Cuadraturas

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar//gmail.com)

Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

2020

Hoy:

- Cuadraturas
- Error vía interpolación

Próxima:

- Cuadraturas gaussianas: 152-
- error: -159

Parte I

Integración

Hasta ahora no vimos cómo integrar una función, pero podemos tirar algunas ideas:

- partir en intervalitos, evaluar f en un punto, y calcular las áreas de los rectángulos.
- evaluar f en algunos puntos, conectarlos con rectas, y calcular las áreas de cada cuadrilátero.
- tomar un polinomio que interpole en algunos puntos, e integrarlo.

En general, como f (continua) es aproximable por polinomios, y las potencias tienen primitivas explícitas y sencillas, cambiamos f por un polinomio y lo integramos porque es más fácil.

Supongamos que conocemos f en ciertos puntos x_j para $1 \leq j \leq n$.

Por Lagrange/diferencias divididas escribimos

$$f(x) \sim \sum_{j=1}^{n} f(x_j) l_j(x)$$

$$\int_a^b f(x)dx \sim \int_a^b \sum_{j=1}^{n} f(x_j) l_j(x) dx = \sum_{j=1}^{n} A_j f(x_j) = Q(f),$$

donde A_j es la integral de l_j.

Fijados los x_j, los A_j quedan fijos y nos sirven para cualquier función, y sólo necesitamos evaluar la f en ellos. Si se toman equiespaciados, tenemos las fórmulas de Newton-Cotes.

Otro problema es *determinar los* x_j *y los pesos* A_j, para mejorar el error. Son las cuadraturas gaussianas.

Partimos el intervalo $[a,b]$ en los puntos $\{x_i\}_{i=0:n}$, con

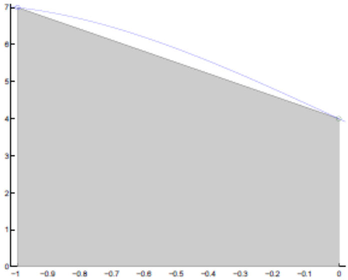
$$x_0 = a, \qquad x_n = b.$$

Def: una regla de N-C se dice cerrada si se utilizan los $n+1$ puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Def: una regla de N-C se dice abierta si se utilizan $n-1$ puntos $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$.

Def: una cuadratura tiene grado de exactitud k si y sólo si es exacta para $\{1, x, \dots, x^k\}$, y no para x^{k+1}.

A continuación vemos algunas de las más comunes, y calcularemos una cota del error.



Regla de los Trapecios simple cerrada

$$p(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\int_a^b p(x)dx = f(a)x + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\frac{(x - a)^2}{2}\Big|_a^b$$

$$= f(a)(b - a) + \frac{f(b) - f(a)}{2}(b - a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(f(a) + f(b))}{2}(b - a)$$

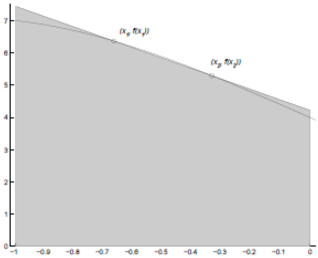
Promedio de los valores en a y b, multiplicado por la longitud del intervalo.

Evaluamos f en dos puntos x_1, x_2, tales que

$$b - x_2 = x_2 - x_1 = x_1 - a = h,$$

$$h = \frac{b-a}{3}$$

$$p(x) = f(x_1) + \frac{(f(x_2) - f(x_1))}{h}(x - x_1)$$



Regla de Trapecios simple abierta

$$\int_a^b p(x)dx = 3h\frac{(f(x_1) + f(x_2))}{2}$$

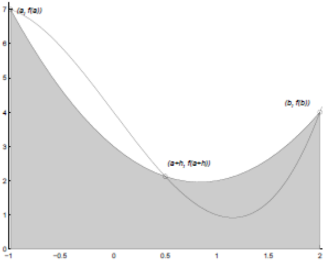
$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\frac{(f(x_1) + f(x_2))}{2}$$

Reemplazamos la f por una cuadrática, y evaluamos en tres puntos:

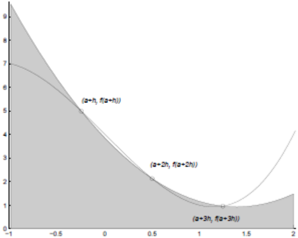
Cerrada: $\{a, \frac{a+b}{2}, b\}$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(a+h) + f(b)\right]$$



Abierta: $\frac{3a+b}{4}, \frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4}$



$$h = (b-a)/4$$

$$\int_a^b f(x)dx \sim \frac{4h}{3}\left[2f(a+h) - f(a+2h) + 2f(a+3h)\right]$$

7.- Cambio de variable

Que sea $[-1,1]$ o $[a,b]$ no importa, Lema 7.3 DLR. Es cambiar variables y ya fue. Vamos a hacer la teoría en $[-1,1]$.

Teorema (Lema 7.3)

Sea $Q(f)=\sum_{j=0}^{n} A_j f(t_j)$ *para* $\int_{-1}^{1} f(x)dx$. *Entonces, con*

$$x_j = \frac{(b-a)}{2}t_j + \frac{a+b}{2}, \qquad 0 \le j \le n,$$

tenemos una cuadratura en $[a,b]$*:*

$$\int_a^b f(x)dx \sim \sum_{j=0}^{n} \frac{b-a}{2} A_j f(x_j)$$

Cambiamos variables $x = \frac{(b-a)}{2}t + \frac{b+a}{2}$, con lo cual

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\Big(\frac{(b-a)}{2}t + \frac{b+a}{2}\Big)\frac{(b-a)}{2}dt,$$

y listo.

Ejercicio: Las fórmulas de Simpson abiertas y cerradas tienen grado de exactitud $k = 3$ (verificar integrando y evaluando hasta x^4).

Teorema

Sea $Q(f)$ una regla de cuadratura en $[a, b]$ tal que

1. $Q(f)$ *es lineal.*
2. *Tiene grado de exactitud k.*
3. $|Q(f)| \leq M(b-a)\|f\|_\infty$.

Entonces, si $f \in C^{k+1}[a, b]$,

$$|R(f)| = |I(f) - Q(f)| \leq \frac{(1+M)(b-a)^{k+2}}{(k+1)!}\|f\|_\infty.$$

Como $f \in C^{k+1}$, hacemos Taylor en a, y nos queda

$$\|f - p_k\|_\infty \leq \frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}\|f^{(k+1)}\|_\infty$$

La regla tiene exactitud de grado k, así que $I(p_k) = Q(p_k)$, y por la linealidad de Q,

$$R(f) = I(f) - Q(f) = I(f - p_k) - Q(f - p_k),$$

con lo cual,

$$\begin{aligned}
|R(f)| \leq & |I(f - p_k)| + |Q(f - p_k)| \\
\leq & (b-a)\frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}\|f^{(k+1)}\|_\infty + M(b-a)\frac{(b-a)^{k+1}}{(k+1)!}\|f^{(k+1)}\|_\infty \\
= & \frac{(1+M)(b-a)^{k+2}}{(k+1)!}\|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema (Valor medio generalizado)

Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\xi : [a, b] \to [c, d]$, y $h : [c, d] \to \mathbb{R}$ tales que g y h son continuas, g no cambia de signo, y $h(\xi(x))g(x)$ es integrable. Entonces existe $\eta \in (c, d)$ tal que

$$\int_a^b h(\xi(x))g(x)dx = h(\eta) \int_a^b g(x)dx.$$

Dem: sup. $g \geq 0$; como h es continua, sean m y M su mínimo y su máximo, con lo cual $m \leq h(\xi(x)) \leq M$, con lo cual

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b h(\xi(x))g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

$$m \leq \frac{\int_a^b h(\xi(x))g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Como h es continua, existeη tal que

$$h(\eta) = \frac{\int_a^b h(\xi(x))g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

□

Para mejorar el error usamos el error de interpolación,

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} W_{n+1}(x).$$

Entonces

$$R(f) = I(f) - Q(f) = \int_a^b (f - p_n)dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(y)}{(n+1)!} W_{n+1}(x)dx.$$

Teorema

1. *Trapecios: si* $f \in C^2[a,b]$, *el error es* $R(F) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\eta)$, *con* $\eta \in (a,b)$.
2. *Simpson: si* $f \in C^4[a,b]$, *el error es* $R(F) = -\frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 90} f^{(iv)}(\eta)$, *con* $\eta \in (a,b)$.

Trapecios: Tenemos $W(x) = (x-a)(x-b)$, uno la integra, y listo.

Simpson: sea F una primitiva de f, y consideremos $e : [-h, h] \to \mathbb{R}$,

$$e(t) = F(t) - F(-t) - \frac{t}{3}[f(-t) + 4f(0) + f(t)],$$

con lo cual $R(f) = I(f) - S(f) = e(h)$ si integramos en $[-h, h]$.

Derivando,

$$\begin{aligned}
e'(t) &= \frac{2f(t)}{3} + \frac{2f(-t)}{3} - \frac{4f(0)}{3} + \frac{tf'(t)}{3} - \frac{tf'(t)}{3} \\
e''(t) &= \frac{f(t)}{3} - \frac{f'(-t)}{3} - \frac{tf''(-t)}{3} - \frac{tf''(t)}{3} \\
e'''(t) &= \frac{t}{3}[f'''(-t) - f'''(t)] = -\frac{2}{3}t^2 f^{(iv)}(\xi_1)
\end{aligned}$$

Como $e(0) = e'(0) = e''(0)$, integrando entre 0 y h,

$$e''(h) = \int_0^h e'''(t)dt = -\frac{2}{3}\int_0^h t^2 f^{(iv)}(\xi_1)dt = -\frac{2}{9}f^{(iv)}(\xi_2)h^3$$

$$e'(h) = \int_0^h e''(t)dt = -\frac{2}{9}\int_0^h f^{(iv)}(\xi_2)h^3,$$

otra vez valor medio, integramos lo que queda, y volvemos a integrar ahora e, queda

$$-\frac{h^5}{90}f^{(iv)}(\eta).$$

Cambiando variables queda $b - a$ en vez de h y listo. $\square$