Cuadraturas gaussianas

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar//gmail.com)

Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

2020

Hoy:

- Cuadraturas gaussianas: 152-
- error: -159

Próxima:

- Compuestas: 147-152
- Métodos multipaso: 185-194

Andri Husein @blackburn1022 · 10 oct. 2016

Apakah setiap integral bisa ditransformasi dalam bentuk **Gaussian quadrature**?

Apakah **Gaussian quadrature** selalu... fb.me/7IHXPKvI3

Parte I

Gauss

- Triangulación.
- Cuadrados mínimos.
- Ahora integramos.

Con Chebyshev elegimos los puntos que nos minimizaban el error al interpolar.

La idea de las cuadraturas gaussianas es similar: qué $n+1$ puntos tenemos que elegir para que la fórmula integre exactos a los polinomios de grado menor o igual a $2n+1$.

Gaussian quadrature seems too good to be true. An n^{th} degree polynomial is determined by its values at $n+1$ points, so you might expect an integration rule based on $n+1$ points to integrate exactly polynomials of n degree. But Gaussian quadrature integrates exactly polynomials of degree $2n+1$ with $n+1$ integration points. By clever selection of the integration points and weights, you can accomplish about twice as much.

Despite its mysterious effectiveness, the properties of Gaussian quadrature are easy to prove. In fact, it's just as easy to prove the same results for a general class of integration schemes.

J. D. Cook, @JohnDCook

Problema: Queremos que la fórmula

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j)$$

sea exacta para polinomios de grado $2n+1$.

Tenemos $2n+2$ *grados de libertad*: podemos elegir los A_j y x_j, con lo cual esperaríamos armar un sistema con los valores de integrar exacto 1, x, x^2,..., x^{2n+1}, que son $2n+2$ condiciones, y despejarlos.

Otro problema: No es un sistema lineal de $2n+2$ ecuaciones con $2n+2$ incógnitas. Los x_j aparecen elevados a potencias, y multiplicados por los A_j. Altamente no lineal.

Gauss probó que funcionaba en $[-1,1]$ si $w \equiv 1$. ¿Caso general?

- Que sea $[-1,1]$ o $[a,b]$ no importa, ver Lema 7.3 DLR. Es cambiar variables y ya fue.

- Para w arbitrario, la idea es desarrollar la teoría de polinomios ortogonales con el producto interno $dw(x)$:

$$\langle p, q\rangle = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx$$

  que por suerte es una mezcla de lo que hicimos en cuadrados mínimos con Chebyshev!

- Hacemos Gram-Schmidt para los polinomios con ese producto interno, transformamos la base

$$\{1, x, x^2, \dots\} \to \{p_0, p_1(x), p_2(x), \dots\}$$

  y los ceros del polinomio p_{n+1} son los que estamos buscando para evaluar; los resolvemos por punto fijo, Newton-Raphson, etc.; y cuando los tenemos, despejamos los A_j que ahora sí son solución de un sistema lineal.

Teorema

Sea $0 < w \in C[a,b]$, y definamos el producto interno en $C[a,b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

Sea $\{q_j\}_{j\geq 0}$ una base de polinomios ortogonales y mónicos para este prod. int., y $\{p_j\}_{j\geq 0}$ ortonormales. Entonces, si $n \geq 1$, las raíces de p_n son todas simples y pertenecen al intervalo (a,b).

Dem: es larga, dividamos en etapas:

- Veamos que p_n tiene alguna raíz en (a,b).

Como $p_n \perp p_0 = 1$, $0 = \int_a^b p_n(x)w(x)dx > 0$, abs.

- Veamos que si x_0 es una raíz, no puede ser múltiple.

Sea $q(x) = p_n(x)/(x - x_0)^2$. Como tiene grado $n - 2$, es combinación lineal de $p_0, \ldots, p_{n-2}$, y por lo tanto, es ortogonal a p_n. Entonces,

$$0 = \int_a^b \frac{p_n(x)^2}{(x - x_0)^2} w(x)dx > 0.$$

- Veamos que todas las raíces de p_n están en (a, b).

  - Sean $x_0, \ldots, x_k$ las raíces de p_n en (a, b), $r(x) = \frac{p_n(x)}{(x-x_0)\cdots(x-x_k)}$.
  - r no tiene raíces en (a, b) así que no cambia de signo.
  - El polinomio $(x - x_0) \cdots (x - x_k)$ es de grado menor a n, así que es ortogonal a p_n,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b p_n(x)(x - x_0) \cdots (x - x_k) w(x)dx \\ &= \int_a^b r(x)(x - x_0)^2 \cdots (x - x_k)^2 w(x)dx > 0. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema

Si $\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^n A_j p(x_j)$ para todo polinomio de grado menor o igual a $2n+1$ si y solo si los puntos $\{x_j\}_{0\leq j\leq n}$ son los ceros de $p_{n+1}(x)$.

Dem:

- x_j ceros de $p_{n+1}(x)$, entonces la fórmula es exacta.

Sea p de grado menor o igual a $2n+1$. Tenemos

$$p(x) = S(x)p_{n+1}(x) + R(x),$$

donde $gr(R)$, $gr(S) \leq n$.

Por definición de los A_j, integrar R es exacto porque tiene grado menor o igual a n.

Ahora,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b p(x)w(x)dx \\
&\quad = \int_a^b p_{n+1}S(x)w(x)dx + \int_a^b R(x)w(x)dx \\
&\quad = \langle p_{n+1}, S\rangle + I(R) \\
&\quad = 0 + Q_n(R) \\
&\quad = \sum_{j=0}^{n} A_j R(x_j) \\
&\quad = \sum_{j=0}^{n} A_j p(x_j) \\
&\quad = Q_n(p)
\end{aligned}
$$

y demostramos una parte.

Dem:

- Si la fórmula es exacta, los x_j son ceros de $p_{n+1}(x)$.

Supongamos que $\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^n A_j p(x_j)$ para todo polinomio de grado menor o igual a $2n+1$.

Sea $W = (x-x_0)\cdots(x-x_n)$. Si r es un polinomio de grado menor o igual a n, y el producto rW tiene grado menor o igual a $2n+1$.

Por hipótesis, $I(rW) = Q(rW)$, con lo cual

$$\langle r, W\rangle = \int_a^b r(x)W(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^n A_j r(x_j)W(x_j) = 0$$

(pues $W(x_j) = 0$).

Luego, $W(x)$ se anula en los x_j, y es ortogonal a todos los polinomios de grado menor o igual que n, con lo cual si lo normalizamos, debe ser $W = p_{n+1}$ y los x_j sus ceros.

El resultado no se puede mejorar, y no hay chances de hallar $n+1$ puntos tales que para un peso w positivo se tenga

$$\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^{n} A_j p(x_j)$$

para polinomios de grado $2n+2$.

Si existieran $x_0, \ldots, x_n$, el polinomio

$$p(x) = (x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2$$

es mayor o igual que cero, así que

$$0 < \int_a^b p(x)w(x)dx, \qquad \text{pero} \qquad 0 = \sum_{j=0}^{n} A_j p(x_j).$$