Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2020
Entrega n°3

1. Considerar el problema:

$$\begin{cases} y'(t) = \mathrm{sen}(y(t)) + t^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

a) Escribir la iteración del método de Euler con paso h correspondiente a este problema y estimar el error de truncado local para $t \in [0, 1]$.

b) Hallar un valor del paso h para que el error cometido al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-3}.

Elementos de Cálculo Numérico - Cálculo Numérico
Primer Cuatrimestre de 2020
Entrega n°3 - Resolución del ejercicio

1*a*) La iteración del método de Euler con paso h es:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(\operatorname{sen}(y_i) + t_i^2), \text{ para } 0 \leq i \leq N-1, \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

Recordemos que el error de truncado local para el método de Euler para t en $[0,1]$ es $\tau = \frac{h}{2}y''(\xi)$, para $\xi \in [0,1]$. Como $y''(t) = \frac{d}{dt}f(t,y(t)) = \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}(y(t)) + t^2) = \cos(y(t))(\operatorname{sen}(y(t)) + t^2) + 2t$, tenemos:

$$\tau = \frac{h}{2}y''(\xi) = \frac{h}{2}[\cos(y(\xi))(\operatorname{sen}(y(\xi)) + \xi^2) + 2\xi].$$

Para acotar esta expresión (en módulo) alcanza con considerar que $|\cos(z)| \leq 1$, $|\operatorname{sen}(z)| \leq 1$ para cualquier argumento z y que estamos trabajando con $t \in [0,1]$ y por lo tanto $|t| \leq 1$. Luego:

$$|\tau| \leq \frac{h}{2}(1(1+1)+2) = \frac{4h}{2} = 2h.$$

De esta forma, el valor máximo que puede tomar $|\tau|$, τ_{MAX}, se puede acotar por $\tau_{MAX} \leq 2h$.

1*b*) Para encontrar un valor del paso h para que el error cometido al aproximar $y(1)$ sea menor que 10^{-3}, debemos trabajar con el error *global* del método. Esto es, $|e_N| = |y(t_f) - y_N|$, donde t_f es el tiempo final y $N = (t_f - t_0)/h$ para t_0 el tiempo inicial. Sabemos que

$$|e_N| \leq \frac{\tau_{MAX}}{K}(e^{K(t_f - t_0)} - 1),$$

donde, para el método de Euler, K es tal que es independiente de t y de h y vale que $|f(t,y) - f(t,z)| \leq K|y-z|$.

En este caso, gracias al Teorema del Valor Medio:

$$|f(t,y) - f(t,z)| = |\operatorname{sen}(y) + t^2 - (\operatorname{sen}(z) + t^2)| = |\operatorname{sen}(y) - \operatorname{sen}(z)| = |\cos(\xi)||y-z| \leq 1|y-z|,$$

para algún ξ entre z e y. Luego, en este caso podemos tomar $K = 1$ y acotamos

$$|e_N| \leq \frac{\tau_{MAX}}{K}(e^{K(1-0)} - 1) \leq \frac{2h}{1}(e^1 - 1) = 2h(e-1).$$

Ahora busquemos un valor de h para que este error sea menor que 10^{-3}:

$$2h(e-1) < 10^{-3} \Leftrightarrow h < \frac{1}{2000(e-1)} \sim 0{,}00029.$$

Por lo tanto, cualquier $h < 0{,}00029$ sirve para tal propósito.