

Modelli fluidi di venti supersonici da corone stellari

GIANLUCA PERI

RELATORE: SIMONE LANDI

Università degli Studi di Firenze
Scuola di scienze matematiche, fisiche e naturali
Corso di laurea triennale in scienze fisiche e astrofisiche

INDICE

1	STRUTTURA SOLARE	7
2	FLUIDODINAMICA DELL'ATMOSFERA SOLARE	9
2.1	Introduzione alla dinamica dei fluidi	9
2.2	Prime osservazioni	11
2.3	Studio dell'espansione stazionaria	14
2.4	Vento stellare in approssimazione politropica	22

INTRODUZIONE

Nel 1951 fu per la prima volta fatto notare, da Biermann[1], che alcune osservazioni sperimentali suggerivano la presenza di un costante flusso di materia proveniente dal sole, ad una velocità compresa fra i 500 ed i 1500 chilometri al secondo e ad una densità di circa 500 ioni per centimetro cubo. A questo fenomeno, che venne poi chiamato *vento solare*, fu poi data motivazione teorica grazie al lavoro della comunità scientifica internazionale, primi fra tutti *L. Biermann*[3], *E. N. Parker*[5] e *T.E. Holzer*[7]. In questo scritto ripercorreremo e rielaboreremo alcuni dei risultati teorici più importanti inerenti a questo fenomeno. Dopo una breve introduzione alla struttura solare, e dopo aver brevemente ripercorso le nozioni di meccanica dei fluidi necessarie per lo studio di questo tema, inizieremo la nostra trattazione dimostrando l'impossibilità di una condizione di equilibrio statico per l'atmosfera di una stella di tipo solare. A seguire indagheremo quale tipo di espansione stazionaria è ragionevole aspettarsi dall'alta atmosfera solare, e sotto l'ipotesi d'isotermia coronale ricaveremo l'andamento della velocità d'espansione del gas in funzione della distanza radiale, confrontando diversi andamenti al variare della temperatura a cui è assunta trovarsi la corona isoterma. Successivamente abbandoneremo l'ipotesi d'isotermia per adottare un modello politropico, e sotto questa nuova ipotesi ricaveremo l'andamento della velocità del gas tramite un processo di integrazione numerica al calcolatore, per poi infine confrontare i diversi andamenti al variare dell'indice politropico.

Anche se in questo testo parleremo prevalentemente di struttura e fluidodinamica solare i risultati teorici a cui arriveremo, e le strategie di calcolo che implementeremo, avranno natura abbastanza generale, e la loro applicabilità non si limiterà solo alla fisica della nostra stella.

Questo testo è stato battuto interamente con *Gedit* ed impaginato utilizzando \LaTeX . La classe di stile utilizzata è una versione altamente personalizzata dell'eccellente pacchetto *classicthesis* di *André Miede*. I grafici, così come gli script per l'integrazione numerica, sono stati realizzati in *Python* facendo principalmente uso dei moduli *matplotlib*, *numpy* e *scipy*.

Compilato in data: 5 luglio 2021

Gianluca Peri

STRUTTURA SOLARE

Il sole è classificato come una stella di tipo spettrale G2 V: la G vuole indicare che esso ha una temperatura superficiale compresa fra 5200 e 6000 Kelvin, il 2 a seguire specifica la parte più alta della fascia di temperatura riportata (G0 avrebbe significato circa 6000 K, mentre G9 circa 5200 K). La V invece, da intendere come il numerale romano per 5, indica che il sole si trova nella fase di *sequenza principale*.

Tutte le stelle hanno una struttura stratificata, che possiamo assumere formata da gusci concentrici dalle dimensioni e proprietà fisiche differenti. Il sole non fa eccezione, e nel caso di stelle G2 V si ha la seguente struttura:

Al centro della stella è presente il *nucleo*, dove avvengono le reazioni di fusione nucleare; essendo in sequenza principale nel nucleo si fonde idrogeno in elio, motivando un accumulo di elio nel nucleo (il sole è composto per circa un quarto da elio), mentre le zone superficiali sono composte per la quasi totalità da idrogeno. Nel caso del sole il nucleo si estende radialmente fino al 20 – 25 % del raggio solare (r_{\odot}). All'esterno del nucleo è presente la *zona radiativa*, un guscio sferico in cui non avviene più fusione, ed il calore derivante dalle reazioni nucleari viene trasportato attraverso essa prevalentemente per irraggiamento, non si hanno moti convettivi in questa zona, e da qui il nome. Questa zona si estende dal 20 – 25 % di r_{\odot} fino a circa il 70 %. All'esterno di quest'ultima è presente la *zona convettiva*, dove il calore viene trasportato prevalentemente per convezione; questa zona si estende dal 70 % di r_{\odot} fin quasi alla totalità del raggio solare. All'esterno della zona convettiva si ha la *fotosfera*, questa è la prima zona che siamo in grado di osservare direttamente, si potrebbe essere tentati dal chiamare questa zona "superficie stellare"; tuttavia una stella, non essendo un solido, non ha una superficie ben definibile, e quindi si preferisce identificare questa zona come la prima, più profonda, parte osservabile della stella. L'altra zona direttamente osservabile, esterna alla fotosfera, è l'*atmosfera*: questa è una zona gassosa con densità relativamente bassa rispetto alle altre zone, potremmo dire "un'aura" di gas attorno alla stella.

L'atmosfera solare viene solitamente pensata come ulteriormente suddivisa in tre zone: la zona più interna dell'atmosfera, a contatto con la fotosfera, è detta *cromosfera*. La seconda zona, subito sopra la cromosfera, è detta *zona di transizione*. La terza ed ultima porzione dell'atmosfera, ovvero la parte più esterna dell'atmosfera, è detta *corona*. Questa divisione in tre parti dell'atmosfera solare è utile in quanto molte delle proprietà fisiche dell'atmosfera cambiano drasticamente nella zona di transizione. Uno dei principali cambiamenti consiste nella repentina variazione di temperatura, come ben si vede nella Figura 1.

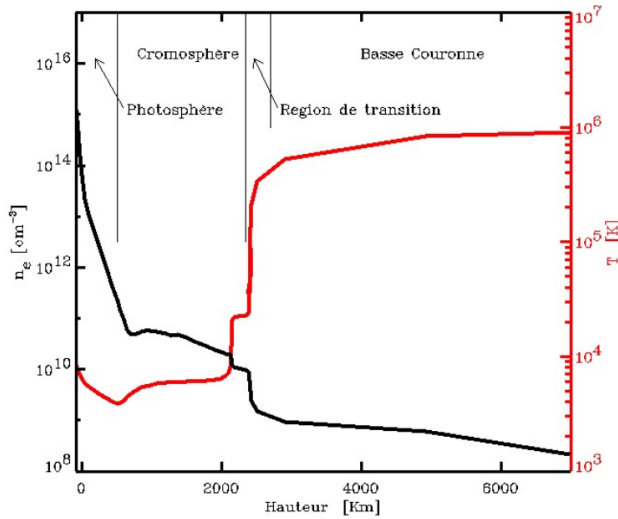


Figura 1: In rosso: grafico della temperatura solare (K) in funzione della distanza radiale (Km). In nero: grafico della densità elettronica per unità di volume (cm^3) in funzione della distanza radiale. Si noti soprattutto il drastico salto nel valore della temperatura nella zona di transizione; si passa da circa 10^4 K a 10^6 K in poche centinaia di chilometri.[4]

Ed oltre a questo notiamo che:

- Oltre la zona di transizione la densità elettronica risulta notevolmente più bassa.
- L'elevata temperatura oltre la zona di transizione fa sì che il gas risulti completamente ionizzato, si trova cioè in uno stato della materia detto *plasma*.

In particolare quest'ultima proprietà del gas coronale ha profonde conseguenze sulle proprietà fisiche del gas, per ragioni che diventeranno più chiare in seguito.

Tuttavia, come avremo modo di mostrare nelle pagine seguenti, l'atmosfera solare non può essere pensata come un'entità statica, essa è necessariamente soggetta ad espansione costante: tonnellate di massa solare vengono espulse a gran velocità dal sole ogni secondo, e questo fenomeno, noto ed osservato fin dagli anni sessanta, prende il nome di *vento solare*. [6]

Di seguito riportiamo un grafico rappresentante alcune delle recenti osservazioni sul vento solare della sonda Ulisse: la velocità del vento è mostrata in funzione della latitudine rispetto al piano dell'eclittica in coordinate polari. Come possiamo vedere in Figura 2 il plasma coronale viene espulso a velocità dell'ordine delle centinaia di chilometri al secondo.

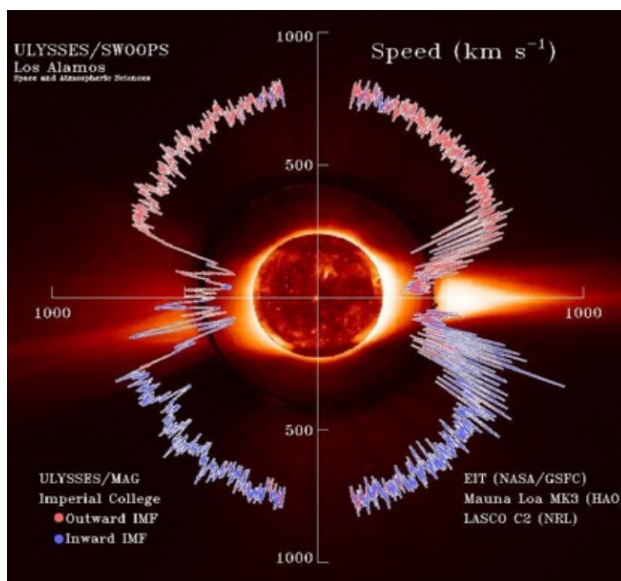


Figura 2: Velocità del vento solare (Km/sec) (e sua polarità magnetica in color code), in funzione della latitudine solare, misurata dalla sonda Ulisse.[2]

FLUIDODINAMICA DELL'ATMOSFERA SOLARE

2.1 INTRODUZIONE ALLA DINAMICA DEI FLUIDI

Le equazioni che governano il moto fluido sono note come *equazioni di Navier-Stokes*; queste sono un set di tre equazioni che esprimono rispettivamente la conservazione della massa, la conservazione della quantità di moto, e la conservazione dell'energia.¹ Sebbene il concetto alla base di queste equazioni, come abbiamo appena visto, sia semplice da definire la forma esplicita di queste può risultare assai complessa, a seconda delle ipotesi che si fanno su quali fenomeni fisici siano ignorabili e quali invece vadano presi in considerazione. Ci proponiamo adesso di riportare la forma esplicita di queste equazioni sotto le seguenti ipotesi semplificative: assumiamo che

- Gli effetti d'attrito fra elementi fluidi siano trascurabili (*fluido ideale*), dove con "elemento fluido" si intende una infinitesima porzione del fluido in esame.
- Le uniche forze esterne applicate al fluido sono dovute alla gravità. Assumiamo inoltre che la sorgente della forza gravitazionale possa sempre essere considerata puntiforme. Ovvero, detta M_g la massa della sorgente, l'accelerazione gravitazionale \vec{g} ammette sempre la seguente forma:

$$\vec{g} = -G \frac{M_g}{r^2} \hat{r}$$

Sotto queste ipotesi come possiamo esprimere la conservazione della massa? Prendiamo in esame una porzione del nostro fluido racchiuso entro la superficie Σ : per avere conservazione della massa la variazione di massa entro Σ dovrà essere uguale al flusso di massa entrante da Σ , ovvero:²

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \vec{x}) dV = - \int_{\Sigma} \rho(t, \vec{x}) \vec{v}(t, \vec{x}) \cdot d\Sigma$$

dove V è il volume racchiuso entro Σ , ρ è la densità e \vec{v} è la velocità del fluido. Questa è nota come: espressione integrale della conservazione della massa. Sebbene questa esprima correttamente la conservazione della massa in un fluido risulta più utile e comodo formulare la conservazione in

¹ Alle volte in letteratura si utilizza il termine "Equazione di Navier-Stokes" per riferirsi esclusivamente alla seconda di queste tre equazioni. Altre volte si utilizza il termine "Equazioni di Navier-Stokes" per indicare sì la totalità delle equazioni della dinamica fluida, ma solo nel caso di fluido *non ideale*, e per il caso di fluido ideale si preferisce usare il termine "Equazioni di Eulero".

In questo testo utilizzeremo il termine nella sua accezione più generale, ovvero per riferirci alla collezione di tutte e tre le equazioni per il moto fluido, indipendentemente che si abbia a che fare con un fluido ideale o non ideale.

² Il segno meno nel secondo termine è frutto della convenzione sul verso del vettore area dS , che impone che esso vada preso sempre come rivolto verso l'esterno.

un'altra forma, equivalente a questa, detta espressione differenziale della conservazione della massa. Possiamo invocare il *teorema della divergenza*, ottenendo:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t, \vec{x}) dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho(t, \vec{x}) \vec{v}(t, \vec{x})) dV$$

e quindi:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1.1)$$

questa espressione differenziale per la conservazione della massa è anche detta *equazione di continuità per la massa*, ed è appunto la prima equazione di Navier-Stokes.

Passiamo alla conservazione della quantità di moto, ovvero alla seconda legge di Newton: prendendo in esame la solita porzione di fluido avremo semplicemente che:

$$\int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \vec{F}$$

dove D/Dt indica la *derivata totale* rispetto al tempo e \vec{F} non è altro che la forza totale applicata alla nostra porzione di fluido. La forza totale \vec{F} sarà data dalla somma di due distinte categorie di forze: le *forze di volume* e le *forze di superficie*.

Ha quindi senso scrivere:

$$\int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \vec{R}_{\text{sup}} + \vec{R}_{\text{vol}}$$

dove \vec{R}_{vol} , \vec{R}_{sup} sono rispettivamente le risultanti delle forze di volume e di superficie sulla nostra porzione di fluido. Adesso l'ipotesi di fluido ideale viene in nostro soccorso: in assenza di attrito le uniche forze di superficie rilevanti sono quelle dovute alla pressione P del fluido, possiamo quindi scrivere³

$$\int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = - \int_{\Sigma} P \vec{n} d\Sigma + \vec{R}_{\text{vol}}$$

in modo analogo possiamo sfruttare la nostra ipotesi sulla natura delle forze esterne per ricavare che:

$$\int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = - \int_{\Sigma} P \vec{n} d\Sigma + \int_V \rho \vec{g} dV$$

Possiamo adesso, attraverso il *teorema del gradiente* arrivare alla forma differenziale per la conservazione della quantità di moto:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} \quad (2.1.2)$$

Questa è nota come *equazione di Eulero*, ed è la nostra seconda equazione di Navier-Stokes sotto le nostre ipotesi.

Passiamo infine alla conservazione dell'energia. Per esprimere quest'ultima è utile introdurre un'ulteriore ipotesi:

► Le trasformazioni termodinamiche in esame sono descrivibili tramite una legge *politropica*.

sotto questa ipotesi la legge di conservazione dell'energia può essere espressa con la struttura dell'equazione di continuità:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad (2.1.3)$$

³ Anche in questo caso il segno meno è dovuto alla convenzione sul verso di $d\Sigma$, ed alla definizione di pressione (P).

dove u rappresenta la densità di energia per unità di volume e \vec{F} la corrente d'energia. Possiamo scrivere la (2.1.3) in forma esplicita:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{P}{\gamma - 1} + \phi_g \rho \right) + \vec{\nabla} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{P}{\gamma - 1} + \phi_g \rho \right) \vec{v} + P \vec{v} \right] = 0 \quad (2.1.4)$$

dove i tre termini componenti la densità d'energia sono rispettivamente la densità d'energia cinetica, d'energia termica e d'energia potenziale gravitazionale. La (2.1.4) è la terza equazione di Navier-Stokes. Si noti l'ottima analogia con l'equazione di continuità per la massa, con l'unica differenza in questo caso data dalla presenza del termine $P \vec{v}$ che tiene conto delle forze di pressione applicate all'elemento fluido (le uniche applicabili data la nostra supposizione di fluido ideale).

Si noti inoltre che in caso di *flusso stazionario*, dato l'annullamento delle derivate temporali, le tre equazioni di Navier-Stokes diventano:

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1.5)$$

$$\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} \quad (2.1.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \phi_g \right) = 0 \quad (2.1.7)$$

Si noti che la (2.1.7) viene anche detta *teorema di Bernulli* per un fluido comprimibile.

2.2 PRIME OSSERVAZIONI

In questa sezione il nostro obiettivo è quello di presentare un primo modello, assai semplificato ma ragionevole, di struttura solare e di utilizzare poi questo modello per trarre alcune fondamentali conclusioni sulla dinamica dell'atmosfera solare.

Immaginiamo il sole come una sfera d'idrogeno autogravitante di massa M_\odot , dotata di simmetria sferica. Poniamo inoltre che:

- Il raggio del sole, inteso come distanza radiale dal nucleo fino alla zona più esterna della sua atmosfera (*corona solare*), sia pari a $r_\odot = 7 \cdot 10^5$ Km.
- La densità di atomi della corona solare sia pari a $N(r_\odot) = 3 \cdot 10^{13} \text{ m}^{-3}$.
- La temperatura del gas coronale sia pari a 10^6 K.
- Il gas presente nella corona solare si comporti come un *gas perfetto*.
- Sia ignorabile l'autogravitazione del gas, ovvero che si possa assumere, nel trattare l'interazione gravitazionale all'interno del nostro modello, che la massa della stella sia tutta concentrata nel suo centro di massa.
- Sia ignorabile la viscosità del gas coronale.
- Non siano presenti sorgenti di calore oltre la distanza radiale r_\odot .

Questo è il nostro modello solare, da cui adesso potremo trarre alcune interessanti conseguenze.[5] Si noti innanzitutto che sotto queste ipotesi la temperatura della corona è abbastanza elevata da ionizzare l'idrogeno. Abbiamo adesso intenzione di usare questa osservazione come punto di

partenza per ricavare una formula per la pressione del gas nella parte più esterna dell'atmosfera solare: possiamo applicare *l'equazione di stato dei gas perfetti*

$$PV = nRT \quad (2.2.1)$$

con $R = N_A k_B$, N_A : *costante di Avogadro*, k_B : *costante di Boltzmann*, e con n : numero di moli, da cui:

$$P = \frac{N_P}{N_A} \frac{N_A k_B T}{V} = \frac{N_P k_B T}{V} \quad (2.2.2)$$

con N_P : numero di particelle. Ma se adesso utilizziamo la densità di atomi per unità di volume N , e teniamo a mente che ad ogni atomo corrispondono due particelle, un elettrone ed un protone, data la ionizzazione del gas, si ottiene immediatamente che:

$$P = 2Nk_B T \quad (2.2.3)$$

E se adesso supponiamo, com'è ragionevole, che queste quantità abbiano una dipendenza dalla coordinata radiale r , otteniamo:

$$P(r) = 2N(r)k_B T(r) \quad (2.2.4)$$

Abbiamo ottenuto la nostra equazione per la pressione. Si ricordi che questa è valida sotto le nostre ipotesi, fatte per il gas coronale, e quindi la sua validità è limitata a valori di r prossimi a r_\odot .

Precisazioni sull'assunzione di gas perfetto e conseguente formula per la pressione

Nel nostro modello abbiamo assunto che il gas coronale possa essere considerato un gas perfetto. Tuttavia questa assunzione è posta in maniera imprecisa: infatti come abbiamo detto il gas coronale dev'essere ionizzato, e quindi esso dev'essere composto da due tipi molto diversi di particelle: elettroni e protoni. Di questo si deve tenere conto: si osservi che nei passaggi matematici svolti dalla (2.2.1) alla (2.2.4) abbiamo sostanzialmente fatto finta di avere a che fare con un gas monoatomico, per poi mettere brutalmente una pezza al tutto aggiungendo un fattore due nella (2.2.3). Possiamo sviluppare una trattazione più precisa come segue:

Innanzitutto modifichiamo il nostro modello solare, andando a cambiare la forma del postulato di perfezione del gas coronale:

- Il gas coronale è un gas d'idrogeno ionizzato, composto quindi da elettroni e protoni. Assumiamo di poter trattare elettroni e protoni come due gas di particelle rarefatte e non interagenti: non interagenti né con particelle della stessa specie né con particelle dell'altra specie. In definitiva assumiamo quindi che la corona solare sia costituita da due gas perfetti.

In realtà l'interazione fra le particelle è indubbiamente presente, e quindi il nostro modello di gas perfetto è solo un'approssimazione, tuttavia potrebbe trattarsi di un'approssimazione adeguata! Difatti possiamo assumere che la temperatura (T) del gas sia sufficientemente elevata da rendere il rapporto fra energia cinetica media delle particelle ($E_K(T)$) ed energia potenziale di interazione elettromagnetica media (U_{EM}) molto maggiore di uno:

$$\frac{E_K(T)}{U_{EM}} \gg 1$$

e dunque possiamo ignorare l'interazione elettromagnetica a lungo raggio delle particelle senza commettere grossi errori.

Adesso che abbiamo espresso il postulato di perfezione del gas coronale in maniera più rigorosa possiamo passare al calcolo della pressione: essendo i gas perfetti e quindi non interagenti basterà calcolare separatamente la pressione esercitata da ognuno (P_e, P_p) per poi farne la somma, ottenendo così la pressione totale del gas d'idrogeno ionizzato. Ma dalla (2.2.2) si vede subito che:

$$P_e = Nk_B T \quad ; P_p = Nk_B T$$

e quindi banalmente:

$$P = P_e + P_p = 2N(r)k_B T(r)$$

ovvero esattamente quello che si era trovato con la (2.2.4).

Possiamo adesso porci la seguente domanda: il nostro modello solare è compatibile con la possibilità di avere equilibrio statico per i gas coronali? Ipotizziamo di sì: il modello è compatibile con l'equilibrio statico dell'atmosfera. Quali sono le conseguenze di quest'ipotesi? Innanzitutto in caso di equilibrio statico $\vec{v} = 0$, e dunque la seconda equazione di Navier-Stokes (2.1.2) diventa:

$$0 = -\nabla P - \rho(r)g(r)$$

ma data la simmetria sferica, la (2.2.4) e la nostra ipotesi di assenza di autogravitazione segue che:

$$\frac{d}{dr}(2Nk_B T) + NM_H G \frac{M_\odot}{r^2} = 0 \quad (2.2.5)$$

dove M_H è la massa di un atomo d'idrogeno. Cerchiamo adesso di trovare l'espressione esplicita della pressione in funzione della distanza radiale: data la (2.2.4) si capisce che per ricavare $P(r)$ occorre prima trovare $N(r)$ e $T(r)$. Abbiamo ipotizzato che oltre r_\odot non siano presenti sorgenti di calore, ricordiamo che la legge sulla conduzione del calore, nota come *legge di Fourier*, afferma che:

$$\vec{q} = -k\nabla T \quad (2.2.6)$$

dove q è il *flusso di calore* e k è la *conducibilità termica*. Ma non essendo presenti sorgenti di calore oltre r_\odot si capisce che la divergenza del campo vettoriale $\vec{q}(\vec{x})$ sarà sicuramente zero. Possiamo dunque scrivere:

$$\nabla \cdot [k\nabla T] = 0$$

Nel caso di un gas d'idrogeno ionizzato e rarefatto come quello della corona solare la conducibilità termica non è costante, bensì dipende dalla temperatura secondo la seguente legge (Chapman 1954):

$$k(T) = cT^n \approx 5 \cdot 10^{-7} T^n \text{ ergs / cm}^2 \text{ sec K}$$

con $n = 5/2$. Tenendo conto di questo, della simmetria sferica e della *forma dell'operatore divergenza in coordinate sferiche* si ha:

$$\nabla \cdot [cT^n(r)\nabla T(r)] = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 cT^n(r)T'(r)] = 0$$

Se adesso teniamo conto delle condizioni al contorno, ovvero che per $r = r_\odot$ si deve avere $T_\odot = 10^6 K$ e che per $r \rightarrow \infty$ si vuole $T \rightarrow 0$, si ha:

$$T(r) = T_0 \left(\frac{r_\odot}{r} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (2.2.7)$$

Adesso che abbiamo trovato l'espressione esplicita della temperatura per il nostro modello solare possiamo immediatamente trovare l'espressione di $N(r)$ integrando la (2.2.5):

$$N(r) = N_0 \left(\frac{r}{r_\odot} \right)^{\frac{1}{n+1}} \exp \left\{ \left[\frac{\lambda(n+1)}{n} \right] \left[\left(\frac{r_\odot}{r} \right)^{\frac{n}{n+1}} - 1 \right] \right\} \quad (2.2.8)$$

dove $N_0 \mid N(r_\odot) = N_0$ e λ è una costante adimensionale:

$$\lambda = \frac{GM_H M_\odot}{2k_B T_0 r_\odot}$$

Si tenga a mente che (2.2.7),(2.2.8) sono state entrambe derivate facendo uso di ipotesi valide solo per coordinate radiali pari o superiori a r_\odot e dunque queste, ed anche tutto ciò che da queste in seguito deriverà, sono valide solo per la porzione più esterna dell'atmosfera solare. Adesso che abbiamo trovato l'espressione esplicita di $T(r)$ e $N(r)$ è immediato ricavare $P(r)$:

$$\begin{aligned} P(r) &= 2k_B N(r)T(r) = 2k_B N_0 T_0 \left(\frac{r_\odot}{r}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{r}{r_\odot}\right)^{\frac{1}{n+1}} \exp \left\{ \left[\frac{\lambda(n+1)}{n} \right] \left[\left(\frac{r_\odot}{r}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1 \right] \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P(r) = P_0 \exp \left\{ \left[\frac{\lambda(n+1)}{n} \right] \left[\left(\frac{r_\odot}{r}\right)^{\frac{n}{n+1}} - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Quest'ultima derivazione ci permette di fare una cruciale osservazione: con $n = 5/2$ otteniamo una pressione non nulla per r che tende all'infinito:

$$P(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} P(r) > 0 \quad \text{con } n = 2.5$$

Nello specifico nel nostro caso di idrogeno completamente ionizzato, e con il valore di λ dato dalle nostre T_0, N_0, M_\odot ($\lambda \approx 5.35$) si ha:⁴

$$P(\infty) \approx 0.55 \cdot 10^{-3} P_0 \approx 0.6 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}$$

Questo è un grosso problema per la nostra ipotesi di equilibrio statico del fluido! Non è ammissibile che si abbia pressione non nulla e non controbilanciata all'infinito in una condizione di equilibrio statico; la presenza di questa pressione, in assenza di sorgenti esterne di pressione contraria, implica forzatamente un'espansione del gas in esame. Tuttavia all'esterno dell'atmosfera solare è presente il gas interstellare, che applicherà una pressione non nulla e contraria a $P(\infty)$; dunque se la pressione dovuta al gas interstellare (P_I) è tale da controbilanciare $P(\infty)$ una condizione di equilibrio statico è perfettamente ammissibile! Riflettiamo quindi sul gas interstellare: la sua densità è di circa 10 atomi d'idrogeno al centimetro cubo (N_I), e possiamo assumere che la sua temperatura sia di circa $T_I = 100 \text{ K}$ [5], da questo si ricava immediatamente che:

$$P_I = N_I k_B T_I = 1.4 \cdot 10^{-14} \text{ Pa},$$

pressione diversi ordini di grandezza più piccola rispetto a $P(\infty)$. Dunque la nostra ipotesi di equilibrio idrostatico del gas della corona solare comporta una pressione all'infinito diversa da zero e non controbilanciata, situazione inammissibile per un gas in equilibrio statico. Siamo dunque arrivati ad un assurdo, che ci porta a dover necessariamente affermare che una condizione di equilibrio statico per l'atmosfera solare sia impossibile. Data la presenza di una pressione all'infinito positiva ci aspettiamo che l'atmosfera solare presenti un costante moto verso l'esterno, una costante espansione.

2.3 STUDIO DELL'ESPANSIONE STAZIONARIA

Nella scorsa sezione abbiamo mostrato che il nostro modello solare non ammette una condizione di equilibrio idrostatico dell'atmosfera, bensì implica un'espansione del gas coronale. Nel

⁴ Notare che si avrebbe pressione all'infinito non nulla anche nel caso d'idrogeno non ionizzato ($n = 0.5$).

seguito assumeremo che tale espansione possa essere considerata *stazionaria*, e cercheremo sotto quest'ipotesi di capire che tipo di espansione è ragionevole aspettarsi in base al nostro modello. La seconda equazione di Navier-Stokes in forma stazionaria, tenendo conto della simmetria sferica, è:

$$\frac{d}{dr}(2Nk_B T) + NM_H G \frac{M_\odot}{r^2} = NM_H v \frac{dv}{dr} \quad (2.3.1)$$

E dall'equazione di continuità, sempre sotto stazionarietà e simmetria sferica, abbiamo:

$$r^2 N(r) v(r) = \text{cost.} \Rightarrow N(r) v(r) = \text{cost.} \frac{1}{r^2}$$

e tenendo a mente le condizioni al contorno $N(r_\odot) = N_0$ e $v(r_\odot) = v_0$, dove v_0 si suppone per ora quantità nota:

$$N(r) v(r) = N_0 v_0 \left(\frac{r_\odot}{r} \right)^2 \quad (2.3.2)$$

Adesso che abbiamo ottenuto la forma delle prime due equazioni di Navier-Stokes (2.3.1), (2.3.2) il nostro obbiettivo è quello di integrarle per ottenere informazioni sulla forma di $v(r)$. Nello specifico possiamo usare (2.3.2) per eliminare $N(r)$ da (2.3.1):

$$N(r) = N_0 v_0 \left(\frac{r_\odot}{r} \right)^2 \frac{1}{v(r)}$$

$$\frac{d}{dr} \left(2N_0 v_0 \left(\frac{r_\odot}{r} \right)^2 \frac{1}{v(r)} k_B T \right) + N_0 v_0 \left(\frac{r_\odot}{r} \right)^2 \frac{1}{v(r)} M_H G \frac{M_\odot}{r^2} = N_0 v_0 \left(\frac{r_\odot}{r} \right)^2 \frac{1}{v(r)} M_H v \frac{dv}{dr}$$

Osserviamo innanzitutto che possiamo elidere N_0 e v_0 , ottenendo:

$$\frac{d}{dr} \left(2 \left(\frac{r_\odot}{r} \right)^2 \frac{1}{v(r)} k_B T \right) + \left(\frac{r_\odot}{r} \right)^2 \frac{1}{v(r)} M_H G \frac{M_\odot}{r^2} = \left(\frac{r_\odot}{r} \right)^2 \frac{1}{v(r)} M_H v \frac{dv}{dr} \quad (2.3.3)$$

Conviene introdurre, seguendo lo svolgimento del *Parker*, le seguenti nuove variabili adimensionali:

$$\xi := \frac{r}{r_\odot} ; \tau := \frac{T(r)}{T_0} ; \psi := \frac{1}{2} \frac{M_H v^2}{k_B T_0}$$

con l'introduzione di queste la nostra equazione (2.3.3) si riduce alla:

$$\frac{d\psi}{d\xi} \left(1 - \frac{\tau}{\psi} \right) = -2\xi^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tau}{\xi^2} \right) - \frac{2\lambda}{\xi^2} \quad (2.3.4)$$

Questa rielaborazione della (2.3.3) ha inoltre il vantaggio di rendere adimensionali le nostre variabili. Riteniamo adesso opportuno, al fine di ottenere risultati più espliciti, discostarci dalla trattazione del *Parker*, preferendo alla variabile ψ il quadrato del *numero di Mach* (M^2).

Approfondimento sul numero di Mach

Il numero di Mach (M) non è altro che il rapporto fra la velocità del corpo in esame (v) e la velocità del suono locale (c), nel nostro caso quindi sarà il rapporto fra la velocità del fluido e c . Per scrivere esplicitamente la forma di M abbiamo quindi bisogno di un'espressione per c : ovviamente la velocità del suono non è altro che la velocità di propagazione di un'onda di pressione all'interno del nostro fluido, e per un fluido in moto stazionario diamo per noto che:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S} \quad (2.3.5)$$

dove il pedice S indica che stiamo supponendo che l'onda sonora si propaghi a velocità sufficientemente elevata da poter essere considerata un processo *adiabatico* e quindi anche

isoentropico. Adesso possiamo unire la nostra ipotesi di processo adiabatico a quella di perfezione del gas coronale, arrivando così a poter scrivere la pressione come:

$$P = K\rho^\gamma \quad (2.3.6)$$

dove γ è il rapporto fra calore specifico a pressione costante e quello a volume costante. Ne consegue che:

$$c = \sqrt{K\gamma\rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (2.3.7)$$

Adesso possiamo generalizzare ad una generica trasformazione politropica $P \propto K\rho^\gamma$, e sfruttando l'ipotesi che il gas sia descrivibile da un'equazione di gas perfetto otteniamo

$$c = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}} \quad (2.3.8)$$

dove m è la massa media di una singola particella. Per un gas completamente ionizzato composto da protoni e elettroni la massa media è circa $M_H/2$ e pertanto:

$$c = \sqrt{\frac{2\gamma k_B T}{M_H}}$$

da cui:

$$M^2 = \frac{M_H v^2}{2\gamma k_B T} = \frac{\psi}{\gamma} \quad (2.3.9)$$

Il nostro obiettivo è adesso integrare (2.3.4) per ottenere $\psi(\xi)$. Per integrare la (2.3.4) abbiamo ovviamente bisogno della forma di $T(r)$, che abbiamo trovato, ed è (2.2.7); tuttavia l'integrazione di (2.3.4) con τ dato da (2.2.7) risulta enormemente complessa; abbiamo bisogno di introdurre una qualche ipotesi semplificativa per portare avanti il calcolo. In precedenza, per trovare (2.2.7) era stato assunto nel nostro modello che non ci fossero sorgenti di calore oltre r_\odot , possiamo pensare di modificare questa parte del nostro modello solare ed assumere invece che:

- Il sole è provvisto di un meccanismo di riscaldamento tale da mantenere la temperatura costante al valore T_0 in una fascia radiale estesa da r_\odot ad un qualche altro valore radiale r_{end} . Oltre r_{end} si suppone che non siano presenti sorgenti di calore.

Si capisce quindi che abbiamo solo leggermente modificato il nostro modello: se prima si assumeva che il sole avesse temperatura costante T_0 al preciso valore radiale r_\odot , temperatura mantenuta costante dai meccanismi di riscaldamento del sole, ora stiamo invece assumendo che ci sia una fascia mantenuta a temperatura costante, per poi avere, oltre la fascia, l'assenza di sorgenti di calore come nella precedente versione del modello.

Tuttavia questa nostra nuova versione del modello solare ha apparentemente solo spostato il problema! Difatti avremo un complesso andamento della temperatura nella zona oltre r_{end} , complesso tanto quanto quello che si aveva prima con (2.2.7). A prima vista sembra quindi di non aver risolto nulla, tuttavia possiamo, seguendo *Parker*, fare un'ulteriore assunzione

- Il valore della temperatura oltre r_{end} sia del tutto trascurabile rispetto al valore T_0 . Ovvero supponiamo che oltre r_{end} si abbia $T = 0$.

Con quest'ultima ulteriore supposizione la situazione diventa molto più semplice da risolvere: abbiamo adesso una corona solare isoterma. Torniamo quindi al nostro problema, ovvero all'integrazione di (2.3.4):

In primo luogo notiamo che assumere una corona solare isoterma implica $\gamma = 1$, e quindi la (2.3.9) ci dice immediatamente che

$$\psi = M^2$$

e possiamo quindi riscrivere la (2.3.4) come segue:

$$\frac{dM^2}{d\xi} \left(1 - \frac{\tau}{M^2}\right) = -2\xi^2 \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\tau}{\xi^2}\right) - \frac{2\lambda}{\xi^2} \quad (2.3.10)$$

Nella zona con $r_\odot \leq r \leq r_{\text{end}}$ si ha $\tau = 1$ e quindi si ottiene:

$$M^2 - \ln M^2 = M_0^2 - \ln M_0^2 + 4 \ln \xi - 2\lambda \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \quad (2.3.11)$$

dove $M_0^2 \equiv M^2(r_\odot) = M_0^2$. Invece nella zona con $r > r_{\text{end}}$ si ha $\tau = 0$, e quindi:

$$M^2(\xi) = M^2 \left(\frac{r_{\text{end}}}{r_\odot}\right) - 2\lambda \left(\frac{r_\odot}{r_{\text{end}}} - \frac{1}{\xi}\right) \quad (2.3.12)$$

Abbiamo quindi due diverse equazioni per due diverse regioni radiali.

Abbiamo adesso intenzione di concentrarci sullo studio della prima di queste due, supponendo sempre seguendo *Parker* che

- $r_{\text{end}} \gg r_\odot$, ovvero che la fascia isoterma sia molto grande e comprenda tutta la zona radiale di nostro interesse.

Pensiamo quindi all'equazione per la fascia isoterma (2.3.11): se riusciamo a trovare una forma esplicita di questa abbiamo in sostanza trovato $v(r)$, che è quello che ci interessa. Il problema principale che abbiamo è l'ignoranza riguardo il valore di M_0^2 , che in pratica è come dire ignoranza del valore di v_0 .

Per cercare di fare progressi possiamo innanzitutto notare che la (2.3.11) deve produrre valori reali di $v(r)$ per ogni $r > r_\odot$; tuttavia non è detto che (2.3.11) abbia questo comportamento per ogni valore di v_0 . Studiamo meglio questo aspetto: per semplicità poniamo

$$Y = 4 \ln \xi - 2\lambda \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)$$

$$Z = M^2 - \ln M^2$$

la (2.3.11) diventa:

$$Z = M_0^2 - \ln M_0^2 + Y$$

Adesso notiamo che il valore di M^2 a $\xi = 1$, ovvero M_0^2 , deve essere preso come molto minore dell'unità! Difatti per noi non avrebbe senso studiare un moto fluido dove il flusso è già supersonico in $r = r_\odot$, sarebbe una condizione al contorno immotivata, implausibile e soprattutto non ci permetterebbe di studiare se un moto fluido "lento" può venir effettivamente sensibilmente accelerato e reso supersonico passando attraverso la corona. Abbiamo dunque capito che come condizione al contorno dobbiamo avere $M_0^2 < 1$. Con questa condizione su M_0^2 vediamo che sia Y che Z decrescono oltre $\xi = 1$: si ha che Y raggiunge il minimo a $\xi = \lambda/2$ e dopo cresce monotonamente, mentre Z raggiunge il minimo a $M^2 = 1$ e dopo cresce monotonamente. Siccome la (2.3.10) implica:

$$\frac{dZ}{d\xi} = \frac{dY}{d\xi}$$

allora Z e Y devono avere minimo nello stesso punto, ovvero:

$$M_0^2 - \ln M_0^2 = 2\lambda - 3 - 4 \ln \frac{\lambda}{2} \quad (2.3.13)$$

ma questa relazione ci permette di ricavare il valore di M_0 in base alle altre grandezze in gioco contenute in λ . Possiamo adesso quindi utilizzare la (2.3.13) per eliminare ψ_0 da (2.3.11), ottenendo:

$$M^2 - \ln M^2 = -3 - 4 \ln \frac{\lambda}{2} + 4 \ln \xi + \frac{2\lambda}{\xi} \quad (2.3.14)$$

Quest'ultima equazione fornisce tutte le informazioni necessarie per ricavare $v(r)$. Quello che vorremmo adesso fare è riscrivere la (2.3.14) in una forma del tipo:

$$M^2(\xi) = F(\xi, \lambda) \quad (2.3.15)$$

ed una volta fatto questo potremmo usare la definizione di ψ per ricavare $v(r)$. Tuttavia è *analiticamente impossibile* ricavare una forma come la (2.3.15) dalla 2.3.14. Difatti pensiamo all'equazione affine:

$$x - \ln x = k$$

possiamo provare ad isolare la x :

$$\exp [x - \ln x] = e^k \Rightarrow \frac{1}{x} e^x = e^k$$

e ci ritroviamo con il problema di cercare di invertire la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} e^x$$

problema analiticamente simile al cercare di invertire la funzione:

$$g(x) = x e^x$$

la cui inversa è però una funzione ben nota, si tratta della *funzione W di Lambert*:

$$g^{-1}(x) = W(x)$$

ed è ben noto che la funzione W non è esprimibile in termini di funzioni elementari. Da questo deduciamo che anche la (2.3.14) non sia analiticamente invertibile! Come possiamo procedere dunque?

Un'opzione consiste appunto nell'usare la funzione W di Lambert per esprimere $\psi(\xi)$: difatti la (2.3.14) può essere scritta come segue:

$$M^2 - \ln M^2 = G(\xi, \lambda) \quad ; \quad G(\xi, \lambda) := -3 - 4 \ln \frac{\lambda}{2} + 4 \ln \xi + \frac{2\lambda}{\xi}$$

da cui segue:

$$\frac{1}{M^2} e^{M^2} = e^{G(\xi, \lambda)}$$

A partire da quest'ultima a prima vista sembra arduo ricondursi ad una forma dove sia utilizzabile direttamente la funzione W ; in realtà la procedura è abbastanza semplice, si tratta solo di trovare il giusto truccetto algebrico:

$$\frac{1}{M^2} e^{M^2} = e^{G(\xi, \lambda)} \Rightarrow \left(\frac{1}{M^2} e^{M^2} \right)^{-1} = \left(e^{G(\xi, \lambda)} \right)^{-1} \Rightarrow M^2 e^{-M^2} = e^{-G(\xi, \lambda)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -M^2 e^{-M^2} = -e^{-G(\xi, \lambda)}$$

Ed adesso la risoluzione è banale: basta applicare la funzione W:

$$\begin{aligned} W(-M^2 e^{-M^2}) &= W(-e^{-G(\xi, \lambda)}) \Rightarrow -M^2 = W(-e^{-G(\xi, \lambda)}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow M^2 = -W(-e^{-G(\xi, \lambda)}) \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

Abbiamo trovato, grazie alla funzione W, la nostra espressione per $M^2(\xi)$. Questa espressione non è propriamente "esplicita", in quanto la funzione W non ammette espressione analitica, tuttavia possiamo considerarci soddisfatti. Grazie all'espressione (2.3.16) possiamo facilmente andare a riportare le soluzioni per M^2 in funzione di ξ in grafico.

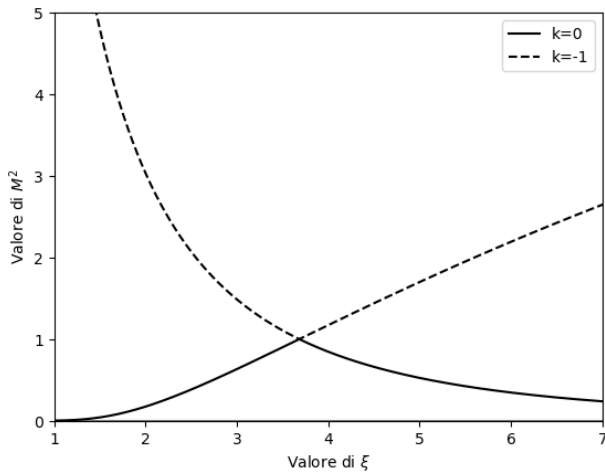


Figura 3: Grafico di $M^2(\xi)$. Abbiamo assunto una corona solare isoterma alla temperatura $T_0 = 1.5 \times 10^6$ K. Si noti che la ξ riportata sull'asse delle ascisse non è altro che la distanza radiale espressa in unità del raggio solare r_\odot . $k = 0$ e $k = -1$ corrispondono ai due rami della funzione di Lambert, gli unici da considerare visto che stiamo lavorando nei reali e non nei complessi.

Una volta espressa esplicitamente, e riportata in grafico, la dipendenza di M^2 da ξ , si capisce che basta banalmente applicare la definizione di $M^2 = \psi$ per ricavare $v(\xi)$:⁵

$$v = \sqrt{\frac{2k_B T_0 \psi}{M_H}}$$

E da questa procedura otteniamo il seguente grafico:

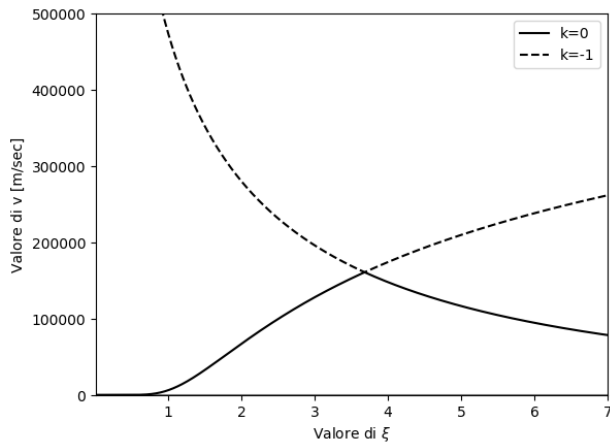


Figura 4: Grafico del modulo di $v(\xi)$. Anche qui abbiamo assunto una corona solare isoterma alla temperatura $T_0 = 1.5 \times 10^6$ K. Anche qui si ricordi che ξ non è altro che la distanza radiale.

⁵ O meglio il modulo di $v(\xi)$.

Per meglio esporre, in concreto, la procedura di calcolo e creazione dei grafici di seguito riportiamo il codice sorgente, scritto in *python*, della Figura 4:

```

1  from matplotlib import pyplot as plt
2  import numpy as np
3  from scipy import special as spe
4
5  #Definition of the global variables:
6  T=1.5*10**6 #K
7  k_B=1.38*10**(-23) #J/K
8  M_H=1.6*10**(-27) #Kg
9  M_S=2.*10**30 #Kg
10 R_S=7.*10**8 #m
11 G=6.67*10**(-11) #N*m**2/Kg**2
12
13 #Definition of the necessary functions:
14 def f_lambda(T_var):
15     return (G*M_H*M_S)/(2.*k_B*T_var*R_S)
16
17 def f_G(xi , lambda_var):
18     return -3.-4.*np.log(lambda_var/2.)+4.*np.log(xi)+(2.*lambda_var/xi)
19
20 def f_MDue(G_var , k_var):
21     return -spe.lambertw(-np.exp(-G_var) , k_var).real
22
23 def f_v(psi_var , T_var):
24     return np.sqrt( (2.*k_B*T_var*psi_var)/(M_H) )
25
26
27 left_margin=0.01
28 right_margin=10.
29 step = 0.01
30
31
32 xi_list=np.arange(left_margin , right_margin , step)
33
34 #Graphical preferences:
35 plt.xlabel('Valore di  $\xi$ ')
36 plt.ylabel('Valore di v [m/sec]')
37 plt.axhline(0, color='grey')
38 plt.axvline(0, color='grey')
39 plt.xlim([left_margin , 7.])
40 plt.ylim([left_margin , 500000.])
41
42 #Plotting:
43 plt.plot(xi_list ,
44 f_v( f_MDue( f_G(xi_list , f_lambda(T) ) , 0 ) , T ) ,
45 color='black' , label="k=0")

```

```

46 plt.plot(xi_list ,
47 f_v( f_MDue( f_G(xi_list , f_lambda(T) ) , -1 ) , T ) ,
48 color='black' , label="k=-1" , linestyle="dashed")
49
50
51
52
53 plt.legend()
54
55 plt.savefig(
56 '/home/noumeno/Documents/Materiale_Inerente_Tesi/' +
57 'Tesi_Triennale/Pictures/Grafico_v_xi.png' ,
58 bbox_inches="tight"
59 )
60
61 plt.show()

```

Il codice sorgente della Figura 3 è del tutto analogo.

Concentriamoci ora sul grafico delle soluzioni per $v(\xi)$ in Figura 4: si può subito notare la presenza di due distinte soluzioni per la nostra equazione del moto: una di esse assume una bassa velocità del fluido per piccole distanze radiali, mentre l'altra assume l'esatto contrario; come si vede in Figura 5.

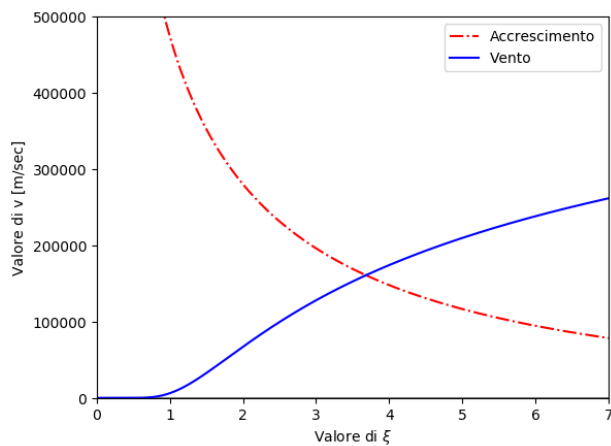


Figura 5: Grafico del modulo di $v(\xi)$. La linea blu rappresenta la soluzione con piccola velocità in prossimità della superficie stellare, questa è nota come *soluzione di vento*; il contrario vale per la soluzione riportata in linea rossa tratteggiata, che prende invece il nome di *soluzione di accrescimento*; il perché di questa nomenclatura diverrà più chiaro nelle prossime righe.

Appare adesso evidente che una di queste due curve, la curva rossa tratteggiata, non è accettabile come soluzione per il nostro moto d'espansione del gas coronale. Da questo si può dedurre che la curva blu descriva il corretto moto d'espansione *transonico* nella nostra approssimazione di corona isoterma, mentre l'altra curva descrive invece un fenomeno di accrescimento radiale in approssimazione isoterma.⁶ Infine di seguito, nella Figura 6, riportiamo diverse soluzioni di vento transonico al variare della temperatura a cui si assume la corona isoterma si trovi.

⁶ Dato che in realtà: $v = \pm \sqrt{\frac{2k_B T_0 \psi}{M_H}}$.

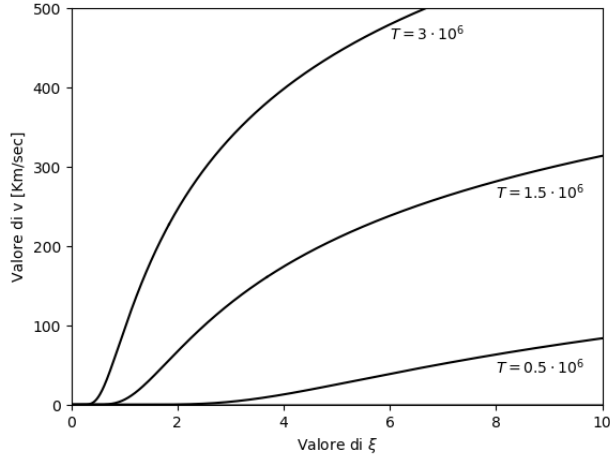


Figura 6: Grafici di $v(\xi)$, questa volta abbiamo riportato le velocità in Km/s. Si noti come al variare della temperatura della corona isoterma si modifica l'andamento delle soluzioni per il moto di espansione del gas coronale.

2.4 VENTO STELLARE IN APPROSSIMAZIONE POLITROPICA

Vogliamo adesso discostarci completamente dalla trattazione di Parker, lasciando cadere l'ipotesi di isotermità della corona solare.

Adottiamo sempre un modello di gas coronale ideale privo di viscosità, senza conduzione di calore, in moto con flusso stazionario ed avente simmetria sferica. Tuttavia assumiamo che gli elementi fluidi siano sottoposti a trasformazioni di tipo politropico. In questo caso allora possiamo facilmente individuare le tre equazioni della dinamica per il nostro sistema:

$$\frac{d}{dr}(\rho v r^2) = 0 \quad (2.4.1)$$

$$\rho v \frac{dv}{dr} = -\frac{dP}{dr} - \frac{GM_{\odot}\rho}{r^2} \quad (2.4.2)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{r} \right) = 0 \quad (2.4.3)$$

Le prime due equazioni di Navier-Stokes sono ovviamente identiche a quelle che abbiamo utilizzato nella scorsa sezione; la differenza sta nella (2.4.3), difatti avendo fatto cadere l'ipotesi di isotermità ed avendo invece introdotto quella di assenza di sorgenti di calore abbiamo bisogno di tener conto della conservazione dell'energia espressa dalla (2.4.3). Si noti inoltre che adesso il valore di γ non è fissato all'unità, ma è invece un parametro del nostro problema. Si noti che da queste tre è possibile ricavare che:

$$\frac{d}{dr} \frac{P}{\rho^{\gamma}} = 0$$

da cui si deriva immediatamente che

$$P = K \rho^{\gamma}$$

e questa è esattamente la relazione che descrive un fluido politropico.

Come nella precedente sezione il nostro obiettivo è quello di integrare le tre equazioni del moto per ottenere informazioni sulle proprietà del moto fluido: in particolare siamo ovviamente interessati all'andamento della velocità del fluido in funzione della coordinata radiale. Come nella sezione precedente ci conviene effettuare un cambiamento di variabili, preferendo a r e v le due solite variabili adimensionali $\xi = r/r_0$ e $M^2 = |v/c|^2$; e tenendo a mente la (2.3.7): $c = \sqrt{\gamma P/\rho}$.

Utilizzando queste variabili, con manipolazioni simili a quanto visto nella scorsa sezione, dalle tre equazioni di Navier-Stokes possiamo ricavare la seguente relazione:[7]

$$\frac{M^2 - 1}{2M^2} \frac{dM^2}{d\xi} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M^2\right] \left[\frac{2E}{\xi} - \left(\frac{5-3\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{GM_\odot}{2r_0\xi^2}\right]}{E + \frac{GM_\odot}{r_0\xi}} \quad (2.4.4)$$

Il moto fluido è descritto quindi da questa equazione differenziale, influenzata da quattro soli parametri: l'indice politropico γ , come ci aspettavamo trattando appunto il modello politropico, la massa della stella M_\odot , il suo raggio r_0 ed infine la densità di energia per unità di massa E . Si noti difatti che la (2.4.3) impone immediatamente la conservazione di E , di cui possiamo per esempio andare a calcolare il valore sulla quota radiale di riferimento r_0 :

$$E = \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} - \frac{GM_\odot}{r_0}$$

Quello che possiamo adesso pensare di fare per ottenere un grafico esplicito delle soluzioni per il nostro moto, M^2 in funzione di ξ , è integrare la (2.4.4) con una tecnica di integrazione numerica al calcolatore, come il *Metodo di Eulero Modificato*.

Prima di passare in concreto all'integrazione numerica di (2.4.4) dobbiamo affrontare alcune questioni:

- In primo luogo vogliamo tentare di sostituire il parametro E con uno adimensionale, per far questo possiamo pensare di usare la densità d'energia in unità di potenziale gravitazionale, ovvero:

$$\mathcal{E} = \frac{E}{GM_\odot/r_0}$$

applicando questa sostituzione nella (2.4.4) si ottiene:

$$\frac{M^2 - 1}{2M^2} \frac{dM^2}{d\xi} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M^2\right] \left[\frac{2\mathcal{E}}{\xi} - \left(\frac{5-3\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{1}{2\xi^2}\right]}{\mathcal{E} + \frac{1}{\xi}} \quad (2.4.5)$$

- Vogliamo scrivere quest'ultima in una forma più comoda per l'integrazione numerica, ovvero vogliamo isolare la derivata di M^2 :

$$\frac{dM^2}{d\xi} = \frac{\left[\frac{2M^2}{M^2-1}\right] \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) M^2\right] \left[\frac{2\mathcal{E}}{\xi} - \left(\frac{5-3\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{1}{2\xi^2}\right]}{\mathcal{E} + \frac{1}{\xi}}$$

- Ci resta da discutere è quali siano le adeguate condizioni al contorno da imporre al fine di ottenere la soluzione di nostro interesse, ovvero quella transonica; prestiamo attenzione alla (2.4.5): notiamo che se il secondo membro si annulla questo impone l'annullamento di uno dei due termini del prodotto al primo membro, e se la derivata non si annulla⁷ allora si deve avere $M^2 = 1$, che è proprio quello che vogliamo dal *punto critico* della soluzione transonica! Troveremo quindi la ξ associata al punto critico (ξ_c) semplicemente risolvendo:

$$\frac{2\mathcal{E}}{\xi} - \left(\frac{5-3\gamma}{\gamma-1}\right) \frac{1}{2\xi^2} = 0 \Rightarrow$$

⁷ L'annullamento della derivata corrisponderebbe ad una soluzione non transonica, come ad esempio una *soluzione di brezza*.

$$\Rightarrow \xi_c = \frac{1}{4\varepsilon} \frac{5-3\gamma}{\gamma-1} \quad (2.4.6)$$

Si noti che quanto detto assume $\gamma \neq 5/3$ (ed ovviamente $\gamma \neq 1$ visto che non siamo più in un modello isoterma). Abbiamo quindi trovato le nostre condizioni al contorno: in ξ_c si deve avere $M^2 = 1$.

- Il processo di integrazione avrà bisogno di un esplicito valore per ε , dobbiamo quindi individuare un valore ragionevole per questo parametro. Pensiamo di riscaldare il valore di ξ in maniera tale che $\xi_c = 1$, allora si vede subito dalla (2.4.5) che il valore di ε dovrà essere tale da soddisfare:

$$\left[\frac{2\varepsilon}{\xi} - \left(\frac{5-3\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{1}{2\xi^2} \right]_{\xi=1} = 0$$

e questo implica immediatamente che:

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \left(\frac{5-3\gamma}{\gamma-1} \right)$$

Tuttavia preferiremmo che il raggio fosse espresso in unità del raggio solare e non in unità del raggio critico; possiamo quindi pensare di eseguire le seguenti manipolazioni:

$$E = \frac{GM_\odot}{r_c} \varepsilon_c = \frac{GM_\odot}{r_\odot} \frac{r_\odot}{r_c} \varepsilon_c$$

ma adesso notiamo che sempre per definizione:

$$\varepsilon = \frac{E_\odot}{\frac{GM_\odot}{r_\odot}} = \varepsilon_c \frac{r_\odot}{r_c}$$

ma quindi, ricordando che $\xi = r/r_\odot$:

$$\varepsilon_\odot = \frac{\varepsilon_c}{\xi_c}$$

Capiamo quindi che per traslare dal valore di ε con il raggio espresso in unità del raggio critico a quello che vogliamo noi dobbiamo sapere il valore del raggio critico espresso in unità del raggio solare. Il problema adesso è che noi non conosciamo esplicitamente questo valore, dato che la (2.4.6) dipende dal valore di ε . Per ovviare a questo problema possiamo pensare sia ragionevole porre il valore del raggio critico uguale al valore che esso avrebbe nel modello isoterma, che può essere facilmente ricavato come uguale a $\lambda/2$.⁸ Accettando questa approssimazione si può subito derivare il valore di ε con ξ in unità del raggio solare:

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \frac{2}{\lambda} \left(\frac{5-3\gamma}{\gamma-1} \right)$$

Si noti che immettendo questo valore nella (2.4.6), ottenuta dalla (2.4.5) senza alcuna approssimazione, si trova $\xi_c = \lambda/2$, esattamente quello che ci si aspettava per coerenza. Si noti inoltre che questa scelta di ε , in particolare il fatto che ε sia una quantità positiva, impone un valore di γ compreso fra uno e cinque terzi.⁹

⁸ Avessimo scelto un'altra strada per individuare un ragionevole valore per ε saremmo comunque stati costretti ad accettare alcune approssimazioni, come per esempio fissare arbitrariamente la velocità del gas in prossimità della superficie solare.

⁹ Difatti con $\varepsilon > 0$ se $\gamma \notin (1, 5/3)$ allora il valore di ξ_c risulta essere negativo, il che ovviamente non è accettabile.

- Il processo di integrazione con Eulero Modificato, che esporremo meglio nelle prossime righe, partendo dalle condizioni a contorno sovra ricavate necessita un'ulteriore informazione sul valore della derivata di M^2 nel punto critico; questo è sintomo di quanto già visto nella sezione precedente: per il punto critico passano due distinte soluzioni della nostra equazione del moto, una di esse, quella con derivata positiva nel punto critico, è la soluzione di vento a cui siamo interessati, e l'altra è la soluzione di accrescimento. Dobbiamo dunque trovare un modo di ricavare il valore della derivata nel punto critico, ovviamente la sostituzione diretta di $M^2 = 1$, $\xi = \xi_c$ nella (2.4.5) non porta a nessun risultato.

Quello che possiamo fare è espandere la (2.4.5) in serie di Taylor al primo ordine attorno al punto critico, utilizzando le espansioni di M^2 e ξ , dove ovviamente $M_c^2 = 1$:

$$M^2(\xi) = 1 + \frac{dM^2}{d\xi}(\xi - \xi_c)$$

$$\xi = \xi_c + \Delta\xi$$

Così facendo si giunge alla seguente espressione:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{dM^2}{d\xi} \right]_{\xi_c} \frac{dM^2}{d\xi} \Delta\xi = \frac{\frac{\gamma+1}{2} \left[\left(\frac{5-3\gamma}{\gamma-1} \right) \frac{1}{\xi_c^3} - \frac{2\xi}{\xi_c^2} \right] \Delta\xi}{\xi + \frac{1}{\xi_c}}$$

Adesso possiamo elidere $\Delta\xi$ e far tendere ξ ad ξ_c , ottenendo:

$$\left[\frac{dM^2}{d\xi} \right]_{\xi_c} = \pm \sqrt{\frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{\xi + \frac{1}{\xi_c}} \frac{1}{\xi_c^3} \left(\frac{5-3\gamma}{\gamma-1} \right)}$$

Selezionando il risultato positivo possiamo quindi procedere all'integrazione numerica per la nostra soluzione di vento.

Appena sotto, in Figura 7, è riportato il grafico della nostra soluzione di vento nel modello politropico.

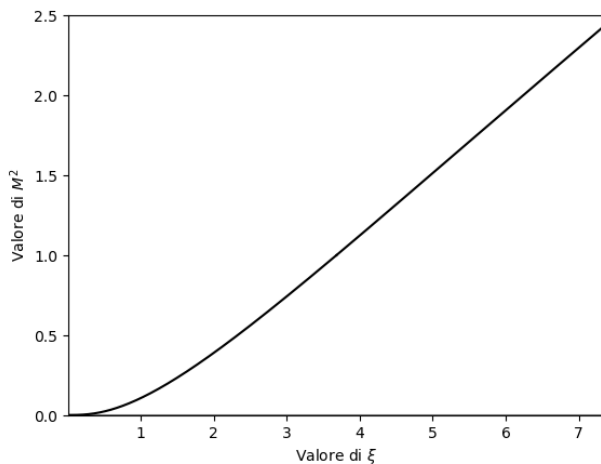


Figura 7: Grafico di M^2 in funzione della distanza radiale espressa in unità del raggio solare ξ . Abbiamo assunto una temperatura del gas coronale al raggio solare pari a $1.5 \cdot 10^6$ K. Abbiamo scelto, seguendo la trattazione di Holzer[7], un valore di γ pari a quattro terzi. Si notino le differenze nella forma del grafico rispetto al modello isoterma della scorsa sezione.

Per meglio esporre la procedura di integrazione numerica di seguito riportiamo il codice sorgente della Figura 7.

```

1  from matplotlib import pyplot as plt
2  import numpy as np
3
4  #Definition of the global variables:
5  T=1.5*10**6 #K
6  k_B=1.38*10**(-23) #J/K
7  M_H=1.6*10**(-27) #Kg
8  M_S=2.*10**30 #Kg
9  R_S=7.*10**8 #m
10 G=6.67*10**(-11) #N*m**2/Kg**2
11 gamma=4./3.
12
13
14 #Definition of the physical functions
15 def f_lambda(T_var):
16     return (G*M_H*M_S)/(2.*k_B*T_var*R_S)
17
18 def p_1(f_var):
19     return 2.*f_var/(f_var-1.)
20
21 def p_2(f_var , gamma_var):
22     return 1.+((gamma_var-1.)/2.)*f_var
23
24 def p_3(E_var , gamma_var , x_var):
25     return ((2.*E_var)/x_var)-((5.-3.*gamma_var)/(gamma_var-1.))*(1./(2.*x_var**2.))
26
27 def p_4(E_var , x_var):
28     return E_var+(1./x_var)
29
30 def fprimo(f_var , x_var , gamma_var , E_var):
31     return (p_1(f_var))*(p_2(f_var , gamma_var))*(p_3(E_var , gamma_var ,
32     ↪ x_var))/(p_4(E_var , x_var))
33
34 #Definition of the Modified Euler functions
35 def Next_point_y_piu(point_var_x , point_var_y , gamma_var , E_var):
36     nel_mezzo_x = point_var_x + 0.5*step
37     nel_mezzo_y = point_var_y + 0.5*step*fprimo(point_var_y , point_var_x ,
38     ↪ gamma_var , E_var)
39     return point_var_y+step*fprimo(nel_mezzo_y , nel_mezzo_x , gamma_var , E_var)
40
41 def Next_point_y_meno(point_var_x , point_var_y , gamma_var , E_var):
42     nel_mezzo_x = point_var_x - 0.5*step
43     nel_mezzo_y = point_var_y - 0.5*step*fprimo(point_var_y , point_var_x ,
44     ↪ gamma_var , E_var)
45     return point_var_y-step*fprimo(nel_mezzo_y , nel_mezzo_x , gamma_var , E_var)
46
47 #Derivation of the adimensional energy density
48 E=((5.-3.*gamma)/(gamma -1.))*(1./4.)*(2./f_lambda(T))

```

```

46
47 #Define x position of critical point
48 x_c = f_lambda(T)/2.
49
50 #Define initial slope of our solution in x_c:
51 s_i = np.sqrt(
52     ↪ ((gamma+1.)/2.)*(1./(E+(1./x_c)))*(1./(x_c**3.))*((5.-3.*gamma)/(gamma -1.))
53     ↪ )
54
55 #Define number of segments:
56 n_s=100000.
57
58 #Define integration region and step
59 half_region=(x_c-0.01)
60 step = half_region/n_s
61
62 #Inizialization: performing the first step of the integration "by hand"
63 initial_point_x_ava = x_c+step
64 initial_point_y_ava = 1.+s_i*step
65
66 initial_point_x_ind = x_c-step
67 initial_point_y_ind = 1.-s_i*step
68
69 x_points_ava = []
70 y_points_ava = []
71
72 x_points_ind = []
73 y_points_ind = []
74
75 x_points_ava.append(initial_point_x_ava)
76 y_points_ava.append(initial_point_y_ava)
77
78 x_points_ind.append(initial_point_x_ind)
79 y_points_ind.append(initial_point_y_ind)
80
81 #Performing Modified Euler
82 for i in range(0,int(n_s)):
83     y_points_ava.append( Next_point_y_piu(x_points_ava[i] , y_points_ava[i] , gamma
84     ↪ , E) )
85     x_points_ava.append(x_points_ava[i]+step)
86
87 for i in range(0,int(n_s)):
88     y_points_ind.append( Next_point_y_meno(x_points_ind[i] , y_points_ind[i] , gamma
89     ↪ , E) )
90     x_points_ind.append(x_points_ind[i]-step)

```

```

90 #Graphical preferences:
91 plt.xlabel('Valore di  $\xi$ ')
92 plt.ylabel('Valore di  $M^2$ ')
93 plt.axhline(0, color='grey')
94 plt.axvline(0, color='grey')
95 plt.xlim([0.01 , half_region*2])
96 plt.ylim([0. , 2.5])
97
98 #Plotting
99 plt.plot(x_points_ava , y_points_ava , color="black")
100 plt.plot(x_points_ind , y_points_ind , color="black")
101
102 plt.savefig(
103     '/home/noumeno/Documents/Materiale_Inerente_Tesi/' +
104     'Tesi_Triennale/Pictures/Int_Mod_Bar.png' ,
105     bbox_inches="tight"
106 )
107
108 plt.show()

```

Infine riportiamo un grafico delle soluzioni al variare del coefficiente politropico γ .

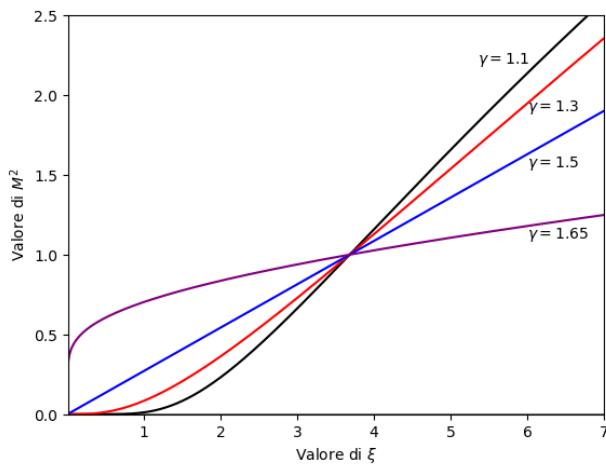


Figura 8: Grafici di M^2 in funzione della distanza radiale espressa in unità del raggio solare ξ . Abbiamo assunto una temperatura del gas coronale al raggio solare pari a $1.5 \cdot 10^6$ K. Si noti il differente andamento della soluzione al variare di γ : per γ con valore prossimo ad uno la soluzione tende a quella per corona isoterma, mentre per γ con valore prossimo a $5/3$ la soluzione tende a quella adiabatica.

Si noti che per $\gamma \rightarrow 1$ il profilo del vento è maggiore. Intuitivamente questo risultato è consistente col fatto che una corona isoterma comporta un maggior deposito d'energia termica negli strati superiori dell'atmosfera, che può essere parzialmente trasformata in energia meccanica del moto fluido.

RINGRAZIAMENTI

Reputo essenziale e doveroso spendere adesso qualche riga per ringraziare almeno alcune delle persone che hanno reso questo lavoro possibile:

Innanzitutto mi preme ringraziare di cuore il professor Simone Landi sia per avermi fatto da relatore sia per le stupende lezioni di *metodi numerici per la fisica* che ho avuto il piacere di seguire lo scorso anno. Ringrazio il professor Egidio Landi Degl’Innocenti, che sfortunatamente non ho mai conosciuto di persona, ma a cui sono comunque grato per le eccellenti dispense di meccanica dei fluidi, che fortunatamente ho avuto il piacere di leggere. Ringrazio il professor Luca Baldini, che per primo mi ha introdotto a molto di quanto facente parte di questo scritto: dal redarre documenti in *L^AT_EX* fino alla programmazione in *Python*. Vorrei inoltre ringraziare chi mi è stato accanto in questi anni del mio percorso triennale: dai miei parenti fino ai miei cari amici Alessandro e Gabriele. Mi preme infine rivolgere un generale ringraziamento a tutti coloro che con il loro tempo ed impegno rendono possibili progetti come la *Free Software Foundation* o il *GNU Project*; iniziative a mio avviso essenziali, senza le quali questo scritto non avrebbe avuto modo di essere redatto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. Biermann. Kometenschweife und solare korpuskularstrahlung. 1951.
- [2] B.L. Barraclough W.C. Feldman H.O. Funsten J.T. Gosling P. Riley D.J. McComas, S.J. Bame and R. Skoug. Ulysses' return to the slow solar wind. 1998.
- [3] B. Brosowski L. Biermann and H. U. Schmidt. The interaction of the solar wind with a comet. 1966.
- [4] S. Landi. *Modèles Cinétiques du vent solaire*. 2001.
- [5] E.N. Parker. Dynamics of the interplanetary gas and magnetic fields. pages 664–670, 1958.
- [6] Kenneth J. H. Phillips. *Guide to the Sun*. 1995.
- [7] W.I. Axford T.E. Holzer. The theory of stellar winds and related folws. pages 31–41, 1970.