Τεχνητή Νοημοσύνη
2η Γραπτή Εργασία

Ιωάννης Δάρας (03115018, el15018@central.ntua.gr, daras.giannhs@gmail.com)

"Leave logic aside... too much thoughts is a clear sign of insomnia."
— Deyth Banger, Jokes From A

---

1 Άσκηση 1

1.1

$$
\begin{aligned}
& p \to (\neg (q \to (r \wedge (s \to t)))) \\
& \equiv p \to (\neg (q \to (r \wedge (\neg s \vee t)))) \\
& \equiv \neg p \vee (\neg (q \to (r \wedge (\neg s \vee t)))) \\
& \equiv \neg p \vee (\neg (\neg q \vee (r \wedge (\neg s \vee t)))) \\
& \equiv \neg p \vee (q \wedge (\neg r \vee (s \wedge \neg t))) \\
& \equiv (\neg p \vee q) \wedge \neg p \vee (\neg r \vee (s \wedge \neg t)) \\
& \equiv (\neg p \vee q) \wedge \neg p \vee (\neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee \neg t) \\
& \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (\neg r \vee s)) \wedge (\neg p \vee (\neg r \vee \neg t)) \\
& \equiv \boxed{(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg t)}
\end{aligned}
$$

1.2

$$\begin{aligned}
&\exists x.\forall y.\exists z.\,((A(x,y,z) \land \neg B(z)) \to \neg\,(\forall w.\,(C(x,w,z) \lor K(y))))\\
&\equiv \exists x.\forall y.\exists z.\,(\neg\,(A(x,y,z) \land \neg B(z)) \lor \neg\,(\forall w.\,(C(x,w,z) \lor K(y))))\\
&\equiv \exists x.\forall y.\exists z.\,((\neg A(x,y,z) \lor B(z)) \lor (\exists w.\neg\,(C(x,w,z) \lor K(y))))\\
&\equiv \exists x.\forall y.\exists z.\,((\neg A(x,y,z) \lor B(z))\,(\exists w.\,(\neg C(x,w,z) \land \neg K(y))))\\
&\equiv \exists x.\forall y.\exists z.\exists w.\,((\neg A(x,y,z) \lor B(z)) \lor (\neg C(x,w,z) \land \neg K(y)))\\
&\equiv \exists x.\forall y.\exists z.\exists w.\,((\neg A(x,y,z) \lor B(z) \lor \neg C(x,w,z)) \land (\neg A(x,y,z) \lor B(z) \lor \neg K(z)))
\end{aligned}$$

Το μετατρέπουμε σε Skolem normal form, οπότε και προκύπτει:

$$\boxed{\big(A(c,y,f(y)) \lor B(f(y)) \lor \neg C(c,g(y),f(y))\big) \land \big(\neg A(c,y,f(y)) \lor B(f(y)) \lor \neg K(f(y))\big)}$$

όπου c είναι μια σταθερά του σύμπαντος Δ και $y \in \Delta$.

Σε μορφή λιστών γράφεται:

$$\{\Big[\big(c,y,f(y)\big), B\big(f(y)\big), \neg C\big(c,g(y),f(y)\big)\Big], \Big[\neg A\big(c,y,f(y)\big), B\big(f(y)\big), \neg K\big(f(y)\big)\Big]\}$$

2 Άσκηση 2

2.1

2.1.1 Μοντέλο

Μια ερμηνεία που είναι μοντέλο είναι η ακόλουθη:

$$\{p=0,\quad q=1,\quad r=1,\quad t=1,\quad t=1,\quad s=1\}$$

2.1.2 Όχι μοντέλο

Μια ερμηνεία που δεν είναι μοντέλο είναι η ακόλουθη:

$$\{p=1,\quad q=0,\quad r=1,\quad t=1,\quad t=1,\quad s=1\}$$

2.2

2.2.1 Μοντέλο

Έστω το σύμπαν $\Delta = \{x \in \mathcal{N}^+, y \in \mathcal{N}^+, z \in \mathcal{N}^+\}$ και η ερμηνεία $\mathcal{I}$ ώστε

$$A^{\mathcal{I}}(x,y,z) = \{(x,y,z) \in \Delta.\quad x < y < z\}$$

Για αυτή την ερμηνεία του κατηγορήματος A έχουμε ότι:

$$\exists x.\forall y.\exists z\,\big(\big(A^{\mathcal{I}}(x,y,z) \land \neg B^{\mathcal{I}}(z)\big)\big) \equiv False$$

Καθώς δεν υπάρχει φυσικός αριθμός που όλοι οι άλλοι φυσικοί αριθμοί είναι αυστηρώς μεγαλύτεροι του. Συνεπώς, λόγω της συνεπαγωγής, έχουμε ότι:

$$\exists x.\forall y.\exists z.\,\big(\big(A^{\mathcal{I}}(x,y,z) \land \neg B^{\mathcal{I}}(z)\big) \to \neg\,\big(\forall w.\,\big(C^{\mathcal{I}}(x,w,z) \lor K^{\mathcal{I}}(y)\big)\big)\big) \equiv True$$

Άρα, για αυτή την ερμηνεία του κατηγόρηματος A έχουμε μοντέλο για κάθε ερμηνεία των κατηγορημάτων B, C, K.

Για λόγους πληρότητας ορίζουμε:

$$\Delta = \{x \in \mathcal{N}^+, y \in \mathcal{N}^+, z \in \mathcal{N}^+\}$$

$$A^{\mathcal{I}}(x, y, z) = \{(x, y, z) \in \Delta. \quad x < y < z\}$$

$$B^{\mathcal{I}}(z) = \{z \in \Delta. \quad True\}$$

$$C^{\mathcal{I}}(x, w, z) = \{(x, w, z) \in \Delta. \quad True\}$$

$$K^{\mathcal{I}}(y) = \{y \in \Delta. \quad False\}$$

2.2.2 Όχι μοντέλο

Έστω το σύμπαν $\Delta = \{x \in \mathcal{N}^+, y \in \mathcal{N}^+, z \in \mathcal{N}^+\}$ και η ερμηνεία $\mathcal{I}$ ώστε:

$$A^{\mathcal{I}}(x, y, z) = \{(x, y, z) \in \Delta. \quad x \leq y \leq z\}$$

$$B^{\mathcal{I}}(z) = \{z \in \Delta. \quad True\}$$

$$C^{\mathcal{I}}(x, w, z) = \{(x, w, z) \in \Delta. \quad w > x > z\}$$

$$K^{\mathcal{I}}(y) = \{y \in \Delta. \quad False\}$$

Για αυτή την ερμηνεία του κατηγορήματος A έχουμε ότι:

$$\exists x.\forall y.\exists z \left(\left(A^{\mathcal{I}}(x, y, z) \land \neg B^{\mathcal{I}}(z) \right) \right) \equiv True$$

καθώς το σύμπαν μας, έχει έναν φυσικό αριθμό που ανήκει σε αυτόν, το $x = 0$, όπου είναι μικρότερος από κάθε αριθμό y και για κάθε αριθμό y υπάρχει ένας αριθμός z, το z=y, που είναι μεγαλύτερος ή ίσος από αυτόν.

Για αυτή την ερμηνεία του κατηγορήματος C έχουμε ότι:

$$\exists x.\exists z.\forall w. \left(C^{I}(x, w, z) \lor K^{\mathcal{I}}(y) \right) \equiv False$$

Καθώς $C^{\mathcal{I}} \equiv False$ λόγω του w=0, που δεν υπάρχει αριθμός από τον οποίο είναι αυστηρά μεγαλύτερος στους φυσικούς.

Άρα, συνολικά:

$$\exists x.\forall y.\exists z. \left(\left(A^{\mathcal{I}}(x, y, z) \land \neg B^{\mathcal{I}}(z) \right) \to \neg \left(\forall w. \left(C^{\mathcal{I}}(x, w, z) \lor K^{\mathcal{I}}(y) \right) \right) \right) \equiv False$$

3 Άσκηση 3

3.1

$$\{p\big(z, f(g(a))\big), \quad p\big(x, f(w)\big)\}$$

$$\{z/x, \quad f(g(a))/f(w)\}$$

$$\boxed{\{z/x, \quad w/g(a)\}}$$

3.2

$$\{q\big(v,h(c),t\big),\quad q\big(g(y),z,g(a)\big),\quad q(w,u,w)\}$$

$$\{v/g(y),\quad w/g(y),\quad z/h(c),\quad u/h(c),\quad t/g(a),\quad w/g(a)\}$$
$$\boxed{\{y/a,\quad v/g(a),\quad w/g(a),\quad z/h(c),\quad u/h(c),\quad t/g(a),\quad w/g(a)\}}$$

3.3

$$\{r\big(f(x),\quad g(t)\big),\quad r\big(f(z),b\big)\}$$
$$\{f(x)/f(z),\quad g(t)/b\}$$
$$\boxed{\{x/z,\quad b/g(t)\}}$$

3.4

$$\{p\big(f(u),g(f(a),t)\big),\quad p\big(f(b),g(x,y)\big),\quad p\big(w,g(z,h(v)\big)\}$$
$$\{f(u)/f(b),\quad w/f(b),\quad x/f(a),\quad z/f(a),\quad t/h(v),\quad y/h(v)\}$$
$$\boxed{\{u/b,\quad w/f(b),\quad x/f(a),\quad z/f(a),\quad t/h(v),\quad y/h(v)\}}$$

3.5

$$q(f(a),x),p(z,c)$$

Δεν υπάρχει ενοποιητής καθώς στο σύνολο περιέχονται διαφορετικές συναρτήσεις.

4 Άσκηση 4

Μας δίνεται η γνώση:

$$\mathcal{K}=\{\forall x\exists y.\big(A(x)\to(R(x,y)\wedge C(y))\big),\forall x\exists y\big(B(x)\to S(y,x)\wedge D(y)\big),\forall x\big(D(x)\to A(x)\big),$$
$$\forall x\forall y\big(S(x,y)\to T(y,x)\big)\}$$

$$\mathcal{K}=\{\forall x\exists y.\big(\neg A(x)\vee(R(x,y)\wedge C(y))\big),\forall x\exists y.\big(\neg B(x)\vee(S(y,x)\wedge D(y))\big),\forall x\big(\neg D(x)\vee A(x)\big),$$
$$\forall x\forall y\big(\neg S(x,y)\vee T(y,x)\big)\}$$

$$\mathcal{K}=\{\forall x\exists y.\big((\neg A(x\vee R(x,y))\wedge(\neg A(x)\vee C(y))\big),\forall x\exists y\big((\neg B(x)\vee S(y,x))\wedge(\neg B(x)\vee D(y))\big),\neg D(x)\vee A(x),$$
$$\neg S(x,y)\vee T(y,x)\}$$

$$\mathcal{K}=\{\big(\neg A(x)\vee R(x,f(x))\big)\wedge\big(\neg A(x)\vee C(f(x))\big),\big(\neg B(x)\vee S(g(x),x)\big)\wedge\big(\neg B(x)\vee D(g(x))\big),\{\neg D(x),A(x)\},$$
$$\{\neg S(x,y),T(y,x)\}\}$$

$$\mathcal{K} = \{\{\neg A(x), R(x, f(x))\}, \{\neg A(x), C(f(x))\}, \{\neg B(x), S(g(x), x)\}, \{\neg B(x), D(g(x)), \{\neg D(x), A(x)\}\},$$
$$\{\neg S(x, y), T(y, x)\}\}$$

Για την πρόταση $\mathcal{F}$ έχουμε:

$$\mathcal{F} = \exists y.\exists z.\big(T(x, y) \wedge R(y, z) \wedge C(z)\big)$$

Θέλουμε να δούμε αν με βάση τη γνώση $\mathcal{K}$ ισχύει ότι:

$$\mathcal{F} \quad |= B(x) \rightarrow Q(x)$$

Από τη CNF μορφή της γνώσης $\mathcal{K}$ έχουμε ότι:

$$\{\neg B(x), S(g(x), x)\}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} B(x) &\rightarrow \big(\neg B(x) \wedge S(g(x), x)\big) \\ &\equiv \{S(g(x), x)\} \end{aligned}$$

Με βάση όμως τη γνώση $\{\neg S(x, y), T(y, x)\}$ η γνώση αυτή γράφεται:

$$\equiv \{T(x, g(x))\} \tag{1}$$

Ακόμη από τη CNF της γνώσης $\mathcal{K}$ έχουμε:

$$\{\neg B(x), D(g(x))\}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} B(x) &\rightarrow \big(\neg B(x) \wedge D(g(x))\big) \\ &\equiv \{D(g(x))\} \end{aligned}$$

Όμως, με βάση τη γνώση $\{\neg D(x), A(x)\}$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\equiv \{A(g(x))\}$$

Η παραπάνω γνώση, γράφεται με τη σειρά της με βάση τη γνώση $\{\neg A(x), R(x, f(x))\}$, ως εξής:

$$\equiv \{R(g(x), f(g(x))\} \tag{2}$$

Ακόμη, από τη CNF μορφή της γνώσης $\mathcal{K}$ έχουμε:

$$\{\neg B(x), D(g(x))\}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned} B(x) &\rightarrow \big(\neg B(x) \wedge D(g(x))\big) \\ &\equiv \{D(g(x))\} \end{aligned}$$

Η παραπάνω γνώση, με βάση την γνώση $\{\neg D(x), A(x)\}$ από τη CNF μορφή της $\mathcal{K}$, γράφεται:

$$\equiv \{A(g(x))\}$$

Με βάση τώρα τη γνώση

$$\{\neg A(x), C(f(x))\}$$

, η παραπάνω γνώση γράφεται:

$$\equiv \{C\big(f(g(x))\big)\} \tag{3}$$

Οι σχέσεις (1), (2), (3) συνιστούν μια γνώση για το σύμπαν μας και συνεπώς ισχύει:

$$B(x) \to \big(T(x, g(x)) \land R\,(g(x), f(g(x))) \land C\,(f(g(x)))\,\big)$$

Αφού θέλουμε να δούμε αν ισχύει:

$$\mathcal{F} \quad | = B(x) \to Q(x)$$

αρκεί να δούμε αν υπάρχει ενοποιητής:

$$\{B(x) \to \big(T(x, g(x)) \land R\,(g(x), f(g(x))) \land C\,(f(g(x)))\,\big), \quad \exists y.\exists z.\big(T(x, y) \land R(y, z) \land C(z)\big)\}$$

$$\{B(x) \to \big(T(x, g(x)) \land R\,(g(x), f(g(x))) \land C\,(f(g(x)))\,\big), \quad T(x, c) \land R(c, m) \land C(m)\}$$

όπου c, m σταθερές του σύμπαντος.

Από την ενοποίηση παίρνουμε:

$$g(x) = c, \quad f(g(x)) = m$$
$$\equiv f(c) = m$$

Προφανώς κάτι τέτοιο δεν γνωρίζουμε ότι ισχύει για δύο σταθερές c, m του σύμπαντος και συνεπώς η ενοποίηση αποτυγχάνει.

Από τα προαναφερθέντα, προκύπτει ότι:

$$\mathcal{K}, \mathcal{F} \not\models Q(x) \impliedby B(x)$$

5 Άσκηση 5

5.1

$$\neg\,(\exists x : \text{Χώρα}(x) \land \text{συνορεύειΜε}(x, x))$$

5.2

$$\forall x \text{Χώρα}(x) \exists y \text{Χώρα}(y).\text{συνορεύειΜε}(x, y)$$

5.3

$$\exists x.(\exists y.\exists z.\exists w.\text{Χώρα}(x) \land \text{Χώρα}(y) \land \text{Χώρα}(z) \land y \neq z \land y \neq w \land z \neq w \land$$
$$\text{συνορεύειΜε}(x, y) \land \text{συνορεύειΜε}(x, z) \land \text{συνορεύειΜε}(x, w))$$

5.4

$$\exists x \exists y.\,(\text{Χώρα}(x) \land \text{Χώρα}(y) \land \forall z\,(\text{συνορεύειΜε}(x, z) \to z = y) \land (\text{συνορεύειΜε}(y, z) \to z = x))$$

6 Άσκηση 6

6.1

Για την πρώτη πρόταση έχουμε:

$$\forall x\,(f(x) \to g(a))$$
$$= \forall x\,(\neg f(x) \vee g(a))$$

Θέτουμε:

$$h(x) = \neg f(x)$$

Έτσι, η πρώτη πρόταση γίνεται:

$$\forall x\,(h(x) \vee g(a))$$

Για τη δεύτερη πρόταση έχουμε:

$$(\forall x f(x) \to g(a))$$
$$= ((\neg\,(\forall x f(x))) \vee g(a))$$
$$= ((\exists x \neg f(x)) \vee g(a))$$
$$= ((\exists x h(x)) \vee g(a))$$

Προκειμένου να βρεθεί ερμηνεία ώστε η δεύτερη πρόταση να είναι ψευδής πρέπει $g(a) = 0 \forall a \wedge h(x) = 0 \forall x$. Αν ισχύει όμως αυτή η συνθήκη αυτομάτως είναι ψευδής και η πρώτη πρόταση.

Άρα, δεν υπάρχει ερμηνεία ώστε να είναι ψευδής η δεύτερη και αληθής η πρώτη πρόταση.

6.2

Για την πρώτη πρόταση έχουμε:

$$\exists x.\,(f(x) \to g(a))$$
$$= \exists x.\,(\neg f(x) \vee g(a))$$

Θέτω:

$$h(x) = \neg f(x)$$

Άρα, για την πρώτη πρόταση έχουμε:

$$\exists x.\,(h(x) \vee g(a))$$

Η δεύτερη πρόταση είναι:

$$((\exists x. f(x)) \to g(a))$$
$$= (\neg\,(\exists x f(x)) \vee g(a))$$
$$= ((\forall x \neg f(x)) \vee g(a))$$

Άρα, για τη δεύτερη πρόταση έχουμε:

$$((\forall x h(x)) \vee g(a))$$

Ορίζουμε την ερμηνεία $\mathcal{I}$ για τη γλώσσα $\mathcal{L}$:

- $x, a \in \mathcal{N}$
- $g(a) =:= \neg(a = a)$
- $f(x) =:= \neg(x = 0) \Rightarrow h(x) =:= x = 0$

Έτσι, η πρώτη πρόταση λεεί ότι υπάρχει x ώστε ο x να είναι μηδέν ή κάτι ψευδές. Προφανώς, η πρόταση αυτή αληθεύει γιατί υπάρχει ένα $x \in N$, το $x = 0$.

Η δεύτερη πρόταση λέει ότι κάθε x είναι 0 ή κάτι ψευδές, άρα είναι πάντα ψευδής για τη συγκεκριμένη ερμηνεία.

7 Βιβλιογραφία

[1] Robinson, J. Alan (1965). ”A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle”. Journal of the ACM.
[2] Ivan Bratko, Prolog Programming for Artificial Intelligence, 4th ed., 2012
[3] Franz Baader and Jörg H. Siekmann [de] (1993). ”Unification Theory”. In Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming.
[4] Jörg H. Siekmann (1990). ”Unification Theory”. In Claude Kirchner (editor) Unification. Academic Press.
[5] Ben-Ari, Mordechai (2003). Mathematical Logic for Computer Science (2nd ed.).