Chebyshev, Chebychev, Chebyshov, Chebychov, Chebychef,Chebyshef, Chebyshof, Chebychof Chebycheff, Chebysheff, Chebychoff, Chevycheff, $+v \to b$, $Ch \to Tch$, $y \to i$...

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar//gmail.com)

Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

2020

Hoy:

- Chebyshev
- (Hermite y Splines: recursen!!)

Próxima:

- SVD: singular value decomposition, descomposición en valores singulares

La mejor explicación está en el Trefethen y Bau.
Pero lean esto:
https://www.johndcook.com/blog/2018/05/05/svd/

Parte I

Chebyshev

Problema: el término de error involucra $W(x) = \prod(x - x_i)$, queremos hallar qué puntos $\{x_i\}$ nos conviene elegir para minimizar ese error en $\| \cdot \|_\infty$.

Eso lo hizo Chebyshev, quien introdujo los polinomios que hoy llevan su nombre.

Ojo: para una función dada, el error involucra $W(x) = \prod(x - x_i)$ y también depende de la derivada $n+1$ de f, con lo cual la elección de estos puntos sólo pretende minimizar W, no tiene en cuenta $f^{(n+1)}$.


Paphnutius Chebyshev
0 Fotos y vídeos
io
lorar
ificaciones
ısajes
rdados
ıs
fil
: opciones
vittear
Seguir
Paphnutius Chebyshev
@paphnutius
Se unió el octubre de 2011
1.015 Siguiendo 128 seguidores
Ninguna de las cuentas que sigues siguen a este usuario
Tweets
Tweets y respuestas
Multimedia
Me gusta
@paphnutius aún no twitteó fotos ni videos
Cuando lo haga, su contenido multimedia aparecerá aquí.

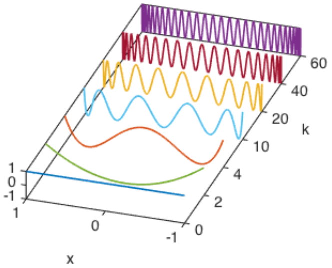
Def: Para cada $k \geq 0$, y $x \in [-1, 1]$, definimos $T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$

Alternativamente, con $T_0 = 1$, $T_1 = x$,

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Dem: Veamos que son equivalentes.

- Si $k = 0$, $\cos(0) = 1$.
- Si $k = 1$, $\cos(\arccos(x)) = x$.
- $$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= \cos[(k+1)\theta] \\ &= 2\cos(\theta)\cos(k\theta) - \cos((k-1)\theta) \\ &= 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \end{aligned}$$



con $\theta = \arccos(x)$,
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$,
$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

https://www.chebfun.org/examples/cheb/ChebPolysHigham.html

Teorema

1. *El coeficiente principal de* T_k *es* 2^{k-1}.
2. *Todas las raíces están en* $[-1,1]$ *y*
$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2k}\right) \qquad i = 0 : k-1$$
3. $$\|T_k\|_\infty = 1 = T_k(y_i), \qquad y_i = \cos\left(\frac{i\pi}{k}\right)$$

Dem: la primera, $T_{k+1} = 2xT_k - T_{k-1}$.

Las otras dos, son directas de $T_k = \cos(k \arccos(x))$

Teorema

P mónico de grado $n+1$, $\|W_{n+1}\|_\infty \leq \|P\|_\infty$, con $W_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$.

Dem: Supongamos que existe P mónico tal que $\|P\|_\infty < \|W_{n+1}\|_\infty$.

Como esta norma se alcanza en los puntos $y_i = \cos\left(\frac{i\pi}{n+1}\right)$, W_{n+1} alcanza la norma en los intervalos $[y_i, y_{i+1}]$, y en todos ellos

$$\|P\|_{L^\infty[y_i, y_{i+1}]} < \|W_{n+1}\|_{L^\infty[y_i, y_{i+1}]}.$$

Ahora, Bolzano: W_{n+1} vale $1/2^n$ en una punta y $-1/2^n$ en la otra, así que tenemos

$$P(y_i) < W_{n+1}(y_i), \qquad P(y_{i+1}) > W_{n+1}(y_{i+1}),$$

(o al revés), y $Q(x) = P(x) - W_{n+1}(x)$ tiene al menos un cero en cada intervalo. Como hay $n+2$ puntos y_i, Q tiene al menos $n+1$ ceros.

Pero P, W_{n+1} eran mónicos de grado $n+1$, así que la resta es de grado n y no puede tener $n+1$ raíces.

Teorema

Sea $f \in C^{n+1}[-1,1]$ y p_n el polinomio que interpola a f en las raíces de T_{n+1}. Entonces,

$$\|f - p_n\|_\infty \le \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{2^n (n+1)!}.$$

Dem:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)(\xi)}}{(n+1)!} W_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)(\xi}}{(n+1)!} \frac{T_{n+1}(x)}{2^n},$$

y teníamos que $|T_{n+1}(x)| \le 1$.

En general, si en vez de $[-1,1]$ tenemos $[a,b]$, podemos cambiar variables

$$t = \frac{2(x-a)}{b-a} - 1,$$

y definimos los polinomios de Chebyshev en $[a,b]$,

$$\tilde{T}_k(x) = T_k(t) = T_k\left(\frac{2(x-a)}{b-a} - 1\right) = \cos\left(k \arccos\left(\frac{2(x-a)}{b-a} - 1\right)\right).$$

La diferencia principal es que ahora

$$W_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \tilde{T}_{n+1}(x),$$

$$\|W_{n+1}\|_\infty = \frac{1}{2^n}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1},$$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{2^n (n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}.$$

Si tenemos valores de una función y/o de sus derivadas en los puntos x_0, $x_1, \ldots, x_k$, podemos encontrar un polinomio p tal que coincidan tanto el valor de la función como los de las derivadas que nos dieron. El grado de p será uno menos que la cantidad de valores que tenemos

La demostración sale más o menos en la misma línea que las anteriores, podemos plantear un sistema para despejar los coeficientes (coeficientes indeterminados), o generalizar la base de Newton (la idea de diferencias divididas)

Intuitivamente, para usar la idea de diferencias divididas, introducimos

$$f[x_0, x_0] = f'(x_0) \qquad f[x_0, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_0, x_0]}{x_1 - x_0},$$

etc., y la base que usamos es

$$\{1, (x - x_0), (x - x_0)^2, (x - x_0)^2 (x - x_1)\}.$$

Queda:

$$f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2 (x - x_1)$$

Funciona porque si definimos $x_\delta = x_0 + \delta$, y $f(x_\delta) = f(x_0) + \delta f'(x_0)$, tenemos

$$f[x_\delta, x_0] = \frac{f(x_0) + \delta f'(x_0) - f(x_0)}{x_\delta - x_0} = \frac{\delta f'(x_0)}{\delta} = f'(x_0).$$

Los polinomios de grado alto oscilan demasiado, y las potencias altas son incalculables: si x es chico, dan underflow, si x es grande, overflow.

Si tenemos muchos puntos para interpolar, nos quedará un polinomio de grado muy alto, así que una solución es partir el intervalo, y localmente utilizar polinomios de grado más chico.

Por ejemplo, poligonales a trozos: conecto cada punto con el siguiente con un segmento de recta.

Si tengo $f \in C^2[a,b]$, $x_j = a + jh$, con $f = (b-a)/n$, y q_n se define lineal en cada $[x_j, x_{j+1}]$, tenemos

$$|f(x) - q_n(x)| = \frac{1}{2}|f''(\xi_j)(x - x_j)(x - x_{j+1})| \leq \|f''\|_\infty \frac{h^2}{4n^2}.$$

Estamos usando que $(x - x_j)(x - x_{j+1}) \leq (x_{j+1} - x_j)^2/4$.

El caso más usado en la práctica es el de splines cúbicos. Si uno tiene que elegir, con qué interpolar, conviene funciones a trozos que sean cúbicas, y que se peguen de manera continua, con derivada y derivada segunda continuas.

Para $f \in C[a,b]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, buscamos $S(x)$ tal que

$$S_j(x_j) = f(x_j), \qquad S_j(x_{j-1}) = f(x_{j-1})$$

$$S_{j-1}(x_j) = S_j(x_j), \quad S'_{j-1}(x_j) = S'_j(x_j) \quad S''_{j-1}(x_j) = S''_j(x_j)$$

para $1 \leq j \leq n-1$.

Tenemos j funciones, cada una con 4 coeficientes. Si $1 \leq j \leq n-1$, tenemos 4 condiciones en cada j, y sólo dos en x_0 y x_n que no se pegan con otra.

Agregamos dos condiciones extra,

$$S'(x_0) = S'(x_n) = 0,$$

ó

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0.$$