Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico - 1°C 2020

Departamento de Matemática - FCEN - UBA

Nazareno Faillace

Teorema: Error de Interpolación de Hermite

Utilizamos el polinomio interpolador de Hermite cuando, además de querer interpolar la función en ciertos puntos, también nos interesa que coincidan los valores de las derivadas. Es importante recordar que tal polinomio podría no existir o podría no ser único.

Notación: sean $x_0, \dots, x_n$ puntos distintos en el intervalo $[a, b]$. Dada cierta función f, tenemos como dato los valores $f^{(i)}(x_j)$ para $0 \leq i \leq k_j - 1$ para cada $j = 0, \dots, n$. Notamos como K a la cantidad de datos totales que tenemos (observar que $K = \sum_{j=0}^{n} k_j$).

Por ejemplo, si para cierta f tenemos los siguientes datos:

$$\begin{array}{llll} f(x_0) & f'(x_0) & & \\ f(x_1) & f'(x_1) & f''(x_1) & f'''(x_1) \\ f(x_2) & & & \end{array}$$

Entonces $k_0 = 2,\ k_1 = 4,\ k_2 = 1$. En total tenemos $K = 7$ datos, así que buscaríamos un polinomio interpolador de grado de 6.

Teorema de Rolle: sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema (Error de interpolación de Hermite): sea $f \in C^K([a, b])$, $x_0, \dots, x_n$ puntos distintos en $[a, b]$, sea P polinomio de grado $K - 1$ tal que $P^{(i)}(x_j) = f^{(i)}(x_j)$ para cada $0 \leq i \leq k_j - 1$ para cada $0 \leq j \leq n$. Entonces, para todo $x \in [a, b]$ existe $\xi(x) \in [a, b]$ tal que:

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(K)}(\xi)}{K!}\widehat{W}(x)$$

donde $\widehat{W}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)^{k_j}$

Demostración. Notamos $\kappa = \max\limits_{0 \leq j \leq n}\{k_j\}$. Sea $\tilde{x} \in [a, b]$, si $\tilde{x} = x_j$ para algún $0 \leq j \leq n$, entonces la igualdad es trivial: $0 = 0$

Supongamos que $\tilde{x} \neq x_j\ \forall\ 0 \leq j \leq n$. Definimos la siguiente función:

$$F(t) = (f(t) - P(t))\widehat{W}(\tilde{x}) - (f(\tilde{x}) - P(\tilde{x}))\widehat{W}(t)$$

Es inmediato ver que $F(x_j) = 0,\ \forall\ 0 \leq j \leq n$ y que $F(\tilde{x}) = 0$. Entonces, por Teorema de Rolle, como F tiene $n + 2$ ceros distintos entre sí, F' tiene $n + 1$ ceros distintos entre sí y distintos de $x_0, \dots, x_n, \tilde{x}$ Además, tenemos que:

$$F'(t) = (f'(t) - P'(t))\widehat{W}(\tilde{x}) - (f(\tilde{x}) - P(\tilde{x}))\widehat{W}'(t)$$

y $F'(x_j) = 0$ si $k_j \geq 2$. Entonces, F' tiene $n + 1 + |\{j : k_j \geq 2\}|$ ceros, donde $|\{j : k_j \geq 2\}|$ es la cantidad de puntos x_j para los cuales conocemos el valor de f'. Con un razonamiento análogo, se tiene que:

F'' tiene $\underbrace{n+1+|\{j\colon k_j \geq 2\}|-1}_{\text{Rolle aplicado a } F'} + \underbrace{|\{j\colon k_j \geq 3\}|}_{x_j/f''(x_j)=P''(x_j)} = n + \sum_{i=2}^{3} |\{j\colon k_j \geq i\}|$ ceros

F''' tiene $n-1+\sum_{i=2}^{4} |\{j\colon k_j \geq i\}|$ ceros, y así sucesivamente.

Eventualmente, se llega a que $F^{(\kappa-1)}$ tiene $n+(3-\kappa)+\sum_{i=2}^{\kappa} |\{j\colon k_j \geq i\}|$ ceros.

Observar que, como $K=\sum_{i=1}^{\kappa} |\{j\colon k_j \geq i\}|$, entonces:

$$\sum_{i=2}^{\kappa} |\{j\colon k_j \geq i\}| = K - |\{j\colon k_j \geq 1\}| = K-(n+1)$$

Por lo tanto:

$$n+(3-\kappa)+\sum_{i=2}^{\kappa} |\{j\colon k_j \geq i\}| = n+3-\kappa+K-(n+1) = K+2-\kappa$$

Como $|\{j\colon k_j \geq \kappa+1\}|=0$, para las derivadas a partir de $F^{(\kappa)}$ podemos trabajar exclusivamente con los ceros que nos garantiza el teorema de Rolle. Como $F^{(\kappa-1)}$ tiene $K+2-\kappa$ ceros, aplicando Rolle a $F^{(\kappa-1)}$, tenemos que $\left(F^{(\kappa-1)}\right)^{(K+1-\kappa)} = F^{(\kappa-1+K+1-\kappa)} = F^{(K)}$ tiene un cero. Es decir, $\exists\ \xi_{\tilde{x}}$ tal que $F^{(K)}(\xi_{\tilde{x}})=0$. Observar que:

$$\begin{aligned} F^{(K)}(t) &= (f^{(K)}(t)-P^{(K)}(t))\widehat{W}(\tilde{x}) - (f(\tilde{x})-P(\tilde{x}))\widehat{W}^{(K)}(t) \\ &= (f^{(K)}(t)-0)\widehat{W}(\tilde{x}) - (f(\tilde{x})-P(\tilde{x}))K! \\ &= f^{(K)}(t)\widehat{W}(\tilde{x}) - (f(\tilde{x})-P(\tilde{x}))K! \end{aligned}$$

- $P^{(K)}(t)=0$ pues P es polinomio de grado $K-1$
- $\widehat{W}^{(K)}(t)=K!$ pues $\widehat{W}$ es polinomio mónico de grado K

Evaluando $\xi_{\tilde{x}}$ en $F^{(K)}$ obtenemos la expresión que queríamos probar:

$$0 = F^{(K)}(\xi_{\tilde{x}}) = f^{(K)}(\xi_{\tilde{x}})\widehat{W}(\tilde{x}) - (f(\tilde{x})-P(\tilde{x}))K!$$

$$\Rightarrow f(\tilde{x})-P(\tilde{x}) = \frac{f^{(K)}(\xi_{\tilde{x}})}{K!}\widehat{W}(\tilde{x})$$

□

Ejemplo: sean $f\in C^7([a,b])$ y P polinomio interpolador de grado 6 tal que:

$$\begin{array}{llll} P(x_0)=f(x_0) & P'(x_0)=f'(x_0) & & \\ P(x_1)=f(x_1) & P'(x_1)=f'(x_1) & P''(x_1)=f''(x_1) & P'''(x_1)=f'''(x_1) \\ P(x_2)=f(x_2) & & & \end{array}$$

Entonces, por el teorema demostrado anteriormente, se tiene que, para cada $x\in[a,b]$:

$$f(x)-P(x) = \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}(x-x_0)^2(x-x_1)^4(x-x_2)$$

con $\xi\in[a,b]$