Cálculo Numérico - Elementos de Cálculo Numérico

Gauss - LU - Cholesky

Mercedes Pérez Millán

Dto. de Matemática–FCEyN–Universidad de Buenos Aires
IMAS-CONICET

14 de mayo de 2020

Triangulemos la siguiente matriz (sin pivotear):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Haciendo eliminación Gaussiana (sin pivoteo):

$$A \xrightarrow[F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} F_1 \to F_2]{} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 - \frac{a_{32}}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}} F_2 \to F_3]{} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} - \dfrac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \dfrac{a_{23}a_{32}}{a_{22} - \dfrac{a_{21}}{a_{11}}} \end{pmatrix}$$

Busquemos ahora la descomposición LU:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} F_1 \to F_2]{} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 - \frac{a_{32}}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}} F_2 \to F_3]{} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \frac{a_{23} a_{32}}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}} \end{pmatrix}}_{U}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{32}}{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_2 L_1 A = U \quad \Rightarrow A = \underbrace{(L_2 L_1)^{-1}}_{L} U$$

Observación:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \underset{F_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} F_1 \to F_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \dots$$

Miremos los elementos de la diagonal:

$$a_{11}, \quad a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}{a_{11}}, \quad \dots$$

Para que haya descomposición LU necesitamos que los primeros menores principales sean no nulos.

Pongamos flotantes:

Resolver el siguiente sistema lineal con aritmética de punto flotante de 2 dígitos y redondeo con eliminación gaussiana sin pivoteo:

$$\begin{aligned} 0,001\ x + 2\ y &= 2, \\ 3\ x + 4\ y &= 7. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,001 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

Primero notemos que:

- fl(F1)=F1, fl(F2)=F2;
- queremos hacer $F_2 - \frac{3}{0{,}001} F_1$, donde $\frac{3}{0{,}001} = 3000$ y fl(3000)=3000;
- y además

$$\mathrm{fl}\left(\tfrac{3}{0{,}001} F_1\right) = (\mathrm{fl}(3000 \times 0,001)\ \mathrm{fl}(3000 \times 2) \mid \mathrm{fl}(3000 \times 2))$$

$$\mathrm{fl}\left(\tfrac{3}{0{,}001} F_1\right) = (\mathrm{fl}(3)\ \mathrm{fl}(6000) \mid \mathrm{fl}(6000)) = (3\ 6000 \mid 6000)$$

La cuenta que debemos hacer, entonces, es:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0,001 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[fl(F_2 - \frac{3}{0,001}F_1) \to F_2]{} \left(\begin{array}{cc|c} 0,001 & 2 & 2 \\ 0 & -6000 & -6000 \end{array}\right)$$

porque:

- fl($F_2 - 3000F_1$)=fl(F2-(3 6000 | 6000));
- fl(4-6000)=fl(-5996)=-6000, fl(7-6000)=fl(-5993)=-6000.

Luego, la solución numérica $(\tilde{x}, \tilde{y})$ es:

$$\tilde{y} = fl\left(\frac{-6000}{-6000}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = fl\left(\frac{2-2}{0,001}\right) = 0.$$

Podría aumentar el error

Pero la verdadera solución es $y = \frac{5993}{5996}$, $x = \frac{6000}{5996}$.

Tarea: calcular el error relativo.

Un ejemplo de descomposición de Cholesky con números:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}$$

- Simétrica: OK.
- Definida positiva:

$$\boxed{A \text{ es def. pos.} \Leftrightarrow \text{todos sus menores principales son positivos.}}$$

$4 > 0$ ✓, $4.\,37 - 12^2 = 4 > 0$ ✓, $\det(A) = 36 > 0$ ✓: OK

Busquemos la descomposición:

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\ell_{11} \quad 0 \quad 0} \\ \ell_{21} \quad \ell_{22} \quad 0 \\ \ell_{31} \quad \ell_{32} \quad \ell_{33} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} \ell_{11} & \ell_{21} & \ell_{31} \\ 0 & \ell_{22} & \ell_{32} \\ 0 & 0 & \ell_{33} \end{pmatrix}}_{L^t}$$

Entonces:

- $\ell_{11}^2 = 4 \Rightarrow \ell_{11} = 2$ (se pide que los elementos de la diagonal de L sean positivos).
- $\ell_{11}\ell_{21} = 12 \Rightarrow \ell_{21} = 6$.
- $\ell_{11}\ell_{31} = -16 \Rightarrow \ell_{31} = -8$.

Sigamos:

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \boxed{6 \quad \ell_{22} \quad 0} \\ \boxed{-8 \quad \ell_{32} \quad \ell_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} 6 \\ \ell_{22} \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} -8 \\ \ell_{32} \\ \ell_{33} \end{matrix}} \\ 0 & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Entonces:

- $36 + \ell_{22}^2 = 37 \;\Rightarrow \ell_{22} = 1.$
- $-48 + \ell_{22}\ell_{32} = -43 \;\Rightarrow \ell_{32} = 5.$
- $64 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = 98 \;\Rightarrow \ell_{33} = 3.$

Luego:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$