Clase práctica de Cálculo Avanzado - 8/5

Ejercicio 1. Sea $C \subset \mathbb{R}$ el conjunto de Cantor. Probar que es un subconjunto cerrado con la métrica usual.

Solución. Recordamos que el conjunto de Cantor admite la siguiente descripción:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\left[\frac{3k}{3^n}, \frac{3k+1}{3^n} \right] \cup \left[\frac{3k+2}{3^n}, \frac{3k+3}{3^n} \right] \right).$$

Cada uno de los términos de la intersección es una unión finita de intervalos cerrados. Por lo tanto son cerrados. Entonces, como intersección arbitraria de cerrados es cerrado, C es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $F \subseteq X$ un subconjunto cerrado. Probar que $F^\circ = \emptyset$ si y sólo si existe un abierto $G \subseteq X$ tal que $F = \partial G$.

Solución. $\Leftarrow$) Sabemos que $F = \partial G$ con G un abierto de X. Veamos que $(\partial G)^\circ = \emptyset$. Si no es vacío, existe $x \in (\partial G)^\circ$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq \partial G$. En particular, $B(x, r) \cap G \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $y \in B(x, r) \cap G$. Como $B(x, r)$ está contenida en ∂G, entonces $y \in G \cap \partial G$. Pero $\partial G = \overline{G} \setminus G^\circ = \overline{G} \setminus G$. Es decir que $G \cap \partial G = \emptyset$, lo cual es absurdo, pues teníamos que $y \in G \cap \partial G$.

$\Rightarrow$) Veamos que $F = \partial(F^c)$. Por definición tenemos que

$$\partial(F^c) = \overline{F^c} \cap \overline{(F^c)^c} = \overline{F^c} \cap \overline{F} = \partial F.$$

Es decir que basta probar que $F = \partial F$. Como F es cerrado, $F = \overline{F} = \partial F \cup F^\circ$. Además $F^\circ = \emptyset$, entonces tenemos lo que queríamos.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $A \subseteq X$. Probar que $\partial(A^\circ) \subseteq \partial A$.

Solución. Sea $x \in \partial(A^\circ)$. Sea $r > 0$, veamos que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y que $B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$. Sabemos que $B(x, r) \cap A^\circ \neq \emptyset$ y que $B(x, r) \cap (A^\circ)^c \neq \emptyset$.

Como $B(x,r) \cap A^\circ \subseteq B(x,r) \cap A$, entonces $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. Ahora supongamos que $B(x,r) \cap A^c = \emptyset$. Entonces $B(x,r) \subseteq A$. Es decir que $x \in A^\circ$. Más aún, $B(x,r) \subseteq A^\circ$. Luego $B(x,r) \cap (A^\circ)^c = \emptyset$, lo cual es absurdo. Por lo tanto $B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$.

Ejercicio 4. Sea $X = C[0,1]$. Consideramos las siguientes distancias en X:

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx;$$

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión dada por $f_n(x) = x^n$. Analizar su convergencia con ambas métricas.

Solución. Primero veamos que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ con d_1:

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |x^n - 0| dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Al tomar límite en la última expresión, obtenemos que $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

Ahora veamos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es convergente con d_∞. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} f_n = g$. Entonces si $x \in [0,1]$, $|f_n(x) - g(x)| \leq d_\infty(f_n, g) \to 0$. Luego

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$$

Pero $g \notin C[0,1]$, pues no es continua. Por lo tanto $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge con d_∞.