Elementos de Cálculo Numérico

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar//gmail.com)

Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

2020

Parte I

Próxima clase

Hoy:

- Diferencias finitas
- PDEs

Próxima:

- Normas matriciales: 15-17
- Número de condición: 17-29

$$0 \leq t \leq T, \qquad 0 \leq x \leq L$$

Transporte: $$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,x)$$

Difusión/calor: $$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

Ondas: $$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

Cada una lleva ciertas condiciones de contorno e iniciales.

2.- Difusión / calor

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x)$$

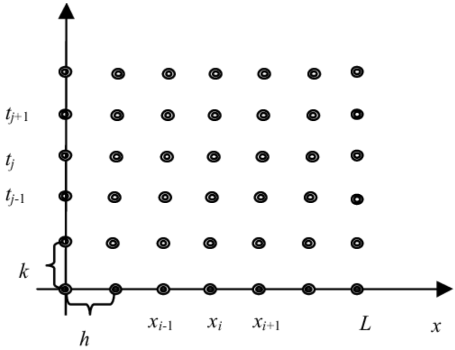
$$u_t(t,x) = u_{xx}(t,x)$$

Ponemos un dato inicial, $u(0,x) = f(x)$ (temperatura inicial)

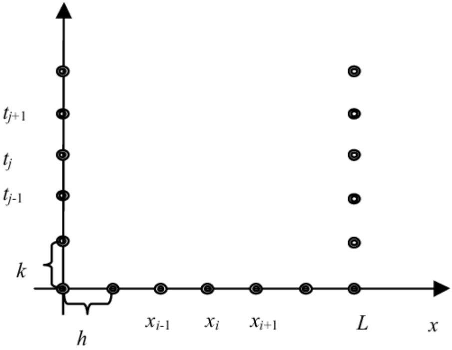
y condiciones de contorno $u(t,0) = u(t,L) = 0$ (u otras)

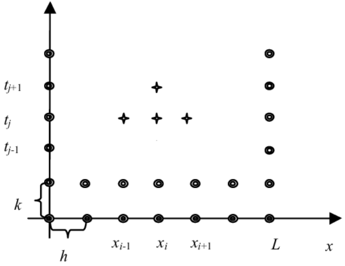
Para ondas hace falta una más: $u_t(0,x) = g(x)$ (velocidad inicial)

Discretizamos en t y en x



Dato inicial $u(0,x) = f(x)$ y condiciones de contorno $u(t,0) = u(t,1) = 0$.



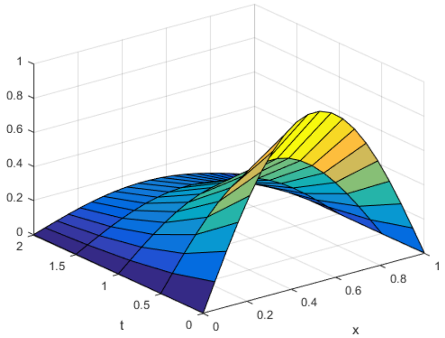


$$\frac{u(t_{j+1}, x_i) - u(t_j, x_i)}{k} = \frac{u(t_j, x_{i+1}) - 2u(t_j, x_i) + u(t_j, x_{i-1})}{h^2}$$

$$u_i^{j+1} = u_i^j + k \cdot \left(\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} \right)$$

$$u_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right) u_i^j + \frac{k}{h^2} \cdot \left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j \right)$$

6.- Método explícito:



Como u no satisface la ecuación en diferencias se comete un error:

$$\frac{u(t_j, x_{i+1}) - u(t_j, x_i)}{k} - \frac{u(t_j, x_{i-1}) - 2u(t_j, x_i) + u(t_j, x_{i-1})}{h^2} = R(t_{j+1}, x_i)$$

Tenemos que desarrollar u,

$$u(t_{j+1}, x_i) = u(t_j, x_i) + k u_t(t_j, x_i) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(t_j, x_i) + O(k^3),$$

$$u(t_j, x_{i\pm1}) = u(t_j, x_i) \pm h u_x(t_j, x_i) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(t_j, x_i) \pm \frac{h^3}{6} u_{xxx}(t_j, x_i) + O(h^4),$$

Reemplazando,

$$\frac{u(t_j, x_{i+1}) - u(t_j, x_i)}{k} = u_t(t_j, x_i) + \frac{k}{2} u_{tt}(t_j, x_i) + O(k^2),$$

$$\frac{u(t_j, x_{i-1}) - 2u(t_j, x_i) + u(t_j, x_{i-1})}{h^2} = u_{xx}(t_j, x_i) + O(h^2),$$

y el error que se comete al truncar es $R(t_{j+1}, x_i) = O(h^2) + O(k)$

Definamos $E_i^j = |u(t_j, x_i) - u_i^j|$.

Definamos el **error global** a tiempo t_j

$$E^j = \max_{0 \leq i \leq L/h} \{E_i^j\}$$

Sea $R^j = \max_{0 \leq i \leq L/h} \{|R(t_j, x_i)|\} = O(h^2) + O(k)$.

Escribamos la ecuación en diferencias para u_i^{j+1} y para $u(t_{j+1}, x_i)$,

$$u_i^{j+1} = \left(1 - \tfrac{2k}{h^2}\right) u_i^j + \tfrac{k}{h^2} \cdot \left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j\right)$$

$$u(t_{j+1}, x_i) = \left(1 - \tfrac{2k}{h^2}\right) u(t_j, x_i) + \tfrac{k}{h^2} \cdot \left(u(t_j, x_{i+1}) + u(t_j, x_{i-1})\right) + kR$$

Restándolas, queda

$$E_i^{j+1} \leq \left|1 - \frac{2k}{h^2}\right| E_i^j + \frac{k}{h^2} \cdot \left(E_{i+1}^j + E_{i-1}^j\right) + k|R(t_{j+1}, x_i)|$$

Tenemos

$$E_i^{j+1} \leq \left|1 - \frac{2k}{h^2}\right| E_i^j + \frac{k}{h^2} \cdot \left(E_{i+1}^j + E_{i-1}^j\right) + kR(t_{j+1}, x_i)$$

Si $2k < h^2$ nos queda

$$E^{j+1} \leq E^j + kR^{j+1}$$

Una cuenta similar a la que hicimos para Euler nos dice

$$\begin{aligned}
E_1 \leq & kR^1 \\
E_2 \leq & E_1 + kR^2 \\
\leq & kR^1 + kR^2 = k(R^1 + R^2) \\
E_3 \leq & E_2 + kR^3 \\
\leq & k(R^1 + R^2) + kR^3 = k(R^1 + R^2 + R^3) \\
& \dots \\
E_j \leq & k(R^1 + R^2 + \cdots + R^j)
\end{aligned}$$

Teníamos

$$E_j \leq k(R^1 + R^2 + \cdots + R^j)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E^j \leq & k \sum_{n=1}^{j} R^j \\ \leq & k \frac{T}{k} \max_i \max_j |R_i^j| \\ = & T[O(h^2) + O(k)] \end{aligned}$$

Es decir,

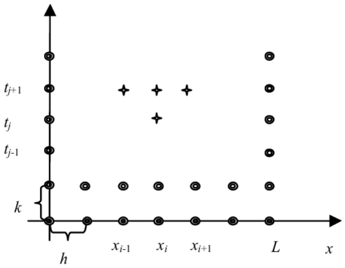
$$E^j \leq T[O(h^2) + O(k)]$$

y el método es convergente cuando $h \to 0$, $k \to 0$.

- **Ejercicio:** Si cambiamos la ecuación a $u_t = u_{xx} + \alpha u$, podemos repetir la cuenta y queda

$$E^j \leq \frac{e^{\alpha T} - 1}{\alpha} [O(h^2) + O(k)]$$

- Esta es exactamente la misma cuenta de Euler, para ordinarias.
- ¿Es razonable? ¿Si? ¿No? ¿Por qué? ¿Qué estamos haciendo realmente?
- La cota $2k \leq h^2$ pide muchos pasos temporales: si $h = 0,001$, entonces necesitamos $\sim 10^6$ pasos.



$$\frac{u(t_{j+1},x_i)-u(t_j,x_i)}{k}=\frac{u(t_{j+1},x_{i+1})-2u(t_{j+1},x_i)+u(t_{j+1},x_{i-1})}{h^2}$$

No puedo iterar: conozco u en t_j, pero me aparecen tres valores de u desconocidos, $u(t_{j+1},x_{i+1})$, $u(t_{i+1},x_j)$, y $u(t_{j+1},x_{i-1})$.

Lo hago para cada i, y tengo un sistema de ecuaciones lineales para resolver.

Tenemos

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2}$$

El error de truncado es $R(t_{j+1}, x_i) = O(h^2) + O(k)$ **[ejercicio!]**

$$R(t_{j+1}, x_i) = \frac{u(t_{j+1}, x_i) - u(t_j, x_i)}{k} - \frac{u(t_{j+1}, x_{i+1}) - 2u(t_{j+1}, x_i) + u(t_{j+1}, x_{i-1})}{h^2}$$

Las ecuaciones son:

$$u_i^{j+1} - u_i^j - k\frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h^2} = 0$$

$$\left(1 + \frac{2k}{h^2}\right)u_i^{j+1} - u_i^j - \frac{k}{h^2}u_{i+1}^{j+1} - \frac{k}{h^2}u_{i-1}^{j+1} = 0$$

Reordenando,

$$-\frac{k}{h^2}u_{i-1}^{j+1} + \left(1 + \frac{2k}{h^2}\right)u_i^{j+1} - \frac{k}{h^2}u_{i+1}^{j+1} = u_i^j$$

$$-\frac{k}{h^2}u_{i-1}^{j+1} + \left(1 + \frac{2k}{h^2}\right)u_i^{j+1} - \frac{k}{h^2}u_{i+1}^{j+1} = u_i^j$$

Reemplazando $E_i^j = u(t_j, x_i) - u_i^j$, como antes, tenemos

$$\left(1 + \frac{2k}{h^2}\right)E_i^{j+1} \leq E_i^j + \frac{k}{h^2}E_{i+1}^{j+1} + \frac{k}{h^2}E_{i-1}^{j+1} + kR^{j+1}$$

y tomando máximo en i,

$$\left(1 + \frac{2k}{h^2}\right)E^{j+1} \leq E^j + \frac{2k}{h^2}E^{j+1} + kR^{j+1}$$

Es decir,

$$E^{j+1} \leq E^j + kR^{j+1}$$

¿Cuál es la gran diferencia con el método explícito?

Explicito: $$u_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2k}{h^2}\right)u_{i-1}^j + \frac{k}{h^2} \cdot \left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j\right)$$

- No necesitamos $2k \leq h^2$, ahora funciona sin tantos pasos.
- El error ya no es $O(h^2)$, sino $O(k)$ (antes, $k \sim h^2$).
- Además, en cada paso tenemos que resolver un sistema lineal.
- Pero la matriz es tridiagonal, con muchos ceros

$$-\frac{k}{h^2} u_{i-1}^{j+1} + \left(1 + \frac{2k}{h^2}\right) u_i^{j+1} - \frac{k}{h^2} u_{i+1}^{j+1} = u_i^j$$

- Podemos calcular explícitamente los autovalores de la matriz y ver que todo funciona: son positivos, y están lejos de 0.

Esto motiva un problema nuevo: resolver sistemas lineales. Ya no alcanza con iterar con un `for`.