Newton-Raphson

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar//gmail.com)

Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

2020

Hoy:

- Convergencia NR
- Punto Fijo

Próxima:

- Convergencia pf y secante: 72-79.

Teorema

Sea $f \in C^2([a,b])$*, y* r *un cero simple de* f*. Sea* $I = [r-\alpha, r+\alpha]$*, y sean* δ*,* M *positivos tales que para todo* $x \in I$*,*

- $|f'(x)| \geq \delta$,
- $|f''(x)| \leq M$.

Sea $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *una sucesión construida con este método, y* $e_n = x_n - r$*.*

Entonces existe $\varepsilon > 0$ *tal que* $I_\varepsilon = [r-\varepsilon, r+\varepsilon] \subset I$*, y se tiene* $|e_n| \to 0$ *si* $x_0 \in I_\varepsilon$*.*

Más aún,

$$|e_{n+1}| \leq \frac{1}{2}\frac{M}{\delta}|e_n|^2.$$

Elegimos $\lambda < 1$, y existe $\varepsilon > 0$ suficientemente chico que cumple

$$\frac{1}{2}\frac{M}{\delta}\varepsilon > \lambda.$$

Este valor ε nos permite definir $I_\varepsilon = [r-\varepsilon, r+\varepsilon]$.

Si es necesario, pedimos $\varepsilon < \alpha$. Como el intervalo está dentro de $I = [r-\alpha, r+\alpha]$, valen las cotas para f' y para f''.

Sea $x_0 \in I_\varepsilon$, arbitrario, y construimos la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Veamos que la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ está en I_ε.

Hacemos Taylor para $f(r)$ desarrollando en x_n,

$$0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)(r - x_n)^2$$

$$f'(x_n)(x_n - r) - f(x_n) = \frac{1}{2}f''(\xi)(r - x_n)^2$$

y como $x_n - r = e_n$, nos queda

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = \frac{1}{2}f''(\xi)e_n^2$$

Ahora,

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Entonces,

$$e_{n+1} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}e_n^2.$$

Teníamos

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f'(x_n)}e_n^2.$$

Usando las cotas $|f'| > \delta$ y $|f''| < M$, nos queda

$$|e_{n+1}| \leq \frac{1}{2}\frac{M}{\delta}|e_n|^2.$$

Es decir,

$$|e_{n+1}| \leq \frac{1}{2}\frac{M}{\delta}|e_n||e_n| \leq \frac{1}{2}\frac{M}{\delta}\varepsilon|e_n| \leq \lambda|e_n|.$$

Esto nos dice que si x_n está en I_ε, entonces x_{n+1} también.

Veamos ahora la convergencia. Iterando,

$$|e_{n+1}| \leq \lambda|e_n| \leq \lambda^2|e_{n-1}| \leq \cdots \leq \lambda^n|e_0|$$

y como $\lambda < 1$, el error tiende a cero. $\square$

Un caso importante:

Teorema

Si $f \in C^2(R)$, con $f'' > 0$ (convexa), cambia de signo, y f no alcanza su mínimo en x_0, entonces el método de Newton Raphson comenzando en x_0 converge.

Dem: dividamos la demostración en tres.

- f monótona creciente.

Acá f tiene una única raíz. Supongamos $x_0 < r$. Ahora,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

con lo cual, como $f(x_0) < 0$, y $f' > 0$, tenemos $x_1 > x_0$.

6.- Demostración del otro teorema

Veamos que $x_1 > r$. Taylor en x_0, y tenemos que

$$0 = f(r) = f(x_0) + f'(x_0)(r - x_0) + \frac{1}{2} f''(\xi)(r - x_0)^2 \geq f(x_0) + f'(x_0)(r - x_0)$$

Como

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0.$$

Entonces,

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(r - x_0)$$

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) \geq f'(x_0)(r - x_0)$$

$$x_1 - x_0 \geq r - x_0 \qquad x_1 \geq r.$$

Obs: Si empezamos debajo de r, en la primera iteración quedamos por arriba, podemos suponer que es nuestro nuevo punto inicial.

Supongamos entonces que empezamos la iteración con un $x_0 > r$.

Ahora,

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

con lo cual, como $f(x_0) > 0$, y $f' > 0$, tenemos $x_1 < x_0$.

Igual que antes,

$$0 = f(r) = f(x_0) + f'(x_0)(r - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(r - x_0)^2 \geq f(x_0) + f'(x_0)(r - x_0).$$

Usamos otra vez

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0,$$

y tenemos

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \geq f(x_0) + f'(x_0)(r - x_0)$$

$$f'(x_0)(x_1 - x_0) \geq f'(x_0)(r - x_0)$$

$$x_1 - x_0 \geq r - x_0 \qquad x_1 \geq r.$$

Luego, $x_0 > x_1 > r$, y repitiendo el razonamiento, conseguimos una sucesión decreciente y acotada.

8.- Demostración del otro teorema

Esta sucesión converge, y como vimos antes, si converge a algo, tiene que ser a una raíz de f. Como r es la única raíz de f, $x_n \to r$.

- f monótona decreciente: igual.
- f tiene un mínimo en un x^*: parecido.

Si x_0 es mayor a x^*, la demostración es exactamente igual a la de f creciente. Supongan que reemplazan la f en $(-\infty, x^*)$ por una recta de pendiente positiva que en x^* vale $f(x^*)$.

Si $x_0 < x^*$, la demostración es exactamente igual a la de f decreciente.

Parte I

Punto fijo

Si queremos resolver $f(x) = 0$, transformamos el problema en $x = g(x)$.

Es equivalente $f(r) = 0$ a $r = g(r)$.

Ej:

$$f(x) = \sin^2(x/3) + x - 1 \qquad g(x) = 1 - \sin^2(x/3).$$

Ej duro:

$$x'(t) = f(t, x) \qquad x(0) = a,$$

$$x(t) = a + \int_0^t f(t, x) := g(x).$$

Ej mucho más duro:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(F(u(x,t))u(x,t)\Big) \qquad u(x,0) = U(x).$$

$$g(v) = \Big\{u : \text{ es solucion de } \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(F(v(x,t))u(x,t)\Big) \quad u(x,0) = U(x)\Big\}$$

Definimos $x_{n+1} = g(x_n)$, queremos condiciones para que exista un punto fijo, un r tal que $r = g(r)$ y $x_n \to r$ cuando $n \to \infty$.

Teorema

Si $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es convergente a r, y g es continua, entonces $r = g(r)$.

Dem: Como $x_n \to r$, y g es continua, entonces $g(x_n) \to g(r)$.

Entonces, $x_{n+1} - g(x_n) \to r - g(r)$, pero $x_{n+1} - g(x_n) = 0$ para todo n, así que $r - g(r) = 0$.

$\square$

Teorema

Sea $I = [a, b]$, g continua tal que $g(I) \subset I$. Entonces g tiene al menos un punto fijo en I.

Si las desigualdades son estrictas, Bolzano dice que hay un cero r de F entre a y b, así que

$$0 = F(r) = g(r) - r$$

y tenemos $g(r) = r$.

Si $F(a) = 0$ ó $F(b) = 0$, quiere decir que el punto fijo es a ó b.

$\square$

Teorema

Sea g derivable, con $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in I = [a, b]$, entonces el punto fijo es único.

Dem: Cotas y teorema de valor medio:
Si hay dos, r_1 y r_2:

$$|r_1 - r_2| = |g(r_1) - g(r_2)| = |g'(\xi)(r_1 - r_2)| \leq \lambda |r_1 - r_2| < |r_1 - r_2|,$$

absurdo. $\square$

Obs: no pedimos $g(I) \subset I$.

Ej: $g(x) = 1 - \sin^2(x/3)$ tiene un solo punto fijo en $\mathbb{R}$.

Tenemos

$$|g'(x)| = \left| -\frac{2}{3}\sin(x/3)\cos(x/3)\right| \leq \frac{2}{3} < 1,$$

así que si hubiera dos puntos r_1, r_2, podemos tomar $I = [r_1, r_2]$ y aplicar el teorema de recién.

Teorema

Sea g derivable, con $|g'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in I = [a, b]$, y $g(I) \subset I$. Entonces, dado cualquier $x_0 \in I$, la sucesión definida por $x_{n+1} = g(x_n)$ converge al único punto fijo de g, y además

1. $|x_n - r| \leq \lambda^n |x_0 - r|$.
2. $|e_n| = |x_n - r| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|$.

Este es un caso particular del Teorema de Punto Fijo de Banach, que vale en muchos contextos.

En parte ya está demostrado: son los teoremas anteriores. Se cumple que manda I en I, y que la derivada está acotada por una constante estrictamente menor que 1.

Lo que falta queda para la próxima clase.