Esercitazione 5

Differenze finite per equazioni di reazione - diffusione: equazioni di Kolmogorov-Fisher e di Nagumo in 1D

5.1) (Kolmogorov-Fisher) Estendere l'esercitazione precedente, sulla discretizzazione dell'equazione del calore 1D con differenze finite all'indietro in tempo (Eulero implicito) con passo Δt e differenze finite centrate in spazio con passo h, all'equazione di Kolmogorov-Fisher

$$u_t = \sigma u_{xx} + bu(1-u) + I_{app} \quad su \quad [0\ 1] \times [0\ T], \quad \text{con}$$

- dati al bordo di Neumann omogenei: $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0,$
- dato iniziale: $u(x,0) = u_0(x)$.

Utilizzare i parametri $\sigma = 1e-3$, $b = 5$. Discretizzare come prima in termine di diffusione σu_{xx} in modo implicito (al tempo t_{k+1}), mentre il termine di reazione $bu(1-u)$ in modo esplicito (al tempo t_k), in modo da evitare la risoluzione di un problema nonlineare ad ogni passo temporale.

a) Studiare le soluzioni stazionarie del problema quando $I_{app} = 0$ e $u_0 = \alpha$ numero reale.

b) Considerare invece $u_0 = 0$ e studiare le dinamiche generate da un impulso di "corrente applicata"
$I_{app} = \begin{cases} \alpha, & \text{per } 0 \le x \le 0.04, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$ di durata $0 \le t \le 1$, per es. con i valori $\alpha = 0.1,\ 1,\ 10$ generando sia un'animazione in tempo della soluzione sull'intervallo $[0\ 1]$ che un plot in tempo della soluzione nel punto centrale $x = 0.5$.

5.2) (Nagumo) Ripetere l'esercizio precedente per l'equazione di Nagumo

$$u_t = \sigma u_{xx} + bu(u-\beta)(\delta - u) + I_{app} \quad su \quad [0\ 1] \times [0\ T], \quad \text{con}$$

- dati al bordo di Neumann omogenei: $u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0,$
- dato iniziale nullo: $u(x,0) = 0,$

Utilizzare i parametri $\sigma = 1e-3$, $b = 5$, $\beta = 0.1$, $\delta = 1$.