

Algebra Lineare

SUPSI Dipartimento Tecnologie Innovative

Gianni Grasso

29 settembre 2024

Classe: I1B

Anno scolastico: 2024/2025

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Operazioni fondamentali	3
1.1.1	La somma	3
1.1.2	Moltiplicazione scalare	3
1.2	Combinazioni lineari	4
1.2.1	Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^2	4
1.2.2	CAS Geogebra	5
1.2.3	Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^3	5

1 Introduzione

Un vettore serve per rappresentare oggetti multidimensionali, ad esempio per le informazioni di un aereo potremmo avere un vettore con [velocità, direzione, altezza, potenza] o più semplicemente per descrivere una velocità potremmo usare $\vec{v} = [V_x, V_y]$.

1.1 Operazioni fondamentali

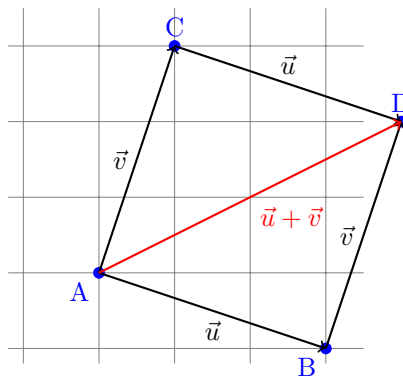
1.1.1 La somma

Quando sommiamo due vettori quello che facciamo effettivamente è la somma dei componenti, è importante che i due vettori abbiano la stessa dimensione, vale quindi:

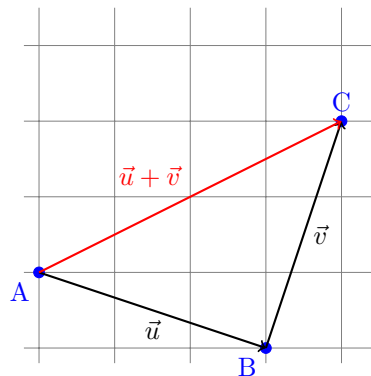
$$x = [x_1, \dots, x_n], y = [y_1, \dots, y_n] \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x + y = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$$

Le modalità di somma dei vettori da un punto di vista geometrico sono principalmente due:

1. Metodo del parallelogramma: $AB + AC = AD$



2. Metodo punta-coda: $AB + BD = AD$



1.1.2 Moltiplicazione scalare

È possibile moltiplicare un qualsiasi vettore con un numero reale k , il prodotto di tale operazione è un vettore kx che ha al suo interno il valore di ogni suo componente moltiplicato per k , ovvero:

$$x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R} \Rightarrow kx = [kx_1, kx_2, \dots, kx_n]$$

Ecco un semplice esempio di una moltiplicazione di un vettore con un numero reale:

$$3 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-5) \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 9 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1.2 Combinazioni lineari

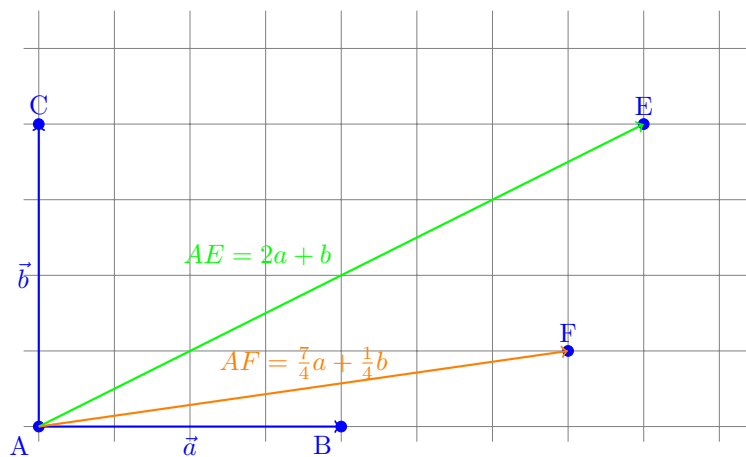
Si chiama combinazione lineare dei vettori x_1, x_2, \dots, x_m con coefficienti (numeri scalari) c_1, c_2, \dots, c_m il vettore

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m$$

Facciamo un semplice esempio per rendere meglio l'idea, mettiamo caso che dati due vettori $u = [5, -8, -5]$ e $v = [-6, 5, -6]$, vogliamo trovare la combinazione lineare $2u - 3v$:

$$2 \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -31 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Ora da un punto di vista geometrico cerchiamo di esprimere AE e AF come combinazioni lineari dei due vettori $\vec{a} = AB$ e $\vec{b} = AC$.



Nota: se due vettori sono paralleli (cioè hanno la stessa direzione) la loro somma sarà anch'essa parallela ai vettori originali. Possiamo quindi determinare se due vettori sono paralleli ($x \parallel y$) stabilendo se esiste un numero reale k tale che $y = kx$. 0 è parallelo a qualunque vettore.

Se al contrario due vettori non sono paralleli, la loro somma darà come risultato un vettore con una direzione diversa rispetto ad entrambi.

1.2.1 Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^2

Teorema: se $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ sono non paralleli, allora è possibile esprimere qualunque vettore \vec{w} di \mathbb{R}^2 come combinazione lineare di \vec{u} e \vec{v} in un unico modo.

Per rappresentare un vettore come combinazione lineare di altri due vettori occorre creare un sistema e separare le componenti:

Esempio: esprimere $\vec{w} = [6, 4]$ come CL dei vettori $\vec{u} = [3, 1]$ e $\vec{v} = [1, 2]$

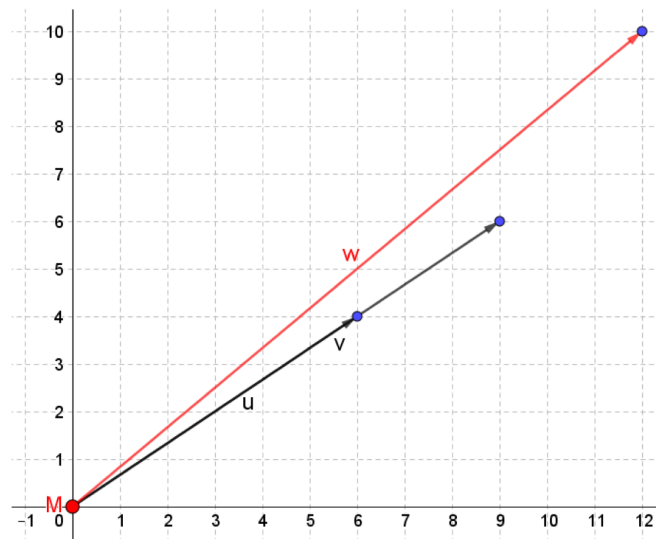
$$h \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3h + k = 6 \\ h + 2k = 4 \end{cases}$$

Questa dimostrazione vale solo se \vec{u} e \vec{v} non sono paralleli, in caso contrario ($\vec{u} \parallel \vec{v}$) il risultato del sistema risulterà impossibile.

Esempio: esiste una combinazione lineare dei vettori $\vec{u} = [6, 4]$ e $\vec{v} = [9, 6]$ che dia il vettore $\vec{w} = [12, 10]$?

$$h \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6h + 9k = 12 \\ 4h + 6k = 10 \end{cases}$$

Provando a risolvere il sistema si ottiene $8 = 10$ (il sistema non ammette soluzioni), quindi non è possibile esprimere $\vec{w} = [12, 10]$ come combinazione lineare dei vettori $\vec{u} = [6, 4]$ e $\vec{v} = [9, 6]$, poiché \vec{u} e \vec{v} sono paralleli. Ciò significa che tramite combinazioni lineari di questi due vettori si possono ottenere **solo** i vettori che hanno la stessa direzione di \vec{u} e \vec{v} . Graficamente risulta così:



1.2.2 CAS Geogebra

Abbiamo capito quindi che per determinare una combinazione lineare tra più vettori è importante riuscire a creare un sistema di equazioni. Per quanto riguarda però la risoluzione possiamo usare il CAS di Geogebra, tramite lo strumento Risolvi gli passiamo come parametri la lista di equazioni e le variabili di riferimento.

Risolvi($\{2x+5y=8, 4x+5y=6\}, \{x,y\}$)
 $\rightarrow \{\{x = -1, y = 2\}\}$

Il sistema ammette una sola soluzione

Risolvi($\{2x+5y=8, 2x+5y=6\}, \{x,y\}$)
 $\rightarrow \{\}$

Il sistema non ammette soluzioni

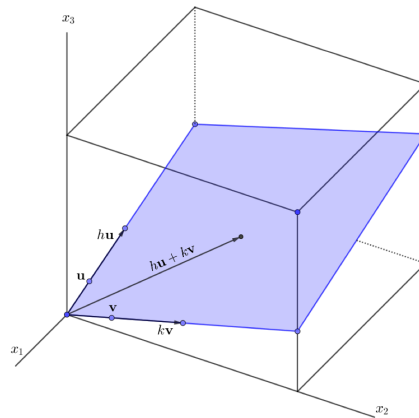
Risolvi($\{2x+5y=8, 4x+10y=16\}, \{x,y\}$)
 $\rightarrow \left\{ \left\{ x = \frac{-5}{2} y + 4, y = y \right\} \right\}$

Il sistema ammette infinite soluzioni

1.2.3 Generare tutti i vettori di \mathbb{R}^3

Teorema: se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sono non complanari (non appartengono allo stesso piano e quindi nessuno di essi si può esprimere come combinazione lineare degli altri due), allora è possibile esprimere qualunque vettore \vec{z} di \mathbb{R}^3 come combinazione lineare di $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ in un unico modo.

In questo caso, prendendo sempre due vettori non paralleli, possiamo generare un piano su \mathbb{R}^3 , tuttavia vale lo stesso discorso di prima, in questo caso si possono generare **solo** i vettori che si trovano su quel piano:



In questo caso per generare tutti i vettori possibili occorrono 3 vettori, possono essere vettori qualsiasi purché non siano complanari, ovvero nessuno di essi si possa esprimere come combinazione lineare degli altri (non si hanno vettori paralleli). Avendo tre vettori \vec{w} , \vec{u} e \vec{v} , se \vec{w} non si può esprimere come combinazione lineare degli altri due significa che abbiamo tre vettori validi per poter generare ogni vettore in \mathbb{R}^3 .