Unificazione

Alberto Martelli[1]

[1]da A. Martelli e U. Montanari, An Efficient Unification Algorithm, ACM TOPLAS, Vol. 4, N. 2, Aprile 1982

Intelligenza Artificiale e Laboratorio

Sostituzioni

Sostituzione: funzione da un insieme di variabili a termini, che può essere rappresentata come un insieme finito di coppie:

$$\sigma = \{x_1/t_1, x_2/t_2, \ldots, x_n/t_n\}$$

dove gli x_i sono variabili distinte e i t_i sono termini qualunque (anche variabili).

Per **applicare una sostituzione** σ a un termine t (indicata con $t\sigma$), si sotituiscono simultaneamente tutte le occorrenze in t di ogni variabile x_i in σ con il corrispondente termine t_i.
Ad esempio, dato il termine $t = f(x_1, g(x_2), a)$ e una sostituzione $\sigma = \{x_1/h(x_2), x_2/b\}$, abbiamo $t\sigma = f(h(x_2), g(b), a)$.

Unificazione

La **composizione** di due sostituzioni σ_1 e σ_2 si ottiene applicando σ_1 e σ_2 in sequenza. Nell'esempio dato sopra si ha $t\sigma\sigma = f(h(b), g(b), a)$.

Due termini t_1 e t_2 sono **unificabili**, se esiste una sostituzione σ (detta **unificatore**) che li rende identici: $t_1\sigma = t_2\sigma$.

Ad esempio, due unificatori dei termini
$t_1 = f(x_1, h(x_1), x_2)$ e $t_2 = f(g(x_3), x_4, x_3)$ sono
$\sigma_1 = \{x_1/g(x_3),\ x_2/x_3,\ x_4/h(g(x_3))\}$ e
$\sigma_2 = \{x_1/g(a),\ x_2/a,\ x_3/a,\ x_4/h(g(a))\}$.

Most General Unifier (MGU)

Una sostituzione θ è **più generale** di una sostituzione σ se esiste una sostituzione λ tale che $\sigma = \theta\lambda$.
Ad esempio, $\sigma_1 = \{x_1/g(x_3),\ x_2/x_3,\ x_4/h(g(x_3))\}$ è più generale di $\sigma_2 = \{x_1/g(a),\ x_2/a,\ x_3/a,\ x_4/h(g(a))\}$ perché $\sigma_2 = \sigma_1\lambda$, dove $\lambda = \{x_3/a\}$.

Si può dimostrare che, se due termini sono unificabili, esiste sempre un **unificatore più generale (MGU: Most General Unifier)** unico a meno di ridenominazione delle variabili.

Unificazione

Un problema di unificazione può essere formulato come un insieme di equazioni $t'_j = t''_j, \quad j = 1, \ldots, k$ di cui si vuole trovare una soluzione.
La soluzione, se esiste, è l'unificatore più generale che unifica tutte le coppie di termini t'_j, t''_j di tutte le equazioni.
L'algoritmo descritto nel seguito si basa sulla applicazione ripetuta all'insieme di equazioni di trasformazioni che preservano l'equivalenza, fino ad ottenere un insieme di equazioni in forma risolta. Un insieme di equazioni è *in forma risolta* se:

1. le equazioni hanno la forma $x_j = t_j, \quad j = 1, \ldots, k$
2. una variabile che è il membro sinistro di una equazione occorre solo lì.

Un insieme di equazioni in forma risolta ha l'ovvio unificatore:

$$\theta = \{x_1/t_1, \ldots, x_k/t_k\}$$

Unificazione

Le trasformazioni principali che useremo sono:

1. **Term reduction**. Sia

$$f(t'_1, \ldots, t'_n) = f(t''_1, \ldots, t''_n)$$

   una equazione dell'insieme.
   Il nuovo insieme è ottenuto sostituendo questa equazione con $\{t'_1 = t''_1, \ \ldots, \ t'_n = t''_n\}$
2. **Variable elimination.** Sia $x = t$ un'equazione dove x è una variabile e t un termine qualunque (variabile o no). Il nuovo insieme di equazioni è ottenuto applicando la sostituzione $\theta = \{x/t\}$ a tutte le altre equazioni (senza cancellare questa equazione).

E' facile dimostrare le seguenti proprietà:

- Sia $f'(t'_1, \ldots, t'_n) = f''(t''_1, \ldots, t''_n)$ una equazione in un sistema S. Se $f' \neq f''$, S non ha soluzione. Altrimenti, l'insieme di equazioni ottenuto applicando *term reduction* a S è equivalente a S.
- Sia $x = t$ un'equazione in un sistema S. Se x **occorre** in t (ma t non è x), S non ha soluzione. Altrimenti, l'insieme di equazioni ottenuto applicando *variable elimination* è equivalente a S.

Il seguente algoritmo non deterministico trasforma un insieme di equazioni in un insieme equivalente in forma risolta.

Algoritmo di Unificazione

Dato un insieme di equazioni, eseguire ripetutamente le seguenti trasformazioni. L'algoritmo termina o con fallimento o con successo (quando nessuna trasformazione è più applicabile).

(a) Scegliere una equazione della forma $t = x$ dove t non è una variabile e x lo è, e sostituirla con $x = t$.

(b) Scegliere una equazione della forma $x = x$ e cancellarla.

(c) Scegliere una equazione della forma $t' = t''$ dove t' e t'' non sono variabili. Se i due simboli di funzione di t' e t'' sono diversi, fallimento. Altrimenti applicare **term reduction**.

(d) Scegliere una equazione della forma $x = t$ dove x è una variabile che occorre in qualche altra parte nell'insieme di equazioni e dove $t \neq x$. Se x occorre in t, fallimento. Altrimenti applicare **variable elimination**.

Esempio

Sia dato il seguente insieme di equazioni:

$$\{g(x_2) = x_1, \quad f(x_1, h(x_1), x_2) = f(g(x_3), x_4, x_3)\}$$

Applichiamo *term reduction* alla seconda equazione

$$\{g(x_2) = x_1, \quad x_1 = g(x_3), \quad h(x_1) = x_4, \quad x_2 = x_3\}$$

Applichiamo *variable elimination* alla seconda equazione

$$\{g(x_2) = g(x_3), \quad x_1 = g(x_3), \quad h(g(x_3)) = x_4, \quad x_2 = x_3\}$$

Applichiamo *term reduction* alla prima equazione

$$\{x_2 = x_3, \quad x_1 = \quad g(x_3), x_4 = h(g(x_3)), \quad x_2 = x_3\}$$

Applichiamo *variable elimination* alla prima equazione

$$\{x_2 = x_3, \quad x_1 = g(x_3), \quad x_4 = h(g(x_3))\}$$

L'**MGU** sarà quindi

$$\theta = \{x_1/g(x_3), x_2/x_3, x_4/h(g(x_3))\}$$