Clase práctica de Cálculo Avanzado - 24/4

Ejercicio 1. Sean A y B conjuntos de cardinal m y n respectivamente. Probar que $\#A^B = m^n$

Solución. Primero supongamos que $n = 0$, es decir $B = \emptyset$. En ese caso $\#A^\emptyset = 1$ y vale lo buscado. Ahora supongamos que $m = 0$, es decir $A = \emptyset$. Entonces $\#\emptyset^B = 0$ si $B \neq \emptyset$, y $\#\emptyset^\emptyset = 1$ como queríamos.

Por último, supongamos que $n, m > 0$. Sean $\alpha : A \to I_m$ y $\beta : I_n \to B$ biyecciones. Entonces la función $\phi : A^B \to I_m^{I_n}$ definida por

$$\phi(f) = \alpha \circ f \circ \beta$$

es una biyección. Luego podemos suponer que $A = I_m$ y $B = I_n$.

Sea $m > 0$ y sea

$$S = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid \#I_m^{I_n} = m^n\}.$$

Ya sabemos que $0 \in S$. Dado $n \in S$, queremos ver que $n + 1 \in S$. Definimos $\rho : I_m^{I_{n+1}} \to I_m^{I_n}$ por $\rho(f) = f|_{I_n}$. Es decir, restringir la función f a I_n.

Dada $g \in I_m^{I_n}$ y $k \in I_m$, definimos $g_k \in I_m^{I_{n+1}}$ por

$$g_k(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in I_n \\ k & \text{si } x = n+1 \end{cases}.$$

Luego $\rho^{-1}(g) = \{g_1, ..., g_m\}$. Es decir que la preimagen tiene m elementos. Además es claro que

$$\bigcup_{g \in I_m^{I_n}} \rho^{-1}(g) = I_m^{I_{n+1}}.$$

Por lo tanto $\#I_m^{I_{n+1}} = m^{n+1}$, y $n + 1 \in S$ como queríamos.

Ejercicio 2. Hallar el cardinal del conjunto de todos los subconjuntos contables de $\mathbb{R}$.

Solución. Sea X el conjunto en cuestión. Es claro que $\#X \geq 2^{\aleph_0}$, veamos que es igual-. Podemos expresarlo como la unión de subconjuntos X_n, $1 \leq n \leq \infty$, donde X_n es el conjunto de subconjuntos de tamaño n si $n < \infty$, y X_∞ es el conjunto de subconjuntos numerables de $\mathbb{R}$.

Dado $n < \infty$, X_n está en biyección con los puntos de $\mathbb{R}^n$ $(x_1, ..., x_n)$ con $x_1 < ... < x_n$. Luego $\#X_0 = 0$ y $\#X_n \leq \#\mathbb{R}^n = 2^{\aleph_0}$ $\forall 1 \leq n < \infty$. Por lo tanto

$$\# \bigcup_{0 \leq n < \infty} X_n \leq \aleph_0 2^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Ahora veamos cuál es el cardinal de X_∞. Similarmente al caso finito, es fácil ver que X_∞ se mete de manera inyectiva en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Es decir que

$$\#X_\infty \leq \#\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

Por lo tanto $\#X \leq \# \bigcup_{0 \leq n < \infty} X_n + \#X_\infty \leq 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Luego concluimos que $\#X = 2^{\aleph_0}$.