2025-26 Diario delle Lezioni settembre ottobre 2025

Aggregazione dei criteri

ATTENZIONE: gli appunti NAPPO-SPIZZICHINO subiranno delle piccole modifiche. Nel seguito sono citati come [SN]. Vedere il file 2025-26-APPUNTI-SN-dicembre-2025.pdf che sostituisce il file ~~APPUNTI-SN-settembre-2024.pdf~~ (alcune modifiche sono segnalate in rosso)

martedì 23 settembre 2025 ore 16-18

Informazioni sul corso, discussione sul significato delle probabilità e di come l'informazione può modificare le probabilità. (vedere le slide **2025-26-LEZIONI-slides-INTRODUZIONE-2025-23settembre.pdf**)

Gli eventi si possono esprimere tramite proposizioni e si possono usare le operazioni logiche di OR, AND e NEGAZIONE. Per operare matematicamente si rappresenta una situazione/un esperimento con l'insieme dei "casi possibili". Inizialmente ci occuperemo delle situazioni in cui ci sono solamente un numero finito di casi possibili. L'insieme dei casi possibili viene **solitamente** denotato con la lettere greca Ω (Omega MAIUSCOLO), e i suoi elementi sono denotati usando la lettera greca ω (omega minuscolo). Abbiamo iniziato ad accennare al fatto che gli eventi vengono rappresentati dai sottoinsiemi di Ω e che le operazioni OR, AND e NEGAZIONE corrispondono a UNIONE, INTERSEZIONE e COMPLEMENTARE. (vedere la Lezione 1 degli APPUNTI [SN]. Abbiamo introdotto/ricordato la nozione di PARTIZIONE (di Ω)

Questa parte continua nella lezione del 25 settembre)

giovedì 25 settembre 2025 ore 15-18

Abbiamo rivisto bene la differenza tra eventi espressi a parole e la loro rappresentazione come sottoinsiemi di Ω, la corrispondenza tra operazioni logiche per eventi e le operazioni booleane tra gli insiemi che li rappresentano, a partire dall'Esempio 1.1. di [SN]. Abbiamo anche ricordato la proprietà associativa dell'unione e quella dell'intersezione, le proprietà distributive dell'unione rispetto all'intersezione e viceversa dell'intersezione rispetto all'unione, le leggi di De Morgan (completando così la Lezione 1 degli Appunti [SN] o anche la prima parte di **2025-26-23-25-26-settembre-Eventi_as_Insiemi-PrimeProprieta.pdf**)

A partire dall'Esempio 1.1 e dall'Esempio 1.3, e avendo in mente la definizione di "probabilità classica" (o "probabilità uniforme"):

per ogni $A \subseteq \Omega$, $P(A)$:=numero dei casi favorevoli/numero dei casi possibili)

abbiamo anche ricordato come si ottiene la formula per la somma dei primi n numeri interi positivi $[1+2+\ldots+n=n(n+1)/2]=n(n+1)/2$, il numero delle permutazioni di un insieme con n elementi, la cardinalità dell'insieme delle parti, il numero delle combinazioni di n elementi di classe k, la formula della potenza del binomio di Newton, (vedere 2025-26-lavagna-25settembre2025.pdf) .

Nel caso in cui lo spazio campione Ω sia finito, abbiamo enunciato gli assiomi delle probabilità (in particolare normalizzazione e additività finita).
Abbiamo verificato che la probabilità classica soddisfa gli assiomi.

Abbiamo osservato che per definire una probabilità su Ω finito, basta dare
(1) per ogni elemento ω_i di Ω un valore $p(\omega_i)$ in modo che $p(\omega_i)$ siano tutti non negativi e che la loro somma faccia 1,
(2) porre $P(\{\omega_i\})=p(\omega_i)$ per ogni i,
(3) infine porre P(E) uguale alla somma di $p(\omega_i)$, dove la somma va fatta solo sugli ω_i appartenenti ad E.

(per questi argomenti vedere la prima parte della Lezione 2 di [SN] e **2025-26-23-25-26-settembre-Eventi_as_Insiemi-PrimeProprieta.pdf**

venerdì 26 settembre 2025 ore 13-15

Prime conseguenze degli assiomi (ovvero le prime proprietà delle probabilità), esempi ed esercizi (vedere la Lezione 2 di [SN], **2025-26-23-25-26-settembre-Eventi_as_Insiemi-PrimeProprieta.pdf**, le lavagne 2025-26-lavagna-25e26-settembre2025.pdf e 2025-26-lavagna-25settembre2025.pdf)

in particolare la proprietà base $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)$ e $P(B)=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)$

L'additività finita: se n eventi sono incompatibili a due a due allora la probabilità della loro unione è la somma delle rispettive probabilità.

$P(\emptyset)=0$, $P(E^c)=1-P(E)$ ed equivalentemente $P(E)=1-P(E^c)$

$P(B\setminus A)=P(B)-P(A\cap B)$, la proprietà di monotonia: se $A\subseteq B$ allora $P(A)\leq P(B)$,

la formula di inclusione/esclusione: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

Se $H_1,H_2,\ldots,H_m$ formano una partizione (dell'evento certo) allora la somma di $P(H_i)$ vale 1.

La prima forma della formula delle probabilità totali: Se $H_1,H_2,\ldots,H_m$ formano una partizione ed E è un evento, allora $P(E)=P(E\cap H_1)+P(E\cap H_2)+\ldots+P(E\cap H_m)$

Data una probabilità P su Ω la funzione densità definita come $p(\omega):=P(\{\omega\})$ si ha $p(\omega)\geq 0$, e la somma di $p(\omega)$ su tutti gli ω in Ω vale 1, inoltre per ogni evento E si ha $P(E)$="somma di $p(\omega)$ sugli ω che appartengono ad E".

Vale anche il viceversa, data una funzione $p(\omega)$, tale che $p(\omega)\geq 0$ e la somma di $p(\omega)$ su tutti gli ω in Ω vale 1, allora $P(E)$="somma di $p(\omega)$ sugli ω che appartengono ad E" definisce una probabilità (ossia valgono gli assiomi e quindi tutte le proprietà appena elencate.

Un modo per definire una funzione $p(\omega)$ come sopra è quello di darla attraverso un fattore di proporzionalità (vedere l'Esempio* 2.3 (dado non equilibrato) in [SN])

Abbiamo visto Esercizi di verifica 2.1, 2.2 e 2.3.

Abbiamo visto anche il problema del compleanno (vedere anche l'Esempio* 3.3 Lezione 3) e ricordato la differenza tra Disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k (come elementi del prodotto cartesiano k volte di un insieme di cardinalità n, e le Disposizioni senza ripetizione.

Esercizi da svolgere a casa: finire gli esercizi di verifica della Lezione 2 e fare un programmino per calcolare il numero minimo n= n(1/2) di persone per avere che la probabilità che ce ne siano almeno due con lo stesso compleanno sia maggiore di 1/2 e il numero n=n(95/100) affinché la probabilità sia maggiore di 95/100=95%.

========================

martedì 30 settembre 2025 ore 16-18

Discussione degli Esercizi di verifica della Lezione 2: a partire dall'Esercizio 2.3 Discussione del seguente problema: da un'urna contenente 3 palline azzurre e 2 bianche vengono effettuate due estrazioni senza reinserimento.

Posto A_i ={all'i-sima estrazione esce una pallina azzurra}, i = 1,2, mostrare che $P(A_1) = P(A_2)$

Esercizio 2.4: dimostrazione della formula di inclusione/esclusione per calcolare la probabilità che si verifichi almeno uno tra tre eventi, ossia calcolare la probabilità della loro unione: P(A∪B∪C), ed enunciato della formula generale per n eventi.

Esercizio 2.5: e partizione generata da tre eventi.

Per la discussione di questi esercizi vedere anche ESERCIZI-LEZ-2SOLUZIONI-2024.pdf (nella cartella ESERCIZI SVOLTI) e il file 2025-26-lavagna-30-settembre-2025.pdf

Discussione di altri esercizi sugli anagrammi e ripasso di calcolo combinatorio: il numero degli anagrammi anche senza senso di una parola con in totale r lettere di cui k_1 di tipo 1, k_2 di tipo 2,...., k_n di tipo n è dato dal **coefficiente multinomiale**

$$\binom{r}{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \frac{r!}{k_1! k_2! \cdots k_n!}$$

è preferibile usare questo nome invece di numero delle permutazioni con ripetizione (tra l'altro sarebbe meglio aggiungere con k_i ripetizioni dell'elemento "i-simo", i=1,2,...,n)

vedere il file 2024-25-slides_ANAGRAMMI-2024.pdf in cui si mostra che il coefficiente multinomiale si usa anche per ottenere il numero di partizioni di un insieme con r elementi in parti "etichettate" con cardinalità prefissate (ossia in n insiemi di cardinalità k_1, k_2,..., k_n). Abbiamo anche discusso la differenzae tra il numero n_SE di dividere un insieme con r elementi **in n parti Senza Etichette** (di cardinalità k_1, k_2,..., k_n) ed il numero n_E di dividere lo stesso insieme in **n parti Etichettate** (di cardinalità k_1, k_2,..., k_n).

giovedì 2 ottobre 2025 ore 15-18

Estensione degli assiomi e delle proprietà al caso in cui lo spazio campione Ω è numerabile. La differenza con il caso finito è che si richiede l'additività numerabile. Si verifica facilmente che la probabilità dell'evento impossibile (ovvero dell'insieme vuoto) vale 0 e che l'additività numerabile implica l'additività finita e quindi tutte le proprietà viste nel caso finito continuano a valere.

Inoltre si generalizza il fatto che tutte le probabilità di ottengono a partire da una densità di probabilità (o funzione di massa) ossia da una funzione che ad ogni elemento ω di Ω p(ω), tale che p(ω)≥0 e la somma di p(ω) su tutti gli ω in Ω vale 1, definendo P(E) come la somma di p(ω) su tutti gli ω che appartengono ad E (la differenza con il caso finito è che se E non è finito allora si tratta della somma di una serie)

Richiamo sulla somma finita di una progressione geometrica e somma della serie geometrica, e la serie esponenziale.

Per questi argomenti vedere l'ultima parte del file **2025-26-23-25-26-settembre-Eventi_as_Insiemi-PrimeProprieta.pdf,** e il file 2025-26-LAVAGNA-30-settembre-2ottobre-2025.pdf

Discussione degli Esercizi dal foglio di esercizi ex24-25_01Nappo.pdf (NOTA BENE, per errore c'è scritto che è del corso di Laurea in Matematica invece che di Informatica)

Molto rapidamente abbiamo visto gli Esercizi 1 e 2, sulle operazione booleani sugli insiemi; abbiamo trattato anche gli Esercizi 3 e 5 in cui si fa vedere che usando le proprietà di monotonia e la formula di inclusione/esclusione, pur avendo una conoscenza parziale delle probabilità si riescono a dare delle limitazioni su alcuni eventi: ad esempio, dalla proprietà di monotonia si ha che

$P(A \cup B) \geq P(A)$ e $P(A \cup B) \geq P(B)$ da cui $P(A \cup B) \geq \max(P(A), P(B))$

$P(A \cap B) \leq P(A)$ e $P(A \cap B) \leq P(B)$ da cui $P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$

inoltre dalla formula di inclusione/esclusione e il fatto che $P(A \cup B) \leq 1$ (ovvero $-P(A \cup B) \geq -1$) si ha

$P(A \cap B)=P(A)+P(B)-P(A \cup B) \geq P(A)+P(B)-1$

(o meglio, ricordando che $P(A \cap B) \geq 0$, $P(A \cap B) \geq \max (P(A)+P(B)-1, 0)$

A partire dall'Esercizio 4 (su estrazioni senza reinserimento da un'urna con 4 palline di tipo A e tre di tipo B) abbiamo discusso a lungo sul fatto che per rappresentare questo "esperimento"/questa situazione ci possono essere diversi modi, in alcuni dei quali non è naturale usare la probabilità classica, mentre in altri appare più naturale.

Abbiamo anche svolto l'Esercizio 7 (in cui si usa la formula di inclusione/esclusione per 3 eventi e la legge di De Morgan) e l'Esercizio 8 sul lancio di due dadi.

vedere il file 2025-26-LAVAGNA-30-settembre-2ottobre-2025.pdf e il **NUOVO file con i suggerimenti** **2025-26-SLIDE-ex24-25_01-Nappo-SUGGERIMENTI.pdf** con le slide con i suggerimenti dell'a.a. 2024-25 SLIDE-ex24-25_01-Nappo-SUGGERIMENTI.pdf però questo file contiene una svista nel calcolo della cardinalità dell'evento considerato a pagina 20 : appena possibile metterò la versione corretta)

venerdì 3 ottobre 2025 ore 13-15 (LEZIONE ON LINE)

Discussione di alcuni esercizi della Lezione 3 di [SN], in particolare il paradosso di De Mére (Esempio* 3.4), Esempio*3.7 (su n lanci di una moneta regolare)

ed un esempio di probabilità binomiali attraverso un esempio di estrazioni con reinserimento da un'urna con r=3 palline rosse (numerate da 1 a 3) e b=2 palline blu (numerate da 4 a 5).

vedere il file 2025-26-lavagna-3-7-9-ottobre-2025.pdf

========================

martedì 7 ottobre 2025 ore 16-18

Altre proprietà di calcolo combinatorio:

triangolo di Tartaglia (o di Pascal), basato sulla formula di Stiefel (ossia $C(n,k)=C(n-1,k)+C(n-1,k-1)$

e formula di Vandermonde (sempre dalla Lezione 3 di [SN]): siano r, s interi ed $n \leq r+s$,

allora $C(r+s,n)$ è uguale alla somma di $C(r,k)C(s,n-k)$ per i valori di k per cui hanno senso $C(r,k)$ e $C(s,n-k)$, ossia $0 \leq k \leq r$ e $0 \leq n-k \leq s$

e alcuni esercizi dal file ex24-25_02Nappo.pdf (in particolare Es 1, 2 parte del 3 sul poker (escluso il TRIS, ma non FULL) ***NUOVO Per le soluzioni vedere nella cartella "ESERCIZI svolti" il file 2025-26-SLIDE-ex24-25_02Nappo-SUGGERIMENTI.pdf in cui compare anche un "ESERCIZIO supplementare SUL CALCOLO COMBINATORIO", che è stato svolto***

vedere anche il file 2025-26-lavagna-3-7-9-ottobre-2025.pdf

giovedì 9 ottobre 2025 ore 15-18

Definizione di probabilità condizionata di un evento E dato un altro evento H

$P(E|H) := P(E \cap H)/P(H)$

INTERPRETAZIONE: è la probabilità che avrebbe il verificarsi di E se sapessimo che si è verificato H

di legge anche come "probabilità (condizionata) di E dato H" (spesso la parola condizionata viene omessa e si legge solo "probabilità di E dato H") o anche

"probabilità (condizionata) di E sapendo che H si è verificato"

Prime conseguenze:

1) formula delle probabilità composte per due eventi: $P(E \cap H)=P(H)P(E|H)$

tale formula (detta anche regola della catena) si usa quando è facile calcolare $P(E|H)$, mentre può essere più complicato calcolare direttamente la probabilità dell'intersezione di E ed H.

vedere gli esempi in 2024-25-ARGOMENTI-diBASE-PROB-CONDIZIONATE--2.pdf

2) prima forma della formula delle probabilità totali: se sono note $P(H)$ (e quindi $P(H^c)=1-P(H)$, e sono note $P(E|H)$ e $P(E|H^c)$ allora

$P(E)=P(H)P(E|H)+P(H^c)P(E|H^c)$ (che deriva dal fatto che $E=(E\cap H) \cup (E\cap H^c)$, l'additività di P e la formula delle probabilità composte.

3) formula di Bayes o delle probabilità delle cause dato l'effetto o delle probabilità inverse

$P(H|E)=P(H)P(E|H)/P(E)$ (prima versione)

$P(H|E)=P(H)P(E|H)/[\, P(H)P(E|H)+P(H^c)P(E|H^c)]$ (seconda versione nel caso della partizione $\{H, H^c\}$, usando la formula delle probabilità totali}

Abbiamo discusso il caso dei test medici e l'Esempio* 4.6. (Un esempio medico) in [SN]

vedere la Lezione 4 di [SN] il file 2025-26-lavagna-3-7-9-ottobre-2025.pdf e il file 2025-26-lavagne-9-10-ottobre2025.pdf

vedere anche il file 2024-25-ARGOMENTI-diBASE-PROB-CONDIZIONATE--2.pdf

venerdì 10 ottobre 2025 ore 13-15

Abbiamo ripreso la definizione di probabilità condizionata e la formula delle probabilità composte e abbiamo visto la generalizzazione al caso di tre eventi (con dimostrazione) e l'enunciato del caso generale di n eventi (vedere la Proposizione 4.1 (Formula delle probabilità composte) in [SN])

Abbiamo risolto l'Esercizio proposto 4.2 (P_E è una probabilità) dove per ogni A sottoinsieme di Ω si ha $P_E(A):=P(A|E)$

vedere il file 2025-26-lavagne-9-10-ottobre2025.pdf (purtroppo una parte della lavagna è andata persa) e il file 2024-25-ARGOMENTI-diBASE-PROB-CONDIZIONATE--2.pdf

=========================

martedì 14 ottobre 2025 ore 16-18

Formula delle probabilità totali nel caso di partizioni finite $\{H_1,H_2,\ldots,H_m\}$ e nel caso di partizioni numerabili $\{H_i, i\geq 1\}$.

Formula di Bayes (seconda versione): data una partizione (finita o numerabile) ed un evento E, note $P(H_i)$ e $P(E|H_i)$ per ogni i, si può calcolare P(H_i|E) la probabilità inversa o della causa dato l'effetto (dove H_i sono interpretate come possibili cause, mentre E come un effetto) (vedere gli Appunti [SN] Lezione 4 e anche 2024-25-ARGOMENTI-diBASE-PROB-CONDIZIONATE--2.pdf)

Esercizi di verifica (da 4.4 a 4.8) della Lezione 4 di [SN] (vedere il file vedere il file 2025-26-ESERCIZI-LEZ 4-slides2025.pdf, invece il file ESERCIZI-LEZ 4-slides2024-corretta-e-con-varianti.pdf, *che però conteneva un errore di calcolo nella soluzione del punto (b) dell'Esercizio 4.7: il calcolo corretto è evidentemente 0.8/0.94=80/94=40/47 circa uguale a 0,85*) ed Esempi* (4.2 e 4.5) sempre dalla Lezione 4 di [SN]. NOTA BENE gli altri esempi della Lezione 4 sono stati svolti la settimana precedente (vedere anche il file 2025-26-14-ottobre-2025-lavagna.pdf)

giovedì 16 ottobre 2025 ore 15-18

Indipendenza e Correlazione di Eventi (Lezione 5 di [SN]) in particolare la Sezione 5.1 con tutti gli esempi e l'inizio della Sezione 5.2.

Altri Esercizi:

dal file SLIDES-Esempi-Prob-cond-Bayes-Eventi-Corr.pdf (che contiene anche le soluzioni) il secondo (INTERCETTAZIONI RADAR in una regione) e il terzo (UN PROBLEMA MEDICO che è un semplice esempio su correlazione positiva/negativa tra due eventi)

e dal file ex24-25_02Nappo.pdf in particolare abbiamo discusso degli Esercizi 4, 5 e 6 mentre l'Esercizio 7 non è in programma; gli altri esercizi compreso l'ESERCIZIO supplementare SUL CALCOLO COMBINATORIO sono già stati discussi. (per le soluzioni vedere il file *2025-26-SLIDE-ex24-25_02Nappo-SUGGERIMENTI.pdf* , ricordo che per gli esercizi sul Poker e sulle Napoletane a tressette potete vedere i file Probabilita-Poker-ottobre-2024.pdf e NAPOLETANE-SLIDE.pdf)

Infine segnalo che ho aggiunto i file 2025-26-SLIDE-ex24-25_01-Nappo-SUGGERIMENTI.pdf e il file 2025-26-SLIDE-ex24-25_02Nappo-SUGGERIMENTI.pdf in quanto le versioni dell'a.a. precedente contenevano delle sviste

venerdì 17 ottobre 2025 ore 13-15

PREVISIONE: Verifica che A e B indipendenti [ossia $P(A\cap B)=P(A)P(B)$]equivale a $P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B)$, $P(A\cap B^c)=P(A)P(B^c)$ e $P(A^c\cap B^c)=P(A^c)P(B^c)$, ovvero a $P(A'\cap B')=P(A')P(B')$ per ogni A' in $\{A,A^c\}$ e B' in $\{B,B^c\}$, le partizioni generate da A e da B rispettivamente. Definizione di Indipendenza di due partizioni {A_1,A_2,....,A_n} e {B_1,B_2,....B_m} come

$P(A'\cap B')=P(A')P(B')$ per ogni A' in {A_1,A_2,....,A_n} e B' in {B_1,B_2,....B_m}.

Importante proprietà (vedere la Proposizione 5.1): {A_1,A_2,....,A_n} e {B_1,B_2,....B_m} sono indipendenti

SE E SOLO SE

per ogni E che è unione di elementi di {A_1,A_2,....,A_n} e per ogni F che è unione di elementi di {B_1,B_2,....B_m} si ha

$P(E\cap F)=P(E)P(F)$ $P(E\cap F)=P(E)P(F)$

Abbiamo capito il motivo sull'esempio specifico del lancio di due dadi regolari con Ω= { (i,j): i, j in {1,2,3,4,5,6} } e la probabilità classica (confronta l'Esempio 5.5) e con le partizioni i cui elementi sono

A_i={X_1=i}={ (i,1),(i,2),(i,3),(i,4),(i,5),(i,6)} (per i =1,2,3,4,5,6) (dove X_1 rappresenta il valore del dado numero 1)

e

B_j={X_2=i}={ (1,j),(2,j),(3,j),(4,j),(5,j),(6,j)} (per j =1,2,3,4,5,6) (dove X_2 rappresenta il valore del dado numero 2)

usando la proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione e la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto (vedere la lavagna 2025-26-17-ottobre2025-LAVAGNA.pdf) IMPORTANTE vedere anche la NOTA Richiamo: PROPRIETA' DISTRIBUTIVA DELLA SOMMA RISPETTO AL PRODOTTO alla fine della sezione 3.4 di [SN])

Esempi ed esercizi dalla Lezione 5: Abbiamo verificato che nel caso di due dadi truccati come in Esempio 5.4 e quindi con la probabilità $Q(\{(i,j)\})=i\cdot j/21^2$, per (i,j) in Ω= { (i,j): i, j in {1,2,3,4,5,6} } anche le partizioni precedenti sono indipendenti (confronta l'Esercizio proposto 5.2. e la lavagna 2025-26-17-ottobre2025-LAVAGNA.pdf)

Esercizi di verifica 5.1, 5.2, 5.3, 5.5, 5.6 (proposto anche con la variante dei numeri da 121 e con la variante dei numeri da 1 a 119 invece che i numeri da 1 a 120)

=========================

martedì 21 ottobre 2025 ore 16-18

PREVISIONE. Indipendenza (completa o anche detta globale) di tre eventi: in tre modi diversi, ma equivalenti

1) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, $P(A\cap C)=P(A)P(C)$, $P(B\cap C)=P(B)P(C)$, e $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$, (solo 4 condizioni)

2) $P(A^*\cap B^*\cap C^*)=P(A^*)P(B^*)P(C^*)$ dove A^* appartiene ad $\{A,A^c\}$, B^* appartiene ad $\{B,B^c\}$, C^* appartiene ad $\{C,C^c\}$ (sono $8=2^3$ condizioni)

3) $P(A^*\cap B^*)=P(A^*)P(B^*)$, $P(A^*\cap C^*)=P(A^*)P(C^*)$, $P(B^*\cap C^*)=P(B^*)P(C^*)$

e $P(A^*\cap B^*\cap C^*)=P(A^*)P(B^*)P(C^*)$ (sono $3\times4+2^3=12+8=20$ condizioni)

vedere le due note della Sezione 5.3 in [SN]. In particolare vedere l'ESEMPIO 1 e l'ESEMPIO 2 (nella seconda NOTA) che mostrano che le 3 delle 4 condizioni in **1)** non implicano la quarta.

Abbiamo visto l'equivalenza delle tre formulazioni:

(a) che **3)** implichi **1)** e implichi 2) è banale,

(b) che **1)** implica **3)** si ottiene dal fatto che $P(E\cap F^c)=P(E)-P(E\cap F)$ di modo che si ottengono le prime 3×4 condizioni della **3)** si ottiene dal seguente ragionamento

(HP) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ implica (TESI) $P(A\cap B^c)=P(A)P(B^c)$, in quanto

$P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)=_{\text{(per HP)}} P(A)-P(A)P(B) =_{[a-ab=a(1-b)]}P(A)[1-P(B)]=P(A)P(B^c)$

e analogamente si ottiene scambiando il ruolo di A e B

(HP) $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ implica (TESI) $P(A^c\cap B)=P(^cA)P(B)$,

e infine, prendendo $E=A^c$ ed $F=B$

(HP) $P(A^c\cap B)=P(A^c)P(B)$ implica (TESI) $P(A^c\cap B^c)=P(A^c)P(B^c)$,

Le ultime 8 condizioni si ottengono osservando che $A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C$

e quindi $P(A\cap B\cap C^c)=P(A\cap B)-P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)-P(A)P(B)P(C)=P(A)P(B)[1-P(C)]=P(A)P(B)P(C^c)$

in modo analogo si ottengono le altre relazioni del tipo $P(A^*\cap B^*\cap C^*)=P(A^*)P(B^*)P(C^*)$ in cui uno solo tra A^*, B^* e C^* è uguale al suo complementare. Si passa a quelli con due 2 complementari, ad esempio, osservando che $A\cap B^c\cap C=(A\cap B^c)\cap C$, e che quindi $P(A\cap B^c\cap C^c)=P(A\cap B^c)-P(A\cap B^c\cap C)=P(A)P(B^c)-P(A)P(B^c)P(C)=P(A)P(B^c)[1-P(C)]=P(A)P(B^c)P(C^c)$

in modo del tutto analogo si arriva al caso in cui A^*, B^* e C^* sono tutti uguali ai rispettivi complementari.

INFINE per vedere che **2)** implica **1)** basta osservare che la condizione $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$ è una delle 8 condizioni della **2)**, e che, ad esempio,

$P(A\cap B)=P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap C^c)=P(A)P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C^c)=P(A)P(B)[P(C)+P(C^c)]=P(A)P(B)$

Indipendenza (completa o anche detta globale) di n eventi. NOTA BENE: per default n eventi indipendenti è uguale a n eventi completamente indipendenti] Equivalenza delle tre formulazioni SENZA VERIFICA

Schema di Bernoulli: gli n eventi, oltre a essere indipendenti hanno anche tutti a stessa probabilità.

Modello binomiale: probabilità relative al numero di successi in uno schema di Bernoulli.

Esercizio 5.7 di verifica della Lezione 5.

vedere il file ESERCIZI-LEZ-5-SOLUZIONI-2024.pdf (purtroppo la lavagna del 21 ottobre è andata persa...)

Cenno alla **CACCIA ALL'ERRORE**, si tratta di trovare gli errori in un vecchio articolo scritto da un chimico sul lotto nel momento in cui si passò da una a due estrazioni del lotto settimanali (nel 1997).

giovedì 23 ottobre 2025 ore 15-18

Ancora su n eventi (completamente) indipendenti, sullo schema di Bernoulli e le probabilità binomiali. L'indipendenza di n eventi $E_1,E_2,\dots,E_n$ equivale all'indipendenza delle n partizioni $\{E_1, (E_1)^c\}$, $\{E_2, (E_2)^c$, ..., $\{E_n, (E_n)^c\}$ in quanto equivale a

per ogni $J\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ e per ogni $F_j \in \{E_j, (E_j)^c\}$ si ha $P(\cap_{j\in J} F_j)=\prod_{j\in J} P(F_j)$

e l'indipendenza di n partizioni $M_1, M_2, \dots, M_n$ si definisce come

per ogni $J\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ e per ogni $F_j \in M_j$, si ha $P(\cap_{j\in J} F_j)=\prod_{j\in J} P(F_j)$

Vedere l'Esempio 5.7 con n=3 e nel lancio di tre dadi in cui M_1, M_2 ed M_3 sono le partizioni relative ai punteggi dei tre dadi:

$M_1=\{\{X_1=k\}, k=1,2,3,4,5,6\}$, $M_2=\{\{X_2=k\}, k=1,2,3,4,5,6\}$, $M_3=\{\{X_3=k\}, k=1,2,3,4,5,6\}$, dove X_i rappresenta il valore/punteggio del dado i (per i=1,2,3)

Caccia all'errore: discussione di un articolo pieno di errori (vedere il file **CACCIA ALL'ERRORE**) su estrazioni del lotto e probabilità binomiali.

Esercizi 5.8 e 5.9 di verifica in [SN] vedere il file ESERCIZI-LEZ-5-SOLUZIONI-2024.pdf

vedere anche il file 2025-26-23-ottobre-2025-lavagna.pdf

venerdì 25 ottobre 2025 ore 13-15

Esercizi del foglio 3 (vedere il file ex24-25_03Nappo.pdf)

Per le soluzioni vedere per il momento SLIDE-ex24-25_03Nappo-SUGGERIMENTI.pdf, dove c'è una svista evidente nella soluzione del punto 2) dell'Esercizio 2 [ERRATA: 2) "la probabilità che venga ricevuto 0"= $P(R_1) = 1-P(R_0)$; CORRIGE: 2) "la probabilità che venga ricevuto 0"= $P(R_0) = 1-P(R_1)$]

Appena possibili la nuova versione del file

vedere anche il file 2025-26-24-ottobre-2025-lavagna.pdf

========================

martedì 28 ottobre 2025 ore 16-18

Discussione degli esercizi della Lezione 6 (vedere il file ESERCIZI-LEZ-6-SOLUZIONI-complete-a-mano.pdf ESERCIZI-LEZ-6-SOLUZIONI-complete-a-mano-del-2020-con-commenti-2025.pdf e il file 2025-26--28-Ottobre-2025-lavagna.pdf

Inoltre abbiamo discusso il compito di autovalutazione AUTOVALUTAZIONE_CP-INFORM_17-novembre-2020.pdf

giovedì 30 ottobre 2025 ore 15-18 (interruzione per esami ed esoneri)

venerdì 31 ottobre 2025 ore 13-15 (interruzione per esami ed esoneri)

========================

martedì 4 novembre 2025 ore 16-18 (interruzione delle lezioni)

giovedì 6 novembre 2025 ore 15-18

Compito di autovalutazione (per il testo vedere il file AUTOVALUTAZIONE-CP-INFORM-6-novembre-2025.pdf) e correzione del compito (vedere il file SOLUZIONI-a-mano-AUTOVALUTAZIONE-CP-INFORM-6-novembre-2025.pdf)

venerdì 7 novembre 2025 ore 13-15

Variabili aleatorie: si tratta della formalizzazione di idee già viste. Una variabile aleatoria è una numero (reale) aleatorio, che "cambia/varia" a seconda di quale evento elementare si verifica. Dal punto di vista matematico si tratta di una funzione da Ω in IR. In genere una variabile aleatoria viene denotata con una lettera maiuscola in stampatello, inoltre in genere si usano le ultime lettere dell'alfabeto (come X,Y, Z, W, ma anche S,T, U,V, ma avolte anche N, in particolare quando si tratta di una variabile aleatoria a valori nei numeri naturali.

Sia X una variabile aleatoria di definisce ***l'insieme dei valori che può assumere X*** come X(Ω), ossia l'immagino di Ω tramite (la funzione) X

Si definisce inoltre la ***densità discreta di X,*** come la seguente funzione p_X: $X(\Omega) \to [0,1]$, $x \to p_X(x):=P(X=x)$,

che permette di trovare, per ogni insieme J, la P(X appartiene a J) come la somma per x in J di $p_X(x)=P(X=x)$

In questo modo si definisce una probabilità su X(Ω) che è detta ***distribuzione di X*** o anche ***probabilità indotta da X***.

Abbiamo visto i primi esempi di variabili aleatorie: le variabili aleatorie degeneri (ossia che assumono un solo valore, cioè sono funzioni constanti)

e le variabili aleatorie del tipo funzione indicatrice o indicatore di un evento A:

$X(\omega)=1_A(\omega)$ che vale 1 se ω appartiene ad A

$X(\omega)=1_A(\omega)$ che vale 0 se ω non appartiene ad A

Le funzioni indicatrici di un evento A sono variabili binarie o Bernoulli, ossia che assumono solo i valori 0 e 1,

(vedere la Lezione 7 di [SN] e il file 2025-26-7novembre2025-lavagna--.pdf

AVVISO: al tutoraggio di mercoledì 12 ore 8-10 si discuteranno gli esercizi del FOGLIO 6 di esercizi suggeriti dalla prof.ssa Silvstri (del canale 1)

Potete trovare i testi iscrivendovi al corso della prof.ssa Silvestri, ma per vostra comodità ho inserito nella cartella ESERCIZI DA SVOLGERE i file pubblicati finora.

Prob2526_eserciziFOGLIO1.pdf

Prob2526_eserciziFOGLIO2.pdf

Prob2526_eserciziFOGLIO3.pdf

Prob2526_eserciziFOGLIO4.pdf

Prob2526_eserciziFOGLIO5.pdf

Prob2526_eserciziFOGLIO6.pdf

=========================

martedì 11 novembre 2025 ore 16-18

Variabili aleatorie e loro valore atteso. (vedere la Lezione 9 di [SN] e la lavagna 2025-26-11-novembre2025-LAVAGNA.pdf)

Solo le due definizioni sullo spazio (Ω, *P*(Ω), P) e su (X(Ω), *P*(X(Ω)), P_X) e la proprietà di linearità (per il momento senza le dimostrazioni)

Valore atteso di una variabile aleatoria degenere (ossia se X(ω)=a, per ogni ω allora E(X)=a),

Valore atteso della funzione indicatrice $\mathbf{1}_A$ (ossia $\mathbf{1}_A(\omega)=1$ se ω in A e $\mathbf{1}_A(\omega)=0$ se ω in A^c, allora $E(\mathbf{1}_A)=P(A)$),

Valore atteso della variabile aleatoria S=numero di successi in uno schema di Bernoulli, ossia in n prove indipendenti tutte le di probabilità p) si ha E(S)=np)

IMPORTANTE OSSERVAZIONE: S ha distribuzione binomiale Bin(n,p) e quindi se X ha distribuzione Bin(n,p) allora ha lo stesso valore atteso di S

Abbiamo visto l'Esempio* 7.5 in Sezione 7.3(Ulteriori esempi di variabili aleatorie a valori interi di [SN])

Ho inserito il file SOLUZIONI-a-mano-AUTOVALUTAZIONE-CP-INFORM-6-novembre-2025.pdf nella cartella ESERCIZI SVOLTI

giovedì 13 novembre 2025 ore 15-18

Ancora su variabili aleatorie, e loro distribuzione. Esempio iniziale dal file ESERCIZI-LEZ-7SOLUZIONI.pdf fino alla pagina 5

Definizione della Funzione di distribuzione di una variabile aleatoria X come la funzione F_X(x):=P(X≤x), abbiamo visto che per le variabili aleatorie discrete (ossia che assumono solo un numero finito o numerabile di valori) questa funzione è costante a tratti ed ha dei salti in corrispondenza dei valori x_k che appartengono a X(Ω). Inoltre permette di ritrovare la densità discreta in quanto per ogni x_k in X(Ω) si ha

p_X(x_k)=P(X=x_k)=F_X(x_k)-F_X(x_k-)

(uguale al salto di F_X nel punto x_k) dove F_X(x_k-)= limiteda sinistra di F_X(x) (si consiglia di vedere il file SCHEMA-VARIABILI-ALEATORIE-19dicembre2024.pdf)

Esercizi 7.1 e 7.2 dal file ESERCIZI-LEZ-7SOLUZIONI.pdf

Vedere anche il file 2025-26-13-novembre2025-lavagna.pdf

venerdì 14 novembre 2025 ore 13-15 (ON-LINE)

inizio ore 13:15, al solito link del ricevimento studenti **(per partecipare da remoto cliccare su meet.google.com/saf-hhcd-odh**)

Abbiamo calcolato il valore atteso di una variabile aleatoria degenere (ossia che assume un solo valore) e il valore atteso di una variabile aleatoria $\mathbf{1}_A$ (ossia la funzione indicatrice di un evento A) mostrando che $E(\mathbf{1}_A)=P(A)$. Abbiamo dimostrato la proprietà di linearità e la proprietà di monotonia del valore atteso [vedere l'inizio della Lezione 9 in [SN]]

Usando la linearità abbiamo visto degli esempi in cui la proprietà di linearità permette di ottenere il valore atteso senza molti calcoli (vedere il file 2025-26-14novembre2025LAVAGNA.pdf)

Abbiamo dimostrato che le due definizioni di valore atteso sono equivalenti (ossia $\text{Somme}_{\text{su } \omega\_i}\, X(\omega_i)p(\omega_i)= \text{Somme}_{\text{su } k}\, x_k\, P(X=x_k)$

e che questo permette di calcolare il valore atteso di Y=g(X) ossia $E(Y)= E(g(X)) = \text{Somme}_{\text{su } k}\, g(x_k)\, P(X=x_k)$,

senza che sia necessario calcolare i valori $\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$ che può assumere Y e $P(Y=y_j)$

ossia non serve calcolare E(Y) con la formula (anche se giusta) $E(Y)= \text{Somme}_{\text{su } j}\, y_j\, P(Y=y_j)$.

(su questo punto vedere l'Esempio iniziale del file ESERCIZI-LEZ-7SOLUZIONI.pdf pagine 6 e 7

Abbiamo anche le variabili aleatorie Geometriche (vedere l'ultima parte del file 2025-26-14novembre2025LAVAGNA.pdf)

========================

martedì 18 novembre 2025 ore 16-18

Distribuzione congiunta di due variabili aleatorie discrete. Tabella della densità discreta congiunta e distribuzioni marginali. Indipendenza di due variabili aleatorie X e Y Se e Solo Se (SSE) sono indipendenti le partizioni da esse generate ossia SSE per ogni x ed y P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y)

E' equivalente a P(X in K,Y in J)=P(X in K)P(Y in K) per ogni scelta degli insiemi K e per ogni J (senza dimostrazione) (vedere il file 2025-26-18novembre2025-LAVAGNA.pdf e la LEZIONE 8 Distribuzioni congiunte di più variabili aleatorie di [SN] (fino alla sezione 8.1 Distribuzioni condizionate ESCLUSA, per il momento) vedere però la NOTA Sulle distribuzioni congiunte con marginali date sempre in [SN] e la Definizione 8.4. di variabili aleatorie stocasticamente indipendenti.

Abbiamo inoltre visto gli esercizi 7.3, 7.4, 7.5 con 7.8 sulla forma della distribuzione binomiale, la cui densità discreta prima cresce e poi decresce, il/i punti di massimo della densità discreta è vicina al valore atteso np ESERCIZI-LEZ-7SOLUZIONI.pdf

AVVISO il prossimo foglio di esercizi del tutoraggio è Prob2526_eserciziFOGLIO7.pdf

giovedì 20 novembre 2025 ore 15-18

Ho caricato il file 2025-26-11-novembre2025-LAVAGNA.pdf.

Abbiamo visto come si ottiene il valore atteso di una trasformazione di variabili aleatorie, ossia E[h(X)] ed E[(g(X,Y)]] (vedere la Proposizione 9.11 in [SN])

Come esempio importante abbiamo visto il caso di E[h_1(X)h_2(Y)] quando X ed Y sono indipendenti: in tale caso si ottiene

X ed Y indipendenti implica che E[h_1(X)h_2(Y)]=E[h_1(X)]E[h_2(Y)] (vedere la Proposizione 9.12 in [SN])

in particolare si ha: X ed Y indipendenti implica che E(XY)=E(X)E(Y) (vedere la Proposizione 9.13 in [SN])

Definizione di $Var(X):=E[(X-E(X))^2]$ e verifica del fatto che $Var(X):=E[(X-E(X))^2]=\ldots=E(X^2)-(E(X))^2$.

Come esercizio abbiamo verificato che

$E(X)$ è il punto di minimo della funzione $t\to f(t):=E[(X-t)^2]$ (t numero reale)

e quindi $Var(X):=E[(X-E(X))^2]$ è il valore minimo della funzione f(t)

INTERPRETAZIONE se consideriamo che l'insieme di tutte le variabili aleatorie è uno spazio vettoriale e consideriamo $E[(X-Y)^2]$ come una "distanza al quadrato" possiamo affermare che il valore atteso è, tra tutte le variabili aleatorie degeneri (ossia funzioni costanti) quella che minimizza la "distanza".

Abbiamo visto il seguente esercizio

ESERCIZIO Un'urna contiene 5 palline numerate da 0 a 4. Aldo estrae una pallina dall'urna e la rimette nell'urna. Successivamente anche Aldo estrae una pallina dall'urna. Sia X_1 il primo numero estratto da Aldo e sia X_2 il secondo numero estratto da Aldo, $Z := \max(X_1,X_2)$ e $W := \min(X_1,X_2)$.

i) Calcolare $E(X_1X_2)$ e $E(ZW)$.
ii) Calcolare $P(2 \leq X_1 \leq 3, 2 \leq X_2 \leq 3)$ e $P(W > 1, Z \leq 3)$.
iii) Calcolare $P(W > 1)$ e $P(Z \leq 3)$. Gli eventi $\{W > 1\}$ e $\{Z \leq 3\}$ sono indipendenti, correlati positivamente o correlati negativamente?

iii) Calcolare $P(W > k)$, per k = 0,1,2,3,4, [e calcolare E(W) (*ancora non svolto, svolto successivamente il 28 novembre 2025)*].

(vedere la lavagna 2025-26-20-novembre2025-LAVAGNA.pdf)

venerdì 21 novembre 2025 ore 13-15

Abbiamo visto alcuni esercizi su come si calcola la distribuzione di una trasformazione di una variabile aleatoria X (ossia di Z=h(X))

e di una coppia di variabili aleatorie, ossia la densità discreta di g(X,Y) (vedere l'Esempio 9.8 in [SN])

Proprietà della Varianza, definizione di Covarianza, e proprietà della Covarianza

$Var(X):=E[(X-E(X))^2]$, si ha $Var(aX+b)=a^2Var(X)$, per a e b numeri reali noti

(richiamo $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$)

Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2 Cov(X,Y) dove Cov(X,Y):=E[(X-E(X))(Y-E(Y))] è detta COVARIANZA tra X ed Y (o di X e Y)

Generalizzazione (SENZA DIMOSTRAZIONE)

$Var(X_1+X_2+\ldots+X_n)=Var(X_1)+Var(X_2)+\ldots+Var(X_n)+$ SOMMA doppia$_{\text{su } h\neq k}$ $Cov(X_h,X_k)$

Verifica del fatto che Cov(X,Y) si può calcolare come E(XY)-E(X)E(Y) (CON DIMOSTRAZIONE)

DEFINIZIONE: quando Cov(X,Y)=0 si dice che X ed Y sono scorrelate o NON correlate

========

OSSERVAZIONE IMPORTANTE: se X ed Y sono indipendenti sappiamo che E(XY)=E(X)E(Y) e quindi possiamo affermare che **se** X ed Y sono indipendenti **allora** Cov(X,Y)=0

ATTENZIONE IL VICEVERSA NON VALE ossia ci sono variabili aleatorie X e Y per le quali Cov(X,Y)=0, ma non sono indipendenti: basta trovare un CONTROESEMPIO di due variabili X e Y con Cov(X,Y)=0 ma NON indipendenti. ***Un controesempio molto semplice:*** *X è Uniforme in {-1.0+1} (ossia P(X=1)=P(X=0)=P(X=-1)=1/3) e* $Y=X^2$.

Si vede facilmente che X ed Y non sono indipendenti in quanto, ad esempio,

$P(X=0, Y=1)=0 \neq P(X=0)P(Y=1)>0$

e che $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E(X X^2)-0\ E(Y)= E(X^3)=0$

Abbiamo anche visto che quindi **se** X ed Y sono indipendenti **allora** la varianza di X+Y è uguale alla somma delle rispettive varianze, ossia Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y),

Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono scorrelate ossia se $Cov(X_h,X_k)=0$ per ogni $h\neq k$ allora la varianza della somma è uguale alla somma delle varianze. CONDIZIONE SUFFICIENTE è che per ogni $h\neq k$ si abbia che le variabili X_h e X_k siano indipendenti (in tale caso si dice che le variabili $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono indipendenti a due a due)

================

Altre proprietà della covarianza Cov(X,Y)=Cov(Y,X), Cov(X,X)=Var(X)

$Cov(aX_1+bX_2, Y)=a\ Cov(X_1,Y)+b\ Cov(X_2,Y)$;

$Cov(aX_1+bX_2,\ cY_1+dY_2)=a\ c\ Cov(X_1,Y_1)+a\ d\ Cov(X_1,Y_2)\ +b\ c\ Cov(X_2,Y_1)\ +b\ d\ Cov(X_2,Y_2)$ *(SENZA DIMOSTRAZIONE)*

$Cov(aX_1+bX_2,\ cX_1+dX_2)=a\ c\ Cov(X_1,X_1)+a\ d\ Cov(X_1,X_2)\ +b\ c\ Cov(X_2,X_1)\ +b\ d\ Cov(X_2,X_2)$ *(SENZA DIMOSTRAZIONE, ma banale)*

Calcolo della varianza per

1) le variabili aleatorie degeneri (ossia $X(\omega)=c$ per ogni ω): $Var(X)=0$

2) le funzioni indicatrici di un evento A, di cui è nota P(A): $Var(\mathbf{1}_A)=P(A)[1-P(A)]$

3) le variabili aleatorie X con distribuzione Bin(n,p) ; hanno la stessa varianza della variabile aleatoria numero di successi in n prove indipendenti e tutte con la stessa probabilità p (SCHEMA DI BERNOULLI) e quindi Var(X)=np

Purtroppo manca la lavagna perché il proiettore non funzionava, ho solo una parte: 2025-26-21-novembre2025-LAVAGNA-INCOMPLETA.pdf

=========================

martedì 25 novembre 2025 ore 16-18

Abbiamo visto come si calcola la $Cov(1_A,1_B)=P(A\cap B)-P(A)P(B)=P(A)[P(B|A)-P(B)]$

e che quindi se A e B sono indipendenti allora le variabili aleatorie 1_A e 1_B sono indipendenti e (ovviamente) si ha che $Cov(1_A,1_B)=0$, e che

MA SOLO IN QUESTO CASO *(in realtà vale anche per variabili aleatorie che assumono ciascuna solo due valori)* vale anche il viceversa,

ossia se $Cov(1_A,1_B)=0$ allora A e B sono indipendenti e anche le due variabili aleatorie 1_A e 1_B sono indipendenti (mentre come sappiamo in generale Cov(X,Y)=0 non implica che X ed Y siano indipendenti)

Abbiamo poi usato la formula della varianza della somma per ottenere

la varianza delle variabile aleatorie X Ipergeometriche $Hyp(M,m_A;n)$ (ossia in n estrazioni SENZA REINSERIMENTO da urna/popolazione con M palline/individui di cui m_A di tipo A e $M-m_A$ di tipo B, X è il numero delle palline/individui di tipo A estratti) (vedere il file SCHEMA-VARIABILI-ALEATORIE-19dicembre2024.pdf), dove però c'è un piccolo errore di stampa: *in un punto c'è il fattore [1- (n-1)/M] (ERRATO) al posto del fattore [1- (n-1)/(M-1)] (CORRETTO)*

Abbiamo poi affrontato il problema delle concordanze (vedere la Sezione 3.5 di [SN] e il file SCHEMA-VARIABILI-ALEATORIE-19dicembre2024.pdf)

in modo astratto si considera lo spazio delle permutazioni $(i_1,i_2,\dots,i_n)$ di $\{1,2,\dots,n\}$ e si ha una concordanza al posto h se $i_h=h$.

Abbiamo calcolato valore atteso e varianza del numero delle concordanze, sempre usando la formula della varianza della somma di n variabili aleatorie (vedere il file 2025-26-25-novembre2025-LAVAGNA-.pdf e il file SCHEMA-VARIABILI-ALEATORIE-19dicembre2024.pdf) . Abbiamo anche visto come si trova la probabilità di nessuna concordanza (vedere la Sezione 3.5 di [SN]).

Come approfondimento **FACOLTATIVO** abbiamo anche visto come si trova la densità discreta della variabile aleatoria numero delle concordanze.

giovedì 26 novembre 2025 ore 15-18

Richiamo sul fatto che se X ed Y hanno la stessa distribuzione allora E(X)=E(Y) [in realtà vale anche E[h(X)]=E[h(Y)] per ongi funzione h.

Calcolo del valore atteso e della varianza della somma di n variabili aleatorie $X\_1,\dots,X\_n$ quando $E(X\_i)=\mu$ e $Var(X\_i)=\sigma^2$, per ogni $i=1,2,\dots,n$, e $Cov(X\_i,X\_j)=\phi$, per ogni $i\neq j$

ENUNCIATO della DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV: se X è tale che E(X) e Var(X) esistono e sono finiti (ovviamente vero nel caso in cui Ω è finito) allora per ogni ε>0 si ha $P(|X-E(X)|>\varepsilon) \leq Var(X)/\varepsilon^2$. (vedere l'enunciato della Proposizione 10.8 in [SN])

APPLICAZIONE al caso in cui X è Y_n=S_n/n è la frequenza relativa in n prove ripetute e indipendenti (ossia in uno schema di Bernoulli) con probabilità di successo uguale a p

Cenno agli intervalli di confidenza per stimare la probabilità p, quando p non è nota, ossia fissato ε>0 trovare n in modo che con probabilità GRANDE (maggiore del 95% o più in generale maggiore o uguale a 1-δ), la frequenza relativa di successo e la probabilità di successo differiscano tra loro al massimo ε. *(vedere 10.2 Media aritmetica, disuguaglianza di Chebyshev e primi passi verso la Legge dei Grandi Numeri)*

PROBLEMA di MONTY-HALL [vedere ESERCIZIO 6 (prima parte) 2025-26-ESERCIZI-LEZ 4-slides2025.pdf (per la seconda parte solo l'enunciato)

Vedere il file 2025-26-27-novembre2025-LAVAGNA-.pdf

venerdì 27 novembre 2025 ore 13-15

Esercizio 5 FOGLIO 6 di Bertini (2023/24): Si consideri un esame a risposta multipla organizzato al modo seguente. In totale ci sono 10 domande e per ogni domanda ci sono 4 possibili risposte, di cui una sola è corretta.
L'algoritmo di valutazione è il seguente: ogni risposta giusta vale 3 e ogni risposta sbagliata (o non risposta) vale −1. Alice risponde a caso a tutte le 10 domande.
1) ~~Calcolare~~ Scrivere l'espressione della probabilità che Alice superi l'esame (almeno 18/30).
2) Calcolare il ~~valore di attesa~~ valore atteso del voto di Alice.
3) Calcolare la varianza del voto di Alice.

DOMANDA AGGIUNTA usare la disuguaglianza di Chebyshev per ottenere una maggiorazione alla probabilità che Alice superi l'esame (almeno 18/30).

DIMOSTRAZIONE della DISUGUAGLIANZA di CHEBYSHEV (vedere l'enunciato della Proposizione 10.8 in [SN])

Esercizio 4. FOGLIO 6 di Bertini (2023/24): Una scatola contiene 10 transistor di cui 3 sono rotti. Si esamina un transistor alla volta (senza rimpiazzo) finché non se ne trova uno rotto (ossia fino alla prima volta in cui si trova un transistor rotto). Calcolare il ~~valore di attesa~~ atteso del numero di transistor esaminati.

Abbiamo visto come calcolarlo usando la densità discrete e come farlo usando la seguente proprietà

Se X è a valori interi non negativi allora $E(X)= \text{Somma}_{\text{per } k\geq 0} P(X>k)$

DIMOSTRAZIONE solo nel caso in cui X(Ω) è contenuto in {0,1,2,…,n} per cui

$E(X)= \text{Somma}_{\text{per } k=0,1,..,n-1} P(X>k)$

(vedere la sezione 9.1 Variabili aleatorie a valori interi, non negativi della Lezione 9 Valore atteso di una variabile aleatoria e relative proprietà di [SN])

Abbiamo usato questo risultato per calcolare il valore atteso di X~Geom(p), ossia E(X)=1/p

vedere il file 2025-26-28-novembre2025-LAVAGNA-.pdf

========================

martedì 2 dicembre 2025 ore 16-18

Valore atteso condizionato ad un evento H: sia H con P(H)>0) $E(X|H)=\text{SOMME}_{\{k=1,2,\dots,n\}}x\_k$ $P(X=x\_k|H)$=Valore atteso rispetto alla probabilità $E\to P_H(E):=P(E|H)$.

Formula del valore atteso totale: se X è una v.a., H_1, H_2,…,H_m, formano una partizione, e se $P(H_i)>0$ sono note, insieme a $E(X|\ H_i)$, allora

$E(X)=\text{SOMME}_{\{i=1,2,\dots,m\}}P(H_i)E(X|\ H_i)$

(vedere la Sezione 9.4 Valore atteso condizionato e formula del valore atteso totale di [SN] a pagina 136 del file)

Proprietà di mancanza di memoria per le v.a. Geometriche: se X è Geom(p) allora per ogni h, k≥0 interi si ha P(X-k>h|X>k)=P(X>h) o equivalentemente P(X-k=h|X>k)=P(X=h).

Ciò implica che se X è Geom(p) allora per ognik≥0 si ha E(X-k|X>k)=E(X), ovvero E(X|X>k)=k+E(X).

Valore atteso di una variabile aleatoria Geom(p) usando la formula del valore atteso totale rispetto alla partizione H_1={X=1} e H_2={X>1} e la proprietà di mancanza di memoria (vedere la Sezione 4.1.3 Valore atteso e varianza di X ~ Geom(p) con la proprietà di mancanza di memoria e la formula del valore atteso totale, a pagina 26 del file SCHEMA VARIABILI ALEATORIE SCHEMA-VARIABILI-ALEATORIE-19dicembre2024.pdf)

VEDERE i file 2025-26-2-dicembre-2025-LAVAGNA-.pdf e 2025-26-2dicembre-BIS-LAVAGNA-.pdf

Ricordare che mercoledì 3 dicembre c'è il tutoraggio ore 8-10: gli ultimi foglio sono

Prob2526_eserciziFOGLIO7.pdf

Prob2526_eserciziFOGLIO8.pdf

Prob2526_eserciziFOGLIO9.pdf

Prob2526_eserciziFOGLIO10.pdf

giovedì 4 dicembre 2025 ore 15-18

Valore atteso del Max(X,Y) e del min(X,Y) nel caso in cui X ed Y sono indipendenti ed entrambe Uniformi in {1,2,…,n} e varianti (vedere l'Esempio*9.2 in [SN] a pagina 124 del file e note successive per le variabili uniformi in {0,1,..,n})

La variabile minimo tra due v.a. indipendenti X_A ~Geom(p_A) e X_B ~Geom(p_B) è ancora Geom(p) con $p=p_A+p_B-p_Ap_B$, e calcolo di P(X_A<X_B), P(X_A>X_B), P(X_A=X_B) (vedere il file pagine 56-58 del file)

La variabile minimo tra due v.a. indipendenti X_A ~Geom(p_A) e X_B ~Geom(p_B) è ancora Geom(p) con $p=p_A+p_B-p_Ap_B$, e calcolo di P(X_A<X_B), P(X_A>X_B), P(X_A=X_B) (vedere il file SCHEMA VARIABILI ALEATORIE SCHEMA-VARIABILI-ALEATORIE-19dicembre2024.pdf pagine 56-58 del file)

Variabili aleatorie centrate (ossia con valore atteso uguale a zero), variabili aleatorie standard (ossia con valore atteso uguale a zero e varianza uguale a 1). Data una variabile aleatoria X con valore atteso e varianza finite, e con Var(X)>0 la sua STANDARDIZZATA $X^*=(X-E(X))/(Var(X))^{1/2}$.

PROBLEMA DEL COUPON COLLECTOR o del collezionista di figurine: calcolo del valore atteso di T= numero delle figurine da comprare per completare un album con n figurine. Si assume che si compra una figurina per volta, che il numero X_i della i-sima figurina comprata è una v.a. Uniforme in {1,2…,n} e che le v.a. X_i sono v.a. indipendenti.

Si ottiene che T è la somma T_1+T_2+...+T_n, di v.a. T_i~ Geom((n-i)/n) indipendenti e quindi E(T)=n(1+1/2+...+1/k+...+1/n). Idea di come calcolare la varianza di T, usando il fatto che la varianza di una v.a. Geom(p) vale $(1-p)/p^2$ (per il momento ancora non dimostrato)

vedere il file 2025-26-4-dicembre-2025-LAVAGNA-.pdf

ATTENZIONE l'approssimazione esatta di E(T)=n(1+1/2+...+1/k+...+1/n)= nlog(n)+nγ +1/2 +O(1/n)

dove γ = Costante di EULERO-MASCHERONI = 0,57721.....

venerdì 5 dicembre 2025 ore 13-15

Distribuzione della somma di due variabili aleatorie X e Y discrete, posto Z=X+Y

P(Z=z)=P(X+Y=z)=SOMMA_{x,y: x+y=z}P(X=x,Y=y)=SOMMA_x P(X=x,Y=z-x) =SOMMA_y P(X=z-y,Y=y)

Se X ed Y indipendenti allora P(X+Y=z)=SOMMA_{x,y: x+y=z}P(X=x)P(Y=y)=SOMMA_x P(X=x)P(Y=z-x) =SOMMA_y P(X=z-y)P(Y=y)

Esempi:

SE X~Bin(n,p), Y ~Bin(m,p), indipendenti allora X+Y~Bin(n+m,p),

SE X~Geom(p), Y~Geom(p), indipendenti

allora $P(X+Y=k)=(k-1)\ p^2(1-p)^{k-2}$, per k=2,3,... : verifica sia direttamente sia come tempo di secondo successo in una successione di prove indipendenti di probabilità p (Schema di Bernoulli infinito)

IDEA se

T_1=tempo di primo successo (ossia numero di prove fino ad ottenere il primo successo)

T_2=tempo di secondo successo (ossia numero di prove fino ad ottenere il secondo successo)

Anche $P(T_2=k)=(k-1)\ p^2(1-p)^{k-2}$, per k=2,3,... in quanto $\{T_2=k\}$={Successo alla k-sima prova}∩{esattamente un successo nelle prime k-1 prove} per cui $P(T_2=k)$=P(Successo alla k-sima prova)P(esattamente un successo nelle prime k-1 prove)=p $C(k-1,1)p^1(1-p)^{(k-1)-1}=(k-1)\ p^2(1-p)^{k-2}$, *dove C(n,h)=coefficiente binomiale n!/(h!(n-h)!*

Il motivo per cui X+Y e T_2 hanno la stessa distribuzione è che T_1 e T_2-T_1 sono entrambe Geom(p) e sono indipendenti, cioè T_1 e T_2-T_1, hanno la stessa distribuzione congiunta di X ed Y,

e quindi anche $T_2=T_1 + T_2-T_1$, ha la stessa distribuzione di X+Y

Generalizzazione:

SE X_i ~Geom(p), i=1,...,r indipendenti

allora $P(X_1+X_2+...+X_r=k)= C(k-1,r-1)p^r(1-p)^{k-r}$, per k=r,r+1,... (dove C(n,h) è il coefficiente binomiale)

SOLO come tempo di r-simo successo in una successione di prove indipendenti di probabilità p

osservando che T_1, T_2-T_1,..., T_r-T_{r-1} sono Geom(p) indipendenti e quindi hanno la stessa distribuzione congiunta di X_1, X_2,...,X_r, e che quindi $T_r=T_1+ T_2-T_1+...+ T_r-T_{r-1}$ e $X_1+X_2+...+X_r$ hanno ha stessa distribuzione e

$P(T_r=k)$=P(Successo alla k-sima prova)P(esattamente r-1 successi nelle prime k-1 prove)

$=p\ C(k-1,r-1)p^{r-1}(1-p)^{(k-1)-(r-1)}=C(k-1,r-1)\ p^r(1-p)^{k-r}$, per k=r,r+1,...

-----------OSSERVAZIONE che anche se sappiamo calcolare $P(X_1+X_2+...+X_r =k)$, invece, ad esempio, $P(X_1+X_2+...+X_r \leq m)=\text{Somme}_{r \leq k \leq m} P(X_1+X_2+...+X_r =k)$ è un calcolo "complicato", in particolare per r grande. Come vedremo il Teorema Centrale del Limite risponde a questo problema permettendo di trovare un'approssimazione per questo tipo di probabilità quando r è "grande". E NON SOLO in questo caso specifico, ma più in generale, nel caso in cui le v.a. X_i sono indipendenti, identicamente distribuite e con valore atteso e varianza finiti (con Var(X_i)>0)

Quindi in particolare nel caso in cui le X_i sono v.a. Binarie (anche dette Bernoulli(p)) SEMPRE INDIPENDENTI per cui $X_1+X_2+...+X_r$ ha distribuzione Binomiale (sempre per r "grande")

In tale caso però esiste un'altra approssimazione nel caso in cui la probabilità di successo sia "molto piccola", si tratti di eventi "rari", che si verificano con probabilità molto piccola. In tale caso c'è un'altra approssimazione: quella di Poisson.

PREMESSA: Variabili aleatorie di Poisson di parametro λ, con $\lambda>0$ numero reale:

$X\sim\text{Poisson}(\lambda)$ Se e Solo Se $X(\Omega)=\{0,1,2,...\}$ e $P(X=k)=e^{-\lambda} \lambda^k/k!$ per ogni $k\geq 0$

APPROSSIMAZIONE DI POISSON (o legge dei piccoli numeri) [CON DIMOSTRAZIONE]

Sia S_n una v.a. $\text{Bin}(n,p_n)$ dove $p_n=\lambda/n$ CON $\lambda>0$ numero reale (NOTO)

allora per ogni $k\geq 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} P(S_n=k)= e^{-\lambda} \lambda^k/k!$ [$=P(X=k)$, dove $X\sim\text{Poisson}(\lambda)$]

Oss. SENZA DIM: il teorema vale anche più in generale basta che np_n converge a λ per n che tende ad infinito

vedere il file 2025-26-5dicembre2025LAVAGNA-.pdf

========================

martedì 9 dicembre 2025 ore 16-18 LEZIONE ON-LINE

Valore atteso e Varianza di una v.a. X di Poisson(λ): $E(X)=\lambda$ e $Var(X)=\lambda$, dove $P(X=k)=e^{-\lambda} \lambda^k/k!$, per $k\geq 0$

Osservazione che sotto le ipotesi dell'APPROSSIMAZIONE di POISSON si ha

$E(S_n)=np_n=\lambda=E(X)$ e $Var(S_n)=np_n(1-p_n)=\lambda(1-\lambda/n)$ converge a $\lambda=Var(X)$

Esempio dell'uso dell'approssimazione di Poisson

Esercizio 1. (dal FOGLIO 8 di Bertini 2023-24) Si assuma che- in media- il 2% della popolazione sia mancina. Dato un campione di 100 individui, utilizzando l'approssimazione di Poisson della binomiale, calcolare la probabilità che almeno 3 siano mancini.

SOLUZIONE si sta pensando implicitamente che ogni individuo possa essere mancino con probabilitè=2/100 (e che gli individui possano essere mancini indipendentemente gli uni dagli altri). Di conseguenza la v.a. S_{100} *:=NUMERO di mancini tra le 100 persone, è Bin(100,2/100)*

e quindi $P(S_{100}\geq 3)=1- P(S_{100}=0)-P(S_{100}=1)-P(S_{100}=2)= 1- [(98/100)^{100} +100 (2/100)^1(98/100)^{99} +[100\cdot 99/2!] (2/100)^2(98/100)^{98}]$

ovviamente è conveniente usare invece di S_{100}*, una v.a. X di Poisson(100·2/100)=Poisson(2) per cui si può calcolare approssimativamente*

$P(S_{100}\geq 3)\cong P(X\geq 3)=1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)]= 1- [e^{-2}+2e^{-2}+(2^2/2!) e^{-2}]=1-5e^{-2}$

PROPRIETA' delle variabili di POISSON

Se X~Poisson(λ) e Y~Poisson(μ) indipendenti allora X+Y~Poisson(λ+μ) (con dimostrazione)

(del resto E(X+Y)=E(X)+E(Y)=λ+μ, quindi se X+Y è di Poisson allora il parametro deve essere λ+μ)

CONTROESEMPIO sull'importanza dell'indipendenza: Se X~Poisson(λ) e Y=X allora X+Y=2X NON può essere di Poisson in quanto assume solo valori pari non negativi

DENSITA' DISCRETA CONDIZIONATA di X dato Y (e di Y dato X)

ossia la famiglia di densità discrete x--> P(X=x|Y=y) (al variare di y con P(Y=y))>0) che individuano la distribuzione di X condizionata all'evento {Y=y}

UTILITA' a volte si conosce/riconosce facilmente il tipo di distribuzione condizionata di X dato {Y=y}, e, se è nota anche densità discreta di Y si può ricavare con la formula delle probabilità totali P(X=x)=SOMME_y P(Y=y)P(X=x|Y=y)

ESEMPIO 9.9. di [SN]

VERIFICA (con dimostrazione) del fatto che se X~Poisson(λ) e Y~Poisson(μ) indipendenti allora, posto Z=X+Y, si ha che k →P(X=k|Z=n) è Bin(n, λ/(λ+μ)), (ovviamente k in {0,1,2,...,n} A PAROLE la distribuzione di X condizionata a Z=n è Bin(n,λ/(λ+μ)).

Analogamente si ha che h →P(Y=h|Z=n) è Bin(n, μ/(λ+μ))

CONTROPARTE se (A_i, i ≥1) sono indipendenti e tutti con P(A_i)=p (con 0<p<1), ed N ~Poisson(∝) è indipendente da (A_i, i ≥1), posto S_n=numero di successi nelle prime n prove (con S_0:=0), S_N= numero di successi nelle prime N prove (quindi in un numero aleatorio di prove) ed R_N= numero di insuccessi nelle prime N prove (quindi in un numero aleatorio di prove)

si ha S_N+R_N=N e inoltre S_N~Poisson(∝·p), R_N~Poisson(∝·(1-p)) sono indipendenti

NOTA BENE qui si parte dal fatto che chiaramente P(S_n=k) è Bin(n,p), P(R_n=k) è Bin(n,(1-p) ed inoltre

P(S_N=k|N=n)=P(S_n=k) è Bin(n,p), e anche P(R_N=h|N=n)=P(R_n=k) è Bin(n,(1-p)

INFATTI, ad esempio P(S_N=k|N=n)=P(S_N=k,N=n)/P(N=n)=P(S_n=k,N=n)/P(N=n)=P(S_n=k)P(N=n)/P(N=n)=P(S_n=k) è Bin(n,p)

e si arriva ad affermare che allora S_N~Poisson(∝·p), R_N~Poisson(∝·(1-p)) sono indipendenti

AL CONTRARIO del caso precedente in cui si partiva da X ed Y indipendenti e di Poisson e si è ottenuto che Z=X+Y è di Poisson e P(X=k|Z=n) è Bin(n,p), con p=λ/(λ+μ) e e P(Y=h|Z=n) è Bin(n,1-p), con 1-p=μ/(λ+μ)

la verifica si basa sul fatto che, per ogni k ed h in {0,1,2,...} si ha

P(S_N=k, R_N=h)= SOMME $_{\text{su } n\geq 0}$ P(S_N=k, R_N=h|N=n)P(N=n)= P(S_N=k, R_N=h|N=k+h)P(N=k+h)

(in quanto è chiaro che solo per n=k+h si ha P(S_N=k, R_N=h|N=n)≠0)

e quindi con la notazione C(m,r)=m!/[r! (m-r)!]

P(S_N=k, R_N=h)= P(S_{k+h}=k, R_{k+h}=h)P(N=k+h)= C(k+h,k)$p^k$$(1-p)^h$ · $e^{-\propto}$ $\propto^{k+h}$/(k+h)! =

(k+h)!/[k!h!] $p^k(1-p)^h$ · $e^{-\propto}$ $\propto^k\propto^h$/(k+h)!= $(\propto\cdot p)^k(\propto\cdot(1-p))^h$ · $e^{-\propto}$/[k!h!] = [$(\propto\cdot p)^k$/k!] [$(\propto\cdot(1-p))^h$/h!] · $e^{-\propto}$ =

per cui tenendo conto che ∝= ∝·p+∝·(1-p) e quindi $e^{-\propto}=e^{-\propto p}\cdot e^{-\propto(1-p)}$, si ottiene che

$P(S_N=k, R_N=h)=[e^{-\propto p} (\propto\cdot p)^k /k!\ ]\ [e^{-\propto(1-p)} (\propto\cdot(1-p))^h /h!]$ che è la densità discreta congiunta di due variabili aleatorie di Poisson di parametri $\propto\cdot p$ e $\propto\cdot(1-p)$ INDIPENDENTI . (c.v.d.)

NOTA BENE: non c'è la lavagna del 9 dicembre, ma ho trascritto tutto quello che abbiamo fatto a lezione

giovedì 11 dicembre 2025 ore 15-18

Verifica che la varianza di $X\sim Geom(p)$ è data da $Var(X)=(1-p)/p^2$. Sia con la formula del valore atteso totale applicato alla v.a. X^2, e alla partizione H_1={X=1} e H_2={X>1}, usando poi la proprietà di mancanza di memoria. (vedere il file SCHEMA-VARIABILI-ALEATORIESCHEMA-VARIABILI-ALEATORIE-19dicembre2024.pdf- pagina 26) sia con le serie di potenze (vedere il file SCHEMA-VARIABILI-ALEATORIE SCHEMA-VARIABILI-ALEATORIE-19dicembre2024.pdf- pagina 27)

Abbiamo richiamato il fatto che oltre alle variabili aleatorie discrete esistono altri tipi di variabili aleatorie: in particolare le v.a. (ASSOLUTAMENTE) continue ossia X è (assolutamente) continua se e solo se (per definizione) esiste una funzione $f_X(x)$ detta **densità di X**, non negativa il cui integrale su tutto IR vale 1

ossia $f_X(x)\geq 0$ e $\int_{IR} f_X(t)\, dt=1$, (integrale su tutto l'insieme IR dei numeri reali, ossia da $-\infty$ a $+\infty$ è uguale a 1)

e per la quale la funzione di distribuzione ossia $x \to F_X(x):= P(X\leq x) = {}_{-\infty}\int^x f_X(t)\, dt$ (integrale da $-\infty$ a x)

e $P(a<X\leq b)={}_a\int^b f_X(x)\, dx=F_X(b)- F_X(a)$ [NOTA BENE $F_X(b)- F_X(a)$ coincide anche con $P(a<X<b)=P(a\leq X\leq b)=P(a\leq X<b)$]

NOTARE l'analogia con la densità discreta p_X di una v.a. X che assume solo un numero finito o infinito numerabile di valori, per cui

$p_X(x_k)\geq 0$ e $SOMME_k\ p_X(x_k)=1$, e la cui funzione di distribuzione è data da $x \to F_X(x):= P(X\leq x) =SOMME_{k:\ x\_k \leq x}\ p_X(x_k)$

DEFINIZIONE: Variabili aleatorie Gaussiane $N(\mu, \sigma^2)$ o normali di valore atteso μ e varianza σ^2 e variabili aleatorie N(0,1) o Gaussiane Standard, sono le variabili aleatorie la cui densità è data da

$f_X(x)= \exp\{- ½ (x-\mu)^2/\sigma^2\} / (2\pi)^{½}$ e $F_X(x)= {}_{-\infty}\int^x [1/ (2\pi)^{½}] \exp\{- ½ (t-\mu)^2/\sigma^2\}\, dt$

in particolare se $\mu=0$, $\sigma^2=1$, si ha che

$f_X(x)=\phi(x):= \exp\{- ½ x^2\} / (2\pi)^{½}$ e $F_X(x)=\Phi(x):= {}_{-\infty}\int^x [1/ (2\pi)^{½}] \exp\{- ½ t^2\}\, dt$.

La funzione $\Phi(x)$ è tabulata per valori x compresi tra 0 e 3,49 (con $\Phi(0)=1/2$, e $\Phi(3{,}49)=0{,}9998$

(per valori più grandi di 3,49 si pone $\Phi(x)$ circa uguale a 1)

Per calcolare $\Phi(x)$ in valori negativi si usa il fatto che,

per la simmetria di $\phi(x):= \exp\{- ½ x^2\} / (2\pi)^{½}$ si ha $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

Abbiamo detto (per il momento senza dimostrazione) che se Y è una Gaussiana Standard ossia $Y\sim N(0,1)$ allora $\mu+ \sigma Y$ è $N(\mu, \sigma^2)$: abbiamo solo visto che ha valore atteso μ e varianza σ^2: in quanto

$E(\mu+ \sigma Y)=\mu+ \sigma E(Y)=\mu+ \sigma\cdot 0=\mu$ e $Var(\mu+\sigma Y)=\sigma^2 Var(Y)=\sigma^2\cdot 1=\sigma^2$.

Enunciato del Teorema Centrale del Limite:

Se X_i, per $i\geq 1$ sono v.a. indipendenti, identicamente distribuite (i.i.d.) e con valore atteso μ_X e varianza $(\sigma_X)^2$ finiti (con $\sigma_X>0$),

allora posto $S_n=X_1+X_i,+\ldots+ X_n$, e $S^*_n=(S_n-n\mu_X)/[\sigma_X\sqrt{n}]$ la sua standardizzata si ha che

$P(S^*_n\leq x)$ converge per n che tende ad infinito a $\Phi(x)=P(Y\leq x)$ dove $Y\sim N(0,1)$

IN ALTRE PAROLE: per n "grande" si ha che $P(S^*_n\leq x)$ è approssimata da $P(Y\leq x)$ dove $Y\sim N(0,1)$

Di conseguenza, dato che da $S^*_n=(S_n-n\mu_X)/[\sigma_X\sqrt{n}]$ si ottiene che

$\{S_n\leq x\}=\{ S^*_n\leq(x-n\mu_X)/[\sigma_X\sqrt{n}])\cong$ e quindi

$P(S_n\leq x)= P(S^*_n\leq(x-n\mu_X)/[\sigma_X\sqrt{n}]) \cong P(Y\leq(x-n\mu_X)/[\sigma_X\sqrt{n}])=\Phi((x-n\mu_X)/[\sigma_X\sqrt{n}])$

Cenno alla relazione con la Legge dei Grandi Numeri: sotto le ipotesi del teorema Centrale del Limite (più forti delle Legge debole di GRANDI NUMERI) si può riottenere la Legge debole dei Grandi Numeri (usando l'approssimazione Normale)

vedere il file [2025-26-11-e-12-dicembre2025-LAVAGNA-.pdf]

venerdì 12 dicembre 2025 ore 13-15 LEZIONE ON-LINE.

Abbiamo ripreso l'enunciato del Teorema Centrale del Limite (TCL) e osservato che

da $S_n=n\mu_X+\sigma_X\sqrt{n}\ S^*_n$ si ottiene che $S_n/n=\mu_X+(\sigma_X/\sqrt{n})\, S^*_n$, ossia $S_n/n-\mu_X=(\sigma_X/\sqrt{n})\, S^*_n$

possiamo affermare che se siamo nelle ipotesi del TCL, ossia se $S_n=X_1+X_i,+\ldots+ X_n$,

dove le X_i, per $i\geq 1$, sono v.a. i.i.d., con valore atteso μ_X e varianza $(\sigma_X)^2$ finiti (con $\sigma_X>0$),

allora, per n "grande" la loro media aritmetica S_n/n è tale che,

qualunque sia $\varepsilon>0$

$P(|S_n/n-\mu_X| \leq \varepsilon) =P(|(\sigma_X/\sqrt{n})\, S^*_n |\leq\varepsilon) \cong P(|(\sigma_X/\sqrt{n})Y |\leq\varepsilon)$

inoltre essendo $\Phi(x)-\Phi(-x)=\Phi(x)-[1-\Phi(x)]= 2\Phi(x)-1$ e

$P(|(\sigma_X/\sqrt{n})Y |\leq\varepsilon)= P(|Y|\leq\varepsilon \sqrt{n}/\sigma_X) =P(-\varepsilon \sqrt{n}/\sigma_X\leq Y \leq \varepsilon \sqrt{n}/\sigma_X)= \Phi(\varepsilon \sqrt{n}/\sigma_X)- \Phi(-\varepsilon \sqrt{n}/\sigma_X) =2\Phi(\varepsilon \sqrt{n}/\sigma_X) -1$

si ottiene che

$P(|S_n/n-\mu_X| \leq \varepsilon)\cong 2\Phi(\varepsilon \sqrt{n}/\sigma_X) -1$

Abbiamo confrontato questo risultato con la disuguaglianza di Chebyshev che invece ci assicura che

$P(|S_n/n-\mu_X| \leq \varepsilon) \geq 1- Var(S_n/n)/\varepsilon^2=1- (\sigma_X)^2 /[n\varepsilon^2]$

in alcuni casi (vedere gli esercizi con soluzioni alla fine del file APPROSSIMAZIONE NORMALE)

Ad esempio nel caso in cui le X_i sono uniformi in $\{1,2,3\}$ ed $n=54$ si ottiene che

$P(100 \leq S_{54} \leq 116)= P(|S_{54} -108|\leq 8)= P(|S_{54} /54-2|\leq 8/54)$ è approssimativamente uguale a 0,8164 (usando il TCL)

mentre con Chebyshev possiamo solo affermare che $P(100 \leq S_{54} \leq 116) \geq 1- 9/16=7/16=0,4375$

NOTA BENE nella soluzione del punto c) dell'Esercizio 16.2 c'è una svista: LA SOLUZIONE CORRETTA è

$P(S_{54} > 100) = 1 - P(S_{54} \leq 100) = 1 - P(S^*_{54} \leq -8/6) \cong 1 - \Phi(-4/3) = \Phi(4/3) \cong 0,9082$

Abbiamo poi visto anche l'Esercizio 16.1 (che riprende l'Esercizio 6.1) e abbiamo osservato come si può approssimare la funzione di distribuzione di una v.a. di Poisson, quando il parametro è molto grande (nell'esempio il parametro è 300) usando il TCL osservando che $X \sim$Poisson(300) ha la stessa distribuzione della somma di 300 v.a. di Poisson(1)

e abbiamo accennato al fatto che similmente per le variabili aleatorie T_n:=tempo di n-simo successo in prove indipendenti e tutte di probabilità p, in quanto possiamo pensare T_n: come la somma di n variabili aleatorie Geom(p) indipendenti (gli intertempi tra un successo e l'altro) e quindi se n è "grande", possiamo usare il TCL e l'approssimazione normale per calcolare la funzione di distribuzione di T_n. (vedremo degli esempi la settimana prossima)

vedere il file **2025-26-APPROSS-NORMALE-PROB1-INFORM.pd**f 2025-26-11-e-12-dicembre2025-LAVAGNA-.pdf

=========================

martedì 16 dicembre 2025 ore 16-18

Abbiamo discusso gli esercizi a risposta multipla 3-4-5 del compito di febbraio 2018 e riportati più sotto (ovviamente insieme alla teoria usata)

Inoltre abbiamo discusso dell'approssimazione della distribuzione della successione di variabili aleatorie X_n,

con $X_n(\Omega)=\{1,2,\dots,n\}$ e $P(X_n=i/n)=1/n$ per $i=1,2,\dots,n$ (ossia con X_n distribuita uniformemente in $\{1/n,\dots,(n-1)/n, 1\}$

come esempio in cui si possono fare i calcoli espliciti del tipo di risultati di approssimazione.

Abbiamo osservato che equivalentemente si può assumere che $X_n = U_n/n$, dove U_n ha distribuzione uniforme in $\{1,2,\dots,n\}$

e abbiamo visto che $E[g(X_n)]$ converge a $E[g(U)]$, dove U è una v.a. (ASSOLUTAMENTE) CONTINUA con densità

$f_U(x)=0$ per $x<0$, $f_U(x)=1$ per x in (0,1) e $f_U(x)=0$ per $x>1$

e $F_U(x):=P(U\leq x)=0$ per $x< 0$, $F_U(x):=P(U\leq x)=x$ per $0\leq x< 1$, $F_U(x):=P(U\leq x)=1$ per $x\geq 1$,

Abbiamo ricordato che $E(U_n)=(n+1)/2$ e che $Var(U_n)=(n^2-1)/12$

e abbiamo osservato che quindi (per n che tende a infinito)

$E(X_n)=E(U_n/n)= (n+1)/(2n)$ tende a $1/2=E(U)$

e $Var(X_n)=Var(U_n/n)= Var(U_n)/n^2= (n^2-1)/(12n)$ tende a $1/12= Var(U)$

Abbiamo notato l'analogia con quanto accade nel Teorema Centrale del Limite, in cui la successione è la standardizzata della somma di n variabili aleatorie i.i.d. di cui sono note valore atteso e varianza.

Vedere il file SCHEMA VARIABILI ALEATORIE SCHEMA-VARIABILI-ALEATORIE-19dicembre2024.pdf Esempio 6.1 (variabili aleatorie uniformi come limite di variabili discrete uniformi).

DOMANDE a risposta multipla DAL COMPITO di febbraio 2018

3. Siano X e Y due variabili aleatorie indipendenti con $X \sim Geom(1/4)$ e $Y \sim Geom(2/3)$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono corretta/e?

i) C ☐ E ☐; $P(\min(X,Y) > 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3$

ii) C ☐ E ☐ $P(\min(X,Y) \geq 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3$

iii) C ☐ E ☐ $P(X+Y=2) = \frac{1}{6}$

iv) C ☐ E ☐ $P(\max(X,Y) \geq 2) = \frac{5}{6}$

v) C ☐ E ☐ $P(\max(X,Y) \geq 2) = \frac{1}{4}$

4. Siano X ed Y due variabili aleatorie, con varianza finita e con $E[X] = 2$, $E[Y] = 2$, $E[XY] = 1$. Quale/i delle seguenti affermazioni è/sono sempre corretta/e?

i) C ☐ E ☐ $Var\big(\dfrac{X}{3} + Y\big) = \dfrac{1}{3} Var(X) + Var(Y) - \frac{1}{3} Cov(X,Y)$

ii) C ☐ E ☐ $Cov(X,Y) = 0$

iii) C ☐ E ☐ le variabili X e Y sono indipendenti

iv) C ☐ E ☐ $Var\big(\dfrac{X}{3} + Y\big) = \dfrac{1}{9} Var(X) + Var(Y) - 2$

v) C ☐ E ☐ nessuna delle precedenti risposte è corretta

5. In una certa regione in USA, si abbatte un numero aleatorio di uragani, con una media di 4 uragani all'anno. Posto $X =$ numero di uragani che si abbatteranno nel 2019 e $Y =$ numero di uragani che si abbatteranno nel 2020 e $Z =$ numero di uragani che si abbatteranno complessivamente nel 2019 e nel 2020. Quale/i delle seguenti affermazioni può/possono essere considerata/e corretta/e?

i) C ☐ E ☐; $P(Y=2) = \binom{365}{2} \left(\frac{4}{365}\right)^2 \left(1 - \frac{4}{365}\right)^{362}$

ii) C ☐ E ☐ $P(Z \leq 2) = e^{-8}\left(1 + 8 + \frac{8^2}{2}\right)$

iii) C ☐ E ☐ $P(Y=2) = P(X=2) = (e^{-4})^2$

iv) C ☐ E ☐ $P(Y=2) = P(X=2) = e^{-4}4^2/2$

v) C ☐ E ☐ $P(X > 0) = 1 - e^{-4}$

vedere il file 2025-26-16-dicembre2025-LAVAGNA.pdf (che però non è completato ne' annotato)

giovedì 18 dicembre 2025 ore 8:30-10:30 (ATTENZIONE ALL'ORARIO)

Lezione straordinaria on-line al solito link meet.google.com/saf-hhcd-odh

Cenno agli intervalli di fiducia/confidenza "approssimati" usando il Teorema Centrale del Limite.

Abbiamo svolto gli ultimi esercizi finali sull'approssimazione normale. In particolare abbiamo osservato che ogni v.a. X di Poisson con parametro "grande", si può pensare come la somma di "molte" variabili aleatorie indipendenti di Poisson tutte dello stesso parametro e quindi si può usare l'approssimazione normale per calcoli approssimati riguardanti la v.a. X.

Analogamente, tenendo presente che i tempi T_m di m-simo successo in prove indipendenti e tutte con la stessa probabilità si possono pensare come somme di m variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, abbiamo visto che si può usare l'approssimazione normale per calcoli approssimati riguardanti le v.a. T_m.

Ci siamo accorti di alcuni errori di stampa degli esercizi e di conseguenza il ~~file~~ **~~APPROSS-NORMALE-PROB1-INFORM-2024-25.pdf~~ è stato sostituito dal file 2025-26-APPROSS-NORMALE-PROB1-INFORM.pdf : le modifiche sono segnalate in rosso. ATTENZIONE il file precedente conteneva ancora un errore: La soluzione dell'Esercizio 16.2 va cambiata come segue**

(c) Calcolare approssimativamente $\mathbb{P}(S_{54} > 100)$.

$$\mathbb{P}(S_{54} > 100) = \mathbb{P}\left(S^*_{54} > \frac{100 - \mathbb{E}(S_{54})}{\sqrt{Var(S_{54})}}\right) = \mathbb{P}\left(S^*_{54} > \frac{100 - 108}{\sqrt{36}}\right) = \mathbb{P}\left(S^*_{54} > -\frac{8}{6}\right) \approx 1 - \Phi(-4/3)$$
$$= 1 - \big(1 - \Phi(4/3)\big) = \Phi(4/3) \approx \Phi(1,33) \approx 0,9082.$$

Per questo motivo ho aggiunto il file **2025-26-APPROSS-NORMALE-PROB1-INFORM-gennaio2026.pdf**

Un cenno ai modelli di occupazione (che però non sono in programma): fissati r ed n numeri interi, si tratta di n variabili aleatorie $(X_1,\ldots,X_n)$ che assumono solo valori interi non negativi e tali che $X_1+\ldots+X_n=r$. Relazione con le combinazioni con ripetizione. Sono però in programma i modelli "multinomiali" che si ottengono da estrazioni con reinserimento da urne/popolazioni con tre o più tipi e i modelli “multi-ipergeometrici” che si ottengono da estrazioni senza reinserimento da urne/popolazioni con tre o più tipi

giovedì 18 dicembre 2025 ore 15-18

SIMULAZIONE di compito scritto (ore 15:15-17:45)

venerdì 19 dicembre 2025 ore 9:00-11 AULA F (piano terra del Dipartimento di MATEMATICA anche ON_LINE) ore 13-15

ATTENZIONE AL CAMBIO DI ORARIO Discussione del compito del 18 dicembre

=========================