Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2020

Quinto ejercicio computacional
Lunes 11/05/20 al Lunes 18/04/20
Recuerde subir el archivo en formato ejercicioX_NOMBREAPELLIDO.py
Recuerde enviar su código al hacer consultas

En la lista de videos y en la página de repl encontrará un ejemplo de resolución de la ecuación de calor, a modo de ayuda. Basese en ese código, para realizar las modificaciones necesarias para implementar este ejercicio. En repl encontrará también un modelo de plantilla para este código a seguir.

En este ejercicio resolveremos numéricamente la ecuación de ondas:

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u &= \partial_x^2 u\\ u(x,t=0) &= f(x)\\ \partial_t u(x,t=0) &= g(x)\\ u(0,t) = u(L,t) &= 0\end{aligned}$$

Note que mientras que en la ecuación del calor tiene una única condición inicial (ya que la ecuación es de primer orden en el tiempo) en la ecuación de ondas se tiene dos condiciones iniciales. El hecho de que la ecuación sea de segundo orden en ambas variables modifica la matriz de evolución. En este caso, trajaremos con la ecuación

$$u_i^{j+1} = 2(1-\lambda^2)u_i^j + \lambda^2(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) - u_i^{j-1}$$

donde $u_i^j = u(x_i, t_j)$, y $\lambda = k/h$, con k el paso temporal (en t) y h el paso espacial (en x). Esta ecuación puede escribirse como:

$$U^{j+1} = AU^j - U^{j-1}$$

donde $U^j = (u_0^j, u_1^j, ..., u_N^j)$ es un vector cuyas componentes son los u_i^j y A es una matriz tridiagonal, con diagonal $2(1-\lambda^2)$ y diagonales superior e inferior λ^2. La principal diferencia con la ecuación del calor está en la necesidad de conocer también el valor al tiempo $j-1$ (además del tiempo j) para calcular la solución al tiempo $j+1$. Para saltar este problema, emplearemos como condiciones iniciales

$$\begin{aligned}u_i^0 &= f(x_i)\\ u_i^1 &= f(x_i) + kg(x_i)\end{aligned}$$

y comenzaremos nuestra estimación desde $j = 2$.

Al final de este ejercicio, usted debería ser capaz de generar una pequeña animación representando el movimiento de una cuerda unidimensional (vea el gif adjunto). Para ello siga los siguientes pasos (apoyese en el script adjunto y en el script de la ecuación del calor).

A- Construya una función `matriz_evolucion(N,k,h)` que genere la matriz tridiagonal A. El retorno de esta función debe ser la matriz A.

B- Construya funciones `f_x(x)` y `g_x(x)`, a partir de las cuales pueda construir la condicion inicial. Para un primer testeo. considere $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = 0$. El retorno de cada una de estas funciones debe ser un array de longitud N con los valores calculados de f y g en cada valor de x_i.

C- Construya una función `cumple_contorno(solucion,contornos)` que fuerze la solución a cumplir con las condiciones de contorno. El retorno de esta función debe ser el mismo array `solucion`, pero con las condiciones de contorno aseguradas.

D- Construya una funcion `gen_condiciones_inicial(N,f_x,g_x,contornos)` que genere ambas condiciones iniciales U^0 y U^1, según:

$$u_i^0 = f(x_i)$$
$$u_i^1 = f(x_i) + kg(x_i)$$

y devuelva el resultado como una lista conteniendo ambos arrays.

E- Construya una función `paso_integracion(u,u_,contornos,A)` que calcule el valor de U^{j+1} en base a U^j (representado por `u`) y U^{j-1} (representado por `u_`), y la matriz A y los valores en los contornos. Esta función debe retornar el valor de U^{j+1} en forma de array.

F- Construya una función `integra(condicion_inicial,contornos,k,h,t0,T)` que reciba el output de la funcion `gen_condicion_inicial`, los valores en los contornos, los pasos k y h, el tiempo de inicio $t0$ y el tiempo final a alcanzar T.

G- Revise cada función: verifique que los valores de salida son razonables acorde a lo que usted espera.

H- Integre la ecuación de onda entre 0 y 8 segundos, usando un espacial $h = \pi/100$, para una cuerda de longitud π, y un paso temporal $h^2/10$

I- Aprovechandose de las funciones provistas para graficar, grafique:

1- El primer armónico $u(x, t = 0) = \sin(x)$.

2- El segundo armónico $u(x, t = 0) = \sin(2x)$.

3- Una función escalón $u(x, t = 0) = 1$ si $\pi/3 \leq x \leq 2\pi/3$ y 0 en otro caso.

4- Una patadita: $\partial_t u(x, t = 0) = 1$ si $\pi/100 \leq x \leq 2\pi/100$ y 0 en otro caso (en este caso, considere $u(x, t = 0) = 0$.

Nota: si están corriendo en repl, puede que si son demasiadas imágenes la memoria que les ofrece no sea suficiente y les diga que el programa fue "killed". En ese caso, prueben reducir la cantidad de imagenes que le ponen al giff.