Precalcolo

SUPSI Dipartimento Tecnologie Innovative

Gianni Grasso

8 ottobre 2024

Classe: I1B

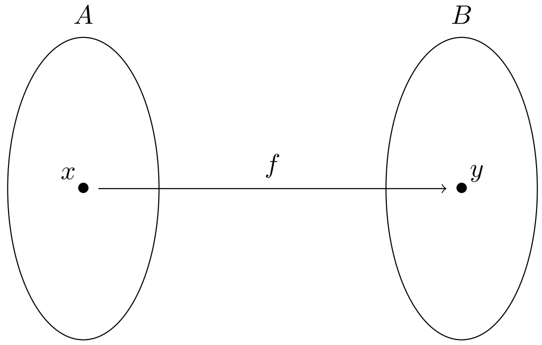
Anno scolastico: 2024/2025

Indice

1 Funzioni

1.1 Introduzione

Una funzione f è una legge che associa ad ogni elemento x di un insieme di partenza A un **unico** elemento y di un insieme di arrivo B.



$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

x è detto elemento di A associato a y, elemento di B.

1.1.1 Esempi

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 3x - 2 \\ x &= 5 \Rightarrow y = 3 \cdot 5 - 2 = 13 \\ &\Rightarrow f \text{ è una funzione} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sqrt{x} \\ x &= 4 \Rightarrow y = \sqrt{4} = 2 \\ x &= -4 \Rightarrow y = \sqrt{-4} \\ &\sqrt{-4} \text{ non esiste in } \mathbb{R} \\ &\Rightarrow f \text{ non è una funzione} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \pm x^2 \\ x &= 3 \Rightarrow y = \pm 3^2 = \pm 9 \\ x &= +9 \\ x &= -9 \end{aligned}$$

L'argomento possiede due immagini, f **non** è una funzione

1.2 Dominio

Sia f una funzione. Il suo dominio $D(f)$ è l'insieme di tutti gli elementi x per i quali $f(x)$ è ben definita.

1.2.1 Esempi

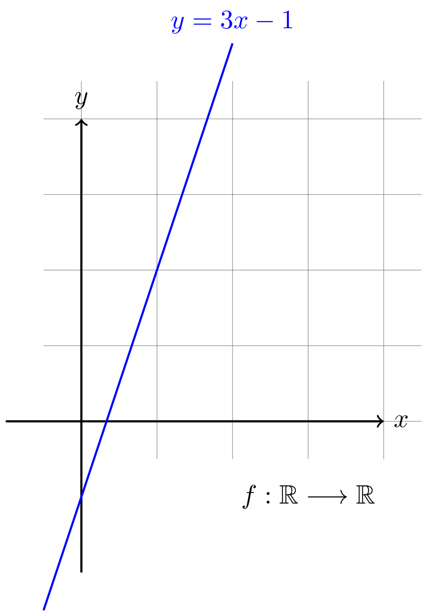
1.
$$\begin{aligned} f : D(f) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 1/x \\ D(f) &= \mathbb{R}\backslash\{0\} \end{aligned}$$

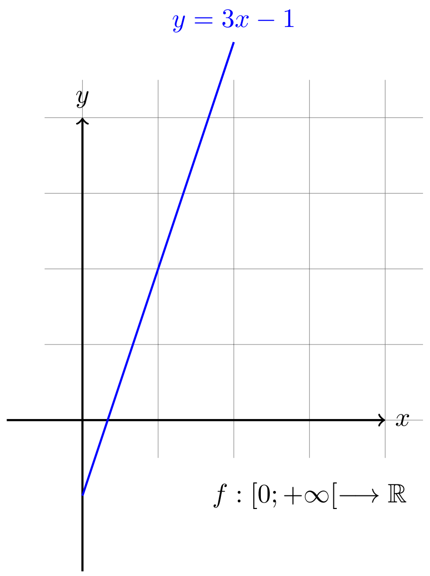
2.
$$\begin{aligned} f : D(f) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \sqrt{x+2} \Rightarrow D(f) = [-2; +\infty[\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} f : D(f) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow D(f) =]-2; +\infty[\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} f : D(f) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = 3x - 1 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nota: il dominio è l'insieme di partenza più grande possibile, per trovarlo occorre innanzitutto analizzare le limitazioni della funzione, escludere i valori non validi e riportare l'insieme più grande possibile che non comprenda quei valori.





1.3 Insieme immagini

Sia $f : A \to B$ una funzione. Il suo insieme delle immagini è definito come segue:

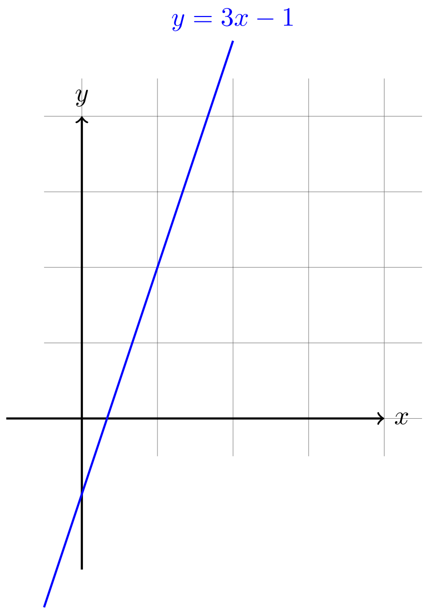
$$Im(f) = \{y = f(x) | x \in A\}$$

Generalmente x indica gli argomenti e y le immagini, nello schema visto nell'introduzione B rappresenta l'insieme delle immagini. Tutti gli elementi di A sono associati ad un elemento di B, ma non per forza viceversa.

1.3.1 Esempi

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 3x - 1 \\ &\Rightarrow Im(f) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

In questo caso per trovare Im guardiamo il grafico.



$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 2 \\ &\Rightarrow Im(g) = [-2; +\infty[\\ &= [y_v; +\infty[\end{aligned}$$

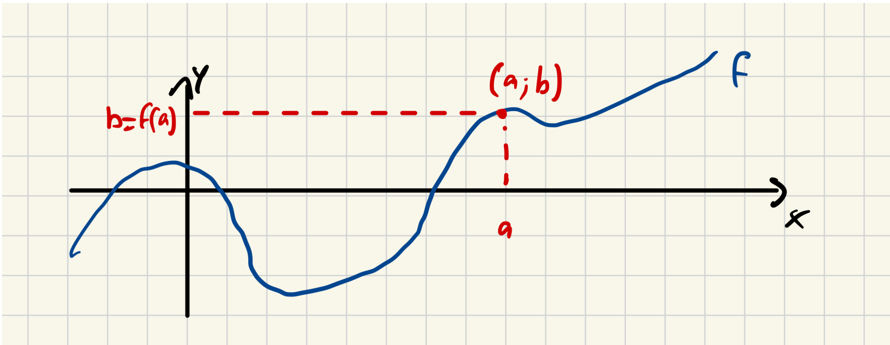
In questo caso trattandosi di una **parabola**, per determinare $Im(g)$ guardiamo il vertice.

Nota: Non esiste una ricetta o una procedura precisa per trovare l'Im di una funzione, non è come per il dominio.

1.4 Grafico di una funzione

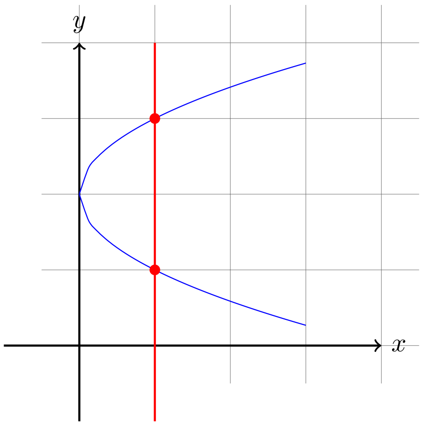
Sia $f : A \to B$ una funzione. Il suo grafico $G(f)$ è l'insieme dei punti

$$G(f) = \{(a; f(a)) | a \in A\}$$



$(a; b) \in G(f) \Leftrightarrow b = f(a)$, Un punto appartiene al grafico se e solo se $b = f(a)$

Osservazione:



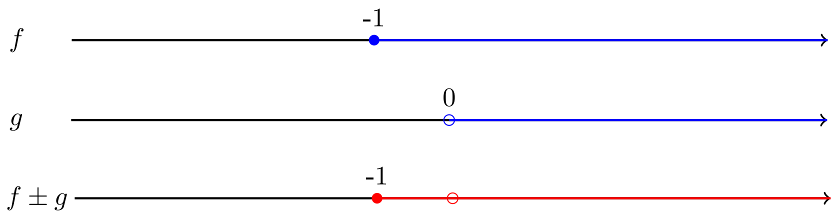
Questo grafico non rappresenta una funzione, per alcuni argomenti ci sono più immagini.

1.5 Operazioni con le funzioni

1.5.1 Somma - Sottrazione

Esempio:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+1} \Rightarrow D(f) = [-1; +\infty[\\ g(x) &= \frac{1}{x} \Rightarrow D(g) = \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ (f \pm g)(x) &= \sqrt{x+1} \pm \frac{1}{x} \\ \Rightarrow D(f+g) &= [-1; +\infty[\backslash\{0\} \\ &= D(f) \cap D(g) \end{aligned}$$



In generale

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &= f(x) \pm g(x) \\ D(f \pm g) &= D(f) \cap D(g) \end{aligned}$$

1.5.2 Prodotto

Esempio:

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x+1} &\Rightarrow D(f) = [-1; +\infty[\\ g(x) = x &\Rightarrow D(g) = \mathbb{R} \\ \Rightarrow (f \cdot g)(x) &= x \cdot \sqrt{x+1} \\ \Rightarrow D(f \cdot g) &= [-1; +\infty[\end{aligned}$$

In generale

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \\ D(f \cdot g) &= D(f) \cap D(g) \end{aligned}$$

1.5.3 Divisione

Esempio:

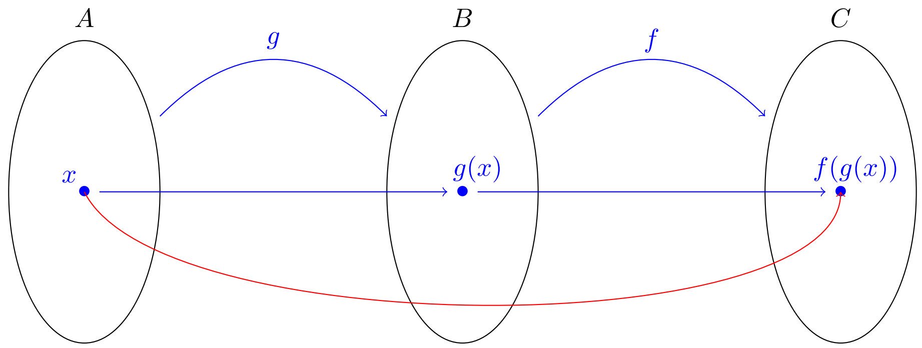
$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x} &\Rightarrow D(f) = \mathbb{R}^* \\ g(x) = \sqrt{x+2} &\Rightarrow D(g) = [-2; +\infty[\\ \Rightarrow \frac{f}{g}(x) &= \frac{1/x}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x+2}} \\ D(\frac{f}{g}) &=]-2; +\infty[\backslash\{0\} \end{aligned}$$

In generale

$$\begin{aligned} (\frac{f}{g})(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \\ D(\frac{f}{g}) &= D(f) \cap D(g)\backslash\{x \in D(g) | g(x) = 0\} \end{aligned}$$

Nota: Il dominio non è dato solo dall'intersezione, nell'esempio sopra va anche escluso il -2 che non si può dividere per 0.

1.5.4 Composizione di funzioni



Date due funzioni

$$\begin{aligned} f : B &\longrightarrow C \\ g : A &\longrightarrow B \end{aligned}$$

la funzione

la funzione

$$\begin{aligned} f \circ g : A &\longrightarrow C \\ x &\longrightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) \end{aligned}$$

è detta **composizione di f con g** (f composto g).

Nota: In generale $f \circ g \neq g \circ f$, la composizione di funzioni non è commutativa.

1.6 Funzione inversa

Sia $f : A \to B$ una funzione