Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2020
Entrega n°8

1. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$.

a) Sean los polinomios de Tchebychev, definidos en $[-1, 1]$, dados por la recurrencia

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_k = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \text{para } k \geq 2,$$

hallar el polinomio de grado menor o igual que 1 que interpola a f en los ceros de T_2.

b) Demostrar que es posible elegir siete puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_6$ en el intervalo $[-1, 1]$ tales que si P es el polinomio que intepola a f en dichos siete puntos, se tiene $\|f - P\|_\infty < 10^{-7}$ en $[-1, 1]$.

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2020
Entrega n°8 - Resolución del ejercicio

1a) El polinomio T_2 es $T_2 = 2x^2 - 1 = 2\left(x - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, por lo que los ceros de T_2 son $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Busquemos ahora P_1, el polinomio de grado 1, que interpola a f en estos dos puntos. Por medio del interpolador de Lagrange, por ejemplo, nos da:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-2\frac{\sqrt{2}}{2}} + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-e^{-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + e^{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

O, si se prefiere:

$$P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{4}} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}}\right)x + \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{4}} + e^{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right).$$

1b) Recordemos que si P es el polinomio que intepola a f en $x_0, x_1, \ldots, x_6$, el error de interpolación es

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\|f^{(vii)}\|_{\infty,[-1,1]}}{7!}\|w\|_{\infty,[-1,1]},$$

donde $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$. Los nodos que minimizan $\|w\|_{\infty,[-1,1]}$ son los ceros del polinomio de Tchebychev T_7 y esto nos da $\|w\|_\infty = \frac{1}{2^6}$. Veamos:

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}x},\ f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}, \ldots, f^{(vii)} = \frac{1}{2^7}e^{\frac{1}{2}x} \qquad \Rightarrow \qquad \|f^{(vii)}\|_{\infty,[-1,1]} \leq \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^7}$$

Por lo que

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{2^{13}7!} \sim 3{,}9932524 \times 10^{-8} < 10^{-7},$$

como se quería probar. Es decir, si se elige como nodos a los ceros de T_7 (que son distintos y están en $[-1, 1]$) y P es el polinomio que intepola a f en dichos siete puntos, se tiene $\|f - P\|_\infty < 10^{-7}$ en $[-1, 1]$.