Cálculo Numérico.
Euler implícito / modificado - ODE orden n
Práctica 2

Marcela Fabio

27/04/2020

Index

Recordamos

Para obetner la solución aproximada del problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_0, & \text{en los puntos } \ t_j = t_0 + jh, \ t_j \in [t_0, T], \ h = \dfrac{T - t_0}{N}. \end{cases}$$

Vimos

- Euler explícito

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h\, f(t_j, y_j) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad con \ \ j = 0, \cdots, N, \ h = \tfrac{T-t_0}{N}$$

- Una variante: Euler implícito

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h\, f(t_{j+1}, y_{j+1}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad con \ \ j = 0, \cdots, N, \ h = \tfrac{T-t_0}{N}$$

Ejemplo 1

Se desea aproximar y(10) para el PVI siguiente

$$\begin{cases} y' = 10\,(\sin(t) - y), & 0 \leq t \leq 10 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Su esquema iterado según Euler implícito es

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h\,10\,(\sin(t_{j+1}) - y_{j+1}) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad con\;\; j = 0, \cdots, N,\;\; h = \frac{1}{N}$$

despejando y_{j+1},

$$\begin{cases} y_{j+1} = (y_j + h\,10\sin(t_{j+1}))/(1 + 10h) \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad con\;\; j = 0, \cdots, N,\;\; h = \frac{1}{N}$$

Obtenemos $y(10) \approx -0{,}4465$, con $n = 100$ iteraciones.

Ejemplo 1

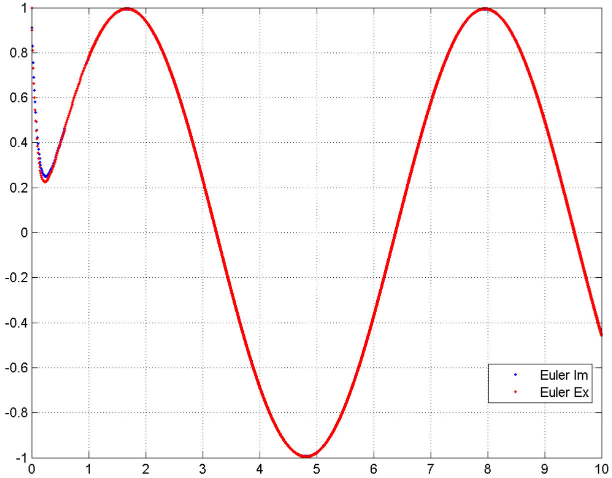

Figura: Ejemplo 1

Modificación

Si no se puede despejar y_{j+1} debemos estimarlo, entonces

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h\,f(t_{j+1}, \overbrace{y_j + h\,f(t_j)}^{Euler}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad con\ \ j = 0, \cdots, N,\ \ h = \frac{T - t_0}{N}$$

Consideramos la siguiente ecuación diferencial de orde n

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}), & t_0 \leq t \leq T \\ y(t_0) = y_{00},\ y'(t_0) = y_{01},\ \cdots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{0n} & \end{cases}$$

se puede expresar como un sistema de n ecuaciones de primer orden al definir:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

En efecto,

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(t, y, y', \cdots, y^{(n-1)}) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}),$$

ODE de orden n y su reducción

y las condiciones iniciales

$$\mathbf{y}(t_0) = \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_2(t_0) \\ \vdots \\ y_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Luego el PVI

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), & t_0 \leq t \leq T \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{t}_0. \end{cases}$$

es un sistema de EDO de primer orden, al cual se pueden aplicar los métodos vistos.

Ejemplo 2

A modo de ejemplo consideramos

$$\begin{cases} 2y'' - y' - 3y = \cos(t), \quad a \leq t \leq b \\ y(a) = y_{00},\ y'(a) = y_{01}. \end{cases}$$

se puede expresar como un sistema de dos ecuaciones mediante la sustitución $y_1 = y$, $y_2 = y'$:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \dfrac{\cos(t) + 3y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}),$$

y las condiiones $y_1(a) = y_{00},\ y_2(a) = y_{01}$.

Ejemplo 3: modelo presa - depredador

Sean $c(t)$, $z(t)$, las poblaciones de conejos (presas) y zorros (depredadores) respectivamente. La razón de cambio de las presas $c'(t)$ es proporcional en cada momento al número de ellas, $a_1 c(t)$, menos la probabilidad de contacto entre los conejos y los zorros, $a_2 c(t)z(t)$.
De manera similar, en ausencia de presas la población de zorros disminuye a una tasa proporcional al número de ellos, $-b_1 z(t)$, y al incluir los conejos su población aumenta proporcional a la posibilidad de contacto entre las presas y los depredadores $b_2 c(t)z(t)$. (Constantes ≥ 0).

$$\begin{cases} c'(t) = a_1 c(t) - a_2 c(t)z(t) \\ z'(t) = -b_1 z(t) + b_2 c(t)z(t) \\ c(t_0) = c_0, \;\; z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Euler:

$$\begin{cases} c(j+1) = c(j) + h\left(a_1 c(j) - a_2 c(j)z(j)\right) \\ z(j+1) = z(j) + h\left(-b_1 z(j) + b_2 c(j)z(j)\right) \\ c(t_0) = c_0, \;\; z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Ejemplo 3

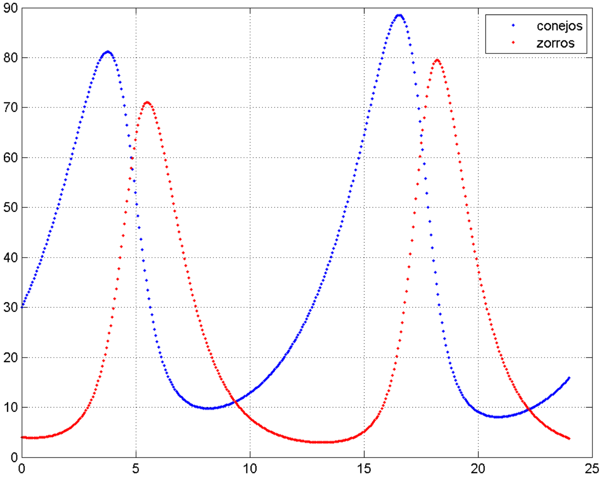

Figura: Ejemplo 3: $t_0 = 0$; $c_0 = 30$; $z_0 = 4$, $t_f = 24$, $a_1 = 0{,}4$; $a_2 = 0{,}018$; $b_1 = 0{,}8$; $b_2 = 0{,}023$; $n = 400$.

Euler modificado (mejorado)

Euler modificado

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + h\, f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j)\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad con \;\; j = 0, \cdots, N, \;\; h = \frac{T - t_0}{N}$$

Observación: Euler modificado es un Runge-Kutta de orden 2.
Desarrollamos por Taylor en dos variables la expresión rosa:

$$f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2} f(t_j, y_j)\right) = f(t_j, y_j) + f_t(t_j, y_j)\frac{h}{2} + f_y(t_j, y_j)\frac{h}{2} f(t_j, y_j) + O(h^2)$$

consiguiendo en la iteración

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + h\left[f(t_j, y_j) + f_t(t_j, y_j)\frac{h}{2} + f_y(t_j, y_j)\frac{h}{2} f(t_j, y_j) + O(h^2)\right] \\ &= y_j + hf(t_j, y_j) + \frac{h^2}{2}\left[f_t(t_j, y_j) + f_y(t_j, y_j)\, f(t_j, y_j)\right] + \underbrace{h\, O(h^2)}_{error\ local} \end{aligned}$$

Por lo tanto el error de truncamiento es $\tau_j = O(h^2)$.