Error de punto fijo

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar//gmail.com)

Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

2020

Hoy:

- error de punto fijo:

Próxima:

- Cuadraturas 133-
- Error vía interpolación - 146

Parte I

Error

Dada la ecuación $f(x) = 0$, la reescribimos de alguna forma para obtener $x = g(x)$, y lo que queremos es encontrar un punto fijo de g, un r tal que $r = g(r)$ y que volviendo atrás nos de $f(r) = 0$.

Dado un x_0, iteramos

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

y el problema se transforma en probar que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es convergente.

Teorema (Brower)

Sea K un conjunto compacto y convexo [en criollo: toda sucesión acotada en K tiene una subsucesión convergente a un punto de K; dados dos puntos en K, el segmento de recta que los conecta está en K]. Si $g : K \to K$ es continua, entonces tiene un punto fijo.

La dem. lo haría con un par de dibujitos, pero no en estas condiciones.

Teorema (Brower para jardín de infantes)

Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ continua, entonces tiene un punto fijo.

Teorema

Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ con $g'(x) \leq \lambda < 1$. Entonces tiene un único punto fijo.

El siguiente es el famoso teorema del punto fijo de Banach de contracciones, vale en contextos muy generales (cambiando la condición de la derivada por una condición de contracción, dos imágenes están más cerca -con un factor $\lambda < 1$- que los puntos que las originaron).

Teorema

Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ con $g'(x) \leq \lambda < 1$. Entonces, dado $x_0 \in [a, b]$, la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ con $x_{n+1} = g(x_n)$ converge al único punto fijo.

Dem:
Que existe y es único vale por lo anterior. Veamos la convergencia.

Sea r el punto fijo, y $x_0 \in [a, b]$ arbitrario. Entonces,

$$|x_n - r| = |g(x_{n-1}) - g(r)| \leq \lambda|x_{n-1} - r| \leq \cdots \leq \lambda^n|x_0 - r|.$$

Como $\lambda < 1$, $\lambda^n \to 0$, y la sucesión converge a r,

$$0 \leq |x_n - r| \leq \lambda^n|x_0 - r| \to 0.$$

Teorema

Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ *con* $g'(x) \le \lambda < 1$. *Entonces,*

$$|x_n - r| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_1 - x_0|.$$

Dem: Teníamos $|x_n - r| \le \lambda^n |x_0 - r|$, y podemos acotar $|x_0 - r| \le (b - a)$. Pero podemos dar una cota *mejor*.

$$|x_0 - r| \le |x_0 - x_1| + |x_1 - r| \le |x_0 - x_1| + \lambda|x_0 - r|$$

$$(1-\lambda)|x_0 - r| \le |x_0 - x_1| \qquad |x_0 - r| \le \frac{1}{1-\lambda}|x_0 - x_1|$$

$$|x_n - r| \le \lambda^n |x_0 - r| \le \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_0 - x_1|$$

Teorema

Sea $g : [a, b] \to [a, b]$ con $g'(x)$ continua y $|g'(r)| < 1$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que la iteración es convergente siempre que $x_0 \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$.

Dem: Como la derivada es continua, podemos fijar λ tal que $|g'(r)| < \lambda < 1$, y todos los puntos de un intervalo $(r - \varepsilon, r + \varepsilon)$ cumplirán que $|g'(x)| < \lambda$.

Dado $x_0 \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$, tenemos

$$|g(x_0) - g(r)| \leq \lambda |x_0 - r| \leq \lambda\varepsilon < \varepsilon$$

con lo cual $g(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \subset (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$.

6.- Problemas

- En el último, ¿cómo sé si en el punto es menor a 1, si no conozco el punto?
- Antes, ¿cómo determino a priori el intervalo $[a, b]$?
- ¿Qué me conviene despejar como $g(x)$?

No hay respuestas generales, es una mezcla de prueba y error, intuición, *educated guess*, experiencia, jugar con Bolzano, etc.

Parte II

Secante y regula falsi

Dado $[a_k, b_k]$ con $f(a_k) < 0$, $f(b_k) > 0$, buscamos la recta que conecta $(a_k, f(a_k))$ con $(b_k, f(b_k))$, y nos quedamos con el punto donde corta al eje x.
Definimos

$$c_k = b_k - f(b_k)\left(\frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)}\right) = \frac{a_k f(b_k) - b_k f(a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$$

y reemplazamos una de las puntas según el signo de $f(c_k)$, como en bisección.

Siempre converge, numerador y denominador tienen el mismo signo, pero puede ser más lento que bisección

Dado x_n, x_{n-1}, calculamos x_{n+1} moviéndonos por la secante por esos dos puntos en vez de usar la recta tangente. Cambiamos la pendiente por un cociente incremental.

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left(\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right)$$

No siempre converge (es parecido a Newton-Raphson), y es más lento que N-R, pero no necesitamos calcular derivadas

El error se puede estimar exactamente como en N-R, y queda

$$e_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\eta_n)}{f'(\xi_n)}e_n e_{n-1}.$$

Ejercicio: hagan la cuenta. Si no les sale, lean el apunte DLR.