Ortogonalización

Juan Pablo Pinasco (jpinasco@dm.uba.ar//gmail.com)

Departamento de Matemática e IMAS,
FCEyN, UBA - CONICET

2020

Hoy:

- Ortogonalización 113-120

Próxima:

- Cuadrados minimos: 120-129

Parte I

Aproximación

1.- El problema

Muchas veces queremos reemplazar una función por otra más simple (polinomios, exponenciales, senos y cosenos). O, dada una tabla de datos, queremos una función sencilla que los describa, minimizando el error que se comete al elegir la función. En general, queremos resolver problemas de la forma:

(a) Dadas constantes positivas $w_0, \cdots, w_n$ (pesos), y n valores (x_i, y_i), queremos hallar un polinomio de grado menor o igual a m, para algún $m < n$, que minimice

$$\sum_{i=0}^{n} (p(x_i) - y_i)^2$$

(b) Dada una función w positiva en $[a, b]$, y una función f, queremos hallar un polinomio de grado menor o igual a m que minimice

$$\int_a^b [p(x) - f(x)]^2 w(x) dx$$

Obs: en algunos casos, en lugar de un polinomio, buscamos $p \in S_m$, donde S_m es un subespacio de funciones de dimensión m. Por ejemplo, combinaciones de senos y cosenos; o de exponenciales.

Teorema (Weierstrass)

Sea $f \in C[a,b]$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p tal que

$$\|p - f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

No se preocupen por la demostración del apunte. Esto garantiza que va a existir p, y dice cómo hallarlo, si bien no es el método más rápido computacionalmente.

Def: Sea V un $\mathbb{R}$-e.v.; un producto interno (o escalar) en V es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

y satisface:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
2. $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$,
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
4. $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$.

1. $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, el usual.
2. $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i$, con $w_i > 0$ para todo $i = 1 : n$.
3. $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)d(x)w(x)dx$, $V = C[a, b]$, $w > 0$, y w continua.

Linealidad es fácil, hay que probar en el último que $\int_a^b w(x)f^2(x)dx \neq 0$ si $f \neq 0$.

Sale porque si f no es cero, hay un x_0 tal que $f(x_0) \neq 0$, y por la continuidad, hay un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ donde $f > f(x_0)/2$ (por la continuidad, tomo $\varepsilon = f(x_0)/2$, existe un δ, tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta$, etcétera).

Obs: dado V y un producto interno, tenemos una norma

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$$

Para demostrar que lo es, necesitamos ver que cumple la desigualdad triangular, que es una consecuencia de Cauchy-Schwarz.

Prop: $\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|$

Dem: Como
$$0 < \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle,$$
tenemos
$$\langle x, y\rangle \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$$

$$\langle x, y\rangle = \langle a\cdot x, \frac{1}{a}\cdot y\rangle \leq \frac{a^2}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2a^2}\|y\|^2$$

Sea $a = \sqrt{\|y\|/\|x\|}$. Reemplazando,
$$\langle x, y\rangle \leq \frac{\|y\|}{2\|x\|}\|x\|^2 + \frac{\|x\|}{2\|y\|}\|y\|^2 = \|x\|\|y\|$$

La desigualdad triangular sale ahora directamente (ver apunte).

Otra ventaja de C-S es que nos permite definir ángulos, pues

$$\frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1 \qquad x, y \in V,$$

y decimos que el ángulo entre x e y es el valor de φ tal que

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Def: decimos que x, y son ortogonales/perpendiculares si $\langle x, y\rangle = 0$; y lo notamos $x \perp y$.

Def: decimos que dos conjuntos A, B son ortogonales/perpendiculares si $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $x \in A$, $y \in B$; y lo notamos $A \perp B$.

Teorema

Sea S un subespacio de un espacio V con producto interno, $x \in V$, $y \in S$. Son equivalentes:

1. $\|x-y\| = \min_{s\in S}\{\|x-s\|\}$
2. $\langle x-y, s\rangle = 0$ *para todo* $s \in S$.

Dem: Veamos que si y minimiza la distancia de x a S, entonces $x - y \perp S$.

Como S es un subespacio, $y + s \in S$ para todo $s \in S$. Entonces,

$$\|x-y\|^2 \leq \|x-(y+s)\|^2 = \|(x-y)-s\|^2 = \|x-y\|^2 - 2\langle x-y, s\rangle + \|s\|^2$$

Esto es equivalente a

$$2\langle x-y, s\rangle \leq \|s\|^2,$$

Tomamos $t\cdot s$, y reemplazando queda

$$2t\langle x-y, s\rangle \leq t^2\|s\|^2,$$

$$2\langle x-y, s\rangle \leq t\|s\|^2 \to 0 \qquad t \to 0.$$

7.- Teoremita clave

Teorema

Sea S un subespacio de un espacio V con producto interno, $x \in V$, $y \in S$. Son equivalentes:

1. $\|x - y\| = \min_{s \in S}\{\|x - s\|\}$
2. $\langle x - y, s\rangle = 0$ *para todo* $s \in S$.

Dem: Veamos que si $x - y \perp S$, entonces y minimiza la distancia a S.

Como $x - y \perp y - s$ para todo $s \in S$, tenemos

$$\begin{aligned}\|x - s\|^2 =& \|(x - y) + (y - s)\|^2 \\ =& \|x - y\|^2 + \|y - s\|^2 \\ \geq& \|x - y\|^2.\end{aligned}$$

Tomando raíz cuadrada se ve que y minimiza la distancia a S.

Teorema

Sea S un subespacio de un espacio V con producto interno, $x \in V$, $y \in S$. Son equivalentes:

1. $\|x - y\| = \min_{s \in S}\{\|x - s\|\}$
2. $\langle x - y, s\rangle = 0$ *para todo* $s \in S$.

Supongamos que hubiera otro $z \in S$ que cumpla. Tenemos para todo $s \in S$,

$$\langle x - y, s\rangle = 0$$

$$\langle x - z, s\rangle = 0$$

y por linealidad del producto interno,

$$\langle y - z, s\rangle = 0$$

para todo $s \in S$, pero $y - z$ es un elemento de S con lo cual $\|y - z\| = 0$.

Obs: El teorema dice que si hay un minimizante, es ortogonal. Y si $x - y$ es ortogonal a S, es el minimizante.

Nos faltaría un teorema que diga que el minimizante siempre existe... pero no es cierto. Vale si el subespacio S es de dimensión finita, y en ese caso, y se dice la proyección ortogonal de x sobre S.

Teorema

Sea S un subespacio de dimensión finita de un espacio V con producto interno, y $x \in V$. Entonces existe un único $y \in S$ que satisface $\langle x - y, s\rangle = 0$ para todo $s \in S$.

Sea $\{v_1, \ldots, v_m\}$ una base ortonormal de S. Definamos el elemento

$$y = \sum_{i=1}^{m} \langle x, v_i \rangle v_i$$

Tenemos que $y \in S$, porque es combinación lineal de elementos de S.

Veamos que $x - y \perp S$. Alcanza con probarlo para cada elemento de la base.

$$\begin{aligned} \langle x - y, v_j \rangle =& \langle x, v_j \rangle - \langle \sum_{i=1}^{m} \langle x, v_i \rangle v_i, v_j \rangle \\ =& \langle x, v_j \rangle - \sum_{i=1}^{m} \langle x, v_i \rangle \langle v_i, v_j \rangle \\ =& \langle x, v_j \rangle - \langle x, v_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

pues $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, y $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ por ser una base ortonormal. $\square$

Podemos definir $P : V \to S$, donde Px es el único elemento de S que cumple

$$\langle x - Px, s \rangle = 0 \qquad \forall s \in S,$$

y Px se llama la proyección ortogonal de x en S.