**Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico**
**Primer Cuatrimestre de 2020**
**Entrega n°9**

---

**1**. Sea

$$\langle f, g\rangle = f(1)g(-1) + f(-1)g(1) + \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx.$$

*a*) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno para el espacio $V = \{f \in C^1([-1,1]) : f \text{ es par}\}$.

*b*) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos del polinomio $p(x) = x^4$ sobre el subespacio $S$ generado por $\{1, x^2\}$.

**Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico**
**Primer Cuatrimestre de 2020**
**Entrega n°9 - Resolución del ejercicio**

---

1$a$) Para probar que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno para el espacio $V = \{f \in C^1([-1,1]) : f \text{ es par}\}$, debemos ver que se satisfacen las siguientes condiciones:

- Es bilineal y simétrico, es decir que $\langle \alpha f_1 + f_2, g\rangle = \alpha\langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$ y $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$: esto es directo (evaluar, derivar e integrar son lineales y los productos y sumas que aparecen conmutan).
- $\langle f, f\rangle = 2f(1)f(-1) + \int_{-1}^{1}(f'(x))^2dx \underset{f \text{ par}}{=} 2f^2(1) + \int_{-1}^{1}(f'(x))^2dx \geq 0.$
- Además $\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$ y $f' \equiv 0$. Pero si $f' \equiv 0$ entonces $f$ es constante y $f(1) = 0$ entonces es $f \equiv 0$.

1$b$) Para hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos del polinomio $p(x) = x^4$ sobre el subespacio $S$ generado por $\{1, x^2\}$ debemos hallar la proyección ortogonal sobre el subespacio $S$. Si $\{p_1, p_2\}$, es una base ortonormal de $S$, entonces la proyección ortogonal de $p$ sobre $S$, $P_S(p)$, se obtiene mediante la fórmula:

$$P_S(p) = \langle p, p_1\rangle p_1 + \langle p, p_2\rangle p_2.$$

Para hallar dicha base ortogonal, aplicaremos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $\{1, x^2\}$:

- $q_1 = 1, \|q_1\|^2 = \langle 1, 1\rangle = 2 + \int_{-1}^{1} 0\ dx = 2 \quad \Rightarrow p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $q_2 = x^2 - \langle x^2, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle\frac{1}{\sqrt{2}} = x^2 - \frac{1}{2}\langle x^2, 1\rangle = x^2 - \frac{1}{2}\left[1 + 1 + \int_{-1}^{1} 0\ dx\right] = x^2 - 1,$
  $\|q_2\|^2 = \langle x^2 - 1, x^2 - 1\rangle = \int_{-1}^{1}(2x)^2dx \underset{(2x)^2 \text{ par}}{=} 8\int_0^1 x^2dx = \dfrac{8}{3}$
  $\Rightarrow p_2 = \sqrt{\frac{3}{8}}(x^2 - 1).$
- $\langle p, p_1\rangle = \langle x^4, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$
- $\langle p, p_2\rangle = \langle x^4, \sqrt{\frac{3}{8}}(x^2 - 1)\rangle = \sqrt{\frac{3}{8}}\int_{-1}^{1} 4x^3 2x dx \underset{x^4 \text{ par}}{=} 16\sqrt{\frac{3}{8}}\int_0^1 x^4dx = \frac{16}{5}\sqrt{\frac{3}{8}}.$

entonces $P_S(x^4) = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{16}{5}\sqrt{\frac{3}{8}}\sqrt{\frac{3}{8}}(x^2 - 1) = 1 + \frac{6}{5}(x^2 - 1) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{1}{5}.$