

PRÁCTICA 3: CONTINUIDAD

*“Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little;
but nobody could discover what the infinitely little might be.”*
BERTRAND RUSSEL

A. Continuidad

Ejercicio 1. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$. Probar que:

- i) f es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \rightarrow x_0$, la sucesión $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ converge a $f(x_0)$.
- ii) Son equivalentes:
 - 1. f es continua;
 - 2. para todo $G \subseteq Y$ abierto, $f^{-1}(G)$ es abierto en X ;
 - 3. para todo $F \subseteq Y$ cerrado, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X .

Ejercicio 2. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

- i) $f : (\mathbb{R}^2, d) \rightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, donde d representa la métrica euclídea.
- ii) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.
- iii) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.
- iv) $i : (E, d) \rightarrow (X, d)$, la inclusión, donde $E \subseteq X$.

Ejercicio 3. Sean $f, g, h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}; \end{cases} \quad g(x) = x \cdot f(x); \quad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ con } (m : n) = 1, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que:

- i) f es discontinua en todo punto.
- ii) g sólo es continua en $x = 0$.
- iii) h es continua en $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

Ejercicio 4. Probar que un espacio métrico X es discreto si y sólo si toda función de X en un espacio métrico arbitrario es continua.

Ejercicio 5. (Métricas topológicamente equivalentes)

- i) Supongamos que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$d_1(x, y) \leq c_1 d_2(x, y) \leq c_2 d_1(x, y)$$

para todo $x, y \in X$. Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

- ii) Probar que dos métricas d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes si y sólo si la función identidad $id_X : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$ es homeomorfismo.
- iii) Probar que en \mathbb{R}^n todas las métricas d_p con $1 \leq p \leq \infty$ son topológicamente equivalentes.
- iv) Consideramos en \mathbb{R} la métrica

$$d'(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

Probar que es topológicamente equivalente a la métrica usual $d(x, y) = |x - y|$.

Ejercicio 6. Considerando en cada \mathbb{R}^n la métrica euclídea, probar que:

- i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y \sin(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.
- ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado.
- iii) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencione otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

Ejercicio 7. Consideramos las funciones $E, I : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$E(f) = f(0) \text{ e } I(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

- i) Demostrar que si utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.
- ii) Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0, 1])$ la distancia d_1 , I es una función continua pero E no lo es.
- iii) Analizar si es posible que una función $F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞ .

Ejercicio 8. Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que el gráfico de f , definido por

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\},$$

es cerrado en $X \times Y$ ¿Es cierta la afirmación recíproca?

Ejercicio 9. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una función. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

- i) Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, con cada U_i abierto y $f|_{U_i}$ continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.
- ii) Si $X = \bigcup_{i \in I} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para todo $i \in I$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.
- iii) Si $X = \bigcup_{i=1}^m F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para cada $i = 1, \dots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.
- iv) Si $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$ y $f|_{X_i}$ continua para cada $i = 1, \dots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que f es continua si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X . Probar que la función $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ es (uniformemente) continua.

Ejercicio 12. *Teorema de Urysohn.* Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B cerrados disjuntos de X .

- i) Probar que existe una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

$$f|_A \equiv 0, \quad f|_B \equiv 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X.$$

Sugerencia: Considerar la función $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$.

- ii) Deducir que existen abiertos $U, V \subseteq X$ disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Ejercicio 13. Consideremos en \mathbb{Z} y \mathbb{Q} la métrica inducida por la usual de \mathbb{R} . Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una función.

- i) Probar que f es continua ¿Segue valiendo si f toma valores irracionales?
- ii) Suponiendo que f es biyectiva, ¿puede ser un homeomorfismo?

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\Delta : X \longrightarrow X \times X$ la aplicación diagonal definida por $\Delta(x) = (x, x)$. Probar que:

- i) Δ es un homeomorfismo entre X y $\{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$.
- ii) $\Delta(X)$ es cerrado en $X \times X$.

Ejercicio 15. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una aplicación $f : X \rightarrow Y$ se dice *abierta* si $f(A)$ es abierto para todo abierto $A \subseteq X$ y se dice *cerrada* si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F \subseteq X$.

- i) Suponiendo que f es biyectiva, probar que f es abierta (cerrada) si y sólo si f^{-1} es continua.
- ii) Dar un ejemplo de una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} continua que no sea abierta.
- iii) Dar un ejemplo de una función de \mathbb{R} en \mathbb{R} continua que no sea cerrada.
- iv) Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

Ejercicio 16. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función.

- i) Probar que f es continua si y sólo si $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subseteq X$.
Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.
- ii) Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subseteq X$.

Ejercicio 17. *Definición:* Un subconjunto D de un espacio métrico X se dice denso si $\overline{D} = X$.

- i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $D \subseteq X$ denso. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.
- ii) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 18. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ .

- i) Probar que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ son continuas y abiertas. Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas.
- ii) Sea (Z, δ) un espacio métrico y sea $f : Z \rightarrow X \times Y$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ lo son.

Ejercicio 19. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *semicontinua inferiormente* (resp. *superiormente*) en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \implies f(x_0) - \varepsilon < f(x) \quad (\text{resp. } f(x_0) + \varepsilon > f(x)).$$

Probar que:

- i) f es continua en x_0 si y sólo si f es semicontinua inferiormente y superiormente en x_0 .
- ii) f es semicontinua inferiormente si y sólo si $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- iii) f es semicontinua superiormente si y sólo si $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.
- iv) si $A \subseteq X$ y $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ es su función característica, entonces χ_A es semicontinua inferiormente (resp. superiormente) si y sólo si A es abierto (resp. cerrado).

B. Continuidad Uniforme

Ejercicio 20. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$ una función que satisfice:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq c d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Ejercicio 21.

- i) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

- a) $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$ y
b) $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha$ para todo $n \geq n_0$,

entonces f no es uniformemente continua en A .

- ii) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en \mathbb{R} . ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?
iii) Verificar que la función $f(x) = \sin(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

Ejercicio 22. Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X . Probar que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y .

Ejercicio 23.

- i) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua.
ii) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua.

Ejercicio 24. Sea $f : (X, d) \rightarrow (Y, d')$ una función uniformemente continua, y sean $A, B \subseteq X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$.