Clase Práctica del 21 de mayo 2020: Finalizamos la **Práctica 4**

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico

María Lorena Stockdale

Procedimiento de Gram-Schmidt

$A = [v_1|...|v_n] \in M_{m\times n}$, tal que, $rg(A) = n$.

- Si consideramos el subespacio generado por las columnas de A, o sea, $B =< v_1, ..., v_n > \rightarrow$ l.i.
- Aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt vamos a generar B a partir de vectores que resultan ortogonales.

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 - \alpha_{12} u_1 \\ u_3 = v_3 - \alpha_{13} u_1 - \alpha_{23} u_2 \\ \vdots \\ u_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in} u_i \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 + \alpha_{12} u_1 \\ v_3 = u_3 + \alpha_{13} u_1 + \alpha_{23} u_2 \\ \vdots \\ v_n = u_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in} u_i \end{cases}$$

donde $\alpha_{ij} = \frac{u_i^t . v_j^t}{\|u_i\|^2}$.

- Lo escribimos:

$$[v_1|...|v_n] = [u_1|...|u_n] * \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Dividimos y multiplicamos por las normas de los vectores:

$$= [\tfrac{u_1}{\|u_1\|}|...|\tfrac{u_n}{\|u_n\|}] * \begin{pmatrix} 1 * \|u_1\| & \alpha_{12} * \|u_1\| & \alpha_{13} * \|u_1\| & \dots & \alpha_{1n} * \|u_1\| \\ 0 & 1 * \|u_2\| & \alpha_{23} * \|u_2\| & \dots & \alpha_{2n} * \|u_2\| \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 * \|u_n\| \end{pmatrix}$$

Hallar la descomposición QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Hallar la descomposición QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = [v_1 | v_2 | v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notar que rg(A)=3

Hallar la descomposición QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = [v_1|v_2|v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notar que rg(A)=3

$$\begin{cases} u_1 = (1, 1, 0). \end{cases}$$

Hallar la descomposición QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = [v_1|v_2|v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notar que rg(A)=3

$$\begin{cases} u_1 = (1,1,0). \\ u_2 = (1,0,1) - \dfrac{(1,1,0).(1,0,1)}{\|(1,1,0)\|^2} * (1,1,0) = (1,0,1) - \dfrac{1}{2} * (1,1,0) = (\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Hallar la descomposición QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = [v_1|v_2|v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notar que rg(A)=3

$$\begin{cases} u_1 = (1,1,0). \\ u_2 = (1,0,1) - \dfrac{(1,1,0).(1,0,1)}{\|(1,1,0)\|^2} * (1,1,0) = (1,0,1) - \dfrac{1}{2} * (1,1,0) = (\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1). \\ u_3 = (0,1,1) - \dfrac{(1,1,0).(0,1,1)}{\|(1,1,0)\|^2} * (1,1,0) - \dfrac{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1).(0,1,1)}{\|(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)\|^2} * (\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1) = \\ \quad = (0,1,1) - \dfrac{1}{2} * (1,1,0) - \dfrac{1}{3} * (\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1) = (-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}). \end{cases}$$

Hallar la descomposición QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = [v_1|v_2|v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Notar que rg(A)=3

$$\begin{cases} u_1 = (1,1,0). \\ u_2 = (1,0,1) - \dfrac{(1,1,0).(1,0,1)}{\|(1,1,0)\|^2} * (1,1,0) = (1,0,1) - \dfrac{1}{2} * (1,1,0) = (\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1). \\ u_3 = (0,1,1) - \dfrac{(1,1,0).(0,1,1)}{\|(1,1,0)\|^2} * (1,1,0) - \dfrac{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1).(0,1,1)}{\|(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)\|^2} * (\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1) = \\ \quad = (0,1,1) - \dfrac{1}{2} * (1,1,0) - \dfrac{1}{3} * (\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 1) = (-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}). \end{cases}$$

$$\|u_1\| = \sqrt{2}, \quad \|u_2\| = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \|u_3\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

- Listo! Tenemos Q (con columnas ortonormales) y R (triangular superior), tal que, $A = QR$.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} * \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{3} * \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} * \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{3} * \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{0}{\sqrt{2}} & 1 * \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{3} * \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 * \sqrt{2} & \frac{1}{2} * \sqrt{2} & \frac{1}{2} * \sqrt{2} \\ 0 & 1 * \frac{\sqrt{6}}{2} & \frac{1}{3} * \frac{\sqrt{6}}{2} \\ 0 & 0 & 1 * \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

Hallar la descomposición QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Para tener en cuenta:

- Cuidado! $rg(A) = 3$
- Ayuda

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

- Respuesta

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Se realiza la descomposición QR de A utilizando matrices de Householder. Si $A \in M_{m\times n}$, las matrices de Householder $\in M_{m\times m}$ y se obtendrá una matriz "triangular" superior que $\in M_{m\times n}$.

Matrices de Householder: $\boxed{H_i = I - \frac{2}{{v^{(i)}}^t v^{(i)}} v^{(i)} {v^{(i)}}^t}$

Sólo necesitamos tener $v^{(i)}$:

- $v^{(i)} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & v_i^{(i)} & a_{i+1\,i} & \cdots & a_{n\,i} \end{pmatrix}^t$.
- $v_i^{(i)} = a_{i\,i} + signo(a_{i\,i}) * \sqrt{\sum_{j=i}^{n} a_{j\,i}^2}$.

Hallar la descomposición QR de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ vía Householder.

$\rightarrow$ Armamos $H_1 = I_{3\times 3} - \frac{2}{v^{(1)^t}.v^{(1)}} v^{(1)} v^{(1)^t}$ (...mirando A...).

- $v^{(1)} = \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$.
- $v_1^{(1)} = a_{11} + signo(a_{11}) * \sqrt{\sum_{j=1}^{3} a_{j1}^2}$.

Por lo tanto,

$$v_1^{(1)} = 1 + (\sqrt{1+4+4}) = 1 + 3 = 4 \quad \rightarrow \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$H_1 = I_{3\times 3} - \frac{2}{(4 \;\; 2 \;\; -2).\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} * (4 \;\; 2 \;\; -2)$$

$$H_1 = I_{3\times 3} - \frac{2}{24}\begin{pmatrix} 16 & 8 & -8 \\ 8 & 4 & -4 \\ -8 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

- Listo!

Ahora multiplicamos $H_1 * A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & 4 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} =: A_2$

Pusimos ceros debajo de la "diagonal" en la columna Nro. 1

$\rightarrow$ Armamos $H_2 = I_{3\times 3} - \frac{2}{v^{(2)^t}.v^{(2)}} v^{(2)} v^{(2)^t}$ (...mirando A_2...).

- $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2^{(2)} \\ a_{32} \end{pmatrix}$.
- $v_2^{(2)} = a_{22} + signo(a_{22}) * \sqrt{\sum_{j=2}^{3} a_{j2}^2}$.

Por lo tanto,

$$v_2^{(2)} = 3 + (\sqrt{9+16}) = 3 + 5 = 8 \quad \rightarrow \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$$H_2 = I_{3\times 3} - \frac{2}{\begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = I_{3\times 3} - \frac{2}{80}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 32 \\ 0 & 32 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

- Listo!

Ahora multiplicamos $H_2 * A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 & \frac{1}{3} \\ 0 & -5 & -\frac{19}{15} \\ 0 & 0 & -\frac{17}{15} \end{pmatrix} =: R$

Pusimos ceros debajo de la “diagonal” en la columna Nro. 2

- Finalmente

$H_2 * H_1 * A = R$, con lo que

$$Q = H_1^{-1} * H_2^{-1} = H_1^t * H_2^t = H_1 * H_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{14}{15} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{11}{15} & \frac{2}{15} \end{pmatrix}.$$

Hallar la descomposición QR de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vía Householder.

- Sin ayuda!

Anuncios:

- Damos por finalizada la **Práctica 4**.
- La próxima clase abordaremos la **Práctica 5**.

Para releer...

Theorem

Sea $A \in M_{m\times n}$ tal que $rg(A) = n$. Entonces existen matrices $Q \in M_{m\times n}$ con columnas ortogonales (ortonormales) y $R \in M_{n\times n}$ triangular superior e invertible tales que $A = QR$.

Theorem

Sea $A \in M_{m\times n}$ tal que $rg(A) = r$ con $0 < r < n$. Entonces existen matrices $Q_0 \in M_{m\times n}$ con r columnas ortogonales no nulas y el resto nulas, y $R_0 \in M_{n\times n}$ triangular superior invertible tales que $A = Q_0 R_0$. La matriz A también se puede descomponer en la forma $A = QR_r$ donde $Q \in M_{m\times r}$ tiene columnas ortogonales (ortonormales) no nulas y $R_r \in M_{r\times n}$ es "triangular" superior de orden r.