Métricas equivalentes

Definición

Sea X un conjunto arbitrario. Dos métricas d y d' en X de dicen **topológicamente equivalentes** si definen los mismos abiertos en X.

Métricas equivalentes

Definición

Sea X un conjunto arbitrario. Dos métricas d y d' en X de dicen **topológicamente equivalentes** si definen los mismos abiertos en X.

Ejercicio de la teórica

Dos métricas son topológicamente equivalentes sí y sólo si definen las mismas sucesiones convergentes

Métricas equivalentes

Definición

Sea X un conjunto arbitrario. Dos métricas d y d' en X de dicen **topológicamente equivalentes** si definen los mismos abiertos en X.

Ejercicio de la teórica

Dos métricas son topológicamente equivalentes sí y sólo si definen las mismas sucesiones convergentes

Ejercicio

En $\mathbb{R}^n$ las métricas d_1 y d_∞ son topológicamente equivalentes.

Métricas equivalentes

Definición

Sea X un conjunto arbitrario. Dos métricas d y d' en X de dicen **topológicamente equivalentes** si definen los mismos abiertos en X.

Ejercicio de la teórica

Dos métricas son topológicamente equivalentes sí y sólo si definen las mismas sucesiones convergentes

Ejercicio

En $\mathbb{R}^n$ las métricas d_1 y d_∞ son topológicamente equivalentes.

Solución. Supongamos que $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión que converge con la distancia d_1 a un elemento $x \in \mathbb{R}^n$, es decir que

$$d_1(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Definición

Sea X un conjunto arbitrario. Dos métricas d y d' en X de dicen **topológicamente equivalentes** si definen los mismos abiertos en X.

Ejercicio de la teórica

Dos métricas son topológicamente equivalentes sí y sólo si definen las mismas sucesiones convergentes

Ejercicio

En $\mathbb{R}^n$ las métricas d_1 y d_∞ son topológicamente equivalentes.

Solución. Supongamos que $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión que converge con la distancia d_1 a un elemento $x \in \mathbb{R}^n$, es decir que

$$d_1(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Veamos entonces que

$$d_\infty(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Métricas equivalentes

Definición

Sea X un conjunto arbitrario. Dos métricas d y d' en X de dicen **topológicamente equivalentes** si definen los mismos abiertos en X.

Ejercicio de la teórica

Dos métricas son topológicamente equivalentes sí y sólo si definen las mismas sucesiones convergentes

Ejercicio

En $\mathbb{R}^n$ las métricas d_1 y d_∞ son topológicamente equivalentes.

Solución. Supongamos que $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión que converge con la distancia d_1 a un elemento $x \in \mathbb{R}^n$, es decir que

$$d_1(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Veamos entonces que

$$d_\infty(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Usando la acotación

$$d_\infty(x_n, x) = \max_{1\le i\le n}\{|x_{n,i} - x_i|\} \le \sum_{i=1}^{n} |x_{n,i} - x_i| = d_1(x_n, x)$$

y tomando límite obtenemos lo que queríamos.

Definición

Sea X un conjunto arbitrario. Dos métricas d y d' en X de dicen **topológicamente equivalentes** si definen los mismos abiertos en X.

Ejercicio de la teórica

Dos métricas son topológicamente equivalentes sí y sólo si definen las mismas sucesiones convergentes

Ejercicio

En $\mathbb{R}^n$ las métricas d_1 y d_∞ son topológicamente equivalentes.

Solución. Supongamos que $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión que converge con la distancia d_1 a un elemento $x \in \mathbb{R}^n$, es decir que

$$d_1(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Veamos entonces que

$$d_\infty(x_n, x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Usando la acotación

$$d_\infty(x_n, x) = \max_{1 \le i \le n} \{|x_{n,i} - x_i|\} \le \sum_{i=1}^{n} |x_{n,i} - x_i| = d_1(x_n, x)$$

y tomando límite obtenemos lo que queríamos.

Recíprocamente supongamos que $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión que converge con la distancia d_∞ a $x \in \mathbb{R}^n$. Similarmente, tomando límite a ambos lados de

$$d_1(x_n, x) = \sum_{i=1}^{n} |x_{n,i} - x_i| \le \sum_{i=1}^{n} d_\infty(x_n, x) = n d_\infty(x_n, x)$$

podemos concluir que $(x_n)_n$ converge a x en la distancia d_1 también.

Veamos entonces que

$$d_\infty(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Usando la acotación

$$d_\infty(x_n, x) = \max_{1\le i\le n}\{|x_{n,i} - x_i|\} \le \sum_{i=1}^{n} |x_{n,i} - x_i| = d_1(x_n, x)$$

y tomando límite obtenemos lo que queríamos.

Recíprocamente supongamos que $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión que converge con la distancia d_∞ a $x \in \mathbb{R}^n$. Similarmente, tomando límite a ambos lados de

$$d_1(x_n, x) = \sum_{i=1}^{n} |x_{n,i} - x_i| \le \sum_{i=1}^{n} d_\infty(x_n, x) = n\, d_\infty(x_n, x)$$

podemos concluir que $(x_n)_n$ converge a x en la distancia d_1 también.

Moraleja. El ingrediente clave de la solución previa es la cadena de desigualdades

$$d_\infty(x, y) \le d_1(x, y) \le n\, d_\infty(x, y).$$

Veamos entonces que

$$d_\infty(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Usando la acotación

$$d_\infty(x_n, x) = \max_{1\le i\le n}\{|x_{n,i} - x_i|\} \le \sum_{i=1}^{n} |x_{n,i} - x_i| = d_1(x_n, x)$$

y tomando límite obtenemos lo que queríamos.

Recíprocamente supongamos que $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión que converge con la distancia d_∞ a $x \in \mathbb{R}^n$. Similarmente, tomando límite a ambos lados de

$$d_1(x_n, x) = \sum_{i=1}^{n} |x_{n,i} - x_i| \le \sum_{i=1}^{n} d_\infty(x_n, x) = n\, d_\infty(x_n, x)$$

podemos concluir que $(x_n)_n$ converge a x en la distancia d_1 también.

Moraleja. El ingrediente clave de la solución previa es la cadena de desigualdades

$$d_\infty(x, y) \le d_1(x, y) \le n\, d_\infty(x, y).$$

Más generalmente, si en un conjunto X dos métricas d y d' satisfacen dos desigualdades de la forma

$$C\, d(x, y) \le d'(x, y) \le C'\, d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

para un par de constantes positivas $C, C' > 0$, entonces podemos concluir que d y d' son topológicamente equivalentes.

Métricas equivalentes

Veamos entonces que

$$d_\infty(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Usando la acotación

$$d_\infty(x_n, x) = \max_{1\le i\le n}\{|x_{n,i} - x_i|\} \le \sum_{i=1}^{n} |x_{n,i} - x_i| = d_1(x_n, x)$$

y tomando límite obtenemos lo que queríamos.

Recíprocamente supongamos que $(x_n)_n \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión que converge con la distancia d_∞ a $x \in \mathbb{R}^n$. Similarmente, tomando límite a ambos lados de

$$d_1(x_n, x) = \sum_{i=1}^{n} |x_{n,i} - x_i| \le \sum_{i=1}^{n} d_\infty(x_n, x) = n\, d_\infty(x_n, x)$$

podemos concluir que $(x_n)_n$ converge a x en la distancia d_1 también.

Moraleja. El ingrediente clave de la solución previa es la cadena de desigualdades

$$d_\infty(x, y) \le d_1(x, y) \le n\, d_\infty(x, y).$$

Más generalmente, si en un conjunto X dos métricas d y d' satisfacen dos desigualdades de la forma

$$C\, d(x, y) \le d'(x, y) \le C'\, d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

para un par de constantes positivas $C, C' > 0$, entonces podemos concluir que d y d' son topológicamente equivalentes.

Definición

Decimos que dos métricas d y d' en X son **uniformemente equivalentes** si existen constantes $C, C' > 0$ que satisfacen

$$C\, d(x, y) \le d'(x, y) \le C'\, d(x, y) \quad \forall x, y \in X$$

Moraleja. El ingrediente clave de la solución previa es la cadena de desigualdades

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n\, d_\infty(x,y).$$

Más generalmente, si en un conjunto X dos métricas d y d' satisfacen dos desigualdades de la forma

$$C\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C'\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

para un par de constantes positivas $C, C' > 0$, entonces podemos concluir que d y d' son topológicamente equivalentes.

Definición

Decimos que dos métricas d y d' en X son **uniformemente equivalentes** si existen constantes $C, C' > 0$ que satisfacen

$$C\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C'\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

Observación

d, d' uniformemente eq. $\Rightarrow d, d'$ topológicamente eq.

Sin embargo, no vale la afirmación recíproca:

Métricas equivalentes

Moraleja. El ingrediente clave de la solución previa es la cadena de desigualdades

$$d_\infty(x,y) \le d_1(x,y) \le n\, d_\infty(x,y).$$

Más generalmente, si en un conjunto X dos métricas d y d' satisfacen dos desigualdades de la forma

$$C\, d(x,y) \le d'(x,y) \le C'\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

para un par de constantes positivas $C, C' > 0$, entonces podemos concluir que d y d' son topológicamente equivalentes.

Definición

Decimos que dos métricas d y d' en X son **uniformemente equivalentes** si existen constantes $C, C' > 0$ que satisfacen

$$C\, d(x,y) \le d'(x,y) \le C'\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

Observación

d, d' uniformemente eq. $\Rightarrow$ d, d' topológicamente eq.

Sin embargo, no vale la afirmación recíproca:

Ejercicio

Sea (X,d) un espacio métrico. Denotamos por $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ a la métrica

$$\overline{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}.$$

(a) Probar que d y $\overline{d}$ son métricas topológicamente equivalentes.

(b) Probar que si $X = \mathbb{R}$ y $d = d_2$ entonces d y $\overline{d}$ no son uniformemente equivalentes.

Moraleja. El ingrediente clave de la solución previa es la cadena de desigualdades

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n\, d_\infty(x,y).$$

Más generalmente, si en un conjunto X dos métricas d y d' satisfacen dos desigualdades de la forma

$$C\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C'\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

para un par de constantes positivas $C, C' > 0$, entonces podemos concluir que d y d' son topológicamente equivalentes.

Definición

Decimos que dos métricas d y d' en X son **uniformemente equivalentes** si existen constantes $C, C' > 0$ que satisfacen

$$C\, d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C'\, d(x,y) \quad \forall x,y \in X$$

Observación

d, d' uniformemente eq. $\Rightarrow$ d, d' topológicamente eq.

Sin embargo, no vale la afirmación recíproca:

Ejercicio

Sea (X,d) un espacio métrico. Denotamos por $\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ a la métrica

$$\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}.$$

(a) Probar que d y $\bar{d}$ son métricas topológicamente equivalentes.

(b) Probar que si $X = \mathbb{R}$ y $d = d_2$ entonces d y $\bar{d}$ no son uniformemente equivalentes.

Solución. (a) Supongamos que $(x_n)_n \subseteq X$ y $x \in X$. Es claro que

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{d}(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Métricas equivalentes

Observación

d, d' uniformemente eq. $\Rightarrow d, d'$ topológicamente eq.

Sin embargo, no vale la afirmación recíproca:

Ejercicio

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por $\overline{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ a la métrica

$$\overline{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}.$$

(a) Probar que d y $\overline{d}$ son métricas topológicamente equivalentes.

(b) Probar que si $X = \mathbb{R}$ y $d = d_2$ entonces d y $\overline{d}$ no son uniformemente equivalentes.

Solución. (a) Supongamos que $(x_n)_n \subseteq X$ y $x \in X$. Es claro que

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{d}(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) Supongamos por el contrario que existen constantes positivas $C, C' > 0$ de manera que

$$C\,\overline{d}(x, y) \le d(x, y) \le C'\,\overline{d}(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Métricas equivalentes

Observación

d, d' uniformemente eq. $\Rightarrow d, d'$ topológicamente eq.

Sin embargo, no vale la afirmación recíproca:

Ejercicio

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ a la métrica

$$\overline{d}(x, y) = \text{mín}\,\{d(x, y), 1\}.$$

(a) Probar que d y $\overline{d}$ son métricas topológicamente equivalentes.

(b) Probar que si $X = \mathbb{R}$ y $d = d_2$ entonces d y $\overline{d}$ no son uniformemente equivalentes.

Solución. (a) Supongamos que $(x_n)_n \subseteq X$ y $x \in X$. Es claro que

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{d}(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) Supongamos por el contrario que existen constantes positivas $C, C' > 0$ de manera que

$$C\ \overline{d}(x, y) \leq d(x, y) \leq C'\ \overline{d}(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

En particular, si tomamos $x = n$ e $y = 0$ obtenemos que

$$C\ \underbrace{\overline{d}(n, 0)}_{1} \leq \underbrace{d(n, 0)}_{n} \leq C'\ \underbrace{\overline{d}(n, 0)}_{1},$$

lo cual es absurdo porque esto estaría diciendo que la constante C' es más grande que cualquier número natural n.

Observación

d, d' uniformemente eq. $\Rightarrow d, d'$ topológicamente eq.

Sin embargo, no vale la afirmación recíproca:

Ejercicio

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ a la métrica

$$\overline{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}.$$

(a) Probar que d y $\overline{d}$ son métricas topológicamente equivalentes.

(b) Probar que si $X = \mathbb{R}$ y $d = d_2$ entonces d y $\overline{d}$ no son uniformemente equivalentes.

Solución. (a) Supongamos que $(x_n)_n \subseteq X$ y $x \in X$. Es claro que

$$d(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{d}(x_n, x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) Supongamos por el contrario que existen constantes positivas $C, C' > 0$ de manera que

$$C\,\overline{d}(x, y) \leq d(x, y) \leq C'\,\overline{d}(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

En particular, si tomamos $x = n$ e $y = 0$ obtenemos que

$$C\,\underbrace{\overline{d}(n, 0)}_{1} \leq \underbrace{d(n, 0)}_{n} \leq C'\,\underbrace{\overline{d}(n, 0)}_{1},$$

lo cual es absurdo porque esto estaría diciendo que la constante C' es más grande que cualquier número natural n.

Ejercicio Adicional

Probar que las métricas d_1, d_2 y d_∞ de $\mathbb{R}^n$ son uniformemente equivalentes.

(b) Supongamos por el contrario que existen constantes positivas $C, C' > 0$ de manera que

$$C\,\overline{d}(x,y) \leq d(x,y) \leq C'\,\overline{d}(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

En particular, si tomamos $x = n$ e $y = 0$ obtenemos que

$$C\,\underbrace{\overline{d}(n,0)}_{1} \leq \underbrace{d(n,0)}_{n} \leq C'\,\underbrace{\overline{d}(n,0)}_{1},$$

lo cual es absurdo porque esto estaría diciendo que la constante C' es más grande que cualquier número natural n.

Ejercicio Adicional

Probar que las métricas d_1, d_2 y d_∞ de $\mathbb{R}^n$ son uniformemente equivalentes.

Ejercicio

Consideremos el conjunto de sucesiones sumables

$$\ell^1 = \left\{ (a_n)_n \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$$

equipado con las distancias

$$d_\infty((a_n)_n, (b_n)_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n - b_n|\}$$

$$d_1((a_n)_n, (b_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

$$d((a_n)_n, (b_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}.$$

Probar que las métricas d_1, d_∞ y d no son topológicamente equivalentes.

Métricas equivalentes

Ejercicio

Consideremos el conjunto de sucesiones sumables

$$\ell^1 = \left\{ (a_n)_n \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$$

equipado con las distancias

$$d_\infty((a_n)_n, (b_n)_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n - b_n|\}$$

$$d_1((a_n)_n, (b_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

$$d((a_n)_n, (b_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}.$$

Probar que las métricas d_1, d_∞ y d no son topológicamente equivalentes.

Comentario preliminar 1. Uno no puede imitar la cuenta hecha en el primer ejercicio hecho para la distancias d_1 y d_∞ para $\mathbb{R}^n$ y tomar límite porque hay una constante "n" en la cadena

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n\, d_\infty(x,y).$$

Métricas equivalentes

Ejercicio

Consideremos el conjunto de sucesiones sumables

$$\ell^1 = \left\{ (a_n)_n \subseteq \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$$

equipado con las distancias

$$d_\infty((a_n)_n, (b_n)_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|a_n - b_n|\}$$

$$d_1((a_n)_n, (b_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

$$d((a_n)_n, (b_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}.$$

Probar que las métricas d_1, d_∞ y d no son topológicamente equivalentes.

Comentario preliminar 1. Uno no puede imitar la cuenta hecha en el primer ejercicio hecho para la distancias d_1 y d_∞ para $\mathbb{R}^n$ y tomar límite porque hay una constante "n" en la cadena

$$d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq n\, d_\infty(x, y).$$

Comentario preliminar 2. Es sencillo comprobar que

$$d((a_n)_n, (b_n)_n) \leq d_\infty((a_n)_n, (b_n)_n) \leq d_1((a_n)_n, (b_n)_n)$$

con lo cual

$$\text{conv en } d_1 \Rightarrow \text{conv. en } d_\infty \Rightarrow \text{conv. en } d.$$

Debemos verificar entonces que no valen las implicaciones recíprocas.

Métricas equivalentes

Comentario preliminar 1. Uno no puede imitar la cuenta hecha en el primer ejercicio hecho para la distancias d_1 y d_∞ para $\mathbb{R}^n$ y tomar límite porque hay una constante "n" en la cadena

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n\, d_\infty(x,y).$$

Comentario preliminar 2. Es sencillo comprobar que

$$d((a_n)_n,(b_n)_n) \leq d_\infty((a_n)_n,(b_n)_n) \leq d_1((a_n)_n,(b_n)_n)$$

con lo cual

$$\text{conv en } d_1 \Rightarrow \text{conv. en } d_\infty \Rightarrow \text{conv. en } d.$$

Debemos verificar entonces que no valen las implicaciones recíprocas.

(conv. en $d_\infty \nRightarrow$ conv. en d_1) Dado un número natural $k \in \mathbb{N}$ consideremos la sucesión $a_k k \in \ell^1$ definida como

$$a_k = \Big(\underbrace{\frac{1}{k},\frac{1}{k},\ldots,\frac{1}{k}}_{k \text{ lugares}},0,0,\ldots\Big).$$

Métricas equivalentes

Comentario preliminar 1. Uno no puede imitar la cuenta hecha en el primer ejercicio hecho para la distancias d_1 y d_∞ para $\mathbb{R}^n$ y tomar límite porque hay una constante “n” en la cadena

$$d_\infty(x,y) \leq d_1(x,y) \leq n\, d_\infty(x,y).$$

Comentario preliminar 2. Es sencillo comprobar que

$$d((a_n)_n,(b_n)_n) \leq d_\infty((a_n)_n,(b_n)_n) \leq d_1((a_n)_n,(b_n)_n)$$

con lo cual

$$\text{conv en } d_1 \Rightarrow \text{conv. en } d_\infty \Rightarrow \text{conv. en } d.$$

Debemos verificar entonces que no valen las implicaciones recíprocas.

(conv. en $d_\infty \not\Rightarrow$ conv. en d_1) Dado un número natural $k \in \mathbb{N}$ consideremos la sucesión $a_k k \in \ell^1$ definida como

$$a_k = \Big(\underbrace{\frac{1}{k},\frac{1}{k},\ldots,\frac{1}{k}}_{k \text{ lugares}},0,0,\ldots\Big).$$

Entonces

$$d_\infty(a_k,0) = \frac{1}{k} \to 0$$

pero

$$d_1(a_k,0) = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k} = 1 \not\to 0.$$

Métricas equivalentes

(conv. en $d_\infty \not\Rightarrow$ conv. en d_1) Dado un número natural $k \in \mathbb{N}$ consideremos la sucesión $a_k k \in \ell^1$ definida como

$$a_k = \Bigg(\underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{k \text{ lugares}}, 0, 0, \dots\Bigg).$$

Entonces

$$d_\infty(a_k, 0) = \frac{1}{k} \longrightarrow 0$$

pero

$$d_1(a_k, 0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} = 1 \nrightarrow 0.$$

(conv. en $d \not\Rightarrow$ conv. en d_∞) Definimos $a^k \in \ell^1$ como

$$a_k = (\underbrace{0, 0, \dots, 1}_{k \text{ lugares}}, 0, 0, \dots).$$

Luego

$$d(a_k, 0) = \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0$$

y

$$d_\infty(a_k, 0) = 1 \nrightarrow 0.$$

Métricas equivalentes

(conv. en $d_\infty \not\Rightarrow$ conv. en d_1) Dado un número natural $k \in \mathbb{N}$ consideremos la sucesión $a_k k \in \ell^1$ definida como

$$a_k = \Big(\underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{k \text{ lugares}}, 0, 0, \dots\Big).$$

Entonces

$$d_\infty(a_k, 0) = \frac{1}{k} \to 0$$

pero

$$d_1(a_k, 0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} = 1 \not\to 0.$$

(conv. en $d \not\Rightarrow$ conv. en d_∞) Definimos $a^k \in \ell^1$ como

$$a_k = (\underbrace{0, 0, \dots, 1}_{k \text{ lugares}}, 0, 0, \dots).$$

Luego

$$d(a_k, 0) = \frac{1}{2^k} \to 0$$

y

$$d_\infty(a_k, 0) = 1 \not\to 0.$$

Ejercicio

Fijado un $d \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$X = \{f \in C[0,1] : f \text{ es un polinomio, } \operatorname{gr}(f) \le d\}.$$

Probar que las distancias d_1 y d_∞ en X son topológicamente equivalentes.

(conv. en $d_\infty \not\Rightarrow$ conv. en d_1) Dado un número natural $k \in \mathbb{N}$ consideremos la sucesión $a_k k \in \ell^1$ definida como

$$a_k = \Big(\underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k}}_{k \text{ lugares}}, 0, 0, \dots\Big).$$

Entonces

$$d_\infty(a_k, 0) = \frac{1}{k} \to 0$$

pero

$$d_1(a_k, 0) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} = 1 \nrightarrow 0.$$

(conv. en $d \not\Rightarrow$ conv. en d_∞) Definimos $a^k \in \ell^1$ como

$$a_k = (\underbrace{0, 0, \dots, 1}_{k \text{ lugares}}, 0, 0, \dots).$$

Luego

$$d(a_k, 0) = \frac{1}{2^k} \to 0$$

y

$$d_\infty(a_k, 0) = 1 \nrightarrow 0.$$

Ejercicio

Fijado un $d \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$X = \{f \in C[0,1] : f \text{ es un polinomio, } \operatorname{gr}(f) \leq d\}.$$

Probar que las distancias d_1 y d_∞ en X son topológicamente equivalentes.

Advertencia. Las distancias d_1 y d_∞ NO son topológicamente equivalentes en $C[0,1]$. Una manera de probarlo es considerar una sucesión de funciones en forma de "triángulo" como se vieron en la teórica.

Luego

$$d(a_k, 0) = \frac{1}{2^k} \to 0$$

y

$$d_\infty(a_k, 0) = 1 \nrightarrow 0.$$

Ejercicio

Fijado un $d \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$X = \{f \in C[0,1] : f \text{ es un polinomio, } \operatorname{gr}(f) \leq d\}.$$

Probar que las distancias d_1 y d_∞ en X son topológicamente equivalentes.

Advertencia. Las distancias d_1 y d_∞ NO son topológicamente equivalentes en $C[0,1]$. Una manera de probarlo es considerar una sucesión de funciones en forma de "triángulo" como se vieron en la teórica.

Comentario. Con herramientas que vamos a ver más adelante en las teóricas se puede probar que estas dos distancias son uniformemente equivalentes en X.

Luego

$$d(a_k, 0) = \frac{1}{2^k} \to 0$$

y

$$d_\infty(a_k, 0) = 1 \not\to 0.$$

Ejercicio

Fijado un $d \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$X = \{f \in C[0,1] : f \text{ es un polinomio}, \ \mathrm{gr}(f) \leq d\}.$$

Probar que las distancias d_1 y d_∞ en X son topológicamente equivalentes.

Advertencia. Las distancias d_1 y d_∞ NO son topológicamente equivalentes en $C[0,1]$. Una manera de probarlo es considerar una sucesión de funciones en forma de “triángulo” como se vieron en la teórica.

Comentario. Con herramientas que vamos a ver más adelante en las teóricas se puede probar que estas dos distancias son uniformemente equivalentes en X.

Solución. Observemos que

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt \leq \int_0^1 d_\infty(f,g)dt = d_\infty(f,g),$$

lo cual implica que toda sucesión convergente con respecto a la distancia d_∞ es convergente con respecto d_1 también.

Luego

$$d(a_k, 0) = \frac{1}{2^k} \to 0$$

y

$$d_\infty(a_k, 0) = 1 \nrightarrow 0.$$

Ejercicio

Fijado un $d \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto

$$X = \{f \in C[0,1] : f \text{ es un polinomio, } \operatorname{gr}(f) \le d\}.$$

Probar que las distancias d_1 y d_∞ en X son topológicamente equivalentes.

Advertencia. Las distancias d_1 y d_∞ NO son topológicamente equivalentes en $C[0,1]$. Una manera de probarlo es considerar una sucesión de funciones en forma de "triángulo" como se vieron en la teórica.

Comentario. Con herramientas que vamos a ver más adelante en las teóricas se puede probar que estas dos distancias son uniformemente equivalentes en X.

Solución. Observemos que

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt \le \int_0^1 d_\infty(f,g) dt = d_\infty(f,g),$$

lo cual implica que toda sucesión convergente con respecto a la distancia d_∞ es convergente con respecto d_1 también. Veamos que vale la afirmación recíproca. Supongamos entonces que $(f_n)_n \subseteq X$ es una sucesión de polinomios de grado menor o igual que d que convergen a un polinomio $f \in X$ con respecto a la distancia d_1.

Reducción. Reemplazando $(f_n)_n$ por $(f_n - f)_n$ podemos suponer que $f = 0$.

Comentario. Con herramientas que vamos a ver más adelante en las teóricas se puede probar que estas dos distancias son uniformemente equivalentes en X.

Solución. Observemos que

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt \leq \int_0^1 d_\infty(f,g)dt = d_\infty(f,g),$$

lo cual implica que toda sucesión convergente con respecto a la distancia d_∞ es convergente con respecto d_1 también. Veamos que vale la afirmación recíproca. Supongamos entonces que $(f_n)_n \subseteq X$ es una sucesión de polinomios de grado menor o igual que d que convergen a un polinomio $f \in X$ con respecto a la distancia d_1.

Reducción. Reemplazando f_n por $f_n - f$ podemos suponer que $f = 0$.

Dado un $x \in [0,1]$ sabemos que

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n(t)|dt \geq \int_0^x |f_n(t)|dt \geq \left| \int_0^x f_n(t)dt \right|.$$

Comentario. Con herramientas que vamos a ver más adelante en las teóricas se puede probar que estas dos distancias son uniformemente equivalentes en X.

Solución. Observemos que

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt \leq \int_0^1 d_\infty(f,g)dt = d_\infty(f,g),$$

lo cual implica que toda sucesión convergente con respecto a la distancia d_∞ es convergente con respecto d_1 también. Veamos que vale la afirmación recíproca. Supongamos entonces que $(f_n)_n \subseteq X$ es una sucesión de polinomios de grado menor o igual que d que convergen a un polinomio $f \in X$ con respecto a la distancia d_1.

Reducción. Reemplazando f_n por $f_n - f$ podemos suponer que $f = 0$.

Dado un $x \in [0,1]$ sabemos que

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n(t)|dt \geq \int_0^x |f_n(t)|dt \geq \left| \int_0^x f_n(t)dt \right|.$$

De ahora en adelante vamos a suponer que $d = 1$ porque en este caso particular están contenidas todas las ideas para probar el caso general.

Comentario. Con herramientas que vamos a ver más adelante en las teóricas se puede probar que estas dos distancias son uniformemente equivalentes en X.

Solución. Observemos que

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt \leq \int_0^1 d_\infty(f,g)dt = d_\infty(f,g),$$

lo cual implica que toda sucesión convergente con respecto a la distancia d_∞ es convergente con respecto d_1 también. Veamos que vale la afirmación recíproca. Supongamos entonces que $(f_n)_n \subseteq X$ es una sucesión de polinomios de grado menor o igual que d que convergen a un polinomio $f \in X$ con respecto a la distancia d_1.

Reducción. Reemplazando f_n por $f_n - f$ podemos suponer que $f = 0$.

Dado un $x \in [0,1]$ sabemos que

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n(t)|dt \geq \int_0^x |f_n(t)|dt \geq \left| \int_0^x f_n(t)dt \right|.$$

De ahora en adelante vamos a suponer que $d = 1$ porque en este caso particular están contenidas todas las ideas para probar el caso general.

Digamos que los elementos de la sucesión son de la forma

$$f_n(t) = a_n + b_n t.$$

A partir de la desigualdad previa podemos afirmar que para todo $x \in [0,1]$ vale que

$$\int_0^x f_n(t)t = a_n x + b_n x^2/2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Comentario. Con herramientas que vamos a ver más adelante en las teóricas se puede probar que estas dos distancias son uniformemente equivalentes en X.

Solución. Observemos que

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt \leq \int_0^1 d_\infty(f,g)dt = d_\infty(f,g),$$

lo cual implica que toda sucesión convergente con respecto a la distancia d_∞ es convergente con respecto d_1 también. Veamos que vale la afirmación recíproca. Supongamos entonces que $(f_n)_n \subseteq X$ es una sucesión de polinomios de grado menor o igual que d que convergen a un polinomio $f \in X$ con respecto a la distancia d_1.

Reducción. Reemplazando f_n por $f_n - f$ podemos suponer que $f = 0$.

Dado un $x \in [0,1]$ sabemos que

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n(t)|dt \geq \int_0^x |f_n(t)|dt \geq \left|\int_0^x f_n(t)dt\right|.$$

De ahora en adelante vamos a suponer que $d = 1$ porque en este caso particular están contenidas todas las ideas para probar el caso general.

Digamos que los elementos de la sucesión son de la forma

$$f_n(t) = a_n + b_n t.$$

A partir de la desigualdad previa podemos afirmar que para todo $x \in [0,1]$ vale que

$$\int_0^x f_n(t)t = a_n x + b_n x^2/2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En particular, si tomamos $x = 1$ y $x = 1/2$ obtenemos el "sistema"

Dado un $x \in [0,1]$ sabemos que

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n(t)|dt \geq \int_0^x |f_n(t)|dt \geq \left| \int_0^x f_n(t)dt \right|.$$

De ahora en adelante vamos a suponer que $d = 1$ porque en este caso particular están contenidas todas las ideas para probar el caso general.

Digamos que los elementos de la sucesión son de la forma

$$f_n(t) = a_n + b_n t.$$

A partir de la desigualdad previa podemos afirmar que para todo $x \in [0,1]$ vale que

$$\int_0^x f_n(t)dt = a_n x + b_n x^2/2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En particular, si tomamos $x = 1$ y $x = 1/2$ obtenemos el "sistema"

$$\begin{cases} a_n + \frac{1}{2} b_n \to 0, \\ \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{8} b_n \to 0. \end{cases}$$

Métricas equivalentes

Dado un $x \in [0,1]$ sabemos que

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |f_n(t)|dt \geq \int_0^x |f_n(t)|dt \geq \left| \int_0^x f_n(t)dt \right|.$$

De ahora en adelante vamos a suponer que $d = 1$ porque en este caso particular están contenidas todas las ideas para probar el caso general.

Digamos que los elementos de la sucesión son de la forma

$$f_n(t) = a_n + b_n t.$$

A partir de la desigualdad previa podemos afirmar que para todo $x \in [0,1]$ vale que

$$\int_0^x f_n(t)dt = a_n x + b_n x^2/2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En particular, si tomamos $x = 1$ y $x = 1/2$ obtenemos el "sistema"

$$\begin{cases} a_n + \dfrac{1}{2} b_n \longrightarrow 0, \\ \dfrac{1}{2} a_n + \dfrac{1}{8} b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Al "triangular" este "sistema" nos queda que

$$\begin{cases} a_n + \dfrac{1}{2} b_n \longrightarrow 0, \\ \dfrac{1}{2} a_n + \dfrac{1}{8} b_n \longrightarrow 0. \end{cases} \overset{F_2 - \frac{1}{2}F_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{2} b_n \longrightarrow 0, \\ \quad -\dfrac{3}{8} b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

$$\overset{-\frac{8}{3}F_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{2} b_n \longrightarrow 0, \\ \quad b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

$$\overset{F_1 1 - \frac{1}{2}F_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} a_n \longrightarrow 0, \\ b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Métricas equivalentes

$$\begin{cases} a_n + \dfrac{1}{2} b_n \longrightarrow 0, \\ \dfrac{1}{2} a_n + \dfrac{1}{8} b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Al "triangular" este "sistema" nos queda que

$$\begin{cases} a_n + \dfrac{1}{2} b_n \longrightarrow 0, \\ \dfrac{1}{2} a_n + \dfrac{1}{8} b_n \longrightarrow 0. \end{cases} \overset{F_2 - \frac{1}{2}F_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{2} b_n \longrightarrow 0, \\ \quad -\dfrac{3}{8} b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

$$\overset{-\frac{8}{3}F_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{2} b_n \longrightarrow 0, \\ \qquad b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

$$\overset{F_1 1 - \frac{1}{2}F_2}{\Longrightarrow} \begin{cases} a_n \longrightarrow 0, \\ b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Finalmente,

$$d_\infty(f_n, 0) = \max_{t \in [0,1]} \{|a_n + b_n t|\} \leq |a_n| + |b_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

$$\begin{cases} a_n + \frac{1}{2}b_n \longrightarrow 0, \\ \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{8}b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Al "triangular" este "sistema" nos queda que

$$\begin{cases} a_n + \frac{1}{2}b_n \longrightarrow 0, \\ \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{8}b_n \longrightarrow 0. \end{cases} \xRightarrow{F_2 - \frac{1}{2}F_1} \begin{cases} a_n + \frac{1}{2}b_n \longrightarrow 0, \\ -\frac{3}{8}b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

$$\xRightarrow{-\frac{8}{3}F_2} \begin{cases} a_n + \frac{1}{2}b_n \longrightarrow 0, \\ b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

$$\xRightarrow{F_1 1 - \frac{1}{2}F_2} \begin{cases} a_n \longrightarrow 0, \\ b_n \longrightarrow 0. \end{cases}$$

Finalmente,

$$d_\infty(f_n, 0) = \max_{t \in [0,1]}\{|a_n + b_n t|\} \leq |a_n| + |b_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Ejercicio Adicional

Probar el caso d arbitrario.