ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

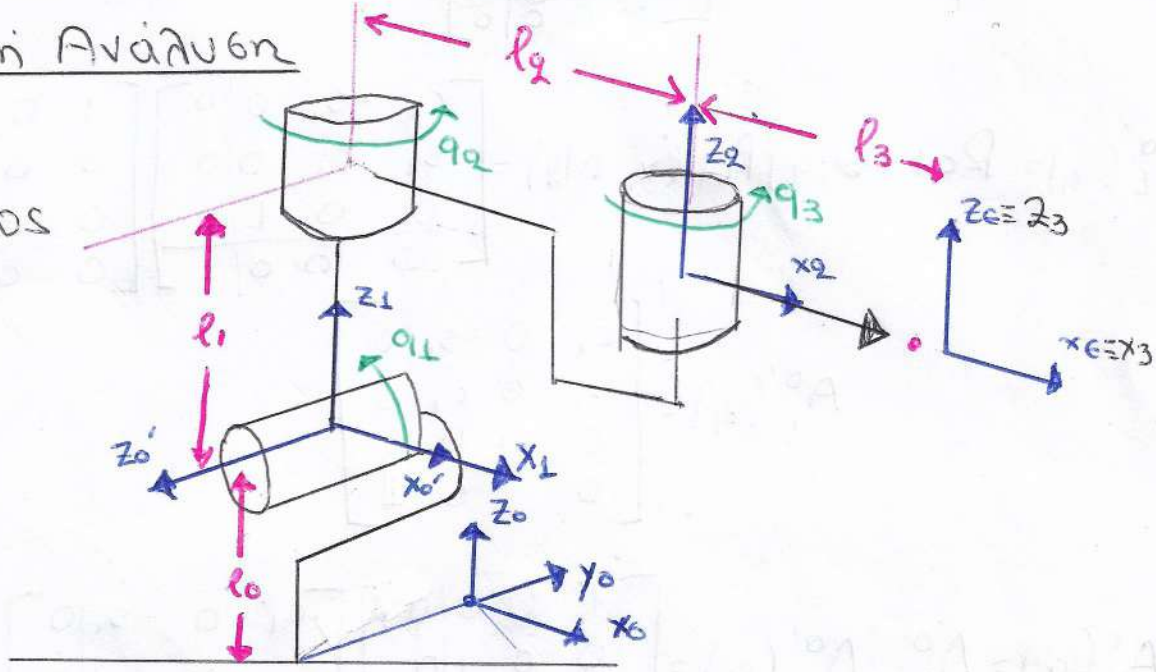
ΣΧΟΛΗ: Η.Μ.Μ.Υ

ΜΑΘΗΜΑ: ΡΟΜΠΟΤΙΚΗ Ι: ΑΝΑΛΥΣΗ, ΕΛΕΓΧΟΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

Εξαμηνιαία Εργασία

Α. Θεωρητική Ανάλυση

Στοιχεία:
Γιαννιός Γεώργιος Ταξίαρχης
03116156



1. Η μέθοδος Denavit-Hartenberg που ακολουθήθηκε παρουσιάζεται παρακάτω. Πιο ειδικά, αφού τοποθετήθηκαν τα πλαίσια σύμφωνα με τους κανόνες:

→ το Σ) αναφοράς της άρθρωσης i τοποθετείται στον άξονα της επόμενης άρθρωσης (i+1) με τον z να προσδιορίζει q

→ Οι z_i: ορίζει q_{i+1}

→ Οι x_i: Στην κοινή κάθετο q_i, q_{i+1} (Στο σημείο τομής κοινής καθέτου και $O z_i$)

Για να ικανοποιείται λοιπόν ο 2ος κανόνας, τοποθετήθηκε πλαίσιο 0', ώστε το $z_{0'}$ να προσδιορίζει q_1.

	$R_{z_{i-1}}$	$T_{z_{i-1}}$	T_{x_i}	R_{x_i}
	θ_i	d_i	a_i	a_i
0'	0	l_0	0	$+\pi/2$
1	q_1	0	0	$-\pi/2$
2	q_2	l_1	l_2	0
3≡E	q_3	0	l_3	0

Προσδιορισμός Κινηματικής Εξίσωσης

$$\bullet A^{0}_{0'} = Tra(z, l_0) \cdot Rot(x, \pi/2) = \left[\begin{array}{c|c} I_3 & \begin{matrix}0\\0\\l_0\end{matrix} \\ \hline 000 & 1\end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$A^{0}_{0'} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$\hat{b}_{0'}$ $\quad r_{00'}$

$$\bullet A^{0'}_{1}(q_1) = Rot(z, q_1) Rot(x, -\pi/2) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$A^{0'}_{1}(q_1) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\bullet A^{0}_{1}(q_1) = A^{0}_{0'} \cdot A^{0'}_{1}(q_1) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$\hat{b}_1$

$$A^{0}_{1}(q_1) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & l_0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \quad r_{01}$$

$$\bullet A^{1}_{2}(q_2) = Rot(z, q_2) \cdot Tra(z, l_1) \cdot Tra(x, l_2) = \left[\begin{array}{cccc} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} I_3 & \begin{matrix}l_2\\0\\l_1\end{matrix} \\ \hline 000 & 1\end{array}\right]$$

$$A^{1}_{2}(q_2) = \left[\begin{array}{cccc} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$A^0_2(q_1,q_2) = A^0_1(q_1)\cdot A^1_2(q_2) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ s_1 & 0 & c_1 & l_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2\\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_2\\ 0 & 0 & 1 & l_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc} & & \hat{b}_2 & r_{02} \end{array}$$

$$A^0_2(q_1,q_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1\\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_2\\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & l_0 + s_1 c_2 l_2 + c_1 l_1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$A^2_3(q_3) = Rot(z,q_3)\cdot Tra(x,l_3) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_3 & -s_3 & 0 & 0\\ s_3 & c_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I_3 & \begin{matrix} l_3\\ 0\\ 0\end{matrix}\\ \hline 0\;0\;0 & 1\end{array}\right]$$

$$A^2_3(q_3) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_3 & -s_3 & 0 & c_3 l_3\\ s_3 & c_3 & 0 & s_3 l_3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$A^0_3(q_1,q_2,q_3) = A^0_2(q_1,q_2)\cdot A^2_3(q_3) = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & -s_1 & c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1\\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_2\\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & l_0 + s_1 c_2 l_2 + c_1 l_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & c_3 l_3\\ s_3 & c_3 & 0 & s_3 l_3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & & & r_{03} \end{array}$$

$$A^0_3(q_1,q_2,q_3) = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & -s_1 & c_1 l_3 c_{23} + c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1\\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_3 s_{23} + s_2 l_2\\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & s_1 l_3 c_{23} + l_0 + c_1 l_1 + s_1 c_2 l_2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

όπου $\underline{P}_E = A^0_3(q_1,q_2,q_3)\cdot \underline{q}$ η κινηματική εξίσωση

Προσδιορισμός Ιακωβιανής μήτρας J.

Για $i=1$

$$J_{L1} = \hat{b}_{0'} \times r_{0'E} \ , \ r_{0'E} = r_{0E} - r_{00'}$$

$$J_{A1} = b_{0'} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{L1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 l_3 c_{23} + c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1 \\ l_3 s_{23} + s_2 l_2 \\ s_1 l_3 c_{23} + s_1 c_2 l_2 + c_1 l_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1 c_{23} l_3 - s_1 c_2 l_2 - c_1 l_1 \\ 0 \\ c_1 l_3 c_{23} + c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1 \end{pmatrix}$$

Για $i=2$

$$J_{L2} = \hat{b}_1 \times r_{1E} \quad \text{με } r_{1E} = r_{0E} - r_{01} = r_{0E} - r_{00'} = r_{0'E}$$

$$J_{A2} = b_1 = \begin{pmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$$J_{L2} = \begin{pmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 l_3 c_{23} + c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1 \\ l_3 s_{23} + s_2 l_2 \\ s_1 l_3 c_{23} + s_1 c_2 l_2 + c_1 l_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 s_{23} l_3 - c_1 s_2 l_2 \\ c_{23} l_3 + l_2 c_2 \\ -s_1 s_{23} l_3 - s_1 s_2 l_2 \end{pmatrix}$$

Για $i=3$

$$J_{L3} = \hat{b}_2 \times r_{2E} \ , \ r_{2E} = r_{0E} - r_{02}$$

$$J_{A3} = \hat{b}_2 = \begin{pmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}$$

$$J_{L3} = \begin{pmatrix} -s_1 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 l_3 c_{23} \\ l_3 s_{23} \\ s_1 l_3 c_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_3 s_{23} c_1 \\ l_3 c_{23} \\ -s_1 l_3 s_{23} \end{pmatrix}$$

Τελικά η Ιακωβιανή μήτρα είναι:

$$J = \left[\begin{array}{c|c|c} -s_1 c_{23} l_3 - s_1 c_2 l_2 - c_1 l_1 & -c_1 s_{23} l_3 - c_1 s_2 l_2 & -l_3 s_{23} c_1 \\ 0 & c_{23} l_3 + l_2 c_2 & l_3 c_{23} \\ c_1 c_{23} l_3 + c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1 & -s_1 s_{23} l_3 - s_1 s_2 l_2 & -s_1 l_3 s_{23} \\ \hline 0 & -s_1 & -s_1 \\ -1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{array}\right]$$

Ιδιόμορφες διατάξεις ως προς γραμμική ταχύτητα.

$$\det|J_L| = 0 \Leftrightarrow -(s_1 c_{23} l_3 + s_1 c_2 l_2 + c_1 l_1)\left(-(c_{23} l_3 + l_2 c_2) s_1 s_{23} l_3 + c_{23} l_3 (s_1 s_{23} l_3 + s_1 s_2 l_2)\right) + c_1 c_{23} l_3 + c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1 \left(-c_{23} l_3 (c_1 s_{23} l_3 + c_1 s_2 l_2) + s_{23} c_1 l_3 (c_{23} l_3 + l_2 c_2)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -(s_1 c_{23} l_3 + s_1 c_2 l_2 + c_1 l_1) s_1 l_2 l_3 (s_2 c_{23} - c_2 s_{23}) - (c_1 c_{23} l_3 + c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1) c_1 l_2 l_3 (-c_2 s_{23} + s_2 c_{23}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (s_2 c_{23} - c_2 s_{23}) l_2 l_3 \left[-s_1^2 c_{23} l_3 - s_1^2 c_2 l_2 - c_1^2 c_{23} l_3 - c_1^2 c_2 l_2\right] = 0 -$$

$$\Leftrightarrow s_3 l_2 l_3 (c_{23} l_3 + c_2 l_2) = 0$$

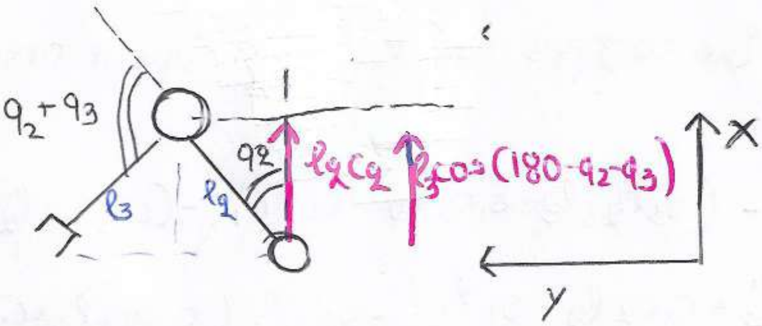
$$\Leftrightarrow s_3 = 0 \text{ ή } c_{23} l_3 + c_2 l_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (q_3 = 0 \text{ ή } q_3 = \pi \text{ ή } c_{23} l_3 + c_2 l_2 = 0)$$

Η περίπτωση $q_3 = 0$ αποτελεί ιδιομορφία, καθώς στην περίπτωση αυτή χάνεται ένας βαθμός ελευθερίας (ο ένας σύνδεσμος ευθυγραμμίζεται με τον άλλον. Το end effector δεν μπορεί να αναπτύξει ταχύτητα κατά μήκος της ακτίνας του κύκλου με κέντρο άρθρωση q_2)
Η περίπτωση $q_3 = \pi$ αποτελεί ιδιομορφία, μιας και ο ένας σύνδεσμος πέφτει πάνω στον άλλον.

Η περίπτωση $c_{23} l_3 + c_2 l_2 = 0 \Leftrightarrow l_2 c_2 = -l_3 c_{23} \Leftrightarrow l_2 c_2 = l_3 \cos(\pi - q_2 - q_3)$ όπως βλέπουμε και στο ακόλουθο σχήμα αποτελεί ιδιομορφία μιας και ευθυγραμμίζονται η άρθρωση q_2 και το end-effector κατά τον άξονα y. Η q_1 λοιπόν δεν συνεισφέρει στην γωνιακή ταχύτητα. (Μόνο περιστροφική)

Κάτοψη:



Εύρεση J_L^{-1}

$$J_L^{-1} = \frac{1}{\det J_L} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

όπου $A_{11} = \begin{vmatrix} c_{23} l_3 + l_2 c_2 & c_{23} l_3 \\ -s_1 s_{23} l_3 - s_1 s_2 l_2 & -s_1 s_{23} l_3 \end{vmatrix}$

$$= -s_1 c_{23} \cancel{s_{23}} l_3^2 + s_1 s_{23} \cancel{c_{23}} l_3^2 - s_1 c_2 l_{23} + s_1 s_2 c_{23} l_2 l_3$$
$$= s_1 l_2 l_3 (s_2 c_{23} - c_2 s_{23})$$
$$= -s_1 l_2 l_3 (s_{23} - c_2 s_{23})$$
$$= -s_1 s_3 l_2 l_3$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & c_{23} l_3 \\ c_1 c_{23} l_3 + c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1 & -s_1 s_{23} l_3 \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = c_{23} l_3 \left(c_1 c_{23} l_3 + c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1 \right) \Rightarrow$$

$$\bullet\, A_{12} = c_1 c_{23} l_3 \left(c_{23} l_3 + c_2 l_2 \right) - c_{23} s_1 l_3 l_1$$

$$A_{13} = -\left(c_{23} l_3 + l_2 c_2 \right)\left(c_1 c_{23} l_3 + c_1 c_2 l_2 - s_1 l_1 \right) \Rightarrow$$

$$\bullet\, A_{13} = \left(c_{23} l_3 + l_2 c_2 \right)\left(s_1 l_1 - c_1\left(c_{23} l_3 + c_2 l_2 \right) \right)$$

$$A_{21} = \cancel{s_1 c_1 s_{23}^2 l_3^2} + \cancel{s_1 c_1 s_2 s_{23} l_2 l_3} - \cancel{s_1 c_1 s_{23}^2 l_3^2} - \cancel{s_1 s_2 c_1 s_{23} l_2 l_3} \Rightarrow$$

$$\bullet\, A_{21} = 0$$

$$A_{22} = s_1^2 s_{23} c_{23} l_3^2 + s_1^2 c_2 s_{23} l_2 l_3 + s_1 c_1 s_{23} l_1 l_3 + c_1^2 c_{23} s_{23} l_3^2 +$$
$$c_1^2 c_2 s_{23} l_2 l_3 - s_1 c_1 s_{23} l_3 l_1 \Rightarrow$$

$$\bullet\, A_{22} = l_3^2 s_{23} c_{23} + c_2 s_{23} l_2 l_3 \Rightarrow A_{22} = l_3 s_{23} \left(l_3 c_{23} + c_2 l_2 \right)$$

$$A_{23} = s_1^2 s_{23} c_{23} l_3 + s_1^2 c_2 s_{23} l_2 l_3 + s_1 c_1 \cancel{s_{23}} l_1 l_3$$
$$+ s_1^2 s_2 c_{23} l_2 l_3 + s_1^2 c_2 s_2 l_2^2 + s_1 s_2 \cancel{c_1} l_1 l_2$$
$$+ c_1^2 c_{23} s_{23} l_3^2 + c_1^2 s_2 c_{23} l_2 l_3$$
$$+ c_1^2 c_2 s_{23} l_2 l_3 + c_1^2 c_2 s_2 l_2^2$$
$$- c_1 s_1 \cancel{s_{23}} l_1 l_3 - c_1 s_1 s_2 \cancel{l_1} l_2$$
$$= c_{23} l_3 \left(s_{23} l_3 + l_2 s_2 \right) + c_2 l_2 \left(s_{23} l_3 + s_2 l_2 \right)$$
$$= \left(c_{23} l_3 + c_2 l_2 \right)\left(s_{23} l_3 + l_2 s_2 \right)$$

$$A_{31} = -c_1 s_{23} c_{23} l_3^2 - c_1 s_2 c_{23} l_2 l_3 + c_1 s_{23} c_{23} l_3^2 + c_1 c_2 s_{23} l_2 l_3$$

$$= -c_1 l_2 l_3 (s_{23} c_2 - c_{23} s_2)$$

$$= c_1 l_2 l_3$$

$$A_{32} = c_{23} l_3 (-s_1 c_{23} l_3 - s_1 c_2 l_2 - c_1 l_1)$$

$$A_{33} = -s_1 c_{23}^2 l_3^2 - s_1 c_2 c_{23} l_2 l_3 - c_1 c_{23} l_1 l_3 - s_1 c_2 c_{23} l_2 l_3 - s_1 c_2^2 l_2^2$$

$$- c_1 c_2 l_1 l_2 \Rightarrow$$

$$A_{33} = (c_{23} l_3 + l_2 c_2)(-c_1 l_1 - s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23}))$$

οποτε $(J_L^{-1}) = \frac{1}{\det J} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

και το αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο είναι

$$J_L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-s_1}{l_2 c_2 + l_3 c_{23}} & 0 & \frac{c_1}{l_2 c_1 + l_3 c_{23}} \\ \frac{c_1 c_{23}}{l_2 s_3} - \frac{c_{23} l_1 s_1}{l_2 l_3 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})} & \frac{s_{23}}{l_2 s_3} & \frac{c_{23} s_1}{l_2 s_3} + \frac{c_1 l_1 c_{23}}{l_2 s_3 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})} \\ \frac{s_1 l_1 - c_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})}{l_2 l_3 s_3} & -\frac{l_2 s_2 - l_3 s_{23}}{l_2 l_3 s_3} & -\frac{c_1 l_1 + s_1 (l_2 c_2 + l_3 c_{23})}{l_2 l_3 s_3} \end{bmatrix}$$

και $\quad \dot{\underline{q}} = J_L^{-1} \underline{V_E}$

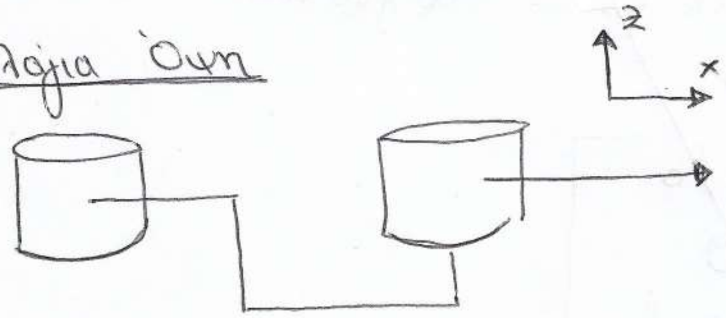
Αντίστροφο Γεωμετρικό Μοντέλο

Το αντίστροφο Γεωμετρικό μοντέλο θα βρεθεί, χωρίζοντας το πρόβλημα σε δυο υποπροβλήματα και ανάγοντας το ένα στο άλλο.

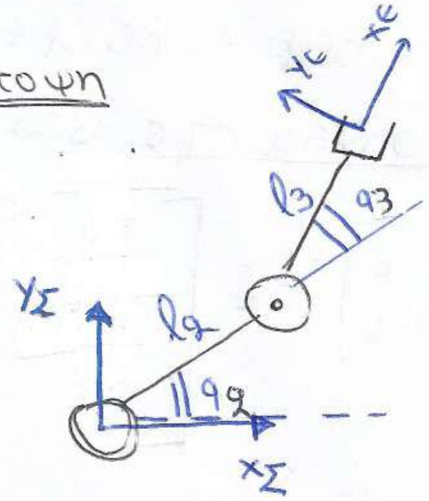
Υποπρόβλημα 1: (2R)

Έστω μια κινηματική αλυσίδα αποτελούμενη από δυο περιστροφικές αρθρώσεις κατά Z.

Πλάγια Όψη



Κάτοψη



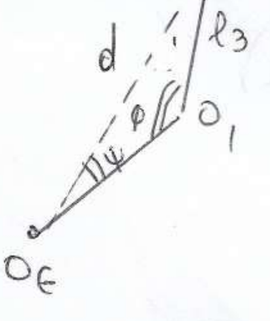
Από τις διαφάνειες του Μαθήματος (Διαφάνεια 7-2 Κινηματική) έχουμε την ακόλουθη ανάλυση:

$$\left.\begin{aligned} {}^{\Sigma}p_x &= l_2 c_2 + l_3 c_{23} \\ {}^{\Sigma}p_y &= l_2 s_2 + l_3 s_{23} \end{aligned}\right\} \Rightarrow {}^{\Sigma}p_x^2 + {}^{\Sigma}p_y^2 = l_2^2 c_2^2 + l_3^2 c_{23}^2 + 2 l_2 l_3 c_2 c_{23} + l_2^2 s_2^2 + l_3^2 s_{23}^2 + 2 l_2 l_3 s_2 s_{23} \Rightarrow$$

$${}^{\Sigma}p_x^2 + {}^{\Sigma}p_y^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2 l_2 l_3 (c_2 c_{23} + s_2 s_{23}) \Rightarrow \boxed{q_3^{\Sigma} = \pm \cos^{-1}\left(\frac{{}^{\Sigma}p_x^2 + {}^{\Sigma}p_y^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}\right)}$$

(1)

Νόμος Συνημιτόνων στο τρίγωνο $O_0 O_1 O_E$:



- $\dfrac{\sin\varphi}{d} = \dfrac{\sin\psi}{l_3} \Leftrightarrow l_3 \sin(\pi - q_3) = d \sin\psi \Rightarrow$

  $\psi = \sin^{-1}\left(\dfrac{l_2 s_3}{d}\right), \quad d = \sqrt{{}^{\Sigma}p_x^2 + {}^{\Sigma}p_y^2}$

- $\tan(q_2 + \psi) = \dfrac{{}^{\Sigma}p_y}{{}^{\Sigma}p_x} \Rightarrow q_2 = \tan^{-1}\left(\dfrac{p_y}{p_x}\right) - \psi$

$$\boxed{q_2^{\Sigma} = \tan^{-1}\left(\frac{{}^{\Sigma}p_y}{{}^{\Sigma}p_x}\right) - \sin\left(\frac{l_2 s_3}{\sqrt{{}^{\Sigma}p_x^2 + {}^{\Sigma}p_y^2}}\right)} \quad (2)$$

Βρήκαμε λοιπόν τα q_2, q_3, συναρτήσει των ${}^{\Sigma}p_y, {}^{\Sigma}p_x$ εκφρασμένα ως προς σύστημα Σ. (Βλ. κάτοψη σελ. 9)

Για το q_1 έχουμε (με βάση το τέχνασμα της Διαφάνειας 76 από κινηματική.

Ισχύει: $A_3^0 = A_1^0 \cdot A_3^1 \Rightarrow A_3^1 = (A_1^0)^{-1} \cdot A_3^0$

$$(A_1^0)^{-1} \stackrel{\text{matlab}}{=} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & -s_1 l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 & -c_1 l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^1 = (A_1^0)^{-1} \cdot A_3^0 \Rightarrow A_3^1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & -s_1 l_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 & -c_1 l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & R_3^0 & & p_x \\ & & & p_y \\ & & & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A_3^1 = \begin{bmatrix} & R_3^1 & & p_x c_1 + s_1 p_z - s_1 l_0 \\ & & & p_y \\ & & & -p_x s_1 + c_1 p_z - c_1 l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όμως $A_3^1 = A_2^1 \cdot A_3^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & c_2 l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & s_2 l_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & c_3 l_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & s_3 l_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} & \times & & \times \\ & & & \times \\ & & & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από εξίσωση πινάκων $\boxed{l_1 = -p_x s_1 + c_1 (p_z - l_0)}$

Θέτω $t=\tan\left(\frac{q_1}{2}\right) \xRightarrow[s=2t/1+t^2]{c=1-t^2/1+t^2}$

Έχω $l_1 = -\frac{p_x 2t}{1+t^2} + \frac{(p_z-l_0)\cdot(1-t^2)}{1+t^2} \Longrightarrow$

$$l_1 + l_1 t^2 = -2p_x t + (p_z-l_0) - (p_z-l_0)t^2 \Rightarrow$$

$$(l_1+(p_z-l_0))t^2 + 2p_x t = (p_z-l_0)-l_1 \Rightarrow$$

$$(l_1+(p_z-l_0))^2 t^2 + 2p_x (l_1+(p_z-l_0))t = (p_z-l_0)^2 - l_1^2 \Rightarrow$$

$$((l_1+(p_z-l_0))t+p_x)^2 = p_x + (p_z-l_0)^2 - l_1^2 \Rightarrow$$

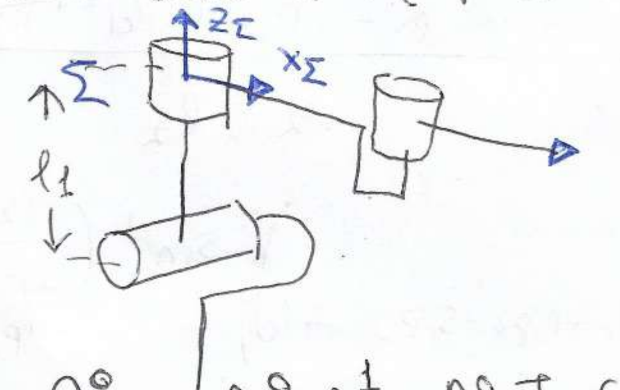
$$(l_1+(p_z-l_0))t + p_x = \sqrt{p_x^2 + (p_z-l_0) - l_1^2} \Rightarrow$$

$$t = \frac{-p_x + \sqrt{p_x^2+(p_z-l_0)-l_1^2}}{l_1+(p_z-l_0)} \Rightarrow$$

$$\tan\left(\frac{q_1}{2}\right) = \frac{-p_x+\sqrt{p_x^2+(p_z-l_0)-l_1^2}}{l_1+p_z-l_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{q_1 = 2\,\mathrm{atan2}\left(-p_x+\sqrt{p_x^2+(p_z-l_0)-l_1^2},\ l_1+p_z-l_0\right)}$$

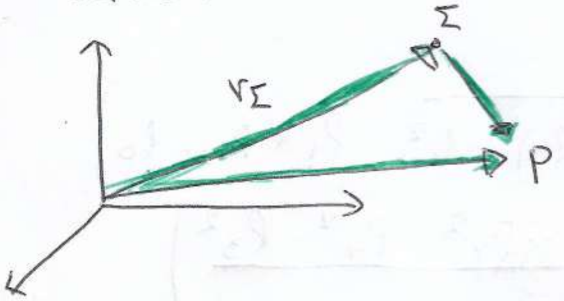
Τέλος μένει να ανάγουμε το πρώτο υποπρόβλημα στο πρώτο. Έστω Σύστημα {Σ} το οποίο βρίσκεται στην θέση Σ:



${}^0R_\Sigma$ $\qquad$ v_Σ

Παρατηρούμε ότι $A^0_\Sigma = A^0_1 \cdot A^1_\Sigma = A^0_1\cdot Tra(z,l_1) = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 l_1\\ 0&1&0&0\\ s_1&0&c_1&c_1l_1+l_0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Στο πρώτο υποπρόβλημα είχαμε υπολογίσει τα q_2, q_3 ως προς το (Σ). Πρέπει να τα υπολογίσουμε ως προς το σύστημα της βάσης.



Ισχύει $p^0 = r_\Sigma + {}^0R_\Sigma \cdot p^\Sigma \Rightarrow {}^0R_\Sigma \cdot p^\Sigma = p^0 - r_\Sigma \Rightarrow$

$$\boxed{p^\Sigma = ({}^0R_\Sigma)^T \cdot p_0 - ({}^0R_\Sigma)^T \cdot r_\Sigma}$$

Οπότε:

$$p_\Sigma = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -s_1 l_1 \\ 0 \\ l_0 + c_1 l_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_1 l_1 \\ 0 \\ l_0 + c_1 l_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 p_x + s_1 p_z - s_1 l_0 \\ p_y \\ * \end{bmatrix}$$

Αδιάφορη τιμή.

Άρα ${}^\Sigma p_x = c_1 p_x + s_1 p_z - s_1 l_0$

${}^\Sigma p_y = p_y$

Με αντικατάσταση στους τύπους ①, ② από ③, ④ έχω

Αρχικά έχουμε:

$$q_1 = 2\,\mathrm{atan2}\left(-p_x + \sqrt{p_x^2 + (p_z - l_0)^2 - l_1^2},\; l_1 + p_z - l_0\right)$$

$$q_3 = \cos^{-1}\left(\frac{(-s_1 l_0 + c_1 p_x + s_1 p_z)^2 + p_y^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}\right)$$

, όπου s_1, c_1 γνωστά από υπολογισμό q_1

$$q_2 = \tan^{-1}\left(\frac{p_y}{(-s_1 l_0 + c_1 p_x + s_1 p_z)}\right) - \sin\left(\frac{l_2 s_3}{\sqrt{p_y^2 + (-s_1 l_0 + c_1 p_x + s_1 p_z)^2}}\right)$$

όπου s_1, c_1, s_3 γνωστά από υπολογισμό q_1, q_2.

Αυτοί οι τύποι χρησιμοποιήθηκαν και σε Matlab. (Αντίστροφη κινηματική). Προσοχή με τη σειρά αυτή!

Τέλος: Γιαννιός Γεώργιος Ταξιάρχης

Αρ. Μητρώου: 031 16 156

ΣΗΜΜΥ 7ο εξάμηνο