Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2020
Entrega n°2

1. Considerar el problema:

$$\begin{cases} y'(t) = \operatorname{sen}(y(t)) + t^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

a) Escribir la iteración del método de Taylor de orden 2 con paso h correspondiente a este problema y calcular el error de truncado local para $t \in [0, 1]$.

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2020
Entrega n°2 - Resolución del ejercicio

1. Primero recordemos que si el problema es de la forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

la iteración la iteración del método de Taylor de orden 2 con paso h es de la forma $y_{i+1} = y_i + h[f(t_i, y_i) + \frac{h}{2}(f_t(t_i, y_i) + f_y(t_i, y_i)f(t_i, y_i))]$. Antes de escribir la correspondiente iteración para este caso, calculemos las derivadas parciales f_t y f_y, para $f(t, y) = \mathrm{sen}(y) + t^2$:

$$f_t(t, y) = 2t, \quad f_y(t, y) = \cos(y).$$

Luego, la iteración del método de Taylor de orden 2 con paso h para nuestro problema es:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h[\mathrm{sen}(y_i) + t_i^2 + \frac{h}{2}(2t_i + \cos(y_i)(\mathrm{sen}(y_i) + t_i^2))], \text{ para } 0 \le i \le N-1, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Recordemos que el error de truncado local para el método de Taylor de orden 2 para t en $[0, 1]$ es $\tau = \frac{h^2}{6}y'''(\xi)$, para algún $\xi \in [0, 1]$. Veamos:

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{d}{dt}f(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(\mathrm{sen}(y(t)) + t^2) \\ &= \cos(y(t))y'(t) + 2t \\ &= \cos(y(t))(\mathrm{sen}(y(t)) + t^2) + 2t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'''(t) &= -\mathrm{sen}(y(t))(y'(t))^2 + \cos(y(t))y''(t) + 2 \\ &= -\mathrm{sen}(y(t))(\mathrm{sen}(y(t)) + t^2)^2 + \cos(y(t))\big(\cos(y(t))(\mathrm{sen}(y(t)) + t^2) + 2t\big) + 2, \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{h^2}{6}y'''(\xi) \\ &= \frac{h^2}{6}\big[-\mathrm{sen}(y(\xi))(\mathrm{sen}(y(\xi)) + \xi^2)^2 + \cos(y(\xi))\big(\cos(y(\xi))(\mathrm{sen}(y(\xi)) + \xi^2) + 2\xi\big) + 2\big], \end{aligned}$$

para algún $\xi \in [0, 1]$.