Physik

Gian Hiltbrunner

8. August 2017

1 Grundlegende Konzepte der Naturwissenschaften

1.1 Einheiten

Zehnerpotenz	Prefix	Sprechweise	Beispiel
10^{12}	T	Tera	1 TW (ein Terawatt)
10^9	G	Giga	1 GW (ein Gigawatt)
10^6	M	Mega	1 MW (ein Megawatt)
10^3	k	kilo	1 km (ein Kilometer)
10^{-1}	d	dezi	1 dm (ein Dezimeter)
10^{-2}	c	centi	1 cm (ein Centimeter)
10^{-3}	m	milli	1 ms (eine Millisekunde)
10^{-6}	μ	mikro	1 μs (eine Mikrosekunde)
10^{-9}	n	nano	1 nm (ein Nanometer)
10^{-12}	p	piko	1 ps (eine Pikosekunde)
10^{-15}	f	femto	1 fm (ein Femtometer)
10^{-18}	a	atto	1 as (eine Attosekunde)

Quadratische und kubische Einheiten ebenfalls potenzieren!

1.2 Geometrie

$$\sin(\alpha) = \frac{G}{H}; \cos(\alpha) = \frac{A}{H}; \tan\alpha = \frac{G}{A}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Kugel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, A = 4\pi r^2$$

Kreuzprodukt

$$u \times v = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

1.3 Konstanten und Anderes

Avogadro: $N_A = 6.022 \times 10^{23} mol^{-1}$
Volumen: $1m^3 = 1000L$
$[C] = [K] - 273.15$

2 Mechanik

2.1 Bewegung in einer Dimension

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

2.1.1 Momentane Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}$$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t')dt'$$

2.2 Momentane Beschleunigung

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{v}}(t)$$

$$v(t) - v(0) = \int_0^t a(t')dt' + [v_0]$$

2.3 Kreisbewegung

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \omega = \frac{2\pi}{T}; \omega = 2\pi f$$

Zentripetalbeschleunigung

$$a_Z = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

$$\mathrm{v}_\perp = \frac{d\phi}{dt} r = \omega \cdot r$$

2.4 Trägheit (1. Newton)

Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.

2.5 Bewegungsgleichung (2.Newton)

$$m\vec{a} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$$

z.B.: Bei Auslenkung $x(t) \to \frac{d^2x(t)}{dt^2}$
$[F] = kg * m/s^2$

2.6 3. Newton

$$actio = reactio$$

2.7 Hooksches Gesetz

$$F = k(l - l_0)$$

2.8 Superpositionsprinzip der Kräfte

$$\vec{F}_K = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

"Die Gesamtkraft auf einen Körper ist die Summe der einzelnen Kräfte, die auf ihn wirken."

2.9 Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v}; \Delta p = F\Delta t \quad [p] = Ns$$

2.10 Reaktionsprinzip

'Actio = Reactio'

$$\vec{F}_{Hin} = -\vec{F}_{Rück}$$

2.11 Harmonische Schwingungsgleichung

$$\ddot{z} = -\omega^2 z, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$y(t) = y_0 \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_0), f = \frac{1}{T}$$

wobei y_0 = Amplitude, φ_0 = Nullphasenwinkel

$$T = 2\pi\theta = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.12 Gedämpfte Schwingung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}$$

Lösung der Diff.gleichung:

$$x(t) = Ae^{\frac{-t}{2r}} \sin[\sqrt{1 - (\frac{r}{2})^2}\frac{t}{\theta} + \delta]$$

2.13 Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_{ZF} = mr_0\omega^2 \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = m\omega^2\vec{r}$$

2.14 Newtonsches Gravitationsgesetz

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$G = 6.674 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

2.15 Erdanziehung

$$F_E = mg$$

2.16 Coulombsches Gesetz

$$F_C = \frac{|q_1 q_2|}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$\epsilon_0 = 8.854 * 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}, e = 1{,}602\,176 \cdot 10^{-19}$ C

2.17 Hooksches Gesetz

$$F = -k(l - l_0); k = \frac{EA}{L_0}$$

2.18 Hooksches Gesetz für makro. Körper

$$\sigma = -E\epsilon$$

2.19 Kinetische Energie

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{p^2}{2m}$$

2.20 Arbeit

$$W_C = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$$
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\,\cos\langle\left(\vec{F}, \vec{s}\right)$$

2.21 Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

2.22 Arbeit als Integral der Leistung

$$\Delta W = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) \bullet \vec{v}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} P(t)dt$$

2.23 Konservative Kraft

'Eine Kraft ist konservativ, wenn die Gesamtarbeit, die sie an einem Körper verrichtet, der sich auf einer beliebigen geschlossenen Bahn bewegt, Null ist.'

2.24 Potentielle Energie

$$\Delta E_{pot} = \int_C \vec{F}_K \bullet d\vec{r} = -W_C$$

Im Schwerefeld der Erde:

$$E_{pot} = mgh$$

$g_{Erde} = 9.81\,\frac{m}{s^2}$

2.25 Kraft aus Potentieller Energie

$$F_K = -\frac{dE_{pot}}{dx} = -\frac{dV}{dx}$$

2.26 Hamiltonian

$$\mathcal{H}(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_n, \vec{r}_1, ..., \vec{r}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1;i\neq j}^{n} V(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$$

2.27 Zustand von Vielteilchensystemen

Daher nennt man in der Mechanik von Vielteilchensystemen den Satz von Vektoren $(\vec{p}_1, ..., \vec{p}_n, \vec{r}_1, ..., \vec{r}_n)$ zu einem bestimmten Zeitpunkt den Zustand des Systems. Aus dem Systemzustand zu einem bestimmten Zeitpunkt lassen sich (im Prinzip) mit Hilfe der Bewegungsgleichungen die Systemzustände zu beliebigen zukunftigen oder vergangenen Zeiten berechnen.

2.28 Energieerhaltung

$$\frac{dE_{kin,tot}}{dt} = 0$$

2.29 Kraftstoss

$$\Delta\vec{p} = \int_0^T \vec{F}(t)dt$$

2.30 Impulserhaltung

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = const.$$

2.31 Bewegungsgl. für zusammengesetztes System

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

2.32 Unelastischer Stoss

2.32.1 Geschwindigkeit nach dem Stoss

$$\vec{V} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_2$$

2.32.2 Massenschwerpunkt

$$\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$$

wobei

$$M = \sum_i m_i$$

2.32.3 Verlust an E_{kin}

$$\Delta E_{kin} = -\frac{1}{2}\mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

2.33 Elastischer Stoss

2.33.1 Endgeschwindigkeiten

$$v_{1,E} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{1,A} + \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{2,A}$$
$$v_{2,E} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{1,A} + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_{2,A}$$

2.33.2 $m_1 >> m_2$

$$v_{1,E} = (1-\frac{2m_2}{m_1})v_{1,A} + \frac{2m_2}{m_1}v_{2,A}$$
$$v_{2,E} = (2-\frac{2m_2}{m_1})v_{1,A} - (1-\frac{2m_2}{m_1})v_{2,A}$$

2.34 Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [M] = Nm$$
$$M = rF\sin(\phi)$$
$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

2.35 Trägheitsmoment

$$I = \int_Q r^2 \mathrm{d}m \quad [I] = kgm^2$$

2.36 Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad [L] = \frac{kgm^2}{s} = Js$$

2.37 Drallsatz

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

2.38 Drehimpulserhaltung

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = const.$$

3 Statistische Mechanik

3.1 Mittelwert von Summen von Zufallsgrössen

$$x = \sum_j x_j$$

Mittelwert:

$$\langle x\rangle = \sum_j \langle x_j\rangle$$

3.2 Stoffmenge

$$n = \frac{\langle N\rangle}{N_A}$$

wobei $N_A = 6.022 \times 10^{23}\,\frac{1}{mol}$: Gibt an, wie viele Teilchen (etwa Atome eines Elements oder Moleküle einer chemischen Verbindung) in einem Mol des jeweiligen Stoffes enthalten sind.

3.3 Mittlere Teilchendichte

$$p_n = \frac{\langle N\rangle}{V}$$

3.4 Konzentration

$$c = \frac{n}{V} = \frac{p_N}{N_A}$$

3.5 Mittlere freie Weglänge

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}p_N \pi d^2} = \frac{V_T}{\sqrt{2}\sigma_0}$$

Abstand zwischen Teilchen:

$$d_T = \left(\frac{1}{p_N}\right)^{\frac{1}{3}}$$

3.6 Diffusion

3.7 Varianz des Ortsvektors bei der Diffusion

$$\langle R^2 \rangle = \alpha t$$

3.7.1 Diffusionskonstante

$$D = \frac{1}{6}\frac{\langle R^2 \rangle}{t}$$

Nach der Diffusionszeit t sind ca $\frac{1}{e}$ der Teilchen bis R diffundiert.

Diffusionsstrom:

$$I = \frac{\frac{\Delta m}{\Delta t}}{M_{Mol.Masse}}$$

3.7.2 Erstes Ficksches Gesetz

'Die Diffusionsstromdichte ist proportional zum negativen Gradienten der Teilchendichte (Konzentration). Die Proportionalitätskonstante ist die Diffusionskonstante.'

$$J_x(x) = -D\frac{dp_N(x)}{dx} = \frac{I}{A}$$

3.7.3 Diffusionskonstante

$$D = \frac{1}{3}v\delta$$

wobei v die mittlere Teilchengeschwindigkeit und δ die mittlere freie Weglänge ist.

3.8 Zweites Ficksches Gesetz

$$\frac{\partial \rho_N(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial J_x(x,t)}{\partial x} = 0$$

3.9 Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \rho_N(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho_N(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

3.10 Druck

$$p = \frac{\langle F \rangle}{A}$$

$[p] = Pa$

3.11 Druck eines idealen Gases

$$p = \frac{2}{3}\rho_N \frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{2}{3}\rho_N \langle E_{kin} \rangle$$

3.12 Energiezunahme des Gases durch Volumenarbeit

$$dW = -pdV$$

3.13 Anzahl an Mikrozuständen

$$N_{Mikro} = N_{Zustandsmöglichkeiten/Teilchen}^{N_{Teilchen}}$$

3.14 Multiplizität des Mikrozustandes

Anzahl der Konfigurationen die das System haben kann. Bsp. : 3 Arten von N Bällen(A, B, C). A ist bekannt also $(0, N-A), (1, N-A-1), ..., (N-A-1, 1), (N-A, 0) \rightarrow \Omega(A, N)N - A + 1$

$$\Omega(k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} = \binom{N}{k}$$

Maximal für $k = N/2$

3.15 Entropie der Informationstheorie

$$S = -\sum_{\mu} prob(\mu)\log_2(prob(\mu)), [S] = bit$$

Laplace:

$$prob(A) = \frac{Erfolge}{Möglichkeiten}$$

Grundprinzip der stat. Mechanik:

$$prob(\mu) = \frac{1}{\Omega(E, V, N)}$$

3.16 Physikalische Entropie

$$S(M) = -k_B \sum_{\mu \in M} prob(\mu)\ln(prob(\mu)), [S] = J/K$$

3.17 Entropie des Makrozustandes

$$S(E, V, N) = k_B \ln \Omega(E, V, N)$$

$\rightarrow$ Entropie ist additiv.

3.18 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

$$\Delta S \geq 0$$

3.19 Kinetische Temperatur

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{3}{2}k_B T \geq 0$$

Spezialfall für 3 dim. $\rightarrow$ vgl. Gleichverteilungssatz.

Boltzmann-Konstante k_B:
$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$

3.20 Zustandsgleichung des idealen Gases

$$pV = Nk_B T$$

3.21 Definition der Temperatur

$$\frac{1}{T} = \frac{dS(\epsilon)}{d\epsilon} \geq 0$$

3.22 Wärmemenge

$$dQ = TdS$$

3.23 Wärmekapazität

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\Delta E_{heat}}{\Delta T}$$

Spezifische Wärmelapazität pro Mol:

$$C = \frac{\Delta Q}{n\Delta T}$$

3.24 Druck

$$p = T\Big(\frac{\partial S}{\partial V}\Big)_{E,N}$$

3.25 Chemisches Potential

$$\mu_{ch} = -T\frac{\partial S}{\partial N}$$

3.26 Chemische Energie

$$\Delta E_{ch} = \mu_{ch}\Delta N$$

3.27 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

$$\Delta E = T\Delta S - p\Delta V + \mu_{ch}\Delta N = \Delta Q + \Delta W + \Delta E_{chem}$$

3.28 Boltzmann-Faktor

$$prob(S \text{ im Zustand } \mu) = \frac{1}{Z}\exp\Big(-\frac{\epsilon_\mu}{k_B T}\Big)$$

Dabei ist μ ein mikroskopischer Zustand des Systems S, der die Energie ϵ_μ hat, T ist die Temperatur des Wärmereservoirs. Die Grösse Z ist der Normierungsfaktor.

'Fur ein System, das im Gleichgewicht mit einem Wärmereservoir der Temperatur T ist gilt: die Wahrscheinlichkeit eines Systemzustandes mit einer bestimmten Energie nimmt exponentiell mit dem Verhältnis der Energie zur thermischen Energie $k_B T$ ab.'

3.29 Mittlere kinetische Energie eines Teilchens bei der Temperatur T

$$\langle \epsilon_{kin} \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

3.30 Gleichverteilungssatz

$$\epsilon_{therm} = \frac{f}{2}k_B T$$

f: Freiheitsgrade des Systems

3.31 Streuzeit

Die mittlere Zeit zwischen zwei Stössen, die wir Streuzeit nennen ist daher gegeben durch:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_{therm}} = \frac{1}{\sqrt{2}\rho_N \pi d^2}\sqrt{\frac{m}{3k_B T}}$$

Streurate:

$$\frac{1}{\tau} = \sqrt{2}\rho_N \pi d^2 \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

3.32 Anwendungen des Boltzmannfaktors

Dichteverteilung von Molekülen:

$$\rho_N(z) = \rho_N(z=0)\exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$$

dabei ist $\rho_N(z=0)$ die Dichte an der Erdoberfläche

Allgemeines Vorgehen 1. Bestimmung von $\frac{1}{Z} = C$ mit $\int_0^\infty prob(z)dz = 1$ z kann z.B. für die Höhe stehen oder für die Energie.
2. Das Integral kann jetzt mit der Konstante für spezielle Bedingungen ausgewertet werden:

$$\int_{E_o}^\infty prob(z)dz$$

3.33 Dichte

$$\rho = \frac{\langle M \rangle}{V}$$

3.34 Archimedisches Prinzip

Die auf einen Körper wirkende Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraft der von ihm verdrängten Flussigkeits- bzw. Gasmenge.

4 Dimensionsanalyse

4.1 Begriffe

π -Theorem Haben wir eine physikalische Gleichung mit n dimensionsbehafteten Grössen, in denen m verschiedene Dimensionen eine Rolle spielen, dann lässt sich die Gleichung mit Hilfe von $n-m$ dimensionslosen Grössen ausdrücken.

charakteristische Skala **Einheiten potenzieren falls Grössen potenziert werden!** Dimensionen gesuchter Grössen durch gegebene Grössen audrücken.

$$t \to \tilde{t} = \frac{v}{g} = \frac{[L]/[T]}{[L]/[T]^2} = [T]$$

Einsetzen der Werte um Skala zu erhalten!

dimensionslose Grössen

$$t^*_{DL} = \frac{t}{\tilde{t}} = \frac{g}{v} * t$$

$\to$ Für die gesuchten Grössen bedeutet dass:

$$t = \frac{v}{g} t^*_{DL}$$

5 Geometrische Optik

5.1 Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

Lichgeschwindigkeit im Vakuum: $c = 299'792'458\,\frac{m}{s}$

5.2 Energie eines Photons

$$E = hf, h = 6{,}626\,070\,040 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$$

Impuls:

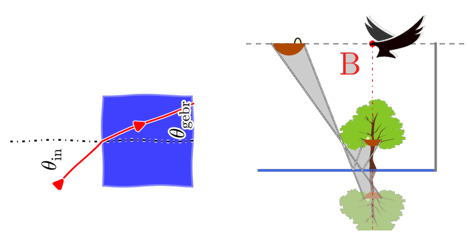
$$p = \frac{h}{\lambda}$$

5.3 Reflexion

$$\psi_{in} = \psi_{refl.}$$

ψ = Ein-/Austrittswinkel

5.4 Brechung



$$n_1 \sin\theta_{in} = n_2 \sin\theta_{gebr.}$$

5.5 Fermatsches Prinzip

Aus der Menge aller möglichen Pfade, die das Licht von einem Punkt zum anderen nehmen könnte, nimmt es tatsächlich denjenigen Pfad, entlang dem es die kurzeste Zeit benötigt.

5.6 Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem Medium

$$c_M = \frac{c}{n_M(\lambda)}$$

5.7 Brechung für sphärische Oberflächen

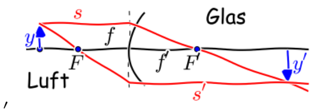
$$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{R}$$

n: Brechungsindex

5.8 Fokale Längen (Brennweiten) an spärischen Oberflächen

$$f' = \frac{n'R}{n'-n}; f = \frac{nR}{n'-n}$$

5.9 Brechungsgesetz für sphärische Oberflächen



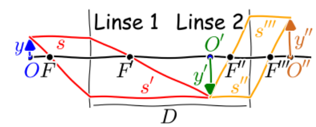
$\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{s-f}$$

5.10 Linsengleichung

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

5.11 Linsensysteme



5.12 Elektromagnetismus

$$\vec{F}_C(\vec{r}) = q\vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos[2\pi(x/\lambda - ft)]; x \to r \text{ für Kugelwelle}$$

$$I_{Intensit.} = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_0^2, [I] = \frac{J}{sm^2}$$

Divergenz eines Lichtstrahls:

$$\tan(\mu) = \sin(\mu) = \mu = \frac{\lambda}{D}$$

Bose–Einstein Verteilung: mittlere Zahl von Photonen in einer Eigenmode der Frequenz fk, die im thermischen Gleichgewicht mit den Behälterwänden der Temperatur T ist.

$$n_K = \frac{1}{exp(\frac{hf_k}{k_B T}) - 1}$$

Planksches Strahlungsgesetz: Energie pro Volumen des elektromagnetischen Feldes im Kasten der Temperatur T, im Wellenlängenbereich $[\lambda, \lambda + d\lambda]$.

$$U = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{exp(hc/\lambda k_B T) - 1}$$

Wiensches Verschiebungsgesetz: Wellenlänge bei grösster Leistung/Energiedichte

$$\lambda = 0.201\frac{hc}{k_B T} = 2.898 * 10^{-3} * 1/T$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz (Schwarze Körper):

$$P = \sigma A T^4$$

$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15h^3c^2} = 5.67 * 10^{-8}\,\frac{W}{m^2K^4}$