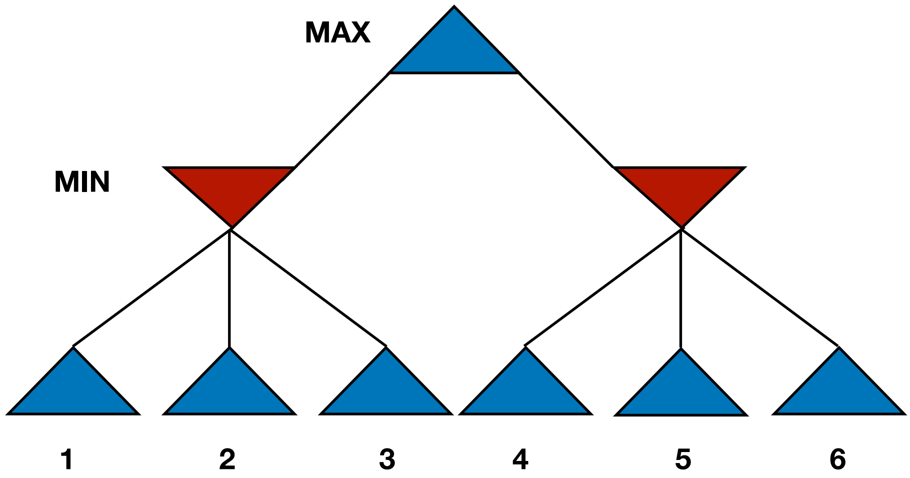
ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΑΠΕΤΑΝΓΕΩΡΓΗΣ
Α.Μ. 1115201800061

PROJECT 1
Τεχνητή Νοημοσύνη
Θεωρητικές Ασκήσεις (Προβλήματα 1-4)

Πρόβλημα 1

Κάθε MIN κόμβος που παίζει βέλτιστα επιλέγει πάντα το “παιδί” του με την μικρότερη χρησιμότητα. Σε περίπτωση που ο MIN δεν παίζει βέλτιστα τότε η χρησιμότητα που θα επιλέξει θα είναι σίγουρα μεγαλύτερη ή ίση από αυτήν που θα επέλεγε ο βέλτιστος. Ο MAX (ο οποίος παίζει βέλτιστα) επιλέγει πάντα την μεγαλύτερη χρησιμότητα από τα MIN “παιδιά” του. Άρα, αφού η τιμή που επιλέγει ένας μη optimal MIN μπορεί μόνο να έχει αυξηθεί, τότε και η τελική τιμή που θα επιλέξει ο MAX μπορεί μόνο να έχει αυξηθεί.

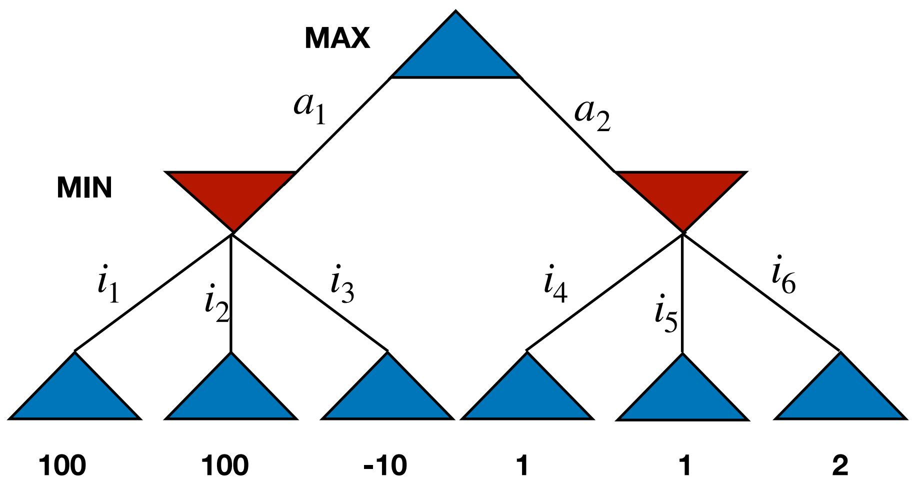
Θα χρησιμοποιήσω ένα παράδειγμα για να αποτυπώσω τα παραπάνω. Υποθέτω ότι έχουμε μόνο μια κίνηση του MAX και μία του MIN.



Εάν ο MIN είναι βέλτιστος τότε ο αριστερά MIN θα επιλέξει το 1 (το μικρότερο από τα 3 παιδιά του) και ο δεξιά MIN θα επιλέξει το 4. Άρα ο MAX κόμβος θα επιλέξει το 4 αφού είναι η μεγαλύτερη από τις 2 χρησιμότητες. Εάν οι MIN κάνουν βέλτιστες επιλογές τότε παρατηρούμε ότι θα επιλέξουν μεγαλύτερες τιμές. Πιο συγκεκριμένα ο αριστερός MIN θα επιλέξει 2 ή 3 ενώ ο δεξής 5 ή 6. Δηλαδή, στην περίπτωση μας ο MAX θα επιλέξει την τιμή του δεξιού MIN η οποία είναι 5 ή 6.

Άρα είναι προφανές ότι σε περίπτωση που ο MIN δεν είναι βέλτιστος, η χρησιμότητα για τον MAX δεν είναι ποτέ μικρότερη από αυτήν που θα είχε εάν ο MIN είναι βέλτιστος. Δηλαδή είναι είτε ίση (σε περίπτωση που κάποιος MIN κάνει μια βέλτιστη επιλογή), είτε μεγαλύτερη.

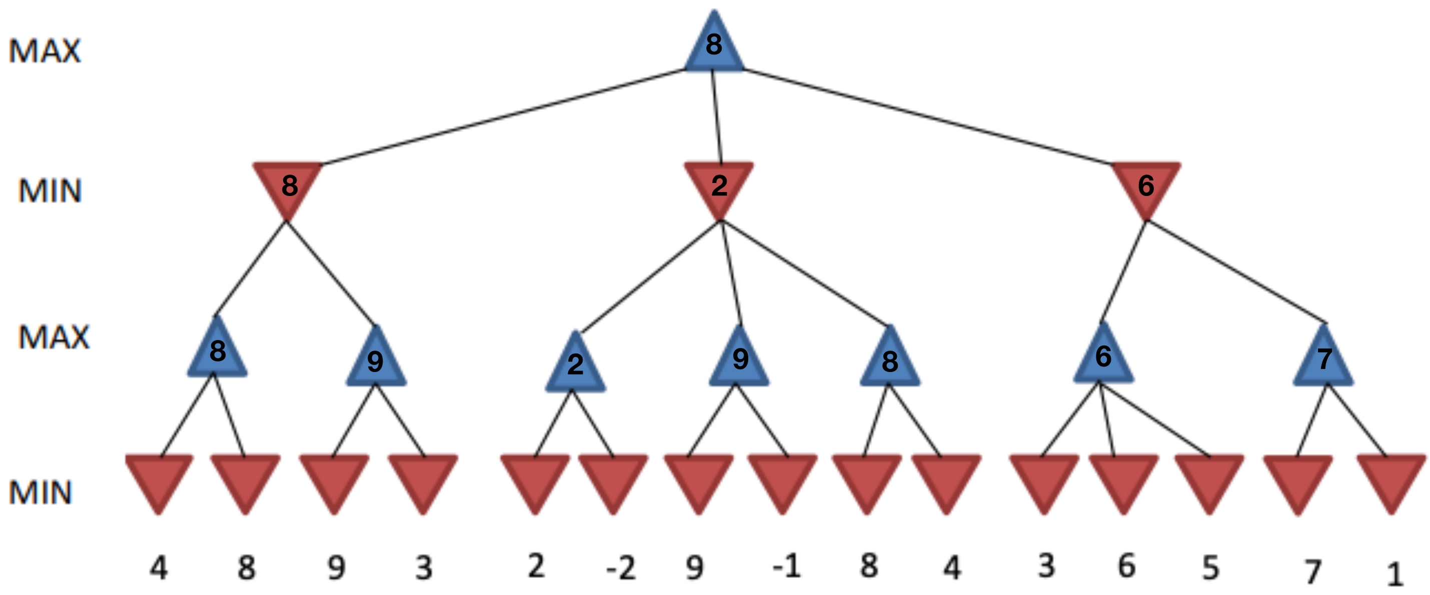
Εάν γνωρίζουμε ότι ο MIN δεν παίζει βέλτιστα και μπορούμε να προβλέψουμε το αν θα κάνει μια μη βέλτιστη κίνηση, μπορούμε να “παγιδεύσουμε” τον MIN βασιζόμενοι στο γεγονός αυτό. Πιο συγκεκριμένα ο MAX μπορεί να κάνει μια κίνηση η οποία υπό βέλτιστες συνθήκες δεν θα ήταν καλή (βέλτιστη). Επειδή γνωρίζουμε όμως ότι και ο MIN δεν παίζει βέλτιστα, σε συνδυασμό με την δικιά του κίνηση η κίνηση του MAX τελικά είναι καλύτερη από την φαινομενικά βέλτιστη (αν και οι 2 MIN και MAX ήταν βέλτιστοι). Η “παγίδα” αυτή φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:



Εάν οι αλγόριθμοι ήταν βέλτιστοι τότε το MAX θα επέλεγε την κίνηση a_2 και ο MIN την i_4 δηλαδή ο αρχικός MAX θα είχε χρησιμότητα 1.
Επειδή όμως ο MAX γνωρίζει ότι ο MIN δεν λειτουργεί βέλτιστα επιλέγει να κάνει μια μη βέλτιστη κίνηση, δηλαδή την a_1 , και έτσι "παγιδεύει" τον MIN ο οποίος θα επιλέξει την i_1 ή την i_2 και έτσι ο MAX θα έχει τελική χρησιμότητα ίση με 100.
Δηλαδή ο MAX επιλέγει να κάνει μια μη βέλτιστη κίνηση, βασιζόμενος στο ότι ο MIN δεν παίζει βέλτιστα, και καταλήγει να τα καταφέρνει καλύτερα από ότι αν έπαιζε μια βέλτιστη κίνηση.

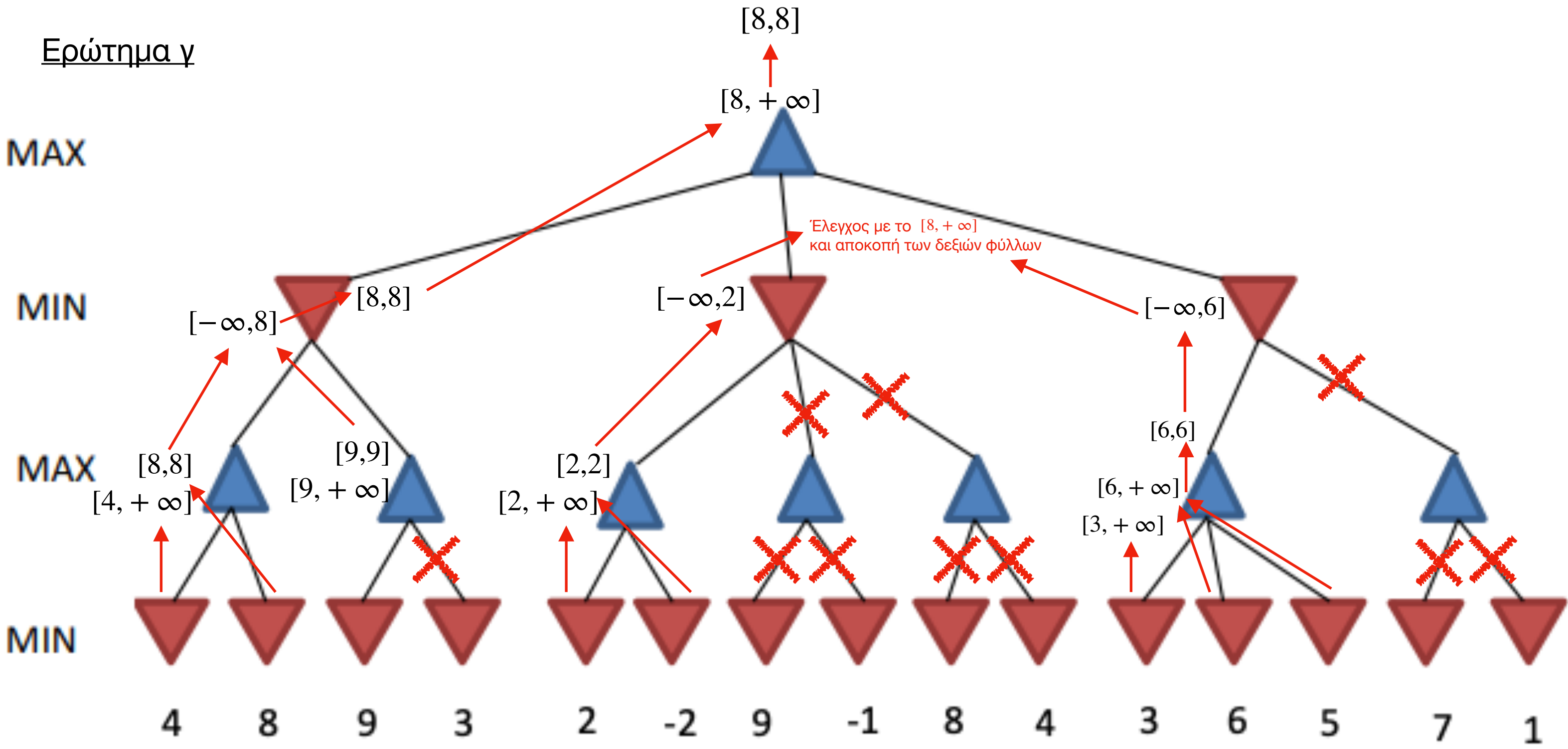
Πρόβλημα 2

Ερώτημα α και Ερώτημα β



Οι MIN κόμβοι επιλέγουν κάθε φορά τον μικρότερο από τους MAX κόμβους-παιδιά τους. Αντίθετα οι MAX κόμβοι επιλέγουν τους μεγαλύτερους από τους MIN κόμβους-παιδιά τους.
Τελικά ο κόμβος-ρίζα πρέπει να επιλέγει τον μεγαλύτερο από τους MIN κόμβους-παιδιά του οι οποίοι έχουν τιμές 8,2 και 6. Άρα επιλέγει τον αριστερό κόμβο ο οποίος έχει τιμή 8.

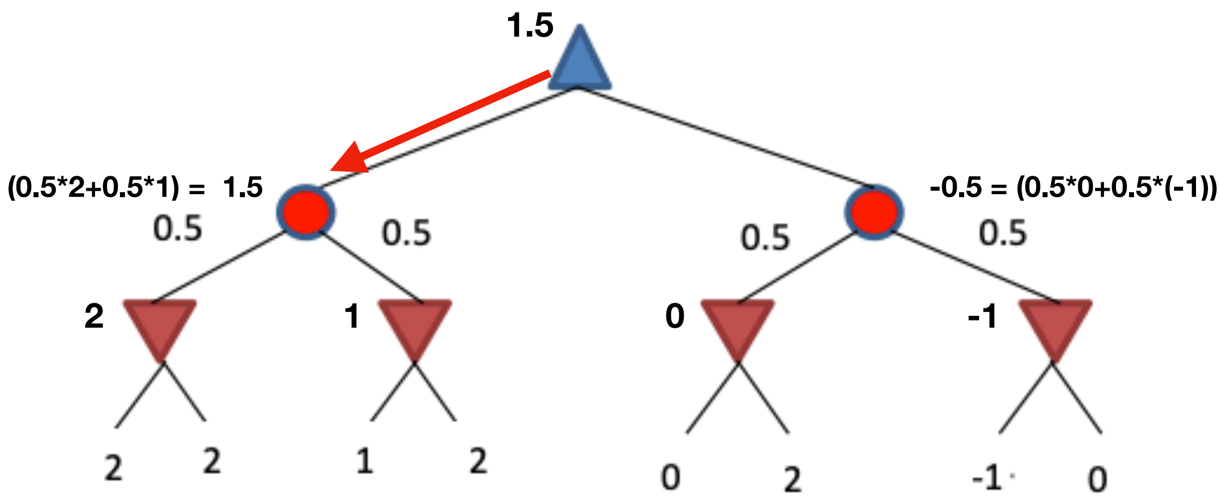
Ερώτημα γ



Παρατηρήσεις
Οι κόμβοι οι οποίοι κλαδεύτηκαν είναι αυτοί των οποίον οι ακμές έχουν το σχήμα ✗ στο παραπάνω δένδρο.
Τα διαστήματα που υπάρχουν σε κάθε κόμβο αναπαριστούν το διάστημα [a,b] του αλγορίθμου alpha-beta search. Σε κάποιους κόμβους υπάρχουν παραπάνω από ένα διαστήματα. Αυτό το επέλεξα έτσι ώστε να φαίνονται οι αλλαγές που γίνονται στο κάθε διάστημα. Τα χαμηλότερα διαστήματα είναι και τα παλαιότερα ενώ τα υψηλότερα είναι και τα νεότερα (δηλαδή μετά την αλλαγή που έγινε στο αμέσως από κάτω διάστημα).

Πρόβλημα 3

Ερώτημα α



Ερώτημα β
Περίπτωση 1 : Αν μας δώσουν τις τιμές των πρώτων έξι φύλλων

Πρέπει να υπολογίζουμε τις τιμές του έβδομου και του όγδοου κόμβου καθώς στην περίπτωση που και οι δύο είναι $+\infty$ (η γενικά μεγάλοι αριθμοί), ο κόμβος MIN θα επιλέξει τον μικρότερο από τους 2 αυτούς πολύ μεγάλους αριθμούς και κατά συνέπεια ο κόμβος τύχης θα πάρει και αυτός μια πολύ μεγάλη τιμή. Επομένως ο κόμβος ρίζα (MAX) θα επιλέξει αυτόν τον κόμβο (καθώς έχει μια μεγάλη τιμή) και όχι το αριστερά κόμβο που έχει την τιμή 1.5 και επιλέχθηκε στο ερώτημα α. Επομένως συμπεραίνουμε ότι η τιμή του MAX μπορεί να μεταβληθεί ανάλογα με τις τιμές τον κόμβων 7 και 8 και κατά συνέπεια πρέπει να τους ελέγξουμε.

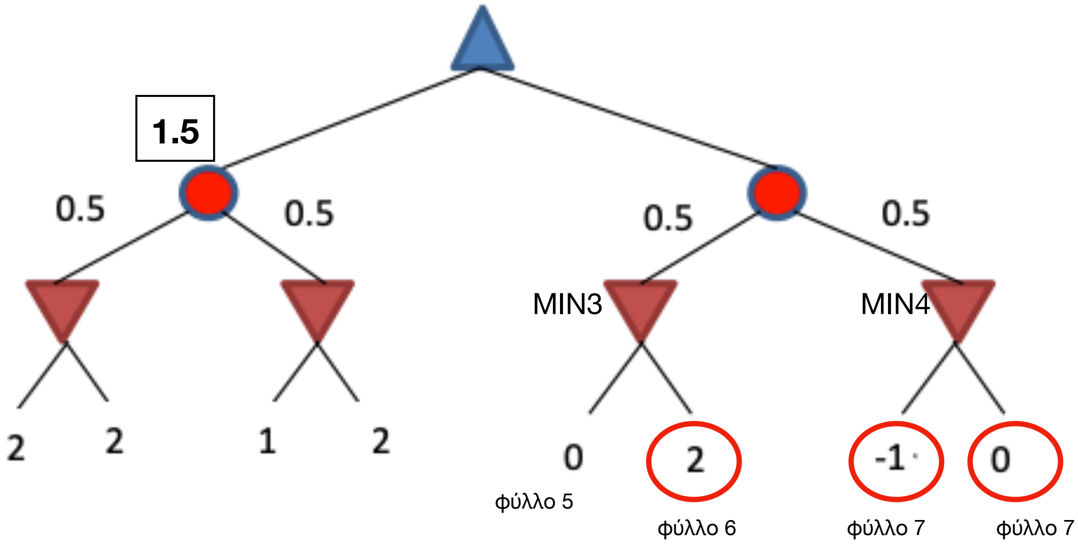
Περίπτωση 2 : Αν μας δώσουν τις τιμές των πρώτων επτά φύλλων

Μπορούμε να μην υπολογίζουμε την τιμή του όγδοου κόμβου. Εάν ο όγδοος κόμβος έχει τιμή μεγαλύτερη από -1 (δηλαδή από -1 μέχρι και $+\infty$) τότε ο κόμβος MIN θα επιλέξει (όπως και στο ερώτημα 1) τον έβδομο κόμβο (με τιμή -1) και κατά συνέπεια οι τιμές των παραπάνω κόμβων (δηλαδή και το τελικό αποτέλεσμα του MAX) θα παραμείνουν ίδιες. Εάν ο όγδοος κόμβος έχει τιμή μικρότερη από -1 (δηλαδή από -1 μέχρι και $-\infty$) τότε ο κόμβος MIN θα επιλέξει τον όγδοο κόμβο (αφού έχει μικρότερη τιμή από τον έβδομο) και κατά συνέπεια η τιμή του παραπάνω κόμβου τύχης θα γίνει ακόμα μικρότερη (από -0.5 που είναι στο ερώτημα α). Αυτό σημαίνει ότι ο κόμβος MAX δε επιλέξει και πάλι τον αριστερό κόμβο (με τιμή 1.5) αφού πλέον ο δεξής έχει ακόμα μικρότερη τιμή.
Επόμενος, ανεξαρτήτως της τιμής του όγδοου κόμβου το αποτέλεσμα του MAX δεν αλλάζει. Άρα δεν χρειάζεται να ελέγξουμε τον όγδοο κόμβο.

Ερώτημα γ

Αρχικά αποτιμούμε τα πρώτα δύο φύλλα και ο πρώτος κόμβος MIN έχει τιμή 2.
Για να βρούμε τις δυνατές τιμές του αριστερού κόμβου τύχης θα ελέγξουμε την καλύτερη και την χειρότερη περίπτωση για τα φύλλα 3 και 4.
Η χειρότερη περίπτωση είναι όταν τουλάχιστον το ένα από τα δύο αυτά φύλλα έχει τιμή -2. Δηλαδή ο κόμβος MIN επιλέγει το φύλλο αυτό και παίρνει την τιμή -2. Αφού έχουμε ήδη αποτιμήσει και τα πρώτα 2 φύλλα, υπολογίζουμε την τιμή του κόμβου τύχης. Ο κόμβος τύχης στην περίπτωση αυτή παίρνει τιμή: 0.5*2 + 0.5*(-2) = 0.
Η καλύτερη περίπτωση είναι όταν και τα δύο φύλλα (3 και 4) έχουν τιμή ίση με 2. Αυτό σημαίνει ότι ο κόμβος MIN επιλέγει ένα από τα 2 αυτά φύλλα και παίρνει τιμή 2. Έτσι ο κόμβος τύχης θα πάρει τιμή ίση με: 0.5*2 + 0.5*2 = 2.
Τα παραπάνω ισχύουν λόγω της υπόθεσης που αναφέρεται στην εκφώνηση ότι οι τιμές των φύλλων βρίσκονται στο διάστημα [-2,2].
Άρα, αφού στην χειρότερη περίπτωση ο κόμβος τύχης παίρνει τιμή 0 και στην καλύτερη παίρνει τιμή 2 οι δυνατές τιμές του αριστερού κόμβου τύχης είναι από 0 μέχρι και 2.

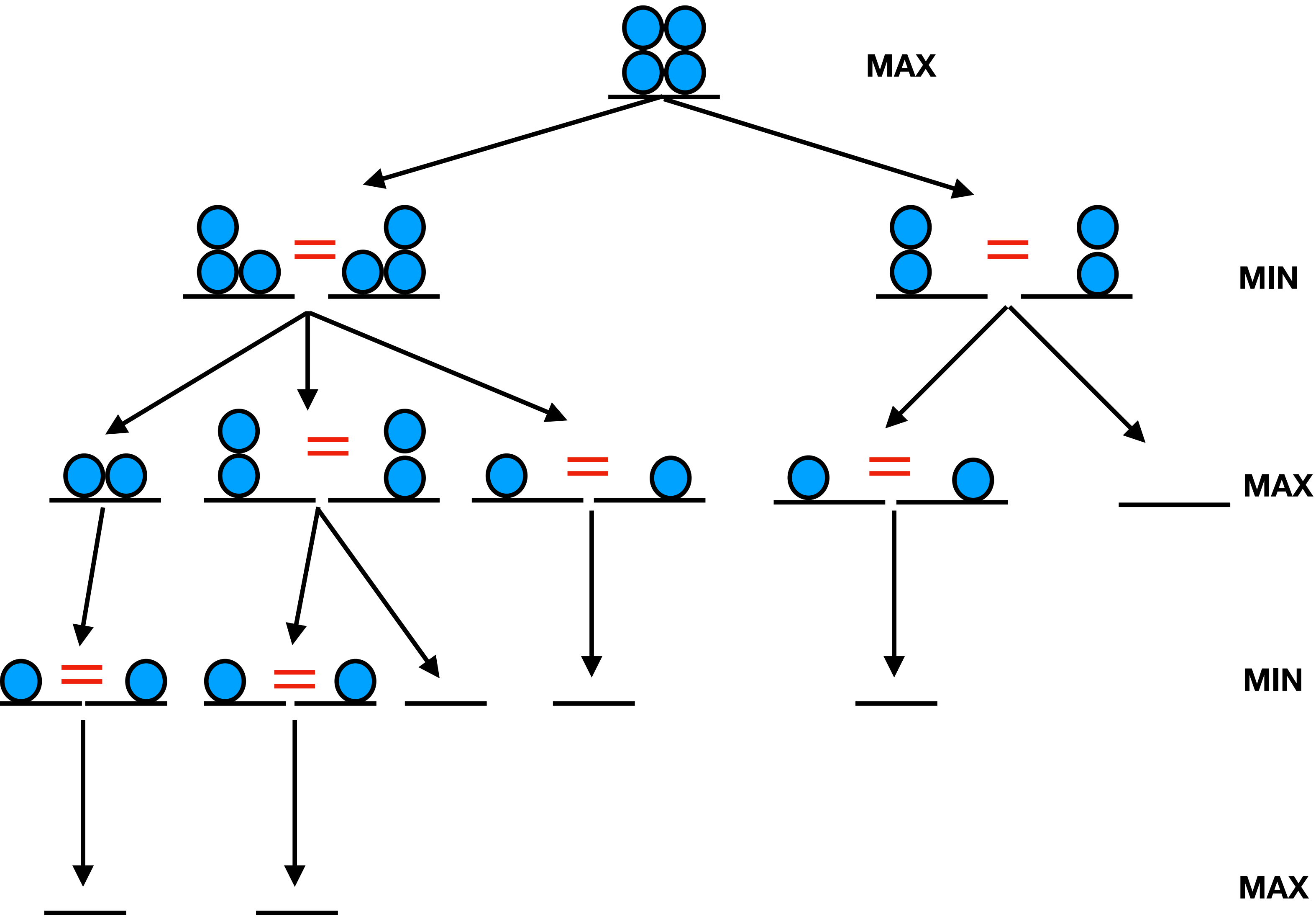
Ερώτημα δ



Επεξήγηση:
Μόλις επισκεφτούμε το φύλλο 5 γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο κόμβος MIN3 είναι το 0 (αφού το φύλλο 5 έχει τιμή 0). Αφού εργαζόμαστε και πάλι στο διάστημα [-2,2], θεωρούμε την καλύτερη περίπτωση για τα φύλλα 7 και 8. Στην καλύτερη περίπτωση (όπως εξηγήθηκε στο ερώτημα γ) ο κόμβος MIN4 θα έχει τιμή 2. Συνδυάζοντας την τιμή του MIN4 με το γεγονός ότι ο MIN3 θα πάρει το πολύ τιμή 0 (σε κάθε περίπτωση), εύκολα συμπεραίνουμε ότι ο δεξιός κόμβος τύχης δεν μπορεί να πάρει μεγαλύτερη τιμή από το 1 (δηλαδή σε κάθε περίπτωση έχει σίγουρα μικρότερη τιμή από 1.5).
Αφού έχουμε ήδη βρει ότι ο αριστερός κόμβος τύχης έχει τιμή 1.5, είναι προφανές ότι ο κόμβος ρίζα θα διαλέξει αυτόν καθώς θα έχει πάντα την μεγαλύτερη τιμή.
Άρα δεν χρειάζεται να αποτιμηθούν οι κόμβοι φύλλο 6 , φύλλο 7 και φύλλο 8 (οι ονομασίες φαίνονται στο σχήμα) καθώς ανεξαρτήτως των τιμών τους, αφού επισκεφτούμε το φύλλο 5, γνωρίζουμε ήδη ότι ο MAX θα επιλέξει τον αριστερό κόμβο τύχης

Πρόβλημα 4

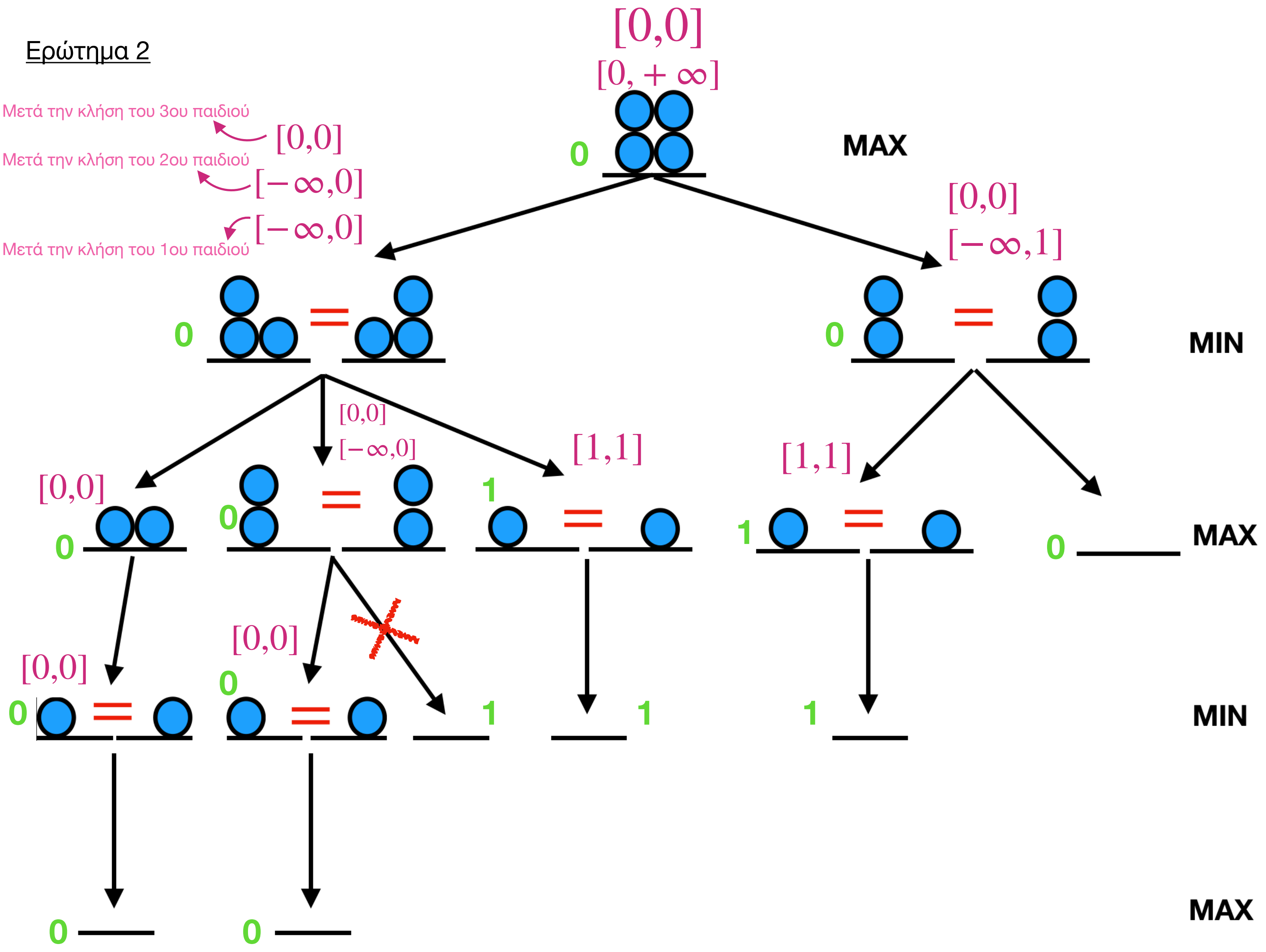
Ερώτημα 1



Παρατηρήσεις

Στο παραπάνω δένδρο οι συμμετρικές καταστάσεις απεικονίζονται στον ίδιο κόμβο. Στους κόμβους που απεικονίζουν 2 συμμετρικές καταστάσεις υπάρχουν και οι δύο καταστάσεις και ανάμεσα τους υπάρχει το σύμβολο = έτσι ώστε να γίνεται κατανοητό ότι πρόκειται για συμμετρικές καταστάσεις.
Η επιλογή αυτή έγινε καθώς 2 συμμετρικές καταστάσεις έχουν ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα καθώς απεικονίζουν ακριβώς την ίδια κατάσταση απλά με αντίθετες στοίβες.

Ερώτημα 2



Παρατηρήσεις:
Στο παραπάνω σχήμα με πράσινο χρώμα φαίνονται οι τιμές του κάθε κόμβου
Με μοβ χρώμα είναι το διάστημα [α,β] του κάθε κόμβου, δηλαδή το ζητούμενο της άσκησης. Σε κάποιους κόμβους υπάρχουν παραπάνω από ένα διαστήματα. Αυτό συμβαίνει έτσι ώστε να δειχθεί η μεταβολή του διαστήματος [α,β] έπειτα από την εκτέλεση του κάθε παιδιού. Σε έναν κόμβο με πολλά διαστήματα το υψηλότερο είναι και το τελικό διάστημα (δηλαδή έπειτα από την εκτέλεση του τελευταίου παιδιού) ενώ το χαμηλότερο είναι το αρχικό (δηλαδή έπειτα από την εκτέλεση του 1ου παιδιού) όπως εξηγείται και στο σχήμα.
Με την εφαρμογή του αλγορίθμου alpha-beta κλαδεύεται ένας μόνο κόμβος ο οποίος φαίνεται στο παραπάνω δένδρο με το σχήμα .

Ερώτημα 3

Αν δύο παίκτες παίζουν αλάνθαστα σημαίνει ότι σε κάθε κατάσταση του παιχνιδιού ο κάθε παίκτης κάνει την καλύτερη δυνατή κίνηση. Στο ερώτημα 2 εκτελέσαμε τον αλγόριθμο alpha-beta υποθέτοντας ότι ο MIN και ο MAX παίζουν βέλτιστα. Με άλλα λόγια ότι είναι αλάνθαστοι και κάθε φορά κάνουν την καλύτερη κίνηση.
Το αποτέλεσμα του αλγόριθμου ήταν ότι νικάει ο MIN, δηλαδή αυτός που έπαιξε δεύτερος.
Άρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν και οι δύο παίκτες παίζουν βέλτιστα (αλάνθαστα), τότε θα νικάει πάντα ο αυτός που παίζει δεύτερος.
Τα παραπάνω ισχύουν για την περίπτωση του παιχνιδιού που έχουμε θεωρήσει, δηλαδή να έχουμε μόνο 2 στοίβες με 2 αντικείμενα.