# Cálculo Numérico.
# Ortogonalización
# Práctica 7 (continuación)

Marcela Fabio

22/06/2020

# Recordamos

**Producto interno en $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial**

Es una función $< \cdot, \cdot >: \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ que asigna a cada par de vectores un número real tal que, para todo $x, y, z \in \mathbb{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se satisfacen:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
4. $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$

Ejemplo 1: Sea $\mathbb{V} = C[-1,1]$ el espacio de funciones continuas. Si $f, g \in \mathbb{V}$

$$\langle f, g \rangle \triangleq \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \cdot \underbrace{|x|}_{\omega(x)} \, dx$$

es un producto interno.

Debemos verificar 1) a 4).

1. $$\begin{aligned} \langle f+h, g \rangle &= \int_{-1}^{1} (f(x)+h(x)) \cdot g(x) \cdot |x| \, dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \cdot |x| \, dx + \int_{-1}^{1} h(x) \cdot g(x) \cdot |x| \, dx \\ &= \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle \end{aligned}$$

2. $\langle \alpha f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \alpha f(x) \cdot g(x) \cdot |x| \, dx = \alpha \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) \cdot |x| \, dx$

3. $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\cdot |x|\,dx = \int_{-1}^{1} g(x)\cdot f(x)\cdot |x|\,dx = \langle g,f\rangle$
4. $\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} f^2(x)|x|\,dx > 0$

Dado que $f^2(x)|x| \geq 0$, continua y no es nula existe $x_0 \in [-1,1]$ tal que $f^2(x_0)|x_0| > 0 \Rightarrow f^2(x_0)|x_0| > \delta$ y por tanto existe un entorno de la forma $(x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$ en el cual $f^2(x)|x| > 0$ si $x \in (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)$

$$\int_{-1}^{1} f^2(x)|x|\,dx \geq \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} f^2(x)|x|\,dx > \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} \delta\,dx = 2\delta\epsilon > 0$$

Ejemplo 2: Sea $\mathbb{V} = \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ el conjunto de matrices reales cuadradas $n \times n$. Si $A, B \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$,

$$\langle A, B \rangle \triangleq \operatorname{tr}\left(B^T A\right)$$

es un producto interno.

1. $\langle A + C, B \rangle = \operatorname{tr}\left(B^T (A + C)\right) = \operatorname{tr}\left(B^T A\right) + \operatorname{tr}\left(B^T C\right) = \langle A, B \rangle + \langle C, B \rangle$
2. $\langle \alpha A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(B^T (\alpha A)\right) = \alpha \operatorname{tr}\left(B^T A\right) = \alpha \langle A, B \rangle$
3. $\langle B, A \rangle = \operatorname{tr}\left(A^T B\right) = \operatorname{tr}\left(\left(A^T B\right)\right)^T = \langle A, B \rangle$
4. $\langle A, A \rangle = \operatorname{tr}\left(A^T A\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0$

Ejemplo 3: En el espacio vectorial de polinomios de grado 2, $\mathbb{R}_2[x]$, si se define para cada $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ y $q(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ el producto

$$\langle p(x), q(x) \rangle \triangleq p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

resulta un producto interno.

1. $\langle p(x) + r(x), q(x) \rangle = \big(p(0) + r(0)\big) q(0) + \big(p(1) + r(1)\big) q(1) + \big(p(2) + r(2)\big) q(2) = (\text{arreglando}) = \langle p(x), q(x) \rangle + \langle r(x), q(x) \rangle$
2. $\langle \alpha p(x), q(x) \rangle = \alpha p(0)q(0) + \alpha p(1)q(1) + \alpha p(2)q(2) = (\text{arreglando}) = \alpha \langle p(x), q(x) \rangle$
3. $\langle p(x), q(x) \rangle = \langle q(x), p(x) \rangle$
4. $\langle p(x), p(x) \rangle = p^2(0) + p^2(1) + p^2(2) > 0$

# Norma inducida, distancia, ángulo

En los $(\mathbb{V}, <,>)$ espacios vectoriales con producto interno se tiene la norma inducida

$$||x|| \triangleq \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall\, x \in \mathbb{V}$$

Se generalizan longitud, distancia y ángulo entre vectores: $||x||$, $||x-y||$, $\cos(\theta) = \dfrac{< x, y >}{||x||||y||}$ respectivamente.

## Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Dado el espacio vectorial $\mathbb{V}$ dotado de producto interno, para todo $x$, $y \in \mathbb{V}$ se tiene:

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y||$$

## Definiciones en $(\mathbb{V}, <, >)$

1. Si $\mathbb{V}$ es un espacio con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se dice que $f$ y $g$ son ortogonales si $\langle f, g \rangle = 0$.
   Notación: $f \perp g$.
2. Dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{V}$ son ortogonales $A \perp B$ si

$$\langle f, g \rangle = 0 \;\; \forall \, f \in A, g \in B.$$

3. Si $S \subseteq \mathbb{V}$ es un subespacio de dimensión finita de $\mathbb{V}$ tal que $S = gen\{s_1, \cdots, s_r\}$, diremos que $\{s_1, \cdots, s_r\}$ es b.o.n. si

$$\langle s_i, s_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

**Teorema**

Dados $S$ un subespacio de un espacio $\mathbb{V}$ con producto interno, $x \in \mathbb{V}$ e $y \in S$, son equivalentes:

1. $||x - y|| = \min_{s \in S}\{||x - s||\}$
2. $\langle x - y, s \rangle = 0, \;\; \forall\, s \in S$

Además, un elemento $s \in S$ que verifque alguna de las propiedades anteriores es único.

$y = P_S(x)$ es la proyección ortogonal de $x$ sobre $S$.

# Coeficientes de la proyección

Si $S = \text{gen}\{v_1, \cdots, v_r\}$ con $\{v_1, \cdots, v_r\}$ b.o.n

$$P_S(x) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r$$

$$\langle P_S(x), v_i\rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_r v_r, v_i\rangle = \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_i\rangle}_{1} = \alpha_i$$

$$\boxed{\mathrm{P}_S(x) = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\langle P_S(x), v_i\rangle}_{\alpha_i} v_i}$$

Ejemplo 4: Sea $\mathbb{V} = C[-1,1]$ con el p. i. definido en el Ejemplo 1.
$\mathbb{R}_2[x] \subset C^1(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_2[x] = \text{gen}\{1, x, x^2\}$.

1. Hallar b.o.n.
2. Hallar la mejor aproximación de $x^3$ en $\mathbb{R}_2[x]$.

Ortonormalizamos $\{1, x, x^2\}$ (Gram-Schmidt):

- $\langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \cdot |x|\, dx = 2 \int_{0}^{1} x\, dx = 1 \;\rightarrow\; u_1 = 1$
- $\tilde{u}_2 = x - \langle x, u_1 \rangle u_1 = x - \int_{-1}^{1} \underbrace{x \cdot 1 \cdot |x|}_{\text{impar}}\, dx = x$

$$\langle \tilde{u}_2, \tilde{u}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x \cdot |x|\, dx = 2 \int_{0}^{1} x^3\, dx = \frac{1}{2} \;\rightarrow\; u_2 = \sqrt{2}x$$

- $\tilde{u}_3 = x^2 - \langle x^2, u_1\rangle u_1 - \langle x^2, u_2\rangle u_2 =$
  $x^2 - \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \cdot |x|\, dx + \int_{-1}^{1} \underbrace{x^2 \cdot \sqrt{2}x \cdot |x|}_{\text{impar}}\, dx = x^2 - \frac{1}{2}$

$$\langle \tilde{u}_3, \tilde{u}_3\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{2})^2 \cdot |x|\, dx = \cdots = \frac{1}{12} \;\rightarrow\; u_3 = 2\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}$$

Entonces, $\{1, \sqrt{2}x, 2\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}\}$ es b.o.n. de $\mathbb{R}_2[x]$.

$\{1, \sqrt{2}x, 2\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}\}$ es b.o.n. de $\mathbb{R}_2[x]$.

Para la mejor aproximación de $x^3$ en $\mathbb{R}_2[x]$:

$$\alpha_1 = \langle x^3, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot 1 \cdot |x| \, dx = 0$$

$$\alpha_2 = \langle x^3, \sqrt{2}x\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \sqrt{2}x \cdot |x| \, dx = 2\sqrt{2} \int_{0}^{1} x^5 \, dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\alpha_3 = \langle x^3, 2\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot (2\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}) \cdot |x| \, dx = \cdots = 0$$

$$\boxed{\mathrm{P}_S(x^3) = 0 \cdot u_1 + \tfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 = \tfrac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3})}$$

Ejemplo 5: Sea $\mathbb{V} = C^1[-p,p]$ el espacio vectorial de funciones derivables con producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-p}^{p} f(x)\cdot g(x)\,dx$$

El conjunto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2p}}, \frac{1}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right), \frac{1}{\sqrt{p}}\sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es ortonormal. Además, cualquier $f \in \mathbb{V}$ se puede representar como

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 0} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx,\ b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx.$$