
FRATTALI E SISTEMI DINAMICI

Appunti di Teoria dei Sistemi Dinamici
Aprile 2023
Gianluca Peri

I FRATTALI E DIMENSIONE FRATTALE

Iniziamo la nostra trattazione dalla definizione informale di *frattale*.

Definizione di Frattale (Informale)

Un frattale è un ente geometrico avente struttura fine a scale arbitrariamente piccole. Solitamente questo comporta che esso sia autosimilare.[3]

Prendiamo ad esempio il *foglio di neve di Koch*, un classico esempio di frattale.

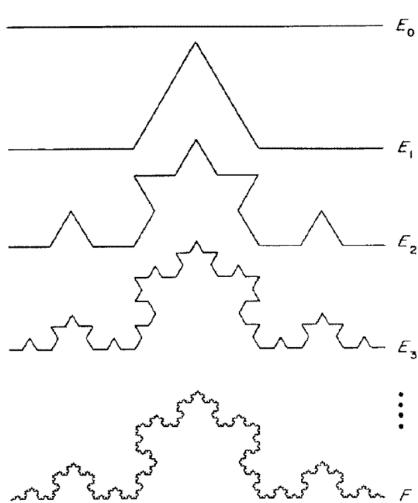


Figura 1: *Curva di Koch*: uno dei tre lati del foglio di neve di Koch. Ad ogni step ogni linea viene divisa in tre parti, la parte centrale viene poi rimossa e sostituita con un cuneo. Si noti anche come ad ogni step la struttura divenga composta da quattro copie identiche della precedente struttura. La struttura diviene la curva di Koch per $k \rightarrow +\infty$, dove con k vogliamo indicare il pedice di E in figura.[1]

Queste strutture geometriche sono interessanti anche perché in un certo senso hanno dimensione non naturale.

Le entità geometriche con cui solitamente abbiamo a che fare hanno dimensione D naturale

$$D \in \mathbb{N}$$

Ad esempio una retta ha dimensione 1, un cerchio dimensione 2, ed un cubo dimensione 3; possiamo anche pensare ad ipercubi con dimensione pari a 4 o 5, ma non è ben chiaro a priori cosa si intenda quando si parla di oggetti con dimensione D non naturale.

Solitamente quando parliamo di dimensione di un'entità geometrica vogliamo riferirci al numero di coordinate necessario a descrivere la posizione di un punto su quell'entità: in questo senso la dimensione di una retta è 1, quella di un quadrato è 2, di un cubo 3, e così via, indipendentemente dalla dimensione dello spazio geometrico in cui albergano.[3]

Una retta in uno spazio tridimensionale ha sempre dimensione 1, così come una qualunque linea, anche se curva: difatti su esse sarà comunque possibile definire una singola coordinata curvilinea per mappare i loro punti. Dando questo significato intuitivo al concetto di dimensione non si lascia spazio a dimensioni $D \notin \mathbb{N}$, in quanto non ha senso affermare che un punto sia descritto da un numero frazionario di coordinate.

Tuttavia questa nostra concezione intuitiva della dimensione di un ente geometrico viene messa in crisi dai frattali. Si prenda ancora ad esempio la curva di Koch: essa certo non ha un'area, a differenza di figure

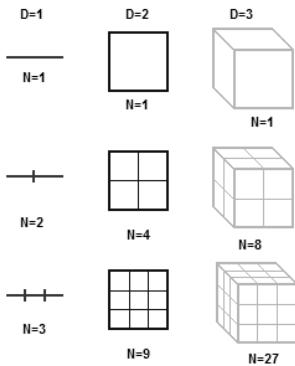
geometriche come triangoli o quadrati, ma al contempo risulta impossibile definire su essa una singola coordinata curvilinea per mappare i suoi punti, in quanto la distanza fra ogni coppia di punti sulla curva è infinita! Questo intuitivamente suggerisce che la curva non abbia né $D = 1$ né $D = 2$; essa pare una sorta di ibrido fra monodimensionale e bidimensionale.[3]

Distanza fra Copie di Punti sulla Curva di Koch

Possiamo innanzitutto notare, al crescere del numero di step costruttivi (k) della curva di Koch, la seguente progressione per la lunghezza L dell'oggetto in esame:

$$L = l, 4 \cdot \frac{1}{3}l, 4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 l = \left[\left(\frac{4}{3}\right)^k l\right]_{k \in \mathbb{N}}$$

con l lunghezza del segmento iniziale. Risulta dunque immediato verificare che la lunghezza diverge all'infinito per $k \rightarrow \infty$. Possiamo notare infine che, essendo la curva di Koch perfettamente autosimilare ad ogni scala, anche la lunghezza della curva di Koch fra ogni possibile coppia di suoi punti dovrà essere infinita.



Possiamo tentare di risolvere questo problema notando che esiste un altro modo per definire il concetto di dimensione, tanto spontaneo e intuitivo quanto quello sopra esposto: si consideri ad esempio un quadrato Q di lato l , e si pensi di contrarlo omogeneamente dimezzando le sue dimensioni lineari: quello che otterremo è un quadratino Q' di lato $l/2$. Possiamo adesso notare come saranno necessarie 4 copie di Q' per ricostruire Q , e non solo 2. Se invece di un quadrato adesso consideriamo un cubo C di lato l e i rispettivi cubetti C' di lato $l/2$ ci renderemo conto che per tassellare completamente C saranno necessari 8 cubetti C' . Per un segmento di lunghezza l invece sono necessarie unicamente due sue versioni contratte a lunghezza $l/2$ per tassellarlo completamente.

Questa nostra osservazione può essere generalizzata: ad esempio si consideri sempre il quadrato Q , ma questa volta si consideri $Q(r)$, la sua

versione contratta linearmente di un fattore $r \in \mathbb{N}$, ovvero avente lato l/r . In questo caso possiamo affermare che il numero di copie $N_Q(r)$ necessario per ricostruire Q viene fornito dalla seguente:

$$N_Q(r) = r^2 \quad \forall r \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Considerando invece il cubo C arriviamo ad una simile ma non identica conclusione:

$$N_C(r) = r^3 \quad \forall r \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Mentre per un segmento S avremmo:

$$N_S(r) = r \quad \forall r \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Dov'è importante appunto notare che queste relazioni rimangono valide per r arbitrariamente grande, e quindi per fattori di riscalatura arbitrariamente piccoli.

Queste osservazioni ci suggeriscono immediatamente di *definire* la dimensione D di un ente geometrico come l'esponente che appare nelle equazioni (1) - (3):

$$N(r) = r^D \Rightarrow D = \frac{\ln N(r)}{\ln r} \tag{4}$$

Questa nuova definizione di dimensione è in accordo con l'altra nostra definizione intuitiva del concetto di dimensione per tutti gli enti geometrici più comuni, tuttavia essa al contrario della prima è idonea anche alla descrizione della dimensione dei frattali. Prendiamo nuovamente ad esempio la curva di Koch: possiamo notare che per comporla sono necessarie 4 copie di se stessa scalate di un fattore $1/3$, e che questa relazione si mantiene vera per ogni fattore di scala $1/r$, $r \in \mathbb{N}$ data la perfetta autosimilarità della curva. La sua dimensione secondo la nostra nuova definizione è dunque

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$$

In questo senso possiamo affermare che la curva di Koch ha dimensione $D \in \mathbb{Q}$. Questa generalizzazione del concetto di dimensione viene alle volte chiamata per ovvie ragioni **dimensione frattale** (D_F), o **similarity dimension**.[3]

L'emergenza di valori frazionari per la dimensione è comune a tutte le entità geometriche definibili come frattali: si pensi ad esempio al celebre *triangolo di Sierpiński*.



Figura 2: Progressione del triangolo di Sierpiński.

Questo viene costruito rimuovendo il triangolo centrale ad ogni iterazione, come mostrato in figura. Considerando che una riduzione di scala lineare pari ad un fattore $1/2$ corrisponde a 3 copie necessarie si evince una dimensione pari a:

$$D_F = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58$$

Questa nostra generalizzazione del concetto di dimensione per adesso sembra funzionare abbastanza bene. Tuttavia questa è in realtà profondamente limitata, in quanto è applicabile unicamente ad oggetti con *autosimilarità perfetta*, ovvero ad oggetti composti da copie di se stessi. Ebbene non tutti i frattali sono *perfettamente autosimilari*: un esempio è l'*insieme di Mandelbrot*, definito come l'insieme dei $c \in \mathbb{C}$ per i quali la successione

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases} \quad (5)$$

è *limitata*, ovvero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| \neq \infty.$$

L'insieme dei c con questa proprietà è un frattale nel piano complesso privo di perfetta autosimilarità.

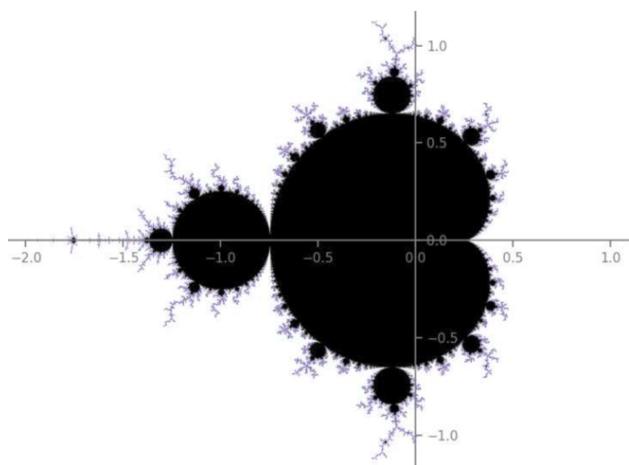


Figura 3: Il set di Mandelbrot raffigurato sul piano complesso. Possiamo notare la presenza di struttura fine a scale arbitrariamente piccole, senza che tuttavia sia riscontrabile una perfetta autosimilarità.

Quest'ente geometrico non è trattabile con la nostra definizione attuale di dimensione frattale.

Tuttavia non è necessario in realtà scomodare Mandelbrot per dimostrare l'inadeguatezza della nostra attuale definizione di D_F : ci basta prendere in esame semplicemente un *cerchio*. Si capisce che esso debba avere dimensione 2, e che tutte le definizioni di dimensione dovrebbero essere in accordo su questo; tuttavia la nostra definizione di D_F non riesce a gestire nemmeno questo, in quanto non c'è tecnica elementare che consenta di comporre un cerchio con sue copie scalate.

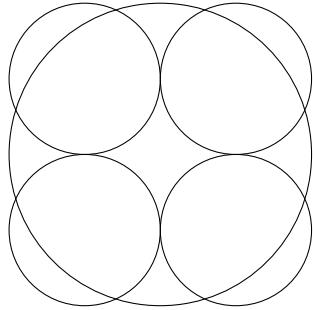


Figura 4: Sketch esemplificativo del problema in esame.
Essendo un cerchio chiaramente un ente geometrico di dimensione 2 ci aspetteremmo di poterlo comporre utilizzando 4 sue copie con dimensioni lineari scalate di un fattore $1/2$, tuttavia dallo sketch in figura si vede subito come questo risulti arduo.

Per estendere il concetto di dimensione frattale a questi oggetti geometrici privi di perfetta autosimilarità viene introdotta la *box counting dimension*: il concetto alla base di questa è lo stesso della *similarity dimension*, ma questa volta invece di utilizzare copie scalate dell'oggetto per "misurarlo" vogliamo adoperare una sorta di unità di misura standardizzata.

Definizione di Box Counting Dimension

Si consideri un ente geometrico E albergante \mathbb{R}^n . Si immagini adesso di tassellare completamente lo spazio \mathbb{R}^n con ipercubi n -dimensionali (detti *celle*) di lato ε . La *box counting dimension* di E (anche detta **dimensione frattale** di E) è definita come:

$$D_F \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (6)$$

Con $N(\varepsilon)$ numero di celle contenenti almeno un punto di E , ovvero il numero di celle di lato ε necessarie per ricoprire completamente E .[2]

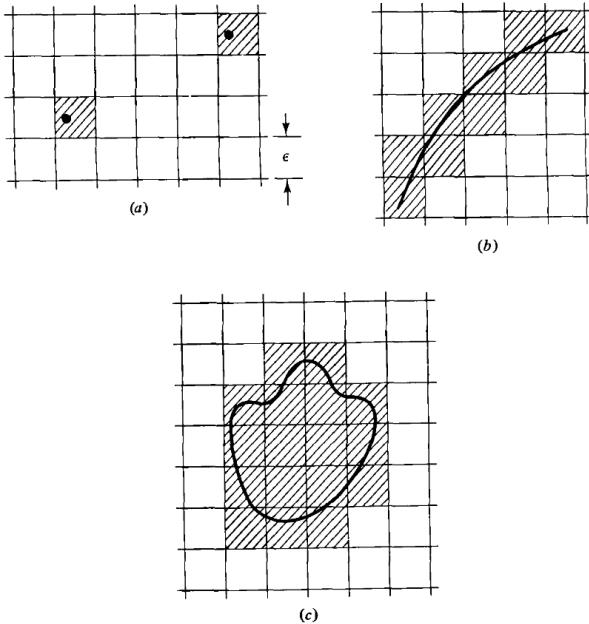


Figura 5: Esemplificazione della *box counting dimension* per diversi enti geometrici standard.[2]

Possiamo notare che per il set di punti N non dipende da ε e dunque $D_F = 0$; per la curva invece è immediato verificare sperimentalmente che $N(\varepsilon) \sim l/\varepsilon$, con l lunghezza della curva, e dunque:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(l/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln l - \ln(\varepsilon)}{-\ln(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln l}{-\ln(\varepsilon)} + 1 \right] = 1 \quad (7)$$

Ed infine per la figura del grafico (c) possiamo verificare l'andamento $N(\varepsilon) \sim A/\varepsilon^2$, con A area della figura, e dunque:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(A/\varepsilon^2)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln A - 2\ln(\varepsilon)}{-\ln(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln A}{-\ln(\varepsilon)} + 2 \right] = 2 \quad (8)$$

Questi andamenti di $N(\varepsilon)$ per le varie figure si ricavano sperimentalmente appunto, mettendo in atto la procedura di box counting, e diventano tanto più accurati quanto più $\varepsilon \rightarrow 0$.[2]

Questi sono analoghi agli andamenti (1) - (3) di cui abbiamo già parlato (per un cubo troveremmo $N(\varepsilon) \sim V/\varepsilon^3$): riducendo la scala lineare dei costituenti il numero necessario per tassellare cresce con una potenza che per definizione può essere presa come la dimensione dell'ente geometrico in esame; ma questa volta invece di tassellare con copie scalate usiamo celle, la cui tassellatura diviene sempre migliore tanto più la loro dimensione lineare diminuisce. In questo senso la *box counting dimension* è una generalizzazione della *similarity dimension*, che era già una sorta di generalizzazione del nostro concetto intuitivo di dimensione. Non abbiamo ancora verificato la bontà della nostra nuova definizione di dimensione su un frattale, e per far questo conviene introdurne uno nuovo: l'**insieme di Cantor**.



Figura 6: Raffigurazione dei primi sette step nella progressione costruttiva dell'insieme di Cantor (ogni riga, dall'alto verso il basso, corrisponde ad uno step iterativo).

Come si può evincere dalla figura il set di Cantor viene costruito a partire da un segmento (indice dello step $k = 0$), e rimuovendo ad ogni step successivo il terzo centrale di ogni segmento presente. Questo è un frattale autosimilare, ed è dunque ottimo per i nostri scopi dato che lo potremo usare per verificare l'accordo fra *similarity dimension* e *box counting dimension*.

Possiamo immediatamente notare che per comporre il set di Cantor sono necessarie 2 sue versioni riscalate di $1/3$.[3]

Dunque la *similarity dimension* del set è:

$$D_F = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63 \quad (9)$$

Per quanto riguarda invece la *box counting dimension* possiamo procedere prendendo in esame la successione di taglie lineari per le celle $\varepsilon_n = (1/3)^n$:

$$\varepsilon \doteq 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$$

Supponendo estensione lineare del segmento a $k = 0$ pari ad 1, ed allineando il ricoprimento delle celle in maniera tale da allinearle con il set possiamo subito notare che il numero di celle necessarie per ricoprire completamente l'estensione $[0, 1]$ ovviamente cresce come i denominatori in ε_n :

$$1, 3, 9, \dots$$

tuttavia il numero di celle necessarie per ricoprire il set non cresce in questo modo! Difatti quando le celle sull'estensione $[0, 1]$ sono 3 la cella centrale non è necessaria in quanto in essa non saranno presenti punti del set, allo stesso modo per 9 celle su $[0, 1]$ solamente 4 saranno necessarie, come si può anche vedere bene dalla Figura 6.[2]

Ne segue che al crescere di n il numero $N(\varepsilon(n))$ cresce come

$$N(\varepsilon(n)) = 2^n.$$

E dunque la *box counting dimension* per il set di Cantor è:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63 \quad (10)$$

In perfetto accordo con la (9).

II I FRATTALI NEI SISTEMI DINAMICI: LA MAPPA DEL FORNAIO

Nel contesto dei sistemi dinamici alle volte si palesano degli insiemi attrattori che si rivelano essere frattali, in questo contesto questi insiemi (frattali) vengono generalmente chiamati **attrattori strani** (*strange attractors*, termine introdotto per la prima volta da Ruelle e Takens, 1971).[2]

Per introdurre il legame fra frattali e sistemi dinamici è canonico prendere ad esempio la *mappa del fornaio*.

La Mappa del Fornaio

La mappa del fornaio B (B da *Baker's Map*) è un sistema dinamico definito all'interno dell'insieme $A = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ come segue:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n & \text{se } 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ 2x_n - 1 & \text{se } 1/2 < x_n \leq 1 \end{cases} \\ y_{n+1} = \begin{cases} ay_n & \text{se } 0 \leq x_n \leq 1/2 \\ ay_n + 1/2 & \text{se } 1/2 < x_n \leq 1 \end{cases} \end{cases} \quad \text{con } 0 < a \leq \frac{1}{2} \quad (11)$$

L'effetto della mappa del fornaio sul suo insieme di definizione A è esposto nella seguente figura.

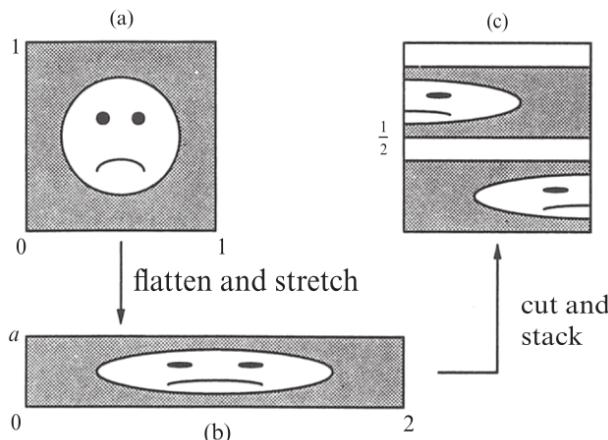


Figura 7: Azione della mappa del fornaio sul suo insieme di definizione. Possiamo notare come esso venga stirato per poi essere ripiegato su se stesso, lasciando delle sezioni scoperte se $a < 1/2$. Essa è nota come *mappa del fornaio* in quanto la sua dinamica ricorda l'*impastare*. Si ignori l'espressione cruccia del soggetto sperimentale, immotivatamente riluttante all'essere sottoposto alla procedura.[3]

La mappa del fornaio come si può ben capire manifesta *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali*: due punti arbitrariamente vicini tenderanno a venir separati da una distanza che *cresce esponenzialmente* con il numero di iterazioni della mappa, anche se dopo un certo tempo scala il valore di distanza raggiungerà uno stallo dovuto alle dimensioni finite dell'insieme di definizione della trasformazione.

Questa dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali ci permette di categorizzare la mappa del fornaio come un **sistema dinamico caotico**, secondo la seguente celebre definizione.

Definizione di Caos

Il caos è un comportamento a lungo termine aperiodico di un sistema deterministico, caratterizzato da una dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali.

Il concetto qualitativo di *dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali* viene reso quantitativamente richiedendo che la distanza fra le orbite di un sistema caotico sia caratterizzata da una *crescita esponenziale*.[3]

Dimostrazione Formale della Caoticità della Mappa del Fornaio

La crescita esponenziale della distanza fra orbite vicine nella mappa del fornaio è dovuta al meccanismo di *stiramento* codificato in essa per la coordinata x , che nello specifico ad ogni iterazione viene moltiplicata per un fattore 2, dando luogo quindi ad una crescita esponenziale delle distanze.¹

Per esser ancor più rigorosi consideriamo due diverse condizioni iniziali \vec{x}_0, \vec{x}_0^* separate dalla distanza $\vec{\delta}_0$: vogliamo comprendere come questo valore muta portando avanti la dinamica descritta dalla mappa. Per ricavare l'andamento della distanza fra le orbite notiamo che una dinamica del tipo

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{x}_n) \Rightarrow \vec{x}_n = \vec{f}^{(n)}\vec{x}_0 \quad (12)$$

ci consente di scrivere tramite sviluppo al prim'ordine:

$$\vec{\delta}_{n+1} = J(\vec{x}_n)\vec{\delta}_n \Rightarrow \vec{\delta}_n = \left[\prod_{i=1}^n J(\vec{x}_i) \right] \vec{\delta}_0 \doteq V_n \vec{\delta}_0 \quad (13)$$

Con J matrice Jacobiana di \vec{f} . Possiamo adesso notare che per B :

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \forall \vec{x}_i \Rightarrow V_n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \quad (14)$$

E ricordando la definizione degli *esponenti di Lyapunov* e il *teorema di Oseledec*:

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \ln [V_n^T V_n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \begin{pmatrix} \ln 2^{2n} & 0 \\ 0 & \ln a^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 2 & 0 \\ 0 & \ln a \end{pmatrix} \quad (15)$$

Possiamo infine verificare che il più grande esponente di Lyapunov λ_1 è uguale a $\ln 2 > 0$, e dunque la dinamica della mappa B risulta effettivamente caotica.

Ci interessa anche notare che per $a < 1/2$ la mappa del fornaio ha un'altra importante proprietà: essa **possiede un attrattore strano S**. Per capire di che attrattore si tratta dobbiamo individuare l'insieme S attrattore, ovvero l'insieme tale che la sua distanza con $B^n(x_0, y_0)$ converge a zero per $n \rightarrow \infty$ per ogni condizione iniziale (x_0, y_0) .

Possiamo immediatamente notare che sotto l'azione della mappa del fornaio (con $a < 1/2$) la porzione dello spazio delle fasi accessibile diminuisce al crescere del numero di iterazioni n , nello specifico essa collassa ad un insieme *Cantor like* di dimensione nulla, come mostrato in figura 8.

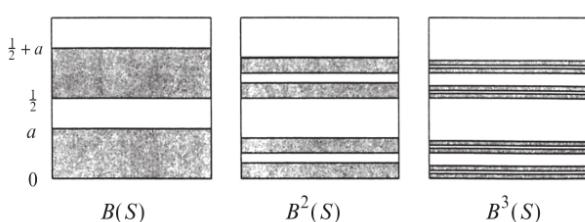


Figura 8: Azione di più iterazioni della mappa del fornaio sul suo insieme di definizione. Possiamo facilmente notare la formazione di un insieme di tipo Cantor in cui tutti i punti vengono confinati dalla dinamica. La mappa del fornaio per $a < 1/2$ ha dunque un attrattore strano (frattale) di tipo Cantor.[3]

Dato che l'attrattore è autosimilare possiamo facilmente valutare la sua dimensione frattale notando che possiamo comporlo con $2 \cdot 1/a$ sue copie scalate di un fattore a , e dunque:²

$$D_F = \frac{\ln N(r)}{\ln r} = \frac{\ln(2a^{-1})}{\ln a^{-1}} = 1 + \frac{\ln 2}{\ln a^{-1}} = 1 + \frac{\ln(1/2)}{\ln a} \quad (16)$$

Dunque possiamo dire che:

1 Il meccanismo di *ripiegamento* invece in qualche modo va a contrastare il precedente meccanismo, permettendo alla mappa di manifestare una tendenza alla crescita esponenziale delle distanze pur mantenendo il suo output limitato ad una regione ben definita $A = [0, 1] \times [0, 1]$. La combinazione di *stiramento* e *ripiegamento* è comune a tutte le dinamiche di mappe caotiche con attrattori strani (frattali).

2 Composizione di rettangoli sia in verticale per le varie bande che in orizzontale per la formazione della singola banda, con ovviamente $a < 1/2 < 1$.

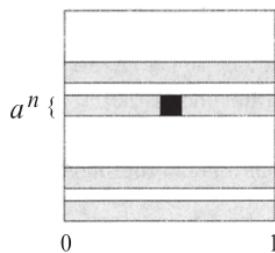
$$\lim_{a \rightarrow 1/2} D_F(a) = 2 \quad (17)$$

questo sarà importante in seguito.

Si noti che volendo avremmo potuto calcolare la dimensione frattale con la *box counting dimension*, ed ovviamente avremmo ottenuto lo stesso risultato.

Calcolo di D_F con Box Counting Dimension

Per calcolare la dimensione dell'attrattore (*box counting dimension*) possiamo procedere con il seguente ragionamento: l'attrattore viene costruito step by step in a *self-nested way*: ovvero viene aggiunta ad ogni iterazione struttura fine internamente all'area precedentemente coperta dall'attrattore stesso e mai esternamente ad essa; questo implica che se lavoriamo con celle di dimensione lineare $\varepsilon = a^n$ tutto quello che ci interessa è la struttura dell'insieme di output della mappa all'iterazione n -esima, non ci occorre un dettaglio maggiore in quanto la nostra "risoluzione" (la dimensione delle celle) non ci consentirebbe di vederlo. Dunque per celle di dimensione lineare $\varepsilon = a^n$ possiamo considerare l'approssimazione del frattale all'iterazione costruttiva n -esima senza commettere alcun errore.



Dunque dato che le bande hanno sempre lunghezza 1, e dato che le celle hanno per costruzione sempre altezza pari alle bande, saranno necessarie $1/a^n$ celle per coprire una singola banda, ed il numero di bande è ovviamente pari a 2^n .[3]

Dunque per il ricoprimento sono necessarie $N(\varepsilon(n)) = 2^n a^{-n} = (a/2)^{-n}$ celle di dimensione $\varepsilon(n) = a^n$, e dunque la dimensione dell'attrattore è:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a/2)^{-n}}{\ln a^{-n}} = 1 + \frac{\ln(1/2)}{\ln a} \quad (18)$$

In perfetto accordo con (16).

L'ultima cosa che dobbiamo trarre da quest'esempio prima di passare oltre è abbastanza ovvia alla luce di quanto abbiamo trattato fino ad ora: per $a < 1/2$ la mappa è **caotica e dissipativa**, l'area dello spazio delle fasi in cui la mappa porta tende a zero al crescere del numero delle iterazioni, e difatti la mappa **presenta un attrattore strano** *Cantor like* di $D_F < 2$, e quindi appunto con area nulla.

Di contro per $a = 1/2$ la mappa, pur evidentemente rimanendo **caotica**, smette di essere dissipativa, diviene infatti *area preserving*, e dunque smette di essere idonea al possesso di un attrattore, sia esso strano o meno. Dunque per $a = 1/2$ abbiamo un comportamento caotico in assenza di attrattore strano, senza un frattale nascosto nella dinamica. Questo è un tipo di caos *diverso* da quello dei più celebri sistemi dinamici caotici come il *modello di Lorenz*, e viene solitamente chiamato *caos Hamiltoniano*, in quanto appunto **caos non dissipativo**.[3]

Questa trattazione della mappa del fornaio ci ha permesso di apprezzare l'importanza dei frattali nello studio dei sistemi dinamici. Tuttavia siamo ancora ben lontani dall'aver colto tutti i frutti che questa tematica ha da offrire: saremo adesso interessati ad esporre una versione generalizzata della mappa del fornaio, che ci aiuterà ad introdurre una *nuova categoria di frattali*, che a sua volta ci spingerà a sviluppare un'ulteriore *generalizzazione del concetto di dimensione*.

III MAPPA DEL FORNAIO GENERALIZZATA E MULTIFRATTALI

Mappa del Fornaio Generalizzata

La mappa del fornaio generalizzata G è un sistema dinamico definito all'interno dell'insieme $A = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ come segue:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \begin{cases} \lambda_a x_n & \text{se } y_n < \alpha \\ (1 - \lambda_b) + \lambda_b x_n & \text{se } y_n > \alpha \end{cases} \\ y_{n+1} = \begin{cases} \frac{y_n}{\alpha} & \text{se } y_n < \alpha \\ \frac{y_n - \alpha}{1 - \alpha} & \text{se } y_n > \alpha \end{cases} \end{cases} \quad \text{con } \lambda_a + \lambda_b \leq 1 ; \quad \alpha < 1 \quad (19)$$

Anche questa può essere pensata come una sequenza di semplici operazioni sul quadrato A , come mostrato in Figura 9.

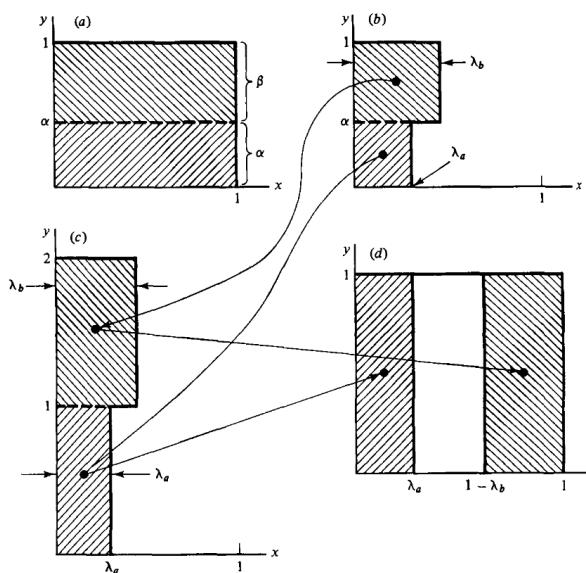


Figura 9: Azione della mappa del fornaio sul suo insieme di definizione. Possiamo notare che innanzitutto il quadrato viene diviso in due porzioni sulla base di α ($\beta = 1 - \alpha$), e queste vengono poi scalate orizzontalmente di λ_a e λ_b rispettivamente. Successivamente i due rettangoli vengono scalati verticalmente in maniera tale da far raggiungere ad entrambi dimensione verticale pari ad 1, ed infine vengono posizionati sui lati orizzontalmente opposti del quadrato. Si capisce che questa operazione possa essere iterata, dando luogo ad una dinamica caotica, con attrattore frattale nel caso in cui $\lambda_a + \lambda_b \neq 1$.^[2]

Questa generalizzazione della mappa del fornaio presenta due fattori di scala al posto di uno, tuttavia si capisce che essa nel caso $\lambda_a + \lambda_b \neq 1$ darà luogo ad un attrattore frattale *Cantor like*.³

Siamo adesso interessati a calcolare la dimensione frattale dell'attrattore strano di questa mappa al variare dei parametri di controllo, come abbiamo fatto per B.

Per farlo utilizziamo un approccio leggermente diverso da quello utilizzato per la prima mappa del fornaio: notiamo che prendendo in esame l'intersezione dell'attrattore della mappa (alla cui dimensione frattale assegnamo nome D_F come al solito) con una retta orizzontale ricaviamo un frattale definito su \mathbb{R} che quindi si avvicina ancora di più al set di Cantor (chiamiamo la sua dimensione Δ_F). In questo contesto possiamo affermare immediatamente che

$$D_F = 1 + \Delta_F \quad (20)$$

questo segue direttamente dal fatto che la struttura frattale si manifesta nella direzione orizzontale ma non in quella verticale.

Dunque per trovare D_F ci basta ricavare Δ_F , questo è comodo in quanto non dovremo portarci dietro un inutile fattore di ricoprimento per una direzione spaziale priva di struttura frattale. Per andare avanti possiamo sfruttare l'autosimilarità del frattale come esposto in Figura 10.

³ Abbiamo scelto in questa sede di riportare la definizione di Ott[2], tuttavia avremmo potuto anche scrivere le equazioni in maniera tale da mettere in atto la stessa procedura orizzontalmente anziché verticalmente, per ottenere una più forte analogia con la mappa del fornaio definita alla Strogatz (11)[3]; si capisce che questa scelta equivale ad un cambiamento di coordinate che non influenza la sostanza di quello di cui stiamo discutendo.

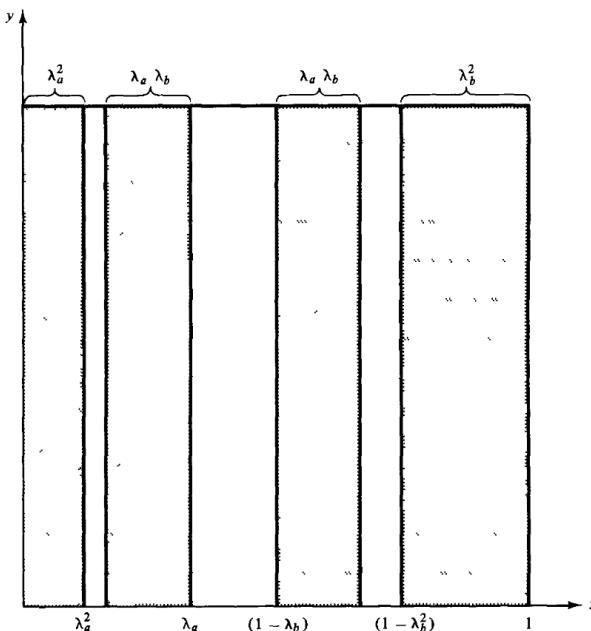


Figura 10: Seconda iterazione della mappa del fornaio. Già a questo livello della procedura di creazione dell'attrattore frattale possiamo notare la sua proprietà di autosimilarità: per costruzione esso è diviso in due gruppi di bande, il gruppo di sinistra se scalato orizzontalmente di un fattore λ_a^{-1} diventa equivalente all'interessa del frattale, come si può ben vedere dal fatto che ingrandendo il gruppo di bande di sinistra in questa figura di quel fattore si ottiene proprio la sottofigura (d) nella Figura 9. Lo stesso è valido per il gruppo di bande di destra a patto di scalare di λ_b^{-1} anziché λ_a^{-1} .[2]

Notiamo che sebbene il frattale in esame sia autosimilare esso non gode di *perfetta autosimilarità*, e per questo motivo non possiamo usare la *similarity dimension*, al contrario di quanto accadeva per la più semplice mappa del fornaio non generalizzata. Ci troviamo costretti ad utilizzare la *box counting dimension*. Considerando sia l'autosimilarità dell'attrattore sia la possibilità di lavorare con una sua intersezione di dimensione Δ_0 anziché con tutta la sua figura scriviamo adesso il numero di celle (segmenti) necessari a coprire il frattale nella seguente maniera:

$$N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon) + N_b(\varepsilon) \quad (21)$$

dove N_a è il numero di celle necessario per coprire il gruppo di bande di sinistra, e N_b il numero necessario per l'altro gruppo. Possiamo adesso notare che l'autosimilarità dell'attrattore implica:

$$N_a(\varepsilon) = N(\varepsilon/\lambda_a) , \quad N_b(\varepsilon) = N(\varepsilon/\lambda_b) \quad (22)$$

ed assumendo adesso che $N(\varepsilon)$ abbia l'andamento tipico di un numero di ricoprimento per un oggetto Δ_F -dimensionale:

$$N(\varepsilon) \sim \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\Delta_F} \quad (23)$$

possiamo combinare (21), (22), e (23):

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\Delta_F} = \left(\frac{\lambda_a}{\varepsilon}\right)^{\Delta_F} + \left(\frac{\lambda_b}{\varepsilon}\right)^{\Delta_F} \Rightarrow \lambda_a^{\Delta_F} + \lambda_b^{\Delta_F} = 1 \quad (24)$$

Quest'ultima è proprio l'equazione trascendente per Δ_F . Notiamo che per $\lambda_a + \lambda_b < 1$ abbiamo $0 < \Delta_F < 1$ che implica $1 < D_F < 2$ per la (20).

Ricavare la dimensione frattale dell'attrattore al variare dei parametri in questo contesto dinamico tuttavia non ci soddisfa completamente. Difatti:

- ▶ Non è detto che la dinamica della mappa porti a visitare omogeneamente tutto l'attrattore, e sarebbe desiderabile ricavare una misura dell'attrattore strano che tenga in qualche modo conto di quanto certe zone siano importanti per la dinamica del sistema.
- ▶ Inoltre notiamo che il frattale in esame è essenzialmente diviso in due parti (il gruppo di sinistra e quello di destra) con due diversi fattori di scala per l'autosimilarità (λ_a, λ_b). La dimensione frattale D_F che abbiamo ricavato per questo dunque è una sorta di media delle dimensioni frattali delle due parti, e non contiene quindi tutta l'informazione sulla geometria del frattale. Abbiamo a che fare insomma

con un frattale che sembra composto da più sotto-frattali (due in questo caso), e con proprietà di autosimilarità che dunque dipendono dalla regione del frattale presa in esame. Questo tipo di frattale prende il nome di **multifrattale**.

Come per il concetto di *frattale* una definizione formale di *multifrattale* tende ad essere evitata in letteratura.^[1] Tuttavia possiamo fornire quantomeno la seguente.

Definizione di Multifrattale (Informale)

Un multifrattale è un frattale privo di perfetta autosimilarità globale: esso è caratterizzato dall'avere proprietà di autosimilarità variabili in quanto localmente dipendenti dalla posizione.

L'attrattore della mappa G si rivela dunque una struttura complessa (multifrattale), che non è possibile analizzare in maniera soddisfacente con gli strumenti sviluppati fino ad adesso. Nel seguito dunque introdurremo un'ulteriore generalizzazione del concetto di dimensione, che ci aiuterà a trattare ciò in cui siamo incappati studiando la mappa del fornaio generalizzata.

Supponiamo di coprire l'attrattore con una griglia di celle, e prendiamo in considerazione la frequenza con cui le orbite del nostro sistema dinamico visitano le varie celle nel limite in cui il tempo di osservazione tende all'infinito. In questo contesto fa comodo definire quanto segue.

Misura Naturale delle Celle

Se le frequenze di visita delle orbite non dipendono quasi mai⁴ dalle condizioni iniziali esse vengono definite come *misura naturale* (μ) delle celle:

$$\mu_i = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\eta(C_i, \vec{x}_0, T)}{T} \quad (25)$$

dove con μ_i indichiamo la misura naturale della cella C_i , e con η_i indichiamo il tempo trascorso dall'orbita nella cella C_i fra $0 \leq t \leq T$.

Quest'ultima quantità ci permette di introdurre una **generalizzazione della box counting dimension**.

Definizione della Dimensione Frattale Generalizzata (Dimensione di Rényi)⁵

Questa definizione fu formulata per la prima volta nel contesto della dinamica caotica da *Grassberger (1983)*, e *Hentschel, Procaccia (1983)*.^[2]

Definiamo un nuovo tipo di dimensione $D(q)$ dipendente dal valore di un parametro continuo q :

$$D(q) \doteq \frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln I(q, \varepsilon)}{\ln 1/\varepsilon} \quad (26)$$

con:

$$I(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q \quad (27)$$

dove in I la somma viene effettuata su tutte le celle di dimensione lineare ε necessarie a coprire l'attrattore, e con μ_i misura naturale della cella i -esima. Si noti che ovviamente μ , per com'è definito, dovrà mostrare una dipendenza indiretta da ε ($\mu(\varepsilon)$).

Definizione dello Spettro di Dimensione

Chiameremo il range di valori che $D(q)$ assume per un oggetto al variare di $q \in \mathbb{R}$ **spettro di dimensione** (*dimension spectrum*) di quell'oggetto.

Dobbiamo adesso prestare attenzione ad alcune cruciali osservazioni:

⁴ Ovvero: tutti i punti del bacino di attrazione dell'attrattore se presi come condizione iniziale della dinamica comportano le stesse frequenze di visita delle celle **a meno** di un insieme avente dimensione di Lebesgue nulla.

⁵ "A mathematician is a device for turning coffee into theorems".^[4]

- Osservando la (26) possiamo notare immediatamente che per $q = 0$ essa diventa del tutto equivalente alla *box counting dimension*, dunque ha senso intendere la (26) come **un'ulteriore generalizzazione del concetto di dimensione**.
- Intuitivamente possiamo capire che questa nuova definizione di dimensione è più idonea alla trattazione dei multifrattali in quanto il poter variare q è come se ci fornisse una sorta di manopola, con cui regolare la nostra definizione di dimensione per scandagliare diverse regioni del multifrattale in esame. Per grandi valori di q ($q >> 0$) verranno messe in evidenza le porzioni con elevata misura μ , mentre per piccoli valori di q ($q << 0$) accadrà il contrario.
- Si noti che la definizione di dimensione (26) ha senso come generalizzazione per ogni definizione di μ in qualche modo interpretabile come una idonea misura del frattale nelle celle, e non solo per la (27). In generale possiamo porre al posto di $\mu_i(\varepsilon)$ (i indice che scala sulle celle) un generico $P_i(\varepsilon)$ misura del peso statistico del frattale contenuto nella cella. Questo è il cuore concettuale di questa ulteriore generalizzazione del concetto di dimensione.

Per un frattale omogeneo (non multifrattale) abbiamo lo stesso tipo di autosimilarità ovunque, e dunque avremo la stessa misura di frattale in ogni cella, rendendo questa generalizzazione del concetto di dimensione abbastanza inutile. Nello specifico ci aspetteremo che $P_i(\varepsilon)$ scali con ε nella seguente maniera:

$$P_i(\varepsilon) \sim \varepsilon^{D_F} \quad (28)$$

ovvero in maniera indipendente dall'indice della cella i (in maniera indipendente dalla posizione quindi).

Ma per un multifrattale quanto detto sopra non è più vero per definizione, ed in generale ci aspetteremo un andamento $P_i(\varepsilon)$ fatto nel seguente modo:

$$P_i(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\alpha_i} \quad (29)$$

questa volta l'andamento di $P_i(\varepsilon)$ dipende anche da i . α_i (che non ha niente a che fare con α della G) prende il nome di **indice di singolarità**, quantità ovviamente costante e pari a D_F per i normali frattali perfettamente autosimilari.

Inoltre, dato che come abbiamo detto possiamo interpretare la misura $P_n(\varepsilon)$ come una sorta di *peso statistico* per la cella i -esima,⁶ è valida la seguente:

$$I(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} \mu_i^q \equiv \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^q = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i P_i^{q-1} = \langle P^{q-1} \rangle \quad (30)$$

Notiamo anche che I ovviamente non può avere dipendenza dalla posizione dato che è una somma su tutte le celle, e visto quanto appena esposto ci possiamo aspettare che I scali con ε nella seguente maniera:

$$I(q, \varepsilon) \sim \varepsilon^{(q-1)D(q)} \quad (31)$$

dove infatti per $q = 0$ troviamo lo scaling di N nella *box counting dimension*. Quest'ultima relazione ci sarà utile in seguito.

Saremo adesso interessati a capire come ricavare lo spettro di dimensione per l'attrattore della nostra mappa del fornaio generalizzata G . Dalla Figura 10 è evidente che la struttura frattale del nostro attrattore non ha proprio nulla a che fare con la coordinata y , come avevamo già osservato per ricavare la *box counting dimension* della stessa. Nello specifico si può proprio dimostrare che la misura naturale delle celle è invariante lungo y , e possiamo quindi procedere in perfetta analogia con la (20):

⁶ Questo torna particolarmente bene pensando alla nostra prima misura delle celle $P_n(\varepsilon) = \mu(\varepsilon)$: frequenza di passaggio dell'orbita nella cella (attraverso la definizione frequentista del concetto di probabilità).

$$D(q) = 1 + \Delta(q) \quad (32)$$

e dunque nel seguito lavoreremo con l'oggetto avente dimensione $\Delta(q)$, come già abbiamo fatto nel calcolo di D_F .

Sempre in analogia con quanto fatto prima possiamo riscrivere (21), avendo però cura questa volta di riportare I e non semplicemente il conteggio delle celle N:

$$I(q, \varepsilon) = I_a(q, \varepsilon) + I_b(q, \varepsilon) \quad (33)$$

dove I è appunto la somma di tutte le misure delle celle (alla q) necessarie a coprire il nostro frattale. Adesso le cose iniziano a farsi più complicate: in questo contesto dobbiamo tener conto

1. Della diversa autosimilarità dei due gruppi di bande (come già sappiamo fare dalla (22))
2. Del diverso valore della misura delle celle al variare di x.

Dalla Figura 9 possiamo notare che le bande di sinistra sono formate a partire da una frazione α dell'insieme di partenza, mentre le bande di destra dalla frazione β . La misura naturale delle celle sarà quindi proprio α per le bande di sinistra e β per le bande di destra, dato che ad ogni iterazione la frequenza che ci aspettiamo per queste regioni è proprio

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \alpha \quad \text{per } 0 \leq x \leq \lambda_a \quad ; \quad \mu = \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \beta \quad \text{per } 1 - \lambda_b \leq x \leq 1 \quad (34)$$

dato che ovviamente $\alpha + \beta = 1$.

Mettendo insieme il punto (1.) con il punto (2.), e tenendo conto della definizione di I (27), ricaviamo immediatamente la seguente:

$$I_a(q, \varepsilon) = \alpha^q I(q, \varepsilon/\lambda_a) , \quad I_b(q, \varepsilon) = \beta^q I(q, \varepsilon/\lambda_b) \quad (35)$$

Arrivati a questo punto svolgiamo i passaggi analoghi a (23) e (24), avvalendoci però della relazione di scaling appropriata per $I(q, \varepsilon)$ (31):

$$I(q, \varepsilon) \sim \varepsilon^{(q-1)\Delta(q)} \Rightarrow \varepsilon^{(q-1)\Delta(q)} = \alpha^q \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_a} \right)^{(q-1)\Delta(q)} + \beta^q \left(\frac{\varepsilon}{\lambda_b} \right)^{(q-1)\Delta(q)} \quad (36)$$

che dividendo per il membro di sinistra ci porta direttamente alla:

$$\alpha^q \lambda_a^{(1-q)\Delta(q)} + \beta^q \lambda_b^{(1-q)\Delta(q)} = 1 \quad (37)$$

analoga alla (24), difatti possiamo notare che ritroviamo esattamente il risultato di *box counting dimension* (24) per $q = 0$.

La (37) fornisce lo spettro di dimensione per la mappa del fornaio generalizzata al variare dei suoi parametri. Nel caso in cui $\lambda_a = \lambda_b = \lambda$ la (37) può essere risolta esplicitamente:

$$\Delta(q) = \frac{1}{q-1} \frac{\ln(\alpha^q + \beta^q)}{\ln \lambda} \quad (38)$$

dove possiamo notare che $D(q)$ è decrescente rispetto a q. Questa si rivela una proprietà generale di $D(q)$: la dimensione frattale generalizzata, intesa come funzione di q, è **sempre una funzione decrescente**, per ogni oggetto.[2]

Non abbiamo tuttavia affermato che essa sia strettamente decrescente, e infatti per oggetti non multifrattali la dimensione $D(q)$ è **costante** rispetto a q e pari alla loro *box counting dimension* D_F .

Questa proprietà di $D(q)$ si rivela ottima per distinguere i frattali dai multifrattali, come si può ben capire.

IV FRATTALI GRASSI

Nelle scorse sezioni abbiamo pian piano ricavato generalizzazioni del concetto di dimensione sempre più idonee alla trattazione dei frattali. Tuttavia non siamo certo giunti alla fine del percorso. Esistono infatti categorie di frattali che mettono in crisi la *box counting dimension* e le sue generalizzazioni più strette per diverse ragioni. Una di queste categorie di oggetti problematici è quella dei frattali grassi (*fat fractals*)[2].

Definizione di Frattale Grasso

Un frattale F albergante \mathbb{R}^n è grasso se ogni *palla* n -dimensionale con centro $\vec{x} \in F$ e raggio $\varepsilon > 0$ contiene sia volume di punti di F non nullo sia volume di punti esterni ad F non nullo.⁷

Un esempio di frattale grasso è il **frattale di Smith-Volterra-Cantor**: definito nello stile di un classico insieme di Cantor, con la cruciale differenza che ad ogni step della sua costruzione non viene rimosso il terzo centrale ma bensì il quarto centrale.

Questa differenza ha grosse ripercussioni in quanto per l'insieme di Cantor la lunghezza (misura di Lebesgue dunque) dei segmenti rimossi ad ogni step è:

$$l_n = \frac{1}{3}, 2\left(\frac{1}{3}\right)^2, 4\left(\frac{1}{3}\right)^3, \dots = 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \quad (39)$$

e dunque la lunghezza dell'insieme di Cantor (L) sarà:

$$L = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (40)$$

abbiamo una serie geometrica di ragione minore di 1, e dunque:

$$L = 1 - \frac{1}{3} \frac{1}{1-2/3} = 1 - 1 = 0 \quad (41)$$

quindi l'insieme di Cantor è un usuale frattale con misura nulla nel suo spazio di definizione (*frattale magro, skinny fractal*).

Ma portando avanti un ragionamento analogo per il frattale di Smith-Volterra-Cantor otteniamo:

$$L = 1 - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{4} \frac{1}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{4} 2 = \frac{1}{2} \neq 0 \quad (42)$$



Figura 11: Progressione dell'insieme di Smith-Volterra-Cantor. Possiamo notare anche graficamente come la misura dello stesso non vada ad annullarsi.

Dato che i frattali di questo tipo hanno una misura di Lebesgue non nulla la loro *box counting dimension* D_F sarà sempre pari alla dimensione del minimo spazio geometrico che essi possono albergare, e dunque questa quantità non è per loro una buona misura.

Abbiamo dunque trovato una nuova categoria di frattali che la *box counting dimension* non è in grado di caratterizzare in maniera soddisfacente. Data questa non idoneità della nostra dimensione frattale si rende ancora una volta necessaria una generalizzazione del concetto di dimensione.

Possiamo fare progressi in questo contesto notando che per un frattale ordinario S_0 , come l'insieme di Cantor, la dimensione frattale D_F è equivalente a:

⁷ Dove con il termine *volume*, per essere più rigorosi, ci riferiamo al concetto di **Misura di Lebesgue** degli insiemi in esame.

$$D_F \doteq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln(1/\varepsilon)} = n - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln V[S(\varepsilon)]}{\ln(\varepsilon)} \quad (43)$$

dove n è la dimensione dello spazio che il frattale alberga, e dove $S(\varepsilon)$ è l'insieme ottenuto *facendo ingassare* S_0 di un ammontare ε . Ovvvero $S(\varepsilon)$ contiene tutti i punti del frattale S_0 ed anche tutti i punti di \mathbb{R}^n con distanza inferiore ad ε dai punti di S_0 . Con questa definizione notiamo che $S_0 = S(0)$. Notiamo anche che $V[\cdot]$ vuole indicare il volume n -dimensionale dell'argomento. Per motivare la (43) possiamo procedere come segue: pensiamo di coprire il frattale S_0 con una griglia di celle n -dimensionale, il volume di tutti gli ipercubi necessari per il ricoprimento è $\varepsilon^n N(\varepsilon)$, e questo volume scala approssimativamente nella stessa maniera di $V[S(\varepsilon)]$, dunque:

$$V[S(\varepsilon)] \sim \varepsilon^n N(\varepsilon) \quad (44)$$

e ponendo quest'ultima nella (43) otteniamo immediatamente la *box counting dimension*.

Avendo motivato la (43) possiamo pensare di definire una dimensione idonea alla caratterizzazione dei frattali grassi come segue.

Definizione della Dimensione Esterna

La dimensione esterna (*exterior dimension*) D_x di un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ è definita come segue:

$$D_x \doteq n - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln V[S(\varepsilon) - S(0)]}{\ln \varepsilon} \quad (45)$$

Nella precedente definizione $S(\varepsilon) - S(0)$ è ciò che rimane del frattale fatto ingassare rimuovendo il frattale iniziale $S_0 = S(0)$.⁸ Per i *frattali magri* per definizione vale $V[S(0)] = 0$ e dunque la (45) si riduce alla (43) che sappiamo essere uguale a D_F . Tuttavia si può mostrare che la dimensione esterna (45) produce risultati non banali per i frattali grassi, al contrario della *box counting dimension* D_F .[2]

Dunque questa è a tutti gli effetti un'altra utile generalizzazione del concetto di dimensione, o per meglio dire di dimensione frattale.

⁸ In un certo senso quindi l'*exterior dimension* è la dimensione della *buccia* dell'oggetto in esame; da qui il nome.

V DIMENSIONE DI HAUSDORFF

Le nostre definizioni di dimensione frattale, basate tutte sulla *box counting dimension* in un modo o nell'altro, soffrono ancora di qualche problema.

Si consideri ad esempio l'insieme dei punti sulla retta reale definito dalla *successione armonica*:

$$h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots = \left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^+} \quad (46)$$

dato che non si tratta di altro che di un'insieme numerabile di punti disgiunti ci aspettiamo che questo insieme abbia dimensione D_F pari a zero. Tuttavia svolgendo il calcolo è possibile verificare un valore di $D_F \neq 0$ per quest'insieme.[2]

Questo è un grosso problema per la nostra definizione di dimensione. Fortunatamente è possibile definire una nuova versione di dimensione che generalizza il concetto di dimensione frattale risolvendo al contempo il problema sovra esposto. Questa nuova definizione adopererà una definizione più precisa del concetto di ricoprimento, e va sotto il nome di **dimensione di Hausdroff**. Prima di poter definire questa dimensione avremo bisogno di porre un paio di ulteriori definizioni a supporto.

Definizione di Diametro di un Insieme

Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ definiamo diametro di A ($|A|$) la più grande distanza fra due dei punti di A :

$$|A| = \sup_{\vec{x}, \vec{y} \in A} |\vec{x} - \vec{y}| \quad (47)$$

Definizione di Misura di Hausdroff

Si consideri un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$.

Indichiamo con S_i una collezione numerabile di sottoinsiemi dello spazio cartesiano \mathbb{R}^n tali da avere diametro ε_i inferiore a δ , e tali da costituire un ricoprimento completo dell'insieme A :

$$A \subset \bigcup_i S_i \quad (48)$$

In questo contesto consideriamo adesso la quantità:

$$\Gamma_H^d(\delta) = \inf_{S_i} \sum_i \varepsilon_i^d \quad (49)$$

ovvero: cerchiamo la collezione di set S_i , fra tutte le possibili collezioni ricoprenti A di diametro limitato da δ , tale da minimizzare la somma in (49), e chiamiamo questa somma minima $\Gamma_H^d(\delta)$. Il d indica in un certo senso la dimensione in cui stiamo lavorando.

La dimensione di Hausdroff d -dimensionale è quindi definita come:

$$\Gamma_H^d = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Gamma_H^d(\delta) \quad (50)$$

La misura di Hausdroff (50) generalizza la nozione di lunghezza totale, area, e volume. Ad esempio se prendiamo in considerazione un insieme A semplice superficie bidimensionale definita in uno spazio a tre dimensioni allora Γ_H^2 è semplicemente pari all'area di A , mentre:

$$\begin{cases} \Gamma_H^d = 0 & \text{per } d > 2 \\ \Gamma_H^d = +\infty & \text{per } d < 2 \end{cases} \quad (51)$$

Definizione della Dimensione di Hausdroff

Dato un ente geometrico A con misura di Hausdroff Γ_H^d esisterà per esso un valore critico di d sotto il quale la misura di Hausdroff diverge all'infinito. Questo valore critico viene definito la dimensione di Hausdroff D_H dell'ente geometrico A .

Si può mostrare che per molti oggetti D_F e D_H sono in perfetto accordo, tuttavia per alcune entità geometriche esse effettivamente differiscono, come nel caso della collezione di punti definita dalla successione armonica, che ha dimensione di Hausdroff pari a zero, al contrario di quanto avveniva applicando ad essa la definizione di dimensione frattale.[2]

In generale è possibile dimostrare che la dimensione frattale D_F è un *upper bound* (*maggiorante*) per la dimensione di Hausdroff:

$$D_F \geq D_H \quad (52)$$

Dimostrazione che Dimensione Frattale è Upper Bound della Dimensione di Hausdroff

Consideriamo come al solito un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$.

Ricopriamo A con una griglia di celle di dimensione lineare ε , chiamando queste celle σ_i ognuna di esse avrà diametro:

$$|\sigma_i| = \varepsilon\sqrt{n} \quad (53)$$

poiché le celle σ_i della griglia ovviamente non sono altro che ipercubi n -dimensionali. A questo punto andiamo a calcolare la somma in (49) senza adoperare alcuna procedura di minimizzazione:

$$\sum_i \varepsilon_i^d = N(\varepsilon)(\varepsilon\sqrt{n})^d$$

con $N(\varepsilon)$ come al solito numero di celle di taglia ε necessarie per ricoprire A . δ in questo caso, come già detto, è: $\varepsilon\sqrt{n}$. Chiamiamo questa somma alla Hausdroff non minimizzata $T_H^d(\delta)$:

$$T_H^d(\delta) \doteq N(\varepsilon)(\varepsilon\sqrt{n})^d \quad (54)$$

Sappiamo che il numero di celle necessario per ricoprire un oggetto, per definizione di D_F , scala con ε come:

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D_F} \quad (55)$$

ma dunque combinando la (55) con la (54) otteniamo:

$$T_H^d(\delta) \sim \varepsilon^{d-D_F} \text{ con } \delta = \varepsilon\sqrt{n} \quad (56)$$

ma dunque dalla (56) si capisce benissimo che l'analogo non minimizzato della misura di Hausdroff T_H^d si comporta nella seguente maniera:

$$\begin{cases} T_H^d \doteq \lim_{\delta \rightarrow 0} T_H^d(\delta) = +\infty & \text{se } d < D_F \\ T_H^d \doteq \lim_{\delta \rightarrow 0} T_H^d(\delta) = 0 & \text{se } d > D_F \end{cases} \quad (57)$$

Ma dato che nel calcolo di T non adoperiamo la minimizzazione:

$$T_H^d(\delta) \geq \Gamma_H^d(\delta) \quad (58)$$

e dunque possiamo ricavare che, essendo la dimensione di Hausdroff il più piccolo valore di d per cui non si ha divergenza all'infinito, che:

$$D_F \geq D_H$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. 2^a ed. 2003.
- [2] Edward Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, 1993.
- [3] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. 2^a ed. CRC Press, 2018.
- [4] Jeff Suzuki. *A History of Mathematics*. 2002, p. 731.