

Algebra Lineare

SUPSI Dipartimento Tecnologie Innovative

Gianni Grasso

11 ottobre 2024

Classe: I1B

Anno scolastico: 2024/2025

Indice

1	Vettori	3
1.1	Operazioni fondamentali	3
1.1.1	La somma	3
1.1.2	Moltiplicazione scalare	3
1.2	Combinazioni lineari	4
1.2.1	Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^2	4
1.2.2	Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^3	5
1.2.3	CAS Geogebra	6
1.3	Dipendenza e indipendenza lineare	7
1.3.1	Interpretare i risultati	7
2	Geometria vettoriale	8
2.1	Coordinate polari	8
2.2	Il prodotto scalare	9
2.2.1	norma	9
2.2.2	I versori	9
2.2.3	Prodotto scalare $x \cdot y$	9

1 Vettori

Un vettore serve per rappresentare oggetti multidimensionali, ad esempio per le informazioni di un aereo potremmo avere un vettore con [velocità, direzione, altezza, potenza] o più semplicemente per descrivere una velocità potremmo usare $\vec{v} = [V_x, V_y]$.

1.1 Operazioni fondamentali

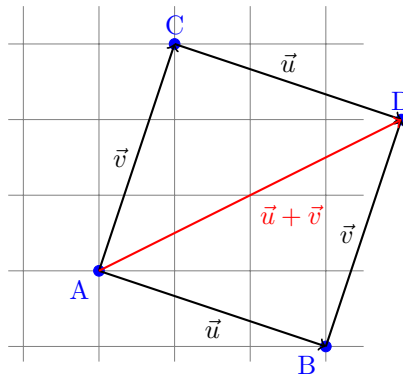
1.1.1 La somma

Quando sommiamo due vettori quello che facciamo effettivamente è la somma dei componenti, è importante che i due vettori abbiano la stessa dimensione, vale quindi:

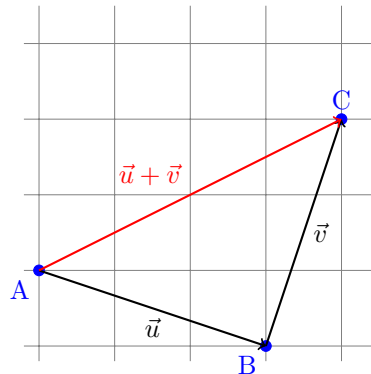
$$x = [x_1, \dots, x_n], y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x + y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$$

Le modalità di somma dei vettori da un punto di vista geometrico sono principalmente due:

1. Metodo del parallelogramma: $AB + AC = AD$



2. Metodo punta-coda: $AB + BD = AD$



1.1.2 Moltiplicazione scalare

È possibile moltiplicare un qualsiasi vettore con un numero reale k , il prodotto di tale operazione è un vettore kx che ha al suo interno il valore di ogni suo componente moltiplicato per k , ovvero:

$$x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \Rightarrow kx = [kx_1, kx_2, \dots, kx_n]$$

Ecco un semplice esempio di una moltiplicazione di un vettore con un numero reale:

$$3 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-5) \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 9 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1.2 Combinazioni lineari

Si chiama combinazione lineare dei vettori x_1, x_2, \dots, x_m con coefficienti (numeri scalari) c_1, c_2, \dots, c_m il vettore

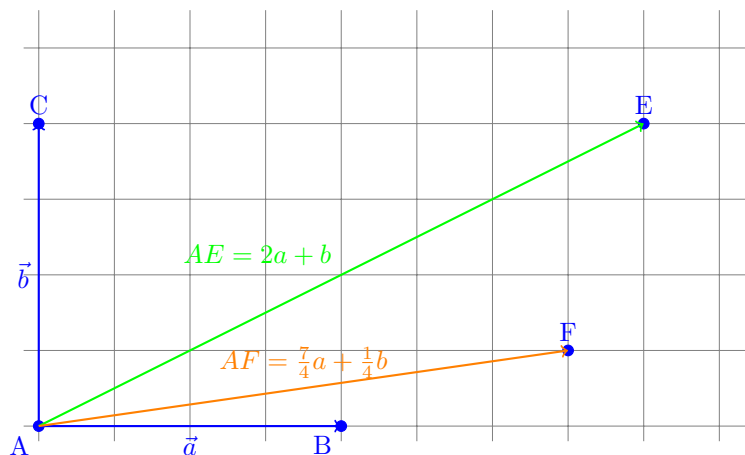
$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m$$

Il risultato di questa somma apparterrà allo spazio vettoriale di partenza.

Facciamo un semplice esempio per rendere meglio l'idea, mettiamo caso che dati due vettori $u = [5, -8, -5]$ e $v = [-6, 5, -6]$, vogliamo trovare la combinazione lineare $2u - 3v$:

$$2 \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -31 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ora da un punto di vista geometrico cerchiamo di esprimere \vec{AE} e \vec{AF} come combinazioni lineari dei due vettori $\vec{a} = \vec{AB}$ e $\vec{b} = \vec{AC}$.



1.2.1 Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^2

Teorema: se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ sono non paralleli, allora è possibile esprimere qualunque vettore \vec{w} di \mathbb{R}^2 come combinazione lineare di \vec{u} e \vec{v} in un unico modo.

Per rappresentare un vettore come combinazione lineare di altri due vettori occorre creare un sistema e separare le componenti. **Esempio:** esprimere $\vec{w} = [6, 4]$ come CL dei vettori $\vec{u} = [3, 1]$ e $\vec{v} = [1, 2]$

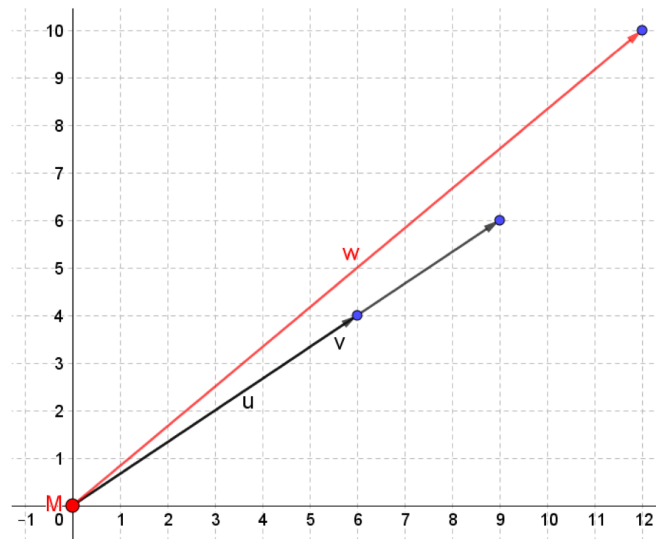
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6 = 3h + k \\ 4 = h + 2k \end{cases}$$

Un sistema del genere avrà una soluzione solo se \vec{u} e \vec{v} non sono paralleli, in caso contrario ($\vec{u} \parallel \vec{v}$) il risultato del sistema risulterà impossibile. In questo caso, sviluppando il sistema troviamo che $h = \frac{8}{5}, k = \frac{6}{5}$.

Esempio: esiste una combinazione lineare dei vettori $\vec{u} = [6, 4]$ e $\vec{v} = [9, 6]$ che dia il vettore $\vec{w} = [12, 10]$?

$$h \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6h + 9k = 12 \\ 4h + 6k = 10 \end{cases}$$

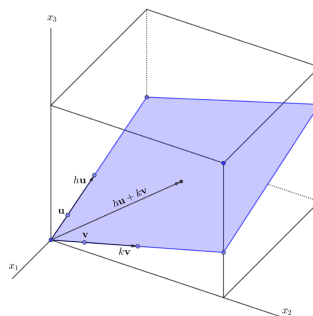
Provando a risolvere il sistema si ottiene $8 = 10$ (il sistema non ammette soluzioni), quindi non è possibile esprimere $\vec{w} = [12, 10]$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{u} = [6, 4]$ e $\vec{v} = [9, 6]$, ciò significa che \vec{u} e \vec{v} **sono paralleli**. In altre parole combinando linearmente questi due vettori si possono ottenere **solo** i vettori che hanno la stessa direzione di \vec{u} e \vec{v} . Graficamente risulta così:



1.2.2 Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^3

Teorema: se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sono non complanari (non appartengono allo stesso piano e quindi nessuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri due), allora è possibile esprimere qualunque vettore \vec{z} di \mathbb{R}^3 come combinazione lineare di $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ in un unico modo.

In questo caso, utilizzando **due** vettori non paralleli, possiamo generare un piano su \mathbb{R}^3 , tuttavia in questo caso avendo una dimensione 3 e soltanto due vettori, siamo limitati a generare **solo** i vettori che si trovano sul piano dei due vettori.



Per generare tutti i vettori possibili occorrono quindi 3 vettori, possono essere vettori qualsiasi purché non siano complanari, ovvero nessuno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri.

In generale, per generare i vettori di \mathbb{R}^n sono necessari e sufficienti n vettori, purché nessuno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri.

1.2.3 CAS Geogebra

Abbiamo capito quindi che per determinare una combinazione lineare tra più vettori è importante riuscire a creare un sistema di equazioni. Per quanto riguarda però la risoluzione possiamo usare il CAS di Geogebra, tramite lo strumento Risolvi gli passiamo come parametri la lista di equazioni e le variabili di riferimento.

Risolvi($\{2x+5y=8, 4x+5y=6\}, \{x,y\}$)
 $\rightarrow \{\{x = -1, y = 2\}\}$

Il sistema ammette una sola soluzione

Risolvi($\{2x+5y=8, 2x+5y=6\}, \{x,y\}$)
 $\rightarrow \{\}$

Il sistema non ammette soluzioni

Risolvi($\{2x+5y=8, 4x+10y=16\}, \{x,y\}$)
 $\rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{-5}{2} y + 4, y = y \right\} \right\}$

Il sistema ammette infinite soluzioni

1.3 Dipendenza e indipendenza lineare

Si dice che i vettori $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente indipendenti (LI)** se nessuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri, altrimenti si dicono **linearmente dipendenti (LD)**.

Possiamo dire quindi che una **base** di \mathbb{R}^n è formata da n vettori **linearmente indipendenti**. Una **base** è una lista di vettori LI che generano \mathbb{R}^n .

Teorema. I vettori $x_1 \dots x_m \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente indipendenti** se e solo se l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo 0 è la combinazione banale:

$$0x_1 + \dots + 0x_m = 0$$

In questo modo occorre risolvere un solo sistema lineare **omogeneo** (con i termini noti tutti nulli).

Se ad esempio vogliamo stabilire se i vettori $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, c \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ sono LI o LD, diventa:

$$h \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.3.1 Interpretare i risultati

Una volta che abbiamo il sistema, possiamo inserirlo in Geogebra utilizzando la funzione **Risolvi** con la sintassi vista nel capitolo scorso. Se l'unico valore possibile dei coefficienti è 0 (ammette **solo** la soluzione banale), allora i vettori sono LI.

```
Risolvi({h+4j+7k=0,2h+5j+8k=0,3h+6j+8k=0},{h,j,k})
→ {{h=0,j=0,k=0}}
```

In caso contrario, significa che i vettori sono LD.

```
Risolvi({h+4j+7k=0,2h+5j+8k=0,3h+6j+9k=0},{h,j,k})
→ {{h=k,j=-2k,k=k}}
```

Facciamo un esempio più pratico per notare qualche altro dettaglio. Proviamo a stabilire se i

vettori $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, c \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, d \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$ sono LI o LD.

```
Risolvi({h+5j+9k+13l=0,2h+6j+10k+14l=0,3h+7j+11k+15l=0,4h+8j+12k+16l=0},{h,j,k,l})
→ {{h=k+2l,j=-2k-3l,k=k,l=l}}
```

Notiamo per prima cosa che i vettori sono LD. Inoltre ci sono due variabili libere ($k = k, l = l$), ciò significa che ci sono solo 2 vettori LI ($4 - 2 = 2$), per verificare quali dovremmo vedere i singoli casi. Infine sappiamo che a, b, c, d generano un **sottospazio** di \mathbb{R}^4 di **dimensione 2**.

In generale, k vettori LI non nulli di \mathbb{R}^n generano un **sottospazio** di **dimensione** k .

2 Geometria vettoriale

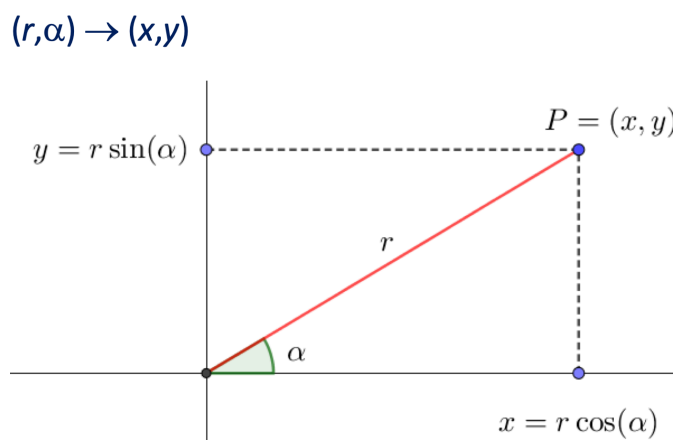
2.1 Coordinate polari

- Coordinate cartesiane, $P = (x, y)$ (ascissa, ordinata)
- Coordinate polari, $P = (r, \alpha)$ (norma, angolo)

Per passare da coordinate polari a coordinate cartesiane si utilizzano rispettivamente $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$. Vale dunque:

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha) \\ y = r \sin(\alpha) \end{cases}$$

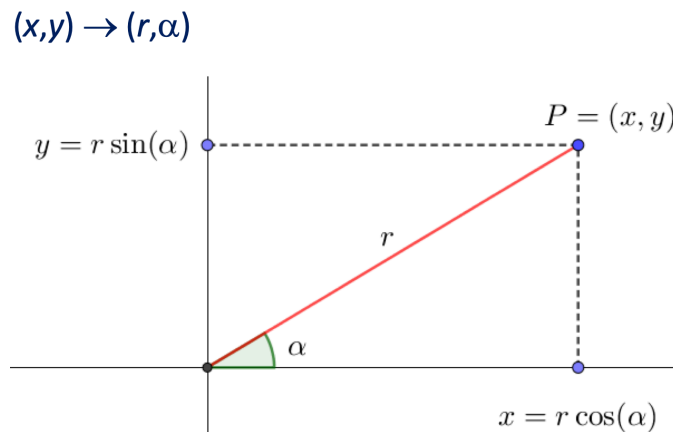
che graficamente appare:



Per passare invece da coordinate cartesiane a coordinate polari dobbiamo stabilire r e α . Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \begin{cases} \cos^{-1}(\frac{x}{r}) & y \geq 0 \\ -\cos^{-1}(\frac{x}{r}) & y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

che graficamente appare:



2.2 Il prodotto scalare

2.2.1 norma

Dato il vettore x si chiama prodotto scalare di x per se stesso e si indica $x \cdot x$ il numero reale

$$\mathbb{R}^2: x \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$$

dunque la norma è

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

questo vale in qualsiasi dimensione (\mathbb{R}^n).

La norma è un valore sempre maggiore o, nel caso il vettore fosse nullo, uguale a zero. Inoltre possiede due proprietà interessanti:

- **disuguaglianza triangolare**, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- **omogeneità**, $\|hx\| = |h| \|x\|$

La somma di due norme non è quindi uguale alla norma contenente la somma dei due vettori (disuguaglianza triangolare).

2.2.2 I versori

I versori sono vettori di norma 1, per fare diventare un vettore generico $\|x\|$ di norma 1 si può fare

$$\frac{1}{\|x\|}x \quad \text{questo vettore ha norma 1}$$

Allo stesso modo se vogliamo farlo diventare, per esempio, di norma 7 possiamo scriverlo come

$$\frac{7}{\|x\|}x \quad \text{questo vettore ha norma 7}$$

2.2.3 Prodotto scalare $x \cdot y$

Dati i vettori $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, si chiama prodotto scalare di x e y , e si indica $x \cdot y$, il numero reale

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Di base se prendiamo due vettori tramite l'angolo che generano possiamo determinare:

- se $\alpha > 90^\circ$ il prodotto scalare è negativo
- se $\alpha = 90^\circ$ il prodotto scalare è 0
- se $\alpha < 90^\circ$ il prodotto scalare è positivo

Teorema del prodotto scalare

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos(\alpha)$$

dalla quale possiamo ricavare

$$\cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

e quindi

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \right)$$

Nota: $rad = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$