**Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico**
**Primer Cuatrimestre de 2020**
**Entrega n°4**

**1.** Se considera el problema $u_{xxx}(x) = f(x)$ para $x \in (0,1)$ y ciertas condiciones de contorno.

*a*) Probar que

$$u(x+2h) - u(x-2h) = 4hu_x(x) + \frac{8}{3}h^3 u_{xxx}(x) + O(h^5)$$

y que

$$u(x+h) - u(x-h) = 2hu_x(x) + \frac{1}{3}h^3 u_{xxx}(x) + O(h^5).$$

*b*) Se propone el siguiente esquema con paso $h$ para aproximar la solución al problema:

$$\frac{u_{j+2} - 2u_{j+1} + 2u_{j-1} - u_{j-2}}{2h^3} = f(x_j).$$

Estudiar el error de truncado del método.

**Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico**
**Primer Cuatrimestre de 2020**
**Entrega n°4 - Resolución del ejercicio**

---

1$a$) Desarrollamos por Taylor:

$$u(x+2h) = u(x) + 2hu_x(x) + \frac{4h^2}{2}u_{xx}(x) + \frac{8h^3}{6}u_{xxx}(x) + \frac{16h^4}{24}u^{(iv)}(x) + \frac{32h^5}{120}u^{(v)}(\xi_1),$$
$$u(x-2h) = u(x) - 2hu_x(x) + \frac{4h^2}{2}u_{xx}(x) - \frac{8h^3}{6}u_{xxx}(x) + \frac{16h^4}{24}u^{(iv)}(x) - \frac{32h^5}{120}u^{(v)}(\xi_2),$$

para algún $\xi_1$ entre $x$ y $x+2h$, y algún $\xi_2$ entre $x$ y $x-2h$. Si restamos miembro a miembro obtenemos:

$$u(x+2h) - u(x-2h) = 4hu_x(x) + \frac{8h^3}{3}u_{xxx}(x) + O(h^5).$$

Del mismo modo,

$$u(x+h) = u(x) + hu_x(x) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x) + \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(iv)}(x) + \frac{h^5}{120}u^{(v)}(\xi_3),$$
$$u(x-h) = u(x) - hu_x(x) + \frac{h^2}{2}u_{xx}(x) - \frac{h^3}{6}u_{xxx}(x) + \frac{h^4}{24}u^{(iv)}(x) - \frac{h^5}{120}u^{(v)}(\xi_4),$$

para algún $\xi_3$ entre $x$ y $x+h$, y algún $\xi_4$ entre $x$ y $x-h$. Si restamos miembro a miembro obtenemos:

$$u(x+h) - u(x-h) = 2hu_x(x) + \frac{h^3}{3}u_{xxx}(x) + O(h^5).$$

1$b$) Por un lado, por el ítem $a$), tenemos:

$$u(x+2h) - u(x-2h) - 2[u(x+h) - u(x-h)] = 2h^3u_{xxx}(x) + O(h^5).$$

El error de truncado se obtiene al reemplazar la solución numérica por la real en el esquema, es decir,

$$\frac{u(x+2h) - 2u(x+h) + 2u(x-h) - u(x-2h)}{2h^3} = f(x) + T,$$

donde $T$ es dicho error de truncado. Es decir:

$$T = \frac{u(x+2h) - u(x-2h) - 2[u(x+h) - u(x-h)]}{2h^3} - f(x).$$

Por lo que calculamos anteriormente, y como la solución real satisface $u_{xxx}(x) = f(x)$ para $x \in (0,1)$, tenemos:

$$T = u_{xxx}(x) + O(h^2) - f(x) = O(h^2).$$