

# Algebra Lineare

SUPSI Dipartimento Tecnologie Innovative

Gianni Grasso

3 ottobre 2024

**Classe:** I1B

**Anno scolastico:** 2024/2025

## Indice

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Vettori</b>                                       | <b>3</b> |
| 1.1      | Operazioni fondamentali . . . . .                    | 3        |
| 1.1.1    | La somma . . . . .                                   | 3        |
| 1.1.2    | Moltiplicazione scalare . . . . .                    | 3        |
| 1.2      | Combinazioni lineari . . . . .                       | 4        |
| 1.2.1    | Generare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$ . . . . . | 4        |
| 1.2.2    | Generare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ . . . . . | 5        |
| 1.2.3    | CAS Geogebra . . . . .                               | 6        |
| 1.3      | Dipendenza e indipendenza lineare . . . . .          | 7        |
| 1.3.1    | Interpretare i risultati . . . . .                   | 7        |

# 1 Vettori

Un vettore serve per rappresentare oggetti multidimensionali, ad esempio per le informazioni di un aereo potremmo avere un vettore con [velocità, direzione, altezza, potenza] o più semplicemente per descrivere una velocità potremmo usare  $\vec{v} = [V_x, V_y]$ .

## 1.1 Operazioni fondamentali

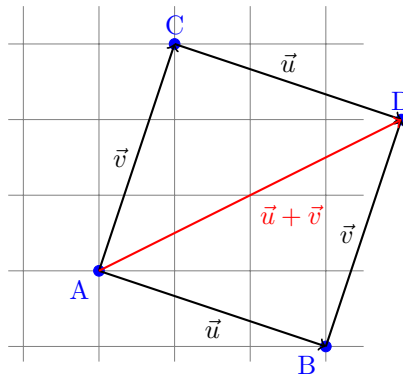
### 1.1.1 La somma

Quando sommiamo due vettori quello che facciamo effettivamente è la somma dei componenti, è importante che i due vettori abbiano la stessa dimensione, vale quindi:

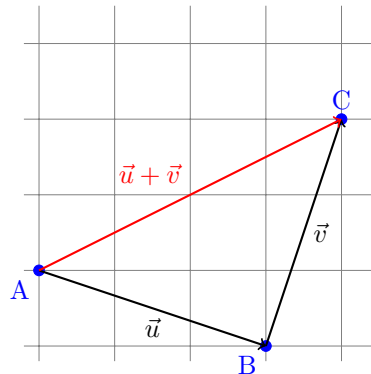
$$x = [x_1, \dots, x_n], y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x + y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$$

Le modalità di somma dei vettori da un punto di vista geometrico sono principalmente due:

1. Metodo del parallelogramma:  $AB + AC = AD$



2. Metodo punta-coda:  $AB + BD = AD$



### 1.1.2 Moltiplicazione scalare

È possibile moltiplicare un qualsiasi vettore con un numero reale  $k$ , il prodotto di tale operazione è un vettore  $kx$  che ha al suo interno il valore di ogni suo componente moltiplicato per  $k$ , ovvero:

$$x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \Rightarrow kx = [kx_1, kx_2, \dots, kx_n]$$

Ecco un semplice esempio di una moltiplicazione di un vettore con un numero reale:

$$3 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-5) \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 9 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

## 1.2 Combinazioni lineari

Si chiama combinazione lineare dei vettori  $x_1, x_2, \dots, x_m$  con coefficienti (numeri scalari)  $c_1, c_2, \dots, c_m$  il vettore

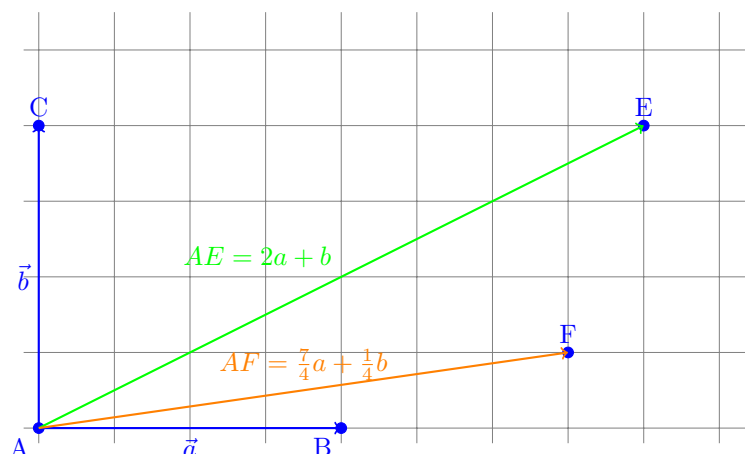
$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m$$

Il risultato di questa somma apparterrà allo spazio vettoriale di partenza.

Facciamo un semplice esempio per rendere meglio l'idea, mettiamo caso che dati due vettori  $u = [5, -8, -5]$  e  $v = [-6, 5, -6]$ , vogliamo trovare la combinazione lineare  $2u - 3v$ :

$$2 \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -31 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ora da un punto di vista geometrico cerchiamo di esprimere  $\vec{AE}$  e  $\vec{AF}$  come combinazioni lineari dei due vettori  $\vec{a} = \vec{AB}$  e  $\vec{b} = \vec{AC}$ .



### 1.2.1 Generare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$

**Teorema:** se  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$  sono non paralleli, allora è possibile esprimere qualunque vettore  $\vec{w}$  di  $\mathbb{R}^2$  come combinazione lineare di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  in un unico modo.

Per rappresentare un vettore come combinazione lineare di altri due vettori occorre creare un sistema e separare le componenti. **Esempio:** esprimere  $\vec{w} = [6, 4]$  come CL dei vettori  $\vec{u} = [3, 1]$  e  $\vec{v} = [1, 2]$

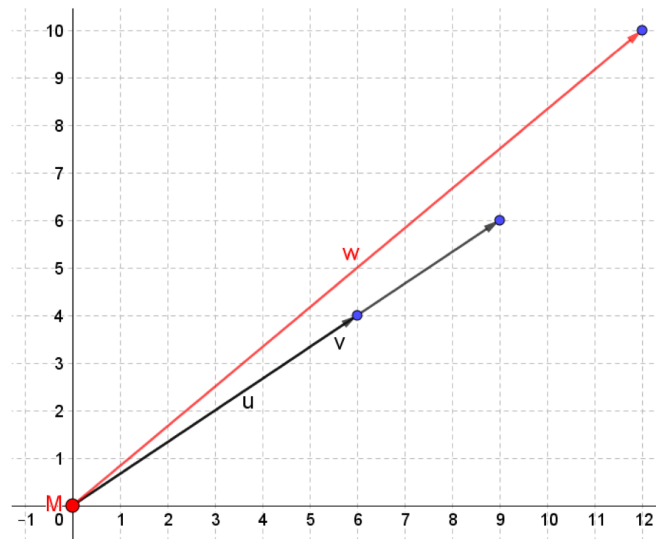
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6 = 3h + k \\ 4 = h + 2k \end{cases}$$

Un sistema del genere avrà una soluzione solo se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  non sono paralleli, in caso contrario ( $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ) il risultato del sistema risulterà impossibile. In questo caso, sviluppando il sistema troviamo che  $h = \frac{8}{5}, k = \frac{6}{5}$ .

**Esempio:** esiste una combinazione lineare dei vettori  $\vec{u} = [6, 4]$  e  $\vec{v} = [9, 6]$  che dia il vettore  $\vec{w} = [12, 10]$ ?

$$h \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6h + 9k = 12 \\ 4h + 6k = 10 \end{cases}$$

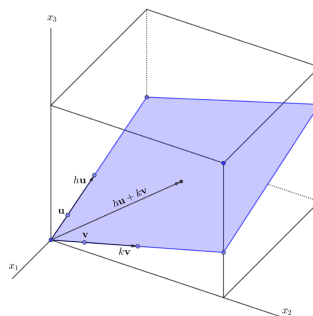
Provando a risolvere il sistema si ottiene  $8 = 10$  (il sistema non ammette soluzioni), quindi non è possibile esprimere  $\vec{w} = [12, 10]$  come combinazione lineare dei vettori  $\vec{u} = [6, 4]$  e  $\vec{v} = [9, 6]$ , ciò significa che  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  **sono paralleli**. In altre parole combinando linearmente questi due vettori si possono ottenere **solo** i vettori che hanno la stessa direzione di  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Graficamente risulta così:



### 1.2.2 Generare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$

**Teorema:** se  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$  sono non complanari (non appartengono allo stesso piano e quindi nessuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri due), allora è possibile esprimere qualunque vettore  $\vec{z}$  di  $\mathbb{R}^3$  come combinazione lineare di  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  in un unico modo.

In questo caso, utilizzando **due** vettori non paralleli, possiamo generare un piano su  $\mathbb{R}^3$ , tuttavia in questo caso avendo una dimensione 3 e soltanto due vettori, siamo limitati a generare **solo** i vettori che si trovano sul piano dei due vettori.



Per generare tutti i vettori possibili occorrono quindi 3 vettori, possono essere vettori qualsiasi purché non siano complanari, ovvero nessuno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri.

In generale, per generare i vettori di  $\mathbb{R}^n$  sono necessari e sufficienti  $n$  vettori, purché nessuno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri.

### 1.2.3 CAS Geogebra

Abbiamo capito quindi che per determinare una combinazione lineare tra più vettori è importante riuscire a creare un sistema di equazioni. Per quanto riguarda però la risoluzione possiamo usare il CAS di Geogebra, tramite lo strumento Risolvi gli passiamo come parametri la lista di equazioni e le variabili di riferimento.

Risolvi( $\{2x+5y=8, 4x+5y=6\}, \{x,y\}$ )  
 $\rightarrow \{\{x = -1, y = 2\}\}$

**Il sistema ammette una sola soluzione**

Risolvi( $\{2x+5y=8, 2x+5y=6\}, \{x,y\}$ )  
 $\rightarrow \{\}$

**Il sistema non ammette soluzioni**

Risolvi( $\{2x+5y=8, 4x+10y=16\}, \{x,y\}$ )  
 $\rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{-5}{2} y + 4, y = y \right\} \right\}$

**Il sistema ammette infinite soluzioni**

### 1.3 Dipendenza e indipendenza lineare

Si dice che i vettori  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$  sono **linearmente indipendenti (LI)** se nessuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri, altrimenti si dicono **linearmente dipendenti (LD)**.

Possiamo dire quindi che una **base** di  $\mathbb{R}^n$  è formata da  $n$  vettori **linearmente indipendenti**. Una **base** è una lista di vettori LI che generano  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema.** I vettori  $x_1 \dots x_m \in \mathbb{R}^n$  sono **linearmente indipendenti** se e solo se l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo  $0$  è la combinazione banale:

$$0x_1 + \dots + 0x_m = 0$$

In questo modo occorre risolvere un solo sistema lineare **omogeneo** (con i termini noti tutti nulli).

Se ad esempio vogliamo stabilire se i vettori  $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, c \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$  sono LI o LD, diventa:

$$h \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

#### 1.3.1 Interpretare i risultati

Una volta che abbiamo il sistema, possiamo inserirlo in Geogebra utilizzando la funzione **Risolvi** con la sintassi vista nel capitolo scorso. Se l'unico valore possibile dei coefficienti è  $0$  (ammette **solo** la soluzione banale), allora i vettori sono LI.

```
Risolvi({h+4j+7k=0,2h+5j+8k=0,3h+6j+8k=0},{h,j,k})
→ {{h=0,j=0,k=0}}
```

In caso contrario, significa che i vettori sono LD.

```
Risolvi({h+4j+7k=0,2h+5j+8k=0,3h+6j+9k=0},{h,j,k})
→ {{h=k,j=-2k,k=k}}
```

Facciamo un esempio più pratico per notare qualche altro dettaglio. Proviamo a stabilire se i

vettori  $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, c \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, d \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$  sono LI o LD.

```
Risolvi({h+5j+9k+13l=0,2h+6j+10k+14l=0,3h+7j+11k+15l=0,4h+8j+12k+16l=0},{h,j,k,l})
→ {{h=k+2l,j=-2k-3l,k=k,l=l}}
```

Notiamo per prima cosa che i vettori sono LD. Inoltre ci sono due variabili libere ( $k = k, l = l$ ), ciò significa che ci sono solo 2 vettori LI ( $4 - 2 = 2$ ), per verificare quali dovremmo vedere i singoli casi. Infine sappiamo che  $a, b, c, d$  generano un **sottospazio** di  $\mathbb{R}^4$  di **dimensione 2**.

In generale,  $k$  vettori LI non nulli di  $\mathbb{R}^n$  generano un **sottospazio** di **dimensione**  $k$ .