Algebra Lineare

SUPSI Dipartimento Tecnologie Innovative

Gianni Grasso

3 ottobre 2024

Classe: I1B

Anno scolastico: 2024/2025

Indice

1 Vettori

Un vettore serve per rappresentare oggetti multidimensionali, ad esempio per le informazioni di un aereo potremmo avere un vettore con [velocità, direzione, altezza, potenza] o più semplicemente per descrivere una velocità potremmo usare $\vec{v} = [V_x, V_y]$.

1.1 Operazioni fondamentali

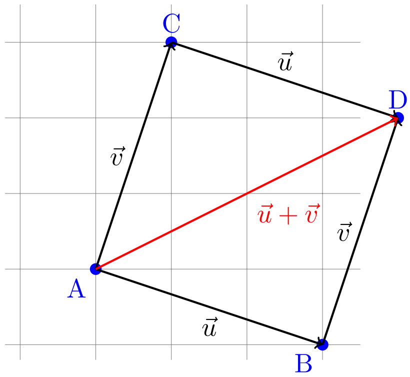
1.1.1 La somma

Quando sommiamo due vettori quello che facciamo effettivamente è la somma dei componenti, è importante che i due vettori abbiano la stessa dimensione, vale quindi:

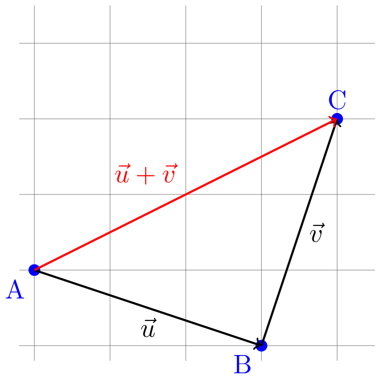
$$x = [x_1, ..., x_n], y = [y_1, ..., y_n] \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x + y = [x_1 + y_1, ..., x_n + y_n]$$

Le modalità di somma dei vettori da un punto di vista geometrico sono principalmente due:

1. Metodo del parallelogramma: $AB + AC = AD$



2. Metodo punta-coda: $AB + BD = AD$



1.1.2 Moltiplicazione scalare

È possibile moltiplicare un qualsiasi vettore con un numero reale k, il prodotto di tale operazione è un vettore kx che ha al suo interno il valore di ogni suo componente moltiplicato per k, ovvero:

$$x = [x_1, ..., x_n] \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \Rightarrow kx = [kx_1, kx_2, ..., kx_n]$$

Ecco un semplice esempio di una moltiplicazione di un vettore con un numero reale:

$$3 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot \quad 3 \\ 3 \cdot (-5) \\ 3 \cdot \quad 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 9 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1.2 Combinazioni lineari

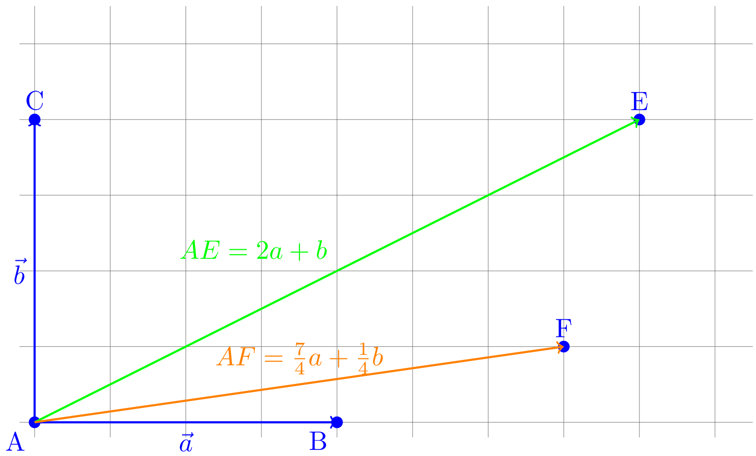
Si chiama combinazione lineare dei vettori $x_1, x_2, ..., x_m$ con coefficienti (numeri scalari) $c_1, c_2, ..., c_m$ il vettore

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_mx_m$$

Facciamo un semplice esempio per rendere meglio l'idea, mettiamo caso che dati due vettori $u = [5, -8, -5]$ e $v = [-6, 5, -6]$, vogliamo trovare la combinazione lineare $2u - 3v$:

$$2\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -31 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ora da un punto di vista geometrico cerchiamo di esprimere AE e AF come combinazioni lineari dei due vettori $\vec{a} = AB$ e $\vec{b} = AC$.



Nota: se due vettori sono paralleli (cioè hanno la stessa direzione) la loro somma sarà anch'essa parallela ai vettori originali. Possiamo quindi determinare se due vettori sono paralleli ($x \parallel y$) stabilendo se esiste un numero reale k tale che $y = kx$. 0 è parallelo a qualunque vettore.

Se al contrario due vettori non sono paralleli, la loro somma darà come risultato un vettore con una direzione diversa rispetto ad entrambi.

1.2.1 Generare tutti i vettori di $\mathbb{R}^2$

Teorema: se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ sono non paralleli, allora è possibile esprimere qualunque vettore $\vec{w}$ di $\mathbb{R}^2$ come combinazione lineare di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ in un unico modo.

Per rappresentare un vettore come combinazione lineare di altri due vettori occorre creare un sistema e separare le componenti:

Esempio: esprimere $\vec{w} = [6, 4]$ come CL dei vettori $\vec{u} = [3, 1]$ e $\vec{v} = [1, 2]$

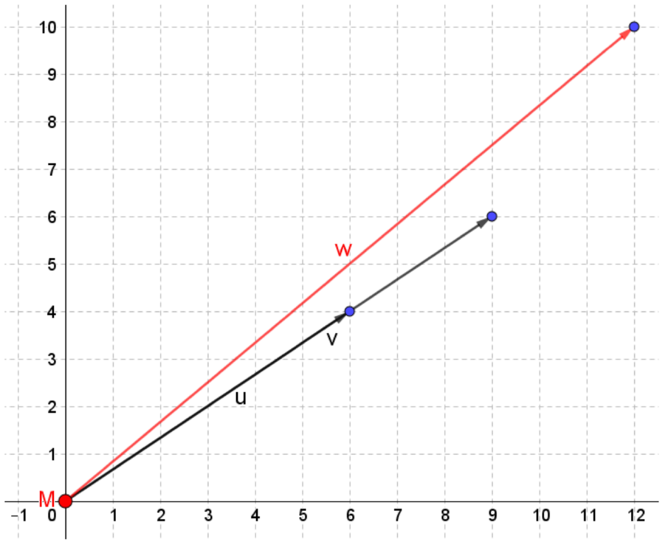
$$h\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3h + k = 6 \\ h + 2k = 4 \end{cases}$$

Questa dimostrazione vale solo se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ non sono paralleli, in caso contrario $(\vec{u}||\vec{v})$ il risultato del sistema risulterà impossibile.

Esempio: esiste una combinazione lineare dei vettori $\vec{u} = [6, 4]$ e $\vec{v} = [9, 6]$ che dia il vettore $\vec{w} = [12, 10]$?

$$h\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\10\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases}6h + 9k = 12\\4h + 6k = 10\end{cases}$$

Provando a risolvere il sistema si ottiene $8 = 10$ (il sistema non ammette soluzioni), quindi non è possibile esprimere $\vec{w} = [12, 10]$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{u} = [6, 4]$ e $\vec{v} = [9, 6]$, poiché $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli. Ciò significa che tramite combinazioni lineari di questi due vettori si possono ottenere **solo** i vettori che hanno la stessa direzione di $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Graficamente risulta così:



1.2.2 CAS Geogebra

Abbiamo capito quindi che per determinare una combinazione lineare tra più vettori è importante riuscire a creare un sistema di equazioni. Per quanto riguarda però la risoluzione possiamo usare il CAS di Geogebra, tramite lo strumento Risolvi gli passiamo come parametri la lista di equazioni e le variabili di riferimento.

Risolvi({2x+5y=8, 4x+5y=6},{x,y})
$\rightarrow \{\{x = -1, y = 2\}\}$

Il sistema ammette una sola soluzione

Risolvi({2x+5y=8, 2x+5y=6},{x,y})
$\rightarrow \{\}$

Il sistema non ammette soluzioni

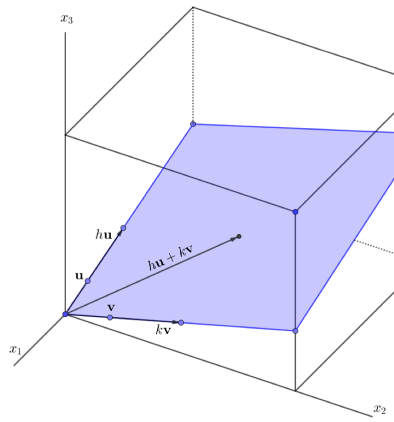
Risolvi({2x+5y=8, 4x+10y=16},{x,y})
$\rightarrow \left\{\left\{x = \frac{-5}{2}\, y + 4, y = y\right\}\right\}$

Il sistema ammette infinite soluzioni

1.2.3 Generare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$

Teorema: se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sono non complanari (non appartengono allo stesso piano e quindi nessuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri due), allora è possibile esprimere qualunque vettore $\vec{z}$ di $\mathbb{R}^3$ come combinazione lineare di $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ in un <u>unico</u> modo.

In questo caso, prendendo sempre due vettori non paralleli, possiamo generare un piano su $\mathbb{R}^3$, tuttavia vale lo stesso discorso di prima, in questo caso si possono generare **solo** i vettori che si trovano su quel piano:



In questo caso per generare tutti i vettori possibili occorrono 3 vettori, possono essere vettori qualsiasi purché non siano complanari, ovvero nessuno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri (non si hanno vettori paralleli). Avendo tre vettori $\vec{w}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ non si può esprimere come combinazione lineare degli altri due significa che abbiamo tre vettori validi per poter generare ogni vettore in $\mathbb{R}^3$.

1.3 Dipendenza e indipendenza lineare

Per generare i vettori di $\mathbb{R}^n$ sono necessari e sufficienti n vettori, purché nessuno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri.

1.3.1 Definizione

Si dice che i vettori $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente indipendenti (LI)** se nessuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri, altrimenti si dicono **linearmente dipendenti (LD)**.

Possiamo dire quindi che una **base** di $\mathbb{R}^n$ è formata da n vettori **linealmente indipendenti**. Una **base** è una lista di vettori LI che generano $\mathbb{R}^n$.

1.3.2 Teorema

Per evitare di verificare che ogni vettore di un sistema non si possa esprimere come CL degli altri, possiamo usare un'altra strada.

Teorema. I vettori $x_1 ... x_m \in \mathbb{R}^n$ sono **linearmente indipendenti** se e solo se l'unica loro combinazione lineare che dà il vettore nullo 0 è la combinazione banale:

$$0x_1 + ... + 0x_m = 0$$

In questo modo occorre risolvere un solo sistema lineare **omogeneo** (con i termini noti tutti nulli).

Se ad esempio vogliamo stabilire se i vettori $a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, b\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, c\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ sono LI o LD, diventa:

$$h\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + j\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

1.3.3 Interpretare i risultati

Una volta che abbiamo il sistema, possiamo inserirlo in Geogebra utilizzando la funzione **Risolvi** con la sintassi vista nel capitolo scorso. Se l'unico valore possibile dei coefficienti è 0 (ammette **solo** la soluzione banale), allora i vettori sono LI.

```
Risolvi({h+4j+7k=0,2h+5j+8k=0,3h+6j+8k=0},{h,j,k})
→ {{h = 0, j = 0, k = 0}}
```

In caso contrario, significa che i vettori sono LD.

```
Risolvi({h+4j+7k=0,2h+5j+8k=0,3h+6j+9k=0},{h,j,k}
→ {{h = k, j = −2 k, k = k}}
```

Facciamo un esempio più pratico per notare qualche altro dettaglio. Proviamo a stabilire se i vettori $a\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, b\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}, c\begin{pmatrix}9\\10\\11\\12\end{pmatrix}, d\begin{pmatrix}13\\14\\15\\16\end{pmatrix}$ sono LI o LD.

```
Risolvi({h+5j+9k+13l=0,2h+6j+10k+14l=0,3h+7j+11k+15l=0,4h+8j+12k+16l=0},{h,j,k,l})
→ {{h = k + 2 l, j = −2 k − 3 l, k = k, l = l}}
```

Notiamo per prima cosa che i vettori sono LD. Inoltre ci sono due variabili libere ($k = k, l = l$), ciò significa che ci sono solo 2 vettori LI ($4 - 2 = 2$), per verificare quali dovremmo vedere i singoli casi. Infine sappiamo che a, b, c, d generano un **sottospazio** di $\mathbb{R}^4$ di **dimensione** 2.

In generale, k vettori LI non nulli di $\mathbb{R}^n$ generano un **sottospazio** di **dimensione** k.