Clase práctica de Cálculo Avanzado - 17/4

Ejercicio 1. Encontrar el cardinal de los siguientes conjuntos:

(a) $\mathbb{N}^2$

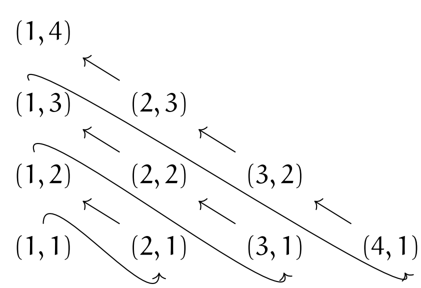
(b) $(0, 1)$

(c) $(0, 1]$

(d) $S = \{(x_n)_n \subseteq \mathbb{Z} : \ (x_n)_n \ \text{ es periódica y } \ 0 \leq x_n \leq 1\}$

(e) $\mathbb{R}^2$

Solución. (a) El siguiente dibujo indica cómo enumerar a todos los elementos de $\mathbb{N}^2$:



Esto prueba que $\boxed{\#\mathbb{N}^2 = \aleph_0}$.

(b) Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$f'(x) = \frac{x'(1 + |x|) - x(1 + |x|)'}{(1 + |x|)^2} = \frac{(1 + |x|) - x\,\mathrm{sgn}(x)}{(1 + |x|)^2} = \frac{1}{(1 + |x|)^2}$$

(verifique que f es derivable también en $x = 0$ con derivada $f'(0) = 1$). Esto prueba que f es una función estrictamente creciente y por ende inyectiva. Además

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1,$$

con lo cual la imagen de f es exactamente $(-1, 1)$. Consecuentemente $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ es una biyección y $c = \#(-1, 1)$. Pero por otra parte la aplicación $g : (0, 1) \to (-1, 1)$ dada por $g(x) = 2x - 1$ también es una biyección, con lo cual $\boxed{\#(0, 1) = c}$.

(c) *Forma sencilla.* Es claro que la función $f : (0, 1] \to (0, 1)$ definida por $f(x) = x/2$ es inyectiva. Como la inclusión $(0, 1) \hookrightarrow (0, 1]$ también es inyectiva, el Teorema de Cantor-Bernstein nos asegura que $\boxed{\#(0,1] = \#(0,1) = c}$.

Forma alternativa. La función $f : (0, 1] \to (0, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{si } x = 1/n, \\ x & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

es una biyección explícita.

(d) Observemos que la función $f : S \to \mathbb{Q}$ que le asigna a cada sucesión $(x_n)_n \in S$ el número cuyo desarrollo en base tres es igual a $0, x_1 x_2 \cdots$. Esta función está bien definida porque todo número real cuya expresión en base tres es periódica necesariamente es racional. Esta función es inyectiva porque el desarrollo en base 3 es único salvo colas de 2's. Esto nos dice que S es a lo sumo numerable, pero como es un conjunto infinito tenemos $\boxed{\#S = \aleph_0}$.

(e) Similarmente a lo hecho en los ítems previos se puede comprobar que $\#[0, 1] = \#\mathbb{R}$, lo cual implica la igualdad de cardinales $\#\mathbb{R}^2 = \#[0, 1]^2$. Como la inclusión en la primera coordenada $[0, 1] \hookrightarrow [0, 1]^2$ es una aplicación inyectiva tenemos la desigualdad $\#[0, 1]^2 \geq \#[0, 1] = c$. Afirmo que vale la otra inclusión. Para cada número $x \in [0, 1]$ notaremos como $x = 0, x_1 x_2 \cdots$ a su único desarrollo decimal que no contiene una cola infinita de 9's. Esto nos permite definir una función $f : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ como

$$f(x, y) = 0, x_1 y_1 x_2 y_2 \cdots$$

Observemos que el desarrollo decimal de $f(x, y)$ no contiene una cadena infinita de 9's por cómo elegimos los desarrollos de x y de y, y por ende este queda unívocamente determinado. Por este motivo la función f resulta ser inyectiva y así concluimos que $\boxed{\#\mathbb{R}^2 = \#[0, 1]^2 = c}$.

Comentario 1. La función f no es sobreyectiva porque $0, 0909 \cdots$ no está en su imagen.

Comentario 2. Usando la misma estrategia se puede ver que existe una función sobreyectiva $g : [0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$. Más adelante veremos que podemos encontrar una función g que además sea continua (aquel que quiera googlear un poco puede buscar 'Curva de

Peano').

Ejercicio 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea S_n un conjunto numerable. Probar que $S = \cup_n S_n$ es un conjunto numerable.

Solución. Si para cada n fijamos una enumeración $S_n = \{x_n^1, x_n^2, \dots\}$, entonces la asignación $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to S$ definida como $f(n, m) = x_n^m$ es una biyección.

Observación. El mismo resultado vale cambiando la palabra "numerable" en todas partes por "contable" (¿se vé el por qué?).

Ejercicio 3 (Un poco informal)**.** Probar que el conjunto de libros que se pueden escribir en el idioma español es numerable.

Solución. Observemos que el español tiene una cantidad finita de caracteres m, y que cada libro consiste de una concatenación finita de caracteres. Por ejemplo, "Había una vez..." es un libro que consta de 16 caracteres incluyendo los espacios. Consideremos entonces el conjunto S_n formado por todos los libros en español que tienen n caracteres de longitud. Entonces el conjunto de todos los libros que se pueden escribir en español es $S = \cup_n S_n$. Observemos que el cardinal de cada S_n es igual a mn, y por ende S_n es contable. Esto implica que S es un conjunto contable también gracias a la observación anterior. Como es posibles escribir infinitos libros distintos, S es numerable.