Statistik I

Gian Hiltbrunner

2. August 2017

1 Modelle für Zähldaten

1.1 Elementarereignisse

Elementarereignisse sind mögliche Ergebnisse oder Ausgänge des Experiments, die zusammen den Grundraum bilden:

$$\Omega = [\sigma]$$

Ω = Grundraum: Beinhaltet alle möglichen Elementarereignisse

$A, B, C, ...$ = Ereignisse

P = Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: 2-maliges Werfen einer Munze: $\Omega = KK, KZ, ZK, ZZ$ wobei K = "Kopf" und Z = "Zahl" bezeichnet. Ein Elementarereignis ist zum Beispiel $\omega = KZ$.

1.1.1 Mengenoperationen

$A \cup B \iff A$ Vereinigung B

$A \cap B \iff A$ Durchschnitt B

$A \setminus B \iff A$ ohne B

$A^c \iff$ nicht A

1.1.2 Axiome

1. Die Wahrscheinlichkeiten sind immer nicht-negativ: P(A) ≥ 0

2. Das Ereignis hat Wahrscheinlichkeit eins: P(Ω) = 1

3. P(AB) = P(A) + P(B) falls AB = $\emptyset$, d.h. für alle Ereignisse, die sich gegenseitig ausschliessen.

Weitere Regeln:

$$P(A^c) = 1 - P(A) = P(\Omega) - P(A)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1.2 Laplace-Modell

Falls alle Wahrscheinlichkeiten gleich gross sind kann mit dem Laplace-Modell gerechnet werden.

$$P(E) = \frac{g}{m}$$

Wobei g: günstige Ereignisse, m: mögliche Ereignisse

1.3 Unabhängigkeit

Falls

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

gilt, heissen A und B stochastisch unabhängig.

1.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

dabei gilt: $P(A|B) \neq P(B|A)$

1.4.1 Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeiten

$$P(A) = \sum P(A \cap B_i) = \sum P(A|B_i)P(B_i)$$

1.4.2 Satz von Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Dabei kann $P(B)$ im Nenner mit Hilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet werden.

1.5 Odds

$$odds(E) = \frac{P(E)}{1 - P(E)}$$

1.5.1 log-Odds

$$log - Odds(E) = \ln(odds(E))$$

1.5.2 Odds-Ratio

$$OR = \frac{odds(K|I = 0)}{odds(K|I = 1)}$$

1.6 Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable ist ein Zufallsexperiment, das als Ergebnis eine Zahl hat.

1.7 Bernoulli-Verteilung

Benutzt man zur Beschreibung von zufälligen Ereignissen, bei denen es nur zwei mögliche Versuchsausgänge gibt. Einer der Versuchsausgänge wird meistens mit Erfolg bezeichnet und der komplementäre Versuchsausgang mit Misserfolg. (z.B. Münzenwurf)

$$P(X = 1) = \pi, P(X = 0) = 1 - \pi$$

für $0 \leq \pi \geq 1$.

$$\mathrm{E}(X) = p$$

$$\mathrm{Var}(X) = p \cdot (1 - p) = pq$$

1.8 Binominalverteilung

Beschreibt die Anzahl der Erfolge in einer Serie von gleichartigen und unabhängigen Versuchen, die jeweils genau zwei mögliche Ergebnisse haben („Erfolg“ oder „Misserfolg“). Solche Versuchsserien werden auch Bernoulli-Prozesse genannt. (vgl. Galton-Brett) Eine Zufallsvariable ist binominalverteilt falls,

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x}$$

Dabei gilt $x = 0, 1, ..., n$ und π ist der Erfolgsparameter.

```
binomPdf(n,P,{x})
```

1.8.1 Approximation durch Normalverteilung

Die Binomialverteilung kann durch eine Normalverteilung approximiert werden, wenn n hinreichend groß und p weder zu groß noch zu klein ist. Als Faustregel dafür gilt $n\pi > 5$ und $n(1-\pi) > 5$.

1.8.2 Kumulative Verteilungsfunktion

Die kumulative Verteilungsfunktion ist gegeben als Summe über die Werte der Binominalverteilung von einer unteren zu einer oberen Grenze.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \in W_x; y \leq x} P(X = y)$$

```
binomCdf(n, P, Unt. Grenze, Ob. Grenze)
```

1.9 Kennzahlen einer Verteilung

1.9.1 Erwartungswert $\epsilon(X)$

$$\epsilon(X) = \sum_{x \in W_x} x P(X = x)$$

wobei W_x = Werteberiech von X.

1.9.2 Varianz

Die Varianz beschreibt die erwartete quadratische Abweichung der Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert.

$$\mathrm{Var}(X) := \mathrm{E}\left((X-\mu)^2\right)$$

1.9.3 Standardabweichung

$$s = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

```
stDevSamp({})
```

Für mehrere Stichproben $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} x_n - y_n$ und $x_i = x_i - y_i$

1.10 Verschiedene Verteilungen

1.10.1 Binominalverteilung

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

Falls n gross und π klein mit $\lambda = n\pi$.

$$\begin{aligned} P(X = x) = \tbinom{n}{x}\pi^x(1-\pi)^{n-x} &\approx P(Y = x) \\ &= exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!}(x = 0, 1, ..., n) \qquad (1) \end{aligned}$$

1.10.2 Hypergeometrische Verteilung

Angenommen, wir haben eine Urne mit N Kugeln. Davon sind m Kugeln markiert (= Erfolg) und wir ziehen n Kugeln (ohne Zurucklegen; die Erfolgswahrscheinlichkeit ändert sich also bei jedem Zug) aus der Urne. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl markierter Kugeln unter den n gezogenen Kugeln. Dann gilt X ist hypergeometrisch verteilt: X Hyper(N, n, m).

m: Anzahl der Erfolge in der Population
N: Populationsgrösse
n: Anzahl an Zügen
k: Anzahl der Erfolgszüge

$$P(X = x) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$E(X) = \frac{nm}{N}$$

$$Var(X) = \frac{nm(N-m)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

Binominalkoeffizient: $\binom{m}{k}$

```
nCr(m,k)
```

1.10.3 Poisson-Verteilung

Der Wertebereich der Binomial(n, π)-Verteilung ist $W = 0, 1, ..., n$. Falls eine Zufallsvariable nicht im vornherein einen beschränkten Wertebereich hat, so bietet sich für Zähldaten die Poisson-Verteilung an. z.B. Anzahl Versicherungsfälle pro Jahr.

$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$E(x) = Var(x) = \lambda$$

Addition Wenn $X \sim$ Poisson$(\lambda * X)$ und Y $\sim$ Poisson$(\lambda * Y)$ unabhängig sind, dann gilt $X + Y \sim$ Poisson $(\lambda X + \lambda Y)$.

1.10.4 Exponential-Verteilung

Anwendungsbeispiele

- Zeit zwischen Anrufen
- Lebensdauer von Atomen beim radioaktiven Zerfall
- Lebensdauer von Bauteilen, Maschinen und Geräten, wenn Alterungserscheinungen nicht betrachtet werden müssen
- Als grobes Modell für kleine und mittlere Schäden in Hausrat, Kraftfahrzeug-Haftpflicht, Kasko in der Versicherungsmathematik

λ steht für die Zahl der erwarteten Ereignisse pro Einheitsintervall.

Dichtefunktion:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Die Fläche der Kurve ist auf 1 normiert.

Kumulative Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \int_0^x f_\lambda(t) \; \mathrm{d}t = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$
$$Var(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

1.10.5 Normalverteilung/Gaussverteilung

Die Normal-Verteilung (manchmal auch Gauss-Verteilung genannt) ist die häufigste Verteilung fur Messwerte.
Beispiel: Zufällige Messfehler; Summe von unabhängigen, gleichverteilten Zufallsvariablen
Dichtefunktion:

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$E(x) = \mu$$
$$Var(x) = \sigma^2$$

Im Fall $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ wird diese Verteilung Standardnormalverteilung genannt. Die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung ist $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$.$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Normalisieren

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

z.B.: $\frac{Z-4}{2}$ ist normalverteilt nach $N(0,1)$

2 Statistik für Zähldaten

2.1 Grundfragen

- 1. Grundfragestellung: Welches ist der zu den Beobachtungen plausibelste Parameterwert? Die Antwort auf diese 1. Grundfrage heisst (Punkt-)Schatzung.
- 2. Grundfragestellung: Sind die Beobachtungen kompatibel (statistisch vereinbar) mit einem vorgegebenen Parameterwert? Die Antwort auf diese 2. Grundfrage heisst statistischer Test.
- 3. Grundfragestellung: Welche Parameterwerte sind mit den Beobachtungen kompatibel (statistisch vereinbar)? Die Antwort auf diese 3. Grundfrage heisst Konfidenzintervall oder Vertrauensintervall. Das Konfidenzintervall ist allgemeiner und informativer als ein statistischer Test.

2.2 Schätzung für Binominalverteilungen

2.2.1 Momentenmethode

Die relative Häufigkeit

$$\hat{\pi} = \frac{x}{n}$$

ergibt sich als Schätzung der Erfolgswahrscheinlichkeit.

2.2.2 Maximum-Likelihood

Ableiten der Wahrscheinlichkeitsfunktion um Maximum zu finden.

$$\frac{d}{d\pi} P[X = x]$$

Beispiel:
3 Münzwürfe: $P(KKZ) = P(K)P(K)P(Z) = p^2(1-p) = p^2 - p^3 \rightarrow$ Ableiten, null setzen und nach p auflösen.

2.3 Statistischer Test

Null-Hypothese kann nur falsifiziert und nicht verifiziert werden.

- 1. Modell: X: Anzahl Treffer bei n Versuchen;

  $$X \sim Binomial(n, \pi)$$

- 2. Spezifiziere die sogenannte Nullhypothese H_0:

  $$H_0 : \pi = \pi_0$$

  und (anhand der Problemstellung) eine sogenannte Alternative H_A:

  $$H_A : \pi \neq \pi_0$$

  (zwei-seitig)

  $$\pi > \pi_0$$

  (ein-seitig nach oben)

  $$\pi < \pi_0$$

  (ein-seitig nach unten)

Am häufigsten ist die Nullhypothese $H_0 : \pi = 1/2$(d.h. $\pi_0 = 1/2$), also "reiner Zufall" oder "kein Effekt". Meist fuhrt man einen Test durch, weil man glaubt, dass die Alternative richtig ist und man auch Skeptiker davon uberzeugen möchte.

- 3. Teststatistik: T: Anzahl Treffer bei n Versuchen. Verteilung der Teststatistik unter:

$$H_0 : T \sim Bin(n, \pi_0)^3$$

- 4. Lege das sogenannte Signifikanzniveau α fest. Typischerweise wählt man $\alpha = 0.05$ (5%) oder auch $\alpha = 0.01$ (1%).
- 5. Bestimme den sogenannten Verwerfungsbereich K fur die Teststatistik. Qualitativ zeigt K in Richtung der Alternative:

$K = [0, c_u] \cup [c_o, n]$ falls $H_A : \pi \neq_0$

$K = [c, n]$ falls $H_A : \pi > \pi_0$

$K = [0, c]$ falls $H_A : \pi < \pi_0$

Quantitativ wird K so berechnet, dass

$$P_{H_0}(X \in K) = P_{\pi 0}(X \in K) \overset{\approx}{\leq} \alpha$$

Dabei bedeutet $\overset{\approx}{\leq}$, dass die linke Seite kleiner oder gleich der rechten Seite sein soll, aber so nahe wie möglich.

- 6. Testentscheid: Erst jetzt betrachte, ob der beobachtete Wert der Teststatistik in den Verwerfungsbereich K fällt: Falls ja: so verwerfe H_0 (H_0 ist dann statistisch widerlegt, die Abweichung von der Nullhypothese ist "signifikant") Falls nein: belasse H_0 (was nicht heisst, dass deswegen H_0 statistisch bewiesen ist). Diese Art der Test-Entscheidung beruht auf dem Widerspruchs-Prinzip: Hypothesen können nur falsifiziert und nicht verifiziert werden.

2.4 Fehler 1. und 2 Art

Bei einem statistischen Test treten 2 Arten von Fehlern auf:

- Fehler 1. Art: Fälschliches Verwerfen von H_0, obwohl H_0 richtig ist.
- Fehler 2. Art: Fälschliches Beibehalten von H_0, obwohl die Alternative zutrifft.

	Wahr H_0	Wahr H_1
stat. Test H_0	richtig 1-α	Fehler 2.Art β
stat. Test H_1	Fehler 1. Art α	richtig (Macht) 1-β

Macht $= 1 - P($Fehler 2. Art$) = P($Verwerfen von H_0 falls H_A stimmt$) = P_{H_A}(X \in K)$
$P($Fehler 2. Art$) = P($Beibehalten von H_0 falls H_A stimmt)

2.5 Einseitige und zweiseitige Tests

- Der zweiseitige Test detektiert zwar Abweichungen in beide Richtungen von H_0, aber die Abweichung muss sehr deutlich sein, damit er sie erkennt. → Die Macht des zweiseitigen Tests ist klein.
- Der einseitige Test detektiert nur Abweichungen in eine Richtung von H_0, aber die Abweichungen mussen nicht so gross sein, damit er sie erkennt. → Die Macht des einseitigen Tests ist gross.

2.5.1 Beispiel zweiseitiger Test

- Modell: X: Anzahl Würfe, die Kopf zeigen, wenn man 10 mal wirft. (X $\sim Bin(10,\pi)$)
- Nullhypothese: $H_0 : \pi = 0.5$, Alternative: $H_A : \pi = 0.5$
- Teststatistik: T: Anzahl Wurfe, die Kopf zeigen, wenn man 10 mal wirft. Verteilung der Teststatistik unter $H_0 : T \sim Bin(10, 0.5)$
- Signifikanzniveau: $\alpha = 0.05$
- Verwerfungsbereich: Den zweiseitigen Verwerfungsbereich kann man leicht berechnen: Zunächst bestimmt man die Verwerfungsbereiche ($K_>$ und $K_<$) fur die einseitigen Alternativen $H_A : \pi > 0.5$ und $H_A : \pi < 0.5$ mit dem halben Signifikanzniveau $\alpha/2 = 0.025$.
- Für das Beispiel gilt also:

$$K_2 = K_< \cup K_> = \{0, 1\} \cup \{9, 10\}$$

.

- Weil ich nicht gesagt habe, wie oft wir Kopf beobachten, können wir den Testentscheid nicht fällen.

2.6 Approximation des Verwerfungsbereichs

Formen:
$K = [0, c_u] \cup [c_0, n]$, falls $H_A : \pi \neq \pi_0$
$K = [c_>, n]$ falls $H_A : \pi > \pi_0$
$K = [0, c_<]$ falls $H_A : \pi < \pi_0$
Normalapproximation für $\alpha = 0.05$:
$c_u = n\pi_0 - 1.96\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}$ abrunden
$c_o = n\pi_0 + 1.96\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}$ aufrunden
$c_> = n\pi_0 + 1.96\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}$ aufrunden
$c_< = n\pi_0 - 1.96\sqrt{n\pi_0(1 - \pi_0)}$ abrunden
Approx. gut falls n gross und π nicht nahe bei 0 oder 1.

2.7 Verwerfungsbereich

Der Verwerfungsbereich umfasst alle 'extremen' (im Sinne der Alternative) Beobachtungen, falls die Nullhypothese wahr ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Beobachtung im Verwerfungsbereich beobachtet wird, falls die Nullhypothese richtig ist, ist hoechstens 5% (Signifikanzniveau). Man muss also die kleinste Zahl k finden, sodass $P(X \geq k) \leq 0.05$.

2.8 p -Wert

- Der P-Wert ist definiert als das kleinste Signifikanzniveau, bei dem die Nullhypothese H_0 (gerade noch) verworfen wird.
- Der P-Wert ist die Wahrscheinlichkeit, unter Gültigkeit der Nullhypothese das beobachtete Ergebnis oder ein extremeres zu erhalten.

  t: Beobachtete Werte
  T: Teststatistik

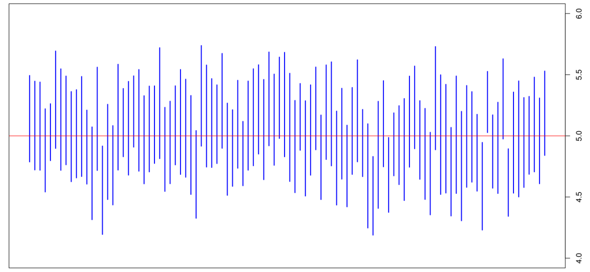
- Bei rechtsseitigem Test:
$$p_{\text{rechts}} := P(T \geq t \mid H_0)$$
- Bei linksseitigem Test:
$$p_{\text{links}} := P(T \leq t \mid H_0)$$
- Und bei zweiseitigem Test:
$$p = 2 \cdot \min\{p_{\text{rechts}}, p_{\text{links}}\}$$

2.9 Vertrauensintervall

Ein Vertrauensintervall I zum Niveau $1-\alpha$ besteht aus allen Parameterwerten, die im Sinne des statistischen Tests zum Signifikanzniveau α mit der Beobachtung verträglich sind. $I = \{\pi_0$; Nullhypothese $H_0 : \pi = \pi_0$ wird belassen$\}$

Ein häufig verwendetes Konfidenzniveau ist 95%, so dass in diesem Fall (mindestens) 95 % aller auf Grundlage von gemessenen Daten berechneten Konfidenzintervalle den wahren Wert der zu untersuchenden Population beinhalten. Die häufig anzutreffende Formulierung, dass der wahre Wert mit 95 % Wahrscheinlichkeit im Konfidenzintervall liegt, d. h. im vorliegenden berechneten Intervall, ist streng genommen nicht korrekt – der wahre Wert liegt entweder in diesem Intervall, oder er liegt nicht darin.

Konfidenzintervalle zum Niveau 95 % für 100 Stichproben vom Umfang 30 aus einer normalverteilten Grundgesamtheit. Davon überdecken 94 Intervalle den exakten Erwartungswert $\mu = 5$; die übrigen 6 tun das nicht.



2.10 Approximation

Für grosse n kann eine Normalapproximation für das 95% Vertrauensintervall verwendet werden.

$$I \approx \frac{x}{n} \pm 1.96\sqrt{\frac{x}{n}(1-\frac{x}{n})\frac{1}{n}}$$

3 Modelle und Statistik für Messdaten

3.1 Kennzahlen

Arithmetisches Mittel:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Empirische Standardabweichung:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Mittel von unabhängigen, gleichverteilten Messungen Das arithmetische Mittel von n unabhängigen, gleichverteilten Messungen ist zuverlässiger als eine Einzelmessung. Genauer gesagt: Die Standardabweichung des arithmetischen Mittels ist um den Faktor $\sqrt{n}$ kleiner als die einer Einzelmessung

$$\sigma_{neu} = \sigma_{alt}/\sqrt{n}$$

3.2 Transformationen

$$Y = a + bX$$
$$E(Y) = E(a + bX) = a + bE(X)$$
$$Var(Y) = Var(a + bX) = b^2 Var(X)$$
$$\sigma Y = |b|\sigma_X$$
$$\alpha - \text{Quantil}(Y) = q_Y(\alpha) = a + b_{qX}(\alpha)$$

Negatives Vorzeichen ebenfalls quadrieren!

3.3 Zentraler Grenzwertsatz

Falls $X_1, ..., X_n$ i.i.d.(Unabhängig und identisch verteilt), dann:

$$\overline{X}_n \approx N(\mu, \sigma_X^2/n)$$
$$S_n \approx N(\mu n, n\sigma_X^2)$$

wobei die Approximation im Allgemeinen besser wird mit grösserem n.
Standardisierte Zufallsvariable:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

3.3.1 Quantile

Das empirische α-Quantil ist anschaulich gesprochen der Wert, bei dem $\alpha * 100\%$ der Datenpunkte kleiner und $(1-\alpha) * 100\%$ der Punkte grösser sind.
Das empirische Quantil beträgt:

$$x_p = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{n \cdot p} + x_{(n \cdot p)+1}), & \text{wenn } n \cdot p \text{ ganzzahlig,} \\ x_{\lfloor n \cdot p + 1 \rfloor}, & \text{wenn } n \cdot p \text{ nicht ganzzahlig.} \end{cases}$$

Bemerkung: **Der Median entspicht gerade dem 50%-Quantil.**

Die Quartilsdifferenz ist gleich:
empirisches 75%-Quantil - empirisches 25%-Quantil
und ist ein Streuungsmass fur die Daten.

3.4 Korrelation und empirische Korrelation

Korrelation impliziert keinen kausalen Zusammenhang! Kovarianz:

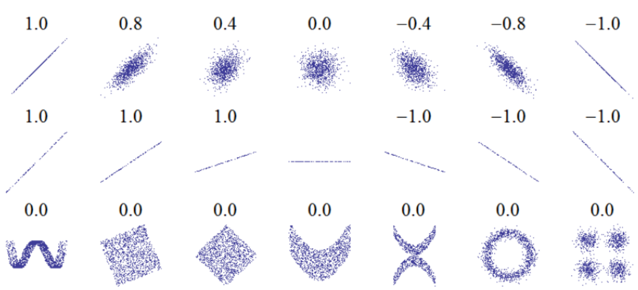
$$\operatorname{cov}(X,Y) := \mathrm{E}\left[(X-\mathrm{E}(X))\cdot(Y-\mathrm{E}(Y))\right]$$

Korrelation:

$$\rho_{X,Y} = \operatorname{corr}(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_X\sigma_Y}$$

empirische Korrelation:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(n-1)}$$

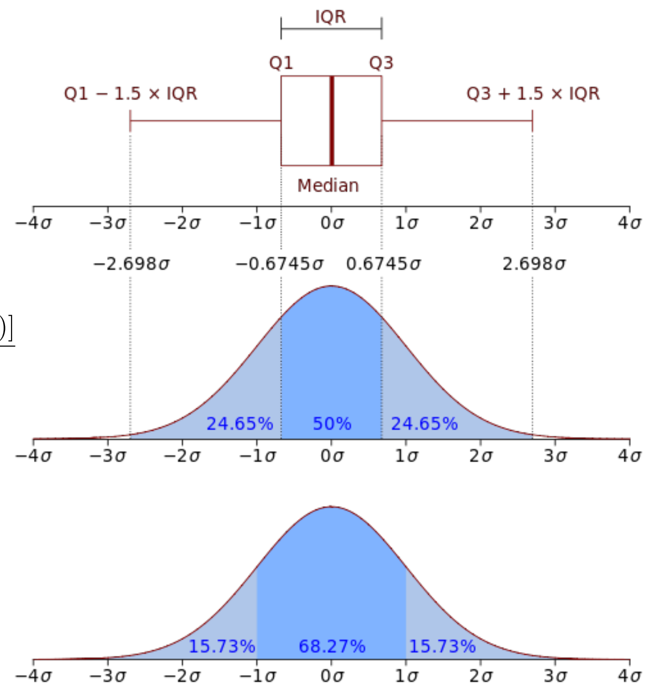


3.4.1 Standardisierung

Ist X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = \mu\,\mathrm{E}(X) = \mu$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2\,\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ (und dementsprechend Standardabweichung σ), so erhält man die zugehörige standardisierte Zufallsvariable durch:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

3.5 Boxplot



3.6 Kennzahlen stetiger Verteilungen

Dichte

$$P(x < X \leq x+h) \approx h * f(x)$$

Erwartungswert

$$\varepsilon(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

Standardabweichung

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\varepsilon(X))^2 f(x)dx$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

3.7 $\sqrt{n}$-Gesetz

Die Streuung des arithmetischen Mittels ist nicht proportional zu $\frac{1}{n}$, sondern nur zu $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.8 Wichtige stetige Verteilungen

vgl. (Verschiedene Verteilungen)

3.8.1 Uniforme Verteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{falls } a \leq x \leq b. \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad (2)$$

Kumulative Verteilungsfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < a. \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{falls } a \leq x \leq b. \\ 1, & \text{falls } x > b \end{cases} \qquad (3)$$

Kennzahlen:
$(X) = \frac{a+b}{2}$
$Var(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$

3.8.2 Standard-Normalverteilung

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)dy$$

3.9 Approximation der t-Verteilung durch Normalverteilung

Fur grosse Werte von n ist die Normalverteilung eine ausgezeichnete Approximation der t-Verteilung. Daher kann man $t_n - 2; 1-\alpha/2$ mit $\Phi - 1\ (1-\alpha/2)$ approximieren. Sie sollten sich merken, dass $\Phi - 1(1-0.05/2) = \Phi - 1(0.975)2$. D.h., eine gute Faustregel fur ein 95%-Vertrauensintervall ist:

$$[\beta_0 - 2(\text{s.e}); \beta_0 + 2(\text{s.e})]$$

3.10 z-Test

3.10.1 Verwerfungsbereich

$$K = (-\infty, -\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})] \cup [\Phi^{-1}(1-\frac{\alpha}{2}), \infty) \text{ bei } H_A: \mu \neq \mu_0,$$
$$K = (-\infty, -\Phi^{-1}(1-\alpha)] \quad \text{bei } H_A: \mu < \mu_0,$$
$$K = [\Phi^{-1}(1-\alpha), \infty) \quad \text{bei } H_A: \mu > \mu_0.$$

Tabelle: $df = \infty$

Normalerweise: $\sigma(t-test) > \sigma(z-test)$ Für nahe beieinanderliegende Datenpunkte kann es sein, dass $\sigma(t-test) < \sigma(z-test)$. Damit wäre dann das Vertrauensintervall des t-Tests kleiner.

4 t-Test

Die wahre Standardabweichung muss nicht bekannt sein!

4.1 Teststatistik für eine Stichprobe

$$T = \sqrt{n} * \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sigma_X} = \sqrt{n} * \frac{D_{vorher-nachher}}{\sigma_X}$$

4.1.1 Verwerfungsbereich

Zweiseitig:

$$[-\infty; -t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}] \cup [t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}; \infty]$$

Einseitig ($H_A : \mu < \mu_0$) (und vice versa.)

$$[-\infty; -t_{n-1;1-\alpha}]$$

4.1.2 Vertrauensintervall für μ

Zweiseitig:

$$[\overline{x}_n - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \overline{x}_n + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}]$$

Einseitig:
Falls $H_A : \mu < \mu_0$:

$$(-\infty; \overline{x}_n + t_{n-1,1-\alpha} \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}})$$

Falls $H_A : \mu < \mu_0$:

$$(\overline{x}_n - t_{n-1,1-\alpha} \frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}; \infty)$$

4.1.3 Faustregel zu Stichprobengrösse

$$n > 4 * \frac{\sigma^2}{\lambda^2}$$

σ: Standardabweichung
$2 * \lambda =$ Breite

4.1.4 p-Wert

Die Anzahl Freiheitsgrade sind $df = n_1 + n_2 - 2 = 20$. Angenommen $T \approx t_{20}$. In der Tabelle der t-Verteilung liest man dann ab (Zeile $df = 20$): $0.995 \to 2.845$. D.h., bei einem zweiseitigen Test gehoert zur Teststatistik $t = 2.845$ der p-Wert $p = 2 * 0.005 = 0.01$.

4.1.5 Welch-Test

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \omega_0}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}} \approx t_\nu$$

Obwohl der Welch-Test speziell für den Fall $\sigma_X \neq \sigma_Y$ entwickelt wurde, funktioniert der Test nicht gut, wenn mindestens eine der Verteilungen nicht-normal ist, die Fallzahlen klein und stark unterschiedlich ($n \neq m$) sind.

4.1.6 Mann-Whitney-U Test

Falls Daten nicht normalverteilt

4.1.7 Übersicht ungepaarte Tests

Test	Annahmen				n_{min} (falls $n = m$) bei $\alpha = 0.05$	Macht für ein Beispiel (1)
	$\sigma_X = \sigma_Y$	$X_i \sim N$ $Y_i \sim N$	F, G haben gleiche Form	iid pro Gruppe		
t ($\sigma_X = \sigma_Y$)	x	x	x	x	2	57 %
t ($\sigma_X \neq \sigma_Y$)		x		x	2	56 %
MW U-Test	x		x	x	4	53 %

4.2 Statistiken für zwei Stichproben

4.2.1 Gepaarte Stichproben

$$n = n$$

- beide Versuchsbedingungen an derselben Versuchseinheit eingesetzt werden
- oder jeder Versuchseinheit aus der einen Gruppe genau eine Versuchseinheit aus der anderen Gruppe zugeordnet werden kann.

Beispiel: Die Wirksamkeit von Augentropfen zur Reduktion des Augeninnendrucks soll untersucht werden. Wir haben 12 Patienten. Bei jedem Patienten wählen wir zufällig ein Auge aus. In dieses Auge kommen die Augentropfen mit dem Wirkstoff. In das andere Auge kommen Tropfen ohne Wirkstoff (Placebo). Fur jede Testperson haben wir also zwei Messungen: Eine fur das rechte und eine für das linke Auge; die Zuordnung ist eindeutig. Somit handelt es sich um gepaarte Stichproben.

4.2.2 Ungepaarte Stichproben

-Beispiel: Wir haben die Schmelzwärme mit zwei verschiedenen Methoden hintereinander gemessen. Jede Messung ist entweder mit Methode A oder mit Methode B, aber nicht mit beiden gleichzeitig gemacht worden. Es gibt also keinen eindeutigen Zusammenhang zwischen den Messungen der Methode A und den Messungen der Methode B. Daher sind die beiden Stichproben ungepaart.

4.2.3 Teststatistik für zwei Stichproben

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m}{S_{pool}\sqrt{1/n + 1/m}}$$

→ **Wurzel ziehen aus gepooltem Wert!**

$$S_{pool}^2 = \frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \overline{Y}_m)^2\right) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{n+m-2}((n-1)\sigma_x^2 + ((m-1)\sigma_y^2) \tag{5}$$

4.3 Vorzeichen-Test

Die Stichprobenwerte, die größer als der hypothetische Median θ_0 sind, bekommen ein "+ßugeordnet; Werte, die kleiner sind, ein "$-$". Das heißt, die Stichprobenvariable wird mediandichotomisiert. Die Anzahl der positiven Vorzeichen wird gezählt und dient als Teststatistik.

Wir betrachten die Situation, wo die Daten iid. sind, wobei die einzelnen X_i nicht normalverteilt sein müssen. Der Vorzeichentest testet Hypothesen über den Median der Verteilung von X_i, den wir hier mit μ bezeichnen; im Falle einer symmetrischen Verteilung ist $\mu = E(Xi)$. Wenn μ der Median der Verteilung von X ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Realisierung von X grösser als μ ist genauso gross wie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Realisierung von X kleiner als μ ist. In anderen Worten: $P(X > \mu) = 0.5$.

Die Nullhypothese des Vorzeichen-Tests lautet $H_0 : \mu = \mu_0$, wobei μ der Median und μ_0 ein vorgegebener, bekannter Wert ist.

4.4 Wilcoxon

Der Wilcoxon-Test ist ein Kompromiss, der keine Normalverteilung voraussetzt wie der t-Test und die Information der Daten besser ausnutzt als der Vorzeichen-Test. Die Voraussetzung fur den Wilcoxon-Test ist: Die Daten iid. wobei die Verteilung der X_i's stetig und symmetrisch ist bezuglich $= E(X_i)$

5 Lineare Regression

5.1 Tabelle lesen

5.1.1 95% -Vertrauensintervall

-Das 95%-Vertrauensintervall berechnet sich als $(Estimate) \pm c * (Std.Error)$. Für das approximative 95%-Vertrauensintervall ist c=2.
-Per Definition enthält das 95%-Vertrauensintervall alle Parameter μ, bei denen ein Test mit der Nullhypothese $H_0 : \beta_0 = \mu$ nicht verwerfen würde.
-Das 95%-Vorhersageintervall ist immer breiter als das 95%- Vertrauensintervall für den erwarteten Wert bei gleichen Bedingungen.

5.1.2 p-Wert

Der p-Wert kann mit Hilfe des t-value aus der Tabelle der t-Verteilung mit $n-$(Anzahl geschätzter Koeffizienten) Freiheitsgraden abgelesen werden.

5.1.3 Freiheitsgrade

Die Anzahl Freiheitsgrade der t-Verteilung berechnet sich aus der Anzahl Datenpunkte (n) minus die Anzahl geschätzter Koeffizienten (Anzahl β)

5.1.4 t-Wert

Der Quotient aus Estimate und Std.Error ergibt den t-Wert.

$$\frac{(Estimate)}{(Std.Error)} = t - Wert$$

Ist der Wert signifikant auf dem x%-Niveau?
→ t-Tabelle

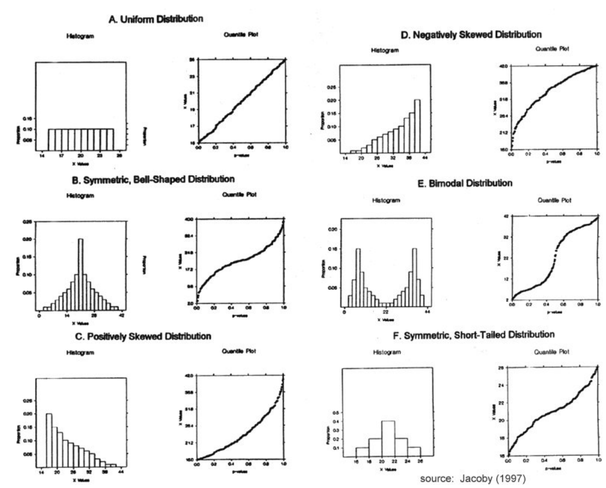
5.1.5 Linearität

Das Beiwort „linear“ ergibt sich dadurch, dass die abhängige Variable eine Linearkombination der Regressionskoeffizienten darstellt (aber nicht notwendigerweise der unabhängigen Variablen)
βs linear!

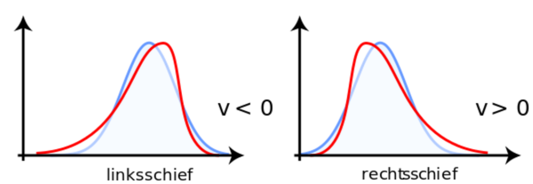
5.2 Vorhersageintervall

Das Vorhersageintervall beschreibt den Bereich, in welchem sich der **wahre Ertrag** für gewisse Bedingungen mit x% Wahrscheinlichkeit befindet.

6 QQ-Plots



7 Schiefe



8 Beispiele

Wahrscheinlichkeiten $B =$ Frau hat Brustkrebs
$Bc =$ Frau hat keinen Brustkrebs
$Pos =$ positives Testresultat
$Neg =$ negatives Testresultat. Gesucht ist $P(B|Pos) = P(Pos|B) * P(B)/P(Pos)$, wobei wir den Satz von Bayes angewendet haben. Die Wahrscheinlichkeit ein positives Testresultat zu erhalten berechnet sich als $P(Pos) = P(Pos|Bc)P(Bc) + P(Pos|B)P(B) = (1 - P(Neg|Bc))P(Bc) + P(Pos|B)P(B) = (1 - 0.8)0.98 + 0.90.02 = 0.214$ Deshalb ist $P(B|Pos) = 0.9 * 0.02/0.2140.084$

Zentraler Grenwertsatz Ein durchschnittlicher Lachsfisch wird etwa 1 m lang und erreicht ein Gewicht von 10 kg (± 2 kg Standardabweichung). Ein Fischerboot fängt an einem guten Tag 30 Lachsfische. Die Gewichte der Fische seien unabhängig voneinander. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fang mehr als 330 kg wiegt, kleiner als 1%.

Richtig. Definiere das Gesamtgewicht als $Z = \sum_{i=1}^{30} X_i$ mit $X_i :=$ das Gewicht vom i-ten Lachs. Gemäss des Zentralen Grenzwertsatzes folgt das Gesamtgewicht einer Normalverteilung mit Erwartungswert $10 * 30$ und Standardabweichung $2\sqrt{30}$. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} P(Z > 330) &= P\left(\frac{Z - 10 * 30}{2\sqrt{30}} > \frac{330 - 300}{2\sqrt{30}}\right) \\ &= P\left(\frac{Z - 10 * 30}{2\sqrt{30}} > 2.74\right) = 1 - P(Z^* \leq 2.74) \\ &= 1 - 0.9969 = 0.0031 < 0.01. \end{aligned}$$

Hier ist $Z^* := \frac{Z - 10 * 30}{2\sqrt{30}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ das standardisierte Gesamtgewicht.