Tích vô hướng của \vec{a} và \vec{b} là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Chú ý:

a) Trường hợp ít nhất một trong hai vector \vec{a} và \vec{b} bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

b) Với hai vector \vec{a} và \vec{b} , ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

c) Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được kí hiệu là \vec{a}^2 và được gọi là bình phương vô hướng của vector \vec{a} .

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vector luôn bằng bình phương độ dài của vector đó.

3. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;

4. Một số ứng dụng

Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vector bất kì \vec{a} và \vec{b} khác vector $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vector \vec{u} song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vector \vec{v} song song hoặc trùng với đường thẳng b .

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai vector, góc của hai vector

Phương pháp:

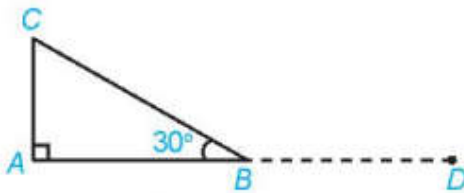
Tích vô hướng của \vec{a} và \vec{b} là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Với hai vector khác vector $\vec{0}$, sử dụng công thức $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} = 30^\circ$.

Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Lời giải



Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 90^\circ, (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{ACB} = 60^\circ, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{DBC} = 150^\circ$.

Câu 2. Tính (\vec{a}, \vec{b}) biết rằng $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-6\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Do đó, $(\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$.

Câu 3. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 8$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$.

a) Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

b) Tính số đo của góc giữa hai vector \vec{a} và $\vec{a} + \vec{b}$.

Lời giải

HD. Từ một điểm O , dựng vector $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, rồi dựng vector $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ và tam giác OAB vuông tại A .

a) Đáp số. $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 36$.

b) Đáp số. $(\vec{a}, \vec{a} + \vec{b}) \approx 53^\circ 7' 48''$.

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các góc:

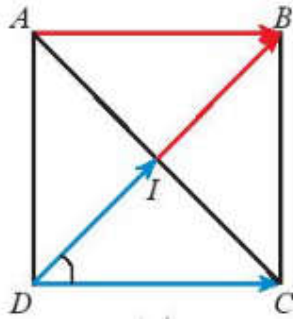
a) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB})$

b) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI})$

c) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB})$

d) $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC})$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, suy ra $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DC}) = \widehat{IDC} = 45^\circ$.

b) Ta có: $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$, suy ra $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = \widehat{BIC} = 90^\circ$.

c) Do hai vector $\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB}$ cùng hướng nên ta có $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB}) = 0^\circ$.

d) Do hai vector $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}$ ngược hướng nên ta có $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = 180^\circ$.

Câu 5. Cho hai vector có độ dài lần lượt là 3 và 4 có tích vô hướng là -6 . Tính góc giữa hai vector đó.

Lời giải

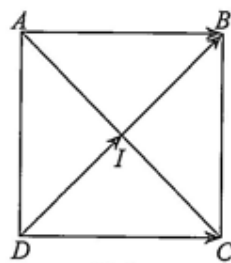
Ta cho: $|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = 4$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$

Ta có công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 4 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -6 \Rightarrow 3 \cdot 4 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -6$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$$

Câu 6. Cho hình vuông ABCD có tâm I. Tìm các góc:



Hình 2

a) $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}); (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Lời giải

a) Do hai vector $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên ta có $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}) = 0^\circ$.

Do hai vector $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$ ngược hướng nên ta có $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ$.

b) Do hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ vuông góc nên ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$.

Câu 7. Cho hai vector \vec{i}, \vec{j} vuông góc có cùng độ dài bằng 1 và cho biết $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và tính số đo góc (\vec{a}, \vec{b}) .

Lời giải

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = (4\vec{i} - \vec{j}) \cdot (\vec{i} + 4\vec{j}) = 4\vec{i}^2 + 16\vec{i} \cdot \vec{j} - \vec{j} \cdot \vec{i} - 4\vec{j}^2 = 4 - 4 = 0.$$

$$\text{Vậy } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \text{ Suy ra } (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

Câu 8. Cho hai vector có độ dài lần lượt là 6 và 8 và có tích vô hướng là 24. Tính góc giữa hai vector đó.

Lời giải

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc giữa hai vector. Ta có } \cos \alpha = \frac{24}{6 \cdot 8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 9. Tìm điều kiện của \vec{u}, \vec{v} để:

- a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
 b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

Lời giải

a) Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0^\circ$$

Nói cách khác: \vec{u}, \vec{v} cùng hướng.

b) Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

$$\Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 180^\circ$$

Nói cách khác: \vec{u}, \vec{v} ngược hướng.

Câu 10. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4 và có đường cao AH . Tính các tích vô hướng:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
 b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
 c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -8;$$

$$c) \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Câu 11. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong các trường hợp sau:

- a) $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 7, (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$;
 b) $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 9, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$

Lời giải

$$a) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 6 \cdot 7 \cdot \cos 45^\circ = 42 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 21\sqrt{2}$$

$$b) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 8 \cdot 9 \cdot \cos 150^\circ = 72 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -36\sqrt{3}.$$

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4\text{ cm}$.

- a) Tính độ dài cạnh huyền BC .
 b) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

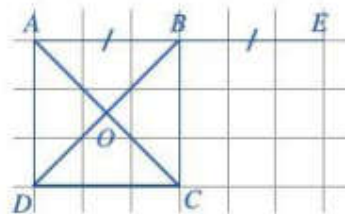
$$a) BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}(\text{cm})$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4 \cdot 4 \cdot \cos \widehat{BAC} = 16 \cdot \cos 90^\circ = 16 \cdot 0 = 0.$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

$$= 4 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos \widehat{ABC} = 16\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 16\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a . Tính:



- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$ b) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$

Lời giải

a) Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \widehat{BAO} = 45^\circ$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$$

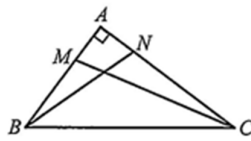
b) Vẽ vector $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD}) = \widehat{EBD} = 135^\circ$.

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) \\ &= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = a^2\sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = -a^2. \end{aligned}$$

c) Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BO}) = \widehat{EBO} = 135^\circ$.

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{OD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OD}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \cos 135^\circ = \frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-a^2}{2}.$$

Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại $A, AB = 3, AC = 4$. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB, AC thỏa mãn $AM = AN = 1$ (Hình 49). Tính $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$.



Hình 49

Lời giải

Vì $\hat{A} = 90^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} &= (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= 0 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Vì hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = AB \cdot AM = 3 \cdot 1 = 3$.

Vì hai vector $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AN} = AC \cdot AN = 4 \cdot 1 = 4$.

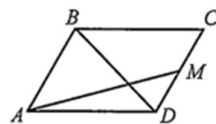
Suy ra $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM} = -4 - 3 = -7$.

Câu 15. Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 6$. M là trung điểm của BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) \\ &= \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) = \frac{1}{2}(6^2 - 4^2) = 10. \end{aligned}$$

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 3, AD = 4, \hat{A} = 60^\circ$. M là trung điểm của CD (Hình 50). Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$.



Hình 50

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \right) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 \\ &= AD^2 - \frac{1}{2} AD \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAD} - \frac{1}{2} AB^2 \\ &= 4^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot 3^2 = \frac{17}{2}.\end{aligned}$$

Câu 17. Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

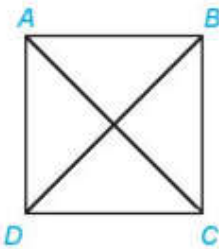
Lời giải

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 90^\circ \\ &= AB \cdot AC \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a .

Tính các tích vô hướng sau: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Lời giải



Vì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 90^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Hình vuông có cạnh bằng a nên có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$.

Mặt khác, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 45^\circ, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = 135^\circ$, do đó

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = AB \cdot BD \cdot \cos 135^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -a^2.$$

Câu 19. Cho tam giác đều ABC tâm O , có độ dài các cạnh bằng 1.

a) Xác định góc giữa các cặp vector \overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}$ và \overrightarrow{CB} .

b) Tính tích vô hướng của các cặp vector sau:

\overrightarrow{AB} và $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OB}$ và \overrightarrow{CB}

Lời giải

a) Do tam giác ABC đều, nên $\widehat{CAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$.

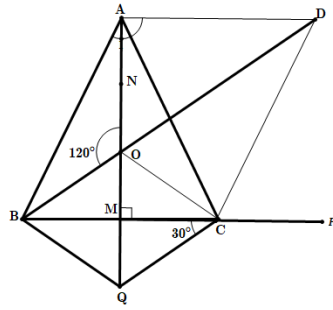
Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{CAB} = 60^\circ$.

Gọi D là điểm đối xứng với B qua CA . Khi đó tứ giác $ABCD$ là một hình thoi, do đó $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ và $\widehat{BAD} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 120^\circ$.

Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{BAD} = 120^\circ$.

Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm của OA , P là điểm đối xứng với M qua C .

Khi đó, do O là tâm của tam giác đều ABC , nên A, N, O, M thẳng hàng, $AM \perp BC, \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.



Suy ra $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}) = 90^\circ$.

Lấy điểm Q đối xứng với O qua M . Khi đó tứ giác $BOCQ$ là một hình thoi, có $\widehat{OCQ} = 60^\circ$.

Suy ra $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CQ}; \overrightarrow{CB}) = \widehat{BCQ} = 30^\circ$.

b) Do $AM \perp BC$ nên $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do O là tâm của tam giác đều ABC , nên $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = OA = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

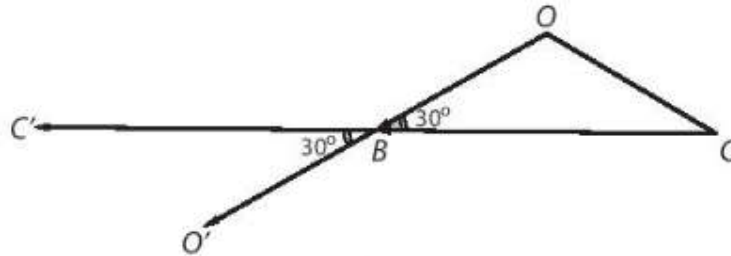
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{6}$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$;

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}$

Nhận xét. Ta có thể xác định góc giữa hai vector $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CB}$ như sau: Lấy O' đối xứng với O qua B và C' đối xứng với C qua B .



Câu 20. Cho tam giác ABC cân tại A , có $\hat{A} = 120^\circ, AB = 3$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

b) Tính độ dài cạnh BC .

c) Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Tính $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Lời giải

a) Do tam giác ABC cân tại $A, \hat{A} = 120^\circ, AB = 3$, nên

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 3 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -\frac{9}{2}$.

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ và do đó:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3^2 - \left(-\frac{9}{2}\right) = \frac{27}{2}$$

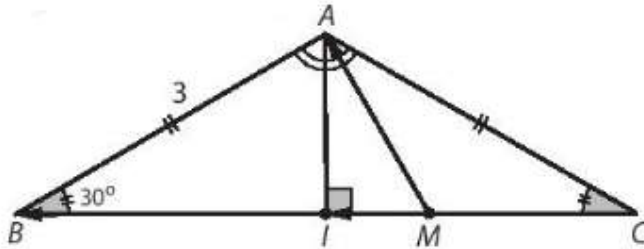
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}^2 = \left(-\frac{9}{2}\right) - 3^2 = -\frac{27}{2}.$$

b) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Từ đó

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = 27$$

Suy ra $BC = 3\sqrt{3}$.

c) Gọi I là trung điểm của BC.



Do M thuộc cạnh BC và $MB = 2MC$, I là trung điểm của BC, ta có $\overrightarrow{MB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

Suy ra

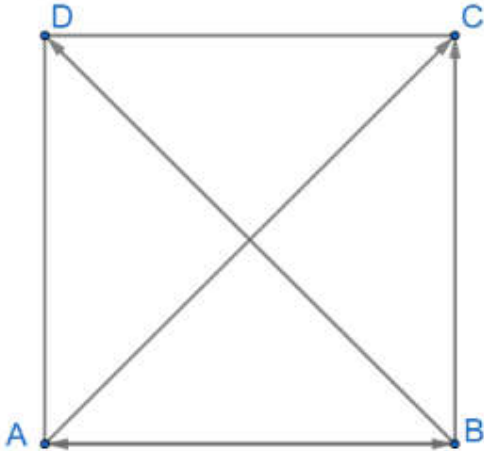
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MI} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{IB} \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Từ đó, theo định lý chiếu, ta được

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CB}^2 = 3$$

Câu 21. Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

Lời giải



Ta có: $AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

+) $AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 135^\circ = -a^2$$

$$+) AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

Câu 22. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và cho $AD = a, AB = 2a$. Tính:

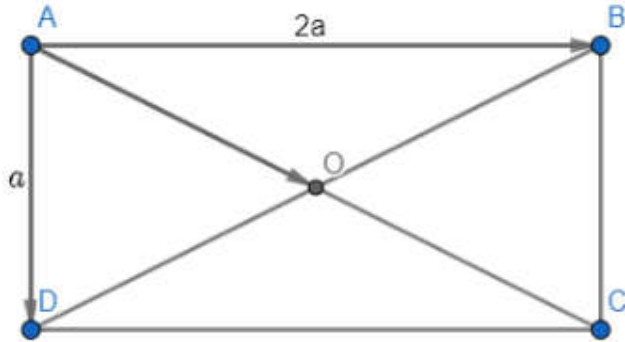
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} AC = BD &= \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5} \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \\ &= \cos \widehat{OAB} = \cos \widehat{CAB} = \frac{AB}{AC} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO})$$

$$= AB \cdot \frac{1}{2} AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2a^2$$

b) $AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Câu 23. Cho ba điểm O, A, B thẳng hàng và $OA = a, OB = b$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ trong hai trường hợp:

a) Điểm O nằm ngoài đoạn thẳng AB ;

b) Điểm O nằm trong đoạn thẳng AB

Lời giải

a) Ta có:



Ta thấy hai vector \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} cùng hướng nên $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 0^\circ$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = a \cdot b \cdot \cos 0^\circ = ab$$

b) Ta có:



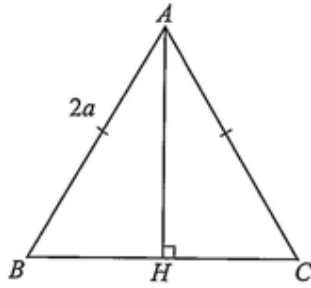
Ta thấy hai vector \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} ngược hướng nên

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 180^\circ \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = a \cdot b \cdot \cos 180^\circ = -ab$$

Câu 24. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và có đường cao AH . Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$.

Lời giải



Hình 3

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2a \cdot 2a \cdot \cos 60^\circ = 4a^2 \cdot \frac{1}{2} = 2a^2$$

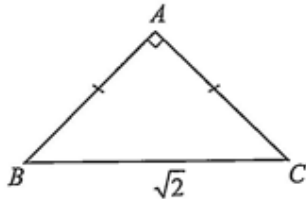
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 2a \cdot 2a \cdot \cos 120^\circ = 4a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2a^2$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{AH}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = |\overrightarrow{HB}| \cdot |\overrightarrow{HC}| \cdot \cos(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = a \cdot a \cdot \cos 180^\circ = a^2(-1) = -a^2$$

Câu 25. Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có cạnh BC bằng $\sqrt{2}$. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Lời giải



Hình 4

Tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = \sqrt{2}$ suy ra $AB = AC = 1$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

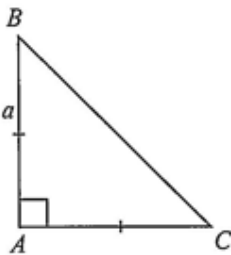
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1.$$

Câu 26. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$.

Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0;$$



Hình 1

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = (-\overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = -(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}).$$

$$\text{Ta có: } CB = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}) = -|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos \widehat{ACB}$$

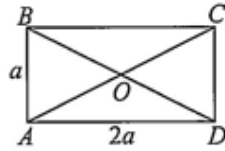
$$= -CA \cdot CB \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2.$$

Câu 27. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và cho $AD = 2a, AB = a$. Tính:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

Lời giải

a) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = \cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$



Hình 2

Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = a \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Câu 28. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

- a) $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$;
b) $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$;
c) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và \vec{b} cùng hướng;
d) $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, \vec{a}$ và \vec{b} ngược hướng.

Lời giải

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$ từ đó suy ra

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 \cdot \cos 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30 \cdot \cos 120^\circ = -15$

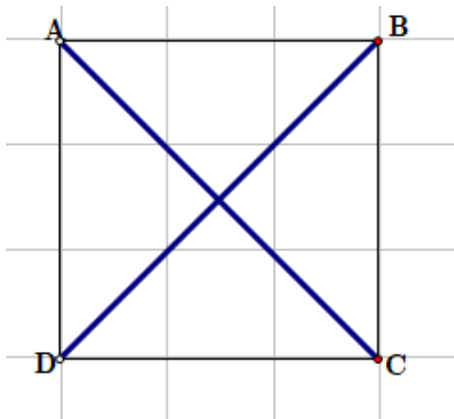
c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot \cos 0^\circ = 6$

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot \cos 180^\circ = -6$

Câu 29. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính các tích vô hướng sau:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

Lời giải



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos 90^\circ = 0$

Câu 30. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\hat{A} = 120^\circ$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 + a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 31. Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Hãy tính:

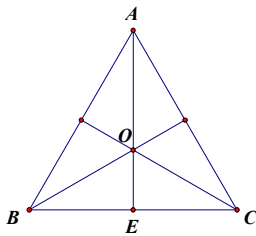
a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

c). $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$

d). $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$

Lời giải



a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

b). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$
 $= -BA \cdot BC \cdot \cos 60^\circ = -a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$

c). Gọi E là trung điểm của BC có $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$;
 Do đó $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{CB} = 2|\overrightarrow{OE}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{CB})$
 $= 2 \cdot OE \cdot CB \cos 90^\circ = 0$.

d). Khai triển biểu thức, ta được

$D = (\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$

Chú ý rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Từ đó $D = a^2 + \frac{3a^2}{2} + a^2 - 3a^2 = \frac{a^2}{2}$.

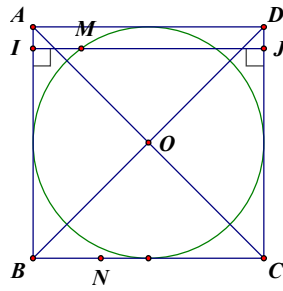
Câu 32. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Hãy tính:

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$

b). $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC .

c). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.

Lời giải



a).

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -BA \cdot BC \cdot \cos 90^\circ = 0$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = -BA \cdot BD \cdot \cos 45^\circ = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$
- $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$
 $= 0 + |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}) = AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ = a^2$

b).

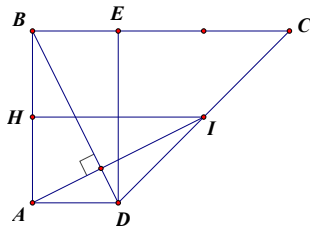
- $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BO}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{AB}$ (do $\overrightarrow{BN} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$)
 $= \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{BO}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}$
- $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}^2 = -a^2$

c).

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})$$

$$= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) = MH^2 - HA^2$$

Câu 33. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ b). Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .**Lời giải**

- Dựng $DE \perp BC, E \in BC \Rightarrow ABED$ là hình chữ nhật. Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD}$
 $= -\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = -|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = -DE \cdot DC \cdot \cos 45^\circ = -2a \cdot 2a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4a^2$
- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = 3 \cdot |\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos \widehat{DBE} = 3BE \cdot BD \cdot \frac{BE}{BD} = 3a^2$
- $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$
 $= |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 0^\circ - \overrightarrow{AB}^2 = BC \cdot AD - AB^2 = 3a \cdot a - 4a^2 = -a^2$

(Vì $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$).

b). Gọi H trung điểm của AB, suy ra HI là đường trung bình của hình thang ABCD, do đó

$$HI = \frac{AD + BC}{2} = 2a$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} = HI \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = 2a \cdot a = 2a^2$$

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \left(\text{do } \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB} \right); \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \left(\text{do } \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD} \right).$$

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$$

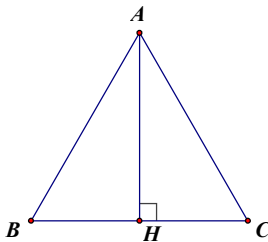
Vậy $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$ góc giữa AI và BD bằng 90° .

Câu 34. Cho tam giác ABC đều cạnh a, đường cao AH. Tính:

a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$.

b). $(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$

Lời giải



a).

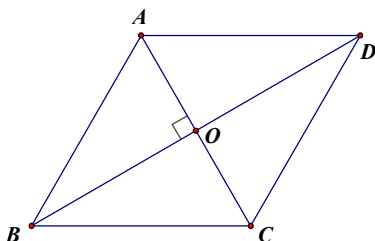
$$- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$- \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -AB \cdot AH \cdot \cos \widehat{BAH} = -a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -\frac{3a^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{b). } (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) &= \overrightarrow{AB}(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH}) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} \\ &= -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -2 \cdot \frac{a^2}{2} - 3 \cdot \frac{3a^2}{4} = -\frac{13a^2}{4} \end{aligned}$$

Câu 35. Cho hình thoi ABCD tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$

Lời giải



$$\text{Do } \widehat{BAC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC \text{ đều} \Rightarrow AC = 7, BO = \frac{7\sqrt{3}}{2} \left(\text{đường cao tam giác đều} = \frac{\text{cạnh} \cdot \sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 7 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ = \frac{49}{2}. \\
- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} &= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = -AB \cdot AO \cdot \cos 60^\circ = -7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{49}{4} \\
- \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} &= 0 \left(\text{do } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \right) \\
- \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = BA \cdot BO \cdot \cos \widehat{ABO} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3a^2}{4}
\end{aligned}$$

Câu 36. Cho các vector \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3 &\Leftrightarrow (2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 16 \\
&\Leftrightarrow 4a^2 - 12|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9b^2 = 16 \\
&\Leftrightarrow 4 - 12\cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9 = 16 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Câu 37. Cho các vector \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vector bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vector \vec{u} và \vec{v} với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} &= (\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = a^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) - 2b^2 = -\frac{1}{2}. \\
\bullet \vec{u}^2 &= (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 1 = 7 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{7} \\
\bullet \vec{v}^2 &= (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{v}| = 1 \\
\vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7} \cdot 1} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.
\end{aligned}$$

Câu 38. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} . Cho biết $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Hãy tính các tích vô hướng $\vec{a}(2\vec{a} - \vec{b})$, $(3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b})$.

Lời giải

$$\text{Trước hết ta có: } \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 36, \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 9, \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ = 6 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}.$$

Vậy:

$$\begin{aligned}
\bullet \vec{a}(2\vec{a} - \vec{b}) &= 2\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 36 - 9\sqrt{2} = 72 - 9\sqrt{2} \\
\bullet (3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b}) &= -6\vec{a}^2 + 12\vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = -6 \cdot 36 + 12 \cdot 9 - 9\sqrt{2} = -108 - 9\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Câu 39. Cho $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $|2\vec{a} + \vec{b}|$

Lời giải

$$\begin{aligned}
- |\vec{a} - 3\vec{b}|^2 &= \vec{a}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{|\vec{a} - 3\vec{b}|^2 - \vec{a}^2 - 9\vec{b}^2}{6} = \frac{3^2 - 3^2 - 9 \cdot 2}{6} = -3 \\
- |2\vec{a} + \vec{b}|^2 &= 4\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3^2 + 2 + 4 \cdot (-3) = 26 \Rightarrow |2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{26}
\end{aligned}$$

Câu 40. Cho hai vector đơn vị \vec{a}, \vec{b} thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $|\vec{a} + \vec{b}|$

Lời giải

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \Rightarrow (2\vec{a} - \vec{b})^2 = 3 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 3 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3-4-1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Có } (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng

Phương pháp:

- Biến đổi từ biểu thức về này sang về kia.
- Chứng minh hai biểu thức cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Sử dụng các tính chất của phép toán vector, tính chất của tích vô hướng.
- Tách vector, biến đổi về các tích vô hướng khác.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 41. Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, chứng minh rằng: $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

$$\text{Vậy } (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

Nhận xét: Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2; \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2.$$

Câu 42. Cho hình thoi $ABCD$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = 0$

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$. Khi đó, ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

Câu 43. Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB . Với mỗi điểm M , chứng minh rằng $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}$.

Lời giải

$$\text{Cách 1: } \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}.$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 2: } \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 \\ &= \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{MO}^2 - 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}. \end{aligned}$$

Câu 44. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

$$\text{a) } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$$

$$\text{b) } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2).$$

Lời giải

$$\text{a) Vì } I \text{ là trung điểm } AB \text{ nên } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{OI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{OI} \cdot \vec{0} = 0$$

$$\text{b) Vì } I \text{ là trung điểm } AB \text{ nên } 2\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}).$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}) \cdot (-\overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2) \end{aligned}$$

Câu 45. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Lời giải

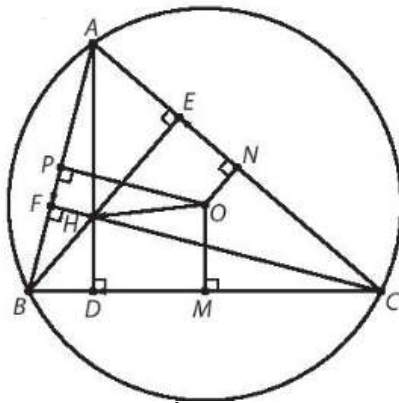
Ta có:

$$\begin{aligned}
MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\
&= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\
&= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}^2 \\
&= 3\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \\
&= 3\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0} + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \\
&\quad (\text{do } G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC) \\
&= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \\
&= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \quad (\text{đpcm}).
\end{aligned}$$

Câu 46. Cho tam giác ABC không cân. Gọi D, E, F theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C ; gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

Lời giải

Gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Khi đó D, E, F tương ứng là hình chiếu vuông góc của H trên BC, CA, AB và M, N, P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của O trên BC, CA, AB .



Theo định lí chiếu ta có:

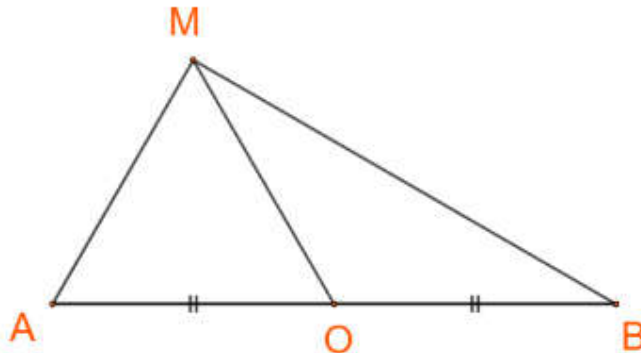
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OH} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB} \\
\overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OH} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OC} \\
\overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OH} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OA}.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Câu 47. Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm và cho điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$

Lời giải



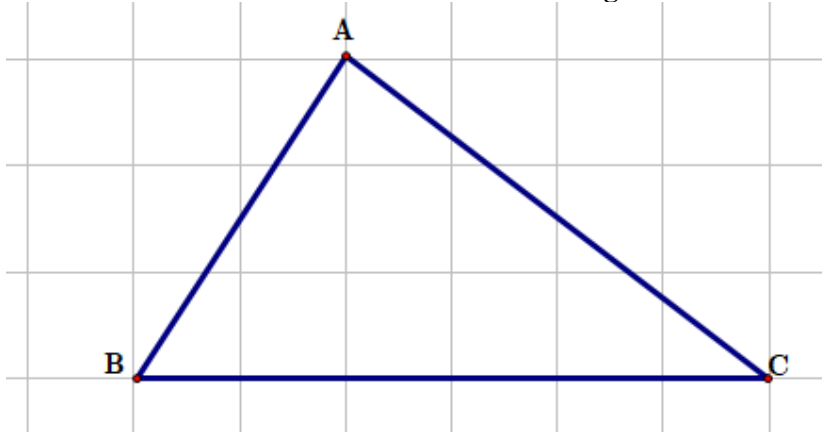
Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MA} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 48. Cho tam giác ABC . Chứng minh:

$$AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

Lời giải



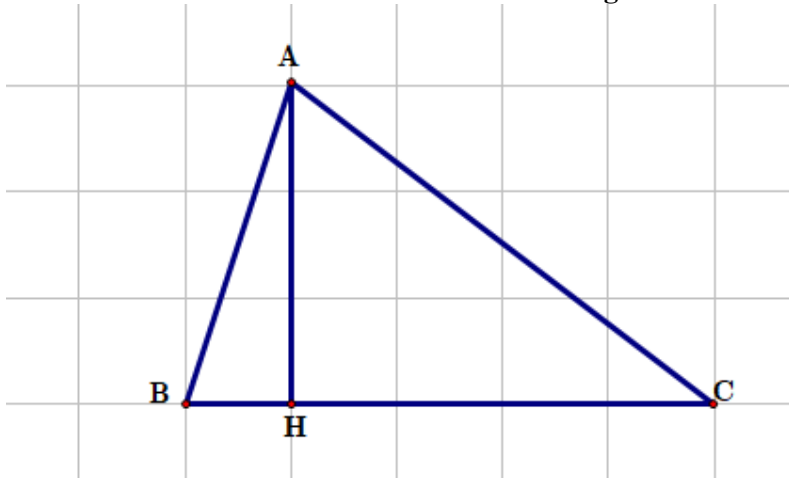
$$\text{Ta có } AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = AB^2 - AB^2 = 0 \quad (\text{đpcm})$$

Câu 49. Cho tam giác nhọn ABC , kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \quad (\text{đpcm})$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0 \quad (\text{đpcm})$

Câu 50. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0 \end{aligned}$$

Câu 51. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác. Với mỗi điểm M , chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \end{aligned}$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

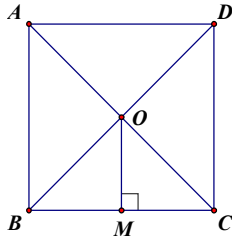
BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 52. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh $AC = a\sqrt{2}$, gọi O là giao điểm của AC và BD .

a). Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a .

b). Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$

Lời giải



a).

Do $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} \Leftrightarrow AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Leftrightarrow AB = a$.

Theo định nghĩa có: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AD \cdot AC \cdot \cos \widehat{CAD} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2$.

b).

$$\bullet \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2} \quad (1)$$

$$\bullet 2(OC^2 - OM^2) = 2MC^2 = \frac{BC^2}{2} = \frac{a^2}{2} \quad (2)$$

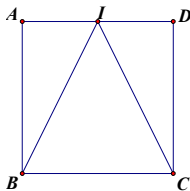
Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$

Câu 53. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.

a). Tính $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$

b). Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

Lời giải



a).

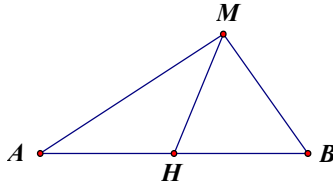
$$\begin{aligned} \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} &= \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{4} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{4} (2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) (2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{4} [(2\overrightarrow{BA})^2 - \overrightarrow{BC}^2] \\ &= \frac{1}{4} (4BA^2 - BC^2) = \frac{1}{4} \cdot 3AB^2 = \frac{9a^2}{4} \end{aligned}$$

b). Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DC} \quad (\text{do } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{DC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{DC} \\
 &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} \\
 &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} \quad (\text{Do } \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0)
 \end{aligned}$$

Câu 54. Cho H là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$
Lời giải



$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB}) = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \cdot (\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{HA}) \\
 &= \overrightarrow{MH}^2 - \overrightarrow{HA}^2 = HM^2 - HA^2 \quad (\text{Do } H \text{ trung điểm của } AB \text{ nên có } \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{HB} = -\overrightarrow{HA})
 \end{aligned}$$

Câu 55. Chứng minh rằng với bốn điểm bất kì A, B, C, D ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad (\text{hệ thức Ô - le}).$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\
 &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} \\
 &= (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) \\
 &= \vec{0}
 \end{aligned}$$

Câu 56. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\text{a). } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

$$\text{b). } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Lời giải

a).

$$\begin{aligned}
 BC^2 &= \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\
 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\text{b). } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos A$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \quad (2)$$

Chú ý: Các công thức (1) và (2) thường xuyên được sử dụng trong khi giải các bài tập khác. Đặc biệt, (2) được gọi là định lý hàm số cosin, trong chương sau ta sẽ đề cập nhiều đến định lý này.

Câu 57. Cho tam giác ABC có I trung điểm của BC . Chứng minh:

$$\text{a). } AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\text{b). } AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH} \quad (\text{Với } H \text{ là hình chiếu của } A \text{ xuống } BC).$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a). Ta có: } AB^2 + AC^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (\overline{AI} + \overline{IB})^2 + (\overline{AI} + \overline{IC})^2 \\ &= (\overline{AI} + \overline{IB})^2 + (\overline{AI} - \overline{IB})^2 \quad (\text{I trung điểm của BC} \Rightarrow \overline{IC} = -\overline{IB}) \\ &= 2AI^2 + 2BI^2 = 2AI^2 + 2 \cdot \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b). } AB^2 - AC^2 &= \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = (\overline{AB} - \overline{AC})(\overline{AB} + \overline{AC}) = \overline{CB} \cdot 2\overline{AI} = 2\overline{CB} \cdot \overline{HI} \\ &= 2\overline{BC} \cdot \overline{IH} \end{aligned}$$

Câu 58. Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Chứng minh rằng

$$\text{a). } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2$$

$$\text{b). } AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$$

Lời giải

a). Cách 1:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{AC} &= \frac{(\overline{AB} + \overline{AC})^2 - (\overline{AB} - \overline{AC})^2}{4} = \frac{(2\overline{AM})^2 - \overline{CB}^2}{4} \\ &= \frac{4AM^2 - BC^2}{4} = AM^2 - \frac{BC^2}{4} \end{aligned}$$

Cách 2: Gọi I là trung điểm BC

Ta có: $\overline{AB} = \overline{AI} + \overline{IB}$ và $\overline{AC} = \overline{AI} + \overline{IC} = \overline{AI} - \overline{IB}$

$$\Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{AB} = AI^2 - IB^2 = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$$

$$\text{b). } \overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AM^2 &= \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}) \\ &= \frac{1}{4}[2(AB^2 + AC^2) - (AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC})] \\ &= \frac{1}{4}[2(AB^2 + AC^2) - (\overline{AB} - \overline{AC})^2] \\ &= \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Đây chính là công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác, sẽ được đề cập nhiều ở phần sau.

Câu 59. Cho tam giác ABC , biết $AB = c, BC = a, AC = b$. Có trọng tâm G . Chứng minh rằng

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (\text{hệ thức Lep - nit}).$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC})^2 = 0$$

$$\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2(\overline{GA} \cdot \overline{GB} + \overline{GB} \cdot \overline{GC} + \overline{GC} \cdot \overline{GA}) = 0$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) - (GA^2 + GB^2 - 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}) \\ &\quad - (GB^2 + GC^2 - 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}) - (GC^2 + GA^2 - 2\overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}) = 0 \\ &\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA})^2 \\ &\Rightarrow 3(GA^2 + GB^2 + GC^2) = AB^2 + BC^2 + CA^2 \\ &\Rightarrow GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Câu 60. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \\ &= 3MG^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \end{aligned}$$

Nhận xét:

- a). Điểm có tổng bình phương các khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tam giác nhỏ nhất chính là trọng tâm của tam giác.
b). Nếu tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ thì:

$$3(R^2 - OG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 \text{ (Với } M \equiv O \text{)}.$$

Câu 61. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh với điểm M bất kỳ ta luôn có:

$$MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

Lời giải

Theo tính chất trọng tâm, ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

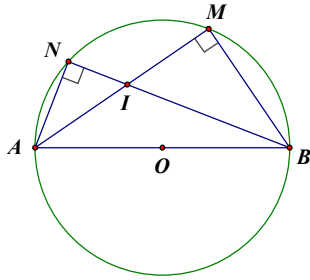
$$\begin{aligned} &\Rightarrow 9\overrightarrow{MG}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 \\ &\Leftrightarrow 9MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} \\ &\Leftrightarrow 9MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + (MA^2 + MB^2 - AB^2) + (MB^2 + MC^2 - BC^2) \\ &\quad + (MA^2 + MC^2 - AC^2) \\ &\Leftrightarrow 9MG^2 = 3(MA^2 + MB^2 + MC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2) \\ &\Leftrightarrow MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2) \end{aligned}$$

Câu 62. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$

b). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = 4R^2$

Lời giải



Vì $BM \perp AI$ nên \overrightarrow{AM} là hình chiếu của vec tơ \overrightarrow{AB} trên đường thẳng AI. Vậy ta có:
 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$

Chứng minh tương tự $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$

$$\begin{aligned} \text{b). Ta có: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IB} \\ &= \overrightarrow{AB} (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4R^2 \end{aligned}$$

Câu 63. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và M là một điểm tùy ý. Chứng minh:

a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

b). $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$

Lời giải

a). Vì AC là đường kính, ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = MO^2 - R^2 \quad (\text{do } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}) \end{aligned}$$

Tương tự: $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = MO^2 - R^2$

Vậy $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

b). $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$

Câu 64. Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R .

a). Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ khi và chỉ khi M thuộc (O) .

b). Chứng minh với mọi điểm M :

$$AM^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$$

Lời giải

a). Vì tam giác ABC đều nên O cũng là trọng tâm của tam giác, do đó ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{MC}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = 3\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\vec{0}})$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2 + 3R^2$$

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2 \Leftrightarrow 3MO^2 + 3R^2 = 6R^2 \Leftrightarrow MO^2 = R^2 \Leftrightarrow MO = R \Leftrightarrow M \text{ thuộc đường tròn } (O).$$

b). $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 - 3\overrightarrow{MC}^2$

$$\begin{aligned}
 &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 - 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\
 &= (\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2) + 2(\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2) - 3(\overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}^2) \\
 &= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{OC}) \\
 &= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{OM} - 3\overrightarrow{MC}) \\
 &= 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) \quad (\text{đpcm}).
 \end{aligned}$$

Câu 65. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD . Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= AC^2 + BD^2 + 4IJ^2 \\
 \Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= AC^2 + BD^2 + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})^2 \\
 \Leftrightarrow (AD^2 - AC^2) - (BD^2 - BC^2) &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \\
 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \cdot 2\overrightarrow{AB} &= 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \quad (\text{đúng}).
 \end{aligned}$$

Câu 66. Cho tam giác ABC , biết $AB = c, BC = a, CA = b$, các đường trung tuyến tương ứng AA', BB', CC' . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng với mọi M bất kì, ta có $2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 VT &= 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA'}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\
 &= 2(\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{MG}) + \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GA'} \\
 &= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA'} + 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + 2\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}
 \end{aligned}$$

Vì G là trọng tâm nên $2\overrightarrow{GA'} = -\overrightarrow{GA}$

$$\text{Vậy } VT = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{MG} \left(\underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}}_0 \right) - \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC}$$

Mà:

$$\overrightarrow{GA}^2 = \left(\frac{2}{3} \overrightarrow{AA'} \right)^2 = \frac{4}{9} AA'^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9}$$

$$\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{GB^2 + GC^2 - BC^2}{2} = \frac{\frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{9} + \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{9} - a^2}{2}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{18}$$

$$\Rightarrow VT = 3MG^2 - \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{9} + \frac{b^2 + c^2 - 5a^2}{18} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$$

Câu 67. Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm, M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng

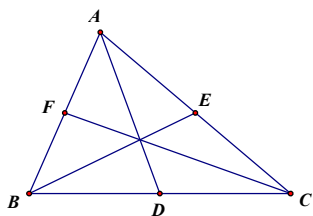
$$\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}^2$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}) \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{4} [\overrightarrow{BH} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{CH} (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA})] \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} (\overrightarrow{BH} - \overrightarrow{CH}) = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}^2 \end{aligned}$$

Câu 68. Cho tam giác ABC , có AD, BE, CF lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

Lời giải



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} &= \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{BC} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CA} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{2} \left[\underbrace{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB})}_0 + \underbrace{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB})}_0 + \underbrace{(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC})}_0 \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

Dạng 3. Tính khoảng cách giữa hai điểm, chứng minh đẳng thức độ dài

Phương pháp: Sử dụng tính chất:

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$, do đó $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

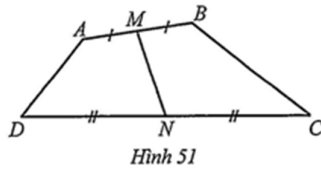
Câu 69. (Định lý cosin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có;
 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Suy ra: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Câu 70. Cho tứ giác $ABCD$ có M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD (Hình 51). Biết $AD = 2, BC = 3, AD \perp BC$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .



Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$.

Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}).$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } MN^2 &= \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + 0) = \frac{1}{4}(2^2 + 3^2) = \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } MN = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Câu 71. Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB . Với mỗi điểm M , chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + OA^2 + OB^2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 \\ &= \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{MO}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= 2MO^2 + OA^2 + OB^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{0} \\ &= 2MO^2 + OA^2 + OB^2. \end{aligned}$$

Câu 72. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (AB \cdot AC \cdot \cos A)^2}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 (1 - \cos^2 A)}$$

$$\text{Mà } 1 - \cos^2 A = \sin^2 A$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 \cdot \sin^2 A}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \quad (0^\circ < A < 180^\circ \text{ nên } \sin A > 0)$$

$$\text{Do đó } A = S_{ABC} \text{ hay } S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{AB^2 \cdot AC^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \cdot (\text{đpcm})$$

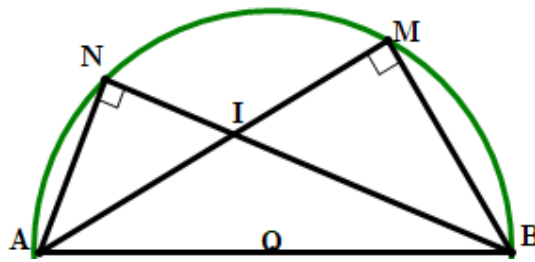
Câu 73. Cho nửa đường tròn với đường kính $AB = 2R$. Gọi M và N là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại một điểm I .

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$.

b) Tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$ theo R .

Lời giải

a) Do M thuộc nửa đường tròn với đường kính AB nên $\widehat{AMB} = 90^\circ$.



Suy ra $AM = AB \cdot \cos \widehat{BAM}$. Từ đó, để ý rằng $\widehat{BAM} = (\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AB})$, ta có

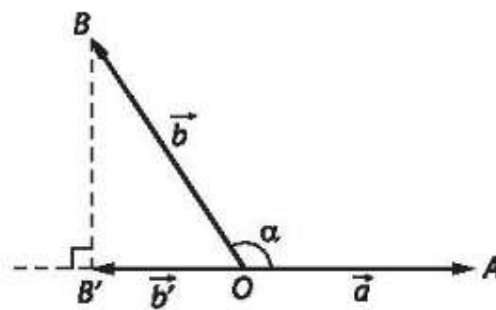
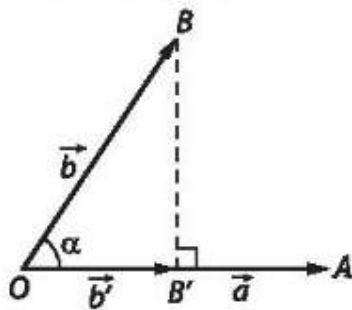
$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{AI}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AM}) = AI \cdot AM = AI \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$$

b) Tương tự như phần a), ta cũng được $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2 \end{aligned}$$

Nhận xét. Một cách khái quát, ta chứng minh được $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b'}$, trong đó $\vec{b'}$ là hình chiếu vuông góc của vectơ \vec{b} trên giá của vectơ \vec{a} . Kết quả này được gọi là định lý chiếu.



Câu 74. Cho tam giác đều ABC có độ dài các cạnh bằng 1.

a) Gọi M là trung điểm của BC . Tính tích vô hướng của các cặp vectơ \overrightarrow{MA} và \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{MA} và \overrightarrow{AC} .

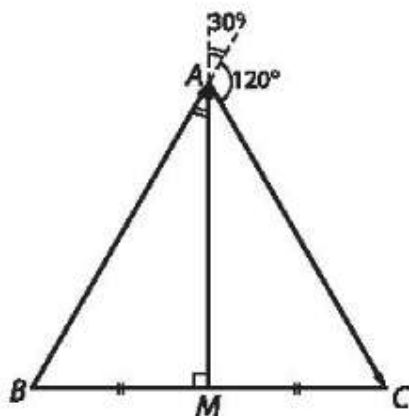
b) Gọi N là điểm đối xứng với B qua C . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$.

c) Lấy điểm P thuộc đoạn AN sao cho $AP = 3PN$. Hãy biểu thị các vectơ \overrightarrow{AP} , \overrightarrow{MP} theo hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} . Tính độ dài đoạn MP .

Lời giải

a) Do tam giác ABC là tam giác đều với độ dài các cạnh bằng 1, M là trung điểm BC , nên

$$MA = \frac{\sqrt{3}}{2},$$



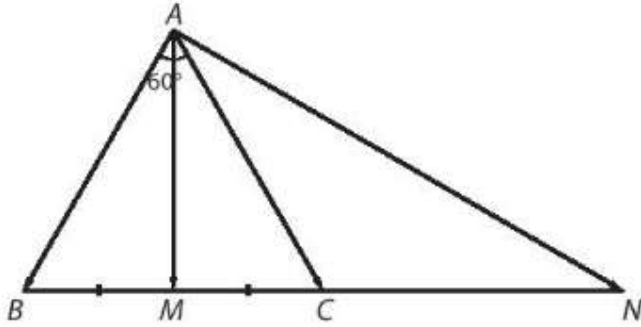
$$(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{BA}) = 30^\circ, (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{AC}) = 120^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BA} = |\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{BA}) = \frac{3}{2}, \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

b) Do tam giác ABC đều, nên $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$. (1)

Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. (2)

Do N đối xứng với B qua C , nên C là trung điểm của BN .



Suy ra $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. (3)

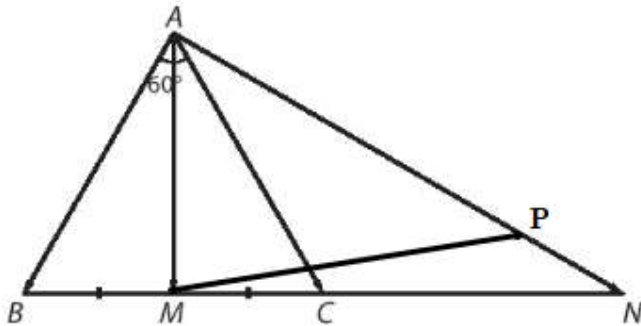
Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{3}{4}.$$

c) Do P thuộc đoạn AN thỏa mãn $AP = 3PN$ nên $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

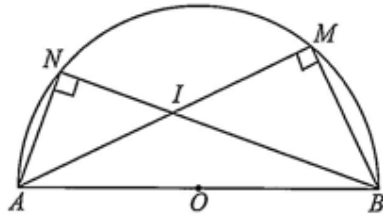


$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right) - \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AC} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}.$$

$$\text{Từ đó } MP^2 = \overrightarrow{MP}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \frac{25}{16}\overrightarrow{AB}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} = 1 + \frac{25}{16} - \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{21}{16}$$

$$\text{Suy ra } MP = \frac{\sqrt{21}}{4}.$$

Câu 75. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi M và N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho AM và BN cắt nhau tại I như Hình 5.



Hình 5

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$.

b) Tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$ theo R .

Lời giải

a) AB là đường kính nên $\widehat{AMB} = \widehat{ANB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).
 $AM \perp MB$ và $AN \perp NB$.

Ta có: $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BM}$

Mà $\overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BM}$ (do $AM \perp BM$) nên $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Vậy $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Tương tự, ta có: $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$.

b) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \cdot (-\overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = 4R^2$

Câu 76. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Các điểm M, N lần lượt thuộc các tia BC và CA thỏa mãn

$BM = \frac{1}{3}BC, CN = \frac{5}{4}CA$. Tính:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}$

b) MN .

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}) = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} \right)$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \cdot \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}$

$= a^2 \cos 120^\circ + \frac{5}{4}a^2 \cos 120^\circ + \frac{1}{3}a^2 + \frac{5}{12}a^2 \cos 120^\circ$

$= -a^2$.

b) $MN^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN})^2 = \left(\frac{-1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} \right)^2 = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA} \right)^2$

$= \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cdot \cos 120^\circ + \left(\frac{5}{4}\overrightarrow{CA} \right)^2 = \frac{4}{9}a^2 - \frac{5}{6}a^2 + \frac{25}{16}a^2 = \frac{169}{144}a^2$. Vậy

$MN = \frac{13}{12}a$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 77. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Cho điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính độ dài AM .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 - \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

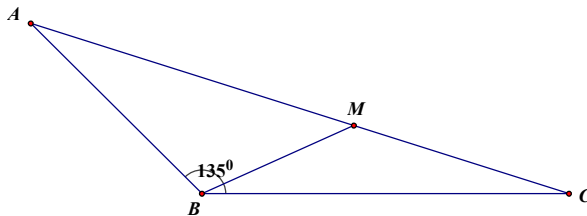
$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{9} \cdot 2^2 + \frac{4}{9} \cdot 3^2 - \frac{4}{9} \cdot 3 = \frac{28}{9} \Rightarrow AM = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

Câu 78. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{2}$, $BC = 5a$, $\widehat{ABC} = 135^\circ$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho $AM = \frac{3}{2}MC$

a). Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

b). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ và tính BM.

Lời giải



a). $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos \widehat{ABC} = a\sqrt{2} \cdot 5a \cdot \cos 135^\circ = -5a^2$

b). Do M thuộc AC sao cho $AM = \frac{3}{2}MC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} \quad (*). \text{ Vì } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ là hai vectơ không cùng}$$

phương nên biểu thức (*) duy nhất $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\right)^2 \Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25}BA^2 + \frac{9}{25}BC^2 + 2 \cdot \frac{2}{5}\overrightarrow{BA} \cdot \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25}BA^2 + \frac{9}{25}BC^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow BM^2 = \frac{4}{25} \cdot 2a^2 + \frac{9}{25} \cdot 25a^2 + \frac{12}{25} \cdot (-5a^2) = \frac{173}{25}a^2$$

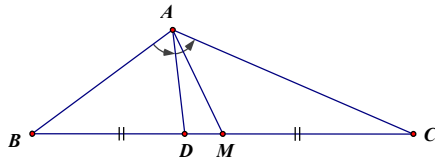
$$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{173}}{5}$$

Câu 79. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài trung tuyến AM.

b). Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC. Phân tích \overrightarrow{AD} theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD.

Lời giải



a). Có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos A = 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = -3$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AM}^2 = \left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \right]^2$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{1}{4}(2^2 + 3^2 + 2 \cdot (-3)) = \frac{7}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

b).

Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow DB = \frac{2}{3}DC$, do $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ là hai vector

ngược hướng nên có $\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow \frac{5}{3}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \right)^2 \Leftrightarrow AD^2 = \frac{9}{25}AB^2 + \frac{4}{25}AC^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{9}{25} \cdot 2^2 + \frac{4}{25} \cdot 3^2 + \frac{12}{25} \cdot (-3)$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{36}{25}$$

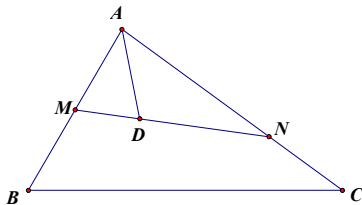
$$\Leftrightarrow AD = \frac{6}{5}.$$

Câu 80. Cho tam giác ABC có $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{7}$, $AC = 3a$. Gọi M trung điểm của AB , N thuộc AC sao cho $AN = 2NC$ và D thuộc MN sao cho $2DM = DN$

a). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

b). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn AD theo a .

Lời giải



Do $AN = 2NC \Rightarrow AN = \frac{2}{3}AC \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\bullet \quad 2DM = DN \Rightarrow 2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DN} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = -(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD})$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{9} \end{cases}$$

b). Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{(2a)^2 + (3a)^2 - (a\sqrt{7})^2}{2} = 3a^2$$

$$\text{Theo câu a) thì } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{9}AB^2 + \frac{4}{9}AC^2 + \frac{4}{27}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{1}{9}(2a)^2 + \frac{4}{9}(3a)^2 + \frac{4}{27} \cdot 3a^2$$

$$\Leftrightarrow AD^2 = \frac{44}{9}a^2 \Rightarrow AD = \frac{2a\sqrt{11}}{3}$$

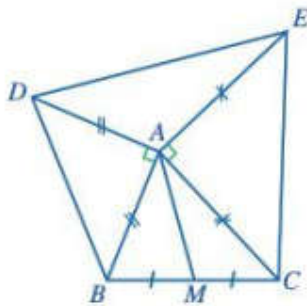
Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp: Sử dụng các tính chất:

Hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vector \vec{u} song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vector \vec{v} song song hoặc trùng với đường thẳng b .

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 81. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, \hat{A} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE



a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$;

b) Biểu diễn \overrightarrow{AM} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $AM \perp DE$.

Lời giải

a) Do $\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAE} = 150^\circ, \widehat{CAD} = \widehat{CAB} + \widehat{BAD} = 150^\circ$ nên

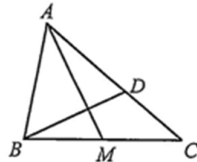
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \cdot AE \cdot \cos \widehat{BAE} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

$$= AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD} = 4 \cdot 3 \cdot \cos 150^\circ = 12 \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = -6\sqrt{3}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) \\
&\text{Vì } AB \perp AD, AC \perp AE \text{ nên } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\
&\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(-6\sqrt{3} + 0 - 0 + 6\sqrt{3}) = 0. \Rightarrow AM \perp DE
\end{aligned}$$

Câu 82. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm D thuộc cạnh AC thỏa mãn $AD = \frac{7}{12}AC$ (Hình 52).



Hình 52

Chứng minh $AM \perp BD$.

Lời giải

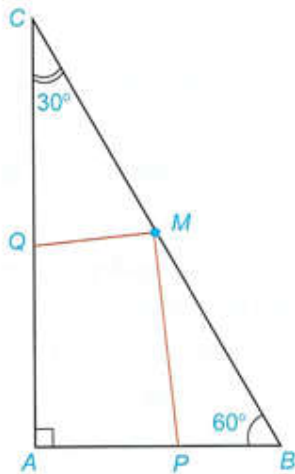
$$\begin{aligned}
&\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \\
&\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \left(\frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{12} \cdot 3^2 - 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(7 - 4 - 3) = 0.
\end{aligned}$$

Vậy $AM \perp BD$

Câu 83. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm P, Q . Chứng minh rằng $\widehat{PMQ} = 90^\circ$ khi và chỉ khi $BP + \sqrt{3}CQ = BC$.

Lời giải

Đặt $MB = MC = a$.



$$\begin{aligned}
&\text{Ta có } \widehat{PMQ} = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = 0 \\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP}) \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CQ}) = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = 0. \quad (1)$$

Mặt khác,

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = MB \cdot MC \cdot \cos 180^\circ = -a^2;$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CQ} = MB \cdot CQ \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot CQ;$$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{MC} = BP \cdot MC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} a \cdot BP;$$

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CQ} = BP \cdot CQ \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow -a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot CQ + \frac{1}{2} a \cdot BP = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} CQ + \frac{1}{2} BP - a = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} CQ + BP = 2a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} CQ + BP = BC$$

Ta có điều phải chứng minh.

Câu 84. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1, BC=\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AD .

a) Chứng minh rằng các đường thẳng AC và BM vuông góc với nhau.

b) Gọi H là giao điểm của AC, BM . Gọi N là trung điểm của AH và P là trung điểm của CD .

Chứng minh rằng tam giác NBP là một tam giác vuông.

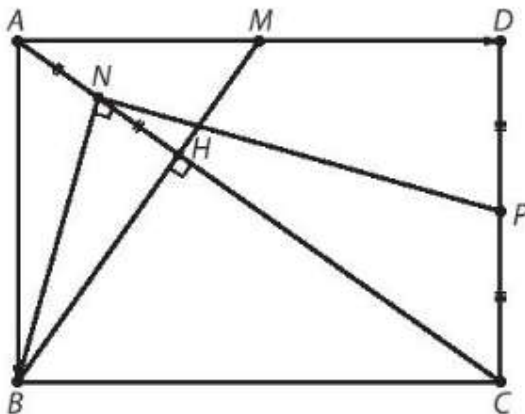
Lời giải

a) Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}$ với $|\vec{b}|=1, |\vec{d}|=\sqrt{2}$ và $\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$. Khi đó $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{d}$. Hơn nữa, do M là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \vec{d}$ và do đó $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \vec{d} - \vec{b}$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BM} = (\vec{b} + \vec{d}) \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{d} - \vec{b} \right) = -\vec{b}^2 + \frac{1}{2} \vec{d}^2 = -1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 0$$

Từ đó $AC \perp BM$.

b) Theo định lý Pythagore ta có $AC = \sqrt{3}$



$$\text{và } AH = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Suy ra } \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}.$$

Do N là trung điểm của AH nên

$$\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} (\vec{b} + \vec{d}) \right] + \vec{b} = \frac{5}{6} \vec{b} - \frac{1}{6} \vec{d} \quad (1)$$

Do P là trung điểm của CD và N là trung điểm của HA , nên theo kết quả bài 4. 12, Toán 10 tập một, ta có

$$\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{2}\left[\vec{d} + \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{d})\right] = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{d} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{NP} = \left(\frac{5}{6}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{d}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{5}{6}\vec{d}\right) = \frac{5}{18}\vec{b}^2 - \frac{5}{36}\vec{d}^2 = \frac{5}{18} \cdot 1 - \frac{5}{36} \cdot 2 = 0$$

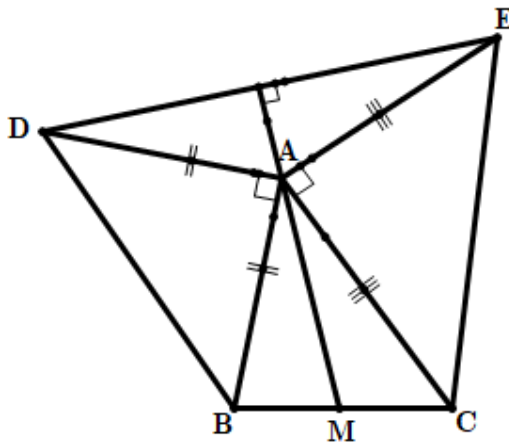
Suy ra $NB \perp NP$ và do đó tam giác NBP vuông tại N .

Câu 85. Cho tam giác ABC có $\hat{A} < 90^\circ$. Dựng ra phía ngoài tam giác hai tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm BC, BD, CE . Chứng minh rằng:

- AM vuông góc với DE ;
- BE vuông góc với CD ;
- Tam giác MNP là một tam giác vuông cân.

Lời giải

Do $\hat{A} < 90^\circ$ nên $\widehat{BAE} = 90^\circ + \hat{A} = \widehat{CAD}$. (1)



a) Do M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$. (2)

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$.

Từ đó và (1), (2) suy ra

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \quad (\text{do } AB \perp AD, AC \perp AE) \\ &= AB \cdot AE \cdot \cos \widehat{BAE} - AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD} = 0 \quad (\text{do } AB = AD, AE = AC \text{ và (1)}) \end{aligned}$$

b) Từ giả thiết suy ra $\widehat{DAE} = 360^\circ - \widehat{DAB} - \widehat{BAC} - \widehat{CAE} = 180^\circ - \hat{A}$. (3)

Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$. Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} + AE \cdot AD \cdot \cos \widehat{DAE} = 0 \quad (\text{do } AB = AD, AC = AE \text{ và (3)}). \end{aligned}$$

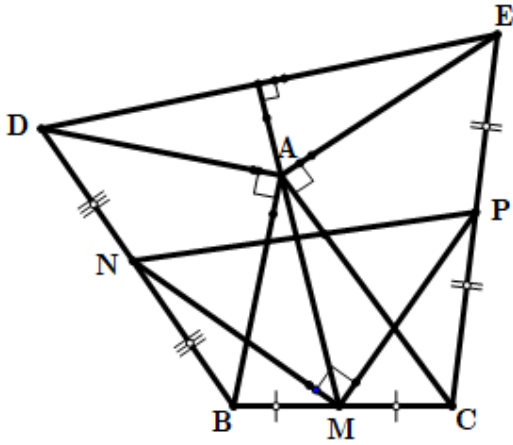
Từ đó $BE \perp CD$.

Hơn nữa

$$\begin{aligned} BE^2 &= \overrightarrow{BE}^2 = (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB})^2 = AE^2 + AB^2 - 2AE \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAE} \\ &= AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos \widehat{CAD} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{CD}^2 = CD^2. \end{aligned}$$

Suy ra $BE = CD$.

c) Do M là trung điểm của BC và N là trung điểm của BD , nên MN là đường trung bình của tam giác BCD .



Do đó $MN \parallel CD, MN = \frac{1}{2}CD$. (4)

Cũng vậy, MP là đường trung bình của tam giác BCE.

Do đó $MP \parallel BE, MP = \frac{1}{2}BE$. (5)

Từ (4), (5) và kết quả của phần b) suy ra $MN = MP$ và $MN \perp MP$, hay tam giác MNP vuông cân tại M .

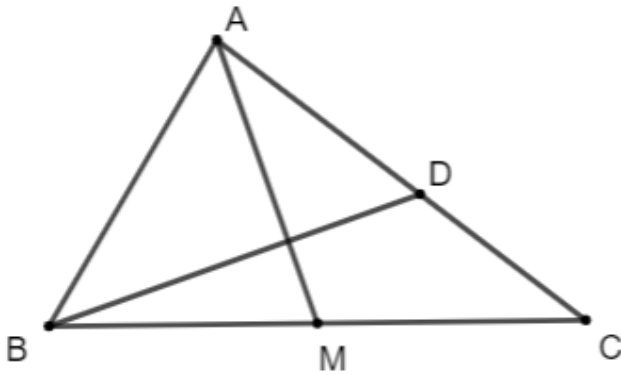
Câu 86. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

c) Chứng minh $AM \perp BD$.

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 3$.

b) + Do M là trung điểm của BC nên với điểm A ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$+ \text{ Ta có: } \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = (-\overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AD}. \text{ Mà } \overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{BD} = (-\overrightarrow{AB}) + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{-1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{7}{24} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{7}{24} \overrightarrow{AC}^2 \\ &= \frac{-1}{2} \cdot AB^2 + \frac{7}{24} \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{24} \cdot AC^2 = \frac{-1}{2} \cdot 2^2 + \frac{7}{24} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{7}{24} \cdot 3^2 = 0 \end{aligned}$$

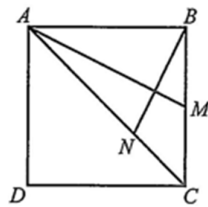
$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

Vậy $AM \perp BD$.

Câu 87. Cho hình vuông $ABCD$, M là trung điểm của BC , N là điểm nằm giữa hai điểm A và C . Đặt $x = \frac{AN}{AC}$. Tìm x thoả mãn $AM \perp BN$.

Lời giải

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.$$



Hình 70

$$\overrightarrow{AN} = x \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA} = x(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BN} = x \overrightarrow{BC} + (1-x) \overrightarrow{BA}.$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \right) \cdot [x \overrightarrow{BC} + (1-x) \overrightarrow{BA}]$$

$$= \left[\frac{x}{2} - (1-x) \right] BC^2 = \left(\frac{3x}{2} - 1 \right) BC^2$$

$$AM \perp BN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3x}{2} - 1 \right) BC^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}.$$

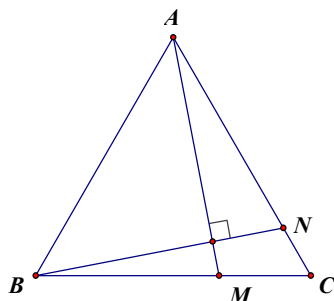
BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 88. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M, N là các điểm sao cho $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$, $5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$.

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$

b). Chứng minh AM vuông góc với BN .

Lời giải



a).

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$
- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = CB \cdot CA \cdot \cos \widehat{BCA} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

b).

- $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) = 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

- $5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BA}) = 4\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$

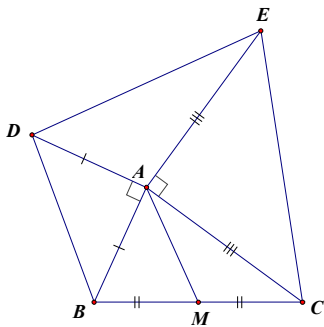
Ta có: $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{8}{15}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{4}{15}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

$$= -\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{8}{15}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}^2$$

$$= -\frac{2}{5} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{8}{15} \cdot a^2 - \frac{1}{3}a^2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BN} \Leftrightarrow AM \text{ vuông góc với } BN.$$

Câu 89. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Vẽ bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M trung điểm của đoạn BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với DE .

Lời giải



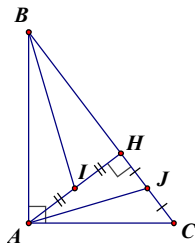
Ta chứng minh $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$. Thật vậy:

$$2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AE \cdot \cos(90^\circ + A) - AC \cdot AD \cdot \cos(90^\circ + A) = 0 \text{ (do } AB = AD, AE = AC \text{)}.$$

Câu 90. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và HC . Chứng minh $BI \perp AJ$

Lời giải



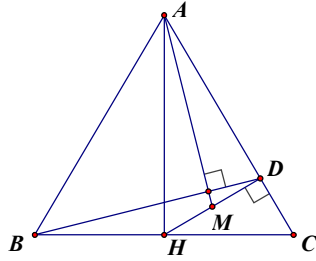
Ta có $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC})$; $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})$

$$\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}) \\
&= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{BH}) \\
&= \frac{1}{4}(-\overrightarrow{AH}^2 - \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}) = \frac{1}{4}(-AH^2 - HB \cdot HC \cdot \cos \widehat{BHC}) \\
&= \frac{1}{4}(-AH^2 + HB \cdot HC) = 0
\end{aligned}$$

Câu 91. Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của đoạn BC , D là hình chiếu vuông góc của H trên AC , M trung điểm của đoạn HD . Chứng minh AM vuông góc với DB .

Lời giải



Vì M trung điểm của HD , nên có $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$

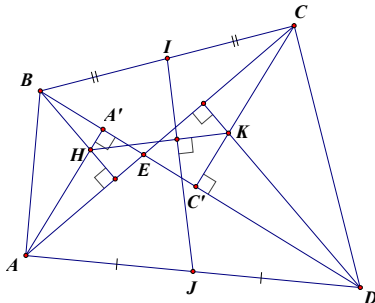
$$\begin{aligned}
\text{Ta có } 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HD}) = \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{HD}}_0 \\
&= \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HD}) \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HD} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BH} \\
&= \overrightarrow{HD}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}) = \overrightarrow{HD}(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}) = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\
&\Rightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BD}. \text{ Vậy } AM \text{ vuông góc với } BD.
\end{aligned}$$

Câu 92. Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao của hai đường chéo AC và BD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD và H, K là trực tâm của các tam giác ABE, CDE .

a). Chứng minh $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

b). Chứng minh $HK \perp IJ$

Lời giải



a). Hạ AA', CC' lần lượt vuông góc BD , ta có:

$$\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{A'C'} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$$

b) Tương tự ta cũng có: $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC}$

suy ra $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD}$

$$\text{Thành tử } \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}}{2} \right) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC}) = 0$$

Vậy $HK \perp IJ$

Câu 93. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M . Gọi P là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$

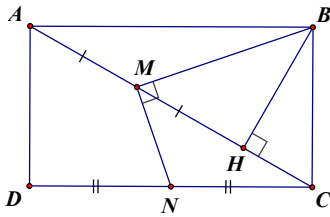
Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \underbrace{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC}}_0 - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } MP \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MB}$$

Câu 94. Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $BH \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và DC . Chứng minh $BM \perp MN$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}); \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC})$$

$$\text{Nên } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH})(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HC})$$

$$= \frac{1}{4} \left(\underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AD} + \underbrace{\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{HC}}_0 \right)$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = HA \cdot HC \cdot \cos \widehat{AHC} = HA \cdot HC \cdot \cos 180^\circ = -HA \cdot HC = -BH^2$$

$$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

$$\text{Từ đó suy ra } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MN} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{MN}.$$

Cách 2:

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NH}) = -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CH})$$

$$= -\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CH}\right)$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BH}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{BM} = \left[-\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CH}\right) \right] \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$= -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH}) + \frac{1}{8}(-\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CH})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BH})$$

$$= -\frac{1}{8} \left(\underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}}_0 + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 \right) + \frac{1}{8} \left(-\overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} + 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} + 2\underbrace{\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 \right)$$

$$= -\frac{1}{8}(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} - 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD}) \quad (*)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}}_0 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB^2$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BH} = BH^2$$

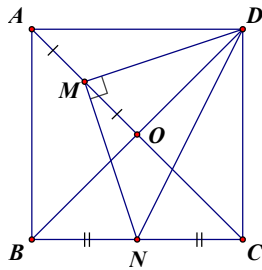
$$2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{CH} \cdot (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}) = 2\underbrace{\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BH}}_0 + 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HA}$$

$$= 2\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{HA} = 2CH \cdot AH = 2BH^2$$

$$\text{Do đó } (*) = -\frac{1}{8}(BH^2 - AB^2 + CD^2 + BH^2 - 2BH^2) = 0$$

Câu 95. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh rằng DMN là tam giác vuông cân.

Lời giải



Gọi $a > 0$ là độ dài cạnh hình vuông $ABCD$. Nên có $AC = a\sqrt{2}$, $CM = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Áp dụng định lí hàm số cosin cho các tam giác CMN và CDM:

$$\begin{aligned} \bullet \quad MN^2 &= CN^2 + CM^2 - 2CN \cdot CM \cdot \cos \widehat{MCN} \\ &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{10}}{4} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad MD^2 &= CD^2 + CM^2 - 2CD \cdot CM \cdot \cos \widehat{DCM} \\ &= a^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow MD = \frac{a\sqrt{10}}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad DN^2 = CD^2 + CN^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\text{Ta có } MN^2 + MD^2 = ND^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow DMN \text{ vuông tại M} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra DMN vuông cân tại M.

Cách 2:

Đặt $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$. Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ & $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} = -\frac{1}{4}(\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CD} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \vec{b} - \frac{3}{4}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{4}(3\vec{a} - \vec{b})$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{1}{16}(\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b}) = \frac{1}{16}(3\vec{a}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b}^2)$$

$$= \frac{1}{16}(3a^2 - 3b^2) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{MD} \quad (4).$$

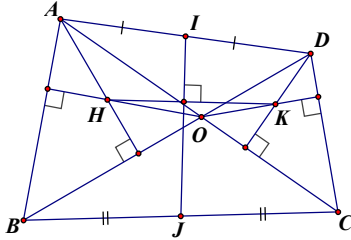
$$\bullet \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}(\vec{a} + 3\vec{b})^2 = \frac{1}{16}(\vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{b} + 9\vec{b}^2) = \frac{5a^2}{8} \quad (5)$$

$$\bullet \overrightarrow{MD}^2 = \frac{1}{16}(3\vec{a} - \vec{b})^2 = \frac{1}{16}(9\vec{a}^2 - 6\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2) = \frac{5a^2}{8} \quad (6)$$

Từ (4), (5), (6) suy ra DMN vuông cân tại M.

Câu 96. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh $HK \perp IJ$.

Lời giải



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} = \underbrace{\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}}_0 + 2\overrightarrow{IJ}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}}{2}$$

$$2\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{HK} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OH}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{OH}$$

Câu 97. Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy M, N, P lần lượt trên 3 cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x$. Tìm x để AM vuông góc với PN.

Lời giải

Chọn hệ vec tơ cơ sở $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{3a}\vec{b}$$

$$\text{Để } AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{x}{3a}\vec{b}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{c} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{c} - x\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a\vec{c}^2 - x\vec{b}\vec{c} + 2a\vec{b}\vec{c} - 2x\vec{b}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a\vec{c}^2 + (2a - x)\vec{b}\vec{c} - 2x\vec{b}^2 = 0$$

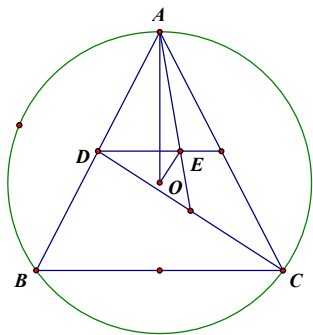
$$\Leftrightarrow a.9a^2 + (2a - x).a.a.\cos 60^\circ - 2x.9a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 \left(9a + a - \frac{x}{2} - 2x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 10a - \frac{5}{2}x = 0 \Leftrightarrow x = 4a$$

Câu 98. Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). D là trung điểm của AB, E là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh $OE \perp CD$

Lời giải



Ta có

$$\begin{aligned}
 - \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}) \\
 - \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC}\right] \\
 &= \frac{1}{6}(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \\
 \text{Do đó } \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{12}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC})(3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \\
 &= \frac{1}{12}(3OA^2 + OB^2 - 4OC^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}) \\
 &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \\
 &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \text{ tức } OE \perp CD
 \end{aligned}$$

Dạng 5. Bài toán thực tế

Trong Vật lý, tích vô hướng giúp tính công A sinh bởi một lực \vec{F} có độ dịch chuyển là vector \vec{d} .

Ta có công thức: $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 99. Tính công sinh bởi một lực \vec{F} có độ lớn 20 N kéo một vật dịch chuyển theo một vector \vec{d} có độ dài 50m và cho biết $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{d}) = 20 \cdot 50 \cdot \cos 60^\circ = 20 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} = 500 \text{ (J)}.$$

Câu 100. Tính công sinh bởi một lực \vec{F} có độ lớn 60 N kéo một vật dịch chuyển một vector \vec{d} có độ dài 200m. Cho biết $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$.

Lời giải

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos 60^\circ = 60 \cdot 200 \cdot \cos 60^\circ = 6000 \text{ (J)}.$$

Câu 101. Cho ba điểm M, N, P . Nếu một lực \vec{F} không đổi tác động lên một chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, thì các công sinh bởi lực \vec{F} trong hai trường hợp sau có mối quan hệ gì với nhau?

- Chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ M đến N rồi tiếp tục từ N đến P .
- Chất điểm chuyển động thẳng từ M đến P .

Lời giải

Do lực \vec{F} không đổi, tác động lên chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, nên công sinh bởi lực \vec{F} khi chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ M tới N rồi từ N tới

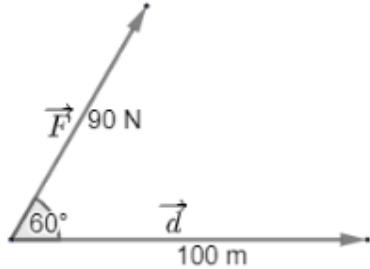
P bằng $A_1 = \vec{F} \cdot \vec{MN} + \vec{F} \cdot \vec{NP}$ (1) và công sinh bởi lực F khi chất điểm chuyển động thẳng từ M

tới P bằng $A_2 = \vec{F} \cdot \vec{MP}$ (2)

Từ (1), (2), để ý rằng $\vec{MP} = \vec{MN} + \vec{NP}$, suy ra $A_1 = A_2$.

Câu 102. Một người dùng một lực \vec{F} có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m . Biết lực hợp \vec{F} với hướng dịch chuyển là một góc 60° . Tính công sinh bởi lực \vec{F}

Lời giải



Công sinh bởi lực \vec{F} được tính bằng công thức

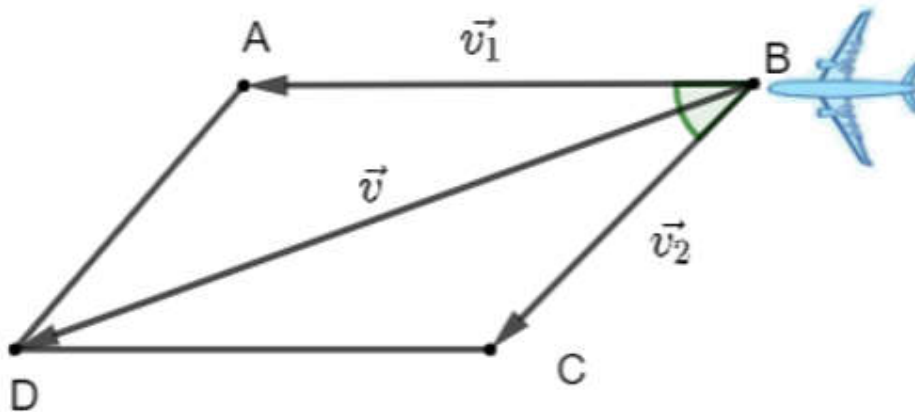
$$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{d}) = 90 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 4500 \text{ (J)}$$

Vậy công sinh bởi lực \vec{F} có độ lớn bằng 4500 (J)

Câu 103. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



Lời giải



Khi đó ta có: $ABCD$ là hình bình hành có $\widehat{ABC} = 45^\circ$.

Suy ra: $\widehat{DAB} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$; $AD = |\vec{v}_2| = 40$, $AB = |\vec{v}_1| = 700$.

Ta cần tính độ dài đoạn thẳng BD , đây chính là độ dài vector \vec{v} .

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABD , ta có:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos A$$

$$= 40^2 + 700^2 - 2 \cdot 40 \cdot 700 \cdot \cos 135^\circ \approx 531197,98$$

Suy ra $BD \approx 728,83(\text{km/h})$.

Vậy tốc độ mới của máy bay sau khi gặp gió thổi là 728,83km/h.

Câu 104. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 650 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 35 km/h . Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

Lời giải

Gọi \vec{v}_0 là vận tốc của máy bay khi không có gió, $|\vec{v}_0| = 650(\text{km/h})$;

\vec{v}_1 là vận tốc của gió, $|\vec{v}_1| = 35(\text{km/h})$; \vec{v}_2 là vận tốc của máy bay khi có gió.

Ta có: $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$. Vì $(\vec{v}_1, \vec{v}_0) = 45^\circ$ nên

$$\begin{aligned} \vec{v}_2^2 &= (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)^2 = \vec{v}_0^2 + \vec{v}_1^2 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2 + 2|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos 45^\circ \\ &= 650^2 + 35^2 + 2 \cdot 650 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 455898,36 \end{aligned}$$

Suy ra $|\vec{v}_2| \approx 675,2(\text{km/h})$.

Dạng 6. Tập hợp điểm

BÀI TẬP BỔ SUNG

Dạng 1: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (1) (A, B là hai điểm cố định).

- $k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.
- $k \neq 0$: Gọi I trung điểm của AB.

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$

+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp điểm M là điểm I.

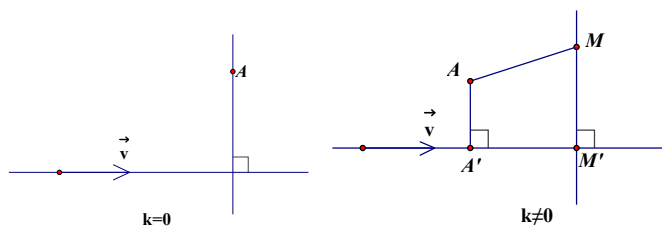
+ Nếu $k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}$: Tập hợp các điểm M là rỗng.

Dạng 2: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k$ (2) (A cố định, \vec{v} có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của \vec{v}

$k \neq 0$: Gọi $\overrightarrow{A'M'}$ là hình chiếu của \overrightarrow{AM} trên giá của vector \vec{v} ; ta có: (2) $\Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{v} = k$ (định lý hình chiếu). A' cố định $\Rightarrow M'$ cố định (M' nằm trên giá của \vec{v} định bởi $\overrightarrow{A'M'} = \frac{k}{v}$). Tập hợp các

điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vector \vec{v} tại M' .



Dạng 3: $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ (3) (A, B cố định, α, β là hằng số và $\alpha + \beta \neq 0$).

Gọi I là điểm thỏa $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$ là điểm cố định.

$$(3) \Leftrightarrow \alpha (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 + 2(\alpha\overline{IA} + \beta\overline{IB})\overline{MI} + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)MI^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính

$$\sqrt{\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}}.$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

– Cho hai điểm A, B cố định α, β là hằng số thỏa $\alpha + \beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha\overline{IA} + \beta\overline{IB} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha\overline{MA} + \beta\overline{MB} = (\alpha + \beta)\overline{MI}$.

– Cho ba điểm A, B, C cố định α, β, γ là hằng số thỏa $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha\overline{IA} + \beta\overline{IB} + \gamma\overline{IC} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha\overline{MA} + \beta\overline{MB} + \gamma\overline{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overline{MI}$.

Câu 105. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overline{AM} \cdot \overline{AB} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{AB} - \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow \overline{AB}(\overline{AM} - \overline{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{CM} = 0 \Leftrightarrow \overline{AB} \perp \overline{CM} \Leftrightarrow AB \perp CM$$

\Leftrightarrow Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua C vuông góc với AB.

Câu 106. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp điểm M thỏa:

a). $\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MA} \cdot \overline{MC} = 0$

b). $\overline{MB}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) = 0$

c). $(\overline{MA} + 3\overline{MB})(\overline{MA} + 2\overline{MB} + 3\overline{MC}) = 0$

d). $\overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MA} \cdot \overline{MC} + 9\overline{MB} \cdot \overline{MC} = 3\overline{MB}^2 + 4\overline{MC}^2$

Lời giải

a). Gọi I là trung điểm của đoạn BC ta có: $\overline{MB} + \overline{MC} = 2\overline{MI}$

$$\text{Do đó } \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MA} \cdot \overline{MC} = 0 \Leftrightarrow \overline{MA}(\overline{MB} + \overline{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overline{MA} \cdot 2\overline{MI} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{MA} \cdot \overline{MI} = 0 \Leftrightarrow \overline{MA} \perp \overline{MI} \Leftrightarrow MA \perp MI$$

\Leftrightarrow Tập hợp các điểm M là đường là đường tròn đường kính IA.

b). $\overline{MB}(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) = 0$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, nên có $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$$

\Leftrightarrow Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BG.

$$\text{c). } (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$$

Gọi điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow I$ là điểm cố định.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 4\overrightarrow{MI} + \underbrace{\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB}}_0 = 4\overrightarrow{MI}$$

$$\text{Gọi điểm J thỏa mãn } \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow J \text{ là điểm cố định.}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})$$

$$= 6\overrightarrow{MJ} + \left(\underbrace{\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC}}_0 \right) = 6\overrightarrow{MJ}$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MI}.6\overrightarrow{MJ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \perp \overrightarrow{MJ}$$

\Leftrightarrow Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ, với I, J xác định ở trên.

$$\text{d). } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MB}^2 + 4\overrightarrow{MC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}^2 = 4\overrightarrow{MB}^2 + 4\overrightarrow{MC}^2 - 8\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) + \overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}) = 4(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 4(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{ME}.2\overrightarrow{MF} = 4\overrightarrow{CB}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{CB}^2 \text{ (Với E, F lần lượt là trung điểm của BC, AB).}$$

Gọi K trung điểm của EF

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{CB}^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KF}) = \overrightarrow{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KE})(\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KE}) = \overrightarrow{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MK}^2 - \overrightarrow{KE}^2 = \overrightarrow{BC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MK}^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{KE}^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2$$

$$\text{Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm K, bán kính } R = \sqrt{\overrightarrow{BC}^2 + \frac{1}{16}\overrightarrow{AC}^2}$$

Câu 107. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn điều kiện sau: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow MA \text{ vuông góc với } BC.$$

Vì A, B, C cố định \Leftrightarrow tập hợp những điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

Câu 108. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}^2$

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = AB^2 \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2$$

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M và G trên BC, thì K cố định và hình chiếu của \overrightarrow{MG} trên BC là \overrightarrow{HK} , theo định lý hình chiếu ta có: $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BC}$, suy ra

$$(*) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BC} = AB^2, \text{ suy ra H cố định (H thuộc đường thẳng BC định bởi } \overrightarrow{HK} = \frac{AB^2}{3BC}). \text{ Vậy}$$

tập hợp những điểm M là đường thẳng vuông góc với BC tại H.

Câu 109. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = a, BC = 3a$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

Lời giải

$$2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 + 4MB^2 = MB^2 - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + MC^2$$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 + 4MB^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})^2 = BC^2 \quad (*)$$

$$\text{Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \text{I là điểm cố định và nằm giữa hai điểm A và B. Do}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow |\overrightarrow{AI}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow AI = \frac{2}{3}AB = \frac{2a}{3} \Rightarrow BI = \frac{a}{3}$$

$$(*) \Leftrightarrow 2MA^2 + 4MB^2 = BC^2 \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = BC^2 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 2IA^2 + 4IB^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}) = BC^2$$

$$\Rightarrow 6MI^2 = BC^2 - (2IA^2 + 4IB^2) = 9a^2 - \left[2 \cdot \left(\frac{2a}{3} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{a}{3} \right)^2 \right] = \frac{23a^2}{3}$$

$$\Rightarrow MI^2 = \frac{23a^2}{18} \Leftrightarrow MI = a\sqrt{\frac{23}{18}}$$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $R = a\sqrt{\frac{23}{18}}$.

Câu 110. Cho A, B, C, D là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0$

Lời giải

$$\text{Gọi I là trung điểm của đoạn AD ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI}$$

$$\text{Gọi J là điểm thỏa mãn hệ thức: } \overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Rightarrow J \text{ là điểm cố định.}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JA} + 2(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JC})$$

$$= 6\overrightarrow{MJ} + \underbrace{\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC}}_{\vec{0}} = 6\overrightarrow{MJ}$$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0 \Leftrightarrow 6\overrightarrow{MJ} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MI} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \text{MJ vuông góc với MI.}$$

Do I, J cố định nên tập hợp điểm M là đường tròn đường kính IJ.

Câu 111. Cho đoạn $AB = a > 0$ và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k$

Lời giải

Gọi O là trung điểm của đoạn AB.

$$\text{Ta có } MA^2 + MB^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = (\overline{MO} + \overline{OA})^2 + (\overline{MO} + \overline{OB})^2$$

$$= 2\overline{MO}^2 + \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + 2\overline{MO} \left(\underbrace{\overline{OA} + \overline{OB}}_0 \right) = 2MO^2 + OA^2$$

$$= 2MO^2 + \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Do } MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow 2MO^2 + \frac{a^2}{2} = k \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}$$

Nếu $\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}}$. Tập hợp điểm M là đường tròn tâm O bán kính

$$R = \sqrt{\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4}}.$$

Nếu $\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 = 0 \Leftrightarrow MO = 0 \Rightarrow M \equiv O$

Nếu $\frac{k}{2} - \frac{a^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < \frac{a^2}{2} \Rightarrow MO^2 < 0$ nên tập điểm là rỗng.

Câu 112. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho

a) $\overline{MA}(\overline{MB} + \overline{MC}) = 0$;

b) $(\overline{MA} - \overline{MC})(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) = 0$.

Lời giải

a) Gọi I là trung điểm đoạn BC. Khi đó $\overline{MB} + \overline{MC} = 2\overline{MI}$.

$$\text{Ta có } \overline{MA}(\overline{MB} + \overline{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overline{MA} \cdot \overline{MI} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MI.$$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn đường kính AI.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$.

$$\text{Ta có } (\overline{MA} - \overline{MC})(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overline{CA} \cdot 3\overline{MG} = 0 \Leftrightarrow CA \perp MG$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng qua G và vuông góc với AC.

Câu 113. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$;

b) $\overline{MA}(\overline{MC} - \overline{MB}) = 0$;

c) $(\overline{MA} + \overline{MB})(\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}) = 0$;

d) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = -MA \cdot MB$.

Lời giải

a) Giả sử M là điểm thỏa mãn $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$.

Ta có $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \Leftrightarrow MA \perp MB \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn đường kính AB.

b) Ta có $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC \Leftrightarrow M$ nằm trên đường thẳng qua A và vuông góc với BC.

c) Gọi I là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow MI \perp MG \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn đường kính IG.

d) Giả sử $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MB}| \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -MA \cdot MB$

$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -1 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 180^\circ \Leftrightarrow M$ nằm bên trong đoạn thẳng AB

Câu 114. Cho hai điểm A, B và k là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm M thỏa điều kiện: $MA^2 + MB^2 = k^2$.

Lời giải

Với O là trung điểm AB. Ta có:

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA} + OA^2$$

$$MB^2 = \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 = MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OB} + OB^2$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + OA^2 + OB^2 \quad (1)$$

Vì O là trung điểm AB nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ và OA = OB, do đó (1) trở thành

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + 2OA^2.$$

Gọi tập hợp các điểm M cần tìm là (L). Ta có:

$$MA^2 + MB^2 = k^2 \Leftrightarrow 2(MO^2 + OA^2) = k^2 \Leftrightarrow MO^2 = \frac{k^2}{2} - OA^2 \quad (2)$$

Đặt $OA^2 = \frac{m^2}{2}$. (2) trở thành $MO^2 = \frac{1}{2}(k^2 - m^2)$. Xảy ra:

i) $k^2 < m^2$ thì $MO^2 < 0$: (L) = \emptyset .

ii) $k^2 = m^2$ thì $MO^2 = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$: (L) = { O }.

iii) $k^2 > m^2 \Leftrightarrow MO = \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 - m^2)}$: (L) là đường tròn tâm O có bán kính là

$$R = \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 - m^2)}.$$

Câu 115. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của BC, D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$, E là trung điểm của DC. Ta có

$(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot 6\overrightarrow{ME} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{ME} = 0 \Leftrightarrow MI \perp ME$. Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính IE.

Câu 116. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

a). $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$

b). $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

Lời giải

Dựng hình bình hành ABEC, ta có:

$$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow MB^2 + MC^2 - MA^2 &= (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})^2 - (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 \\ &= ME^2 + 2\overrightarrow{ME}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA}) + EB^2 + EC^2 - EA^2 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó (1)} \Leftrightarrow ME^2 = EA^2 - (EB^2 + EC^2)$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC})^2 - (EB^2 + EC^2)$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow ME^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow ME^2 = 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

Nếu \hat{A} tù: Tập hợp điểm M là \emptyset

Nếu \hat{A} vuông: Tập hợp điểm M là $\{E\}$

Nếu \hat{A} nhọn: Tập hợp điểm M là đường tròn $(E; \sqrt{2AB \cdot AC \cdot \cos A})$

b).

Cách 1: Gọi I trung điểm của BC, J là trung điểm của AI. Ta có $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2IM^2 + \frac{BC^2}{2} - 2MA^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - MI^2 = \frac{BC^2}{4}$$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng vuông góc với AI tại điểm H, xác định bởi:

$$\overline{JH} = \frac{BC^2}{8AI}$$

Cách 2: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác ABC.

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 2\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 3\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}(3\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Leftrightarrow MO \perp AG$$

$\Leftrightarrow M$ thuộc đường thẳng qua O vuông góc với AG.

Câu 117. Cho hai điểm A, B cố định và số k cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$

Lời giải

$$\text{Ta có } \overline{AB}^2 = (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA})^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MA}^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{\overline{MB}^2 + \overline{MA}^2 - \overline{AB}^2}{2} \quad (*)$$

$$\text{Gọi I trung điểm của AB, khi đó có } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

$$\text{Thay vào (*) ta được: } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

$$\bullet \quad k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Rightarrow M \text{ tập rỗng.}$$

$$\bullet k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Rightarrow M \equiv I$$

$$\bullet k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Rightarrow M \text{ chạy trên đường tròn tâm } I \text{ bán kính } R = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$$

Câu 118. Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).

Lời giải

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} &= AB^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot (\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MG}) = AB^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} &= AB^2 \Leftrightarrow MB \cdot GC \cdot \cos(\widehat{MB, GC}) = AB^2 (*) \end{aligned}$$

Gọi B_1 là hình chiếu vuông góc của B trên GC , trên CB_1 ta lấy điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{B_1H} = \frac{AB^2}{GC}$

$\overrightarrow{B_1H} \uparrow \overrightarrow{B_1C} \uparrow \overrightarrow{GC}$, vì B_1 cố định nên H cố định $\Rightarrow M$ chạy trên đường thẳng CG đi qua H .

Câu 119. Trong mặt phẳng Oxy cho cho tam giác ABC có trọng tâm G .

a). Xác định vị trí điểm P thỏa $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

b). Chứng minh C, G, P thẳng hàng.

c). Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$

Lời giải

a). Gọi I là trung điểm của AB , theo tính chất đường trung tuyến $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PI}$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{PI} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CP}) - 4\overrightarrow{CP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CI} \quad (1)$$

b). Theo tính chất trọng tâm ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IG} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{IC} - 3\overrightarrow{IG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG} \quad (2)$

Từ (1) & (2) $\Rightarrow \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{GI}$

$$c). |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI} + 4\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CI}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HM} + 2(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HM})| = |\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow |\underbrace{\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{HC}}_{\vec{0}} - 3\overrightarrow{HM}| = |\overrightarrow{CI}|$$

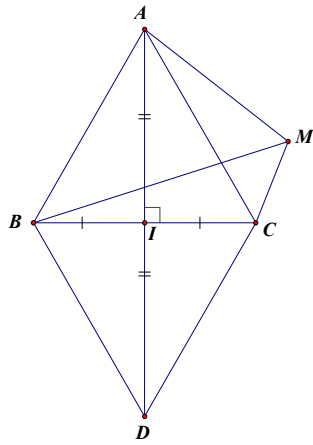
$$\Leftrightarrow 3|\overrightarrow{HM}| = |\overrightarrow{CI}| \Leftrightarrow HM = \frac{CI}{3} \Rightarrow \text{Tập hợp điểm } M \text{ là đường tròn tâm } H \text{ bán kính } R = \frac{CI}{3}.$$

Câu 120. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC và M là một điểm thay đổi:

a). Chứng minh $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$ không đổi.

b). Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k$ (k là số thực cho trước).

Lời giải



a). Nhận xét: AD và BC có trung điểm I chung.

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IB}^2 = MI^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2 = \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD}$$

$$= -(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}) = -\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 = -MI^2 + \frac{3a^2}{4}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2 = \frac{a^2}{2} \text{ không đổi.}$$

b). Theo câu a), ta có:

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k \Leftrightarrow AM^2 + \frac{a^2}{2} = k \Leftrightarrow AM^2 = k - \frac{a^2}{2}$$

– Nếu $k < \frac{a^2}{2}$ thì quỹ tích là tập rỗng.

– Nếu $k = \frac{a^2}{2}$ thì quỹ tích chỉ gồm một điểm A.

– Nếu $k > \frac{a^2}{2}$ thì quỹ tích là đường tròn tâm A, bán kính là $\sqrt{k - \frac{a^2}{2}}$.

Câu 121. Cho tam giác ABC. Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn:

a). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$

b). $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$

(với k là một số cho trước).

Lời giải

a).

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB})\overrightarrow{CA} + 2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AM}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}) + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

(Với D là điểm sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$).

Do đó điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = k$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}' \cdot \overrightarrow{AD} = k + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overline{AM'} = \frac{k + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AD}} \text{ (Với } M' \text{ là hình chiếu của } M \text{ trên } AD).$$

Vậy quỹ tích điểm M là đường thẳng vuông góc với AD tại điểm M' sao cho $\overline{AM'} = \frac{k + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{\overline{AD}}$.

b).

trước hết ta có

$$2\overline{BM} \cdot \overline{CM} = 2\overline{MB} \cdot \overline{MC} = \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 - (\overline{MC} - \overline{MB})^2 = MB^2 + MC^2 - BC^2 \text{ nên}$$

$$\overline{BM} \cdot \overline{CM} = \frac{MB^2 + MC^2 - BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{BM} \cdot \overline{CM} - 2\overline{CM} \cdot \overline{AM} + 2\overline{AM} \cdot \overline{BM} = \frac{3}{2}MB^2 - \frac{1}{2}MC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2$$

$$\text{Do vậy điểm } M \text{ thỏa mãn } \frac{3}{2}MB^2 - \frac{1}{2}MC^2 - \frac{1}{2}BC^2 + CA^2 - AB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 3MB^2 - MC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2 \quad (1)$$

Gọi G là điểm thỏa mãn $3\overline{GB} - \overline{GC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 3GB^2 - GC^2, \text{ mà } GB = \frac{BC}{2}, GC = \frac{2BC}{2} \text{ nên}$$

$$3MB^2 - MC^2 = 2MG^2 - \frac{3}{2}BC^2$$

$$\text{Thành thử điều kiện (1) trở thành: } 2MG^2 - \frac{3}{2}BC^2 = 2k + BC^2 - 2CA^2 + 2AB^2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = k + \frac{5a^2}{4} - b^2 + c^2 \text{ (với } a, b, c \text{ là độ dài ba cạnh } BC, CA, AB).$$

$$\text{– Nếu } k < -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2 \text{ thì quỹ tích là tập rỗng.}$$

$$\text{– Nếu } k = -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2 \text{ thì quỹ tích chỉ gồm một điểm } M.$$

$$\text{– Nếu } k > -\frac{5a^2}{4} + b^2 - c^2 \text{ thì quỹ tích điểm } M \text{ là đường tròn tâm } G \text{ bán kính } \sqrt{k + \frac{5a^2}{4} - b^2 + c^2}.$$

Câu 122. Cho tam giác ABC số a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$.

Lời giải:

Chú ý, tổng các hệ số $3+1-4=0$ nên không tồn tại tâm tỉ cự của hệ điểm A, B, C.

$$\text{Gọi } I \text{ là điểm sao cho } 3\overline{IA} + \overline{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overline{IA} + (\overline{AB} - \overline{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AB} = 4\overline{AI} \Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{1}{4}\overline{AB}.$$

Do đó I cố định và

$$3MA^2 + MB^2 = 3\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = 3(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} + \overline{IB})^2$$

$$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\overline{MI}(\overline{3IA} + \overline{IB})^2$$

$$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + 2\overline{MI} \cdot \vec{0}$$

$$= 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2.$$

Ta có

$$3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a \Leftrightarrow 4MI^2 + 3IA^2 + IB^2 - 4MC^2 = a$$

$$\Leftrightarrow MC^2 - MI^2 = \frac{3IA^2 + IB^2 - a}{4}.$$

Đặt $k = \frac{3IA^2 + IB^2 - a}{4}$ không đổi, bài toán đưa về tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$MC^2 - MI^2 = k.$$

Gọi O là trung điểm của CI và H là hình chiếu của M trên CI , ta có

$$MC^2 - MI^2 = \overline{MC}^2 - \overline{MI}^2 = (\overline{MC} + \overline{MI})(\overline{MC} - \overline{MI}) = 2\overline{MO} \cdot \overline{IC} = 2\overline{HO} \cdot \overline{IC}.$$

Do đó

$$MC^2 - MI^2 = k \Leftrightarrow 2\overline{HO} \cdot \overline{IC} = k \Leftrightarrow 2\overline{OH} \cdot \overline{CI} = k$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{OH} \cdot \overline{CI} = k \Leftrightarrow 2\overline{OH} \cdot (\overline{CI})^2 = k \cdot \overline{CI}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{k}{2\overline{CI}^2} \overline{CI}.$$

Nên điểm H cố định. Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H xác định ở trên.

Câu 123. Cho tam giác ABC và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$.

Lời giải:

Gọi I là điểm sao cho

$$2\overline{IA} + 3\overline{IB} + 5\overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overline{IA} + 3(\overline{AB} - \overline{AI}) + 5(\overline{AC} - \overline{AI}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overline{AB} + 5\overline{AC} = 10\overline{AI} \Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{3}{10}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}.$$

Do đó điểm I xác định duy nhất và

$$\begin{aligned} 2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 &= 2\overline{MA}^2 + 3\overline{MB}^2 + 5\overline{MC}^2 \\ &= 2(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + 3(\overline{MI} + \overline{IB})^2 + 5(\overline{MI} + \overline{IC})^2 \\ &= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 + 2\overline{MI}(2\overline{IA} + 3\overline{IB} + 5\overline{IC}) \\ &= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 + 2\overline{MI} \cdot \vec{0} \\ &= 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2. \end{aligned}$$

Vậy

$$2MA^2 + 3MB^2 + MC^2 = k^2 \Leftrightarrow 10MI^2 + 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2 = k^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{10}(k^2 - 2IA^2 - 3IB^2 - 5IC^2).$$

□ Nếu $k^2 > 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O , bán kính

$$R = \sqrt{\frac{1}{10}(k^2 - 2IA^2 - 3IB^2 - 5IC^2)}.$$

□ Nếu $k^2 = 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M gồm chỉ một điểm O .

□ Nếu $k^2 < 2IA^2 + 3IB^2 + 5IC^2$ thì tập hợp các điểm M là rỗng.

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

• |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 1.** Nếu hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?
- A. $MN = 4$
 B. $MN = 2$
 C. $MN = 16$;
 D. $MN = 256$.

Lời giải

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4 = |\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{NM}| \cdot \cos 180 = -4 \Leftrightarrow MN^2 = 4 \Rightarrow MN = 2. \text{ Chọn A}$$

- Câu 2.** Phát biểu nào sau đây là đúng?
- A. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$;
 B. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;
 C. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;
 D. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

Lời giải

Chọn C

- Câu 3.** Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$ bằng:
- A. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$.
 B. $-AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$.
 C. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$.
 D. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ACB}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 4.** Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng:
- A. $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$.
 B. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$.
 C. $-AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$.
 D. $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}$.

Lời giải

Chọn A

- Câu 5.** Cho đoạn thẳng AB . Tập hợp các điểm M nằm trong mặt phẳng thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là:
- A. Đường tròn tâm A bán kính AB .
 B. Đường tròn tâm B bán kính AB .
 C. Đường trung trực của đoạn thẳng AB .
 D. Đường tròn đường kính AB .

Lời giải

Chọn D

- Câu 6.** Nếu hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -9$ thì:
- A. $MN = 9$.
 B. $MN = 3$.
 C. $MN = 81$.
 D. $MN = 6$.

Lời giải

Chọn B

BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 7.** Cho \vec{a} và \vec{b} là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. **B.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Do \vec{a} và \vec{b} là hai vector cùng hướng nên $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Vậy $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

- Câu 8.** Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
A. $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$

- Câu 9.** Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} .
A. $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-3}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$

- Câu 10.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ là góc \hat{A} nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$.

- Câu 11.** Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. **B.** $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$. **D.** $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

Lời giải

Chọn B

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.

Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.

Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.

Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. **Chọn B**

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$ **C.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$ **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. **B.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. **C.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

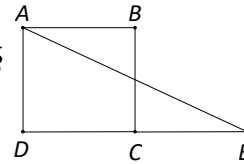
Lời giải

Chọn A

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE = 2a$.

Khi đó $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) \cdot \overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 + \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AB}$

$= DE \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AB}) = DE \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = 2a^2$.



Câu 14. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:

A. một điểm. **B.** đường thẳng. **C.** đoạn thẳng. **D.** đường tròn.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow MA \perp BC$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 15. Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?

A. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$ **B.** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$ **D.** $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta đi tính tích vô hướng ở các phương án. So sánh về trái với về phải.

Phương án A: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos 60^\circ = 2x \Rightarrow (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$ nên loại A.

Phương án B: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = BC \cdot AC \cos 120^\circ = -2$ nên loại **B.**

Phương án C: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 4$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -2$ nên chọn **C.**

Câu 16. Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

A. $\frac{a^2}{2}$. **B.** $-\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = BA \cdot CA \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}a^2$.

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn C

Phương án A: $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ nên loại A.

Phương án B: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ và $\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ suy ra $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ nên loại B.

Phương án C: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = AB \cdot AB \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = AB^2$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot DC \cdot \cos 180^\circ = -AB^2 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ nên chọn C.

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hỏi mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Lời giải

Chọn B

Phương án A: Do $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = DA \cdot CB \cdot \cos 0^\circ = a^2$ nên loại A.

Phương án B: Do $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \cdot CD \cdot \cos 180^\circ = -a^2$ nên chọn B.

Câu 19. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$ bằng:

- A. $\frac{9a^2}{2}$. B. $-\frac{9a^2}{2}$. C. 0 . D. $9a^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} = -\frac{9a^2}{2}$ nên chọn B.

Câu 20. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là **sai**?

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.

Lời giải

Chọn D

Phương án A: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 130^\circ$ nên loại A.

Phương án B: $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) = 40^\circ$ nên loại B.

Phương án C: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 50^\circ$ nên loại C.

Phương án D: $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 140^\circ$ nên chọn D.

Câu 21. Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đầu tiên ta đi tìm số đo của góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$ sau đó mới tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$

$$\text{Vì } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 135^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 22. Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$. C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2.$$

Câu 23. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

A. 0. B. a . C. $\frac{a^2}{2}$. D. a^2 .

Lời giải**Chọn A**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a \cdot a \cdot \cos 90^\circ = 0.$$

Câu 24. Cho M là trung điểm AB , tìm biểu thức sai:

A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. D. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.

Lời giải**Chọn D**

Phương án A: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{AB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = MA \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot AB$ nên loại A.

Phương án B: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên loại B.

Phương án C: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ cùng hướng suy ra $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB \cdot \cos 0^\circ = AM \cdot AB$ nên loại C.

Phương án D: $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB \cdot \cos 180^\circ = -MA \cdot MB$ nên chọn D.

Câu 25. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$

A. $\frac{3a^2}{4}$. B. $\frac{-3a^2}{4}$. C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $\frac{-3a^2}{2}$.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA} = AH \cdot CA \cdot \cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CA}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos 150^\circ = -\frac{3a^2}{4}.$$

Câu 26. Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Câu nào sau đây đúng

- A. \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.
B. \vec{a} và \vec{b} nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 120° .
C. \vec{a} và \vec{b} ngược hướng.
D. A, B, C đều sai.

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có } \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \text{ nên } \vec{a} \text{ và } \vec{b} \text{ ngược hướng}$$

Câu 27. Cho 2 vectơ \vec{a} và \vec{b} có $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A. $\sqrt{21}$. B. $\sqrt{61}$. C. 21. D. 61.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{21}.$$

Câu 28. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A. $3a^2$. B. $-3a^2$. C. $3a$. D. 0.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot BC \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2.$$

Câu 29. Cho 2 vectơ đơn vị \vec{a} và \vec{b} thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. Hãy xác định $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$

- A. 7. B. 5. C. -7. D. -5.

Lời giải

Chọn C

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1, |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 4 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1, (3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 20\vec{b}^2 + 7\vec{a} \cdot \vec{b} = -7.$$

Câu 30. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$

- A. $-9a^2$. B. $15a^2$. C. 0. D. $9a^2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} = -9a^2 \text{ nên chọn A.}$$

Câu 31. Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC = 9$, $BC = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. 9. B. 81. C. 3. D. 5.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} = 81 \text{ nên chọn B.}$$

Câu 32. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

- A. $\sqrt{7 + \sqrt{3}}$. B. $\sqrt{7 - \sqrt{3}}$. C. $\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$. D. $\sqrt{7 + 2\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})} = \sqrt{7 - 2\sqrt{3}}.$$

Câu 33. Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CM}^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC .

Câu 34. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :

- A. Đường tròn đường kính AB .
 B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
 C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
 D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

Tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .

Câu 35. Cho hai điểm $A(2, 2)$, $B(5, -2)$. Tìm M trên tia Ox sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$

- A. $M(1, 6)$. B. $M(6, 0)$. C. $M(1, 0)$ hay $M(6, 0)$. D. $M(0, 1)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x; 0)$, với $x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\overrightarrow{AM} = (x-2; -2)$, $\overrightarrow{BM} = (x-5; 2)$. Theo YCBT ta có

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5) - 4 = x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow M(1; 0) \\ x=6 \Rightarrow M(6; 0) \end{cases}, \text{ nên chọn } \mathbf{C}.$$

Câu 36. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
 C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$, $\frac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và **D**.

$$\text{Ta có } |\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) \text{ Chọn C.}$$

- A đúng, vì $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
- B đúng, vì $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
 $\longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Câu 37. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn C

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc \widehat{B} nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

Câu 38. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc \hat{A} nên $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

Câu 39. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos \hat{B} = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$$

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$$

Câu 40. Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$, $CA = 5 \text{ cm}$ Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$ B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$ C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$ D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB + BC = CA \Rightarrow$ ba điểm A, B, C thẳng hàng và $AC \longrightarrow I(4; -1)$. nằm giữa A, C .

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$$

$$\text{Cách khác. Ta có } AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$$

Câu 41. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $P = b^2 - c^2$ B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$$

Câu 42. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

A. $P = -1$

B. $P = 3a^2$

C. $P = -3a^2$

D. $P = 2a^2$

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$

$$\text{Ta có } P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2$$

$$= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2$$

Câu 43. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.

C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$.

D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì M là trung điểm của BC suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2) = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \frac{b^2 - c^2}{2}$$

Câu 44. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

A. tam giác OAB đều. B. tam giác OAB cân tại O .

C. tam giác OAB vuông tại O .

D. tam giác OAB vuông cân tại O .

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA$$

Câu 45. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.

Lời giải

Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BD} theo các vector có giá vuông góc với nhau.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 = -AB^2 = -64.$$

Câu 46. Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$.

B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$.

C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$.

D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $O = AC \cap BD$, giả thiết không cho góc, ta phân tích các vector \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} theo các vector có giá vuông góc với nhau.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + 0 = \frac{1}{2} AC^2 = 32.$$

Câu 47. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. **D. đường tròn.**

Lời giải

Chọn

D.

Gọi I là trung điểm $BC \longrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ta có $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot 2\overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MI}$. (*)

Biểu thức (*) chứng tỏ $MA \perp MI$ hay M nhìn đoạn AI dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AI .

Câu 48. Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. **D. đường tròn.**

Lời giải

Chọn

D.

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \longrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Ta có $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot 3\overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MG}$. (*)

Biểu thức (*) chứng tỏ $MB \perp MG$ hay M nhìn đoạn BG dưới một góc vuông nên tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính BG .

Câu 49. Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:

- A. một điểm. **B. đường thẳng.** C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn

B.

Gọi C là điểm đối xứng của A qua B . Khi đó $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}^2 = 2a^2$.

Kết hợp với giả thiết, ta có $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow CN \perp AB.$$

Vậy tập hợp các điểm N là đường thẳng qua C và vuông góc với AB .

Câu 50. Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là:

- A. một điểm.** B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \longrightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}. \end{aligned}$$

Theo giả thiết, ta có $MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -16 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 16 = \frac{8^2}{4} - 16 = 0 \longrightarrow M \equiv I$.

- Câu 51.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
- A.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$. **D.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2$.

Lời giải

Cách 1: Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ và từ câu a ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

Cách 2: Từ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ và hằng đẳng thức

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB})$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$$

- Câu 52.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$
- A.** $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$. **B.** $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$. **D.** $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$.

Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

$$\text{Do đó } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \widehat{ACB}$$

$$(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \text{ vì } \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD})$$

Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^\circ$ và theo định lý Pitago ta có:

$$AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Suy ra } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2.$$

- Câu 53.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $CD = BD = 5\sqrt{2}$, $AD = 3\sqrt{10}$, $AC = 10$. Tìm cosin góc giữa hai vector \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{DB}
- A.** $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$. **B.** $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{4}{5\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{3}{5\sqrt{2}}$.

Lời giải

Với điểm O bất kỳ ta có:

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) = 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\text{Mặt khác } 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 = \overrightarrow{OC}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{BC}^2$$

Xây dựng các đẳng thức tương tự thay vào ta tính được

$$2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}) = \frac{AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2}{AC \cdot BD} = \frac{20 + 50 - 20 - 90}{10.5\sqrt{2}} = -\frac{4}{5\sqrt{2}}.$$

Câu 54. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết $AB = CD = 2a$, $MN = a\sqrt{3}$.

- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 50^\circ$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 80^\circ$. D. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$ suy ra

$$MN^2 = \frac{1}{4}(AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2a^2.$$

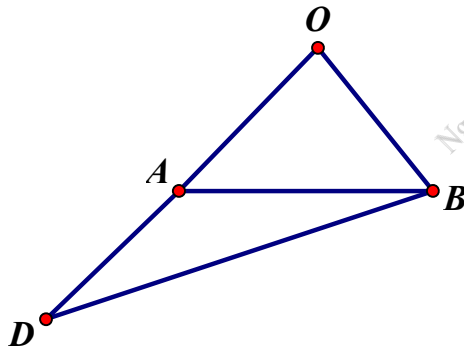
$$\text{Do đó } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{AB \cdot CD} = \frac{2a^2}{2a \cdot 2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ.$$

Câu 55. Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.

- A. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$. B. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$.
C. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$. D. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi D là điểm đối xứng của O qua A .

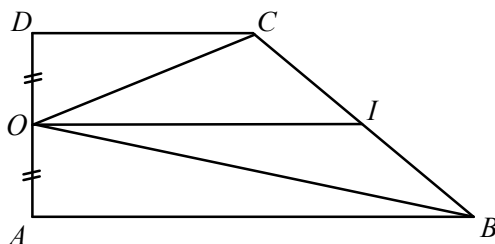
$$|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

Câu 56. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D ; $AB \parallel CD$; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. O là trung điểm của AD . Độ dài vector tổng $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. a . D. $3a$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 2OI$.

Xét hình thang $ABCD$ có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI = \frac{AB+CD}{2} = \frac{3a}{2}$.

Vậy $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = 3a$.

Câu 57. Cho ABC đều cạnh $2a$ với M là trung điểm BC . Khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Độ dài đường cao AM trong tam giác đều cạnh $2a$ là: $\frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Vậy khẳng định đúng là $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.

Câu 58. Cho tam giác vuông cân ABC với $AB = AC = a$. Khi đó $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{5}$. C. $5a$. D. $2a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|)^2 = (2\overrightarrow{AB})^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 4AB^2 + AC^2$ (vì $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$)
 $= 4a^2 + a^2 = 5a^2 \Rightarrow |2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{5}$.

Câu 59. Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ \vec{a}, \vec{b} . Chọn phát biểu **đúng**.

- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$|\vec{a} - \vec{b}| = 4 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8}$$

Câu 60. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} là

- A. $8a^2$. B. $8a$. C. $8\sqrt{3}a^2$. D. $8\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn A

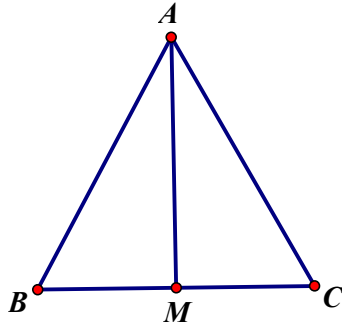
Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4a \cdot 4a \cdot \cos 60^\circ = 4a \cdot 4a \cdot \frac{1}{2} = 8a^2$.

Câu 61. Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng

- A. -18 . B. 27 . C. 18 . D. -27 .

Lời giải

Chọn D



Ta có $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \widehat{BAM} = 30^\circ$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -6 \cdot \frac{6\sqrt{3}}{2} \cdot \cos 30^\circ = -27.$$

Câu 62. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} . Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

- A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } (|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = a^2 + b^2 + 2\vec{a}\vec{b} = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}),$$

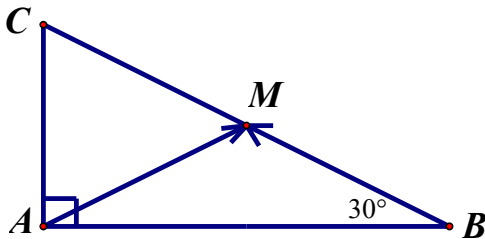
$$\Rightarrow (|\vec{a} + \vec{b}|)^2 = 4 + 3 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 13 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13}.$$

Câu 63. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 30^\circ$, $AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.

- A. $P = -2$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = 2$. D. $P = -2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Ta có: } P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$$

$$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$$

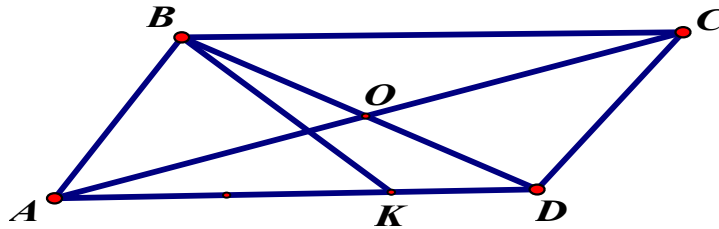
$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2 \Rightarrow \text{Chọn A}$$

Câu 64. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a$, $AD = 3a$, $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A. $3a^2$. B. $6a^2$. C. 0 . D. a^2 .

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Khi đó $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2$

Câu 65. Cho tam giác ABC có $AB=5$, $AC=8$, $BC=7$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:

A. -20.

B. 40.

C. 10.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 20$$

Câu 66. Cho hai vectơ \vec{a} , \vec{b} sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .

A. 120° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C

Vì hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

Câu 67. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$.

C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$.

D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.

Lời giải

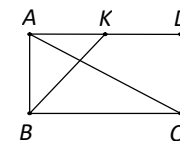
Chọn A

Ta có $AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = -a^2 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2 = 0.$$



$$\rightarrow \cos \widehat{ABC} = \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{ABC}} = \frac{5\sqrt{7}}{16} \text{ (vì } \widehat{ABC} \text{ nhọn)}.$$

Mặt khác góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ là góc ngoài của góc \widehat{ABC}

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos(180^\circ - \widehat{ABC}) = -\cos \widehat{ABC} = -\frac{5\sqrt{7}}{16}.$$

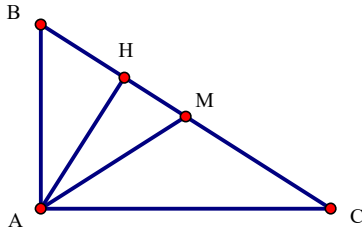
Câu 68. Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC và có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$.

Tính cạnh AB, AC .

A. $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. **B.** $AB = a, AC = a$.

C. $AB = a\sqrt{2}, AC = a$. **D.** $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$.

Lời giải



Chọn A

Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$.

Có \overline{HM} là hình chiếu của \overline{AM} lên BC .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{BC}, \text{ mà } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}, BC = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } \overline{HM} \text{ cùng chiều } \overline{BC} \text{ và } HM \cdot BC = \frac{a^2}{2}, HM = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Có } BH = BM - HM = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Có } AB^2 = BH \cdot BC = a^2 \Rightarrow AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } AB = a \text{ và } AC = a\sqrt{2}.$$

Câu 69. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

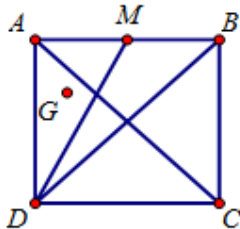
A. $\frac{21a^2}{4}$.

B. $\frac{11a^2}{4}$.

C. $\frac{9a^2}{4}$.

D. $\frac{a^2}{4}$.

Lời giải



$$\text{Vì } G \text{ là trọng tâm tam giác } ADM \text{ nên } \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CM}$$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có $\overrightarrow{CA} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$ và

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{2}[\overrightarrow{CB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})] = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD})$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\text{Ta lại có } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Nên } \overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) &= \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)\right) \\ &= \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}. \end{aligned}$$

Câu 70. Cho các vectơ \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7}$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$|2\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{7} \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 7 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$$

Câu 71. Cho các vectơ \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ \vec{u} và \vec{v} với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$

A. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{2}$. B. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{6}$. C. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{4}$. D. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Có } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1 - 2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Mặt khác: } \vec{u}^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 \Leftrightarrow |\vec{u}| = 3$$

$$\vec{v}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Leftrightarrow |\vec{v}| = 1$$

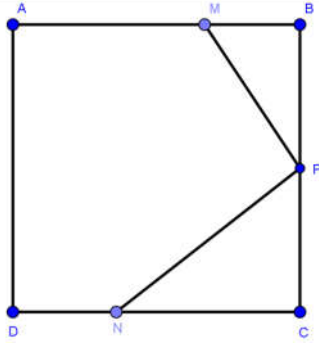
$$\text{Suy ra } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = -\frac{1}{6}$$

Câu 72. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos \widehat{MNP}$.

A. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$. B. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{4\sqrt{10}}$.

C. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{\sqrt{10}}$. D. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{NP} = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$

Mặt khác $|\overrightarrow{NM}| = \sqrt{10}$, $|\overrightarrow{NP}| = \frac{5}{2} \Rightarrow \cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$.

Câu 73. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$

A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

Vì G là trọng tâm tam giác ADM nên $3\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{CG} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\frac{9}{4}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{3}{8}$.

Câu 74. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

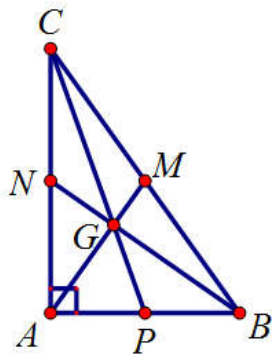
A. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$.

B. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$.

C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$.

D. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$.

Lời giải



Vì $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ nên

$$\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$$

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Dễ thấy tam giác ABM đều nên $GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:

$$GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$$

$$GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$$

$$\text{Suy ra } \vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$$

Câu 75. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$.

Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = -4$. B. $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 0$. C. $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 4$. D. $\vec{MB} \cdot \vec{MN} = 16$.

Lời giải

Chọn B

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ \vec{MB}, \vec{MN} theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

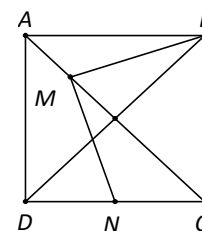
$$\vec{MB} = \vec{AB} - \vec{AM} = \vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AC} = \vec{AB} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD}$$

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \vec{AD} + \vec{DN} - \frac{1}{4}\vec{AC} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD})$$

$$= \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AB}. \text{ Suy ra:}$$

$$\vec{MB} \cdot \vec{MN} = \left(\frac{3}{4}\vec{AB} - \frac{1}{4}\vec{AD}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AB}\right) = \frac{1}{16}(3\vec{AB} \cdot \vec{AD} + 3\vec{AB}^2 - 3\vec{AD}^2 - \vec{AD} \cdot \vec{AB})$$

$$= \frac{1}{16}(0 + 3a^2 - 3a^2 - 0) = 0.$$



Câu 76. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R . Tính R .

A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

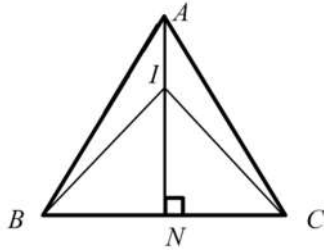
B. $R = \frac{a}{4}$.

C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi N là trung điểm đoạn BC .

Gọi I là điểm thỏa: $4\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\vec{IA} + 2\vec{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{IA} + \vec{IN} = \vec{0}$, nên điểm I thuộc đoạn thẳng AN sao cho $IN = 2IA$.

Khi đó: $IA = \frac{1}{3}AN = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, và $IN = \frac{2}{3}AN = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

$$IB^2 = IC^2 = IN^2 + BN^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{12}.$$

Ta có: $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow 4(\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 + (\vec{MI} + \vec{IC})^2 = \frac{5a^2}{2}$.

$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 4IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{a\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 6MI^2 + 4 \cdot \frac{a^2}{12} + 2 \cdot \frac{7a^2}{12} = \frac{5a^2}{2} \Leftrightarrow MI = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Câu 77. Cho tam giác đều ABC cạnh 18cm. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$ là

A. Tập rỗng.

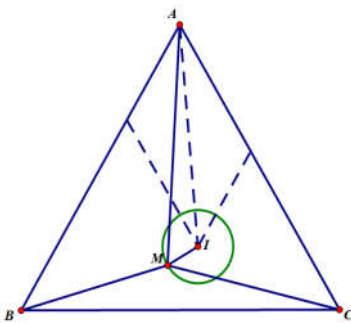
B. Đường tròn cố định có bán kính $R = 2$ cm.

C. Đường tròn cố định có bán kính $R = 3$ cm.

D. Một đường thẳng.

Lời giải

Chọn B



Ta có $|\vec{MA} - \vec{MB}| = |\vec{AB}| = 18$.

Dựng điểm I thỏa mãn $2\vec{IA} + 3\vec{IB} + 4\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{4}{9}\vec{AC}$.

Khi đó: $|2\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}| = |\vec{MA} - \vec{MB}| \Leftrightarrow 9|\vec{MI}| = 18 \Leftrightarrow IM = 2$.

Do đó tập hợp các điểm M là đường tròn cố định có bán kính $R = 2$ cm.

Câu 78. Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\vec{AK} = 3\vec{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\vec{KA} + \vec{KB} + 2\vec{KC} = \vec{0}$.

Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$.

Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.

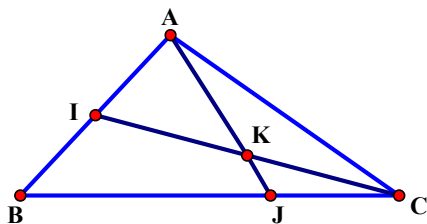
A. Đường tròn đường kính IJ .

B. Đường tròn đường kính IK .

C. Đường tròn đường kính JK .

D. Đường trung trực đoạn JK .

Lời giải



Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$.

Lấy điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$. Ta có $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$, mà $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ nên

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Lại có } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra J là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng BC xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Ta có $3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}$.

$$\text{Nhu vậy } (3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}) \cdot (4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0.$$

Từ đó suy ra điểm M thuộc đường tròn đường kính JK .

Vì J, K là các điểm cố định nên điểm M luôn thuộc một đường tròn đường kính JK là đường tròn cố định (đpcm).

Câu 79. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .

A. $x = \frac{5a}{12}$.

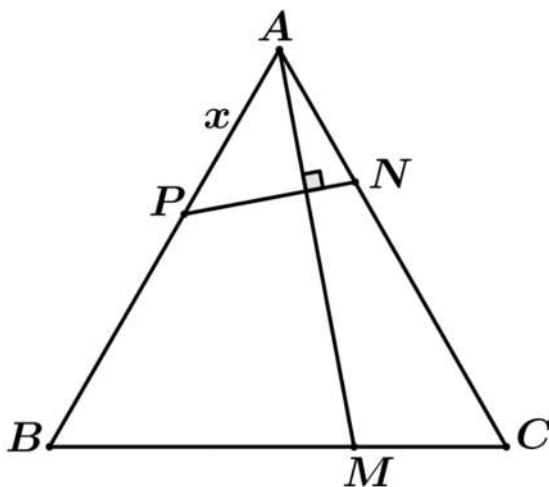
B. $x = \frac{a}{2}$.

C. $x = \frac{4a}{5}$.

D. $x = \frac{7a}{12}$.

Lời giải

Chọn A



$$\text{Đặt } \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}, \text{ ta có } |\vec{b}| = |\vec{c}| = a \text{ và } \vec{b} \cdot \vec{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3} (\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3} (\vec{b} + 2\vec{c})$$

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{x}{a} \overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} = \frac{1}{3a} (-3x\vec{b} + a\vec{c})$$

$$\text{Theo yêu cầu bài toán ta có } AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (-3x\vec{b} + a\vec{c}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x\vec{b} \cdot \vec{b} + a(\vec{b} \cdot \vec{c}) - 6x(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 2a\vec{c} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 3xa^2 + 2a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5a}{12}.$$

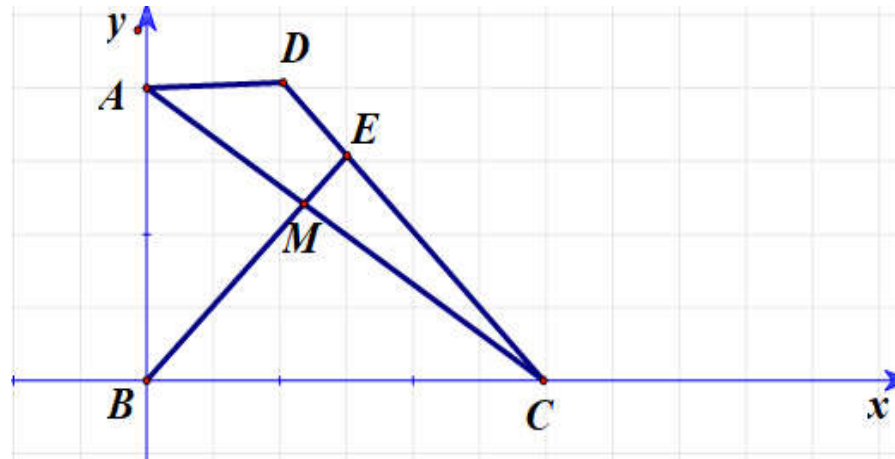
Câu 80. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$

- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. **D. $\frac{2}{5}$.**

Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho gốc tọa độ trùng với điểm B , điểm A thuộc trục Oy và điểm C thuộc trục Ox .



Theo bài ra ta có $B(0;0)$, $A(0;2)$, $C(3;0)$, $D(1;2)$

Khi đó $\overrightarrow{AC} = (3; -2)$. Phương trình tham số của đường thẳng AC là $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$

Gọi $M \in AC \Rightarrow M(3t; 2 - 2t)$. Ta có $\overrightarrow{BM} = (3t; 2 - 2t)$ và $\overrightarrow{DC} = (2; -2)$.

Để $BM \perp DC$ thì $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow 6t - 4 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{5} \Rightarrow M\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{6}{5}; -\frac{4}{5}\right) \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{52}}{5}$ và $\overrightarrow{AC} = (3; -2) \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.

Vì $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}$ cùng chiều $\Rightarrow k = \frac{AM}{AC} = \frac{\sqrt{52}}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{5}$.