

Algebra Lineare

SUPSI Dipartimento Tecnologie Innovative

Gianni Grasso

22 ottobre 2024

Classe: I1B

Anno scolastico: 2024/2025

Indice

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Vettori | 3 |
| 1.1 | Operazioni fondamentali | 3 |
| 1.1.1 | La somma | 3 |
| 1.1.2 | Moltiplicazione scalare | 3 |
| 1.2 | Combinazioni lineari | 4 |
| 1.2.1 | Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^2 | 4 |
| 1.2.2 | Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^3 | 5 |
| 1.2.3 | CAS Geogebra | 6 |
| 1.3 | Dipendenza e indipendenza lineare | 7 |
| 1.3.1 | Interpretare i risultati | 7 |
| 2 | Geometria vettoriale | 8 |
| 2.1 | Coordinate polari | 8 |
| 2.2 | Il prodotto scalare | 9 |
| 2.2.1 | norma | 9 |
| 2.2.2 | I versori | 9 |
| 2.2.3 | Prodotto scalare $x \cdot y$ | 9 |
| 2.2.4 | Teorema del prodotto scalare | 10 |
| 2.2.5 | Applicazioni | 10 |
| 2.3 | Il prodotto vettoriale | 11 |
| 2.3.1 | Teorema | 11 |
| 2.3.2 | Area del parallelogramma | 11 |
| 2.4 | Il prodotto misto | 12 |
| 2.4.1 | Proprietà | 12 |
| 2.4.2 | Allineamento di 3 punti | 12 |
| 2.4.3 | Complanarità di 4 punti | 12 |
| 2.4.4 | Distanze | 12 |
| 2.4.5 | Proiezione di un punto su un piano | 13 |

1 Vettori

Un vettore serve per rappresentare oggetti multidimensionali, ad esempio per le informazioni di un aereo potremmo avere un vettore con [velocità, direzione, altezza, potenza] o più semplicemente per descrivere una velocità potremmo usare $\vec{v} = [V_x, V_y]$.

1.1 Operazioni fondamentali

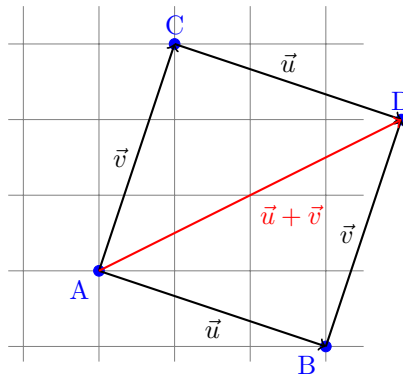
1.1.1 La somma

Quando sommiamo due vettori quello che facciamo effettivamente è la somma dei componenti, è importante che i due vettori abbiano la stessa dimensione, vale quindi:

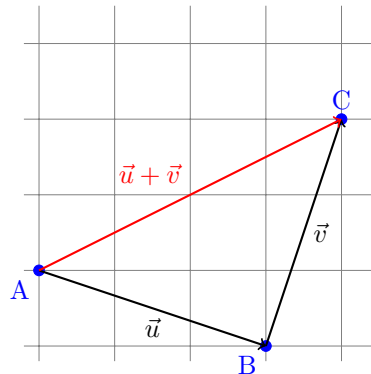
$$x = [x_1, \dots, x_n], y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x + y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$$

Le modalità di somma dei vettori da un punto di vista geometrico sono principalmente due:

1. Metodo del parallelogramma: $AB + AC = AD$



2. Metodo punta-coda: $AB + BD = AD$



1.1.2 Moltiplicazione scalare

È possibile moltiplicare un qualsiasi vettore con un numero reale k , il prodotto di tale operazione è un vettore kx che ha al suo interno il valore di ogni suo componente moltiplicato per k , ovvero:

$$x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \Rightarrow kx = [kx_1, kx_2, \dots, kx_n]$$

Ecco un semplice esempio di una moltiplicazione di un vettore con un numero reale:

$$3 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-5) \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 9 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1.2 Combinazioni lineari

Si chiama combinazione lineare dei vettori x_1, x_2, \dots, x_m con coefficienti (numeri scalari) c_1, c_2, \dots, c_m il vettore

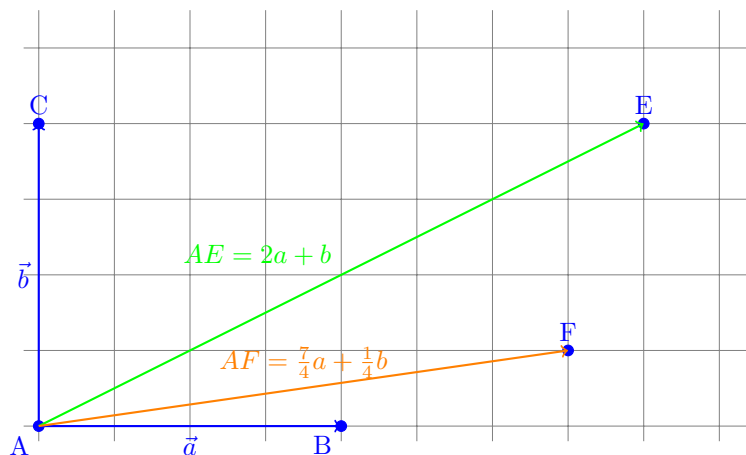
$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m$$

Il risultato di questa somma apparterrà allo spazio vettoriale di partenza.

Facciamo un semplice esempio per rendere meglio l'idea, mettiamo caso che dati due vettori $u = [5, -8, -5]$ e $v = [-6, 5, -6]$, vogliamo trovare la combinazione lineare $2u - 3v$:

$$2 \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -31 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ora da un punto di vista geometrico cerchiamo di esprimere \vec{AE} e \vec{AF} come combinazioni lineari dei due vettori $\vec{a} = \vec{AB}$ e $\vec{b} = \vec{AC}$.



1.2.1 Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^2

Teorema: se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ sono non paralleli, allora è possibile esprimere qualunque vettore \vec{w} di \mathbb{R}^2 come combinazione lineare di \vec{u} e \vec{v} in un unico modo.

Per rappresentare un vettore come combinazione lineare di altri due vettori occorre creare un sistema e separare le componenti. **Esempio:** esprimere $\vec{w} = [6, 4]$ come CL dei vettori $\vec{u} = [3, 1]$ e $\vec{v} = [1, 2]$

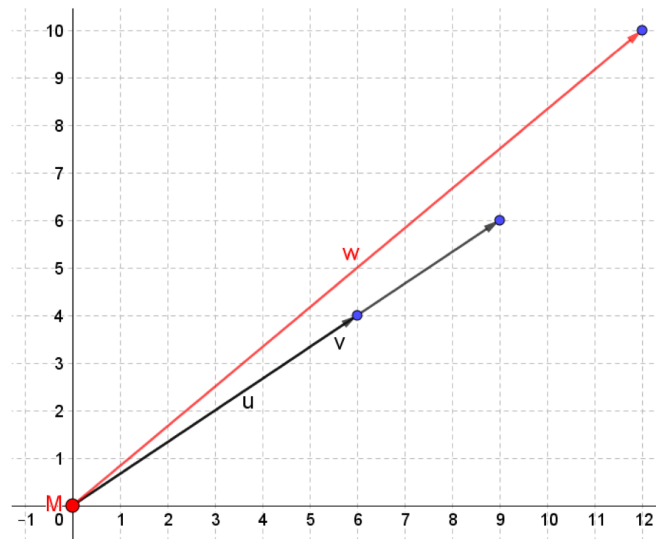
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6 = 3h + k \\ 4 = h + 2k \end{cases}$$

Un sistema del genere avrà una soluzione solo se \vec{u} e \vec{v} non sono paralleli, in caso contrario ($\vec{u} \parallel \vec{v}$) il risultato del sistema risulterà impossibile. In questo caso, sviluppando il sistema troviamo che $h = \frac{8}{5}, k = \frac{6}{5}$.

Esempio: esiste una combinazione lineare dei vettori $\vec{u} = [6, 4]$ e $\vec{v} = [9, 6]$ che dia il vettore $\vec{w} = [12, 10]$?

$$h \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6h + 9k = 12 \\ 4h + 6k = 10 \end{cases}$$

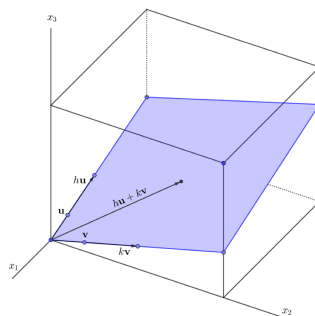
Provando a risolvere il sistema si ottiene $8 = 10$ (il sistema non ammette soluzioni), quindi non è possibile esprimere $\vec{w} = [12, 10]$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{u} = [6, 4]$ e $\vec{v} = [9, 6]$, ciò significa che \vec{u} e \vec{v} **sono paralleli**. In altre parole combinando linearmente questi due vettori si possono ottenere **solo** i vettori che hanno la stessa direzione di \vec{u} e \vec{v} . Graficamente risulta così:



1.2.2 Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^3

Teorema: se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sono non complanari (non appartengono allo stesso piano e quindi nessuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri due), allora è possibile esprimere qualunque vettore \vec{z} di \mathbb{R}^3 come combinazione lineare di $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ in un unico modo.

In questo caso, utilizzando **due** vettori non paralleli, possiamo generare un piano su \mathbb{R}^3 , tuttavia in questo caso avendo una dimensione 3 e soltanto due vettori, siamo limitati a generare **solo** i vettori che si trovano sul piano dei due vettori.



Per generare tutti i vettori possibili occorrono quindi 3 vettori, possono essere vettori qualsiasi purché non siano complanari, ovvero nessuno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri.

In generale, per generare i vettori di \mathbb{R}^n sono necessari e sufficienti n vettori, purché nessuno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri.

1.2.3 CAS Geogebra

Abbiamo capito quindi che per determinare una combinazione lineare tra più vettori è importante riuscire a creare un sistema di equazioni. Per quanto riguarda però la risoluzione possiamo usare il CAS di Geogebra, tramite lo strumento Risolvi gli passiamo come parametri la lista di equazioni e le variabili di riferimento.

Risolvi($\{2x+5y=8, 4x+5y=6\}, \{x,y\}$)
 $\rightarrow \{\{x = -1, y = 2\}\}$

Il sistema ammette una sola soluzione

Risolvi($\{2x+5y=8, 2x+5y=6\}, \{x,y\}$)
 $\rightarrow \{\}$

Il sistema non ammette soluzioni

Risolvi($\{2x+5y=8, 4x+10y=16\}, \{x,y\}$)
 $\rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{-5}{2} y + 4, y = y \right\} \right\}$

Il sistema ammette infinite soluzioni

1.3 Dipendenza e indipendenza lineare

Si dice che i vettori $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente indipendenti (LI)** se nessuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri, altrimenti si dicono **linearmente dipendenti (LD)**.

Possiamo dire quindi che una **base** di \mathbb{R}^n è formata da n vettori **linearmente indipendenti**. Una **base** è una lista di vettori LI che generano \mathbb{R}^n .

Teorema. I vettori $x_1 \dots x_m \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente indipendenti** se e solo se l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo 0 è la combinazione banale:

$$0x_1 + \dots + 0x_m = 0$$

In questo modo occorre risolvere un solo sistema lineare **omogeneo** (con i termini noti tutti nulli).

Se ad esempio vogliamo stabilire se i vettori $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, c \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ sono LI o LD, diventa:

$$h \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.3.1 Interpretare i risultati

Una volta che abbiamo il sistema, possiamo inserirlo in Geogebra utilizzando la funzione **Risolvi** con la sintassi vista nel capitolo scorso. Se l'unico valore possibile dei coefficienti è 0 (ammette **solo** la soluzione banale), allora i vettori sono LI.

```
Risolvi({h+4j+7k=0,2h+5j+8k=0,3h+6j+8k=0},{h,j,k})
→ {{h = 0, j = 0, k = 0}}
```

In caso contrario, significa che i vettori sono LD.

```
Risolvi({h+4j+7k=0,2h+5j+8k=0,3h+6j+9k=0},{h,j,k})
→ {{h = k, j = -2 k, k = k}}
```

Facciamo un esempio più pratico per notare qualche altro dettaglio. Proviamo a stabilire se i

vettori $a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, c \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}, d \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$ sono LI o LD.

```
Risolvi({h+5j+9k+13l=0,2h+6j+10k+14l=0,3h+7j+11k+15l=0,4h+8j+12k+16l=0},{h,j,k,l})
→ {{h = k + 2 l, j = -2 k - 3 l, k = k, l = l}}
```

Notiamo per prima cosa che i vettori sono LD. Inoltre ci sono due variabili libere ($k = k, l = l$), ciò significa che ci sono solo 2 vettori LI ($4 - 2 = 2$), per verificare quali dovremmo vedere i singoli casi. Infine sappiamo che a, b, c, d generano un **sottospazio** di \mathbb{R}^4 di **dimensione 2**.

In generale, k vettori LI non nulli di \mathbb{R}^n generano un **sottospazio** di **dimensione** k .

2 Geometria vettoriale

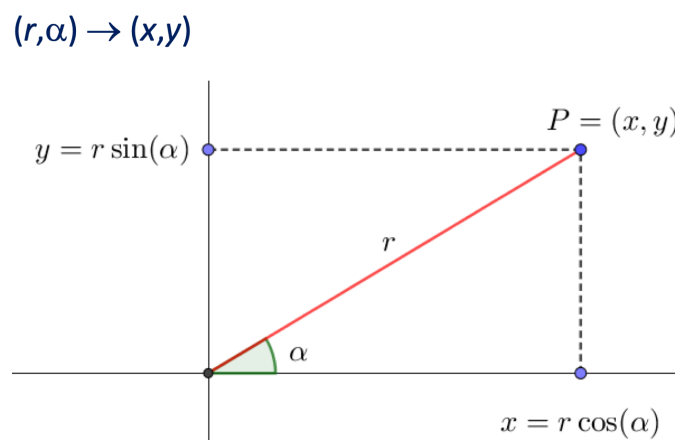
2.1 Coordinate polari

- Coordinate cartesiane, $P = (x, y)$ (ascissa, ordinata)
- Coordinate polari, $P = (r, \alpha)$ (norma, angolo)

Per passare da coordinate polari a coordinate cartesiane si utilizzano rispettivamente $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$. Vale dunque:

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha) \\ y = r \sin(\alpha) \end{cases}$$

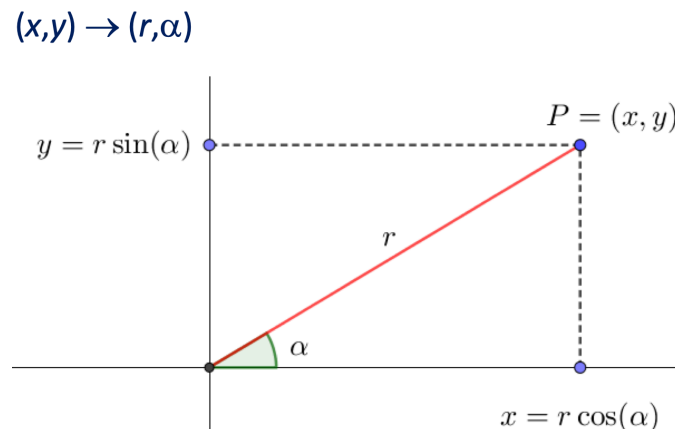
che graficamente appare:



Per passare invece da coordinate cartesiane a coordinate polari dobbiamo stabilire r e α . Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \begin{cases} \cos^{-1}(\frac{x}{r}) & y \geq 0 \\ -\cos^{-1}(\frac{x}{r}) & y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

che graficamente appare:



2.2 Il prodotto scalare

2.2.1 norma

Dato il vettore x si chiama prodotto scalare di x per se stesso e si indica $x \cdot x$ il numero reale

$$\mathbb{R}^2: x \cdot x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$$

dunque la norma è

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

questo vale in qualsiasi dimensione (\mathbb{R}^n).

La norma è un valore sempre maggiore o, nel caso il vettore fosse nullo, uguale a zero. Inoltre possiede due proprietà interessanti:

- **disuguaglianza triangolare**, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- **omogeneità**, $\|hx\| = |h| \|x\|$

La somma di due norme non è quindi uguale alla norma contenente la somma dei due vettori (disuguaglianza triangolare).

2.2.2 I versori

I versori sono vettori di norma 1, per fare diventare un vettore generico $\|x\|$ di norma 1 si può fare

$$\frac{1}{\|x\|} x \quad \text{questo vettore ha norma 1}$$

Allo stesso modo se vogliamo farlo diventare, per esempio, di norma 7 possiamo scriverlo come

$$\frac{7}{\|x\|} x \quad \text{questo vettore ha norma 7}$$

2.2.3 Prodotto scalare $x \cdot y$

Dati i vettori $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, si chiama prodotto scalare di x e y , e si indica $x \cdot y$, il numero reale

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Di base se prendiamo due vettori tramite l'angolo che generano possiamo determinare:

- se $\alpha > 90^\circ$ il prodotto scalare è negativo
- se $\alpha = 90^\circ$ il prodotto scalare è 0
- se $\alpha < 90^\circ$ il prodotto scalare è positivo

2.2.4 Teorema del prodotto scalare

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos(\alpha)$$

dalla quale possiamo ricavare

$$\cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

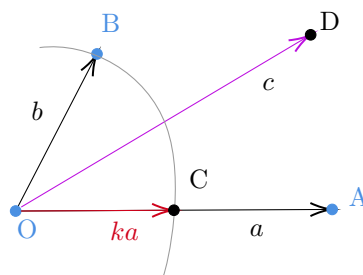
e quindi

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} \right)$$

Nota: $\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180} \alpha^\circ$

2.2.5 Applicazioni

- **Vettore bisecante:** Dati due vettori \vec{a} e \vec{b} si vuole costruire un vettore \vec{c} che divide l'angolo tra \vec{a} e \vec{b} in due angoli uguali:



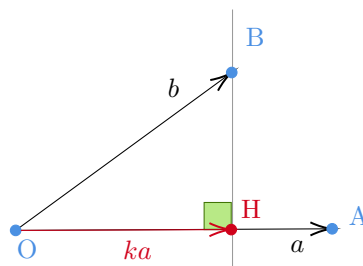
1. Si costruisce un vettore ka che abbia la stessa norma di b
2. Un vettore che biseca l'angolo tra a e b , ad esempio $ka + b$

Esempio $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

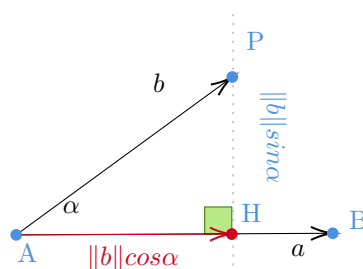
$$\|a\| = 7, \|b\| = 3 \Rightarrow \frac{1}{7}a \text{ ha norma } 1 \Rightarrow \frac{3}{7}a \text{ ha norma } 3$$

$$\frac{3}{7}a + b = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 24/7 \\ 12/7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17/7 \\ 31/7 \\ 26/7 \end{bmatrix}$$

- **Proiezione vettore su vettore:** $pro(b, a) = \frac{b \cdot a}{a \cdot a} a$ dove $k = \frac{b \cdot a}{a \cdot a}$



- **Proiezione punto su retta:** $H = A + A\vec{H} = A + pro(b, a)$, restituisce un punto



2.3 Il prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale è un'operazione che esiste solo in \mathbb{R}^3 , dati due vettori \vec{a} e \vec{b} tramite il prodotto vettoriale è possibile definire un vettore \vec{c} ortogonale agli altri due. Di conseguenza se \vec{a} e \vec{b} sono LI si costruisce una base di \mathbb{R}^3 .

Dati due vettori $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, si definisce prodotto vettoriale tra i due, e si scrive $u \times v$, il vettore

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

Nota: il prodotto vettoriale non è commutativo, $e_1 \times e_2 \neq e_2 \times e_1$

Ecco alcune proprietà:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \end{array}$$

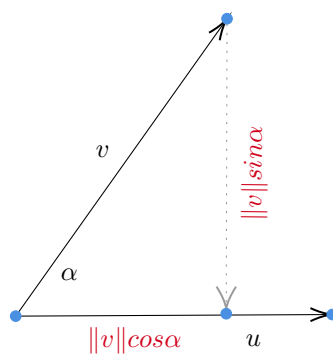
$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$$

- Se $u \times v > 0$ l'orientamento è anti orario
- Se $u \times v < 0$ l'orientamento è orario

2.3.1 Teorema

Se $u, v \in \mathbb{R}^3$ allora

$$\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin(\alpha)$$



2.3.2 Area del parallelogramma

- $\|v\| \sin(\alpha)$ è l'altezza del parallelogramma generato da u e v
- $\|u \times v\|$ è l'area del parallelogramma generato da u e v
- $\frac{1}{2} \|u \times v\|$ è l'area del triangolo generato da u e v

$$\sin(\alpha) = \frac{\|u \times v\|}{\|u\| \|v\|}$$

e quindi

$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{\|u \times v\|}{\|u\| \|v\|} \right)$$

2.4 Il prodotto misto

Il prodotto misto si fa tra 3 vettori e ritorna uno scalare (un numero) e non un vettore.

$$(a \times b) \cdot c$$

che è uguale al **volume** del parallelepipedo generato da a, b, c .

- $(a \times b) \cdot c > 0 \Rightarrow a, b, c$ è una terna destrorsa
- $(a \times b) \cdot c < 0 \Rightarrow a, b, c$ è una terna sinistrorsa
- $(a \times b) \cdot c = 0 \Rightarrow a, b, c$ sono linearmente dipendenti

2.4.1 Proprietà

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{c} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times k\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot k\mathbf{c} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\ (h\mathbf{a}) \times (j\mathbf{b}) \cdot (k\mathbf{c}) &= (hjk)(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \end{aligned}$$

2.4.2 Allineamento di 3 punti

- **Metodo 1:** i punti A, B, C sono allineati se e solo se $AC = kAB$
- **Metodo 2 (in \mathbb{R}^3):** i punti A, B, C sono allineati se e solo se $AB \times AC = 0$

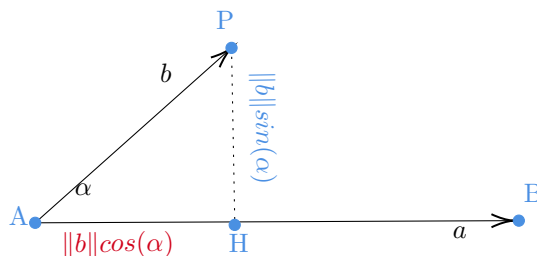
2.4.3 Complanarità di 4 punti

$$(AB \times AC) \cdot AD = 0$$

se $n = AB \times AC$ dà un vettore ortogonale al piano ABC , il punto D invece appartiene a questo piano se e solo se AD è ortogonale a n , ovvero se $n \cdot AD$ è nullo.

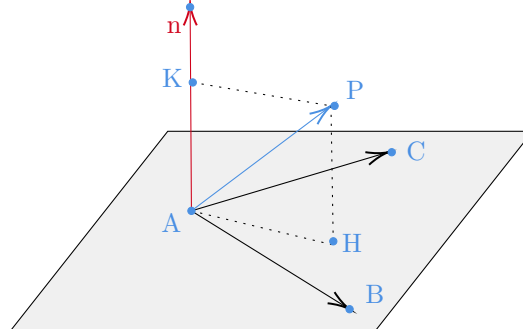
2.4.4 Distanze

- Dal punto P al punto A : $\sqrt{AP \cdot AP}$
- Dal punto P alla retta AB : $\frac{\|AB \times AP\|}{\|AB\|}$



- Dal punto P al piano ABC : $\frac{\|AB \times AC \cdot AP\|}{\|AB \times AC\|}$

2.4.5 Proiezione di un punto su un piano



1. $n = AB \times AC$
2. $AK = \text{proiezione di } AP \text{ su } n$
3. $H = P + PH = P + KA$

Nota: possiamo usare qualsiasi vettore parallelo a n .