Clase Práctica del 28 de mayo 2020: Práctica 5

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico

María Lorena Stockdale

Objetivo: Resolver un sistema $\rightarrow A \cdot x = b$

- Supongamos que podemos descomponer a A de la siguiente manera:

$$A = M + N \quad \text{con} \quad M \text{ inversible}$$

$$\begin{cases} A \cdot x = b \\ (M + N) \cdot x = b \\ M \cdot x = -N \cdot x + b \\ x = -M^{-1}\, N \cdot x + M^{-1}\, b \end{cases}$$

- Genera el siguiente método: $x_{n+1} = -M^{-1}\, N \cdot x_n + M^{-1}\, b$
- Finalmente, si definimos $B = -M^{-1}\, N$ y $C = M^{-1}\, b$ quedaría

$$\boxed{x_{n+1} = B \cdot x_n + C}$$

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \rightarrow D = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Jacobi $\rightarrow \quad M = D \quad$ y $\quad N = L + U.$

$$\boxed{x_{n+1} = -D^{-1}(L+U) \cdot x_n + D^{-1} b}$$

$$\boxed{x_{n+1} = B_J \cdot x_n + C_J}$$

- Gauss Seidel $\rightarrow \quad M = D + L \quad$ y $\quad N = U.$

$$\boxed{x_{n+1} = -(D+L)^{-1} U \cdot x_n + (D+L)^{-1} b}$$

$$\boxed{x_{n+1} = B_{GS} \cdot x_n + C_{GS}}$$

- El método iterativo converge $\forall\ x_0$ inicial sii $\rho(B) < 1$.
- Si existe $\|\cdot\|$ tal que $\|B\| < 1$ entonces el método converge $\forall\ x_0$ inicial.
- a) λ autovalor de B_J sii $det(\lambda I - B_J) = 0$

$$\left\{\begin{array}{r} det(\lambda I + D^{-1}(L+U)) = 0 \\ det(D^{-1}(\lambda D + L + U)) = 0 \\ det(D^{-1})\, det(\lambda D + L + U) = 0 \\ det(\lambda D + L + U) = 0 \end{array}\right.$$

b) λ autovalor de B_{GS} sii $det(\lambda I - B_{GS}) = 0$

$$\left\{\begin{array}{r} det(\lambda I + (D+L)^{-1}U) = 0 \\ \vdots \\ det(\lambda D + \lambda L + U) = 0 \end{array}\right.$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$. Se quiere resolver $A \cdot x = b$ usando Gauss Seidel. Decidir para qué valores de α el método resulta convergente.

- Calculamos: $det(\lambda D + \lambda L + U) = 0 \rightarrow det \begin{pmatrix} \lambda & -\alpha & 1 \\ \alpha\lambda & \lambda & \alpha \\ \alpha^2\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0.$

$$\alpha^2\lambda(-\alpha^2 - \lambda) + \lambda(\lambda^2 + \alpha^2\lambda) = 0$$
$$-\alpha^2\lambda(\alpha^2 + \lambda) + \lambda^2(\lambda + \alpha^2) = 0$$
$$(\alpha^2 + \lambda)(-\alpha^2\lambda + \lambda^2) = 0$$
$$(\alpha^2 + \lambda)\,\lambda\,(-\alpha^2 + \lambda) = 0$$

$\rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = -\alpha^2,\ \lambda = \alpha^2.$

Para que el método converja: $|\lambda| = \alpha^2 < 1$, por lo tanto, $-1 < \alpha < 1$.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $a_{ii} \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$. Considere la descomposición $A = D + L + U$.

1. Pruebe que resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente a resolver $(D + \frac{1}{2}L)x = -(\frac{1}{2}L + U)x + b$.
2. Considere el método iterativo $x_{n+1} = Bx_n + C$ donde $B = -(D + \frac{1}{2}L)^{-1}(\frac{1}{2}L + U)$ y $C = (D + \frac{1}{2}L)^{-1}b$. Demuestre que $\lambda \in \mathbb{R}$ es autovalor de la matriz B sii λ es raíz de la ecuación $\det[\frac{1}{2}L + U + \lambda(D + \frac{1}{2}L)] = 0$.
3. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$. Demuestre que el método anterior converge sii $a^2 < \frac{1}{2}$.
4. Verifique que el método de Gauss Seidel satisface la misma condición del ítem anterior sobre el parámetro a. ¿Cuál de los dos métodos eligiría?

1) Notamos que A se puede descomponer como $A = D + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L + U$. Por lo tanto, resolver el sistema $Ax = b$ es equivalente a resolver

$$\left(D + \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}L + U\right)x = b$$

$$\left(D + \frac{1}{2}L\right)x = -\left(\frac{1}{2}L + U\right)x + b$$

Listo!

2) λ es autovalor de la matriz B sii $det(\lambda I - B) = 0$.

$$det\left[\lambda I + \left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}L + U\right)\right] = 0$$
$$det\left[\left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1}\left(\lambda\left(D + \frac{1}{2}L\right) + \frac{1}{2}L + U\right)\right] = 0$$
$$det\left[\left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1}\right] det\left[\lambda\left(D + \frac{1}{2}L\right) + \frac{1}{2}L + U\right] = 0$$

como $det\left[\left(D + \frac{1}{2}L\right)^{-1}\right] \neq 0 \quad \rightarrow \quad det\left[\lambda\left(D + \frac{1}{2}L\right) + \frac{1}{2}L + U\right] = 0.$

Listo!

3) Por **2)** λ es autovalor de B sii $det\left[\lambda\left(D+\frac{1}{2}L\right)+\frac{1}{2}L+U\right]=0.$

$$det\begin{pmatrix}\lambda & a & 0\\ \frac{1}{2}a(\lambda+1) & \lambda & a\\ 0 & \frac{1}{2}a(\lambda+1) & \lambda\end{pmatrix}=0$$

$$\lambda\left[\lambda^2-\frac{1}{2}a^2(\lambda+1)\right]-a\left[\frac{1}{2}a(\lambda+1)\lambda\right]=0$$

$$\lambda^3-a^2(\lambda+1)\lambda=0$$

$$\lambda\left[\lambda^2-a^2(\lambda+1)\right]=0$$

$$\lambda\left[\lambda^2-a^2\lambda-a^2\right]=0$$

$\rightarrow$ $\lambda=0$, $\lambda=\frac{a^2+\sqrt{a^4+4a^2}}{2}$ y $\lambda=\frac{a^2-\sqrt{a^4+4a^2}}{2}$.

Para que el método converja: $|\lambda|=\frac{a^2+\sqrt{a^4+4a^2}}{2}<1$ sii $a^2<\frac{1}{2}$ y $|\lambda|=\sqrt{\left(\frac{a^2-\sqrt{a^4+4a^2}}{2}\right)^2}<1$ sii $a^2<\frac{1}{2}$.

Listo!

4) λ es autovalor de B_{GS} sii $det(\lambda D + \lambda L + U) = 0$.

$$
\begin{aligned}
det(\lambda D + \lambda L + U) &= 0 \\
det \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ a\lambda & \lambda & a \\ 0 & a\lambda & \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\
\lambda\,(\lambda^2 - a^2\lambda) - a\,(a\,\lambda^2) &= 0 \\
\lambda^3 - 2\,a^2\,\lambda^2 &= 0 \\
\lambda^2\,(\lambda - 2\,a^2) &= 0
\end{aligned}
$$

$\rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 0$ y $\lambda = 2\,a^2$.

Para que el método converja: $|\lambda| = 2\,a^2 < 1$ sii $a^2 < \frac{1}{2}$.

- Elegiríamos Gauss Seidel pues $\rho(B_{GS}) \leq \rho(B)$.

Listo!

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ \beta & 0 & 3 \end{pmatrix}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para resolver el sistema lineal $Ax = b$ se descompone la matriz A de la forma $A = M - N$, se utiliza el método iterativo $x_{n+1} = M^{-1}\, N\, x_n + M^{-1}\, b$. Se proponen dos posibles descomposiciones de la matriz A, $A = M_1 - N_1$ y $A = M_2 - N_2$ siendo $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ \beta & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Probar que ambos métodos convergen para los mismos valores de α y β.
2. Para cada α y β tales que los métodos resultan convergentes, decidir cuál de los dos elegiría y fundamentar su elección.

$\rightarrow$ **Ayuda!**

$\lambda_1 = \frac{6\alpha+2\beta\alpha}{6}$, $\lambda_2^2 = \frac{6\alpha+2\beta\alpha}{6}$ y por lo tanto, $\rho(B_1) = (\rho(B_2))^2$ (...a pensar...).

1. Si A es estrictamente diagonal dominante $\rightarrow$ Jacobi y Gauss Seidel convergen.

2. Si A es simétrica y definida positiva $\rightarrow$ Gauss Seidel converge.

3. Si A es tridiagonal, $\quad \rho(B_{GS}) = (\rho(B_J))^2$.

4. Si A es tridiagonal, Jacobi converge sii Gauss Seidel converge.

5. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, Jacobi converge sii Gauss Seidel converge.

Anuncios:

- Damos por finalizada la **Práctica 5**.
- Hemos terminado la primera parte de la materia!
- La próxima clase repasaremos para el parcial.