
Segunda entrega de de Cálculo Avanzado

Resolver y entregar uno de los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Sea X un espacio métrico. Una familia \mathcal{A} de subconjuntos de X se dice *localmente finita* si para cada $x \in X$ existe un abierto $U \ni x$ de X que interseca sólo a finitos elementos de \mathcal{A} .

1. Sea X un espacio métrico t sea \mathcal{A} una familia localmente finita en X . Probar que

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}.$$

2. Sea X un espacio métrico y sea \mathcal{A} una familia localmente finita en X tal que A es cerrado en X para cada $A \in \mathcal{A}$ y $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = X$. Sea Y otro espacio métrico y sea $f : X \rightarrow Y$ tal que $f|_A : A \rightarrow Y$ es continua para cada $A \in \mathcal{A}$. Probar que f es continua.

Ejercicio 2. Sean X e Y espacios métricos, y sea $f : X \rightarrow Y$. Probar que f es uniformemente continua si y sólo si dadas dos sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, z_n) = 0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f(x_n), f(z_n)) = 0$.