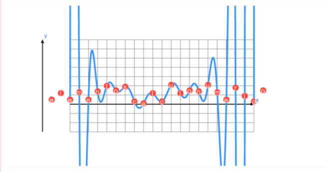
Interpolacion

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar//gmail.com)

Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

2020

elementos calculo numerico's Personal Polynomial



P(1)	= 5	= e
P(2)	= 12	= l
P(3)	= 5	= e
P(4)	= 13	= m
P(5)	= 5	= e
P(6)	= 14	= n
P(7)	= 20	= t
P(8)	= 15	= o
P(9)	= 19	= s
P(10)	= 3	= c
P(11)	= 1	= a
P(12)	= 12	= l
P(13)	= 3	= c
P(14)	= 21	= u
P(15)	= 12	= l
P(16)	= 15	= o
P(17)	= 14	= n
P(18)	= 21	= u
P(19)	= 13	= m
P(20)	= 5	= e
P(21)	= 18	= r
P(22)	= 9	= i
P(23)	= 3	= c
P(24)	= 15	= o

$$P(x) = \frac{5771280331613661}{5.715091928133422e{+}30} x^{23} - \frac{4542289410043281}{1.573013790912540 2e{+}28} x^{22} + \frac{2850489214721371}{7.326013227834706e{+}25} x^{21} - \frac{7786738823236583}{2.370414827565196 4e{+}24} x^{20} + \frac{7725189265460095}{3.963416705444219e{+}22} x^{19} - \frac{2558835259746953}{2961125851525225 00000} x^{18} + \frac{4749057479356057}{1598355265783079 3000} x^{17} - \frac{285872273425327}{3521963108203697 2} x^{16} + \frac{1548536949293491}{8648728524376375} x^{15} - \frac{197712168544547}{61330793879935} x^{14} + \frac{129084041255758540}{2706325472630243} x^{13} - \frac{4827877575337200000}{8294627350008557} x^{12} + \frac{24970270321308650000}{4258656080697971} x^{11} - \frac{23760641439239432 0000}{4880914955384777} x^{10} + \frac{1.018700516519879 9e{+}21}{3071143636320163} x^{9} - \frac{9.03151302153534e{+}21}{4903523889325765} x^{8} + \frac{2.349469559435420 5e{+}22}{2848586145700397} x^{7} - \frac{2.018929155263354e{+}23}{6878855748268561} x^{6} + \frac{6.158357920869878e{+}23}{7575139068009017} x^{5} - \frac{4.964870579110357 6e{+}22}{291687984311335} x^{4} + \frac{5.985146251066095e{+}23}{2320600880334019} x^{3} - \frac{1.635146809836592 7e{+}24}{6194802312199217} x^{2} + \frac{1.169705608395017 9e{+}24}{7264949921895497} x - \frac{1.840671457855256 5e{+}23}{4241615047924993}$$

elementos calculo numerico

Designed by Branden Stone in cooperation with the Mathematical Sciences Research Institute (MSRI) and the Global Math Project

https://globalmathproject.org/personal-polynomial/

Hoy:

- Interpolacion de Lagrange
- Newton, diferencias divididas

Próxima:

- Chebyshev: 97-104
- Hermite y Splines: 104-109

1.- Problema

Dada una tabla de datos (puntos en el plano, o todavía algo más general), queremos encontrar una función que los describa.

Tenemos dos caminos posibles, que vamos a desarrollar en las próximas cuatro clases:

- Hallar una función que pasa exactamente por cada punto (interpolar).
- Hallar una función en una clase dada (polinomios, exponenciales) que minimice algún error (cuadrados mínimos).

Parte I

Interpolación

Problema: dada una tabla de puntos $\{x_i\}_{i=0:n}$ y valores que toma una función f en ellos, $\{y_i = f(x_i)\}_{i=0:n}$, hallar un polinomio p de grado menor o igual a n tal que $p(x_i) = f(x_i)$.

La primera pregunta es: ¿existe el polinomio?

Rta: sí, podemos armar un polinomio genérico de grado n,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

y evaluando en x_i conseguimos $n+1$ ecuaciones lineales para $n+1$ incógnitas.

Tendríamos que ver que el sistema es compatible determinado, pero eso es más o menos fácil, ya que tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Acá la clave es la matriz de Vandermonde (1735-1796),

$$V(x_0, \ldots, c_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

que por esas cosas de la vida, resulta que es inversible si los x_i son todos distintos!

Ok, no es obvio, veamos por qué:

Si no es inversible, hay un vector $(b_0, \ldots, b_n)$ en el núcleo, y al multiplicarlo por la matriz da 0.
Entonces

$$b_0 + b_1 x_j + \cdots + b_{n-1} x_j^{n-1} + b_n x_j^n = 0$$

para todo $j = 0 : n$.

Eso quiere decir que el polinomio $q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n$ tiene $n + 1$ raíces, no puede ser, un polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (posiblemente, algunas complejas).

En principio, podríamos resolver el sistema para hallar los a_i.

NO! cuesta $O(n^3)$ operaciones sólo invertir la matriz, y se comenten muchos errores (¿ven ese 1 en la primer columna, y ese x_j^n en la última? ¿qué les parece que da la condición de una matriz así? ¿cuántas cifras significativas se pierden de una punta a la otra?)

Hay alternativas mejores:

- Lagrange
- Newton (diferencias divididas)

Otra pregunta: ¿Y por qué perdimos tiempo mencionando Vandermonde?

Por la Transformada de Fourier Discreta: queda la misma matriz, pero $x_i = \omega_n^i = e^{-i2\pi/n}$, raíces n-ésimas de la unidad, y resulta que la inversa es su conjugada dividida por n. Es MUY útil.

[Tal vez la recuerden del truco para multiplicar números que mencionamos en la clase 2: ahora se ve por qué es tan rápido interpolar en ese caso]

Base de Lagrange: dados $\{x_i\}_{i=0:n}$, definimos los polinomios $\{L_i\}_{i=0:n}$,

$$L_i(x) = \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Teorema

Los L_i son de grado n, $L_i(x_k) = 0$ si $i \neq k$, y $L_i(x_i) = 1$.

Dem: se multiplican n cosas de la forma $(x - a)/b$. Como un factor es $x - x_k$, $L(x_k) = 0$. Evaluando en x_i queda

$$L_i(x_i) = \prod_{k \neq i} \frac{x_i - x_k}{x_i - x_k} = \prod_{k \neq i} 1$$

Teorema

Los polinomios $\{L_i\}_{i=0:n}$ son una base para los polinomios de grado menor o igual a n.

Dem: Como un polinomio genérico de grado n es $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, este subespacio tiene dimensión $n+1$.

Como tenemos $n+1$ polinomios dentro de este subespacio, si son l. i. son una base. Supongamos que tenemos una combinación lineal que nos da el polinomio 0,

$$0 = \sum c_i L_i(x).$$

Evaluando en x_j, tenemos

$$0 = \sum c_i L_i(x_j) = c_j,$$

y como esto vale para todo $j = 0 : n$, tenemos $c_j = 0$ para todo j.

Ya podemos resolver el

Problema: dada una tabla de puntos $\{x_i\}_{i=0:n}$ y valores que toma una función f en ellos, $\{y_i = f(x_i)\}_{i=0:n}$, hallar un polinomio p de grado menor o igual a n tal que $p(x_i) = f(x_i)$.

Solución: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$

Otro problema: ¿es único?

Sí: son una base, la escritura es única. Otra: Vandermonde decía que la matriz era inversible, así que hay una única solución.

Además, si $p \neq q$, y ambos cumplen, la resta $r(x) = p(x) - q(x)$ sería un polinomio de grado n, con $n + 1$ ceros.

Si usamos p en vez de f, nos interesa saber el error que cometemos al evaluar en un $x \in [1, b]$,

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

Definimos $W_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

Teorema

Sea $f \in C^{n+1}[a, b]$, p_n el polinomio interpolador en $\{x_i\}_{i=0:n}$. Para todo $x \in [a, b]$ existe $\xi(x) \in [a, b]$ tal que

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x).$$

Dem: sea x fijo,y definamos

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - \Big(\frac{f(x) - p_n(x)}{W_{n+1}(x)}\Big) W_{n+1}(t).$$

Observemos que $F(x) = 0$, y $F(x_i) = 0$ para $i = 0 : n$.

Entonces, F tiene al menos $n + 2$ ceros en $[a, b]$, y por el Teorema de Rolle, la derivada $n + 1$ tiene por lo menos un cero ξ.

Entonces,

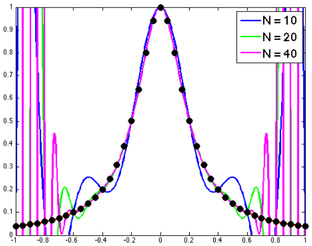
$$F^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\Big(\frac{f(x) - p_n(x)}{W_{n+1}(x)}\Big),$$

Evaluando en ξ, el cero de $F^{(n+1)}$, y despejando, tenemos

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} W_{n+1}(x).$$

$\square$

Si tomamos puntos equiespaciados, y la función $1/(1+25x^2)$, el polinomio interpolador no converge:



Hay que probar que $|W| \approx n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$, y que $f^{(n+1)} \approx (n+1)!5^{n+1}$, con lo cual el error crece con n.

`https://math.boisestate.edu/~calhoun/teaching/matlab-tutorials/lab_11/html/lab_11.html`

Definimos:

$$
\begin{aligned}
f[x_j] &= f(x_j) \\
f[x_j, x_{j+1}] &= \frac{f[x_{j+1}] - f[x_j]}{x_{j+1} - x_j} \\
f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] &= \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}] - f[x_j, x_{j+1}]}{x_{j+2} - x_j} \\
&\dots \\
f[x_j, \dots, x_{j+k}] &= \frac{f[x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] - f[x_j, \dots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}
\end{aligned}
$$

Fórmula de Newton:

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \dots, x_i] \Big(\prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \Big) \\
&= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

No la vamos a demostrar, sale por inducción. También planteando la llamada *base de Newton* y resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - x_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_0 & (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 1 & x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n - x_1) & \cdots & \prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ \\ \vdots \\ \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \\ \vdots \\ \\ y_n \end{pmatrix}$$

Se puede ver más fácil que tenemos una base

$$\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \ldots, (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\}$$

La gran ventaja es que si agregamos puntos, podemos agregar términos al polinomio fácilmente.