Ejercicios para Entregar I

GIANPIER
YUPANQUI
L.U: 819/18

22) ii)

LEMA: $\#(0,1) = \#\mathbb{R}$

SOL

- $f : \underline{(0,1)} \to \underline{(-\pi/2, \pi/2)}$, $x \longmapsto \pi(x - \frac{1}{2})$ | f es biy por definición
- $g : \underline{(-\pi/2, \pi/2)} \to \underline{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto tg(x)$ | g es BIY por definición

Tenemos

$(0,1) \sim (-\pi/2, \pi/2) \sim \mathbb{R}$ por TRANSITIVIDAD

$(0,1) \sim \mathbb{R} \Rightarrow \#(0,1) = \#\mathbb{R}$

PROP: Sea X infinito y X' numerable. Entonces, $X \cup X' \sim X$

Si $X = (0,1)$ y $X' = \{0,1\} \Rightarrow X \cup X' \sim X$

$[0,1] \sim (0,1)$ ✓

VEAMOS QUE: $[0,1] \sim [a,b]$, $\forall a < b$

Sea $f : \underline{[0,1]} \longrightarrow \underline{[a,b]}$, $x \longmapsto (b-a).x + a$ | Por como está definido f es BIY

Entonces $[0,1] \sim [a,b]$, pero $[0,1] \sim (0,1) \sim \mathbb{R}$

Por Transitividad $[a,b] \sim \mathbb{R} \Rightarrow \#[a,b] = \underline{c}$

22) iii)

Sea M la familia de intervalos $\overset{\rightarrow \subset \mathbb{R}\ "I"}{}$ disjuntos:

Sea I un intervalo de M, osea: $I \in M \Rightarrow I \cap \mathbb{Q} \neq \phi$

Porque Trabajamos en $\mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $\exists\, q \in \mathbb{Q} \,/\, q \in I$

- Como $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ existe: $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ biyectiva.

Defino g de la siguiente forma:

$$g: M \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$g(I) = \min\{i \in \mathbb{N} \,/\, \phi(i) \in I\}$$

Veremos que es un subconjunto no vacio de $\mathbb{N}$

Si $I \in M \Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Q} \,/\, q \in I$ (Pueden existir muchos q)

Ademas como ϕ es BIY; $\exists\, i \in \mathbb{N} \,/\, \phi(i) = q$

Como pueden existir muchos q's existen muchos $i'_s \in \mathbb{N}$ distintos pero como los $\mathbb{N}$ estan acotados inferiormente, todo subconjunto de $\mathbb{N}$ tiene minimo en $\mathbb{N}$

. Probaremos que g es INYECTIVA:

Si I y $J \in M \,/\, g(I) = g(J) \Rightarrow g(I) = g(J) = i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \underbrace{\phi(i)}_{q} \in I \wedge \underbrace{\phi(i)}_{q} \in J$

$q \in I \wedge q \in J$, para $q \in \mathbb{Q}$

Pero si $I, J \in M$, son disjuntos, Luego $\nexists q / q \in I \wedge q \in J$

(CONTRADICCION). Por tanto g es INYECTIVA

ENTONCES $\# M \leq \# \mathbb{N} = \aleph_0$

Luego M es ~~[illegible]~~ contable

Usaremos 21) i) que es hallar el cardinal de:

$M = \{ (a_n) : a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \}$

Sea $f : \underline{\mathbb{N}} \to \underline{\mathbb{N}}$, a_1 puede ser cualquier $\mathbb{N}$

$a_1 \quad 1$ $\qquad$ a_2 puede ser cualquier $\mathbb{N}$

$a_2 \quad 2$ $\qquad \vdots$

$a_3 \quad 3$

$\vdots \quad \vdots$

$\# M$ = La cantidad de funciones que hay de $\mathbb{N}$ hacia $\mathbb{N}$ o sea

$\# M = (\# \mathbb{N})^{\# \mathbb{N}} = \aleph_0^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} = c$

$(\aleph_0 \geq n, \forall n \in \mathbb{N})$

Como $\aleph_0 \leq 2^{\aleph_0}$ (elevando a la $\aleph_0$) $\Rightarrow \aleph_0^{\aleph_0} \leq (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 . \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$

Como $c \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq c$ (por CANTOR-B) $\aleph_0^{\aleph_0} = c$

Luego $\boxed{\# M = c}$

AHORA SÍ EL ii)

$L = \{ (a_n) \subset \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \}$

Definiré una f biyectiva: $f : M \to L$

Sea $a \in M$ una sucesión $\quad f(a) = b$ una sucesión, tal que $b \in L$

Sea $a = (a_n)_n$ y $b = (b_n)_n$

DEFINICION DE F

$$\left.\begin{array}{l} f(a_1) = a_1 = b_1 \\ f(a_2) = a_1 + a_2 - 1 = b_2 \\ f(a_3) = a_1 + a_2 + a_3 - 2 = b_3 \\ \vdots \\ f(a_k) = a_1 + \dots + a_k - (k-1) = b_k \end{array}\right\}$$

$\vdots$

Notamos que $(b_n)_n$ es ~~estrictam.~~ creciente

$b_{k+1} - b_k = \underbrace{a_k - 1}_{\geq 0}$

$b_{k+1} \geq b_k$

Faltaría ver la BIY de f

INY: Si $f(a) = f(c)$, para a y $c \in M$, entonces

$f(a_1) = f(c_1) = a_1 = c_1$

$f(a_2) = f(c_2) = \cancel{a_1} + a_2 - 1 = \cancel{c_1} + c_2 - 1 \Rightarrow \boxed{a_2 = c_2}$

$f(a_3) = f(c_3) = \cancel{a_1} + \underline{a_2} + a_3 - 1 = \cancel{c_1} + \underline{c_2} + c_3 - 1 \Rightarrow \boxed{a_3 = c_3}$

Recursivamente $a_i = c_i \ \forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow a = c$ y por tanto f es INY

SURY: Sea $b = (b_n)_n \in L$ o sea $b_k \leq b_{k+1}$

Queremos ver que $\exists\, a \in M / f(a) = b$

Sea $a_1 = b_1 \wedge a_j = b_{j+1} - b_j + 1 \Rightarrow f(a_j) = b_j \ \forall j$

$\Rightarrow f(a) = b$ pero $a \in M$? solo si $a_j \geq 1 \ \forall j$

$a_j = b_{j+1} - b_j + 1 \geq 0 + 1 = 1$ ✓

Por tanto es SURY

LUEGO f es BIY, entonces: $M \sim L \rightarrow \# M = \# L$

por 21) i) $\# M = c \Rightarrow \# L = c$

21) v)

$B = \{ (q_n) \subset \mathbb{Q} : (q_n) \text{ es periodica} \}$

Sea B_K : La suceciones de periodo tamaño K

$$B_K = (q_1, q_2, \cdots, q_K, \underbrace{q_1, q_2, \cdots, q_K,}\ \cdots)$$

Sea $f : \mathbb{I}_K \rightarrow \mathbb{Q}$

$$B_K \begin{cases} q_1 : 1 & \text{"}q\text{"} \\ q_2 : 2 & \\ \vdots & \\ q_K : K & \end{cases}$$

q_1 puede ser cualquier $\mathbb{Q}$
q_2 puede ser cualquier $\mathbb{Q}$
$\vdots$
q_K puede ser cualquier $\mathbb{Q}$

Luego $\# B_K$ = La cantidad de funciones que van de $\mathbb{I}_K$ hacia $\mathbb{Q}$

$$\# B_K = (\# \mathbb{Q})^{\# \mathbb{I}_K} = \aleph_0^{K} = \aleph_0$$

o sea B_K es numerable.

Ademas

$$B = \bigcup_{K \in \mathbb{N}} B_K$$

Como union union de numerables es numerable

$\therefore \# B = \aleph_0$

22) vi) Sea L el conjunto mencionado

Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}_m$

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N} & \mathbb{I}_m \\ a_1 : 1 & 1 \\ a_2 : 2 & 2 \\ a_3 : 3 & \vdots \\ \vdots & m \end{array}$$

a_1 puede ser cualquier $\mathbb{I}_m$
a_2 " " "
$\vdots$

Luego $\# L$ = La cantidad de funciones que van de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{I}_m$

$$\# L = (\# \mathbb{I}_m)^{\# \mathbb{N}}$$

si $m = 1 \Rightarrow L = \{ (1, 1, 1, \cdots) \} \Rightarrow \# L = 1$

si $m \geq 2 \Rightarrow$

$$2 \leq \# \mathbb{I}_m \Rightarrow 2^{\aleph_0} \leq \# \mathbb{I}_m^{\aleph_0}$$

ADEMAS: como $\# \mathbb{I}_m \leq \# \mathbb{N} \Rightarrow \# \mathbb{I}_m^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$

$$c = 2^{\aleph_0} \leq \# \mathbb{I}_m^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} = c \Rightarrow \# L = c$$