Iterativos, Jacobi, Gauss Seidel

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar//gmail.com)

Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

2020

Hoy:

- Iterativos
- Jacobi
- Gauss Seidel

Próxima:

- Interpolación de Lagrange: 89 - 94
- Newton, diferencias divididas: 94 - 97

Parte I

Iterativos

Sea A diagonalizable, $\{v_i\}_{i=1}^n$ base de autovectores, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ autovalores.

$$Au = A\sum_{i=1}^n c_i v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i v_i$$

$$A^2 u = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 c_i v_i, \ldots A^k u = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k c_i v_i$$

$$\|A^k u\| = \langle A^k u, A^k u\rangle = \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i^k c_i v_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i^k c_i v_i\rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i^k \lambda_j^k c_i c_k \langle v_i, v_j\rangle$$

Si$|\lambda_i| < 1$, $|\lambda_i^k| \to 0$. Si $|\lambda_i| \geq 1$, no.

Si $|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$, y $u_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$

$$A^k u_0 = \lambda_1^{2k} c_1^k \|v_1\| + 2\lambda_1^k \lambda_2^k c_1 c_2 \langle v_1, v_2\rangle + \lambda_2^{2k} c_2^2 \|v_2\|$$

$$A^k u_0 \to 0 \quad \text{si } c_1 = 0$$

$$A^k u_0 \not\to 0 \quad \text{si } c_1 \neq 0$$

Con Jordan se extiende para cualquier A.

1.- Iterativos

Tenemos métodos exactos para resolver ecuaciones lineales. Sin embargo, en muchas ocasiones son mejores los métodos aproximados.

En lugar de invertir matrices para resolver un sistema, buscamos que la solución aparezca como el límite de alguna sucesión.

Los métodos más conocidos son:

- Jacobi, para soluciones de sistemas lineales.
- Gauss Seidel, para soluciones de sistemas lineales.
- Método de la potencia, para autovalores.

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Dado el problema $Ax = b$, queremos hallar un vector $c \in \mathbb{R}^n$, otro vector $x_0 \in \mathbb{R}^n$, y una matriz $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ definida como

$$x_{k+1} = c + T x_k,$$

converge a un x^* y $Ax^* = b$.

La convergencia de la sucesión dependerá de la convergencia de las potencias de T a cero, necesitamos que

$$\lim_{k \to \infty} T^k = 0.$$

Como $\|T^k\| \leq \|T\|^k$, es equivalente pedir que haya una norma subordinada tal que $\|T\| < 1$.

Def: dada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, su radio espectral es

$$\rho(A) = |\lambda_{max}|,$$

el módulo del autovalor de mayor módulo.

Teorema

Si $\|\cdot\|$ es una norma inducida, $\rho(A) \leq \|A\|$. Más aún,

$$\rho(A) = \text{ínf}\{\|A\| : \|\cdot\| \text{ *es una norma inducida* }\}$$

Dem: Sea λ el autovalor de mayor módulo, y v un autovector. Entonces, si $\|\cdot\|$ es una norma inducida (sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$)

$$|\lambda|^j\|v\| = \|\lambda^j v\| = \|A^j v\| \leq \|A^j\|\|v\| \leq \|A\|^j\|v\|$$

Es decir, $|\lambda| \leq \|A\|$.

Si $\|\cdot\|$ es inducida sobre $\mathbb{R}n \times n$ tomemos una norma cualquiera $\|\cdot\|_C$ sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$, y sea $\|\cdot\|_R$ su restricción a $\mathbb{R}^{n\times n}$. Como $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_R$ son equivalentes, existe K tal que

$$\|x\|_R \leq K\|x\| \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces,

$$\rho(A)^j = \rho(A^j) \leq \|A^j\|_C = \|A^j\|_R \leq K\|A^j\| \leq K\|A\|^j$$

Luego, cuando $j \to \infty$,

$$\rho(A) \leq \|A\|_C^j = \|A\|_R^j \leq K^{1/j}\|A\| \to \|A\|$$

Probamos que el radio espectral es menor que cualquier norma, falta ver que es el ínfimo sobre las normas.

Son dos páginas del apunte DLR, necesitamos Jordan, y una media hora extra. Cualquier cosa me preguntan.

¿Entra en el final?

...

No la voy a tomar.[1]

[1] Promoción válida hasta Noviembre de 2020, no transferible a otros profesores que tomen final con posterioridad o en mi reemplazo.

Parte II

Jacobi y Gauss Seidel

La idea de los método de Jacobi es partir la matriz en tres: $A = L + D + U$.

- L es triangular inferior, con ceros en la diagonal, y $l_{i,j} = a_{i,j}$ si $i > j$.
- D es diagonal, con $d_{i,i} = a_{i,i}$.
- U es triangular superior, con ceros en la diagonal, y $u_{i,j} = a_{i,j}$ si $i < j$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \qquad (L + D + U)x = b$$

es equivalente a

$$Dx = b - (L + U)x$$

y también a

$$(D + L)x = b - Ux$$

Definimos las iteraciones:

- Jacobi: $x^{k+1} = D^{-1}b - D^{-1}(L + U)x^k$
- Gauss Seidel: $x^{k+1} = (D + L)^{-1}b - (D + L)^{-1}Ux^k$

8.- Por coordenadas,

- Jacobi: $x^{k+1} = D^{-1}b - D^{-1}(L+U)x^k$

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}$$

- Gauss Seidel: $x^{k+1} = (D+L)^{-1}b - (D+L)^{-1}Ux^k$

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}$$

- Ambos métodos son de la forma $x^{k+1} = c + Tx^k$, con distintas matrices T
  - $T = -D^{-1}(L + U)$ para Jacobi,
  - necesitamos que D sea inversible, ningún elemento de la diagonal puede ser cero.
  - $T = -(D + L)^{-1}U$ para Gauss Seidel,
  - necesitamos que $D + L$ sea inversible.
- Invertir D es gratis.
- Invertir $D + L$ cuesta un poco más.
- ¿Cuál es mejor?

1. Hay ejemplos donde J converge y GS no.
2. Hay ejemplos donde GS converge y J no.
3. Hay ejemplos donde no converge ninguno.
4. Si es diagonal dominante convergen ambos
5. Si es tridiagonal convergen ambos o ninguno. Aparecen en soluciones de ecuaciones diferenciales.
6. Si es simétrica y definida positiva, GS coverge. J puede fallar. Aparecen en cuadrados mínimos.

Demostraremos 5 y 6. El apunte DLR tiene ejemplos de todos los casos anteriores. Leerlos, y consultar!

Sea x la solución exacta, y $e^k = x^k - x$ el error al iterar k veces. Entonces, para Jacobi:

$$\begin{aligned} x^{k+1} =& D^{-1}b - D^{-1}(L+U)x^k \\ x =& D^{-1}b - D^{-1}(L+U)x \\ x^{k+1} - x =& - D^{-1}(L+U)[x^k - x] \\ e^{k+1} =& -D^{-1}(L+U)e^k \end{aligned}$$

Ejercicio: repitan la cuenta para Gauss Seidel, y queda

$$e^{k+1} = -(D+L)^{-1}Ue^k$$

En ambos casos, tenemos

$$e^k = Be^{k-1} = B(Be^{k-2}) = \cdots = B^k e_0$$

donde e_0 es el error inicial.

Para garantizar que $e^k \to 0$ sin importar el dato inicial, necesitamos que $B^k \to 0$.

Tomando normas, $\|e^k\| \to 0$ para todo dato inicial si $\|B^k\| \to 0$ en alguna norma subordinada.

Si probamos que $\rho(B) = |\lambda_{max}| < 1$, tenemos alguna norma subordinada que será $\|B\| = \rho + \delta < 1$, y eso alcanza para garantizar la convergencia, pues

$$\|B^k\| \leq \|B\|^k = (\rho + \delta)^k \to 0.$$

Todo se limita a probar que el radio espectral de B es menor a 1 (eso se hace calculando sus autovalores), o tenemos que encontrar una norma tal que $\|B\| < 1$.

Def. Matrices diagonal dominantes: para todo i, $|a_{ii}| > \sum_{j>i} |a_{ij}|$.

Teorema

Si A es diagonal dominante, J y GS convergen.

Dem: Sea B_J la matriz con la que iteramos en J. Veamos que $\|B_J\|_\infty < 1$:

$$\|B_J\| = \| - D^{-1}(L+U)\| = \sum_{j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j\neq i} |a_{ij}| < 1.$$

porque $\sum_{j>i} |a_{ij}| < |a_{ii}|$.

Sea $B_{GS} = -(L+D)^{-1}U$ la de GS. Sea λ un autovalor arbitrario, v_λ un autovector,

$$-(L+D)^{-1}Uv_\lambda = \lambda v_\lambda.$$

$$-Uv_\lambda = \lambda(L+D)v_\lambda.$$

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_{\lambda\, j} = \lambda \sum_{j=1}^{i} a_{ij}v_{\lambda\, j}$$

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}v_{\lambda\, j} - \lambda \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}v_{\lambda\, j} = \lambda a_{ii}v_{\lambda\, i}$$

Sea i tal que $\|v_\lambda\|_\infty = |v_{\lambda\, i}| \geq |v_{\lambda\, j}|$

Tomando módulo, desigualdad triangular, dividiendo por $|v_{\lambda\, i}|$, y acotando $|v_j/v_i| \leq 1$, nos queda

$$|\lambda||a_{ii}| \leq \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|.$$

$$|\lambda||a_{ii}| \leq \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| + |\lambda| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|.$$

Despejamos λ,

$$|\lambda| \leq \frac{\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|}.$$

Si

$$\frac{\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|} \geq 1$$

sería

$$\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \geq |a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|,$$

$$\sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \geq |a_{ii}|,$$

absurdo porque A era diagonal dominante.
Entonces, $|\lambda| < 1$ y el radio espectral es menor a 1.

Def. Matriz tridiagonal: si $|i-j|>1$, $a_{ij}=0$.

Ok, que se entienda: las tres diagonales $a_{11}-a_{nn}$, $a_{1,2}-a_{n-1,n}$, y $a_{2,1}-a_{nn-1}$ son cualquier cosa, el resto es cero.

Teorema (A)

Si $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonal, λ los autovalores de B_{GS}, μ los de B_J. Entonces,

$$\rho(B_{GS})=\rho(B_J)^2.$$

Def: sea $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, y definimos $A^*=\bar{A}^t$ (transpuesta conjugada). Decimos que A es hermitiana si $A^*=A$.

Teorema (B)

Si $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ hermitiana y definida positiva ($z^*A^*z>0$). Entonces GS converge.

Las demostraciones usan:

Teorema

Si A es tridiagonal, $det(A) = det(D+L+U) = det(D+\alpha L+\alpha^{-1}U)$.

Dem: Por propiedades del determinante/matrices semejantes, $det(A) = det(CAC^{-1})$:

$$\begin{aligned} det(CAC^{-1}-\lambda Id) =& det(C^{-1})det(CAC^{-1}-\lambda Id)det(C) \\ =& det(C^{-1}CAC^{-1}C - C^{-1}\lambda IdC) \\ =& det(A-\lambda Id) \end{aligned}$$

Tomamos una matriz diagonal C con los elementos 1, $\alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$. Nos queda $CAC^{-1} = \alpha L + D + \alpha^{-1}U$, y listo.

Ejercicio: usando de manera inteligente el teorema anterior, demuestre el Teorema (A) usando:

- Los autovalores de B_J son las raíces de

$$det(\mu Id + D^{-1}(L+U)) = det(D)^{-1} det(\mu D + L + U) = det(\mu D + L + U).$$

- Los autovalores de B_{GS} son las raíces de

$$det(\lambda Id+(L+D)^{-1}U) = det(L+D)^{-1} det(\lambda L+\lambda D+U) = det(\lambda L+\lambda D+U)$$

[Si no le sale, pág. 57 de DLR. Para el otro, ver pág. 58.]

D, L, U, b = lo que sea
$A = D + L + U$ # mejor dar A y b, y sacar D, L, U
N=20 # para que3 el programa frene
tol=0.1
$x = x_0$
$y = y_0$
i=1
e=1
while $e > tol$ and $i < N$:
    $x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$
    $y = -(D+L)^{-1}Uy + (D+L)^{-1}b$
    $i = i + 1$
    $e = norm(Ax - b) + norm(Ay - b)$
print($i, x, norm(Ax - b), y, norm(Ay - b)$**)**

Dentro del ciclo del while puedo guardar los errores, y graficarlos

def jgs(A, b, N, tol,x,y):
    D, L, U = lo que sea
    i=1
    e=1
    while $e > tol$ and $i < N$:
        $x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$
        $y = -(D+L)^{-1}Uy + (D+L)^{-1}b$
        $i = i+1$
        $e = norm(Ax-b) + norm(Ay-b)$
    return $i, x, norm(Ax-b), y, norm(Ay-b)$

Ahora ponen $\mathbf{print}(jgs(....))$ y listo.

OJO: son idénticos, es mejor porque armamos una función, pero no intenten optimizar de una el código.