MODALITA' ESAME

MODALITA' per studenti con DSA

ESEMPI di DOMANDE ALL' ORALE

PROGRAMMA

DATE ESAMI a.a. 2025-26

MODALITA' ESAME

L'esame prevede una prova scritta e, se superata la prova scritta, una prova orale, da tenersi di norma nei giorni successivi alla prova scritta che riguarda

1) la discussione degli esercizi dello scritto (lo studente deve mostrare di aver capito gli eventuali errori e di saper risolvere anche le domande alle quali non avesse risposto) PER ESEMPI di domande (relative a un compito scritto vedere ESEMPI di DOMANDE ALL'ORALE)

2) un argomento a scelta dello studente

3) eventualmente un altro argomento a scelta della docente

La prova scritta comprende delle domande a risposta multipla. E' anche possibile che si richieda di risolvere a casa degli esercizi da discutere all'orale.

Per un esempio vedere SIMULAZIONE-esame-CP-INFORM-da-luglio2019.pdf e la sezione TESTI D'ESAME di CALCOLO delle PROBABILITA' a.a. 2024-25, dove trovate anche altre informazioni.

ESEMPI DI ARGOMENTI a scelta

teorema centrale del limite e approssimazione normale

teorema centrale del limite e relazione con la legge dei grandi numeri

approssimazione normale per v.a. di Poisson di parametro lambda "grande" oppure approssimazione normale per v.a. tempo di n-simo successo per n "grande"

somma di due v.a. indipendenti (come si ricava ed esempi: somma di due v.a. binomiali con lo stesso parametro p, e/o somma di v.a. di Poisson di parametri lambda e mu)

disuguaglianza di Chebyshev (con dimostrazione) e/o legge dei grandi numeri (con dimostrazione)

approssimazione di Poisson (o legge dei piccoli numeri) per una v.a. binomiale per n grande e p= lambda/n (con dimostrazione)

indipendenza tra due eventi e indipendenza (completa) tra n eventi [e proprietà (con dimostrazione): Se A e B sono indipendenti allora lo sono A^c e B, lo sono A e B^c e lo sono A^c e B^c ; Se A e B sono disgiunti e con P(A) e P(B) >0 allora A e B NON sono indipendenti]

Indipendenza tra due eventi ed indipendenza completa tra tre eventi A, B e C *(con dimostrazione dell'equivalenza tra le 4 condizioni*

$P(A \cap B)=P(A)P(B)$, $P(A \cap C)=P(A)P(C)$, $P(B \cap C)=P(B)P(C)$ e $P(A \cap B \cap C)=P(A)P(B)P(C)$

e le 4+4+4+8=20 condizioni

$P(A^{\sim} \cap B^{\sim})=P(A^{\sim})P(B^{\sim})$, $P(A^{\sim} \cap C^{\sim})=P(A^{\sim})P(C^{\sim})$, $P(B^{\sim} \cap C^{\sim})=P(B^{\sim})P(C^{\sim})$ e $P(A^{\sim} \cap B^{\sim} \cap C^{\sim})=P(A^{\sim})P(B^{\sim})P(C^{\sim})$,

dove $A^{\sim}$ sta per A o per A^c, $B^{\sim}$ sta per B o per B^c, e $C^{\sim}$ sta per C o per C^c)

indipendenza tra due variabili aleatorie e non correlazione (dimostrazione che indipendenza implica non correlazione, ma non viceversa: esempi e controesempi)

valore atteso per v.a. discrete: definizioni, proprietà ed esempi (linearità e monotonia e applicazioni, ad esempio: per il calcolo del valore atteso di una v.a. binomiale o ipergeometrica)

valore atteso di una funzione di una variabile aleatoria (dimostrazione che non è necessario trovare la densità discreta di $Z=g(X)$ per calcolare $E(Z)$)

variabili aleatorie continue: definizione ed esempi (esempi v.a. Uniformi in (a,b), esponenziali, gaussiane)

variabile aleatoria con distribuzione esponenziale come limite di una successione di variabili aleatorie geometriche di parametro lambda/n riscalate (non in programma nell'a.a. 2025-26)

variabile aleatoria con distribuzione uniforme su (0,1) come limite di una successione di variabili aleatorie Uniformi discrete su $\{i/n$, per $i=1,\dots,n\}$

formula delle probabilità totali e formula di Bayes (dimostrazione, applicazioni e significato)

varianza della somma e applicazioni (varianza di una binomiale e varianza di una ipergeometrica)

problema del "matching" (detto anche delle concordanze o anche della segretaria),

calcolo del valore atteso e della varianza del numero delle concordanze

variabili aleatorie geometriche e tempi di r-simo successo (come si ricava la densità discreta del tempo di r-simo successo e come si può vedere come somma di v.a. indipendenti e geometriche)

variabili aleatorie binomiali: descrizione, valore atteso e varianza (come si ricavano)

variabili aleatorie ipergeometriche: descrizione, valore atteso e varianza (come si ricavano)

variabili aleatorie multinomiali: distribuzioni marginali e condizionate (nell'a.a. 2025-26 solo nel caso in cui provengano da estrazioni con reinserimento da urne/popolazioni con tre o più tipi)

variabili aleatorie multi-impergeometriche (ossia estrazioni senza reinserimento da un'urna con tre o più tipi di palline): distribuzioni marginali e condizionate

assiomi della probabilità e loro prime conseguenze (con dimostrazione delle prime proprietà)

formula delle probabilità composte e applicazioni (con dimostrazione)

principio di inclusione ed esclusione e applicazioni (con dimostrazione nel caso n=2 e n=3)

INOLTRE

modelli di occupazione (Maxwell-Boltzamann, Fermi-Dirac e Bose-Einstein) con esempi (non in programma nell'a.a. 2025-26))

variabili aleatorie continue con esempi, calcolo del valore atteso e della varianza

simulazione di v.a. esponenziali e/o di Cauchy (non in programma nell'a.a. 2025-26)

somma di v.a. discrete e/o continue con esempi (argomento non svolto a.a. 2024-25 e 2025-26)

somma di v.a. discrete indipendenti con esempi: somma di due v.a. Binomiali indipendente con lo stesso parametro p, somma di due v.a. Geometriche indipendenti con lo stesso parametro p, somma di due v.a. di Poisson (a.a. 2025-26)

Estrazioni da urne con composizione incognita, con esempi

Estrazioni da urne con composizione nota (con e senza reinserimento): dimostrazione che la probabilità di estrarre una pallina del tipo di interesse all'i-sima estrazione è uguale alla probabilità che la prima pallina estratta sia del tipo di interesse.

Formula del valore atteso totale (con dimostrazione e con esempi)

Problema del collezionista di figurine [valore atteso e varianza del numero di figurine da acquistare per finire l'album] (a.a. 2025-26)

Distribuzione del minimo di due v.a. indipendenti e Geometriche [con parametri non necessariamente uguali] (a.a. 2025-26)

Problema di Monty Hall (a.a. 2025-26)

Ultime modifiche: mercoledì, 24 dicembre 2025, 18:45

MODALITA' per studenti con DSA

RIDUZIONE del compito per studenti con DSA

Il compito scritto consta di 4 domande a risposta multipla e 2 esercizi a risposta aperta con 5 domande ciascuno (più un esercizio a risposta aperta e un altro a risposta multipla da svolgere a casa).

La riduzione del compito al 70% diviene

3 esercizi a risposta multipla (in genere le prime 3)

e

7 domande degli esercizi a risposta aperta (in genere 3 da un esercizio a risposta aperta e 4 dall'altro)

Rimane l'obbligo di svolgere a casa tutti gli esercizi non svolti o sbagliati da discutere all'esame orale

Se lo studente con DSA preferisce, può scegliere quali esercizi e domande scegliere, oppure posso dare io delle indicazioni.

Ultime modifiche: domenica, 1 febbraio 2026, 11:22

ESEMPI di DOMANDE ALL' ORALE

Si tratta solo di alcuni esempi, ancora DA COMPLETARE.

CHIARISCO inoltre che **LE DEFINIZIONI sono FONDAMENTALI**.

Domanda del compito scritto: A e B sono indipendenti?

Domande collegate: dare la definizione di due eventi indipendenti; se A e B sono indipendenti posso dire che anche A^c e B sono indipendenti? oppure: come si ottiene che $P(A^c \cap B)= P(A^c)P(B)$? (ossia a partire dalla definizione $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, come si ottiene che $P(A^c \cap B)= P(A^c)P(B)$?)

Domanda del compito scritto: A, B e C sono eventi (completamente) indipendenti?

Domande collegate: dare la definizione di tre eventi (completamente) indipendenti. NOTA BENE ci sono tre modi equivalenti di dare la definizione; Se A, B e C sono indipendenti, e sono note P/A), P(B) e P(C) , quanto vale $P(A^c \cap B \cap C)$? oppure: a partire dalla definizione di tre eventi A, B e C (completamente indipendenti) data con le 4 condizioni $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, $P(A\cap C)=P(A)P(C)$, $P(B\cap C)=P(B)P(C)$,

come si ottiene che $P(A^c \cap B \cap C)= P(A^c)P(B)P(C)$?

Domanda del compito scritto: calcolare P(AUB).

Domande collegate: che formula ha usato per calcolare P(AUB)? Sa spiegare come si ottiene la formula di inclusione/esclusione?

o anche: A partire dalla formula di inclusione/esclusione per due eventi come si ottiene la formula di inclusione/esclusione per calcolare $P(A\cup B\cup C)$?

Domanda del compito scritto: Un'urna contiene 2 palline rosse e 3 bianche. Si fanno due estrazioni SENZA reinserimento. Se R_i={la i-sima pallina estratta è rossa} posso affermare che $P(R_1)=P(R_2)$?

Domande collegate: Sa spiegare (più in generale) perché se il numero di palline rosse è r e quello delle palline bianche è b, con r e b numeri NOTI, allora $P(R_1)=P(R_2)$?; e se facessimo n estrazioni, sempre senza reinserimento, quanto varrebbe $P(R_n)$? ovviamente n non può essere preso grande " a piacere": al massimo quante estrazioni senza reinserimento si possono fare?

Che collegamento c'è tra il fatto che $P(R_k)=P(R_1)$ per ogni k=1,2,...n e il valore atteso di una variabile aleatoria Ipergeometrica Hyp(r+b, r; n)?

Come si sfrutta la proprietà di linearità del valore atteso per calcolare il valore atteso di una variabile aleatoria Ipergeoemtrica Hyp(r+b, r; n)?

Domanda collegata: se 1_B è la variabile aleatoria binaria che vale 1 se si verifica B e 0 se si verifica B^c, quanto vale il suo valore atteso?

Domanda del compito scritto: Si fanno due estrazioni CON reinserimento da un'urna scelta in modo aleatorio. Inoltre è noto che sono possibili sono i seguenti casi:
se si verifica H_1, allora l'urna contiene r_1 palline rosse e b_1 bianche, ed è nota la probabilità $p_1 =P(H_1)$
se si verifica H_2, allora l'urna contiene r_2 palline rosse e b_2 bianche, ed è nota la probabilità $p_2 =P(H_2)$

Se R_i={la i-sima pallina estratta è rossa}, R_1 ed R_2 sono indipendenti?

Domande collegate: Che significa che R_1 ed R_2 sono indipendenti?

Che formula possiamo usare per calcolare $P(R_1 \cap R_2)$; oppure Possiamo usare la formula delle probabilità totali per calcolare $P(R_1 \cap R_2)$ rispetto alla partizione H_1, H_2?

Come si ottiene la formula delle probabilità totali? Più in generale cosa significa che gli eventi H_1, $H_2,\ldots,H_m$ formano una partizione? Cosa significa che gli eventi H_1, $H_2,\ldots H_m$ sono incompatibili a due a due? Cosa significa che gli eventi H_1, $H_2,\ldots H_m$ sono esaustivi?

Domanda del compito scritto: calcolare E(X).

Domande collegate: in uno spazio di probabilità finito, come si definisce E(X)? Ci sono due modi alternativi per definire il valore atteso, quali sono?

Sa spiegare perché sono equivalenti (anche con un esempio)?

Quali sono le proprietà fondamentali del valore atteso? Sa spiegare come si ottiene la proprietà di linearità del valore atteso? e la proprietà di monotonia?

Domanda del compito scritto: Calcolare $E[X/(1+X^2)]$. ***(si suppone che avete precedentemente calcolato la densità discreta della variabile aleatoria X discreta)***

Domande collegate: Più in generale data una funzione g(x) e posto Y=g(X) come si calcola E(Y)= E[g(X)]? è necessario calcolare la densità discreta di Y, oppure basta la densità discreta di X? Sa spiegare perché sono equivalenti (anche con un esempio)?

Domanda del compito scritto: calcolare Cov(X,Y) e dire se X e Y sono indipendenti

Domande collegate: Come si definisce Cov(X,Y)? Come si può calcolare Cov(X,Y)? Che relazione c'è tra Cov(X,Y)=0 e indipendenza di X e Y? Qual è la definizione di "X ed Y sono variabili aleatorie indipendenti"? Sa spiegare perché indipendenza di X e Y implica che Cov(X,Y)=0? Sa spiegare perché Cov(X,Y)=0 NON implica l'indipendenza di X e Y? conosce un controesempio? Consideri il caso X Uniforme in {-1,0,+1} e $Y=X^2$. Calcoli Cov(X,Y) e mostri che X e Y non sono indipendenti.

Domanda del compito scritto: Sia X una variabile aleatoria Geom(2) con E(X)=3, Calcolare P(X>3).

Domande collegate: Quando possiamo dire che X è una variabile aleatoria Geometrica di parametro p? ovvero (equivalentemente) Quali valori può assumere X e con quale probabilità? ovvero (equivalentemente) Qual è la sua densità discreta?

Qual è il prototipo di una variabile aleatoria Geometrica? Che differenza/relazione c'è tra la variabile aleatoria T_1=tempo di primo successo in una successione $\{A_i, i \geq 1\}$ di eventi indipendenti e tutti con probabilità p, e il numero di fallimenti prima del primo successo? Come possiamo rappresentare l'evento $\{T_1=k\}$ e/o l'evento $\{T_1>k\}$?

Che relazione c'è tra E(X) e p? ovvero (equivalentemente) Quanto vale E(X)?

Come si definisce la proprietà di mancanza di memoria di una variabile aleatoria Geometrica? Cosa significa la proprietà di mancanza di memoria di una variabile aleatoria Geometrica?

Sa mostrare il motivo per cui E(X)=1/p? ad esempio usando la proprietà di mancanza di memoria e la formula del valore atteso totale? Sa calcolare il valore atteso per le variabili aleatorie Geom(p) con la formula $E(X)=\Sigma_{k\geq 0} P(X>k)$?

[A questo proposito chiarisco che la dimostrazione di questo calcolo va saputo fare, ovvero che si ottiene che $E(X)=\Sigma_{k\geq 0} P(X>k) = \Sigma_{k\geq 0} (1-p)^k =1/p$, e che quindi si deve conoscere la formula della somma di una progressione geometrica, INVECE non è richiesta la dimostrazione del valore della varianza di una variabile aleatoria geometrica, ma bisogna sapere che Var(X)=(1-p)/p^2]

Se X ed Y sono variabili aleatorie indipendenti ed entrambe Geom(p), come si calcola P(X+Y=n), e per quali valori di n P(X+Y=n)>0? C'è una relazione con il tempo di secondo successo in una successione di prove indipendenti e tutte con la stessa probabilità?

ALTRE DOMANDE:

Siano X ed Y due variabili aleatorie,

Qual è la definizione di Var(X)? Perché è impossibile che Var(X) valga -1? Come si ottiene che $Var(X):=E[(X-E(X))^2]=\ldots=E(X^2)-(E(X))^2$?

Come si calcola Var(X+Y)? Come si ottiene che Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)?

Sia X una variabile aleatoria binomiale Bin(n,p). Come si può ottenere che E(X)=np e Var(X)=np(1-p)?

Se X e Y sono due variabili aleatorie di Poisson di parametro λ e μ rispettivamente e inoltre X e Y sono indipendenti, possiamo affermare che X+Y è ancora una variabile aleatoria di Poisson?
è importante che X e Y siano indipendenti? Ad esempio: sia Y=X, perché allora X+Y=2X non può essere una variabile aleatoria di Poisson?

Come si ottiene che per una variabile aleatoria gaussiana la sua funzione di distribuzione $\Phi(x):=P(Y\leq x)$ ha la proprietà che $\Phi(-x)=1- \Phi(x)$? come entra il fatto che la sua densità $\phi(x)=\Phi'(x)= e^{-x2/2}/(2\pi)^{1/2}$ è una funzione simmetrica?

Usando il Teorema Centrale del Limite si ottiene l'approssimazione normale: Se S_n è la somma di n variabili aleatorie indipendenti, tutte con la stessa distribuzione, con valore atteso μ_X e varianza $(\sigma_X)^2$ >0, posso allora affermare che la distribuzione della standardizzata di S_n ha esattamente la distribuzione di una variabile aleatoria gaussiana standard $Y\sim N(0,1)$ o no?, ossia

$P((S_n -n\mu_X)/(\sigma_X\sqrt{n}) \leq x) = P(Y\leq x) = \Phi(x)$

OPPURE non è uguale, ma è solo circa uguale?, ossia vale

$P((S_n -n\mu_X)/(\sigma_X\sqrt{n}) \leq x) \approx P(Y\leq x) = \Phi(x)$

Altre domande: uno degli argomenti suggeriti a scelta dello studente.

Ultime modifiche: domenica, 1 febbraio 2026, 11:35

PROGRAMMA

il PROGRAMMA DI MASSIMA si trovava qui (da FREQUENTARE del CORSO di LAUREA in INFORMATICA a.a. 2024-25).

(ora si trova nell'archivio a questo LINK del programma di massima 2024-25)

Gli argomenti sono quasi tutti svolti negli Appunti [SN], ovvero INTRODUZIONE AL CALCOLO DEL LE PROBABILITA', di Fabio Spizzichino e Giovanna Nappo, file disponibile sul sito e-learning del corso, e sul libro S. Ross CALCOLO delle PROBABILITA' (Edizioni APOGEO).

Alcuni argomenti sono trattati anche in alcune slide (sempre disponibili sul sito e-learning del corso).

Si consiglia anche di vedere il diario delle lezioni (DIARIO SETTEMBRE OTTOBRE e DIARIO NOVEMBRE-DICEMBRE), che contengono, oltre agli argomenti svolti, anche le indicazioni sui file che trattano alcuni argomenti e/o alcuni esercizi.
Ricordare inoltre che gli argomenti trattati negli Esercizi da svolgere fanno parte del programma.

PROGRAMMA DETTAGLIATO:

1) ARGOMENTI SVOLTI FINO AL 31 ottobre 2024

Eventi e loro rappresentazione come insiemi; operazioni logiche tra eventi e operazioni booleane tra insiemi; partizioni (dell'evento certo); partizione generate da un evento, partizione generata da due eventi; partizione generata da n eventi.

Assiomi delle probabilità per spazi di probabilità numerabili (finiti e infiniti); proprietà di additività finita e proprietà di additività numerabile. Densità (o funzione di massa); calcolo della probabilità di un evento con la densità; costruzione delle probabilità con la densità).

Proprietà delle probabilità: probabilità del complementare; probabilità dell'evento impossibile; proprietà di monotonia; formula di inclusione ed esclusione per due e tre eventi; probabilità definite a meno di un fattore di proporzionalità. Formula di inclusione/esclusione per n eventi (senza dimostrazione); problema delle concordanze (o matching problem).

Probabilità condizionate; formula delle probabilità composte; formula delle probabilità totali; formula di Bayes; fissato un evento H con probabilità non nulla la funzione $A \to P_H(A) := P(A|H)$ è una probabilità (ossia soddisfa gli assiomi delle probabilità).

Primi rudimenti di Calcolo Combinatorio; disposizioni (semplici), permutazioni e combinazioni e loro numeri; coefficienti binomiali; disposizioni con ripetizione e prodotto cartesiano; anagrammi (anche senza senso) e coefficienti multinomiali; principio fondamentale del calcolo combinatorio (senza dimostrazione).
Calcolo delle probabilità relative al gioco del lotto e a carte (solo nel caso di carte servite).

Correlazione e indipendenza fra eventi; correlazioni positive e correlazione negativa fra due eventi (in senso stretto e in senso lato); indipendenza di due eventi; indipendenza (completa o, equivalentemente, globale) di una famiglia di n eventi (dimostrazione dell'equivalenza delle tre definizioni solo per n = 3); schema di Bernoulli o delle prove ripetute (ossia n eventi $A_1,A_2,\dots,A_n$ indipendenti e tutti con la stessa probabilità p; numero di successi in uno schema di Bernoulli

(ossia numero degli i ∈ {1,2,...,n} per i quali si verifica A_i) e probabilità binomiali. Indipendenza di una famiglia numerabile di eventi $\{A_k, k \geq 1\}$ (ovvero ogni sottofamiglia finita è una famiglia di eventi indipendenti) e probabilità geometriche per il numero di prove da effettuare per ottenere un successo per la prima volta. Indipendenza di due partizioni; equivalenza tra l'indipendenza di due eventi A e B e l'indipendenza della partizione generata da A e quella generata da B; indipendenza di n partizioni.

Estrazioni da popolazioni/urne di composizione nota, con due tipi di individui/palline (con m_A individui di tipo A, ed m_B di tipo B, oppure con b palline bianche ed r rosse, con m_A e m_B noti, o b ed r noti); estrazioni con e senza reinserimento; estrazioni con reinserimento come schema di Bernoulli (e quindi probabilità binomiali per il numero di "successi"); estrazioni senza reinserimento e probabilità ipergeometriche; approssimazione delle probabilità ipergeometriche con le probabilità binomiali (sotto opportune condizioni)
Esempi di estrazioni con doppio reinserimento. Esempi di estrazioni da urne/popolazioni di composizione incognita; il caso di due estrazioni con reinserimento da una stessa urna di composizione incognita (o equivalentemente da un'urna scelta in modo aleatorio) e verifica che in tale caso eventi relativi ad estrazioni diverse non sono indipendenti, ma correlati positivamente (in senso lato).

Modelli classici: problema del compleanno; paradosso di De Mére; problema delle concordanze; probabilità al gioco dei dadi (sia il caso di dadi ben equilibrati che nel caso di dadi truccati in modo che la probabilità che esca "i" sia proporzionale ad i); probabilità alla roulette; probabilità al gioco del lotto; probabilità al gioco "jazzi"; probabilità al gioco del poker (mani servite); modelli di trasmissione di dati, con probabilità di errore, falsi allarmi, etc.; test medici, falsi positivi, falsi negativi, etc.; problema di Monty Hall.

2) <u>ARGOMENTI SVOLTI dal 6 novembre in poi</u>

Variabili aleatorie in spazi numerabili e loro densità discreta. Funzione di distribuzione.

Variabili degeneri, binarie (anche dette di Bernoulli), uniformi, binomiali (come numero di successi in prove di Bernoulli) e ipergeometriche.

Come si ricava la densità discreta per variabili aleatorie a valori interi, noti i valori si $P(X \leq k)$ e /o $P(X>k)$, per ogni k intero.

Valore atteso e prime proprietà del valore atteso (linearità e monotonia, con dimostrazione). Calcolo del valore atteso per variabili

Uso della proprietà di linearità per calcolare il valore atteso di v.a. con distribuzione Bin(n,p) e con distribuzione Hyp(M,m;n).
Verifica dell'equivalenza dei due modi di calcolare il valore atteso:
(i) come media pesata di $X(\omega_i)$ con pesi $p(\omega_i)=P(\{\omega_i\})$
(ii) come media pesata di x_k, con pesi $p_X(x_k)=P(X=x_k)$
Trasformazioni di variabili aleatorie, ossia variabili aleatorie Z=h(X), dove h è una funzione nota.
Calcolo del valore atteso di Z=h(X) usando la densità discreta di X.
Calcolo della densità discreta di Z=h(X).
Varianza di una variabile aleatoria. Varianza di aX+b
Valore atteso e Varianza di v.a. degeneri, binarie, Binomiali, Ipergeometriche, Uniformi in {1,2,...,n}
Varianza della somma di due variabili aleatorie e loro covarianza (con dimostrazione): varianza

della somma di due variabili binarie (con dimostrazione). Varianza della somma di n variabili aleatorie (senza dimostrazione): applicazione verifica del calcolo della varianza di una v.a. Binomiale.
Approssimazione di Poisson (anche detta Legge dei piccoli numeri) con la dimostrazione, Enunciato del Teorema di Le CAM (senza dimostrazione) e variabili aleatorie con distribuzione di Poisson di parametro λ. Valore atteso e varianza per variabili con distribuzione di Poisson, con l'uso della somma della serie esponenziale.
Formula $E(X)=\Sigma_{k\geq 0} P(X>k)$ per calcolare il valore atteso di una variabile aleatoria che assume solo valori interi non negativi (dimostrazione solo per le variabili che assumono un numero finito di valori)

Tempo di primo successo in una successione di prove di Bernoulli e variabili aleatorie Geometriche. Proprietà di mancanza di memoria delle variabili aleatorie. Calcolo del valore atteso per le variabili aleatorie Geom(p) con la formula $E(X)=\Sigma_{k\geq 0} P(X>k) =\Sigma_{k\geq 0} (1-p)^k =1/p$ e sua varianza Var(X) (senza dimostrazione). Numero di insuccessi prima del primo successo. Tempi di r-simo successo e numero di insuccessi prima dell'r-simo successo.
Densità discreta congiunta di due variabili aleatorie. Tabelle della distribuzione congiunta.
Formula per il calcolo del valore atteso di una trasformazione di due variabili aleatorie, ossia di E[g(X,Y)] (senza dimostrazione, solo l'analogia con il caso di una variabile aleatoria)

Indipendenza di due variabili aleatorie sia come la densità discreta congiunta è il prodotto delle densità discrete marginali, sia come l'indipendenza delle partizioni generate da X e da Y, sia come $P(X\in L, Y\in J)= P(X\in L)P(Y\in J)$ per ogni L e J.

Osservazione: SE per una coppia di valori x_i e y_j, con $p_X(x_i)>0$ e $p_Y(y_j)>0$ (come è usuale) si ha $p_{X,Y}(x_i,y_j)=0$, ALLORA X ed Y non sono indipendenti.

Dimostrazione del fatto che se X ed Y sono indipendenti e se $h_1(x)$ ed $h_2(y)$ sono due funzioni reali a valori reali allora $E[h_1(X)h_2(Y)]=E[h_1(X)]E[h_2(Y)]$. In particolare se $h_1(x)=x$ ed $h_2(y)=y$ allora E(XY)=E(X)E(Y) e quindi Cov(X,Y)=0: ossia l'indipendenza di X e Y implica la non correlazione, (il viceversa non è vero: con controesempio).
Indipendenza (completa) di n variabili aleatorie e conseguenza: la varianza della somma di n variabili aleatorie indipendenti è la somma delle varianze. Osservazione, in realtà basta che siano indipendenti a due a due.

Disuguaglianza di Chebyshev. Uso della Disuguaglianza di Chebyshev ottenere la Legge dei Grandi Numeri (versione con un numero finito di variabili aleatorie) e applicazioni "statistiche" : Intervalli di fiducia (o di confidenza) per "stimare" (con probabilità almeno 1-\delta) il valore atteso comune con la media aritmetica di n variabili aleatorie indipendenti, ma di cui non è noto il valore atteso. in particolare il caso delle funzioni indicatrici di eventi indipendenti e tutti con la stessa probabilità incognita. In questo caso la media aritmetica coincide con la frequenza relativa dei successi

Esercizio teorico: il valore atteso minimizza la funzione f(t)=E[(X-t)^2] e il valore minimo è la varianza.
Coefficiente di Correlazione $\rho= Cov(X,Y)/(\sigma_X\sigma_Y)$ e Disuguaglianza di Cauchy (con verifica)
Cenno alla retta di regressione di Y rispetto a X: come la retta $(y-\mu_Y)/\sigma_Y= \rho\, (x-\mu_X)/\sigma_X$,
ovvero la retta di equazione $y=\mu_Y + (\rho\, \sigma_Y)\, (x-\mu_X)/\sigma_X$, (che si può scrivere come $y=a^*x+b^*$)
che gode della proprietà (senza dimostrazione)

$E[(Y-a^*X-b^*)^2] \leq E[(Y-a\,X-b\,)^2]$ per qualunque valore di a e di b reali

Distribuzione della somma di due variabili aleatorie X e Y indipendenti e distribuzione condizionata di X dato X+Y=z. Formula generale e

(i) caso di X Bin(n,p) e Y Bin(m,p) **indipendenti**: X+Y è Bin(n+m,p); inoltre P(X=h|X+Y=k)**=P(X=h, Y=k-h|X+Y=k) è ipergeometrica**

(ii) caso di X e Y entrambe Geom(p) indipendenti: X+Y ha la distribuzione del tempo di secondo successo (o del numero di fallimenti prima del secondo successo se sono geometriche a partire da 0) ; inoltre P(X=h|X+Y=k)=P(X=h, Y=k-h|X+Y=k) è uniforme nei valori per cui tali probabilità non sono nulle)

(iii) caso di X Poisson(λ) e Y Poisson(μ) indipendenti: X+Y è Poisson(λ+μ); inoltre P(X=h|X+Y=k)=P(X=h, Y=k-h|X+Y=k) è Bin(k,λ/(λ+μ))

Modelli d'occupazione come n variabili aleatorie a valori interi non negativi per le quali $X_1+X_2+...+X_n=r$, ossia è la loro somma è una variabile aleatoria degenere.

Combinazioni con ripetizione e relazione con le n-ple di numeri interi $(k_1,k_2,...,k_n)$ non negativi per i quali la somma k_1**$+k_2+...+k_n=r$, dove r è un numero intero fissato, dove $(k_1,k_2,...,k_n)$ sono detti vettori di numeri d'occupazione.**

Esempi di modelli di Bose-Einstein (ossia con distribuzione uniforme nell'insieme dei vettori di numeri d'occupazione con n ed r fissati)

Esempi di modelli di Fermi-Dirac (ossia con distribuzione uniforme nell'insieme dei vettori di numeri d'occupazione con n ed r fissati, per i quali k_i possono valere solo 0 o 1)

Modelli multinomiali (come generalizzazione delle estrazioni con reinserimento da un'urna di composizione nota, con 3 o più tipi di palline/oggetti/individui): il caso in cui l'urna contiene n palline una per ciascun tipo è detto modello di Maxwell-Boltzmann)

e modelli multi-ipergeometrici (estrazioni con reinserimento da un'urna di composizione nota, con 3 o più tipi di oggetti/individui)

Per i modelli multinomiali e multi-ipergeometrici: le distribuzioni marginali di X_i e di X_i+X_j e le distribuzioni condizionate congiunte di $(X_1, ...,X_{i-1}, X_{i+1},..X_n)$ condizionate a eventi del tipo $\{X_i=h\}$ o di di $(X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1},.., X_{j-1}, X_{j+1},...,X_n)$ condizionate a eventi del tipo $\{X_i+X_j=h\}$

I modelli d'occupazione si ottengono anche come distribuzioni congiunte condizionate di n variabili aleatorie a valori interi non negativi quando si condiziona al valore della loro somma: il caso di n variabili aleatorie indipendenti e tutte Geom(p) (sia standard che a partire da zero) e il caso di n variabili aleatorie indipendenti e tutte di Poisson di parametri $\lambda_1, \lambda_2,...., \lambda_n$. Dimostrazione solo nel caso di n=2.

Formula del valore atteso totale: Esempi di applicazione e Calcolo del valore atteso di una variabile aleatoria Geom(p) con tale formula e con la proprietà della mancanza di memoria. Calcolo anche della varianza con lo stesso metodo (la dimostrazione è facoltativa)

Problema del collezionista di figurine. Paradosso di San Pietroburgo. Numero delle concordanze: calcolo del valore atteso e della varianza.

Spazi di probabilità generali e variabili aleatorie in tali spazi. Enunciato della proprietà di continuità delle probabilità. Funzioni di distribuzione per variabili aleatorie generali F(x)=P(X≤x). Proprietà delle funzioni di distribuzione (dimostrazione solo della monotonia e del fatto che

tendono ad 1 per x che tende ad infinito) Variabili aleatorie assolutamente continue e loro densità.

Esempi: variabili aleatorie Uniformi (a,b), Esponenziali(λ), Cauchy, Gaussiane N(μ, σ^2). Uso delle tavole per il calcolo della funzione di distribuzione di una variabile aleatoria N(μ, σ^2).

Calcolo della funzione di distribuzione di una variabile Y=aX+b, quando a>0.

Enunciato del teorema centrale del limite (senza dimostrazione) e applicazione per il calcolo approssimato della funzione di distribuzione della somma di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con valore atteso e varianza (non nulla) finiti e noti.

Relazione tra il teorema centrale del limite e la legge dei grandi numeri.

DATE ESAME a.a. 2025-26

1024483 **20/01/2026** 1: CALCOLO DELLE PROBABILITA' (cfu:9) prenotazione da 17/12/2025 a17/01/2026 (pomeriggio presentarisi alle oer 15:15 inizio ore 15:30)

AULA Tullio Levi-Civita (primo piano Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo)

2025/2026

1009467 **12/02/2026** 1: CALCOLO DELLE PROBABILITA' (cfu:9) prenotazione da 21/01/2026 a 09/02/2026 (presentarsi alle 15:45, inizio previsto entro le 16:00)

ATTENZIONE CI HANNO CHIESTO DI CAMBIARE LA DATA dal 10 al 12 febbraio 2026

AULA Tullio Levi-Civita (primo piano Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo)

2025/2026

1024492 **23/06/2026** 1: CALCOLO DELLE PROBABILITA' (cfu:9) prenotazione da 21/05/2026 a 20/06/2026 (pomeriggio)

AULA Federico Enriques (piano terra Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo

2025/2026

1024493 **21/07/2026** 1: CALCOLO DELLE PROBABILITA' (cfu:9) prenotazione da 21/06/2026 a19/07/2026

AULA Federico Enriques (piano terra Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo

ore 15:30

2025/2026

1024509 **18/09/2026** 1: CALCOLO DELLE PROBABILITA' (cfu:9) prenotazione da 31/07/2026 a15/09/2026