# Espacios métricos

## Definición

Un *espacio métrico* consiste en un conjunto $X$ y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las siguientes propiedades:

- *Separación de puntos.* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Simetría.* $d(x, y) = d(y, x)$
- *Desigualdad triangular.* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

# Espacios métricos

## Definición

Un *espacio métrico* consiste en un conjunto $X$ y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las siguientes propiedades:

- *Separación de puntos.* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Simetría.* $d(x, y) = d(y, x)$
- *Desigualdad triangular.* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

## Ejemplos

- $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_2)$,

$$d_2(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

- $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_1)$,

$$d_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$,

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

# Espacios métricos

## Definición

Un *espacio métrico* consiste en un conjunto $X$ y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las siguientes propiedades:

- *Separación de puntos.* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Simetría.* $d(x,y) = d(y,x)$
- *Desigualdad triangular.* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

## Ejemplos

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_2)$,

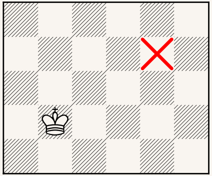
$$d_2(x,y) = \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_1)$,

$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$,

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$



## Definición

Un *espacio métrico* consiste en un conjunto $X$ y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las siguientes propiedades:

- *Separación de puntos.* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Simetría.* $d(x,y) = d(y,x)$
- *Desigualdad triangular.* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

## Ejemplos

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_2)$,

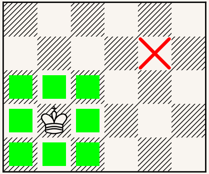
$$d_2(x,y) = \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_1)$,

$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$,

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$



# Espacios métricos

## Definición

Un *espacio métrico* consiste en un conjunto $X$ y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las siguientes propiedades:

- *Separación de puntos.* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Simetría.* $d(x, y) = d(y, x)$
- *Desigualdad triangular.* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

## Ejemplos

- $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_2)$,

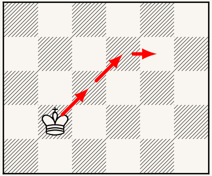
$$d_2(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

- $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_1)$,

$$d_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- $(X, d) = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$,

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$



# Espacios métricos

## Definición

Un *espacio métrico* consiste en un conjunto $X$ y una función $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las siguientes propiedades:

- *Separación de puntos.* $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- *Simetría.* $d(x,y) = d(y,x)$
- *Desigualdad triangular.* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

## Ejemplos

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_2)$,

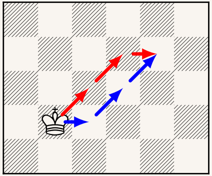
$$d_2(x,y) = \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_1)$,

$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$,

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$



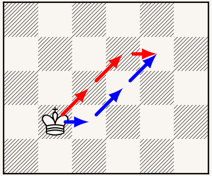
# Espacios métricos

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_1)$,

$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$,

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$$



## Ejercicio

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. A partir de la distancia $d$ definimos una nueva función $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ como

$$d_1(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}.$$

Probar que $(X, d_1)$ es un espacio métrico.

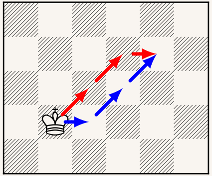
# Espacios métricos

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_1)$,

$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$,

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$$

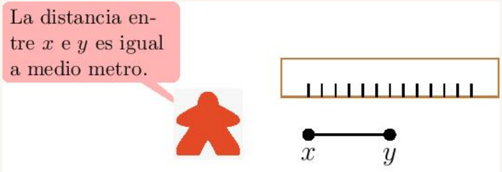


## Ejercicio

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. A partir de la distancia $d$ definimos una nueva función $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ como

$$d_1(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}.$$

Probar que $(X, d_1)$ es un espacio métrico.

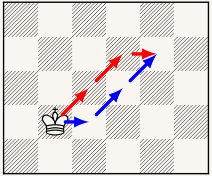


- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_1)$,

$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- $(X,d) = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$,

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

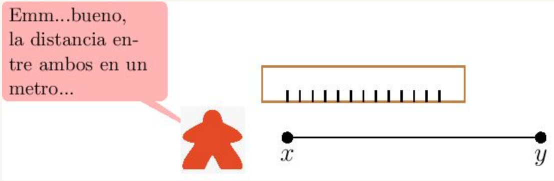


## Ejercicio

Sea $(X,d)$ un espacio métrico. A partir de la distancia $d$ definimos una nueva función $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ como

$$d_1(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}.$$

Probar que $(X, d_1)$ es un espacio métrico.

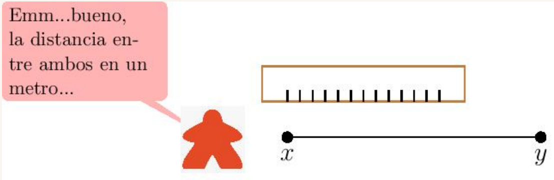


## Ejercicio

Sea $(X, d)$ un espacio métrico. A partir de la distancia $d$ definimos una nueva función $\overline{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ como

$$\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Probar que $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico.



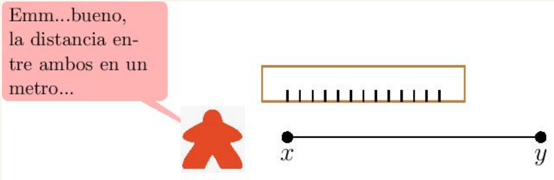

*Solución.* Para ver que $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico debemos verificar la distancia separa puntos, es simétrica y satisface la desigualdad triangular.

## Ejercicio

Sea $(X, d)$ un espacio métrico. A partir de la distancia $d$ definimos una nueva función $\overline{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ como

$$\overline{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}.$$

Probar que $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico.




*Solución.* Para ver que $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico debemos verificar la distancia separa puntos, es simétrica y satisface la desigualdad triangular.

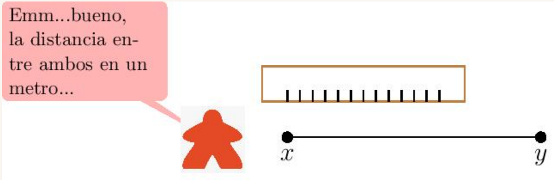
(SP) Si $\overline{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\} = 0$ entonces necesariamente $d(x, y) = 0$. Como $d$ separa punto esto ocurre únicamente cuando $x = y$.

## Ejercicio

Sea $(X, d)$ un espacio métrico. A partir de la distancia $d$ definimos una nueva función $\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ como

$$\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Probar que $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico.




*Solución.* Para ver que $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico debemos verificar la distancia separa puntos, es simétrica y satisface la desigualdad triangular.

(SP) Si $\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\} = 0$ entonces necesariamente $d(x, y) = 0$. Como $d$ separa punto esto ocurre únicamente cuando $x = y$.

(S) Usando la simetría de $d$ tenemos que

$$\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\} = \min\{d(y, x), 1\} = \overline{d}(y, x).$$

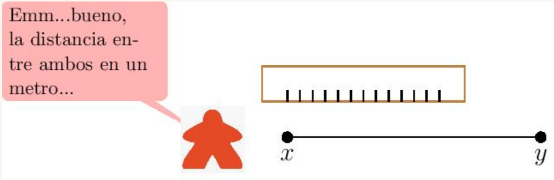
# Espacios métricos

## Ejercicio

Sea $(X, d)$ un espacio métrico. A partir de la distancia $d$ definimos una nueva función $\overline{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ como

$$\overline{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\}.$$

Probar que $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico.




*Solución.* Para ver que $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico debemos verificar la distancia separa puntos, es simétrica y satisface la desigualdad triangular.

(SP) Si $\overline{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\} = 0$ entonces necesariamente $d(x, y) = 0$. Como $d$ separa punto esto ocurre únicamente cuando $x = y$.

(S) Usando la simetría de $d$ tenemos que

$$\overline{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\} = \text{mín}\{d(y, x), 1\} = \overline{d}(y, x).$$

(DT) Sean $x, y, z \in X$. Observemos que si $d(x, z) \geq 1$

entonces

$$\overline{d}(x, y) \leq 1 = \overline{d}(x, z) \leq \overline{d}(x, z) + \overline{d}(z, y)$$

Un razonamiento análogo resuelve el caso $d(z, y) \geq 1$. Por el contrario supongamos que tanto $d(x, z)$ como $d(z, y)$ son menores o iguales que uno.

*Solución.* Para ver que $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico debemos verificar la distancia separa puntos, es simétrica y satisface la desigualdad triangular.

(SP) Si $\overline{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\} = 0$ entonces necesariamente $d(x, y) = 0$. Como $d$ separa punto esto ocurre únicamente cuando $x = y$.

(S) Usando la simetría de $d$ tenemos que

$$\overline{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\} = \text{mín}\{d(y, x), 1\} = \overline{d}(y, x).$$

(DT) Sean $x, y, z \in X$. Observemos que si $d(x, z) \geq 1$

entonces

$$\overline{d}(x, y) \leq 1 = \overline{d}(x, z) \leq \overline{d}(x, z) + \overline{d}(z, y)$$

Un razonamiento análogo resuelve el caso $d(z, y) \geq 1$. Por el contrario supongamos que tanto $d(x, z)$ como $d(z, y)$ son menores o iguales que uno.

De esta manera

$$\overline{d}(x, y) \leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = \overline{d}(x, z) + \overline{d}(z, y).$$

*Solución.* Para ver que $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico debemos verificar la distancia separa puntos, es simétrica y satisface la desigualdad triangular.

(SP) Si $\overline{d}(x,y) = \min\{d(x,y),1\} = 0$ entonces necesariamente $d(x,y) = 0$. Como $d$ separa punto esto ocurre únicamente cuando $x = y$.

(S) Usando la simetría de $d$ tenemos que

$$\overline{d}(x,y) = \min\{d(x,y),1\} = \min\{d(y,x),1\} = \overline{d}(y,x).$$

(DT) Sean $x, y, z \in X$. Observemos que si $d(x,z) \geq 1$

entonces

$$\overline{d}(x,y) \leq 1 = \overline{d}(x,z) \leq \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y)$$

Un razonamiento análogo resuelve el caso $d(z,y) \geq 1$. Por el contrario supongamos que tanto $d(x,z)$ como $d(z,y)$ son menores o iguales que uno.

De esta manera

$$\overline{d}(x,y) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y).$$

**Ejercicio**

Consideremos el conjunto

$$C[0,1] = \{\, f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua} \,\}$$

y la función $d_1 : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Probar que $(C[0,1], d_1)$ es un espacio métrico.

# Espacios métricos

*Solución.* Para ver que $(X, \overline{d})$ es un espacio métrico debemos verificar la distancia separa puntos, es simétrica y satisface la desigualdad triangular.

(SP) Si $\overline{d}(x,y) = \text{mín}\{d(x,y),1\} = 0$ entonces necesariamente $d(x,y) = 0$. Como $d$ separa punto esto ocurre únicamente cuando $x = y$.

(S) Usando la simetría de $d$ tenemos que

$$\overline{d}(x,y) = \text{mín}\{d(x,y),1\} = \text{mín}\{d(y,x),1\} = \overline{d}(y,x).$$

(DT) Sean $x, y, z \in X$. Observemos que si $d(x,z) \geq 1$

entonces

$$\overline{d}(x,y) \leq 1 = \overline{d}(x,z) \leq \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y)$$

Un razonamiento análogo resuelve el caso $d(z,y) \geq 1$. Por el contrario supongamos que tanto $d(x,z)$ como $d(z,y)$ son menores o iguales que uno.

De esta manera

$$\overline{d}(x,y) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y).$$

**Ejercicio**

Consideremos el conjunto

$$C[0,1] = \{\, f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua} \,\}$$

y la función $d_1 : C[0,1] \times C[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Probar que $(C[0,1], d_1)$ es un espacio métrico.

*Observación.* Antes de empezar con la solución propiamente dicha observemos que $d_1$ está *bien definida*:

De esta manera

$$\overline{d}(x,y) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y).$$

## Ejercicio

Consideremos el conjunto

$$C[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua} \}$$

y la función $d_1 : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Probar que $(C[0,1], d_1)$ es un espacio métrico.

*Observación.* Antes de empezar con la solución propiamente dicha observemos que $d_1$ está *bien definida*: como $f$ y $g$ son funciones continuas entonces $|f(x) - g(x)|$ también es una función continua, y por lo tanto integrable porque está definida en un dominio compacto. Por ende la expresión

$$\text{“} \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \text{"}$$

tiene sentido y es un número real.

De esta manera

$$\overline{d}(x,y) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y).$$

**Ejercicio**

Consideremos el conjunto

$$C[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua} \}$$

y la función $d_1 : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Probar que $(C[0,1], d_1)$ es un espacio métrico.

*Observación.* Antes de empezar con la solución propiamente dicha observemos que $d_1$ está *bien definida*: como $f$ y $g$ son funciones continuas entonces $|f(x) - g(x)|$ también es una función continua, y por lo tanto integrable porque está definida en un dominio compacto. Por ende la expresión

$$\text{“} \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \text{"}$$

tiene sentido y es un número real.

*Solución.* Nuevamente, verifiquemos las tres condiciones de la definición.

De esta manera

$$\overline{d}(x,y) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \overline{d}(x,z) + \overline{d}(z,y).$$

**Ejercicio**

Consideremos el conjunto

$$C[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua} \}$$

y la función $d_1 : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Probar que $(C[0,1], d_1)$ es un espacio métrico.

*Observación.* Antes de empezar con la solución propiamente dicha observemos que $d_1$ está *bien definida*: como $f$ y $g$ son funciones continuas entonces $|f(x) - g(x)|$ también es una función continua, y por lo tanto integrable porque está definida en un dominio compacto. Por ende la expresión

$$\text{“} \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \text{"}$$

tiene sentido y es un número real.

*Solución.* Nuevamente, verifiquemos las tres condiciones de la definición.

(S) Simplemente porque $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$.

De esta manera

$$\bar{d}(x,y) \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \bar{d}(x,z) + \bar{d}(z,y).$$

**Ejercicio**

Consideremos el conjunto

$$C[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua} \}$$

y la función $d_1 : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Probar que $(C[0,1], d_1)$ es un espacio métrico.

*Observación.* Antes de empezar con la solución propiamente dicha observemos que $d_1$ está *bien definida*: como $f$ y $g$ son funciones continuas entonces $|f(x) - g(x)|$ también es una función continua, y por lo tanto integrable porque está definida en un dominio compacto. Por ende la expresión

$$\text{“} \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \text{"}$$

tiene sentido y es un número real.

*Solución.* Nuevamente, verifiquemos las tres condiciones de la definición.

(S) Simplemente porque $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$.

(DT) Sean $f, g, h \in C[0,1]$ tres funciones continuas. Observemos que para todo $x \in [0,1]$ se satisface la desigualdad

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Como las integrales separan sumas y preservan desigualdades

$$d_1(f,h) \leq d_1(f,h) + d_1(h,g).$$

definida en un dominio compacto. Por ende la expresión

$$“\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx"$$

tiene sentido.

*Solución.* Nuevamente, verifiquemos las tres condiciones de la definición.

(S) Simplemente porque $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$.

(DT) Sean $f, g, h \in C[0,1]$ tres funciones continuas. Observemos que para todo $x \in [0,1]$ se satisface la desigualdad

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Como las integrales separan sumas y preservan desigualdades

$$d_1(f,h) \leq d_1(f,h) + d_1(h,g).$$

(SP) Para esta parte bastará probar lo siguiente:

> *Si $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua y no negativa de manera que $\int_0^1 h(x)dx = 0$, entonces $h = 0$.*

¿Por qué esto alcanza? Asumiendo la afirmación previa y que $d_2(f,g) = 0$ podemos concluir que la función continua y positiva $h(x) = |f(x) - g(x)|$ es constantemente nula. Pero entonces $f = g$.

definida en un dominio compacto. Por ende la expresión

$$“\int_0^1 |f(x) - g(x)|dx"$$

tiene sentido.

*Solución.* Nuevamente, verifiquemos las tres condiciones de la definición.

(S) Simplemente porque $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$.

(DT) Sean $f, g, h \in C[0, 1]$ tres funciones continuas. Observemos que para todo $x \in [0, 1]$ se satisface la desigualdad

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Como las integrales separan sumas y preservan desigualdades

$$d_1(f, h) \leq d_1(f, h) + d_1(h, g).$$

(SP) Para esta parte bastará probar lo siguiente:

> *Si $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y no negativa de manera que $\int_0^1 h(x)dx = 0$, entonces $h = 0$.*

¿Por qué esto alcanza? Asumiendo la afirmación previa y que $d_2(f, g) = 0$ podemos concluir que la función continua y positiva $h(x) = |f(x) - g(x)|$ es constantemente nula. Pero entonces $f = g$.

Sea $h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa con integral nula. Supongamos que existe $x_0 \in (0, 1)$ de manera que $h(x_0) > 0$ y lleguemos a una contradicción. Por la continuidad de $h$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $|h(x) - h(x_0)| < h(x_0)/2$ siempre que $|x - x_0| < \delta$.

definida en un dominio compacto. Por ende la expresión

$$“\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx"$$

tiene sentido.

*Solución.* Nuevamente, verifiquemos las tres condiciones de la definición.

(S) Simplemente porque $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$.

(DT) Sean $f, g, h \in C[0,1]$ tres funciones continuas. Observemos que para todo $x \in [0,1]$ se satisface la desigualdad

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|.$$

Como las integrales separan sumas y preservan desigualdades

$$d_1(f,h) \leq d_1(f,h) + d_1(h,g).$$

(SP) Para esta parte bastará probar lo siguiente:

> *Si $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y no negativa de manera que $\int_0^1 h(x) dx = 0$, entonces $h = 0$.*

¿Por qué esto alcanza? Asumiendo la afirmación previa y que $d_2(f,g) = 0$ podemos concluir que la función continua y positiva $h(x) = |f(x) - g(x)|$ es constantemente nula. Pero entonces $f = g$.

Sea $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa con integral nula. Supongamos que existe $x_0 \in (0,1)$ de manera que $h(x_0) > 0$ y lleguemos a una contradicción. Por la continuidad de $h$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $|h(x) - h(x_0)| < h(x_0)/2$ siempre que $|x - x_0| < \delta$. Pero

$$|h(x) - h(x_0)| < \frac{h(x_0)}{2} \Leftrightarrow -\frac{h(x_0)}{2} < h(x) - h(x_0) < \frac{h(x_0)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{h(x_0)}{2} < h(x) < \frac{3h(x_0)}{2}$$

(SP) Para esta parte bastará probar lo siguiente:

> *Si $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua y no negativa de manera que $\int_0^1 h(x)dx = 0$, entonces $h = 0$.*

¿Por qué esto alcanza? Asumiendo la afirmación previa y que $d_2(f,g) = 0$ podemos concluir que la función continua y positiva $h(x) = |f(x) - g(x)|$ es constantemente nula. Pero entonces $f = g$.

Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y no negativa con integral nula. Supongamos que existe $x_0 \in (0,1)$ de manera que $h(x_0) > 0$ y lleguemos a una contradicción. Por la continuidad de $h$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $|h(x) - h(x_0)| < h(x_0)/2$ siempre que $|x - x_0| < \delta$. Pero

$$|h(x) - h(x_0)| < \frac{h(x_0)}{2} \Leftrightarrow -\frac{h(x_0)}{2} < h(x) - h(x_0) < \frac{h(x_0)}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{h(x_0)}{2} < h(x) < \frac{3h(x_0)}{2}$$

Sin perder generalidad podemos suponer que el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ está contenido en $[0,1]$ (si esto no ocurre, reemplazamos $\delta$ por otro real más pequeño de manera que lo cumpla).

(SP) Para esta parte bastará probar lo siguiente:

> *Si $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua y no negativa de manera que $\int_0^1 h(x)dx = 0$, entonces $h = 0$.*

¿Por qué esto alcanza? Asumiendo la afirmación previa y que $d_2(f,g) = 0$ podemos concluir que la función continua y positiva $h(x) = |f(x) - g(x)|$ es constantemente nula. Pero entonces $f = g$.

Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y no negativa con integral nula. Supongamos que existe $x_0 \in (0,1)$ de manera que $h(x_0) > 0$ y lleguemos a una contradicción. Por la continuidad de $h$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $|h(x) - h(x_0)| < h(x_0)/2$ siempre que $|x - x_0| < \delta$. Pero

$$|h(x) - h(x_0)| < \frac{h(x_0)}{2} \Leftrightarrow -\frac{h(x_0)}{2} < h(x) - h(x_0) < \frac{h(x_0)}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{h(x_0)}{2} < h(x) < \frac{3h(x_0)}{2}$$

Sin perder generalidad podemos suponer que el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ está contenido en $[0,1]$ (si esto no ocurre, reemplazamos $\delta$ por otro real más pequeño de manera que lo cumpla). Luego,

$$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^{x_0-\delta} h(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{1} h(x)dx$$
$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{h(x_0)}{2}dx = \delta h(x_0) > 0$$

lo cual es absurdo porque la integral de $h$ en el intervalo $[0,1]$ era igual a cero.

(SP) Para esta parte bastará probar lo siguiente:

> *Si $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua y no negativa de manera que $\int_0^1 h(x)dx = 0$, entonces $h = 0$.*

¿Por qué esto alcanza? Asumiendo la afirmación previa y que $d_2(f,g) = 0$ podemos concluir que la función continua y positiva $h(x) = |f(x) - g(x)|$ es constantemente nula. Pero entonces $f = g$.

Sea $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y no negativa con integral nula. Supongamos que existe $x_0 \in (0,1)$ de manera que $h(x_0) > 0$ y lleguemos a una contradicción. Por la continuidad de $h$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $|h(x) - h(x_0)| < h(x_0)/2$ siempre que $|x - x_0| < \delta$. Pero

$$|h(x) - h(x_0)| < \frac{h(x_0)}{2} \Leftrightarrow -\frac{h(x_0)}{2} < h(x) - h(x_0) < \frac{h(x_0)}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{h(x_0)}{2} < h(x) < \frac{3h(x_0)}{2}$$

Sin perder generalidad podemos suponer que el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ está contenido en $[0,1]$ (si esto no ocurre, reemplazamos $\delta$ por otro real más pequeño de manera que lo cumpla). Luego,

$$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^{x_0-\delta} h(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx + \int_{x_0+\delta}^1 h(x)dx$$
$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{h(x_0)}{2}dx = \delta h(x_0) > 0$$

lo cual es absurdo porque la integral de $h$ en el intervalo $[0,1]$ era igual a cero.

**Ejercicio**

Probar que en el conjunto de sucesiones de cuadrado sumables

$$\ell^2 = \left\{ (a_n)_n \subseteq \mathbb{R} \ : \ \sum_{n\geq 1} a_n^2 < \infty \right\}$$

Sin perder generalidad podemos suponer que el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ está contenido en $[0, 1]$ (si esto no ocurre, reemplazamos $\delta$ por otro real más pequeño de manera que lo cumpla). Luego,

$$\int_0^1 h(x)dx = \int_0^{x_0-\delta} h(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx + \int_{x_0+\delta}^1 h(x)dx$$
$$\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{h(x_0)}{2}dx = \delta h(x_0) > 0$$

lo cual es absurdo porque la integral de $h$ en el intervalo $[0, 1]$ era igual a cero.

**Ejercicio**

Probar que en el conjunto de sucesiones de cuadrado sumables

$$\ell^2 = \left\{ (a_n)_n \subseteq \mathbb{R} \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

la función $d_2 : \ell^2 \times \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d_2((a_n)_n, (b_n)_n) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}$$

está bien definida y hace de $\ell^2$ un espacio métrico.

Sin perder generalidad podemos suponer que el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ está contenido en $[0, 1]$ (si esto no ocurre, reemplazamos $\delta$ por otro real más pequeño de manera que lo cumpla). Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x)dx &= \int_0^{x_0-\delta} h(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{1} h(x)dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{h(x_0)}{2}dx = \delta h(x_0) > 0\end{aligned}$$

lo cual es absurdo porque la integral de $h$ en el intervalo $[0, 1]$ era igual a cero.

### Ejercicio

Probar que en el conjunto de sucesiones de cuadrado sumables

$$\ell^2 = \left\{ (a_n)_n \subseteq \mathbb{R} \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

la función $d_2 : \ell^2 \times \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d_2((a_n)_n, (b_n)_n) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}$$

está bien definida y hace de $\ell^2$ un espacio métrico.

*Solución.* Este este caso $d_2$ estará bien definida siempre y cuando la serie

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2$$

sea convergente.

Sin perder generalidad podemos suponer que el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ está contenido en $[0,1]$ (si esto no ocurre, reemplazamos $\delta$ por otro real más pequeño de manera que lo cumpla). Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x)dx &= \int_0^{x_0-\delta} h(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx + \int_{x_0+\delta}^{1} h(x)dx \\ &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{h(x_0)}{2}dx = \delta h(x_0) > 0\end{aligned}$$

lo cual es absurdo porque la integral de $h$ en el intervalo $[0,1]$ era igual a cero.

**Ejercicio**

Probar que en el conjunto de sucesiones de cuadrado sumables

$$\ell^2 = \left\{ (a_n)_n \subseteq \mathbb{R} \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty \right\}$$

la función $d_2 : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$

$$d_2((a_n)_n, (b_n)_n) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}$$

está bien definida y hace de $\ell^2$ un espacio métrico.

*Solución.* Este este caso $d_2$ estará bien definida siempre y cuando la serie

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2$$

sea convergente.Por la continuidad de la raíz cuadrada esto equivale a la existencia del límite

$$\lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}$$

la función $d_2 : \ell^2 \times \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d_2((a_n)_n, (b_n)_n) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

está bien definida y hace de $\ell^2$ un espacio métrico.

*Solución.* Este este caso $d_2$ estará bien definida siempre y cuando la serie

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2$$

sea convergente. Por la continuidad de la raíz cuadrada esto equivale a la existencia del límite

$$\lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Fijado un $N \in \mathbb{N}$ podemos considerar los vectores $(a_1, \ldots, a_N)$ y $(b_1, \ldots, b_N)$ de $\mathbb{R}^N$. Por la desigualdad triangular de la norma euclídea $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tenemos que

$$\left( \sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

la función $d_2 : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{R}$

$$d_2((a_n)_n, (b_n)_n) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

está bien definida y hace de $\ell^2$ un espacio métrico.

*Solución.* Este este caso $d_2$ estará bien definida siempre y cuando la serie

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2$$

sea convergente. Por la continuidad de la raíz cuadrada esto equivale a la existencia del límite

$$\lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Fijado un $N \in \mathbb{N}$ podemos considerar los vectores $(a_1, \ldots, a_N)$ y $(b_1, \ldots, b_N)$ de $\mathbb{R}^N$. Por la desigualdad triangular de la norma euclídea $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tenemos que

$$\left( \sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Tomando límite en $N$ tendiendo a infinito

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

porque $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son sucesiones de cuadrado sumables, lo cual prueba la buena definición de $d_2$.

la función $d_2 : \ell^2 \times \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d_2((a_n)_n, (b_n)_n) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

está bien definida y hace de $\ell^2$ un espacio métrico.

*Solución.* Este este caso $d_2$ estará bien definida siempre y cuando la serie

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2$$

sea convergente. Por la continuidad de la raíz cuadrada esto equivale a la existencia del límite

$$\lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Fijado un $N \in \mathbb{N}$ podemos considerar los vectores $(a_1, \dots, a_N)$ y $(b_1, \dots, b_N)$ de $\mathbb{R}^N$. Por la desigualdad triangular de la norma euclídea $\| \cdot \|_2 : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tenemos que

$$\left( \sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Tomando límite en $N$ tendiendo a infinito

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

porque $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son sucesiones de cuadrado sumables, lo cual prueba la buena definición de $d_2$. Pasemos a verificar las tres propiedades de la definición de espacio métricos. La separación de puntos y la simetría son claras en este caso. Para la desigualdad triangular tomemos tres sucesiones $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ en $\ell^2$.

Fijado un $N \in \mathbb{N}$ podemos considerar los vectores $(a_1, \ldots, a_N)$ y $(b_1, \ldots, b_N)$ de $\mathbb{R}^N$. Por la desigualdad triangular de la norma euclídea $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tenemos que

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2\right)^{1/2}.$$

Tomando límite en $N$ tendiendo a infinito

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2} < \infty$$

porque $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son sucesiones de cuadrado sumables, lo cual prueba la buena definición de $d_2$. Pasemos a verificar las tres propiedades de la definición de espacio métricos. La separación de puntos y la simetría son claras en este caso. Para la desigualdad triangular tomemos tres sucesiones $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ en $\ell^2$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$ fijo sabemos que

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n - c_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{N} |c_n - b_n|^2\right)^{1/2}.$$

por la desigualdad triangular usual de $\mathbb{R}^N$.

Fijado un $N \in \mathbb{N}$ podemos considerar los vectores $(a_1, \ldots, a_N)$ y $(b_1, \ldots, b_N)$ de $\mathbb{R}^N$. Por la desigualdad triangular de la norma euclídea $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tenemos que

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^2\right)^{1/2}.$$

Tomando límite en $N$ tendiendo a infinito

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\right)^{1/2} < \infty$$

porque $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son sucesiones de cuadrado sumables, lo cual prueba la buena definición de $d_2$. Pasemos a verificar las tres propiedades de la definición de espacio métricos. La separación de puntos y la simetría son claras en este caso. Para la desigualdad triangular tomemos tres sucesiones $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ en $\ell^2$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$ fijo sabemos que

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n - c_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{N} |c_n - b_n|^2\right)^{1/2}.$$

por la desigualdad triangular usual de $\mathbb{R}^N$. Tomando límite en $N$ obtenemos

$$d_2((a_n)_n, (b_n)_n) \leq d_2((a_n)_n, (c_n)_n) + d_2((c_n)_n, (b_n)_n).$$

Fijado un $N \in \mathbb{N}$ podemos considerar los vectores $(a_1, \ldots, a_N)$ y $(b_1, \ldots, b_N)$ de $\mathbb{R}^N$. Por la desigualdad triangular de la norma euclídea $\| \cdot \|_2 : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tenemos que

$$\left( \sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Tomando límite en $N$ tendiendo a infinito

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \right)^{1/2} < \infty$$

porque $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son sucesiones de cuadrado sumables, lo cual prueba la buena definición de $d_2$. Pasemos a verificar las tres propiedades de la definición de espacio métricos. La separación de puntos y la simetría son claras en este caso. Para la desigualdad triangular tomemos tres sucesiones $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ y $(c_n)_n$ en $\ell^2$.

Para cada $N \in \mathbb{N}$ fijo sabemos que

$$\left( \sum_{n=1}^{N} |a_n - b_n|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{n=1}^{N} |a_n - c_n|^2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{n=1}^{N} |c_n - b_n|^2 \right)^{1/2}.$$

por la desigualdad triangular usual de $\mathbb{R}^N$. Tomando límite en $N$ obtenemos

$$d_2((a_n)_n, (b_n)_n) \leq d_2((a_n)_n, (c_n)_n) + d_2((c_n)_n, (b_n)_n).$$

### Ejercicio Adicional: Distancia de Hamming

Sea $X$ un conjunto arbitrario. Denotemos por $X^n$ al conjunto de $n$-tuplas de elementos en $X$. Probar que la función $d : X^n \times X^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$d(x, y) = \#\{i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \neq y_i\}$$

es una distancia.