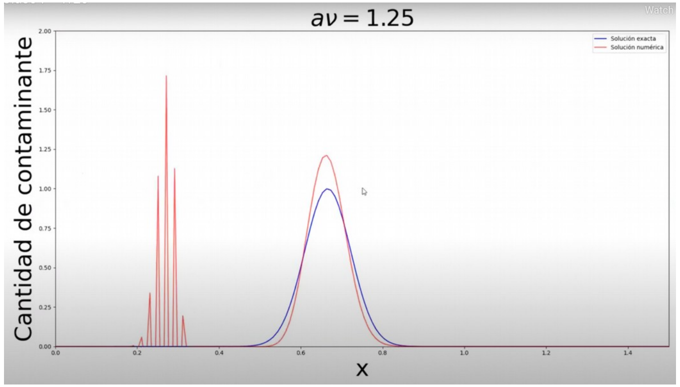
Cálculo Numérico

Clase Práctica, 7 de Mayo de 2020

Martín Maas

Clase práctica anterior:

$$\begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ \vdots \\ u_i^{j+1} \\ \vdots \\ u_m^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a\nu & & & & \\ a\nu & 1-a\nu & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a\nu & 1-a\nu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{j} \\ \vdots \\ u_i^{j} \\ \vdots \\ u_m^{j} \end{bmatrix}$$



Hoy: inestabilidad, normas de matrices y condicionamiento

Ejemplo sencillo de inestabilidad

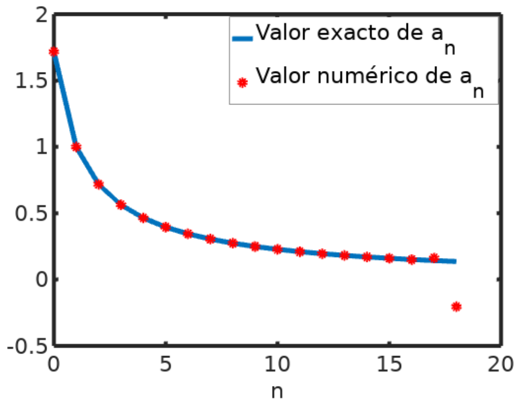
Queremos calcular $\int_0^1 e^x x^n dx$ integrando por partes n veces

$$\int_0^1 e^x x^n dx = [e^x x^n]\Big|_0^1 - n\int_0^1 e^x x^{n-1} dx$$

Definiendo $a_n := \int_0^1 e^x x^n dx$

Obtuvimos una recurrencia

$$\begin{cases} a_n &= e - n a_{n-1} \\ a_0 &= e - 1 \end{cases} \longrightarrow$$



$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{19} &= 6.5991 \\
\tilde{a}_{20} &= -129.26 \\
\tilde{a}_{21} &= 2717.3 \\
\tilde{a}_{22} &= -5.9777 \times 10^4 \\
\tilde{a}_{23} &= 1.3749 \times 10^6 \\
\tilde{a}_{24} &= -3.2997 \times 10^7
\end{aligned}$$

Ejemplo sencillo de inestabilidad

Recurrencia
$$\begin{cases} a_n & = e - n a_{n-1} \\ a_0 & = e - 1 \end{cases}$$

Recurrencia del error
$$\begin{cases} e_n & = \varepsilon - n e_{n-1} \\ e_0 & = \varepsilon \end{cases}$$

Reemplazando
$$\begin{aligned} e_n = \quad & \varepsilon - n e_{n-1} \\ & \varepsilon - n(\varepsilon - (n-1)e_{n-2}) \\ & \varepsilon - n\varepsilon + n(n-1)e_{n-2} \\ & \varepsilon - n\varepsilon + n(n-1)(\varepsilon - (n-2)e_{n-3}) \\ & \varepsilon - n\varepsilon + n(n-1)\varepsilon - n(n-1)(n-2)e_{n-3} \end{aligned}$$

Conjeturamos el término general:
$$\varepsilon \sum_{m=1}^{n} (-1)^m m!$$

Ejercicio 10 práctica 3

“Analice la estabilidad en norma infinito”

Teórica (calor explícito): $$E_i^{j+1} \leq (1 - \frac{2k}{h^2})E_i^j + \frac{k}{h^2}(E_{i+1}^j - E_{i-1}^j) + kR_i^j$$

Matricialmente: $$E^{j+1} \leq ME^j + kR^j$$

$$M = \begin{pmatrix} 1-\frac{2k}{h^2} & \frac{k}{h^2} & & & \\ \frac{k}{h^2} & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \frac{k}{h^2} \\ & & & \frac{k}{h^2} & 1-\frac{2k}{h^2} \end{pmatrix}$$

Tomando norma: $$\|E^{j+1}\| \leq \|M\|\|E^j\| + \|kR^j\|$$

Prop: $$\|Mv\| \leq \|M\|\|v\|$$

$$\|E^{j+1}\| \leq \|E^j\| + \|kR^j\|$$

Si $$\|M\| \leq 1$$

Estabilidad en norma 2 de la Ec de Calor

$$\|M\|_2 \leq \left(\|M\|_\infty \|M\|_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Hoy:

$$\|M\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|M\|_1 = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Obs: si M simétrica $\|M\|_\infty = \|M\|_1$

En tal caso $\|M\|_\infty \leq 1 \Longrightarrow \|M\|_2 \leq 1$

Propiedades de la norma 2

Radio espectral: $\rho(M) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ autovalor de } M\}$

Prop: $A \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^tA)}$

Dem: A^tA real y simétrica, se diagonaliza en BON

Tenemos $A^tAv_i = \mu_i v_i,$ tomemos $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$

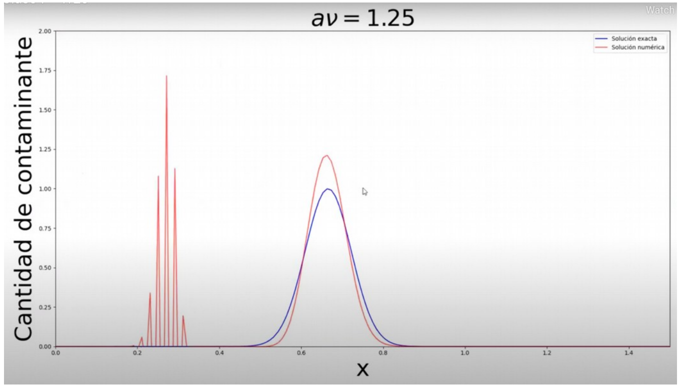
$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^tAx\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_i^2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2^2 \leq |\mu_{\max}| \|x\|_2^2$$

Coro: A simétrica $\Rightarrow \|A\|_2 = \rho(A)$

La inestabilidad de la Ec de Transporte

$$\begin{bmatrix} u_1^{j+1} \\ \vdots \\ u_i^{j+1} \\ \vdots \\ u_m^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a\nu & & & & \\ a\nu & 1-a\nu & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a\nu & 1-a\nu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{j} \\ \vdots \\ u_i^{j} \\ \vdots \\ u_m^{j} \end{bmatrix}$$



Tenemos $\rho(A) = |1 - a\nu|$

$$\rho(A) \leq 1 \text{ sii } a\nu \leq 2$$

Pero A **no** es simétrica, por lo tanto $\|A\|_2 \neq \rho(A)$

La inestabilidad de la Ec de Transporte

Consideremos el caso $a\nu = 1.5$ para la matriz en $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \qquad \lambda = -0.5$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2.5 & -0.75 \\ -0.75 & 2.5 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0.022918 \\ \lambda_2 &= 2.727082 \end{aligned} \qquad |\lambda_2| > 1$$

O, puedo conseguir una cota inferior usando la definición $\|A\|_2 = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

La inestabilidad de la Ec de Transporte

$$\begin{pmatrix} 1-a\nu & & & & \\ a\nu & 1-a\nu & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a\nu & 1-a\nu \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1-a\nu \\ a\nu \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a\nu, (a\nu)^2, \ldots, (a\nu)^n$$