

# Precalcolo

SUPSI Dipartimento Tecnologie Innovative

Gianni Grasso

12 ottobre 2024

**Classe:** I1B

**Anno scolastico:** 2024/2025

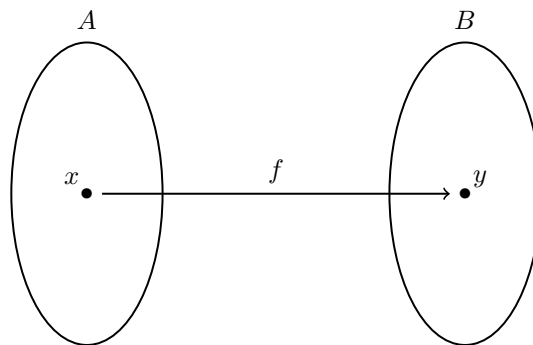
## Indice

<b>1</b>	<b>Funzioni</b>	<b>3</b>
1.1	Introduzione . . . . .	3
1.1.1	Esempi . . . . .	3
1.2	Dominio . . . . .	4
1.2.1	Esempi . . . . .	4
1.3	Insieme immagini . . . . .	5
1.3.1	Esempi . . . . .	5
1.4	Grafico di una funzione . . . . .	6
1.5	Operazioni con le funzioni . . . . .	7
1.5.1	Somma - Sottrazione . . . . .	7
1.5.2	Prodotto . . . . .	7
1.5.3	Divisione . . . . .	7
1.5.4	Composizione di funzioni . . . . .	8
1.6	Funzione inversa . . . . .	8

# 1 Funzioni

## 1.1 Introduzione

Una funzione  $f$  è una legge che associa ad ogni elemento  $x$  di un insieme di partenza  $A$  un **unico** elemento  $y$  di un insieme di arrivo  $B$ .



$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

$x$  è detto elemento di  $A$  associato a  $y$ , elemento di  $B$ .

### 1.1.1 Esempi

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 3x - 2 \\ x = 5 &\Rightarrow y = 3 \cdot 5 - 2 = 13 \\ &\Rightarrow f \text{ è una funzione} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sqrt{x} \\ x = 4 &\Rightarrow y = \sqrt{4} = 2 \\ x = -4 &\Rightarrow y = \sqrt{-4} \\ \sqrt{-4} &\text{ non esiste in } \mathbb{R} \\ &\Rightarrow f \text{ non è una funzione} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \pm x^2 \\ x = 3 &\Rightarrow y = \pm 3^2 = \pm 9 \\ x &= +9 \\ x &= -9 \end{aligned}$$

L'argomento possiede due immagini,  $f$  **non** è una funzione

## 1.2 Dominio

Sia  $f$  una funzione. Il suo dominio  $D(f)$  è l'insieme di tutti gli elementi  $x$  per i quali  $f(x)$  è ben definita.

### 1.2.1 Esempi

1.

$$\begin{aligned} f : D(f) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 1/x \\ D(f) &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f : D(f) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \sqrt{x+2} \Rightarrow D(f) = [-2; +\infty[ \end{aligned}$$

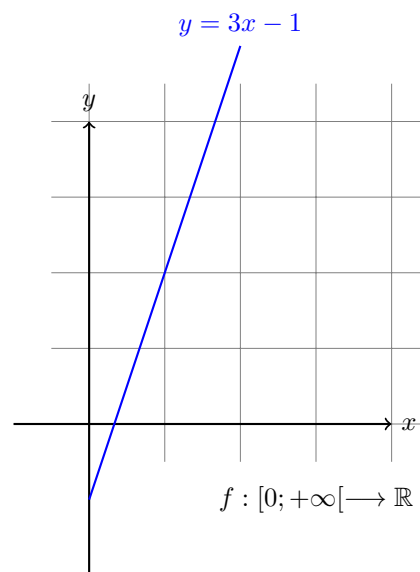
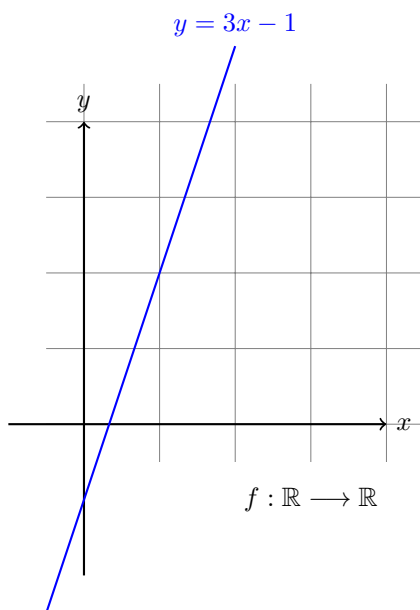
3.

$$\begin{aligned} f : D(f) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow D(f) = ]-2; +\infty[ \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} f : D(f) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = 3x - 1 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

**Nota:** il dominio è l'insieme di partenza più grande possibile, per trovarlo occorre innanzitutto analizzare le limitazioni della funzione, escludere i valori non validi e riportare l'insieme più grande possibile che non comprenda quei valori.



### 1.3 Insieme immagini

Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione. Il suo insieme delle immagini è definito come segue:

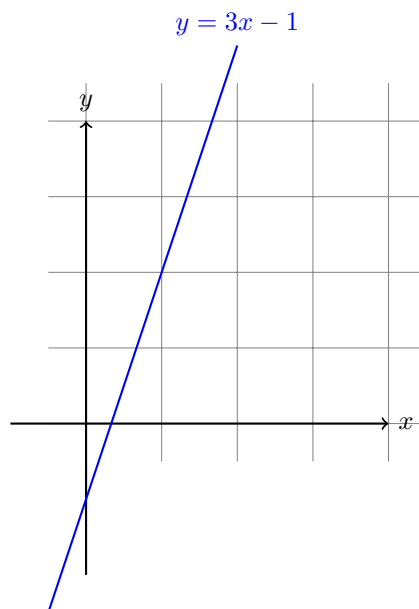
$$Im(f) = \{y = f(x) | x \in A\}$$

Generalmente  $x$  indica gli argomenti e  $y$  le immagini, nello schema visto nell'introduzione  $B$  rappresenta l'insieme delle immagini. Tutti gli elementi di  $A$  sono associati ad un elemento di  $B$ , ma non per forza viceversa.

#### 1.3.1 Esempi

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 3x - 1 \\ &\Rightarrow Im(f) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

In questo caso per trovare  $Im$  guardiamo il grafico.



$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 2 \\ &\Rightarrow Im(g) = [-2; +\infty[ \\ &= [y_v; +\infty[ \end{aligned}$$

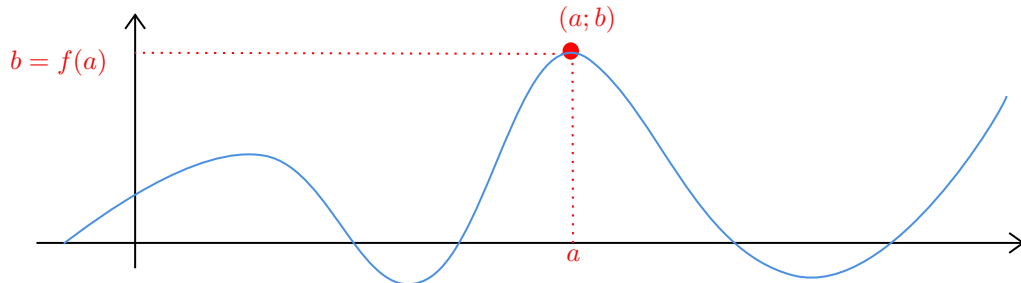
In questo caso trattandosi di una **parabola**, per determinare  $Im(g)$  guardiamo il vertice.

**Nota:** Non esiste una ricetta o una procedura precisa per trovare l' $Im$  di una funzione, non è come per il dominio.

## 1.4 Grafico di una funzione

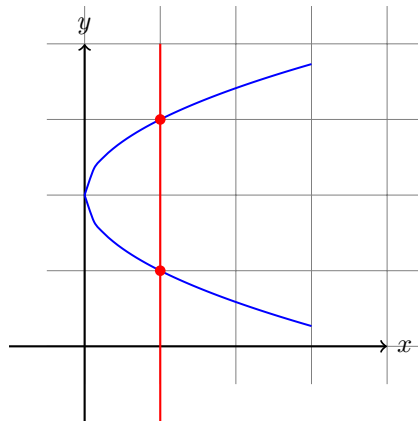
Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione. Il suo grafico  $G(f)$  è l'insieme dei punti

$$G(f) = \{(a; f(a)) | a \in A\}$$



$(a; b) \in G(f) \Leftrightarrow b = f(a)$ , Un punto appartiene al grafico se e solo se  $b = f(a)$

**Osservazione:**



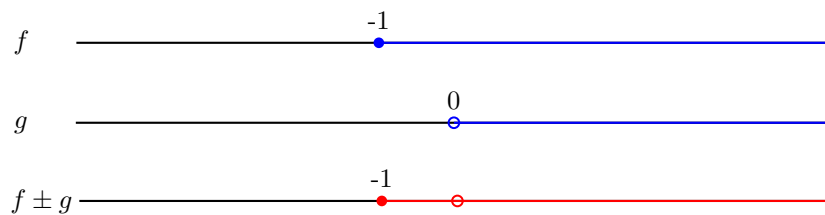
Questo grafico non rappresenta una funzione, per alcuni argomenti ci sono più immagini.

## 1.5 Operazioni con le funzioni

### 1.5.1 Somma - Sottrazione

Esempio:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+1} \Rightarrow D(f) = [-1; +\infty[ \\ g(x) &= \frac{1}{x} \Rightarrow D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ (f \pm g)(x) &= \sqrt{x+1} \pm \frac{1}{x} \\ \Rightarrow D(f \pm g) &= [-1; +\infty[ \setminus \{0\} \\ &= D(f) \cap D(g) \end{aligned}$$



In generale

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x) \\ D(f \pm g) &= D(f) \cap D(g) \end{aligned}$$

### 1.5.2 Prodotto

Esempio:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+1} \Rightarrow D(f) = [-1; +\infty[ \\ g(x) &= x \Rightarrow D(g) = \mathbb{R} \\ \Rightarrow (f \cdot g)(x) &= x \cdot \sqrt{x+1} \\ \Rightarrow D(f \cdot g) &= [-1; +\infty[ \end{aligned}$$

In generale

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ D(f \cdot g) &= D(f) \cap D(g) \end{aligned}$$

### 1.5.3 Divisione

Esempio:

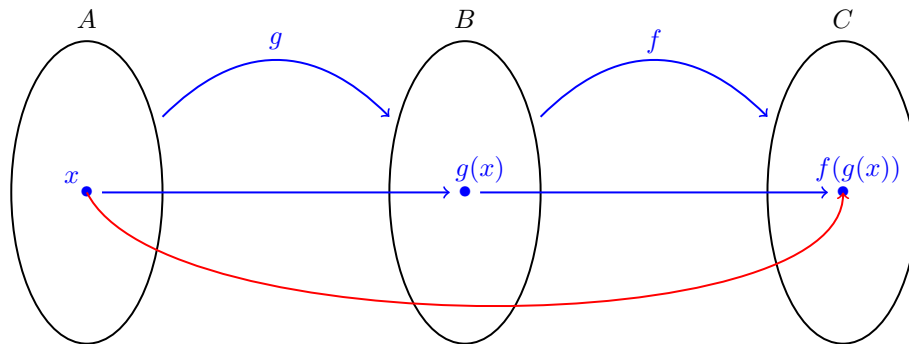
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}^* \\ g(x) &= \sqrt{x+2} \Rightarrow D(g) = [-2; +\infty[ \\ \Rightarrow \frac{f}{g}(x) &= \frac{1/x}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x+2}} \\ D\left(\frac{f}{g}\right) &= ]-2; +\infty[ \setminus \{0\} \end{aligned}$$

In generale

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ D\left(\frac{f}{g}\right) &= D(f) \cap D(g) \setminus \{x \in D(g) \mid g(x) = 0\} \end{aligned}$$

**Nota:** Il dominio non è dato solo dall'intersezione, nell'esempio sopra va anche escluso il -2 che non si può dividere per 0.

### 1.5.4 Composizione di funzioni



Date due funzioni

$$f : B \longrightarrow C$$

$$g : A \longrightarrow B$$

la funzione

la funzione

$$f \circ g : A \longrightarrow C$$

$$x \longrightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

è detta **composizione di f con g** ( $f$  composto  $g$ ).

**Nota:** In generale  $f \circ g \neq g \circ f$ , la composizione di funzioni non è commutativa.

### 1.6 Funzione inversa

Sia  $f : A \rightarrow B$  una funzione