Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2020
Entrega n°5

---

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} n^2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & n^{-2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & n & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Mostrar que $\mathrm{cond}_1(A) \geq n^4$ si $n \geq 4$. Concluir que $\mathrm{cond}_1(A) \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$.

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2020
Entrega n°5 - Resolución del ejercicio

1. Si bien $\text{cond}_1(A) = \|A\|_1\|A^{-1}\|_1$, antes de calcular la inversa de una matriz conviene recordar el resultado de la Práctica 4 (Ejercicio 6) que nos indica que

$$\text{cond}_1(A) \geq \frac{\|A\|_1}{\|A-B\|_1},$$

para cualquier matriz B singular del tamaño correspondiente.

Tomemos, por ejemplo, $B = \begin{pmatrix} n^2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & n & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. B es singular porque la segunda fila es 3 veces la cuarta. (Notemos, además que cuando n es grande, la segunda fila de A es muy "parecida" a la de B.)

Calculamos: $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y por lo tanto $\|A-B\|_1 = n^{-2}$.

Por otro lado, $\|A\|_1 = \max\{n^2, 2+n^{-2}, n+1, 14\} = n^2$ si $n \geq 4$ (que es el caso que nos interesa). Por lo que

$$cond_1(A) \geq \frac{n^2}{n^{-2}} = n^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

como queríamos probar.