ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧ. Η/Υ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2023-2024

ΟΜΑΔΑ 5380-5226

ΙΩΑΝΝΗΣ ΦΙΛΛΗΣ, ΑΜ:5380

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΖΩΗΣ, ΑΜ:5226

ΤΕΛΙΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ

ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2023

1 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

1.1 ΕΡΩΤΗΜΑ Α'

Για να βρούμε την αναλυτική λύση της εξίσωσης :

$I_z\, \psi'' = K_{p\psi}\, (\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}\, (\psi') - D_\psi\, \psi'$ (5)

Έχουμε:

$I_z\, \psi'' + (K_{d\psi} + D_\psi)\, \psi' + K_{p\psi}\, (\psi) = K_{p\psi}\, (\psi des)$ (q1)

Πρόκειται για διαφορική εξίσωση 2ου βαθμού, επομένως για να την λύσουμε αρχικά θα πρέπει να βρούμε την λύση της ομογενούς εξίσωσης. Οπότε θα επιλύσουμε την :

$I_z\, \psi'' + (K_{d\psi} + D_\psi)\, \psi' + K_{p\psi}\, (\psi) = 0$

Υποθέτουμε ότι η λύση θα είναι της μορφής $\psi = e^{rt}$ όπου r η παράμετρος που πρέπει να προσδιοριστεί. Αυτή την λύση θα την αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση. Έτσι έχουμε:

$I_z\, (e^{rt})'' + (K_{d\psi} + D_\psi)\, (e^{rt})' + K_{p\psi}\, (e^{rt}) = 0$

Από εδώ, παραγωγίζοντας και βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο e^{rt} προκύπτει:

$(I_z\, r^2 + (K_{d\psi} + D_\psi)\, r + K_{p\psi})\, e^{rt} = 0$

Εφόσον $e^{rt} \neq 0$ μπορούμε να διαιρέσουμε με αυτό, οπότε θα καταλήξουμε στην παρακάτω εξίσωση:

$I_z\, r^2 + (K_{d\psi} + D_\psi)\, r + K_{p\psi} = 0$

Από εδώ, θα βρούμε την διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης που προέκυψε:

$\Delta = (K_{d\psi} + D_\psi)^2 - 4I_z\, K_{p\psi}$

Οπότε και οι δύο ρίζες θα είναι:

$$r_1 = \frac{-(Kd\psi + D\psi) + \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\ Kp\psi}}{2Iz}$$

$$r_2 = \frac{-(Kd\psi + D\psi) - \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\ Kp\psi}}{2Iz}$$

Άρα καταλήγουμε πως η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η :

$$\psi(t) = c_1 e^{\frac{-(Kd\psi + D\psi) + \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\ Kp\psi}}{2Iz}t} + c_2 e^{\frac{-(Kd\psi + D\psi) - \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\ Kp\psi}}{2Iz}t}\ ,$$

όπου c_1,c_2 δύο σταθερές που θα προσδιοριστούν αργότερα.

Τώρα, μένει να λύσουμε την μη ομογενή εξίσωση. Παρατηρούμε στην (q1) πως στο δεύτερο μέλος έχουμε ένα πολυώνυμο μηδενικού βαθμού. Οπότε θα θεωρήσουμε πως και η μερική λύση είναι και αυτή πολυώνυμο μηδενικού βαθμού. Έστω λοιπόν Y(t) = A η μερική λύση. Θα πρέπει να την επαληθεύει.

Y'(t) = 0

Y''(t) = 0.

Αντικαθιστώντας στην (q1), έχουμε:

$K_{p\psi}$ (A) = $K_{p\psi}$ (ψ_{des}), και δεδομένου ότι $K_{p\psi} \neq 0$,

A = ψ_{des}

Οπότε Y(t) = ψ_{des}. Από την θεωρία γνωρίζουμε πως η γενική λύση είναι το άθροισμα της ειδικής και μερικής λύσης. Άρα καταλήγουμε ως γενική λύση στην :

$$\Psi(t) = c_1 e^{\frac{-(Kd\psi + D\psi) + \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz}t} + c_2 e^{\frac{-(Kd\psi + D\psi) - \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz}t} + \psi_{des}.$$

Αρκεί, τώρα, να προσδιορίσουμε τους συντελεστές c_1,c_2. Εφόσον δίνεται από την εκφώνηση πως έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες και δεδομένου ότι η Ψ(t) είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων , θα ισχύει:

Ψ(0) = 0, Ψ'(0) = 0.

$$\Psi'(t) = \frac{-(Kd\psi + D\psi) + \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz} c_1 e^{\frac{-(Kd\psi + D\psi) + \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz}t} +$$
$$\frac{-(Kd\psi + D\psi) - \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz} c_2 e^{\frac{-(Kd\psi + D\psi) - \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz}t}$$

Ψ(0) = 0 <=> $c_1 + c_2 + \psi_{des} = 0$ <=> $c_1 = - c_2 - \psi_{des}$ (a)

Ψ'(0) = 0 <=>

$$\frac{-(Kd\psi + D\psi) + \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz} c_1 + \frac{-(Kd\psi + D\psi) - \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz} c_2 = 0$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (a) προκύπτει:

$$\frac{-(Kd\psi + D\psi) + \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz} (- c_2 - \psi_{des}) + \frac{-(Kd\psi + D\psi) - \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz} c_2 = 0$$

$$<=> c_2 \left(\frac{-(Kd\psi + D\psi) - \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz} - \frac{-(Kd\psi + D\psi) + \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz} \right) = \frac{-(Kd\psi + D\psi) + \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz} \psi_{des}$$

$$<=> c_2 \left(\frac{-2\sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz} \right) = \frac{-(Kd\psi + D\psi) + \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2Iz} \psi_{des}$$

Οπότε τελικά, λύνοντας ως προς c_2 :

$$c_2 = \frac{(Kd\psi + D\psi) - \sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}}{2\sqrt{(Kd\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,Kp\psi}} \psi_{des} \qquad (b)$$

Επιστρέφοντας στην (a) και αντικαθιστώντας την (b), προκύπτει:

$$c_1 = \frac{-(K d\psi + D\psi) + \sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}{2\sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}\,\psi_{des} - \psi_{des}$$

$$<=> c_1 = \frac{-(K d\psi + D\psi) + \sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}{2\sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}\,\psi_{des} - \frac{2\sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}{2\sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}\,\psi_{des}$$

$$<=> c_1 = \frac{-(K d\psi + D\psi) - \sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}{2\sqrt{(K d\psi + D\psi) - 4Iz\,K p\psi}}\,\psi_{des} \qquad (c)$$

Οπότε αν κάνουμε τις αντικαταστάσεις στην γενική λύση, τελικά θα προκύψει η, συμβολική, αναλυτική λύση, η οποία είναι:

$$\Psi(t) = \frac{-(K d\psi + D\psi) - \sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}{2\sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}\,\psi_{des}\, e^{\frac{-(K d\psi + D\psi) + \sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}{2Iz}t} +$$

$$\frac{(K d\psi + D\psi) - \sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}{2\sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}\,\psi_{des}\, e^{\frac{-(K d\psi + D\psi) - \sqrt{(K d\psi + D\psi)^2 - 4Iz\,K p\psi}}{2Iz}t} + \psi_{des}$$

1.2 ΕΡΩΤΗΜΑ Β'

Έχουμε την εξίσωση:

$I_z\,\psi'' + (K_{d\psi} + D_{\psi})\,\psi' + K_{p\psi}\,(\psi) = K_{p\psi}\,(\psi des)$

Για να βρούμε την συνάρτηση μεταφοράς, θα εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Laplace. Από την θεωρία γνωρίζουμε, για τον μετασχηματισμό Laplace, πως ισχύουν τα ακόλουθα:

Το ψ_{des} που είναι η είσοδος μας, με βάση τον πίνακα μετασχηματισμού Laplace, θα γίνει:

$L[\psi_{des}] = \frac{\psi des}{s}$

Επίσης:

- $L[\psi(t)] = \Psi(s)$
- $L[\psi'(t)] = s\Psi(s) - \psi(0)$
- $L[\psi''(t)] = s^2\Psi(s) - s\psi(0) - \psi'(0)$

Οπότε, με βάση αυτά και δεδομένου ότι έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες, η εξίσωσή μας, γίνεται:

$I_z\, s^2\Psi(s) + (K_{d\psi} + D_{\psi})\, s\Psi(s) + K_{p\psi}\,\Psi(s) = K_{p\psi}\,\frac{\psi des}{s}$

Θεωρώντας U(s) την είσοδό μας έχουμε:

$\Psi(s)(\, I_z s^2 + (K_{d\psi} + D_{\psi})\, s + K_{p\psi}) = K_{p\psi} U(s)$

Οπότε, αν τελικά διαιρέσουμε με την είσοδο και με το πολυώνυμο 2ου βαθμού, προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς H(s):

$$H(s) = \frac{\Psi(s)}{U(s)} = \frac{\mathrm{K}p\psi}{\mathrm{Iz}\, s^2 + (\mathrm{K}d\psi + \mathrm{D}\psi)\,\mathrm{s} + \mathrm{K}p\psi}$$

Σύμφωνα με την θεωρία, οι πόλοι είναι οι τιμές των s για τις οποίες η συνάρτηση μεταφοράς τείνει στο άπειρο, ενώ τα μηδενικά είναι οι τιμές των s για τις οποίες η συνάρτηση μεταφοράς μηδενίζεται. Παρατηρούμε πως στον παρονομαστή έχει προκύψει το πολυώνυμο που είχαμε στην λύση της ομογενούς εξίσωσης στο Α) ερώτημα, όπου υπολογίσαμε τις δύο ρίζες του, οι οποίες είναι:

$$s_1 = \frac{-(\mathrm{K}d\psi + \mathrm{D}\psi) + \sqrt{(\mathrm{K}d\psi + \mathrm{D}\psi)^2 - 4\mathrm{Iz}\,\mathrm{K}p\psi}}{2\mathrm{Iz}}$$

$$s_2 = \frac{-(\mathrm{K}d\psi + \mathrm{D}\psi) - \sqrt{(\mathrm{K}d\psi + \mathrm{D}\psi)^2 - 4\mathrm{Iz}\,\mathrm{K}p\psi}}{2\mathrm{Iz}}$$

Δηλαδή για αυτές τις τιμές των s, μηδενίζεται ο παρονομαστής άρα το κλάσμα τείνει στο άπειρο. Οπότε αυτές οι δύο ρίζες είναι και οι πόλοι του συστήματος.

Αν είμαστε παρατηρητικοί, αν υπολογίσουμε το όριο της συνάρτησης μεταφοράς καθώς το s τείνει στο άπειρο, θα δούμε πως μηδενίζεται. Ειδικότερα:

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\mathrm{K}p\psi}{\mathrm{Iz}\, s^2 + (\mathrm{K}d\psi + \mathrm{D}\psi)\,\mathrm{s} + \mathrm{K}p\psi} = \lim_{s\to\infty} \frac{\mathrm{K}p\psi}{\mathrm{Iz}\, s^2} = 0$$

Επομένως, σε θεωρητικό πάντα επίπεδο, μπορούμε να πούμε πως υπάρχει και διπλό μηδενικό για $s\to\infty$.

Οπότε, συνοψίζοντας, υπάρχουν δύο πόλοι, τα s_1,s_2, καθώς και δύο μηδενικά για $s\to\infty$.

1.3 ΕΡΩΤΗΜΑ Γ’

Για τους πόλους έχουμε:

$$s_1 = \frac{-(7000000 + 11835) + \sqrt{(7000000 + 11835)^2 - 4\times 357000000\times 50000}}{2\times 357000000}$$

$$= \frac{-7011835 + \sqrt{-2.2234\times 10^{13}}}{7.1400\times 10^8} = \frac{-4.9166\times 10^{13} + 4.7153\times 10^6\times i}{7.1400\times 10^8} =$$

$$\frac{-7011835}{7.1400\times 10^8} + \frac{4.7153\times 10^6\times i}{7.1400\times 10^8} = -0.0098204972 + 6.6041\times 10^{-3} \times i$$

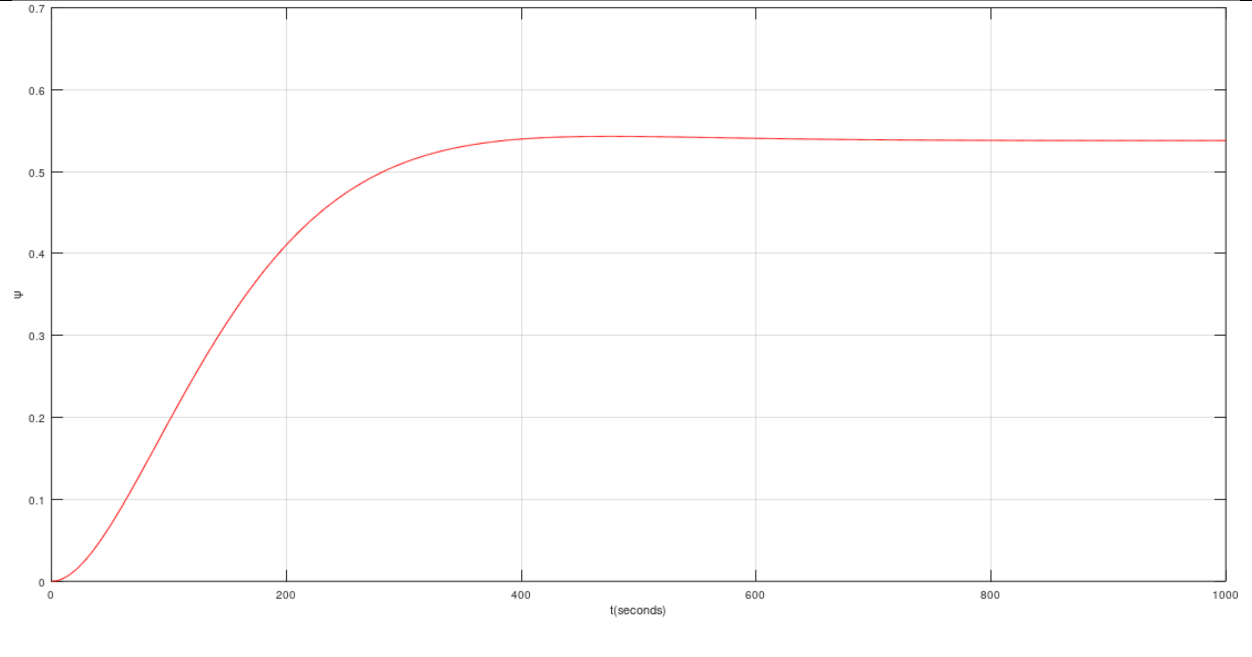
$$s_2 = \frac{-(7000000 + 11835) - \sqrt{(7000000 + 11835)^2 - 4\times 357000000\times 50000}}{2\times 357000000}$$

$$= \frac{-7011835 - \sqrt{-2.2234\times 10^{13}}}{7.1400\times 10^8} = \frac{-4.9166\times 10^{13} - 4.7153\times 10^6\times i}{7.1400\times 10^8} =$$

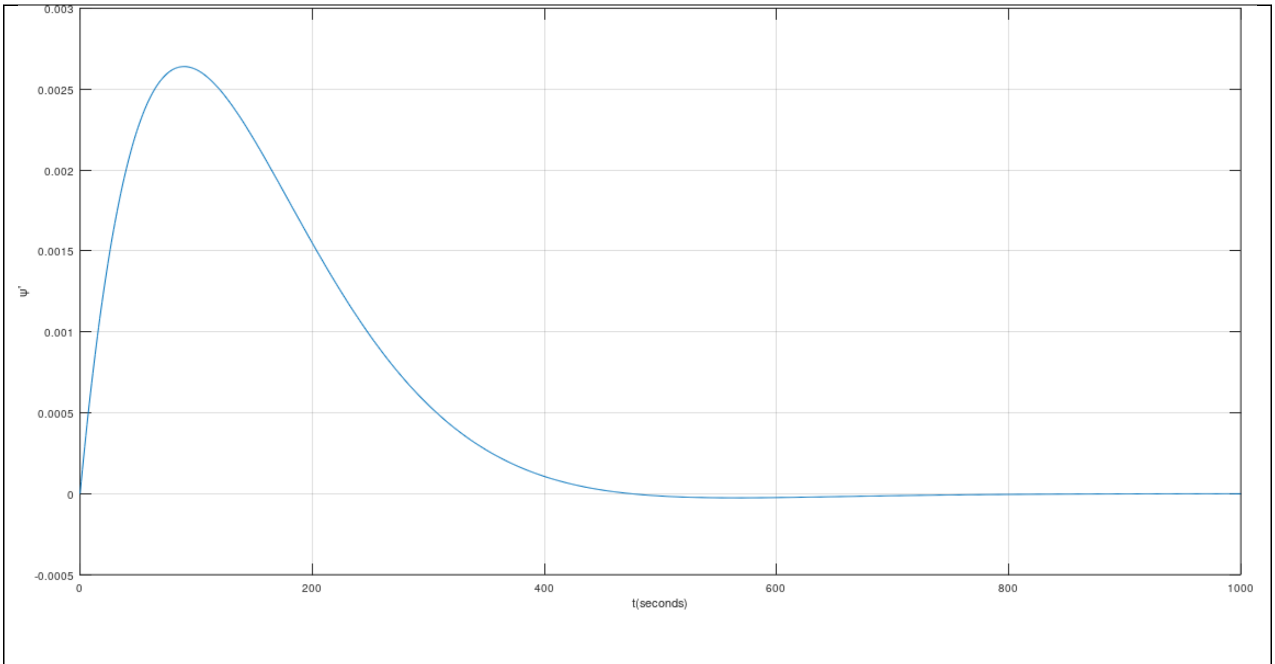
$$\frac{-7011835}{7.1400\times 10^8} - \frac{4.7153\times 10^6\times i}{7.1400\times 10^8} = -0.0098204972 - 6.6041\times 10^{-3} \times i$$

1.4 ΕΡΩΤΗΜΑ Ε’

Παρακάτω, ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις των ψ(t) και ψ’(t).



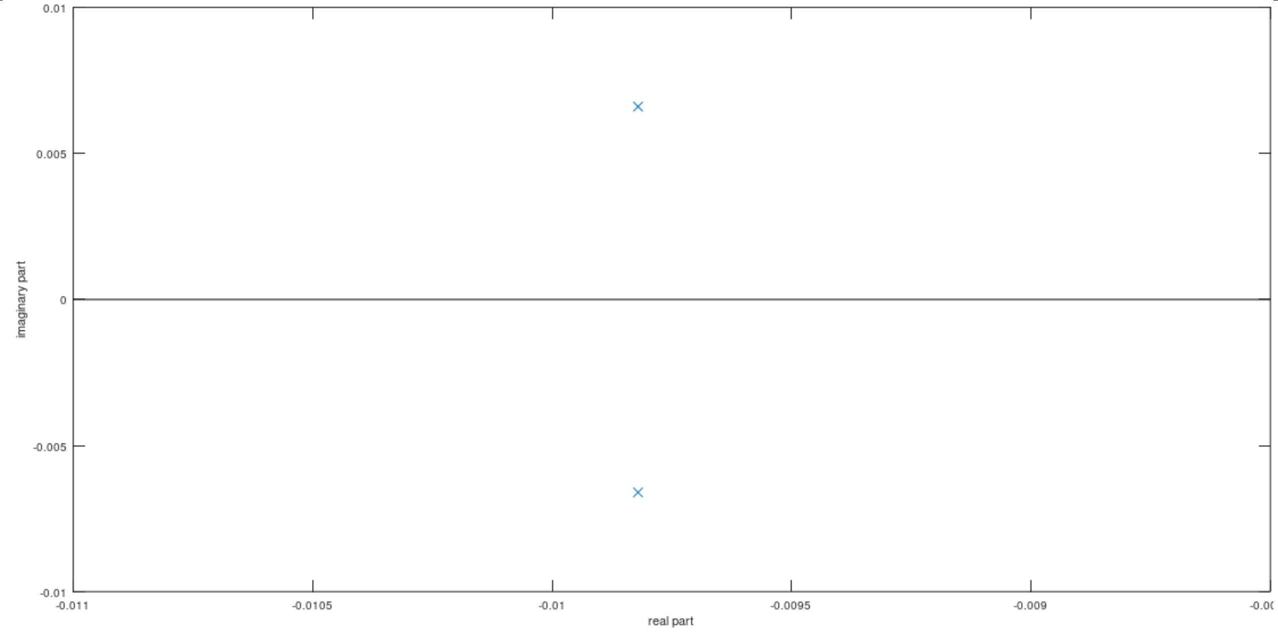
Εικόνα 1.1: Γραφική παράσταση ψ(t)



Εικόνα 1.2: Γραφική παράσταση ψ’(t)

1.5 ΕΡΩΤΗΜΑ Ζ'

Παρακάτω ακολουθεί το διάγραμμα που απεικονίζει του πόλους, στο μιγαδικό επίπεδο, όπως υπολογίστηκαν στο ερώτημα 1γ.



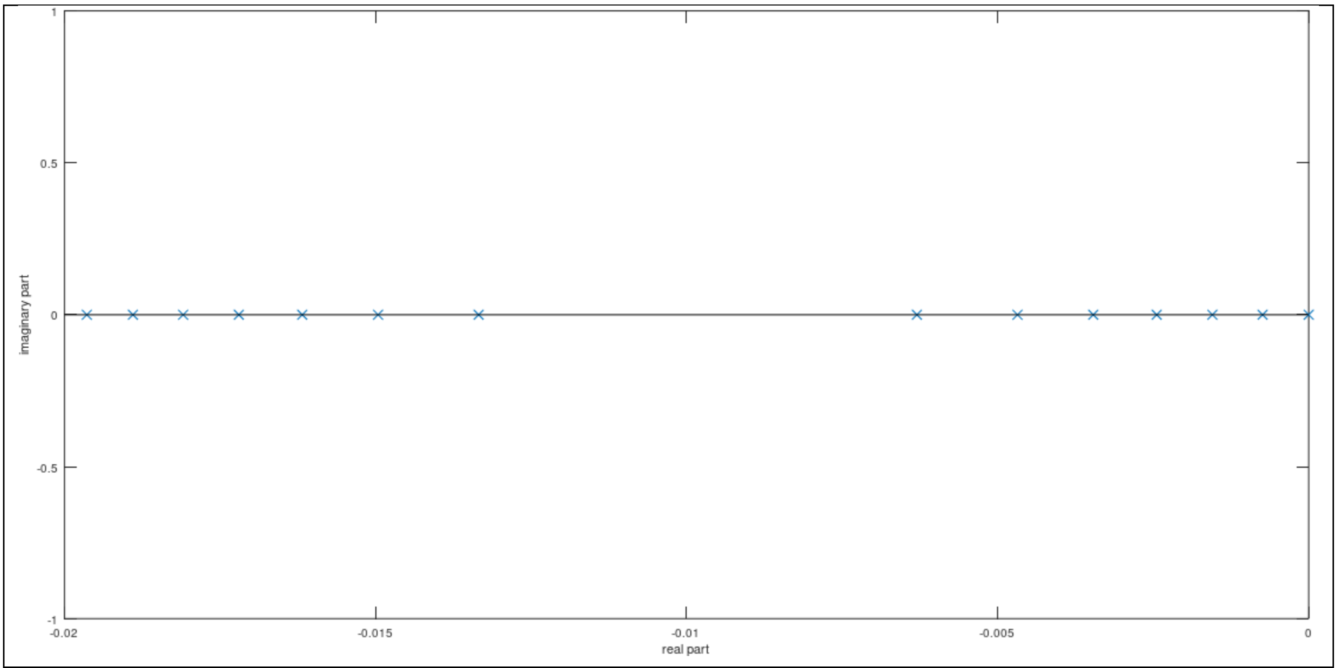
Εικόνα 1.3: Αναπαράσταση των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο

Θα μελετήσουμε τώρα, την αλλαγή της θέσης των πόλων, καθώς το $K_{ρψ}$ μεταβάλλεται από σχεδόν μηδενική τιμή(0.1) έως πολύ μεγάλη τιμή(500000) με βήμα 5000. Υπενθυμίζεται πως η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

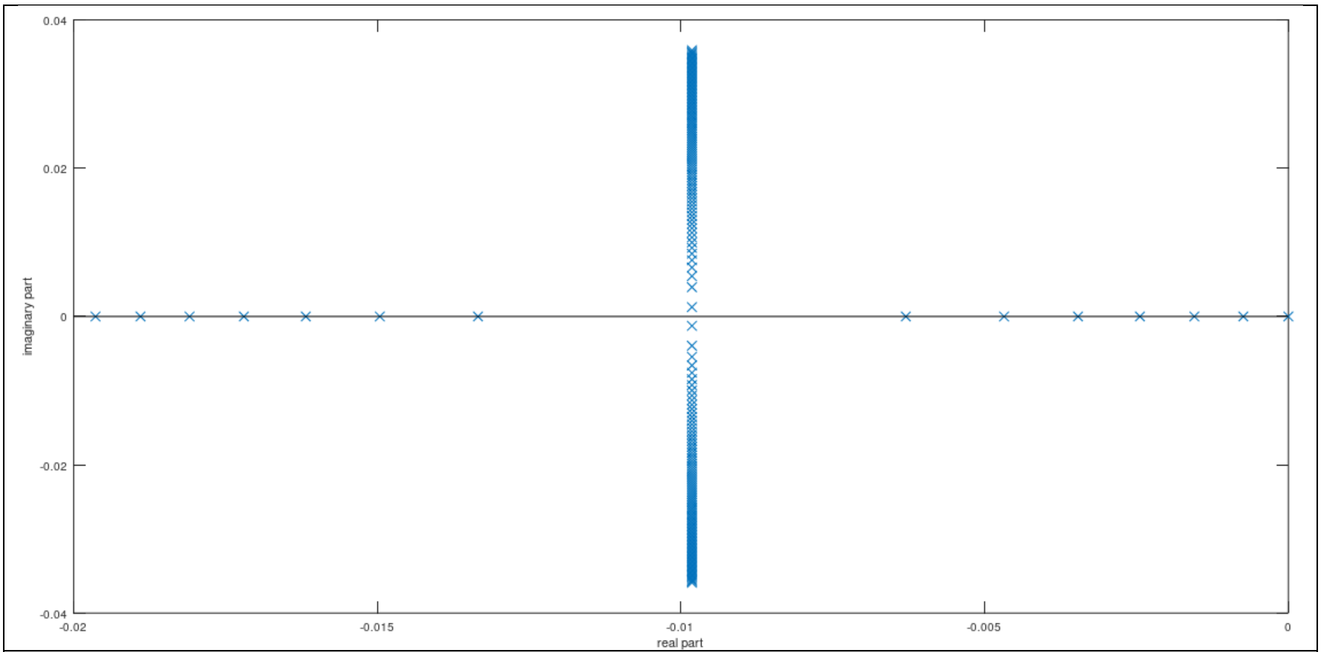
$$H(s) = \frac{\Psi(s)}{U(s)} = \frac{Kρψ}{Iz\, s^2 + (Kdψ + Dψ)\, s + Kρψ}$$

Αρχικά παρατίθενται στην εικόνα 1.4 οι θέσεις των πόλων μέχρι το $K_{ρψ}$ να φτάσει στην τιμή 35000. Παρατηρούμε πως τα ζεύγη των πόλων βρίσκονται πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών το οποίο μπορεί να εξηγηθεί καθώς, οι πόλοι προκύπτουν από τις ρίζες του πολυωνύμου του παρονομαστή στην H(s), όπου για $K_{ρψ}$ μικρότερο του 35000, η διακρίνουσα είναι μεγαλύτερη του μηδενός, οπότε έχουμε δύο πραγματικές και διάφορες μεταξύ τους ρίζες(άρα και πόλους).Σε αυτή την περίπτωση το σύστημά μας θα είναι ευσταθές και συγκεκριμένα στην μορφή της απόκρισης θα παρατηρείται το φαινόμενο της υπεραπόσβεσης.

Από την στιγμή που το $K_{ρψ}$ θα παίρνει τιμές που ξεπερνούν την τιμή 35000, το πολυώνυμο του παρονομαστή στην H(s) έχει αρνητική διακρίνουσα άρα δύο μιγαδικές(συζυγείς) ρίζες όπως φαίνεται στην εικόνα 1.5 όπου πλέον οι πόλοι έχουν μη μηδενικό φανταστικό μέρος. Το σύστημά μας θα παραμένει ευσταθές. Σύμφωνα με την θεωρία στην μορφή της απόκρισης θα εμφανίζεται το φαινόμενο της υποαπόσβεσης.



Εικόνα 1.4: Αναπαράσταση των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο(Για $K_{\rho\psi}$ μικρότερο του 35000)



Εικόνα 1.5: Αναπαράσταση των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο(Εύρος $K_{\rho\psi}$ από 0.1 έως 500000)

2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

2.1 ΕΡΩΤΗΜΑ Α’

Έχουμε τις διαφορικές εξισώσεις:

$$M(\cos(\psi)\, x'' - \sin(\psi)\, \psi' x') = f_x - D_x|x'|x' \qquad (1)$$

$$I_z\psi'' = n_z - D_\psi|\psi'|\psi' \qquad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \; x'' = \frac{f_x - D_x|x'|x' + M\sin(\psi)\psi' x'}{M\cos(\psi)} \qquad (3)$$

$$(2) \Rightarrow \; \psi'' = \frac{n_z - D_\psi|\psi'|\psi'}{I_z} \qquad (4)$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$x_1 = x,\; x_2 = x' \;\kappa\alpha\iota\; \psi_1 = \psi,\; \psi_2 = \psi'$$

Οι οποίες συνδέονται με το σύστημα ΣΔΕ α’ τάξης:

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' \\ \psi_1' = \psi' = \psi_2 \\ \psi_2' = \psi'' \end{cases} \Rightarrow \quad (3),(4) \quad \begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = \dfrac{f_x - D_x|x'|x' + M\sin(\psi)\,\psi' x'}{M\cos(\psi)} \\ \psi_1' = \psi' = \psi_2 \\ \psi_2' = \dfrac{n_z - D_\psi|\psi'|\psi'}{I_z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = \dfrac{f_x - D_x|x_2|x_2 + M\sin(\psi)\,\psi' x_2}{M\cos(\psi)} \\ \psi_1' = \psi' = \psi_2 \\ \psi_2' = \dfrac{n_z - D_\psi|\psi_2|\psi_2}{I_z} \end{cases}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Taylor πρώτης τάξης σε κάθε εξίσωση του συστήματος:

$$\begin{cases} x_{1\,n+1} = x_{1\,n} + hx'_{1\,n} \\ x_{2\,n+1} = x_{2\,n} + hx'_{2\,n} \\ \psi_{1\,n+1} = \psi_{1\,n} + h\psi'_{1\,n} \\ \psi_{2\,n+1} = \psi_{2\,n} + h\psi'_{2\,n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1\,n+1} = x_{1\,n} + hx'_{1\,n} \\ x_{2\,n+1} = x'_{1\,n} + h\left(\dfrac{f_x - D_x|x_{2\,n}|x_{2\,n} + M\sin(\psi_n)\,\psi'_n x_{2\,n}}{M\cos(\psi_n)}\right) \\ \psi_{1\,n+1} = \psi_{1\,n} + h\psi'_{1\,n} \\ \psi_{2\,n+1} = \psi'_{1\,n} + h\left(\dfrac{n_z - D_\psi|\psi_{2\,n}|\psi_{2\,n}}{I_z}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1\,n+1} = x_{1\,n} + hx'_{1\,n} \\ x_{2\,n+1} = x'_{1\,n} + h\left(\dfrac{f_x - D_x|x'_{1\,n}|x'_{1\,n} + M\sin(\psi_n)\,\psi'_n x'_{1\,n}}{M\cos(\psi_n)}\right) \\ \psi_{1\,n+1} = \psi_{1\,n} + h\psi'_{1\,n} \\ \psi_{2\,n+1} = \psi'_{1\,n} + h\left(\dfrac{n_z - D_\psi|\psi'_{1\,n}|\psi'_{1\,n}}{I_z}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n + hx'_n \\ x'_{n+1} = x'_n + h\left(\dfrac{f_x - D_x|x'_n|x'_n + M\sin(\psi_n)\,\psi'_n x'_n}{M\cos(\psi_n)}\right) \\ \psi_{n+1} = \psi_n + h\psi'_n \\ \psi'_{n+1} = \psi'_n + h\left(\dfrac{n_z - D_\psi|\psi'_n|\psi'_n}{I_z}\right) \end{cases}$$

Επομένως, οι τύποι αριθμητικής επίλυσης της μεθόδου Taylor είναι οι παρακάτω:

$$x_{n+1} = x_n + hx'_n$$

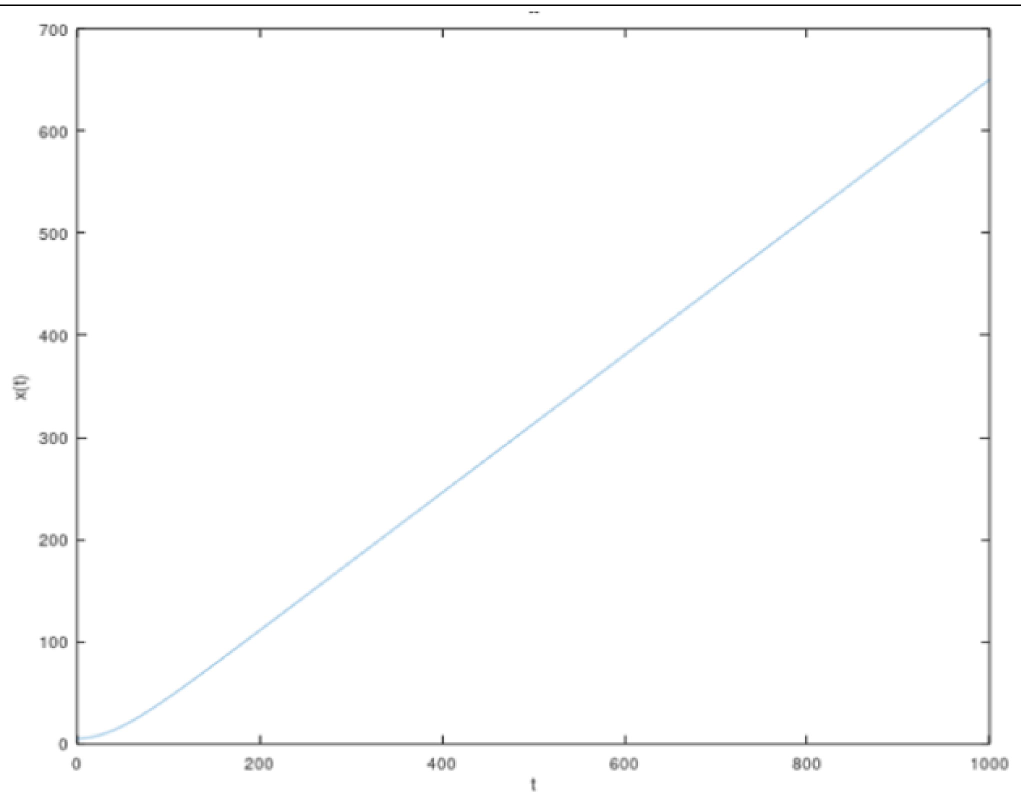
$$\psi_{n+1} = \psi_n + h\psi'_n$$

Με $$x'_{n+1} = x'_n + h\left(\frac{f_x - D_x|x'_n|x'_n + M\sin(\psi_n)\psi'_n x'_n}{M\cos(\psi_n)}\right)$$

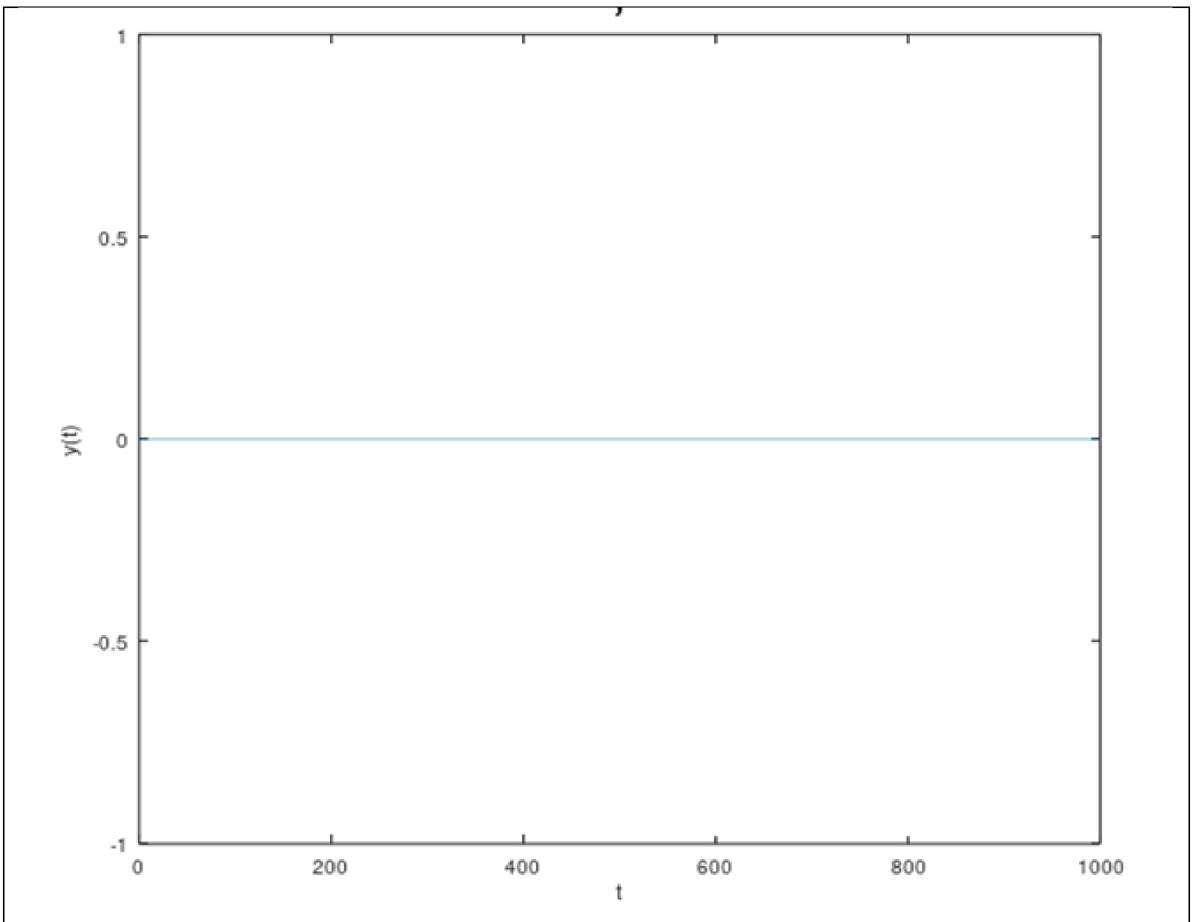
και $$\psi'_{n+1} = \psi'_n + h\left(\frac{n_z - D_\psi|\psi'_n|\psi'_n}{I_z}\right)$$

2.2 ΕΡΩΤΗΜΑ Γ'

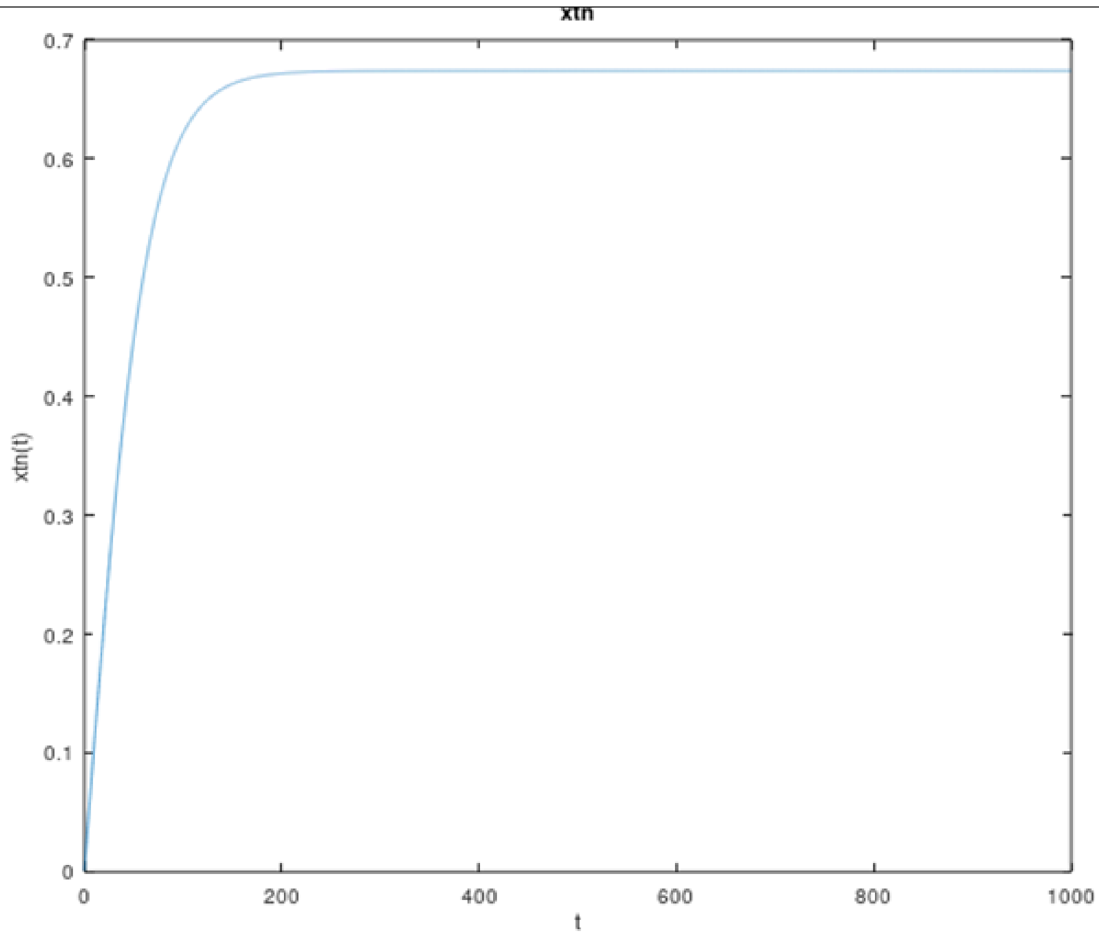
Παρακάτω ακολουθούν οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις.



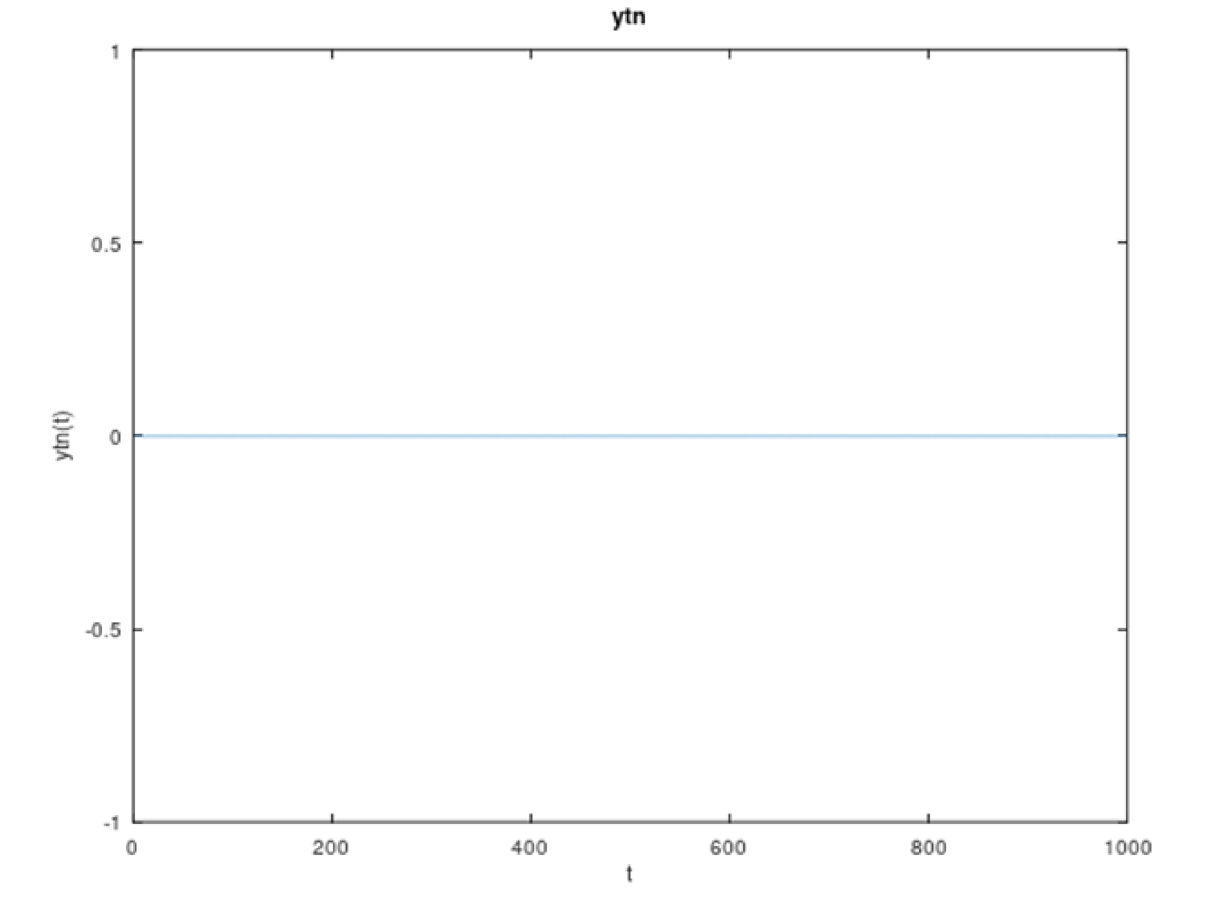
Εικόνα 2.1 : Γραφική παράσταση της x(t)



Εικόνα 2.2 : Γραφική παράσταση της ψ(t)



Εικόνα 2.3 : Γραφική παράσταση της x'(t)



Εικόνα 2.4 : Γραφική παράσταση της ψ'(t)

2.3 ΕΡΩΤΗΜΑ Δ'

Από την εκφώνηση, έχουμε τις σχέσεις:

$$f_x = K_{px}(x_{des} - x) - K_{dx}x'$$

$$n_z = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}\psi'$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων των f_x και n_z στις (1) και (2) αντίστοιχα προκύπτουν οι παρακάτω διαφορικές εξισώσεις:

$$M(\cos(\psi)\,x'' - \sin(\psi)\,\psi' x') = K_{px}(x_{des} - x) - K_{dx}x' - D_x|x'|x' \qquad (5)$$

$$I_z\psi'' = K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}\psi' - D_\psi|\psi'|\psi' \qquad (6)$$

$$(5) \Rightarrow \quad x'' = \frac{K_{px}(x_{des}-x) - K_{dx}x' - D_x|x'|x' + M\sin(\psi)\psi' x'}{M\cos(\psi)} \qquad (7)$$

$$(6) \Rightarrow \quad \psi'' = \frac{K_{p\psi}(\psi_{des}-\psi) - K_{d\psi}\psi' - D_\psi|\psi'|\psi'}{I_z} \qquad (8)$$

Όπως και πριν, ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$x_1 = x,\ x_2 = x' \quad \kappa\alpha\iota \quad \psi_1 = \psi, \psi_2 = \psi'$$

και εφαρμόζουμε σύστημα ΣΔΕ α' τάξης:

$$\begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = x'' \\ \psi_1' = \psi' = \psi_2 \\ \psi_2' = \psi'' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (7),(8) \quad \begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = \dfrac{K_{px}(x_{des} - x) - K_{dx}x' - D_x|x'|x' + M\sin(\psi)\,\psi' x'}{M\cos(\psi)} \\ \psi_1' = \psi' = \psi_2 \\ \psi_2' = \dfrac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi) - K_{d\psi}\psi' - D_\psi|\psi'|\psi'}{I_z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' = x' = x_2 \\ x_2' = \dfrac{K_{px}(x_{des} - x_1) - K_{dx}x_2 - D_x|x_2|x_2 + M\sin(\psi)\,\psi' x_2}{M\cos(\psi)} \\ \psi_1' = \psi' = \psi_2 \\ \psi_2' = \dfrac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_1) - K_{d\psi}\psi_2 - D_\psi|\psi_2|\psi_2}{I_z} \end{cases}$$

Και με την εφαρμογή θεωρήματος Taylor πρώτης τάξης:

$$\begin{cases} x_{1\,n+1} = x_{1\,n} + hx'_{1\,n} \\ x_{2\,n+1} = x_{2\,n} + hx'_{2\,n} \\ \psi_{1\,n+1} = \psi_{1\,n} + h\psi'_{1\,n} \\ \psi_{2\,n+1} = \psi_{2\,n} + h\psi'_{2\,n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1\,n+1} = x_{1\,n} + hx'_{1\,n} \\ x_{2\,n+1} = x_{2\,n} + h\left(\dfrac{K_{px}(x_{des} - x_{1\,n}) - K_{dx}x_{2\,n} - D_x|x_{2\,n}|x_{2\,n} + M\sin(\psi_n)\,\psi'_n x_{2\,n}}{M\cos(\psi_n)}\right) \\ \psi_{1\,n+1} = \psi_{1\,n} + h\psi'_{1\,n} \\ \psi_{2\,n+1} = \psi'_{1\,n} + h\left(\dfrac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_{1\,n}) - K_{d\psi}\psi_{2\,n} - D_\psi|\psi_{2\,n}|\psi_{2\,n}}{I_z}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1\,n+1} = x_{1\,n} + hx'_{1\,n} \\ x_{2\,n+1} = x'_{1\,n} + h\left(\dfrac{K_{px}(x_{des} - x_{1\,n}) - K_{dx}x'_{1\,n} - D_x|x'_{1\,n}|x'_{1\,n} + M\sin(\psi_n)\,\psi'_n x'_{1\,n}}{M\cos(\psi_n)}\right) \\ \psi_{1\,n+1} = \psi_{1\,n} + h\psi'_{1\,n} \\ \psi_{2\,n+1} = \psi'_{1\,n} + h\left(\dfrac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_{1\,n}) - K_{d\psi}\psi'_{1\,n} - D_\psi|\psi'_{1\,n}|\psi'_{1\,n}}{I_z}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n + hx'_n \\ x'_{n+1} = x'_n + h\left(\dfrac{K_{px}(x_{des} - x_n) - K_{dx}x'_n - D_x|x'_n|x'_n + M\sin(\psi_n)\,\psi'_n x'_n}{M\cos(\psi_n)}\right) \\ \psi_{n+1} = \psi_n + h\psi'_n \\ \psi'_{n+1} = \psi'_n + h\left(\dfrac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_n) - K_{d\psi}\psi'_n - D_\psi|\psi'_n|\psi'_n}{I_z}\right) \end{cases}$$

Επομένως, προκύπτουν οι παρακάτω τύποι επίλυσης Taylor:

$$x_{n+1} = x_n + hx'_n$$

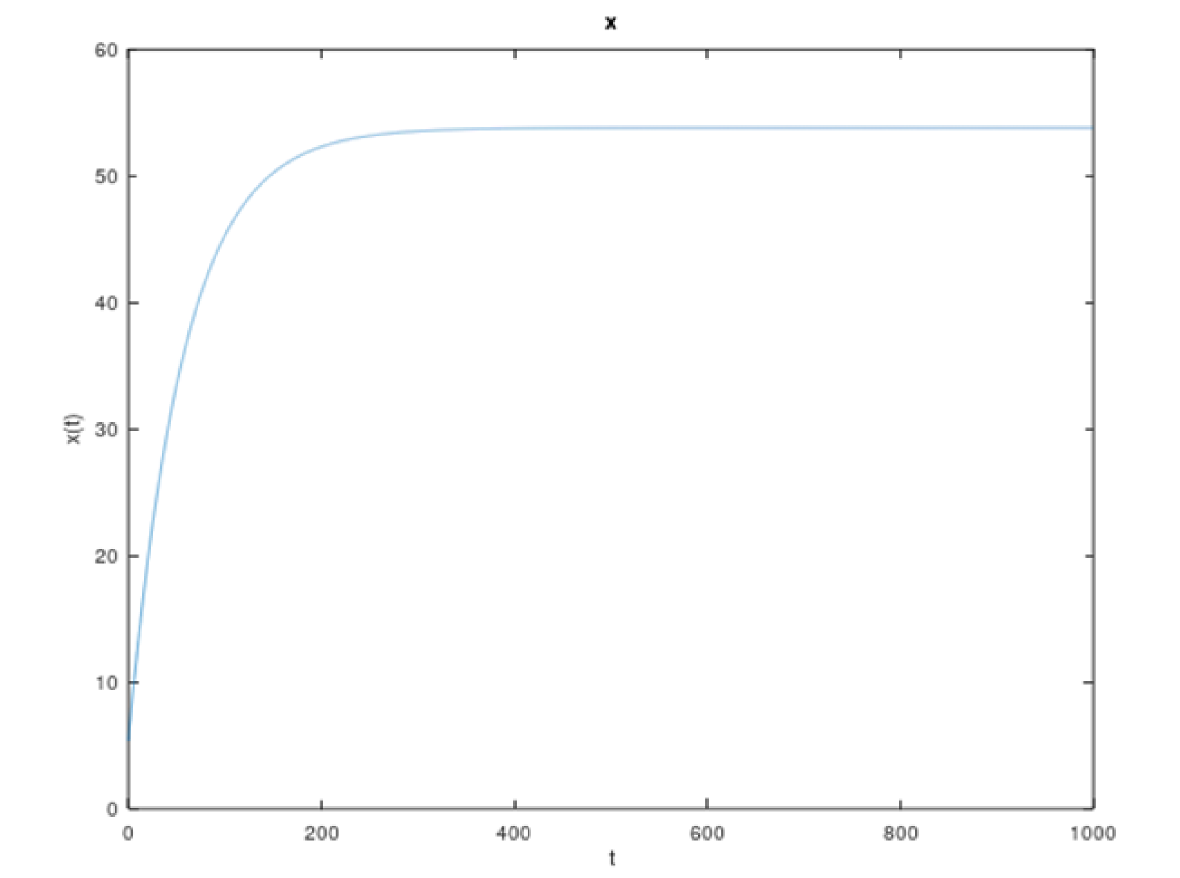
$$\psi_{n+1} = \psi_n + h\psi'_n$$

Με $$x'_{n+1} = x'_n + h\left(\frac{K_{px}(x_{des} - x_n) - K_{dx}x'_n - D_x|x'_n|x'_n + M\sin(\psi_n)\psi'_n x'_n}{M\cos(\psi_n)}\right)$$

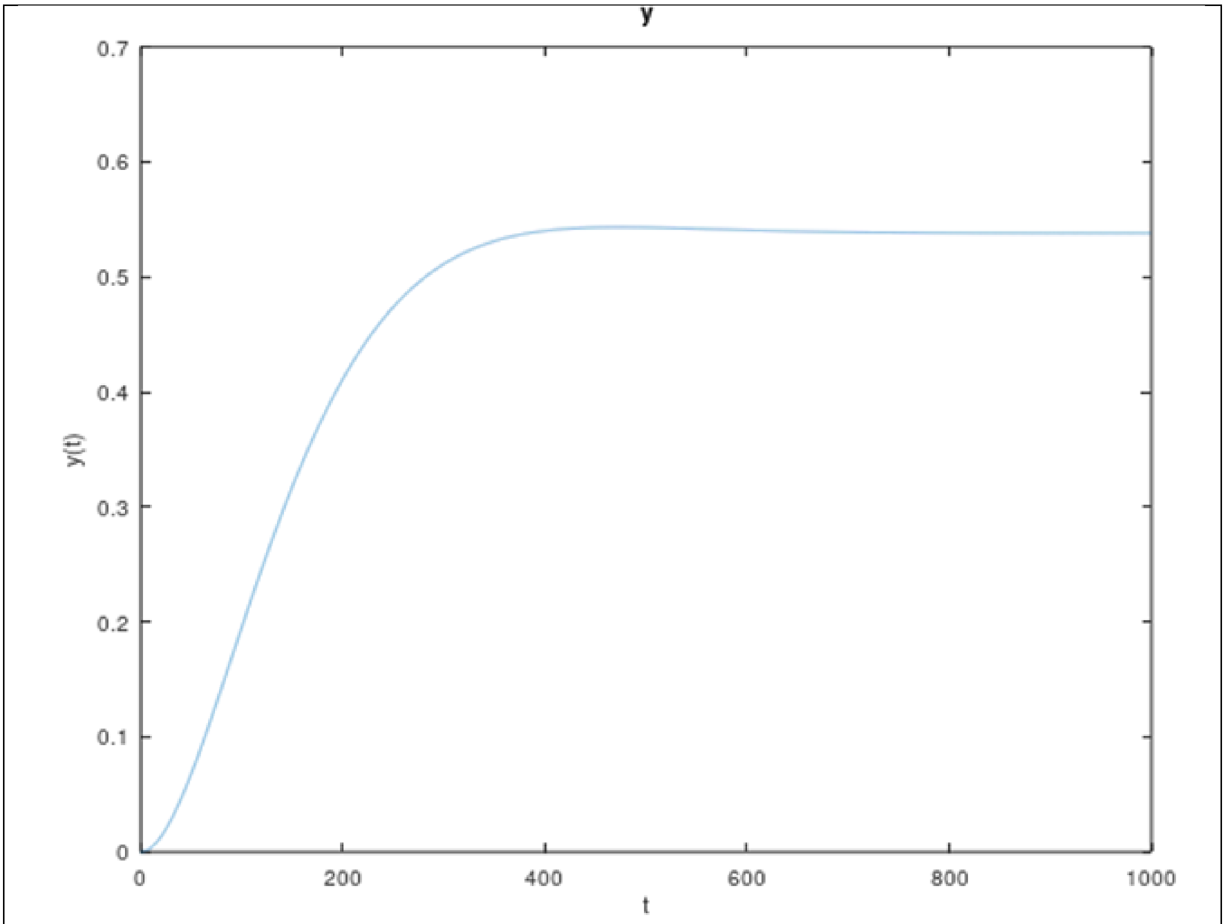
και $$\psi'_{n+1} = \psi'_n + h\left(\frac{K_{p\psi}(\psi_{des} - \psi_n) - K_{d\psi}\psi'_n - D_\psi|\psi'_n|\psi'_n}{I_z}\right)$$

2.4 ΕΡΩΤΗΜΑ Ζ’

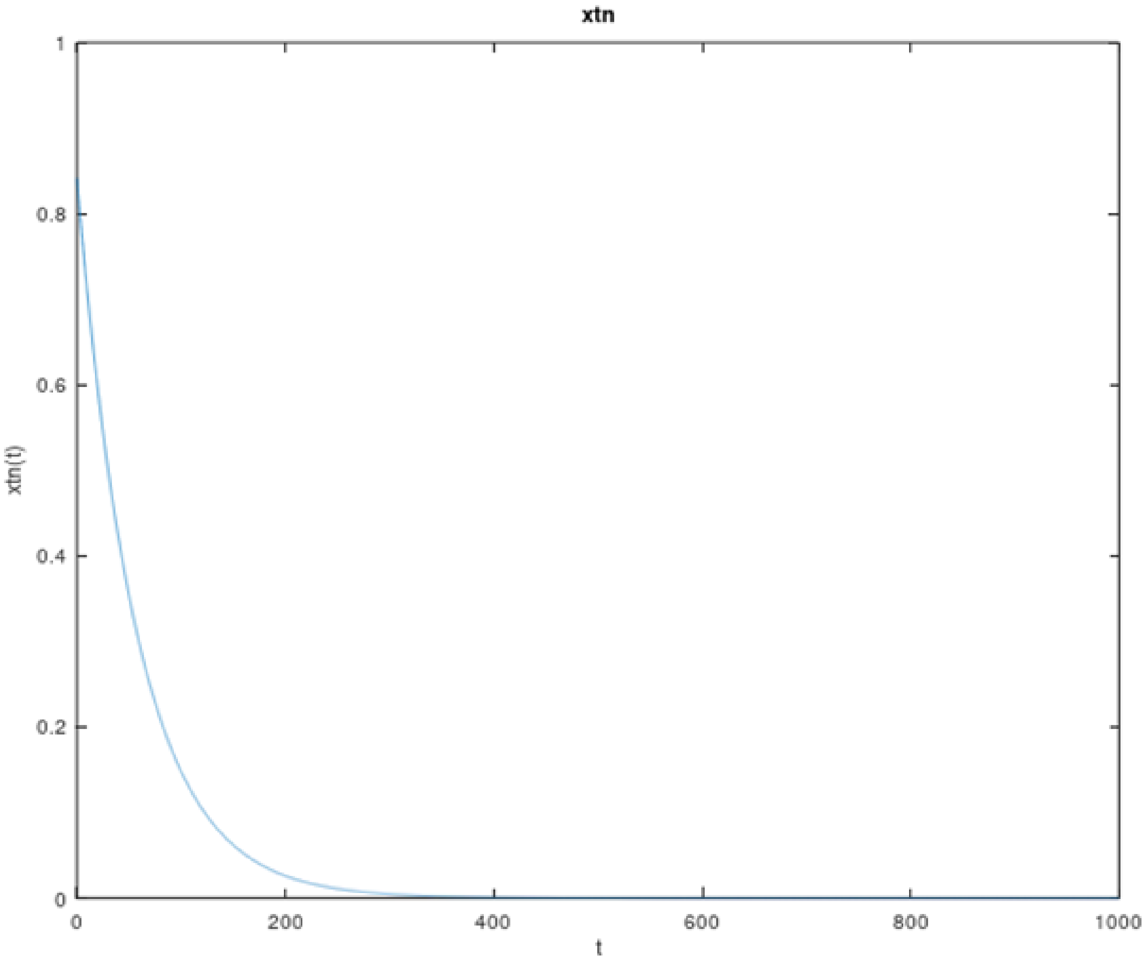
Παρακάτω ακολουθούν οι καινούργιες γραφικές παραστάσεις που ζητούνται.



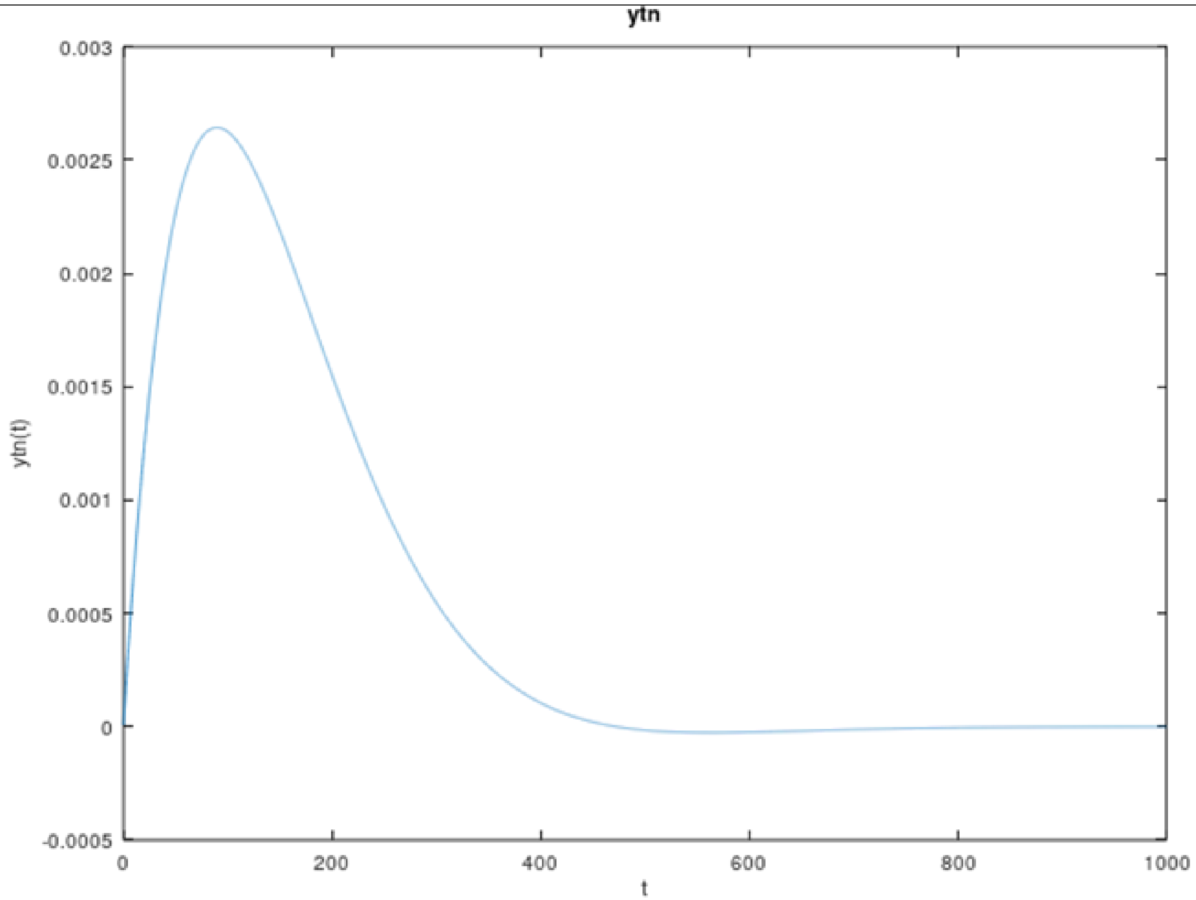
Εικόνα 2.5 : Γραφική παράσταση της x(t)



Εικόνα 2.6 : Γραφική παράσταση της ψ(t)



Εικόνα 2.7 : Γραφική παράσταση της x’(t)



Εικόνα 2.8 : Γραφική παράσταση της ψ'(t)