Algebra Lineare

SUPSI Dipartimento Tecnologie Innovative

Gianni Grasso

29 ottobre 2024

Classe: I1B

Anno scolastico: 2024/2025

Indice

1 Vettori

Un vettore serve per rappresentare oggetti multidimensionali, ad esempio per le informazioni di un aereo potremmo avere un vettore con [velocità, direzione, altezza, potenza] o più semplicemente per descrivere una velocità potremmo usare $\vec{v} = [V_x, V_y]$.

1.1 Operazioni fondamentali

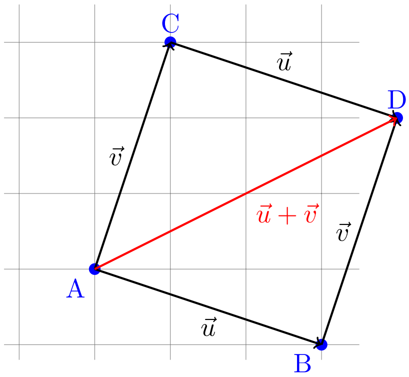
1.1.1 La somma

Quando sommiamo due vettori quello che facciamo effettivamente è la somma dei componenti, è importante che i due vettori abbiano la stessa dimensione, vale quindi:

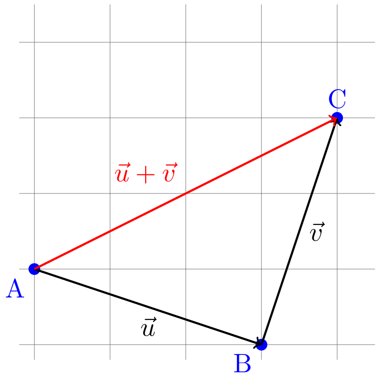
$$x = [x_1, ..., x_n], y = [y_1, ..., y_n] \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x + y = [x_1 + y_1, ..., x_n + y_n]$$

Le modalità di somma dei vettori da un punto di vista geometrico sono principalmente due:

1. Metodo del parallelogramma: $AB + AC = AD$



2. Metodo punta-coda: $AB + BD = AD$



1.1.2 Moltiplicazione scalare

È possibile moltiplicare un qualsiasi vettore con un numero reale k, il prodotto di tale operazione è un vettore kx che ha al suo interno il valore di ogni suo componente moltiplicato per k, ovvero:

$$x = [x_1, ..., x_n] \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \Rightarrow kx = [kx_1, kx_2, ..., kx_n]$$

Ecco un semplice esempio di una moltiplicazione di un vettore con un numero reale:

$$3 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot \quad 3 \\ 3 \cdot (-5) \\ 3 \cdot \quad 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 9 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1.2 Combinazioni lineari

Si chiama combinazione lineare dei vettori $x_1, x_2, ..., x_m$ con coefficienti (numeri scalari) $c_1, c_2, ..., c_m$ il vettore

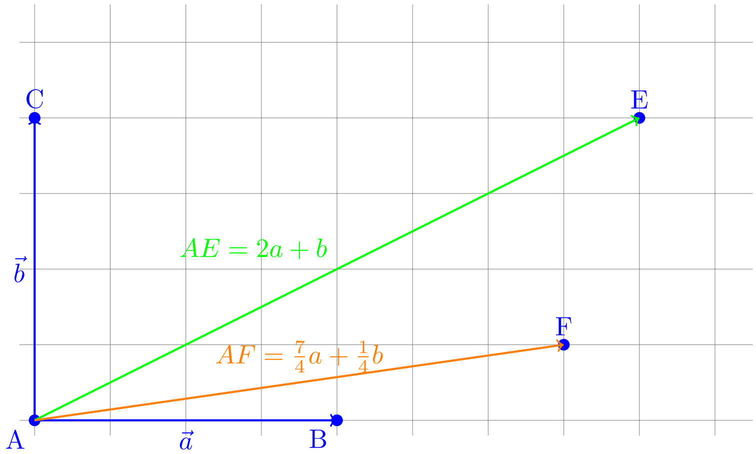
$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m$$

Il risultato di questa somma apparterrà allo spazio vettoriale di partenza.

Facciamo un semplice esempio per rendere meglio l'idea, mettiamo caso che dati due vettori $u = [5, -8, -5]$ e $v = [-6, 5, -6]$, vogliamo trovare la combinazione lineare $2u - 3v$:

$$2\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -31 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ora da un punto di vista geometrico cerchiamo di esprimere AE e AF come combinazioni lineari dei due vettori $\vec{a} = AB$ e $\vec{b} = AC$.



1.2.1 Generare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$

Teorema: se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ sono non paralleli, allora è possibile esprimere qualunque vettore $\vec{w}$ di $\mathbb{R}^2$ come combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ in un unico modo.

Per rappresentare un vettore come combinazione lineare di altri due vettori occorre creare un sistema e separare le componenti. **Esempio:** esprimere $\vec{w} = [6, 4]$ come CL dei vettori $\vec{u} = [3, 1]$ e $\vec{v} = [1, 2]$

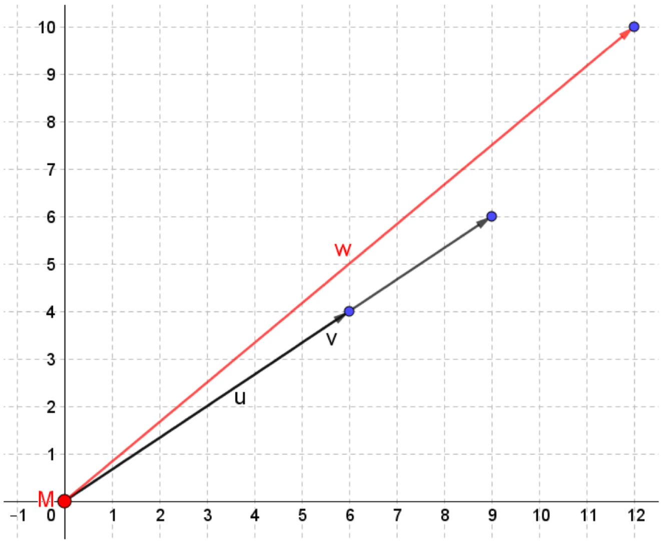
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6 = 3h + k \\ 4 = h + 2k \end{cases}$$

Un sistema del genere avrà una soluzione solo se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono paralleli, in caso contrario $(\vec{u}||\vec{v})$ il risultato del sistema risulterà impossibile. In questo caso, sviluppando il sistema troviamo che $h = \frac{8}{5}, k = \frac{6}{5}$.

Esempio: esiste una combinazione lineare dei vettori $\vec{u} = [6,4]$ e $\vec{v} = [9,6]$ che dia il vettore $\vec{w} = [12,10]$?

$$h\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}6h + 9k = 12\\4h + 6k = 10\end{cases}$$

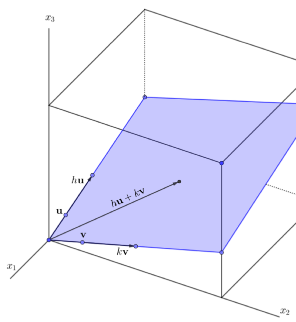
Provando a risolvere il sistema si ottiene $8 = 10$ (il sistema non ammette soluzioni), quindi non è possibile esprimere $\vec{w} = [12,10]$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{u} = [6,4]$ e $\vec{v} = [9,6]$, ciò significa che $\vec{u}$ e $\vec{v}$ **sono paralleli**. In altre parole combinando linearmente questi due vettori si possono ottenere **solo** i vettori che hanno la stessa direzione di $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Graficamente risulta così:



1.2.2 Generare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$

Teorema: se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sono non complanari (non appartengono allo stesso piano e quindi nessuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri due), allora è possibile esprimere qualunque vettore $\vec{z}$ di $\mathbb{R}^3$ come combinazione lineare di $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ in un <u>unico</u> modo.

In questo caso, utilizzando **due** vettori non paralleli, possiamo generare un piano su $\mathbb{R}^3$, tuttavia in questo caso avendo una dimensione 3 e soltanto due vettori, siamo limitati a generare **solo** i vettori che si trovano sul piano dei due vettori.



Per generare tutti i vettori possibili occorrono quindi 3 vettori, possono essere vettori qualsiasi purché non siano complanari, ovvero nessuno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri.

In generale, per generare i vettori di $\mathbb{R}^n$ sono necessari e sufficienti n vettori, purché nessuno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri.

1.2.3 CAS Geogebra

Abbiamo capito quindi che per determinare una combinazione lineare tra più vettori è importante riuscire a creare un sistema di equazioni. Per quanto riguarda però la risoluzione possiamo usare il CAS di Geogebra, tramite lo strumento Risolvi gli passiamo come parametri la lista di equazioni e le variabili di riferimento.

```
Risolvi({2x+5y=8, 4x+5y=6},{x,y})
```
$\rightarrow \{\{x = -1, y = 2\}\}$

Il sistema ammette una sola soluzione

```
Risolvi({2x+5y=8, 2x+5y=6},{x,y})
```
$\rightarrow \{\}$

Il sistema non ammette soluzioni

```
Risolvi({2x+5y=8, 4x+10y=16},{x,y})
```
$\rightarrow \left\{\left\{x = \frac{-5}{2}\, y + 4, y = y\right\}\right\}$

Il sistema ammette infinite soluzioni

1.3 Dipendenza e indipendenza lineare

Si dice che i vettori $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente indipendenti (LI)** se nessuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri, altrimenti si dicono **linearmente dipendenti (LD)**.

Possiamo dire quindi che una **base** di $\mathbb{R}^n$ è formata da n vettori **linealmente indipendenti**. Una **base** è una lista di vettori LI che generano $\mathbb{R}^n$.

Teorema. I vettori $x_1...x_m \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente indipendenti** se e solo se l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo 0 è la combinazione banale:

$$0x_1 + ... + 0x_m = 0$$

In questo modo occorre risolvere un solo sistema lineare **omogeneo** (con i termini noti tutti nulli).

Se ad esempio vogliamo stabilire se i vettori $a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, b\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, c\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ sono LI o LD, diventa:

$$h\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + j\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

1.3.1 Interpretare i risultati

Una volta che abbiamo il sistema, possiamo inserirlo in Geogebra utilizzando la funzione **Risolvi** con la sintassi vista nel capitolo scorso. Se l'unico valore possibile dei coefficienti è 0 (ammette **solo** la soluzione banale), allora i vettori sono LI.

```
Risolvi({h+4j+7k=0,2h+5j+8k=0,3h+6j+8k=0},{h,j,k})
→ {{h = 0, j = 0, k = 0}}
```

In caso contrario, significa che i vettori sono LD.

```
Risolvi({h+4j+7k=0,2h+5j+8k=0,3h+6j+9k=0},{h,j,k}
→ {{h = k, j = −2 k, k = k}}
```

Facciamo un esempio più pratico per notare qualche altro dettaglio. Proviamo a stabilire se i vettori $a\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, b\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}, c\begin{pmatrix}9\\10\\11\\12\end{pmatrix}, d\begin{pmatrix}13\\14\\15\\16\end{pmatrix}$ sono LI o LD.

```
Risolvi({h+5j+9k+13l=0,2h+6j+10k+14l=0,3h+7j+11k+15l=0,4h+8j+12k+16l=0},{h,j,k,l})
→ {{h = k + 2 l, j = −2 k − 3 l, k = k, l = l}}
```

Notiamo per prima cosa che i vettori sono LD. Inoltre ci sono due variabili libere ($k = k, l = l$), ciò significa che ci sono solo 2 vettori LI ($4 - 2 = 2$), per verificare quali dovremmo vedere i singoli casi. Infine sappiamo che a, b, c, d generano un **sottospazio** di $\mathbb{R}^4$ di **dimensione** 2.

In generale, k vettori LI non nulli di $\mathbb{R}^n$ generano un **sottospazio** di **dimensione** k.

2 Geometria vettoriale

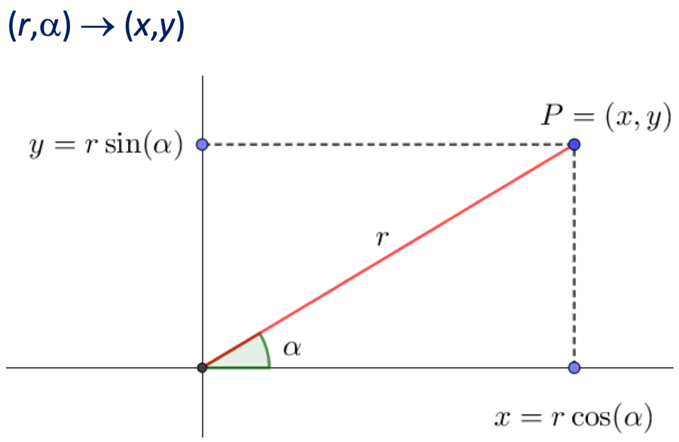
2.1 Coordinate polari

- Coordinate cartesiane, $P = (x, y)$ (ascissa, ordinata)
- Coordinate polari, $P = (r, \alpha)$ (norma, angolo)

Per passare da coordinate polari a coordinate cartesiane si utilizzano rispettivamente $cos(\alpha)$ e $sin(\alpha)$. Vale dunque:

$$\begin{cases} x = r\ cos(\alpha) \\ y = r\ sin(\alpha) \end{cases}$$

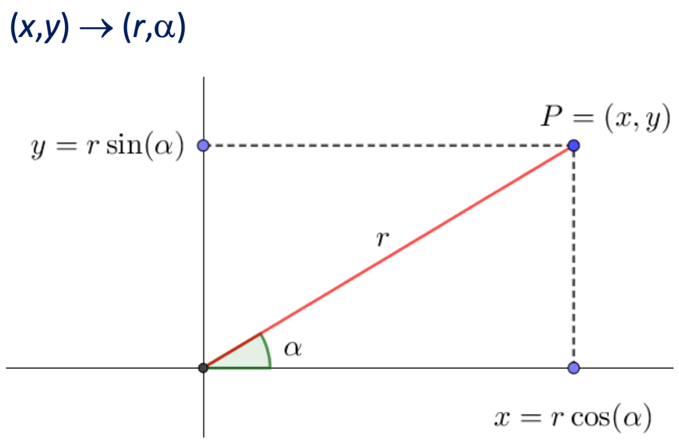
che graficamente appare:



Per passare invece da coordinate cartesiane a coordinate polari dobbiamo stabilire r e α. Abbiiamo quindi:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \begin{cases} cos^{-1}(\frac{x}{r}) & y \geq 0 \\ -cos^{-1}(\frac{x}{r}) & y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

che graficamente appare:



2.2 Il prodotto scalare

2.2.1 norma

Dato il vettore x si chiama prodotto scalare di x per se stesso e si indica $x \cdot x$ il numero reale

$$\mathbb{R}^2\colon\ x \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$$

dunque la norma è

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

questo vale in qualsiasi dimensione ($\mathbb{R}^n$).

La norma è un valore sempre maggiore o, nel caso il vettore fosse nullo, uguale a zero. Inoltre possiede due proprietà interessanti:

- **disuguaglianza triangolare**, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|x\|$
- **omogeneità**, $\|hx\| = |h| + \|x\|$

La somma di due norme non è quindi uguale alla norma contenente la somma dei due vettori (disuguaglianza triangolare).

2.2.2 I versori

I versori sono vettori di norma 1, per fare diventare un vettore generico $\|x\|$ di norma 1 si può fare

$$\frac{1}{\|x\|}x \qquad \text{questo vettore ha norma 1}$$

Allo stesso modo se vogliamo farlo diventare, per esempio, di norma 7 possiamo scriverlo come

$$\frac{7}{\|x\|}x \qquad \text{questo vettore ha norma 7}$$

2.2.3 Prodotto scalare x·y

Dati i vettori $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, si chiama prodotto scalare di x e y, e si indica $x \cdot y$, il numero reale

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

Di base se prendiamo due vettori tramite l'agolo che generano possiamo determinare:

- se $\alpha > 90°$ il prodotto scalare è negativo
- se $\alpha = 90°$ il prodotto scalare è 0
- se $\alpha < 90°$ il prodotto scalare è positivo

2.2.4 Teorema del prodotto scalare

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \, cos(\alpha)$$

dalla quale possiamo ricavare

$$cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}$$

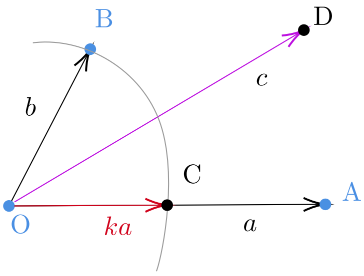
e quindi

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}\right)$$

Nota: $\alpha rad = \frac{\pi}{180}\alpha°$

2.2.5 Applicazioni

- **Vettore bisecante:** Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si vuole costruire un vettore $\vec{c}$ che divide l'angolo tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$ in due angoli uguali:



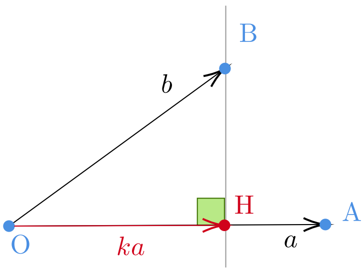
  1. Si costruisce un vettore ka che abbia la stessa norma di b
  2. Un vettore che biseca l'angolo tra a e b, ad esempio $ka + b$

  Esempio $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

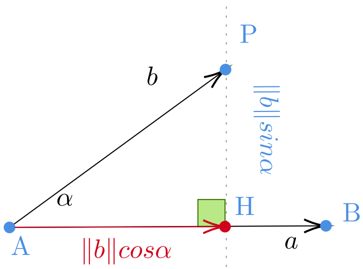
$$\|a\| = 7, \|b\| = 3 \Rightarrow \frac{1}{7}a \text{ ha norma } 1 \Rightarrow \frac{3}{7}a \text{ ha norma } 3$$

$$\frac{3}{7}a + b = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 24/7 \\ 12/7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/7 \\ 31/7 \\ 26/7 \end{bmatrix}$$

- **Proiezione vettore su vettore:** $pro(b, a) = \frac{b \cdot a}{a \cdot a}a$ dove $k = \frac{b \cdot a}{a \cdot a}$



- **Proiezione punto su retta:** $H = A + \vec{AH} = A + pro(b, a)$, restituisce un punto



2.3 Il prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale è un operazione che esiste solo in $\mathbb{R}^3$, dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tramite il prodotto vettoriale è possibile definire un vettore $\vec{c}$ ortogonale agli altri due. Di conseguenza se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono LI si costruisce una base di $\mathbb{R}^3$.

Dati due vettori $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, si definisce prodotto vettoriale tra i due, e si scrive $u \times v$, il vettore

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{bmatrix}$$

Nota: il prodotto vettoriale non è commutativo, $e_1 \times e_2 \neq e_2 \times e_1$

Ecco alcune proprietà:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

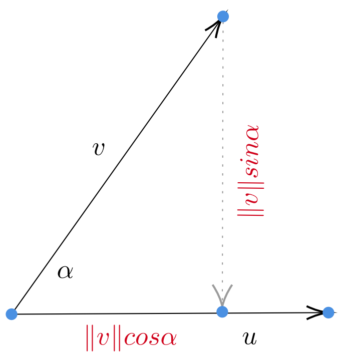
$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

- Se $u \times v > 0$ l'orientamento è anti orario
- Se $u \times v < 0$ l'orientamento è orario

2.3.1 Teorema

Se $u, v \in \mathbb{R}^3$ allora

$$\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \, sin(\alpha)$$



2.3.2 Area del parallelogramma

- $\|v\| \, sin(\alpha)$ è l'altezza del parallelogramma generato da u e v
- $\|u \times v\|$ è l'area del parallelogramma generato da u e v
- $\frac{1}{2} \|u \times v\|$ è l'area del triangolo generato da u e v

$$sin(\alpha) = \frac{\|u \times v\|}{\|u\| \, \|v\|}$$

e quindi

$$\alpha = sin^{-1} \left(\frac{\|u \times v\|}{\|u\| \, \|v\|} \right)$$

2.4 Il prodotto misto

Il prodotto misto si fa tra 3 vettori e ritorna uno scalare (un numero) e non un vettore.

$$(a \times b) \cdot c$$

che è uguale al **volume** del parallelepipedo generato da a, b, c.

- $(a \times b) \cdot c > 0 \Rightarrow a, b, c$ è una terna destrorsa
- $(a \times b) \cdot c < 0 \Rightarrow a, b, c$ è una terna sinistrorsa
- $(a \times b) \cdot c = 0 \Rightarrow a, b, c$ sono linearmente dipendenti

2.4.1 Proprietà

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ &\mathbf{b} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \\ &\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &k\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \times k\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot k\mathbf{c} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ &(ha) \times (jb) \cdot (kc) = (hjk)(a \times b \cdot c) \end{aligned}$$

2.4.2 Allineamento di 3 punti

- **Metodo 1:** i punti A, B, C sono allineati se e solo se $AC = kAB$
- **Metodo 2 (in $\mathbb{R}^3$):** i punti A, B, C sono allineati se e solo se $AB \times AC = 0$

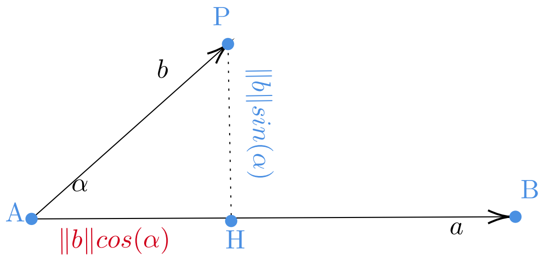
2.4.3 Complanarità di 4 punti

$$(AB \times AC) \cdot AD = 0$$

se $n = AB \times AC$ dà un vettore ortogonale al piano ABC, il punto D invece appartiene a questo piano se e solo se AD è ortogonale a n, ovvero se $n \cdot AD$ è nullo.

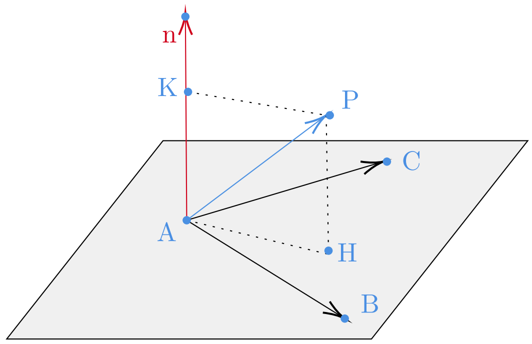
2.4.4 Distanze

- Dal punto P al punto A: $\sqrt{AP \cdot AP}$
- Dal punto P alla retta AB: $\frac{|AB \times AP|}{\|AB\|}$



- Dal punto P al piano ABC: $\frac{|AB \times AC \cdot AP|}{\|AB \times AC\|}$

2.4.5 Proiezione di un punto su un piano



1. $n = AB \times AC$
2. $AK =$ proiezione di APsu n
3. $H = P + PH = P + KA$

Nota: possiamo usare qualsiasi vettore parallelo a n.

2.5 La retta

2.5.1 Equazioni parametriche

Dato un punto $A = (X_0, y_0, z_0)$ e un vettore direzione $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ non nullo, la retta r passante per A e parallela a v ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Le equazioni parametriche di una retta sono infinite, basta prendere un punto qualsiasi nella retta e un vettore direzione parallelo.

2.5.2 Posizioni reciproche di due rette in $\mathbb{R}^3$

Due rette $r : A, u$ e $s : B, v$ nello spazio possono essere:

- **Coincidenti**
  - Geometricamente

$$\begin{aligned} u \parallel v \text{ e } A \in s \\ \Leftrightarrow & B \in r \\ \Leftrightarrow & \vec{AB} \parallel \vec{u} \\ \Leftrightarrow & \vec{AB} \parallel \vec{v} \end{aligned}$$

  - Algebricamente

$$u \times v = \vec{0}$$
$$\text{e}$$
$$\vec{u} \times \vec{AB} = \vec{0}$$
$$(\Leftrightarrow \vec{v} \times \vec{AB} = \vec{0})$$

- **Parallele**
  - Geometricamente

$$\begin{aligned} u \parallel v \text{ e } A &\notin s \\ &\Leftrightarrow B \notin r \\ &\Leftrightarrow \vec{AB} \nparallel \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \vec{AB} \nparallel \vec{v} \end{aligned}$$

  - Algebricamente

$$\begin{gathered} u \times v = \vec{0} \\ \text{e} \\ \vec{u} \times \vec{AB} \neq \vec{0} \\ (\Leftrightarrow \vec{v} \times \vec{AB} \neq \vec{0}) \end{gathered}$$

- **Incidenti**
  - Geometricamente

$$u \nparallel v \text{ e } r \cap s = \{p\}$$

  - Algebricamente

$$\begin{gathered} u \times v \neq \vec{0} \\ \text{e} \\ \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{AP} = 0 \\ (\Leftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{BP} = 0) \end{gathered}$$

- **Sghembe**
  - Geometricamente

$$u \nparallel v \text{ e } r \cap s = \{\}$$

  - Algebricamente

$$\begin{gathered} u \times v \neq \vec{0} \\ \text{e} \\ \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{AB} \neq \vec{0} \end{gathered}$$