Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2020
Entrega n°7

1. Sean, para $k \in \mathbb{R}$, las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ N_1 = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se quiere resolver la ecuación lineal $Ax = b$. Para eso, para cada $i \in \{1, 2\}$, se descompone la matriz $A = M_i + N_i$ y se proponen los métodos

$$x_{n+1} = -M_i^{-1} N_i x_n + M_i^{-1} b.$$

a) Hallar todos los valores de k para los que cada uno de los métodos converge para todo valor inicial. Para esos valores, ¿cuál resulta más conveniente?

b) ¿Para qué valores de k se puede asegurar que existe una norma $\| \cdot \|$ tal que el error del método 1 satisface que

$$\|e_n\| \leq (1/2)^n \|e_0\|$$

para todo valor inicial?

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2020
Entrega n°7 - Resolución del ejercicio

1a) Recordemos que un método iterativo converge para todo valor inicial si y solo si el radio espectral de la matriz del método es menor a 1. Para hallar los autovalores de cada matriz $-M_i^{-1}N_i$, $i = 1, 2$, consideremos la siguiente propiedad, que facilita mucho las cuentas:

$$\det(\lambda I_3 + M_i^{-1}N_i) = \det(M_i^{-1}(\lambda M_i + N_i)) = \underbrace{\det(M_i^{-1})}_{\neq 0} \det(\lambda M_i + N_i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \det(\lambda M_i + N_i) = 0.$$

Llamemos $B_1 = -M_1^{-1}N_1$ y $B_2 = -M_2^{-1}N_2$. Luego, desarrollando por la segunda fila en cada caso:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ k & \lambda & 3\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2 - k^2) \Rightarrow \rho(B_1) = \text{máx}\{0, |k|, |-k|\} = |k|.$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \lambda k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \\ k & \lambda & 3\lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2 - \lambda k^2) = \lambda^2(\lambda - k^2) \Rightarrow \rho(B_2) = \text{máx}\{0, k^2\} = k^2.$$

Luego, $\rho(B_2) = \rho(B_1)^2$ y por lo tanto un método converge si y solo si el otro converge y, cuando ambos convergen, es preferible el segundo método por tener un radio espectral más chico (se espera que converja más rápido).

1b) Como $\|e_n\| \leq \|B_1\|^n \|e_0\|$, alcanza con pedir $|k| < 1/2$. Si $\rho(B_1) < 1/2$, como

$$\rho(B_1) = \inf_{\|\cdot\|}\{\|B_1\|\},$$

va a existir una norma $\|.\|$ tal que $\|B_1\| < 1/2$ y por lo tanto va a valer la desigualdad pedida, para todo dato inicial.