Cálculo Numérico

Diferencias Finitas- Parte I

Nazareno Faillace

30/04

Departamento de Matemática - FCEyN - UBA

Iteraciones

> *"Iteración significa repetir varias veces un proceso con la intención de alcanzar una meta deseada. Cada repetición del proceso también se le denomina una "iteración", y los resultados de una iteración se utilizan como punto de partida para la siguiente iteración."*

Wikipedia, circa 2020

En el caso de los métodos de un paso, cada iteración tiene la siguiente pinta:

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, h)$$

Es decir, para calcular el nuevo valor y_{i+1} utilizamos el resultado de la iteración anterior y_i.

Iteraciones

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, h)$$

Por ejemplo, si queremos resolver la siguiente ecuación con Euler:

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

En el método de Euler, $\Phi(t_i, y_i, h) = f(t_i, y_i) = 2y_i$

Iteraciones

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, h)$$

Por ejemplo, si queremos resolver la siguiente ecuación con Euler:

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

En el método de Euler, $\Phi(t_i, y_i, h) = f(t_i, y_i) = 2y_i$

$$\text{Iteración 1:} \quad y_1 = y_0 + h2y_0$$

Iteraciones

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, h)$$

Por ejemplo, si queremos resolver la siguiente ecuación con Euler:

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

En el método de Euler, $\Phi(t_i, y_i, h) = f(t_i, y_i) = 2y_i$

$$\begin{aligned} \text{Iteración 1:} \quad & y_1 = y_0 + h2y_0 \\ \text{Iteración 2:} \quad & y_2 = y_1 + h2y_1 \end{aligned}$$

Iteraciones

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, h)$$

Por ejemplo, si queremos resolver la siguiente ecuación con Euler:

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

En el método de Euler, $\Phi(t_i, y_i, h) = f(t_i, y_i) = 2y_i$

$$\begin{aligned} &\text{Iteración 1:} \quad && y_1 = y_0 + h2y_0 \\ &\text{Iteración 2:} \quad && y_2 = y_1 + h2y_1 \\ &\text{Iteración 3:} \quad && y_3 = y_2 + h2y_2 \end{aligned}$$

Iteraciones

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, h)$$

Por ejemplo, si queremos resolver la siguiente ecuación con Euler:

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

En el método de Euler, $\Phi(t_i, y_i, h) = f(t_i, y_i) = 2y_i$

$$\begin{array}{rl} \text{Iteración 1:} & y_1 = y_0 + h2y_0 \\ \text{Iteración 2:} & y_2 = y_1 + h2y_1 \\ \text{Iteración 3:} & y_3 = y_2 + h2y_2 \\ \vdots & \vdots \\ \text{Iteración N:} & y_N = y_{N-1} + h2y_{N-1} \end{array}$$

Diferencias Finitas - Aproximación de las derivadas

Ejemplo. Hallar el error local de la siguiente discretización de la derivada primera e indicar la hipótesis de suavidad que requiere de la función f:

$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

Diferencias Finitas - Aproximación de las derivadas

Queremos calcular:

$$f'(x) - \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}$$

Empecemos calculando $4f(x+h) - f(x+2h)$.

Desarrollamos Taylor para $f(x+h)$ centrado en x:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(\xi_1) \qquad \xi_1 \in (x, x+h)$$

$$\Rightarrow 4f(x+h) = 4f(x) + 4hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{2}{3}h^3f'''(\xi_1)$$

Y desarrollamos Taylor para $f(x+2h)$ centrado en x:

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4}{3}h^3f'''(\xi_2) \qquad \xi_2 \in (x, x+2h)$$

Diferencias Finitas - Aproximación de las derivadas

Como:

$$
\begin{aligned}
4f(x+h) &= 4f(x) + 4hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \tfrac{2}{3}h^3 f'''(\xi_1) \\
f(x+2h) &= f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \tfrac{4}{3}h^3 f'''(\xi_2)
\end{aligned}
$$

Tenemos que:

$$
4f(x+h) - f(x+2h) = 3f(x) + 2hf'(x) + \frac{2}{3}h^3 (f'''(\xi_1) - 2f'''(\xi_2))
$$

Diferencias Finitas - Aproximación de las derivadas

Volviendo a lo que queremos calcular:

$$f'(x) - \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} =$$

Diferencias Finitas - Aproximación de las derivadas

Volviendo a lo que queremos calcular:

$$f'(x) - \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} =$$

$$= f'(x) - \frac{-3f(x) + 3f(x) + 2hf'(x) + \frac{2}{3}h^3(f'''(\xi) - 2f'''(\eta))}{2h}$$

Volviendo a lo que queremos calcular:

$$f'(x) - \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} =$$

$$= f'(x) - \frac{\cancel{-3f(x)} + \cancel{3f(x)} + 2hf'(x) + \frac{2}{3}h^3(f'''(\xi) - 2f'''(\eta))}{2h} =$$

$$= f'(x) - \frac{2hf'(x) + \frac{2}{3}h^3(f'''(\xi) - 2f'''(\eta))}{2h}$$

Diferencias Finitas - Aproximación de las derivadas

Volviendo a lo que queremos calcular:

$$f'(x) - \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} =$$

$$= f'(x) - \frac{-3f(x) + 3f(x) + 2hf'(x) + \frac{2}{3}h^3(f'''(\xi) - 2f'''(\eta))}{2h} =$$

$$= f'(x) - \frac{\cancel{2h}f'(x) + \frac{\cancel{2}}{3}h^{\cancel{3}2}(f'''(\xi) - 2f'''(\eta))}{\cancel{2h}} =$$

$$= f'(x) - f'(x) + \frac{1}{3}h^2(f'''(\xi) - 2f'''(\eta))$$

Volviendo a lo que queremos calcular:

$$f'(x) - \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} =$$

$$\begin{aligned}
&= f'(x) - \frac{-3f(x) + 3f(x) + 2hf'(x) + \frac{2}{3}h^3(f'''(\xi) - 2f'''(\eta))}{2h} = \\
&= f'(x) - \frac{2hf'(x) + \frac{2}{3}h^3(f'''(\xi) - 2f'''(\eta))}{2h} = \\
&= f'(x) - f'(x) + \tfrac{1}{3}h^2(f'''(\xi) - 2f'''(\eta)) = \\
&= \tfrac{1}{3}h^2(f'''(\xi) - 2f'''(\eta)) = O(h^2)
\end{aligned}$$

Diferencias Finitas - Aproximación de las derivadas

Volviendo a lo que queremos calcular:

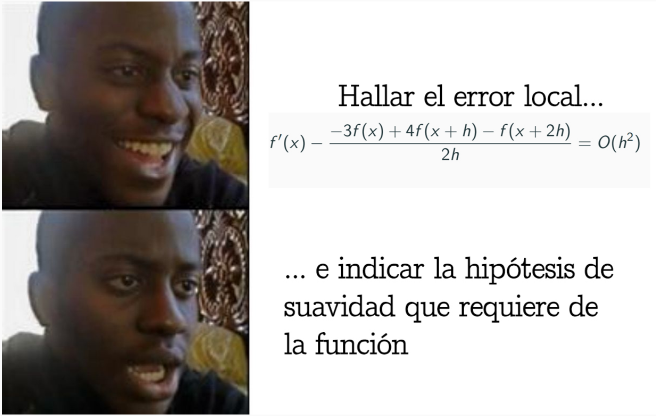
$$f'(x) - \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} =$$

$$\begin{aligned}
&= f'(x) - \frac{-3f(x) + 3f(x) + 2hf'(x) + \frac{2}{3}h^3(f'''(\xi) - 2f'''(\eta))}{2h} = \\
&= f'(x) - \frac{2hf'(x) + \frac{2}{3}h^3(f'''(\xi) - 2f'''(\eta))}{2h} = \\
&= f'(x) - f'(x) + \tfrac{1}{3}h^2(f'''(\xi) - 2f'''(\eta)) = \\
&= \tfrac{1}{3}h^2(f'''(\xi) - 2f'''(\eta)) = O(h^2)
\end{aligned}$$

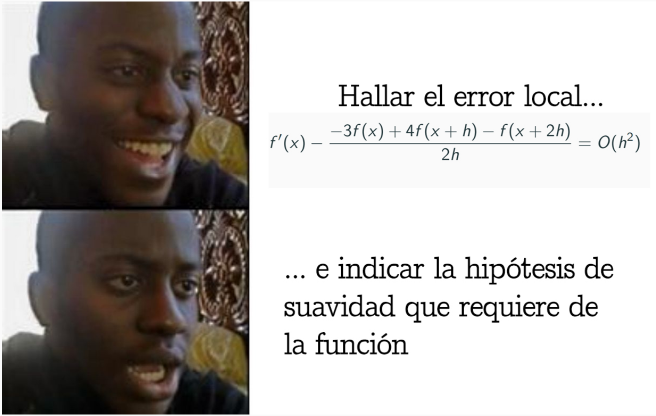
$$\Rightarrow f'(x) - \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} = O(h^2)$$

O, equivalentemente, $\frac{-3f(x)+4f(x+h)-f(x+2h)}{2h} = f'(x) + O(h^2)$

Diferencias Finitas - Aproximación de las derivadas



Diferencias Finitas - Aproximación de las derivadas



Hipótesis de suavidad: para que puedan llevarse a cabo las operaciones que utilizamos para encontrar el error, pedimos que $f \in C^3$

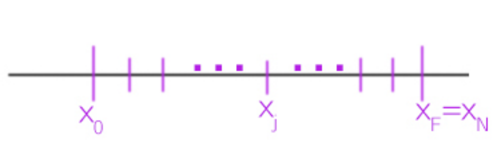
Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Dado el siguiente problema de valores de contorno:

$$\begin{cases} u''(x) = u'(x) + 2u(x) + cos(x) \\ u(x_0) = \alpha \\ u(x_F) = \beta \end{cases}$$

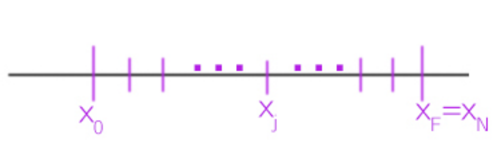
1. Escribir el sistema discretizado que corresponde a utilizar la discretización usual de la derivada segunda y la diferencia forward para la derivada primera.
2. Formular el problema de forma matricial.
3. Calcular el error de truncado local al utilizar la discretización.

Punto 1. Esquema Numérico



$$x_j = jh \qquad x_F = x_N = Nh$$

Punto 1. Esquema Numérico



$$x_j = jh \qquad x_F = x_N = Nh$$

Conocemos $u(x_0) = \alpha$ y $u(x_N) = \beta$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Diferencia forward: $u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$

Discretización habitual de la derivada segunda: $u''(x) \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Diferencia forward: $u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$

Discretización habitual de la derivada segunda: $u''(x) \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$

$$u''(x_j) = u'(x_j) + 2u(x_j) + cos(x_j)$$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Diferencia forward: $u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$

Discretización habitual de la derivada segunda: $u''(x) \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$

$$u''(x_j) = u'(x_j) + 2u(x_j) + cos(x_j)$$

Reescribimos la ecuación para que todos los términos con u queden del mismo lado de la igualdad:

$$u''(x_j) - u'(x_j) - 2u(x_j) = cos(x_j)$$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Diferencia forward: $u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$

Discretización habitual de la derivada segunda: $u''(x) \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$

$$u''(x_j) = u'(x_j) + 2u(x_j) + cos(x_j)$$

Reescribimos la ecuación para que todos los términos con u queden del mismo lado de la igualdad:

$$u''(x_j) - u'(x_j) - 2u(x_j) = cos(x_j)$$

Reemplazamos las derivadas por sus aproximaciones, notación $u_j = u(x_j)$:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} - \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - 2u_j = cos(x_j)$$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Diferencia forward: $u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$

Discretización habitual de la derivada segunda: $u''(x) \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$

$$u''(x_j) = u'(x_j) + 2u(x_j) + cos(x_j)$$

Reescribimos la ecuación para que todos los términos con u queden del mismo lado de la igualdad:

$$u''(x_j) - u'(x_j) - 2u(x_j) = cos(x_j)$$

Reemplazamos las derivadas por sus aproximaciones, notación $u_j = u(x_j)$:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} - \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - 2u_j = cos(x_j)$$

Multiplicamos ambos lados de la igualdad por h^2:

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} - h(u_{j+1} - u_j) - 2h^2 u_j = cos(x_j)h^2$$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Diferencia forward: $u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$

Discretización habitual de la derivada segunda: $u''(x) \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$

$$u''(x_j) = u'(x_j) + 2u(x_j) + cos(x_j)$$

Reescribimos la ecuación para que todos los términos con u queden del mismo lado de la igualdad:

$$u''(x_j) - u'(x_j) - 2u(x_j) = cos(x_j)$$

Reemplazamos las derivadas por sus aproximaciones, notación $u_j = u(x_j)$:

$$\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} - \frac{u_{j+1} - u_j}{h} - 2u_j = cos(x_j)$$

Multiplicamos ambos lados de la igualdad por h^2:

$$u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1} - h(u_{j+1} - u_j) - 2h^2 u_j = cos(x_j)h^2$$

Agrupamos los términos:

$$u_{j-1} + (-2 + h - 2h^2)u_j + (1 - h)u_{j+1} = cos(x_j)h^2$$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Tenemos que:

$$u_{j-1} + (-2 + h - 2h^2)u_j + (1 - h)u_{j+1} = cos(x_j)h^2$$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Tenemos que:

$$u_{j-1} + (-2 + h - 2h^2)u_j + (1 - h)u_{j+1} = cos(x_j)h^2$$

Recordar que los valores de u_0 y u_N vienen dados como datos. Entonces, el sistema queda de la siguiente manera:

$j = 1$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Tenemos que:

$$u_{j-1} + (-2 + h - 2h^2)u_j + (1 - h)u_{j+1} = cos(x_j)h^2$$

Recordar que los valores de u_0 y u_N vienen dados como datos. Entonces, el sistema queda de la siguiente manera:

$$j = 1 \qquad\qquad (-2 + h - 2h^2)u_1 + (1 - h)u_2 = cos(x_1)h^2 - \alpha$$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Tenemos que:

$$u_{j-1} + (-2 + h - 2h^2)u_j + (1 - h)u_{j+1} = cos(x_j)h^2$$

Recordar que los valores de u_0 y u_N vienen dados como datos. Entonces, el sistema queda de la siguiente manera:

$j = 1$ $\qquad$ $(-2 + h - 2h^2)u_1 + (1 - h)u_2 = cos(x_1)h^2 - \alpha$

$j = 2, \ldots, N - 2$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Tenemos que:

$$u_{j-1} + (-2 + h - 2h^2)u_j + (1 - h)u_{j+1} = cos(x_j)h^2$$

Recordar que los valores de u_0 y u_N vienen dados como datos. Entonces, el sistema queda de la siguiente manera:

$$j = 1 \qquad (-2 + h - 2h^2)u_1 + (1 - h)u_2 = cos(x_1)h^2 - \alpha$$

$$j = 2, \dots, N - 2 \qquad u_{j-1} + (-2 + h - 2h^2)u_j + (1 - h)u_{j+1} = cos(x_j)h^2$$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Tenemos que:

$$u_{j-1} + (-2 + h - 2h^2)u_j + (1 - h)u_{j+1} = cos(x_j)h^2$$

Recordar que los valores de u_0 y u_N vienen dados como datos. Entonces, el sistema queda de la siguiente manera:

$j = 1$ $\quad (-2 + h - 2h^2)u_1 + (1 - h)u_2 = cos(x_1)h^2 - \alpha$

$j = 2, \ldots, N - 2$ $\quad u_{j-1} + (-2 + h - 2h^2)u_j + (1 - h)u_{j+1} = cos(x_j)h^2$

$j = N - 1$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Tenemos que:

$$u_{j-1} + (-2 + h - 2h^2)u_j + (1 - h)u_{j+1} = cos(x_j)h^2$$

Recordar que los valores de u_0 y u_N vienen dados como datos. Entonces, el sistema queda de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{ll}
j = 1 & (-2 + h - 2h^2)u_1 + (1 - h)u_2 = cos(x_1)h^2 - \alpha \\[1em]
j = 2, \ldots, N - 2 & u_{j-1} + (-2 + h - 2h^2)u_j + (1 - h)u_{j+1} = cos(x_j)h^2 \\[1em]
j = N - 1 & u_{N-2} + (-2 + h - 2h^2)u_{N-1} = cos(x_{N-1})h^2 - (1 - h)\beta
\end{array}
$$

Observar que tenemos $N - 1$ incógnitas y $N - 1$ ecuaciones.

Así concluimos el punto 1 de la consigna.

Punto 2. Forma matricial

En el Punto 1 obtuvimos un sistema de ecuaciones lineales, lo podemos resolver utilizando representación matricial.

Punto 2. Forma matricial

En el Punto 1 obtuvimos un sistema de ecuaciones lineales, lo podemos resolver utilizando representación matricial.

$$
\begin{array}{ll}
j=1 & (-2+h-2h^2)u_1+(1-h)u_2=cos(x_1)h^2-\alpha \\
j=2,\dots,N-2 & u_{j-1}+(-2+h-2h^2)u_j+(1-h)u_{j+1}=cos(x_j)h^2 \\
j=N-1 & u_{N-2}+(-2+h-2h^2)u_j=cos(x_{N-1})h^2-(1-h)\beta
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
-2+h-2h^2 & 1-h & 0 & \cdots & 0 \\
1 & -2+h-2h^2 & 1-h & 0 & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 1-h \\
0 & \cdots & 0 & 1 & -2+h-2h^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} cos(x_1)h^2-\alpha \\ cos(x_2)h^2 \\ \vdots \\ cos(x_{N-2})h^2 \\ cos(x_{N-1})h^2-(1-h)\beta \end{bmatrix}
$$

$$A_h u_h = b_h \Rightarrow u_h = A_h^{-1} b_h \quad \text{(si } A_h \text{ es inversible)}$$

u_h es la solución numérica de la ecuación.

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Pero, ¿A_h es inversible?

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Pero, ¿A_h es inversible?

Teorema: sea A tal que $|a_{jj}| > \sum_{k \neq j} |a_{jk}| \quad \forall j$, entonces A es inversible.

En nuestro caso, si pedimos que $h \leq 1$, tenemos que:

$$
\begin{array}{ll}
j = 1 & |a_{12}| = |1 - h| = 1 - h < 2 - h < 2 - h + 2h^2 = |-2 + h - 2h^2| = |a_{11}| \\
j = 2, \ldots, N-2 & |a_{j,j-1}| + |a_{j,j+1}| = |1| + |1 - h| = 1 + 1 - h = 2 - h < 2 - h + 2h^2 = |a_{jj}| \\
j = N - 1 & |a_{N-1,N-2}| = |1| = 1 < 1 + (1 - h) = 2 - h < 2 - h + 2h^2 = |a_{N-1,N-1}|
\end{array}
$$

Entonces, si $h \leq 1$, A_h es inversible.

Punto 3. Error de truncado local

Cuando introducimos u la solución exacta en la ecuación para u_j, tenemos que:

$$\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} - \frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h} - 2u(x_j) = cos(x_j) + \tau_j$$

τ_j es el error que proviene de utilizar las aproximaciones de las derivadas.

Punto 3. Error de truncado local

Cuando introducimos u la solución exacta en la ecuación para u_j, tenemos que:

$$\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} - \frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h} - 2u(x_j) = cos(x_j) + \tau_j$$

τ_j es el error que proviene de utilizar las aproximaciones de las derivadas.

Vale lo siguiente (ejercicios 1 y 2 de la Práctica 3):

$$\frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h} = u'(x_j) + O(h)$$

$$\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} = u''(x_j) + O(h^2)$$

Punto 3. Error de truncado local

Cuando introducimos u la solución exacta en la ecuación para u_j, tenemos que:

$$\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} - \frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h} - 2u(x_j) = cos(x_j) + \tau_j$$

τ_j es el error que proviene de utilizar las aproximaciones de las derivadas.

Vale lo siguiente (ejercicios 1 y 2 de la Práctica 3):

$$\frac{u(x_{j+1})-u(x_j)}{h} = u'(x_j) + O(h)$$

$$\frac{u(x_{j+1})-2u(x_j)+u(x_{j-1})}{h^2} = u''(x_j) + O(h^2)$$

Reemplazando en el esquema numérico:

$$u''(x_j) + O(h^2) - u'(x_j) - O(h) - 2u(x_j) = cos(x_j) + \tau_j$$

Diferencias Finitas - Hallando soluciones numéricas

Punto 3. Error de truncado local

Cuando introducimos u la solución exacta en la ecuación para u_j, tenemos que:

$$\frac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} - \frac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h} - 2u(x_j) = cos(x_j) + \tau_j$$

τ_j es el error que proviene de utilizar las aproximaciones de las derivadas.

Vale lo siguiente (ejercicios 1 y 2 de la Práctica 3):

$$\tfrac{u(x_{j+1}) - u(x_j)}{h} = u'(x_j) + O(h)$$

$$\tfrac{u(x_{j+1}) - 2u(x_j) + u(x_{j-1})}{h^2} = u''(x_j) + O(h^2)$$

Reemplazando en el esquema numérico:

$$u''(x_j) + O(h^2) - u'(x_j) - O(h) - 2u(x_j) = cos(x_j) + \tau_j$$

$$\Rightarrow \tau_j = -O(h) + O(h^2) = O(h)$$