VECTORES EN EL PLANO Y EL ESPACIO

SUMA Y PRODUCTO POR ESCALAR

Dados $A=(a_1,\dots,a_n), B=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ y $k\in\mathbb{R}$, definimos

$$A+B=(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)\in\mathbb{R}^n$$
$$kA=(ka_1,\dots,ka_n)\in\mathbb{R}^n$$

Propiedades: Sean $A,B,C\in\mathbb{R}^n$ y $k,k_1,k_2\in\mathbb{R}$

P1) $A+(B+C)=(A+B)+C$ asociatividad
P2) $O+A=A+O=O$ neutro
P3) $A+(-A)=-A+A=O$ opuesto   Notación: $-A=(-1)A$
P4) $A+B=B+A$ conmutatividad
P5) $k(A+B)=kA+kB$
P6) $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$
P7) $(k_1k_2)A=k_1(k_2A)$
P8) $1A=A$ y $0A=O$
P9) $kA=O$ si y solo si $k=0$ ó $A=O$

NORMA Y DISTANCIA

Dado $A=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, definimos

$$\|A\|=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\in\mathbb{R}$$

Decimos que A es unitario si $\|A\|=1$

Propiedades: Sean $A,B\in\mathbb{R}^n$ y $k\in\mathbb{R}$

P1) Si $A=O$, $\|A\|=0$; si $A\neq O$, $\|A\|>0$
P2) $\|-A\|=\|A\|$
P3) $\|kA\|=|k|\|A\|$
P4) Desigualdad triangular: $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$
P5.1) $|\|A\|-\|B\||\le\|A+B\|$
P5.2) $|\|A\|-\|B\||\le\|A-B\|$

Dados $A=(a_1,\dots,a_n), B=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, definimos

$$\mathrm{d}(A,B)=\|B-A\|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+\cdots+(b_n-a_n)^2}$$

Propiedades: Sean $A,B,C\in\mathbb{R}^n$ y $k\in\mathbb{R}$

P1) Si $A=B$, $\mathrm{d}(A,B)=0$; si $A\neq B$, $\mathrm{d}(A,B)>0$
P2) $\mathrm{d}(A,B)=\mathrm{d}(B,A)$
P3) Desigualdad triangular: $\mathrm{d}(A,B)\le\mathrm{d}(A,C)+\mathrm{d}(B,C)$
P4) $\mathrm{d}(A,B)=\mathrm{d}(A+C,B+C)$

PRODUCTO INTERNO O ESCALAR

Dados $A=(a_1,\dots,a_n), B=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, definimos

$$A.B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\in\mathbb{R}$$

Propiedades: Sean $A,B,C\in\mathbb{R}^n$ y $k\in\mathbb{R}$

P1) $A.B=B.A$
P2) $A.(B+C)=A.B+A.C=(B+C).A$
P3) $(kA).B=k(A.B)=A.(kB)$
P4) Si $A=O$, $A.A=O$ Si $A\neq O$, $A.A>0$
P5) $A.A=\|A\|^2$
P6) Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|A.B|\le\|A\|\|B\|$
P7) $A.B=\frac{1}{2}(\|A\|^2+\|B\|^2-\|B-A\|^2)$
P8) Teorema de Pitágoras: $\|A+B\|^2=\|A\|^2+\|B\|^2\Leftrightarrow A.B=0$

ÁNGULO ENTRE VECTORES

Dados $A=(a_1,\dots,a_n), B=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, definimos

$$\theta=\theta(A,B)\Leftrightarrow 0\le\theta\le\pi \text{ y } \cos(\theta)=\frac{A.B}{\|A\|\|B\|}$$

Decimos que A y B son ortogonales si $A.B=0$

PRODUCTO VECTORIAL

Dados $A=(a_1,a_2,a_3)$ y $B=(b_1,b_2,b_3)$ en $\mathbb{R}^3$, definimos

$$A\times B=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)\in\mathbb{R}^3$$

Propiedades: Sean $A,B,C\in\mathbb{R}^3$ y $k\in\mathbb{R}$

P1) $A\times B=-B\times C$
P2) $A\times(B+C)=(A\times B)+(A\times C)$
   $(B+C)\times A=(B\times A)+(C\times A)$
P3) $(kA)\times B=k(A\times B)=A\times(kB)$
P4) $A\times A=O$
P5) $A\times B$ es perpendicular a A y a B
P6) $\|A\times B\|^2=\|A\|^2\|B\|^2-(A.B)^2$
P7) $\|A\times B\|=\|A\|\|B\||\mathrm{sen}(\theta)|$ donde $\theta=\theta(A,B)$
P8) $\|A\times B\|$ es el área del paralelogramo de vértices $O,A,B,A+B$
P9) Producto mixto: $A.(B\times C)=B.(C\times A)=C.(A\times B)$

RECTAS EN $\mathbb{R}^n$

Dados $A,D\in\mathbb{R}^n$, $D\neq O$, la ecuación paramétrica de la recta $\mathbb{L}$ que pasa por A en la dirección de D es

$$\mathbb{L}: X=tD+A \qquad \text{donde } t\in\mathbb{R}$$

Ángulos entre dos rectas: Para definir al ángulo entre dos rectas usamos sus vectores dirección, eligiendo entre los ángulos que estos forman, el único θ tal que $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

Dos rectas en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ se dicen:

- Coincidentes si son la misma recta
- Transversales si se cortan en un punto
- Paralelas si sus direcciones coinciden

Dos rectas en $\mathbb{R}^3$ pueden no cortarse ni ser paralelas; en este caso se dicen alabeadas.

La distancia de un punto P a una recta $\mathbb{L}: X=tD+A$ en $\mathbb{R}^2$ es

$$\mathrm{d}(P,\mathbb{L})=\frac{|(P-A).D|}{\|D\|}$$

PLANOS EN $\mathbb{R}^3$

Dados $Q,N\in\mathbb{R}^3$, $N\neq O$, la ecuación del plano que Π que pasa por Q y es perpendicular a N es

$$\Pi: (X-Q).N=0$$

Diremos que N es un vector normal al plano.

OBS: El plano Π es el conjunto de todos los puntos X tales que $(X-Q)$ es perpendicular a N.

Si $X=(x_1,x_2,x_3)$ y $N=(a,b,c)$, la ecuación resulta:

$$\Pi: ax_1+bx_2+cx_3=d \qquad \text{donde } d=Q.N$$

Dos planos en $\mathbb{R}^3$ se dicen:

- Coincidentes si son el mismo plano
- Transversales si se cortan en una recta
- Paralelos si sus vectores normales lo son

Una recta y un plano en $\mathbb{R}^3$ son:

- Paralelos si la dirección de la recta es perpendicular al vector normal al plano
- Ortogonales si la dirección de la recta es paralela al vector normal

La distancia de un punto $P\in\mathbb{R}^3$ a un plano $\Pi: (X-Q).N=0$ es

$$\mathrm{d}(P,\Pi)=\frac{|(P-Q).N|}{\|N\|}$$

MATRICES Y SISTEMAS LINEALES

Dados $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ y $k\in\mathbb{R}$, definimos

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$$
$$kA=(ka_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$$

Dados $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ y $B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times s}$, definimos

$$AB=(c_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times s} \text{ donde } c_{ij}=(\text{fila } i \text{ de } A).(\text{columna } j \text{ de } B)$$

Propiedades: Sean A, B y C de las dimensiones correctas

P1) $A(BC)=(AB)C$
P2) $A(B+C)=AB+AC$
   $(A+B)C=AC+BC$
P3) Si $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $AI_n=A$ y $I_mA=A$ donde $I_n\in\mathbb{R}^{n\times n}$ e $I_m\in\mathbb{R}^{m\times m}$