Precalcolo

SUPSI Dipartimento Tecnologie Innovative

Gianni Grasso

22 ottobre 2024

Classe: I1B

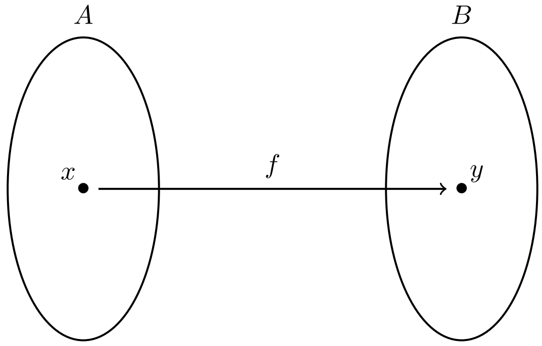
Anno scolastico: 2024/2025

Indice

1 Funzioni

1.1 Introduzione

Una funzione f è una legge che associa ad ogni elemento x di un insieme di partenza A un **unico** elemento y di un insieme di arrivo B.



$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

x è detto elemento di A associato a y, elemento di B.

1.1.1 Esempi

1.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 3x - 2 \\ x &= 5 \Rightarrow y = 3 \cdot 5 - 2 = 13 \\ &\Rightarrow f \text{ è una funzione} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \sqrt{x} \\ x &= 4 \Rightarrow y = \sqrt{4} = 2 \\ x &= -4 \Rightarrow y = \sqrt{-4} \\ &\sqrt{-4} \text{ non esiste in } \mathbb{R} \\ &\Rightarrow f \text{ non è una funzione} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \pm x^2 \\ x &= 3 \Rightarrow y = \pm 3^2 = \pm 9 \\ x &= +9 \\ x &= -9 \end{aligned}$$

L'argomento possiede due immagini, f **non** è una funzione

1.2 Dominio

Sia f una funzione. Il suo dominio $D(f)$ è l'insieme di tutti gli elementi x per i quali $f(x)$ è ben definita.

1.2.1 Esempi

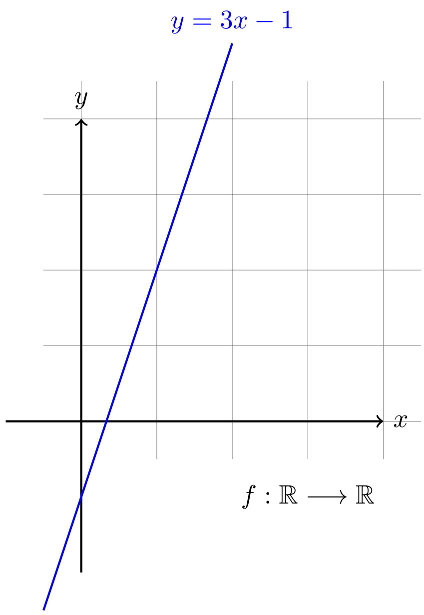
1.
$$\begin{aligned} f : D(f) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = 1/x \\ D(f) &= \mathbb{R} \backslash \{0\} \end{aligned}$$

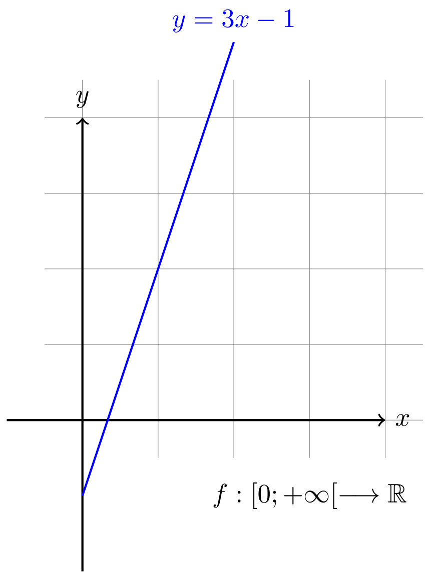
2.
$$\begin{aligned} f : D(f) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = \sqrt{x+2} \Rightarrow D(f) = [-2; +\infty[\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} f : D(f) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow D(f) =]-2; +\infty[\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} f : D(f) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = 3x - 1 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nota: il dominio è l'insieme di partenza più grande possibile, per trovarlo occorre innanzitutto analizzare le limitazioni della funzione, escludere i valori non validi e riportare l'insieme più grande possibile che non comprenda quei valori.





1.3 Insieme immagini

Sia $f : A \to B$ una funzione. Il suo insieme delle immagini è definito come segue:

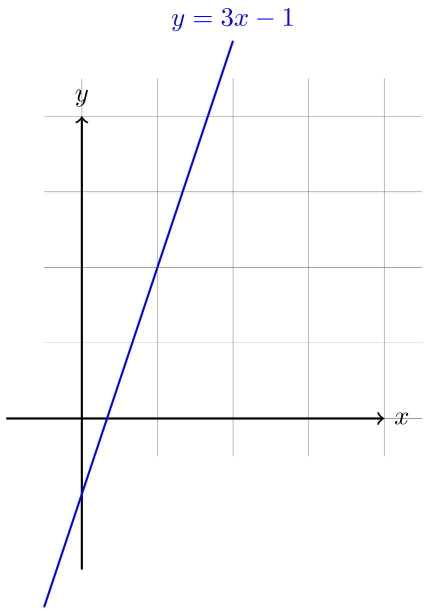
$$Im(f) = \{y = f(x) | x \in A\}$$

Generalmente x indica gli argomenti e y le immagini, nello schema visto nell'introduzione B rappresenta l'insieme delle immagini. Tutti gli elementi di A sono associati ad un elemento di B, ma non per forza viceversa.

1.3.1 Esempi

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = 3x - 1 \\ &\Rightarrow Im(f) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

In questo caso per trovare Im guardiamo il grafico.



$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 - 2 \\ &\Rightarrow Im(g) = [-2; +\infty[\\ &= [y_v; +\infty[\end{aligned}$$

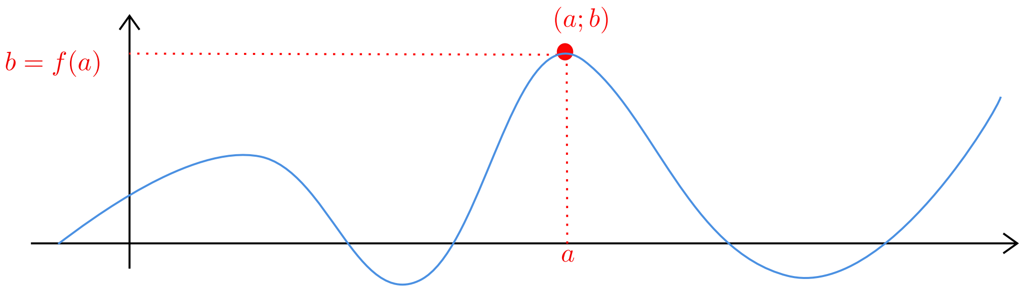
In questo caso trattandosi di una **parabola**, per determinare $Im(g)$ guardiamo il vertice.

Nota: Non esiste una ricetta o una procedura precisa per trovare l'Im di una funzione, non è come per il dominio.

1.4 Grafico di una funzione

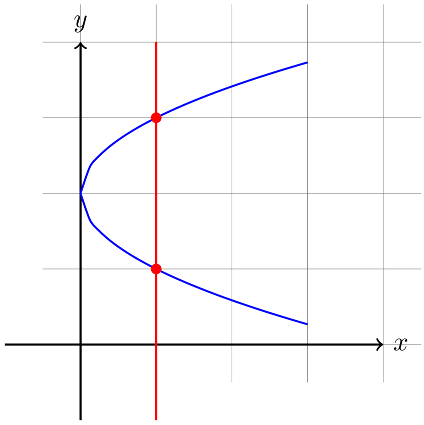
Sia $f : A \to B$ una funzione. Il suo grafico $G(f)$ è l'insieme dei punti

$$G(f) = \{(a; f(a)) | a \in A\}$$



$(a; b) \in G(f) \Leftrightarrow b = f(a)$, Un punto appartiene al grafico se e solo se $b = f(a)$

Osservazione:



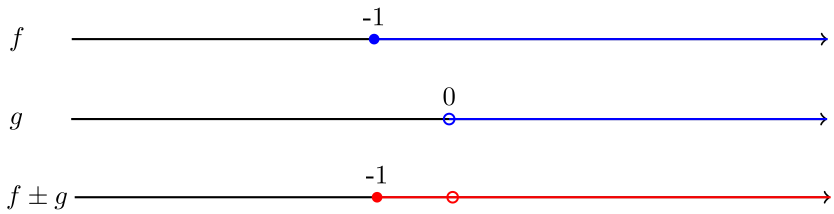
Questo grafico non rappresenta una funzione, per alcuni argomenti ci sono più immagini.

1.5 Operazioni con le funzioni

1.5.1 Somma - Sottrazione

Esempio:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+1} \Rightarrow D(f) = [-1; +\infty[\\ g(x) &= \frac{1}{x} \Rightarrow D(g) = \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ (f \pm g)(x) &= \sqrt{x+1} \pm \frac{1}{x} \\ \Rightarrow D(f+g) &= [-1; +\infty[\backslash\{0\} \\ &= D(f) \cap D(g) \end{aligned}$$



In generale

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) =& f(x) \pm g(x) \\ D(f \pm g) =& D(f) \cap D(g) \end{aligned}$$

1.5.2 Prodotto

Esempio:

$$\begin{aligned} f(x) =& \sqrt{x+1} \Rightarrow D(f) = [-1; +\infty[\\ g(x) =& x \Rightarrow D(g) = \mathbb{R} \\ & \Rightarrow (f \cdot g)(x) = x \cdot \sqrt{x+1} \\ & \Rightarrow D(f \cdot g) = [-1; +\infty[\end{aligned}$$

In generale

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) =& f(x) \cdot g(x) \\ D(f \cdot g) =& D(f) \cap D(g) \end{aligned}$$

1.5.3 Divisione

Esempio:

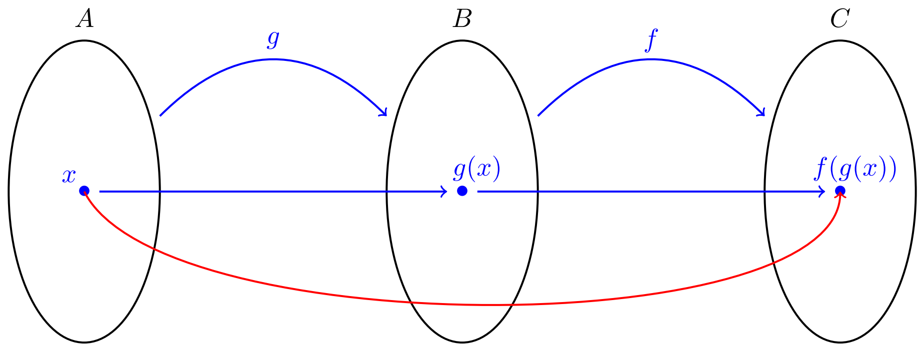
$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{1}{x} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}^* \\ g(x) =& \sqrt{x+2} \Rightarrow D(g) = [-2; +\infty[\\ & \Rightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{1/x}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x+2}} \\ D(\frac{f}{g}) =&]-2; +\infty[\backslash\{0\} \end{aligned}$$

Nota: Il dominio non è dato solo dall'intersezione, nell'esempio sopra va anche escluso il -2 che non si può dividere per 0.

In generale

$$\begin{aligned} (\frac{f}{g})(x) =& \frac{f(x)}{g(x)} \\ D(\frac{f}{g}) =& D(f) \cap D(g) \backslash \{x \in D(g) | g(x) = 0\} \end{aligned}$$

1.5.4 Composizione di funzioni



Esempio:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} && \Rightarrow D(f) = [0; +\infty[\\ g(x) &= x+1 && \Rightarrow D(g) = \mathbb{R} \\ \Rightarrow (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1} \\ D(f \circ g) &= [-1; +\infty[\end{aligned}$$

Nota: Non c'è un modo per calolare il dominio senza conoscere le due funzioni, l'unico indizio che abbiamo è che questo dominio deve essere incluso in $D(g)$.

In generale date due funzioni

$$\begin{aligned} f : B &\longrightarrow C \\ g : A &\longrightarrow B \end{aligned}$$

la funzione

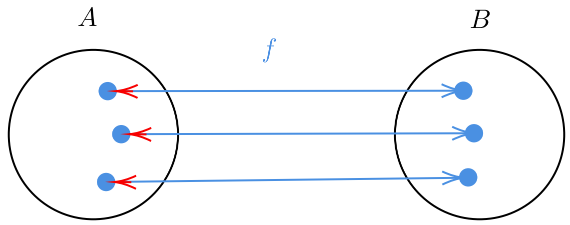
$$\begin{aligned} f \circ g : A &\longrightarrow C \\ x &\longrightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) \end{aligned}$$

è detta **composizione di f con g** (f composto g).

Nota: In generale $f \circ g \neq g \circ f$, la composizione di funzioni non è commutativa.

1.6 Funzione inversa

Sia $f : A \to B$ una funzione



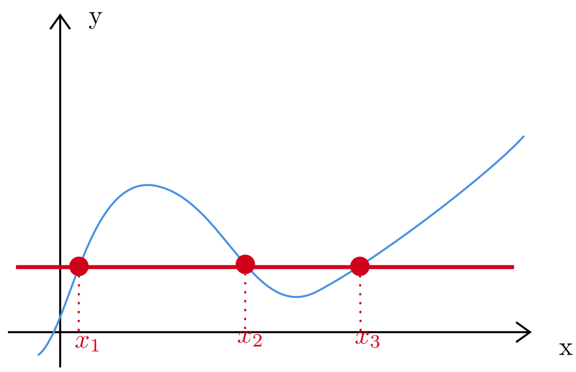
Ci chiediamo se esiste una funzione $g : B \longrightarrow A$ che fa "il contrario" di f, in questo caso g è detta **funzione inversa** di f.

1.6.1 Definizioni

- Una funzione $f : A \longrightarrow B$ è detta **iniettiva** se

$$f(x_1) \neq f(x_2) \forall x_1 \neq x_2 \in A$$

Nota: una funzione può sempre essere resa iniettiva restringendo l'insieme di partenza.



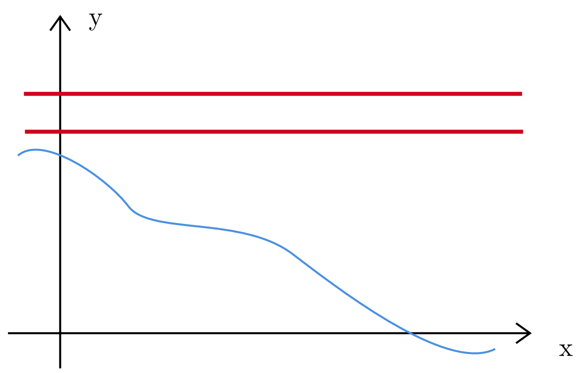
$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, questa funzione **non** è iniettiva.

Nota: una funzione è iniettiva se il suo grafico tocca al massimo ina volta qualsiasi retta orizzontale, altrimenti significa che elementi diversi di A hanno la stessa immagine in B.

- Una funzione $f : A \longrightarrow B$ è detta **suriettiva** se

$$B = Im(f)$$

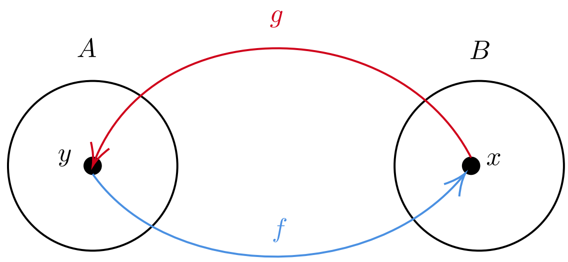
Nota: una funzione può sempre essere resa usriettiva restringendo l'insieme d'arrivo dell'insieme immagini.



Ci sono delle y non definite, questa funzione **non** è iniettiva

- Una funzione $f : A \longrightarrow B$ è detta **biettiva** se è sia iniettiva che suriettiva. In questo caso possiamo definire $g : B \longrightarrow A$ come segue:

$$g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$



La funzione

$$\begin{aligned} id : \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \longmapsto & id(x) = x \end{aligned}$$

è detta **funzione identità** ed è l'elemento neutro della composizione di funzioni.

Nota:

$$\begin{aligned} (f \circ id)(x) =& f(id(x)) = f(x) \\ (id \circ f)(x) =& id(f(x)) = f(x) \end{aligned}$$

Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione. Se esiste una funzione $g : B \longrightarrow A$ tale che $f \circ g = id$ e $g \circ f = id$ allora g è detta **inversa** di f e scriviamo $g = f^{-1}$.

1.6.2 Proprietà

Il dominio di una funzione diventa l'insieme immagini della sua funzione inversa, viceversa l'insieme delle immagini di una funzione diventa il dominio della sua funzione inversa:

$$\begin{aligned} f : D(f) \longrightarrow & Im(f) \\ f^{-1} : Im(f) \longrightarrow & D(f) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} D(f^{-1}) =& Im(f) \\ Im(f^{-1}) =& D(f) \end{aligned}$$

Alcune proprietà sulla composizione di funzioni e sulla funzione inversa:

- $f \circ g \neq g \circ f$
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- $f \circ f^{-1} = id$, $f^{-1} \circ f = id$
- $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

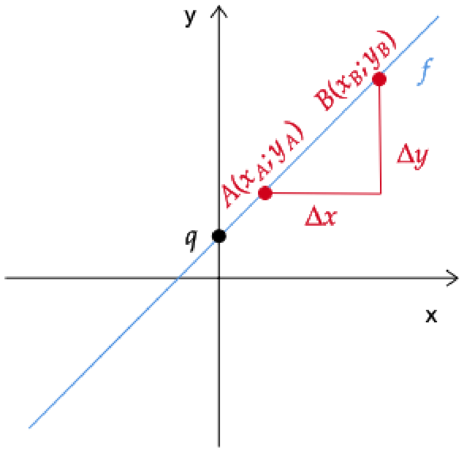
1.7 Funzioni elementari

1.7.1 La funzione affine

Una funzione

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = mx + q$$

è detta funzione affine.



- m è detta pendenza (o coefficiente angolare)
  - $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
  - Determina la pendenza se $m > 0$ sarà positiva, se $m < 0$ sarà negativa
- q è detta ordinata all'origine ($f(0) = q$)
  - Se $q = 0$, f è detta funzione lineare
- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}$, se $m \neq 0$
- $Im(f) = \{q\}$, se $m = 0$

Intersezioni con gli assi:

- $\cap$ asse y: $(0; q)$
- $\cap$ asse x(zeri): $y = 0 \quad mx + q = 0$
  - **Caso 1:** $m \neq 0 \quad x = -\frac{q}{m}$, un solo zero $(-\frac{q}{m}; 0)$
  - **Caso 2:** $m = 0$ e $q \neq 0 \quad 0 \cdot x = -q$, nessuno zero
  - **Caso 3:** $m = 0$ e $q = 0 \quad 0 \cdot x = 0$, ogni punto $(x; 0), x \in \mathbb{R}$ è uno zero

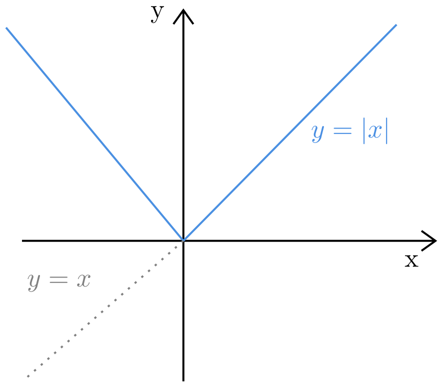
Condizioni di parallelismo e perpendicolarità:

- Due rette di funzione affine sono parallele ($f//g$) se e solo se $m_f = m_g$
- Sono invece perpendicolari ($f \perp g$) se e solo se $m_f \cdot m_g = -1$ e quindi $m_g = -\frac{1}{m_f}$

1.7.2 La funzione valore assoluto

La funzione valore assoluto è definita come segue:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



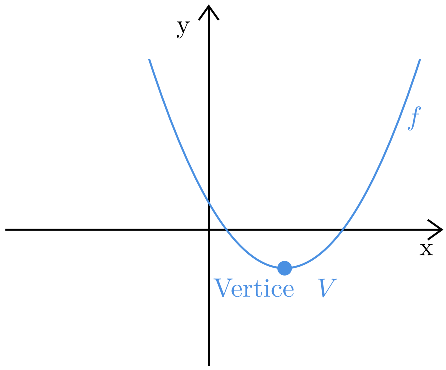
- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}_+$

1.7.3 Funzioni quadratiche

Una funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

dove $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$ è detta funzione quadratica.



- a definisce il "verso" della parabola, se $a > 0$ sorride, se $a < 0$ è triste
- c definisce l'intersezione con l'asse y, $I_y = (0; c)$
  - se $b = 0$ corrisponde al vertice
- b è il punto sulla quale "ruota" la parabola
  - se $c = 0$ il vertice è definito come $V(x_v; f(x_v)) = (-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a}))$

In generale per trovare il vertice di una parabola vale:

$$V = (-\frac{b}{2a}; f(-\frac{b}{2a})) = (-\frac{b}{2a}; \frac{\Delta}{4a})$$

dove ovviamente

$$\Delta = 4ac - b^2$$

Si può inoltre dimostrare che per una parabola $f(x) = ax^2 + bx + c$ con vertice $V(x_v; y_v)$ vale

$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$$

Per trovare gli zeri di una parabola possiamo usare

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Inoltre Δ determina il numero di soluzioni di una parabola:

- se $\Delta > 0$ l'equazione ha due soluzioni reali distinte
- se $\Delta = 0$ l'equazione ha come unica soluzione il punto x_v e il vertice sarà $V = (x_v; 0)$
- se $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni in $\mathbb{R}$, la parabola non interseca l'asse x

Se $\Delta x \geq 0$ allora

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
- $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

1.7.4 La funzione polinomiale

Una funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 \end{aligned}$$

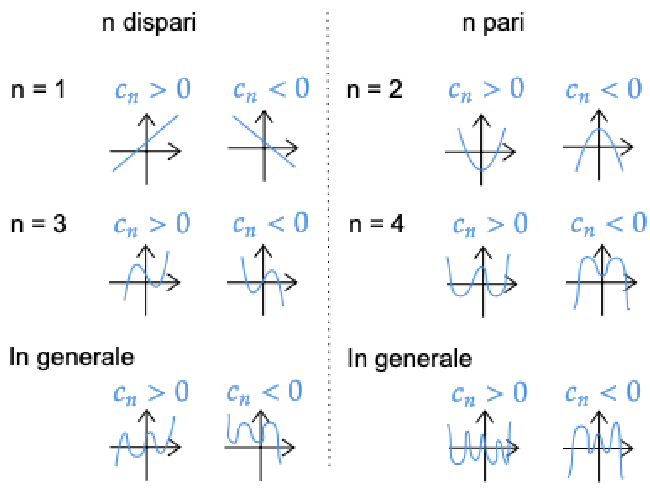
dove

$$n \in \mathbb{N}, c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}, c_n \neq 0$$

è detta funzione polinomiale.

Nota: l'indice n è detto grado di f.

Il grafico delle funzioni polinomiali è così rappresentato:



Inoltre se consideriamo ad esempio:

$$f(x) = (x+3)(x+1)^2(x-1)^3(x-3)^4$$

Con zeri: $(-3; 0), (-1; 0), (1; 0), (3; 0)$

- Se $(x - x_0)^n$ ha n dispari la funzione **attraverserà** il punto
- Se $(x - x_0)^n$ ha n pari la funzione **toccherà** il punto e tornerà indietro

Operazioni con i polinomi

Somma-Differenza Esempi:

$$\begin{aligned}&(2x^3+3x-2)+(3x^3+2x^2-x+3)\\&=5x^3+2x^2+2x+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(2x^3+3x-2)-(3x^3+2x^2-x+3)\\&=-x^3-2x^2+4x-5\end{aligned}$$

Nota: $grado(f \pm g) = max(grado(f); grado(g))$

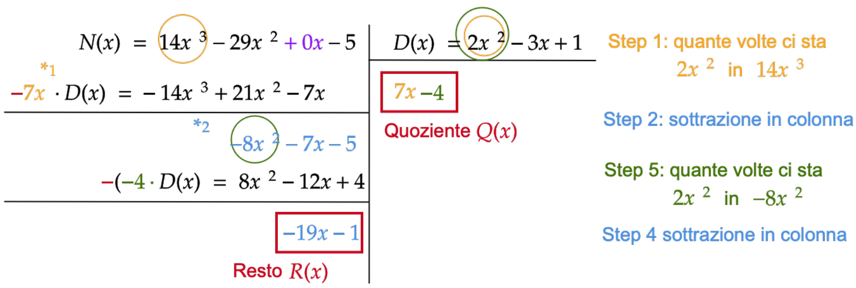
Prodotto Esempio:

$$\begin{aligned}&(2x^3+x-1)\cdot(3x^2-2x+4)\\&=6x^5-4x^4+8x^3+3x^3-2x^2+4x-3x^2+2x-4\\&=6x^5-4x^4+11x^3-5x^2+6x-4\end{aligned}$$

Nota: $grado(f \cdot g) = grado(f) + grado(g)$

Divisione Esempio:

- $N(x) = 14x^3 - 29x^2 - 5$
- $D(x) = 2x^2 - 3x + 1$
- $N(x) : D(x) = ?$



Il risultato si scrive

$$N(x) = (7x-4)\cdot D(x) - 19x - 1$$

oppure

$$\frac{N(x)}{D(x)} = 7x - 4 + \frac{-19x-1}{D(x)}$$

1.7.5 La funzione razionale fratta

Una funzione

$$\begin{aligned} f : D(f) &\longrightarrow Im(f) \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \end{aligned}$$

dove $N(x)$ e $D(x)$ sono polinomi, è detta funzione razionale fratta.

- Se $grado(N(x)) < grado(D(x))$, la frazione $\frac{N(x)}{D(x)}$ è detta **propria**
- Se $grado(N(x)) \geq grado(D(x))$, la frazione $\frac{N(x)}{D(x)}$ è detta **impropria**
  In questo caso possiamo eseguire una divisione polinomiale
  Nota: ricorda che:

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Funzione omografica L'esempio più semplice di funzione razionale fratta è la funzione omografica. Una funzione

$$\begin{aligned} f : D(f) &\longrightarrow Im(f) \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \end{aligned}$$

dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$ è detta funzione omografica. Il grafico di una funzione di questo tipo è detto **iperbole**.

Nota: se $c = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{ax+b}{d} = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ (è una retta).

In generale se $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

- $D(f)$**:**

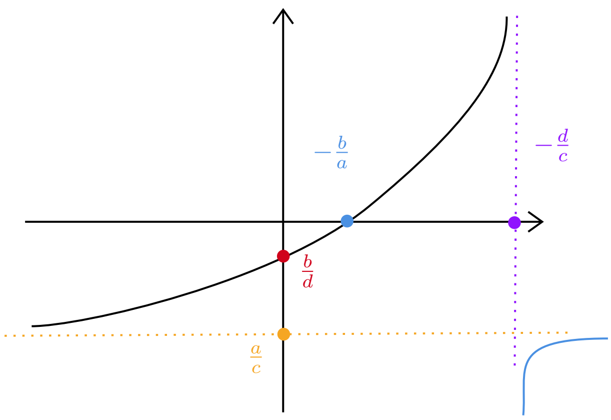
$$cx + d \neq 0$$
$$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{-\frac{d}{c}\}$$
$$\Rightarrow \text{La retta } x = -\frac{d}{c} \text{ è un asintoto verticale.}$$

- $Im(f)$**:**

$$Im(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R} \backslash \{\frac{a}{c}\}$$

- $\cap$ **asse** x**:**

$$f(x) = 0$$
$$\frac{ax+b}{cx+d} = 0$$
$$x = -\frac{b}{a}$$



Altri esempi di funzioni razionali fratte Esempio 1

$$f(x) = \frac{x^2 + xb}{x - 4}$$

Dominio

$$D(f) = \mathbb{R} \backslash \{4\}$$

$\bigcap$ **asse** y

$$f(0) = \frac{0^2 + 0 - 6}{0 - 4} = \frac{3}{2} \Rightarrow Iy(0; \frac{3}{2})$$

$\bigcap$ **asse** x **(zeri)**

$$f(x) = 0$$
$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 4} = 0$$
$$x^2 + x - 6 = 0 (x \neq 4)$$
$$(x+3)(x-2) = 0$$
$$x = -3 \vee x = 2$$
$$\Rightarrow Ix_1(-3; 0), Ix_2(2; 0)$$

Tabella dei segni, eventuali asintoti verticali

Divisione polinomiale, eventuali asintoti orizzonatli e obliqui

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 4} \text{ è una frazione impropria}$$
$$\Rightarrow \text{possiamo eseguire la divisione polinomiale}$$

Nota: $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$

Grafico **Osservazione sugli asintoti orizzontali e obliqui:**

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$
$$grado(R(x)) < grado(D(x))$$
$$\Rightarrow \frac{R(x)}{D(x)} \approxeq 0\text{"per x grande"}$$
$$\Rightarrow f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} \approxeq Q(x)\text{"per x grande"}$$

- **Caso 1:** $Q(x) = 0$ ($\frac{N(x)}{D(x)}$ è una funzione propria) $\Rightarrow y = 0$ è un A.O.R
- **Caso 2:** $Q(x) = Q \in \mathbb{R}$ ($N(x)$ e $D(x)$ hanno lo stesso grado) $\Rightarrow y = Q$ è un A.O.R
- **Caso 3:** $Q(x) = mx + q$ $\Rightarrow y = mx + q$ è un A.O.B
- **Caso 4:** $grado(Q(x)) \geq 2$ $\Rightarrow$ Nessun A.O.R, A.O.B