

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTOR

• | Fanpage: Nguyễn Bảo Vương

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

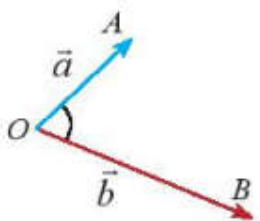
1. Góc giữa hai vector

Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} đều khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Góc \widehat{AOB} với số đo từ 0° đến 180° được gọi là **góc giữa hai vector** \vec{a} và \vec{b} .

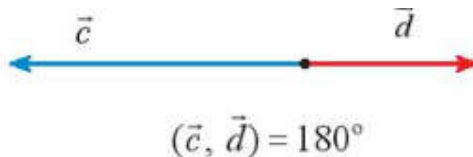
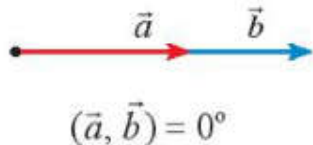
Ta kí hiệu góc giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} là (\vec{a}, \vec{b}) .

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng \vec{a} và \vec{b} vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Chú ý:

- Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.
- Góc giữa hai vector cùng hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 0° .
- Góc giữa hai vector ngược hướng và khác $\vec{0}$ luôn bằng 180° .
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vector \vec{a} hoặc \vec{b} là vector $\vec{0}$ thì ta quy ước số đo góc giữa hai vector đó là tùy ý (từ 0° đến 180°).



2. Tích vô hướng của hai vector

Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} đều khác $\vec{0}$

Tích vô hướng của \vec{a} và \vec{b} là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Chú ý:

- Trường hợp ít nhất một trong hai vector \vec{a} và \vec{b} bằng $\vec{0}$, ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Với hai vector \vec{a} và \vec{b} , ta có $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ thì tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ được kí hiệu là \vec{a}^2 và được gọi là bình phương vô hướng của vector \vec{a} .

Ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$. Vậy bình phương vô hướng của một vector luôn bằng bình phương độ dài của vector đó.

3. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bất kì và mọi số k , ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;

4. Một số ứng dụng

Tính độ dài của đoạn thẳng

Nhận xét

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có: $\overline{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$.

Do đó độ dài đoạn thẳng AB được tính như sau: $AB = \sqrt{\overline{AB}^2}$.

Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Nhận xét: Cho hai vectơ bất kì \vec{a} và \vec{b} khác vectơ $\vec{0}$. Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

Hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Cũng như vậy, hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vectơ \vec{u} song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vectơ \vec{v} song song hoặc trùng với đường thẳng b .

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. Tính tích vô hướng của hai vectơ, góc của hai vectơ

Phương pháp:

Tích vô hướng của \vec{a} và \vec{b} là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Với hai vectơ khác vectơ $\vec{0}$, sử dụng công thức $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} = 30^\circ$.

Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Câu 2. Tính (\vec{a}, \vec{b}) biết rằng $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$.

Câu 3. Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 8$ và $|\vec{a} + \vec{b}| = 10$.

a) Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$.

b) Tính số đo của góc giữa hai vectơ \vec{a} và $\vec{a} + \vec{b}$.

Câu 4. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các góc:

a) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB})$

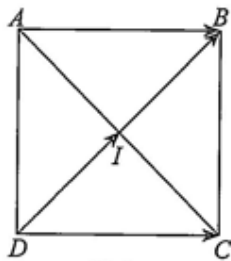
b) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI})$

c) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB})$

d) $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC})$

Câu 5. Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 3 và 4 có tích vô hướng là -6 . Tính góc giữa hai vectơ đó.

Câu 6. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I . Tìm các góc:



Hình 2

a) $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}); (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Câu 7. Cho hai vectơ \vec{i}, \vec{j} vuông góc có cùng độ dài bằng 1 và cho biết $\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ và tính số đo góc (\vec{a}, \vec{b}) .

Câu 8. Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 6 và 8 và có tích vô hướng là 24. Tính góc giữa hai vectơ đó.

Câu 9. Tìm điều kiện của \vec{u}, \vec{v} để:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$

Câu 10. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 4 và có đường cao AH . Tính các tích vô hướng:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Câu 11. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a) $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 7, (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$;

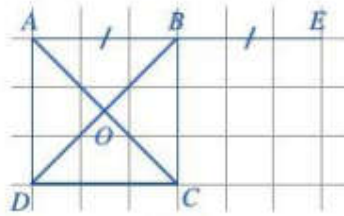
b) $|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 9, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$

Câu 12. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4\text{ cm}$.

a) Tính độ dài cạnh huyền BC .

b) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a . Tính:

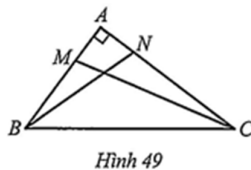


a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$

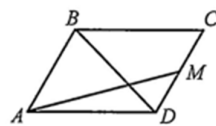
Câu 14. Cho tam giác ABC vuông tại A , $AB = 3$, $AC = 4$. Các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AB , AC thỏa mãn $AM = AN = 1$ (Hình 49). Tính $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CM}$.



Hình 49

Câu 15. Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 6$. M là trung điểm của BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 3$, $AD = 4$, $\hat{A} = 60^\circ$. M là trung điểm của CD (Hình 50). Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$.



Hình 50

Câu 17. Cho tam giác ABC vuông tại A . Tính: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a .

Tính các tích vô hướng sau: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Câu 19. Cho tam giác đều ABC tâm O , có độ dài các cạnh bằng 1.

a) Xác định góc giữa các cặp vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{OB} và \overrightarrow{CB} .

b) Tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

\overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OA} và \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{OB} và \overrightarrow{CB}

Câu 20. Cho tam giác ABC cân tại A , có $\hat{A} = 120^\circ$, $AB = 3$.

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

b) Tính độ dài cạnh BC .

c) Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Tính $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

- Câu 21.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- Câu 22.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và cho $AD = a$, $AB = 2a$. Tính:
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- Câu 23.** Cho ba điểm O, A, B thẳng hàng và $OA = a$, $OB = b$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ trong hai trường hợp:
a) Điểm O nằm ngoài đoạn thẳng AB ;
b) Điểm O nằm trong đoạn thẳng AB
- Câu 24.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $2a$ và có đường cao AH . Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$.
- Câu 25.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A , có cạnh BC bằng $\sqrt{2}$. Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
- Câu 26.** Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$.
Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.
- Câu 27.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và cho $AD = 2a$, $AB = a$. Tính:
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO}$
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- Câu 28.** Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:
a) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$;
b) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$;
c) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, \vec{a} và \vec{b} cùng hướng;
d) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, \vec{a} và \vec{b} ngược hướng.
- Câu 29.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính các tích vô hướng sau:
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- Câu 30.** Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\hat{A} = 120^\circ$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 31.** Cho tam giác ABC đều cạnh a , tâm O . Hãy tính:
a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
b). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$
c). $(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})$
d). $(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})$
- Câu 32.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Hãy tính:
a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$; $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$
b). $\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{AB}$ với N là điểm trên cạnh BC .
c). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$ với M nằm trên đường tròn nội tiếp hình vuông.
- Câu 33.** Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn $BC = 3a$, đáy nhỏ $AD = a$, đường cao $AB = 2a$
a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
b). Gọi I là trung điểm của CD . Hãy tính góc giữa AI và BD .
- Câu 34.** Cho tam giác ABC đều cạnh a , đường cao AH . Tính:
a). $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$.

$$b). (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})(2\overrightarrow{CA} - 3\overrightarrow{AH})$$

Câu 35. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O cạnh bằng 7, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính:
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB}$

Câu 36. Cho các vector \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Câu 37. Cho các vector \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vector bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vector \vec{u} và \vec{v} với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$.

Câu 38. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} . Cho biết $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Hãy tính các tích vô hướng
 $\vec{a}(2\vec{a} - \vec{b})$, $(3\vec{a} + 4\vec{b})(-2\vec{a} + 3\vec{b})$.

Câu 39. Cho $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, $|\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$. Tính $|2\vec{a} + \vec{b}|$

Câu 40. Cho hai vector đơn vị \vec{a}, \vec{b} thỏa mãn điều kiện $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$; $|\vec{a} + \vec{b}|$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức về tích vô hướng

Phương pháp:

- Biến đổi từ biểu thức về này sang về kia.
- Chứng minh hai biểu thức cùng bằng một biểu thức trung gian.
- Sử dụng các tính chất của phép toán vector, tính chất của tích vô hướng.
- Tách vector, biến đổi về các tích vô hướng khác.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 41. Áp dụng các tính chất của tích vô hướng, chứng minh rằng: $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$.

Câu 42. Cho hình thoi $ABCD$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = 0$

Câu 43. Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB . Với mỗi điểm M , chứng minh rằng
 $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA}$.

Câu 44. Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB . Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

$$a) \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$$

$$b) \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2).$$

Câu 45. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có:
 $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

Câu 46. Cho tam giác ABC không cân. Gọi D, E, F theo thứ tự là chân các đường cao kẻ từ A, B, C ; gọi M, N, P tương ứng là trung điểm các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{NE} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Câu 47. Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm và cho điểm M tùy ý. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$

Câu 48. Cho tam giác ABC . Chứng minh:

$$AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$$

Câu 49. Cho tam giác nhọn ABC , kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng:

$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$b) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Câu 50. Cho bốn điểm A, B, C, D . Chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Câu 51. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm của tam giác. Với mỗi điểm M , chứng minh rằng
 $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 52.** Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh $AC = a\sqrt{2}$, gọi O là giao điểm của AC và BD .
- Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a .
 - Gọi M là trung điểm cạnh BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2(OC^2 - OM^2)$
- Câu 53.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh $a\sqrt{3}$. Gọi I là trung điểm của AD và M là điểm bất kỳ.
- Tính $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$
 - Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
- Câu 54.** Cho H là trung điểm của AB và M là một điểm tùy ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = HM^2 - HA^2$
- Câu 55.** Chứng minh rằng với bốn điểm bất kỳ A, B, C, D ta có:
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ (hệ thức O - le).
- Câu 56.** Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng:
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
 - $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$
- Câu 57.** Cho tam giác ABC có I trung điểm của BC . Chứng minh:
- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$
 - $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$ (Với H là hình chiếu của A xuống BC).
- Câu 58.** Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Chứng minh rằng
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - \frac{1}{4}BC^2$
 - $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$
- Câu 59.** Cho tam giác ABC , biết $AB = c, BC = a, AC = b$. Có trọng tâm G . Chứng minh rằng
 $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ (hệ thức Lep - nit).
- Câu 60.** Cho tam giác ABC , trọng tâm G . Chứng minh rằng với mọi điểm M , ta có
 $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$
- Câu 61.** Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Chứng minh với điểm M bất kỳ ta luôn có:
 $MG^2 = \frac{1}{3}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{1}{9}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$
- Câu 62.** Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm hai đường thẳng AM và BN . Chứng minh:
- $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}; \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$
 - $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{BI} = 4R^2$
- Câu 63.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và M là một điểm tùy ý. Chứng minh:
- $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
 - $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MO}$
- Câu 64.** Cho tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R .
- Chứng minh $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$ khi và chỉ khi M thuộc (O) .
 - Chứng minh với mọi điểm M :
 $AM^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC})$

- Câu 65.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD . Chứng minh rằng $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$
- Câu 66.** Cho tam giác ABC , biết $AB = c, BC = a, CA = b$, các đường trung tuyến tương ứng AA', BB', CC' . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Chứng minh rằng với mọi M bất kì, ta có $2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}$
- Câu 67.** Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm, M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}^2$
- Câu 68.** Cho tam giác ABC , có AD, BE, CF lần lượt là các đường trung tuyến. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$

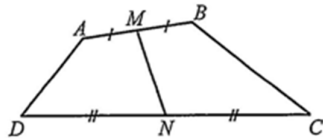
Dạng 3. Tính khoảng cách giữa hai điểm, chứng minh đẳng thức độ dài

Phương pháp: Sử dụng tính chất:

Với hai điểm A, B phân biệt, ta có $\overrightarrow{AB}^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$, do đó $AB = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

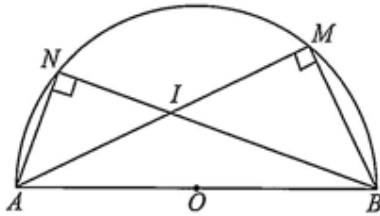
BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 69.** (Định lí cosin trong tam giác) Chứng minh rằng trong tam giác ABC , ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$
- Câu 70.** Cho tứ giác $ABCD$ có M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD (Hình 51). Biết $AD = 2, BC = 3, AD \perp BC$. Tính độ dài đoạn thẳng MN .



Hình 51

- Câu 71.** Cho đoạn thẳng AB và O là trung điểm của AB . Với mỗi điểm M , chứng minh rằng $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + OA^2 + OB^2$.
- Câu 72.** Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC , ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.
- Câu 73.** Cho nửa đường tròn với đường kính $AB = 2R$. Gọi M và N là hai điểm trên nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại một điểm I .
- Chứng minh rằng $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$.
 - Tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$ theo R .
- Câu 74.** Cho tam giác đều ABC có độ dài các cạnh bằng 1.
- Gọi M là trung điểm của BC . Tính tích vô hướng của các cặp vector \overrightarrow{MA} và $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MA}$ và \overrightarrow{AC} .
 - Gọi N là điểm đối xứng với B qua C . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$.
 - Lấy điểm P thuộc đoạn AN sao cho $AP = 3PN$. Hãy biểu thị các vector $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{MP}$ theo hai vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} . Tính độ dài đoạn MP .
- Câu 75.** Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 2R$. Gọi M và N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho AM và BN cắt nhau tại I như Hình 5.



Hình 5

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$.

b) Tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$ theo R .

Câu 76. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Các điểm M, N lần lượt thuộc các tia BC và CA thỏa mãn

$$BM = \frac{1}{3}BC, CN = \frac{5}{4}CA. \text{ Tính:}$$

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN}$

b) MN .

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 77. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Cho điểm M thỏa $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Tính độ dài AM .

Câu 78. Cho tam giác ABC có $AB = a\sqrt{2}, BC = 5a, \widehat{ABC} = 135^\circ$. Gọi điểm M thuộc AC sao cho

$$AM = \frac{3}{2}MC$$

a). Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

b). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BC}$ và tính BM .

Câu 79. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 120^\circ$

a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài trung tuyến AM .

b). Gọi AD là phân giác trong của góc A của tam giác ABC . Phân tích \overrightarrow{AD} theo hai vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Suy ra độ dài đoạn AD .

Câu 80. Cho tam giác ABC có $AB = 2a, BC = a\sqrt{7}, AC = 3a$. Gọi M trung điểm của AB, N thuộc AC sao cho $AN = 2NC$ và D thuộc MN sao cho $2DM = DN$

a). Tìm x, y sao cho $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

b). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ và độ dài đoạn AD theo a .

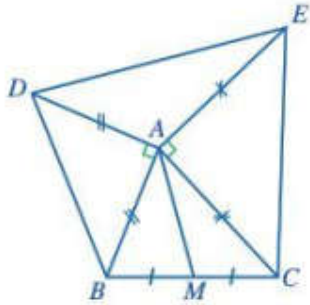
Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Phương pháp: Sử dụng các tính chất:

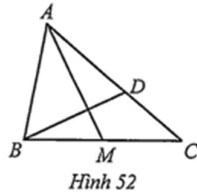
Hai đường thẳng a và b vuông góc khi và chỉ khi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, trong đó $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$, giá của vector \vec{u} song song hoặc trùng với đường thẳng a và giá của vector \vec{v} song song hoặc trùng với đường thẳng b .

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

Câu 81. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, \widehat{A} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của BC . Về phía ngoài tam giác vẽ các tam giác vuông cân tại A là ABD và ACE



- a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$;
 b) Biểu diễn \overrightarrow{AM} theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. Từ đó chứng minh $AM \perp DE$.
- Câu 82.** Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm D thuộc cạnh AC thỏa mãn $AD = \frac{7}{12}AC$ (Hình 52).



- Chứng minh $AM \perp BD$.
- Câu 83.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm P, Q . Chứng minh rằng $\widehat{PMQ} = 90^\circ$ khi và chỉ khi $BP + \sqrt{3}CQ = BC$.
- Câu 84.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 1, BC = \sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AD .
 a) Chứng minh rằng các đường thẳng AC và BM vuông góc với nhau.
 b) Gọi H là giao điểm của AC, BM . Gọi N là trung điểm của AH và P là trung điểm của CD . Chứng minh rằng tam giác NBP là một tam giác vuông.
- Câu 85.** Cho tam giác ABC có $\widehat{A} < 90^\circ$. Dựng ra phía ngoài tam giác hai tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm BC, BD, CE . Chứng minh rằng:
 a) AM vuông góc với DE ;
 b) BE vuông góc với CD ;
 c) Tam giác MNP là một tam giác vuông cân.
- Câu 86.** Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 3, \widehat{BAC} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.
 a) Tính $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
 b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
 c) Chứng minh $AM \perp BD$.
- Câu 87.** Cho hình vuông $ABCD, M$ là trung điểm của BC, N là điểm nằm giữa hai điểm A và C . Đặt $x = \frac{AN}{AC}$. Tìm x thỏa mãn $AM \perp BN$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

- Câu 88.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi M, N là các điểm sao cho $3\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}, 5\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AC}$.
 a). Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}$
 b). Chứng minh AM vuông góc với BN .
- Câu 89.** Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Về bên ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân đỉnh A là ABD và ACE . Gọi M trung điểm của đoạn BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với DE .

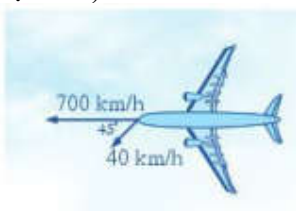
- Câu 90.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AH và HC . Chứng minh $BI \perp AJ$
- Câu 91.** Cho tam giác ABC cân tại A . Gọi H là trung điểm của đoạn BC , D là hình chiếu vuông góc của H trên AC , M trung điểm của đoạn HD . Chứng minh AM vuông góc với DB .
- Câu 92.** Cho tứ giác $ABCD$ có E là giao của hai đường chéo AC và BD . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, AD và H, K là trực tâm của các tam giác ABE, CDE .
- a). Chứng minh $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- b). Chứng minh $HK \perp IJ$
- Câu 93.** Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau và cắt nhau tại M . Gọi P là trung điểm của cạnh AD . Chứng minh MP vuông góc với BC khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD}$
- Câu 94.** Cho hình chữ nhật $ABCD$, vẽ $BH \perp AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AH và DC . Chứng minh $BM \perp MN$.
- Câu 95.** Cho hình vuông $ABCD$, điểm M thuộc đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC . Chứng minh rằng DMN là tam giác vuông cân.
- Câu 96.** Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABO và CDO . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh $HK \perp IJ$.
- Câu 97.** Cho tam giác ABC đều cạnh $3a$. Lấy M, N, P lần lượt trên 3 cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = a, CN = 2a, AP = x$. Tìm x để AM vuông góc với PN .
- Câu 98.** Tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) . D là trung điểm của AB , E là trọng tâm tam giác ACD . Chứng minh $OE \perp CD$

Dạng 5. Bài toán thực tế

Trong Vật lý, tích vô hướng giúp tính công A sinh bởi một lực \vec{F} có độ dịch chuyển là vector \vec{d} . Ta có công thức: $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP

- Câu 99.** Tính công sinh bởi một lực \vec{F} có độ lớn 20 N kéo một vật dịch chuyển theo một vector \vec{d} có độ dài 50m và cho biết $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$.
- Câu 100.** Tính công sinh bởi một lực \vec{F} có độ lớn 60 N kéo một vật dịch chuyển một vector \vec{d} có độ dài 200m. Cho biết $(\vec{F}, \vec{d}) = 60^\circ$.
- Câu 101.** Cho ba điểm M, N, P . Nếu một lực \vec{F} không đổi tác động lên một chất điểm trong suốt quá trình chuyển động của chất điểm, thì các công sinh bởi lực \vec{F} trong hai trường hợp sau có mối quan hệ gì với nhau?
- a) Chất điểm chuyển động theo đường gấp khúc từ M đến N rồi tiếp tục từ N đến P .
- b) Chất điểm chuyển động thẳng từ M đến P .
- Câu 102.** Một người dùng một lực \vec{F} có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100m. Biết lực hợp \vec{F} với hướng dịch chuyển là một góc 60° . Tính công sinh bởi lực \vec{F}
- Câu 103.** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h).



Câu 104. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 650 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 35 km/h . Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

Dạng 6. Tập hợp điểm

Dạng 1: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (1) (A, B là hai điểm cố định).

- $k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB.
- $k \neq 0$: Gọi I trung điểm của AB.

$$(1) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = k \Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

$$+ \text{ Nếu } k + \frac{AB^2}{4} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{AB^2}{4}: \text{ Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I, bán kính } \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$$

$$+ \text{ Nếu } k + \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{AB^2}{4}: \text{ Tập hợp điểm M là điểm I.}$$

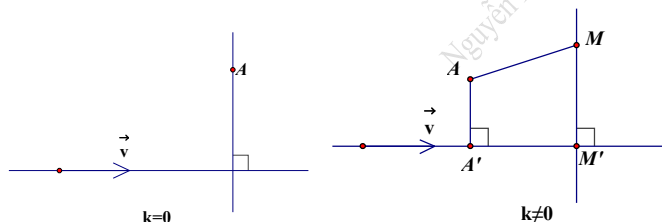
$$+ \text{ Nếu } k + \frac{AB^2}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{AB^2}{4}: \text{ Tập hợp các điểm M là rỗng.}$$

Dạng 2: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{v} = k$ (2) (A cố định, \vec{v} có hướng, độ dài xác định).

$k = 0$: Tập hợp các điểm M là đường thẳng qua A và vuông góc với giá của \vec{v}

$k \neq 0$: Gọi $\overrightarrow{A'M'}$ là hình chiếu của \overrightarrow{AM} trên giá của vector \vec{v} ; ta có: $(2) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \cdot \vec{v} = k$ (định lý hình chiếu). A' cố định $\Rightarrow M'$ cố định (M' nằm trên giá của \vec{v} định bởi $\overrightarrow{A'M'} = \frac{k}{v}$). Tập hợp các

điểm M là đường thẳng vuông góc với giá của vector \vec{v} tại M' .



Dạng 3: $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$ (3) (A, B cố định, α, β là hằng số và $\alpha + \beta \neq 0$).

Gọi I là điểm thỏa $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Rightarrow I$ là điểm cố định.

$$(3) \Leftrightarrow \alpha (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) MI^2 + 2(\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{MI} + \alpha IA^2 + \beta IB^2 = k$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) MI^2 = k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} > 0 \Leftrightarrow k > \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính

$$\sqrt{\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta}}.$$

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} = 0 \Leftrightarrow k = \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là điểm I.

Nếu $\frac{k - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)}{\alpha + \beta} < 0 \Leftrightarrow k < \alpha IA^2 + \beta IB^2$: Tập hợp điểm M là rỗng.

Chú ý:

Để giải các bài toán thuộc loại trên, ta nên thu gọn biểu thức đã cho bằng cách sử dụng công thức thu gọn vec tơ dưới đây:

– Cho hai điểm A, B cố định α, β là hằng số thỏa $\alpha + \beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MI}$.

– Cho ba điểm A, B, C cố định α, β, γ là hằng số thỏa $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ thì tồn tại duy nhất một điểm I sao cho $\alpha \overrightarrow{IA} + \beta \overrightarrow{IB} + \gamma \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Nếu với điểm M tùy ý trong mặt phẳng thì ta có: $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MI}$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 105. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Câu 106. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp điểm M thỏa:

a). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

b). $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

c). $(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

d). $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + 9\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MB^2 + 4MC^2$

Câu 107. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn điều kiện sau: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$

Câu 108. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = AB^2$

Câu 109. Cho tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = a, BC = 3a$. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

Câu 110. Cho A, B, C, D là bốn điểm cố định cho trước, tìm tập hợp những điểm M sao cho: $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) = 0$

Câu 111. Cho đoạn $AB = a > 0$ và số k. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = k$

Câu 112. Cho tam giác ABC, tìm tập hợp những điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$;

b) $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$.

Câu 113. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M sao cho:

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$;

b) $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}) = 0$;

c) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$;

d) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.

Câu 114. Cho hai điểm A, B và k là một số không đổi. Tìm tập hợp những điểm M thỏa điều kiện: $MA^2 + MB^2 = k^2$.

Câu 115. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = 0$

Câu 116. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

a). $MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$

b). $MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = 0$

Câu 117. Cho hai điểm A, B cố định và số k cho trước. Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ **Câu 118.** Cho tam giác ABC , tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MG} = AB^2$ (với G là trọng tâm tam giác ABC).**Câu 119.** Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có trọng tâm G .

a). Xác định vị trí điểm P thỏa $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

b). Chứng minh C, G, P thẳng hàng.

c). Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|$

Câu 120. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC và M là một điểm thay đổi:

a). Chứng minh $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM}^2$ không đổi.

b). Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = k$ (k là số thực cho trước).

Câu 121. Cho tam giác ABC . Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn:

a). $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = k$

b). $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} - 2\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = k$

(với k là một số cho trước).**Câu 122.** Cho tam giác ABC số a . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $3MA^2 + MB^2 - 4MC^2 = a$.**Câu 123.** Cho tam giác ABC và số k . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2MA^2 + 3MB^2 + 5MC^2 = k^2$.**C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA, SÁCH BÀI TẬP****Câu 1.** Nếu hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -4$ thì độ dài đoạn thẳng MN bằng bao nhiêu?

A. $MN = 4$

B. $MN = 2$

C. $MN = 16$;

D. $MN = 256$.

Câu 2. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$;

B. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;

C. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;

D. Nếu \vec{a}, \vec{b} khác $\vec{0}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) \neq 90^\circ$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

Câu 3. Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$ bằng:

A. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$.

B. $-AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$.

C. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

D. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ACB}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC . Giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng:

A. $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

B. $AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

C. $-AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$.

D. $AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{BAC}$.

Câu 5. Cho đoạn thẳng AB . Tập hợp các điểm M nằm trong mặt phẳng thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ là:A. Đường tròn tâm A bán kính AB .B. Đường tròn tâm B bán kính AB .

- C. Đường trung trực của đoạn thẳng AB .
D. Đường tròn đường kính AB .

Câu 6. Nếu hai điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NM} = -9$ thì:
A. $MN = 9$.
B. $MN = 3$.
C. $MN = 81$.
D. $MN = 6$.

BÀI TẬP BỔ SUNG

Câu 7. Cho \vec{a} và \vec{b} là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 8. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Câu 9. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector \vec{a} và \vec{b} .
A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.

Câu 10. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 11. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?
A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. B. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$. D. $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$

Câu 13. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?
A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.

Câu 14. Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:
A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 15. Cho tam giác đều ABC cạnh $a = 2$. Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
A. $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -2$.
C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = -4$. D. $(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2$.

Câu 16. Cho tam giác ABC cân tại A , $\hat{A} = 120^\circ$ và $AB = a$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$
A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
A. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. B. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$.
C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Câu 18. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hỏi mệnh đề nào sau đây sai?
A. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2$.

- C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
- Câu 19.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$; I là trung điểm của AD . Khi đó $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$ bằng:
- A. $\frac{9a^2}{2}$. B. $-\frac{9a^2}{2}$. C. 0 . D. $9a^2$.
- Câu 20.** Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây là sai?
- A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. B. $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. D. $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$.
- Câu 21.** Cho hình vuông $ABCD$, tính $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA})$
- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 22.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $BC = a\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a^2$. B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a$. C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = a\sqrt{2}$.
- Câu 23.** Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- A. 0 . B. a . C. $\frac{a^2}{2}$. D. a^2 .
- Câu 24.** Cho M là trung điểm AB , tìm biểu thức sai:
- A. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -MA \cdot AB$. B. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -MA \cdot MB$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = AM \cdot AB$. D. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA \cdot MB$.
- Câu 25.** Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và H là trung điểm BC . Tính $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CA}$
- A. $\frac{3a^2}{4}$. B. $-\frac{3a^2}{4}$. C. $\frac{3a^2}{2}$. D. $-\frac{3a^2}{2}$.
- Câu 26.** Biết $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Câu nào sau đây đúng
- A. \vec{a} và \vec{b} cùng hướng.
B. \vec{a} và \vec{b} nằm trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc 120° .
C. \vec{a} và \vec{b} ngược hướng.
D. A, B, C đều sai.
- Câu 27.** Cho 2 vectơ \vec{a} và \vec{b} có $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$
- A. $\sqrt{21}$. B. $\sqrt{61}$. C. 21 . D. 61 .
- Câu 28.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 60^\circ$, $AB = a$. Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$
- A. $3a^2$. B. $-3a^2$. C. $3a$. D. 0 .
- Câu 29.** Cho 2 vectơ đơn vị \vec{a} và \vec{b} thỏa $|\vec{a} + \vec{b}| = 2$. Hãy xác định $(3\vec{a} - 4\vec{b})(2\vec{a} + 5\vec{b})$
- A. 7 . B. 5 . C. -7 . D. -5 .
- Câu 30.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 4a$, đáy nhỏ $CD = 2a$, đường cao $AD = 3a$. Tính $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC}$
- A. $-9a^2$. B. $15a^2$. C. 0 . D. $9a^2$.
- Câu 31.** Cho tam giác ABC vuông tại C có $AC = 9$, $BC = 5$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- A. 9 . B. 81 . C. 3 . D. 5 .
- Câu 32.** Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Biết $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$

A. $\sqrt{7+\sqrt{3}}$. B. $\sqrt{7-\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$. D. $\sqrt{7+2\sqrt{3}}$.

Câu 33. Cho hai điểm B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CM}^2$ là :

- A. Đường tròn đường kính BC . B. Đường tròn $(B; BC)$.
C. Đường tròn $(C; CB)$. D. Một đường khác.

Câu 34. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Tập hợp những điểm M mà $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ là :

- A. Đường tròn đường kính AB .
B. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC .
C. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với AC .
D. Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB .

Câu 35. Cho hai điểm $A(2, 2)$, $B(5, -2)$. Tìm M trên tia Ox sao cho $\widehat{AMB} = 90^\circ$

- A. $M(1, 6)$. B. $M(6, 0)$. C. $M(1, 0)$ hay $M(6, 0)$. D. $M(0, 1)$.

Câu 36. Cho hai vector \vec{a} và \vec{b} . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$
C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Câu 37. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 38. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Câu 39. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

- A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Câu 40. Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2 \text{ cm}$, $BC = 3 \text{ cm}$, $CA = 5 \text{ cm}$ Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$ B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$ C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$ D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Câu 41. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

- A. $P = b^2 - c^2$ B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Câu 42. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

- A. $P = -1$ B. $P = 3a^2$ C. $P = -3a^2$ D. $P = 2a^2$

Câu 43. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.

Câu 44. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là

- A. tam giác OAB đều. B. tam giác OAB cân tại O .
C. tam giác OAB vuông tại O . D. tam giác OAB vuông cân tại O .

- Câu 45.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
 A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.
- Câu 46.** Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
 A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.
- Câu 47.** Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:
 A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.
- Câu 48.** Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.
 A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.
- Câu 49.** Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:
 A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.
- Câu 50.** Cho hai điểm A, B cố định và $AB = 8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -16$ là:
 A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.
- Câu 51.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
 A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2$.
 C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -2a^2$.
- Câu 52.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính giá trị của biểu thức $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$
 A. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 3a^2$. B. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 2a^2$.
 C. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$. D. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = 4a^2$.
- Câu 53.** Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $CD = BD = 5\sqrt{2}$, $AD = 3\sqrt{10}$, $AC = 10$. Tìm cosin góc giữa hai vectơ \overrightarrow{AC} và \overrightarrow{DB}
 A. $-\frac{4}{5\sqrt{2}}$. B. $-\frac{3}{5\sqrt{2}}$. C. $\frac{4}{5\sqrt{2}}$. D. $\frac{3}{5\sqrt{2}}$.
- Câu 54.** Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DA, BC . Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD biết $AB = CD = 2a$, $MN = a\sqrt{3}$.
 A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 50^\circ$. B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 60^\circ$. C. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 80^\circ$. D. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 30^\circ$.
- Câu 55.** Cho tam giác OAB vuông cân tại O , cạnh $OA = 4$. Tính $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$.
 A. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4$. B. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 2$.
 C. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 12$. D. $|2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = 4\sqrt{5}$.
- Câu 56.** Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A, D ; $AB \parallel CD$; $AB = 2a$; $AD = DC = a$. O là trung điểm của AD . Độ dài vectơ tổng $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ bằng
 A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{3a}{2}$. C. a . D. $3a$.
- Câu 57.** Cho ABC đều cạnh $2a$ với M là trung điểm BC . Khẳng định nào đúng?
 A. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$. B. $|\overrightarrow{AM}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\overrightarrow{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $|\overrightarrow{AM}| = a\sqrt{3}$.
- Câu 58.** Cho tam giác vuông cân ABC với $AB = AC = a$. Khi đó $|2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ bằng
 A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{5}$. C. $5a$. D. $2a$.

- Câu 59.** Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ \vec{a}, \vec{b} . Chọn phát biểu **đúng**.
- A. $\alpha = 60^\circ$. B. $\alpha = 30^\circ$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{8}$.
- Câu 60.** Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} là
- A. $8a^2$. B. $8a$. C. $8\sqrt{3}a^2$. D. $8\sqrt{3}a$.
- Câu 61.** Cho $\triangle ABC$ đều; $AB = 6$ và M là trung điểm của BC . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MA}$ bằng
- A. -18 . B. 27 . C. 18 . D. -27 .
- Câu 62.** Cho hai vectơ \vec{a} và \vec{b} . Biết $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.
- A. $\sqrt{11}$. B. $\sqrt{13}$. C. $\sqrt{12}$. D. $\sqrt{14}$.
- Câu 63.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 30^\circ, AC = 2$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính giá trị của biểu thức $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$.
- A. $P = -2$. B. $P = 2\sqrt{3}$. C. $P = 2$. D. $P = -2\sqrt{3}$.
- Câu 64.** Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB = 2a, AD = 3a, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Điểm K thuộc AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$
- A. $3a^2$. B. $6a^2$. C. 0 . D. a^2 .
- Câu 65.** Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8, BC = 7$ thì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng:
- A. -20 . B. 40 . C. 10 . D. 20 .
- Câu 66.** Cho hai vectơ \vec{a}, \vec{b} sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} .
- A. 120° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .
- Câu 67.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2\sqrt{2}$. C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$. D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.
- Câu 68.** Cho tam giác ABC vuông tại A , $BC = a\sqrt{3}$, M là trung điểm của BC và có $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$. Tính cạnh AB, AC .
- A. $AB = a, AC = a\sqrt{2}$. B. $AB = a, AC = a$.
C. $AB = a\sqrt{2}, AC = a$. D. $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{2}$.
- Câu 69.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$
- A. $\frac{21a^2}{4}$. B. $\frac{11a^2}{4}$. C. $\frac{9a^2}{4}$. D. $\frac{a^2}{4}$.
- Câu 70.** Cho các vectơ \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện $|\vec{2a} - \vec{3b}| = \sqrt{7}$. Tính $\cos(\vec{a}, \vec{b})$
- A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$. B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}$. C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$. D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{3}$.
- Câu 71.** Cho các vectơ \vec{a}, \vec{b} có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng 60° . Xác định cosin góc giữa hai vectơ \vec{u} và \vec{v} với $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$
- A. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{2}$. B. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{6}$. C. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{4}$. D. $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = -\frac{1}{3}$.

- Câu 72.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC . Tính $\cos \widehat{MNP}$.
- A. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$. B. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{4\sqrt{10}}$.
 C. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{\sqrt{10}}$. D. $\cos \widehat{MNP} = \frac{13}{45\sqrt{10}}$.
- Câu 73.** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2$. M là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MB}$, G là trọng tâm tam giác ADM . Tính $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC}$
- A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{5}{8}$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{8}$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{3}{7}$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{8}$.
- Câu 74.** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$
- A. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{a^2}{3}$. B. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{2a^2}{3}$.
 C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{4a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} = -\frac{5a^2}{3}$.
- Câu 75.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.
- Câu 76.** Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R . Tính R .
- A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $R = \frac{a}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.
- Câu 77.** Cho tam giác đều ABC cạnh 18cm. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ là
- A. Tập rỗng. B. Đường tròn có định có bán kính $R = 2$ cm.
 C. Đường tròn có định có bán kính $R = 3$ cm. D. Một đường thẳng.
- Câu 78.** Cho tam giác ABC , điểm J thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$, I là trung điểm của cạnh AB , điểm K thỏa mãn $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$. Một điểm M thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$. Tập hợp điểm M là đường nào trong các đường sau.
- A. Đường tròn đường kính IJ . B. Đường tròn đường kính IK .
 C. Đường tròn đường kính JK . D. Đường trung trực đoạn JK .
- Câu 79.** Cho tam giác ABC đều cạnh a . Lấy M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$. Tìm x để AM vuông góc với NP .
- A. $x = \frac{5a}{12}$. B. $x = \frac{a}{2}$. C. $x = \frac{4a}{5}$. D. $x = \frac{7a}{12}$.
- Câu 80.** Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao $AB = 2a$, các cạnh đáy $AD = a$ và $BC = 3a$. Gọi M là điểm trên đoạn AC sao cho $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$. Tìm k để $BM \perp CD$
- A. $\frac{4}{9}$. B. $\frac{3}{7}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{2}{5}$.

Nguyễn Bảo Vương