Nazareno Faillace

Descomposición LU - Estimación de cantidad de operaciones

Para fijar ideas y facilitar las visualización, veamos el caso de una matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Suponiendo que A admite descomposición LU, queremos estimar cuántas operaciones son necesarias para obtenerla despejando coeficientes (este procedimiento es conocido como el método de Doolittle). Suponemos que existe una matriz L diagonal inferior con 1 en la diagonal y una matriz triangular superior U tales que $A = LU$:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & 0 \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Si efectuamos el producto, se tiene que:

$$LU = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ \ell_{21}u_{11} & \ell_{21}u_{12} + u_{22} & \ell_{21}u_{13} + u_{23} & \ell_{21}u_{14} + u_{24} \\ \ell_{31}u_{11} & \ell_{31}u_{12} + \ell_{32}u_{22} & \ell_{31}u_{13} + \ell_{32}u_{23} + u_{33} & \ell_{31}u_{14} + \ell_{32}u_{24} + u_{34} \\ \ell_{41}u_{11} & \ell_{41}u_{12} + \ell_{42}u_{22} & \ell_{41}u_{13} + \ell_{42}u_{23} + \ell_{43}u_{33} & \ell_{41}u_{14} + \ell_{42}u_{24} + \ell_{43}u_{34} + u_{44} \end{bmatrix}$$

Igualando a A:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ \ell_{21}u_{11} & \ell_{21}u_{12} + u_{22} & \ell_{21}u_{13} + u_{23} & \ell_{21}u_{14} + u_{24} \\ \ell_{31}u_{11} & \ell_{31}u_{12} + \ell_{32}u_{22} & \ell_{31}u_{13} + \ell_{32}u_{23} + u_{33} & \ell_{31}u_{14} + \ell_{32}u_{24} + u_{34} \\ \ell_{41}u_{11} & \ell_{41}u_{12} + \ell_{42}u_{22} & \ell_{41}u_{13} + \ell_{42}u_{23} + \ell_{43}u_{33} & \ell_{41}u_{14} + \ell_{42}u_{24} + \ell_{43}u_{34} + u_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Resolvemos las ecuaciones de manera ordenada para encontrar los valores de u_{ij} y ℓ_{ij}. A medida que las resolvemos, van quedando determinados los valores de U por filas y los valores de L por columnas. Veamos la cantidad de operaciones que se necesitan para despejar cada fila de U y cada columna de L y tratemos de encontrar un patrón (en el ejemplo, $n = 4$). Tener en cuenta que las divisiones se consideran multiplicaciones y las restas se consideran sumas.

En primer lugar, tenemos que:

$$u_{1j} = a_{1j} \quad j = 1, \ldots, n \qquad \rightarrow \text{en total: 0 multiplicaciones y 0 sumas}$$

Como ya sabemos cuánto vale u_{11}, podemos despejar la primera columna de L:

$$\ell_{i1} = \frac{a_{i1}}{u_{11}} \quad i = 2, \dots, n \qquad \rightarrow \text{en total: } (n-1)\cdot 1 \text{ multiplicaciones y } 0 \text{ sumas}$$

Dado que, en particular, ya conocemos los valores de ℓ_{21} y de la primera fila de U, podemos obtener la segunda fila de U:

$$u_{2j} = a_{2j} - \ell_{21}u_{1j} \quad j = 2, \cdots, n \qquad \rightarrow \text{en total: } (n-1)\cdot 1 \text{ multiplicaciones y } (n-1)\cdot 1 \text{ sumas}$$

Con la información que tenemos hasta ahora, podemos calcular la segunda columna de L:

$$\ell_{i2} = \frac{a_{i2} - \ell_{i1}u_{12}}{u_{22}} \quad i = 3, \dots, n \qquad \rightarrow \text{en total: } (n-2)\cdot 2 \text{ multiplicaciones y } (n-2)\cdot 1 \text{ sumas}$$

Y así sucesivamente. Resumiéndolo en una tabla:

Componente	Multiplicaciones	Sumas
$u_{1j} \quad j = 1, \dots, n$	0	0
$\ell_{i1} \quad i = 2, \dots, n$	$(n-1)\cdot 1$	0
$u_{2j} \quad j = 2, \cdots, n$	$(n-1)\cdot 1$	$(n-1)\cdot 1$
$\ell_{i2} \quad i = 3, \dots, n$	$(n-2)\cdot 2$	$(n-2)\cdot 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Veamos qué ocurre con las multiplicaciones necesarias para calcular L:

$$\begin{aligned}(n-1)\cdot 1 + (n-2)\cdot 2 + \cdots + 1\cdot(n-1) \quad &= \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)i = n\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \\ &= n\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \approx \frac{n^3}{2} - \frac{n^3}{3} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{6}n^3\right)\end{aligned}$$

Análogamente, para las sumas que hay que efectuar para calcular L:

$$\begin{aligned}(n-1)\cdot 0 + (n-2)\cdot 1 + \cdots + 1\cdot(n-2) \quad &= \sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(i-1) \overset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{n-2}(n-j-1)j = \\ &= n\sum_{j=0}^{n-2} j - \sum_{j=0}^{n-2} j^2 - \sum_{j=0}^{n-2} j \approx \frac{n^3}{2} - \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{6}n^3\right)\end{aligned}$$

Entonces, para calcular L necesitamos $\mathcal{O}(\frac{1}{6}n^3)$ multiplicaciones y $\mathcal{O}(\frac{1}{6}n^3)$ sumas; en total realizamos $\mathcal{O}(\frac{1}{3}n^3)$ operaciones. De manera análoga se puede ver que para calcular U se requieren $\mathcal{O}(\frac{1}{3}n^3)$ operaciones. Juntando todo, podemos estimar que al calcular la descomposición LU despejando los coeficientes, estamos realizando $\mathcal{O}(\frac{2}{3}n^3)$ operaciones.