GIANPIER YUPANQUI L.U: 819\18

Segunda entrega de Cálculo Avanzado

- EJERCICIO 2

($\Rightarrow$) f es UNIF. CONT., entonces Dado $\varepsilon>0$, $\exists \delta /$

$d(x,y)<\delta \Rightarrow d(f(x),f(y))<\varepsilon$ ... (I)

Sean $\{x_n\}_n$ y $\{z_n\}_n$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,z_n)=0$

Tomo $\varepsilon=\delta>0$, $\exists n_0 /$ $d(x_n,z_n)<\varepsilon=\delta$, si $n\geq n_0$

por (I) $d(x_n,z_n)<\delta \Rightarrow \underbrace{d(f(x_n),f(z_n))<\varepsilon, \text{ si } n\geq n_0,}$

Para un ε dado

$$d(f(x_n),f(z_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

($\Leftarrow$)

Probaremos por contradicción: Asumo que f NO es UNIF. CONT.

$\exists \varepsilon_0>0$, $\forall \delta>0$ / $\exists x,y$ tales que $d(x,y)<\delta \wedge d(f(x),f(y))\geq\varepsilon_0$

Tomo $\delta=1/n \rightarrow \exists x,y$ tales que $d(x,y)<1/n \wedge$ (")

Defino dos suceciones con estos puntos, por cada n.

Luego obtengo $\{x_n\}_n$ y $\{y_n\}_n$ tal que

$d(x_n,y_n)<1/n \wedge d(f(x_n),f(y_n))\geq\varepsilon_0$ ... (II)

Pero como $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=0 \Rightarrow \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} d(f(x_n),f(y_n))=0}$

Tomo $\varepsilon=\varepsilon_0>0$, $\exists n_0 /$ $d(f(x_n),f(y_n))<\varepsilon=\varepsilon_0$, si $n\geq n_0$

tomando $n=n_0$ $d(f(x_{n_0}),f(y_{n_0}))<\varepsilon_0$ pero por (II) ABSURDO

$\therefore$ f es UNIF. CONT.

- EJERCICIO 1

a) ($\supseteq$) Si $x\in\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}}\overline{A} \Rightarrow \exists A_j / x\in\overline{A_j}$

$\Rightarrow \forall r>0$, $B(x,r)\cap A_j\neq\emptyset$, como $A_j\subset\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A$

$\forall r>0$, $\underbrace{B(x,r)\cap A_j}_{\neq\emptyset} \longrightarrow \subset \underbrace{B(x,r)\cap\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A}_{\neq\emptyset}$

$\therefore x\in\overline{\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A}$

($\subseteq$)

Si $x\in\overline{\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A} \Rightarrow \forall r>0$, $B(x,r)\cap\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A\neq\emptyset$ ... (I)

Como $x \in X \Rightarrow \exists\, U$ abierto, $x \in U$ / U se interseca con finitos elementos de $\mathcal{A}$

- $\exists r_2 / B(x, r_2) \subset U$
- $\left.\begin{array}{l} U \cap A_1 \neq \phi \\ \vdots \\ U \cap A_k \neq \phi \end{array}\right\}$ FINITOS, Osea $U \cap A_\ell = \phi$ para $A_\ell \in \mathcal{A} \wedge \ell \notin [1, k]$

Como $B(x, r_2) \cap A_\ell \subset U \cap U_\ell = \phi \Rightarrow B(x, r_2) \cap A_\ell = \phi$

$\therefore \nexists y / y \in B(x, r_2) \wedge y \in A_\ell$

$\nexists y / d(x, y) < r_2 \wedge y \in A_\ell$

$d(x, A_\ell) = \inf\{d(x, z) : z \in A_\ell\}$

$\therefore \quad d(x, A_\ell) \geq r_2$, para $A_\ell \in \mathcal{A} \wedge \ell \notin [1, k]$

Sea $d = \text{MIN}\{r_2, d(x, A_1), d(x, A_2), \dots, d(x, A_k)\}$

Existe el MIN porque son FINITOS elementos

- Si $d > 0$

Tomo $\varepsilon = d/2$ .. en (I)

$B(x, d/2) \cap \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \neq \phi$

Osea:

$\exists y / y \in B(x, d/2) \wedge y \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$

$d(x, y) < d/2 \wedge y \in A_j$

$0 < d \leq d(x, A_j) = \inf\{d(z, x) : z \in A_j\} \leq d(y, x) < d/2$

ABSURDO

$\therefore \quad d = 0 \rightarrow \exists A_i / d(x, A_i) = 0$

equivale a $x \in \overline{A_i} \Rightarrow x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$ $\square$

- b)

~~[illegible]~~

Sea $L \in X$ uno arbitrario

$\exists U$ abierto, $x \in U$ / U se interseca con finitos elementos de $\mathcal{A}$

- $\exists r_2 / B(L, r_2) \subset U$
- (*) $\boxed{\begin{array}{l} U \cap A_1 \neq \phi \\ \vdots \\ U \cap A_k \neq \phi \end{array}}\Bigg\}$ FINITOS, Osea $U \cap A_\ell = \phi$ para $A_\ell \in \mathcal{A} \wedge \ell \notin [1, k]$

Usando el criterio anterior llegamos a que
Si $\underline{d>0}$

entonces $B(L,d/2) \cap \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \phi$, Porque? Si $y \in B(L,d/2) \wedge y \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$

$d(L,y) < d/2 \wedge y \in A_i$

$d(L,A_i) = \inf\{d(L,z) : z\in A_i\} \leq d(L,y) < d/2 \wedge d \leq d(L,A_i)$

Entonces $d < d/2$ ABSURDO

$\therefore \boxed{d=0} \Rightarrow \exists A_i / d(L,A_i) = 0$

$L \in \overline{A_i} = A_i$

↳ por q' son cerrados

- Puede suceder que $L \in A_i$ para algunos $i \in [1,k]$, Tomemos estos que son finitos, digamos A_1 hasta el A_ℓ / $\ell \leq k$

▶ Sean los $A_i / 0 < d(L,A_i)$, $\ell+1 \leq i \leq k$

Sea $T = \text{MIN}\{d(L,A_i)\}$, existe el MIN porque son finitos

PROP ≫ $B(L,T/2) \cap A_i = \phi$, $\ell+1 \leq i \leq k$ / Si $y \in B(L,T/2) \wedge y \in A_i$

$d(L,y) < T/2 \wedge y \in A_i$

$0 < T \leq d(L,A_i) = \inf\{d(L,z) : z \in A_i\} \leq d(L,y) < T/2$ ABSURDO

Dado $\varepsilon > 0$

⊙ $L \in A_i \Rightarrow L$ es continua en $f|_{A_i} \Rightarrow \exists \delta_i / f|_{A_i}(B(L,\delta_i)) \subset B(f|_{A_i}(L),\varepsilon)$

para cada $i \in [1,\ell]$

⊙. tomo $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_\ell, T/2, r_2\}$

(*) Como $A_i \cap U = \phi$, $i \notin [1,k]$

(1) $B(L,r_2) \cap A_i \subset U \cap A_i = \phi$, $i \notin [1,k]$

$B(L,\delta)_{\cap A_i} \subseteq B(L,r_2) \cap A_i = \phi$, $i \notin [1,k]$

(2) $B(L,\delta) \subset B(L,T/2)$

$B(L,\delta) \cap A_i \subset B(L,T/2) \cap A_i = \phi$, $i \in [\ell+1,k]$

JUNTANDO (1) y (2)

$\boxed{B(L,\delta) \cap A_i = \phi, \quad i \notin [1,\ell]}$

~~$B(L,\delta) \cap \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = B(L,\delta) \cap \bigcup A_i$, $i \in [1,\ell]$~~

⊙ Si $L \in A_i \Rightarrow f|_{A_i}(B(L,\delta)) \subset f|_{A_i}(B(L,\delta_i)) \subset B(f|_{A_i}(L),\varepsilon)$

Como $B(L,\delta) \cap A_i \subset A_i$

Si $L \in A_i \Rightarrow f|_{A_i}(B(L,\delta) \cap A_i) \subset B(f|_{A_i}(L),\varepsilon)$, $i \in [1,\ell]$

Si $L \in A_i \Rightarrow f(B(L,\delta) \cap A_i) \subset B(f(L),\varepsilon)$, $i \in [1,\ell]$

Como

$$\boxed{B(L,\delta)\cap A_i=\emptyset \ , \ i\notin[1,l]}$$

Como $B(L,\delta)\subset X=\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$

$\cancel{B(L,\delta)\cap \bigcup A_i \subset \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\cap \bigcup A_i \ , i\notin[1,l]}$

$B(L,\delta)\subset \bigcup A_i \cup \bigcup A_j \ , \quad i\in[1,l] \wedge j\notin[1,l]$

$\hookrightarrow$ son disjuntos

$$\boxed{B(L,\delta)\subset \bigcup A_i \ , \ i\in[1,l]}$$

q.v.q Dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0 \,/\, f(B(L,\delta))\subset B(f(L),\varepsilon)$

Si $x\in B(L,\delta)\Rightarrow x\in \bigcup A_i \ , \ i\in[1,l]$

$\Rightarrow x\in A_i$, para algun i en $[1,l]$

$x\in B(L,\delta)\cap A_i$

$f(x)\in \underbrace{f(B(L,\delta)\cap A_i)}_{(\subset)}$, como $x\in A_i$ con $i\in[1,l]$ por lo anterior

$f(x)\in B(f(L),\varepsilon)$

Tenemos entonces q'

$x\in B(L,\delta)\Rightarrow f(x)\in B(f(L),\varepsilon)$

$\therefore\ f(B(L,\delta))\subset B(f(L),\varepsilon)$

por lo que f es continua en L y se tomo L arbitrario de X $\square$