# Skripta iz Uvoda u teoriju uzoraka

24. februar 2020

# 1 nedelja

## 1.1 Naučno istraživanje

**Naučno istraživanje** je sistematsko, plansko i objektivno ispitivanje nekog problema, prema određenim metodološkim pravilima, čija je svrha da se pruži pouzdan i precizan odgovor na unapred postavljeno pitanje.

Može se shvatiti kao kritički, kontrolisani i ponovljivi proces sticanja novih znanja, neophodnih (a ponekad i dovoljnih) za identifikovanje, određivanje i rešavanje naučnih (teorijskih i empirijskih) problema.

**Teorijsko** istraživanje vs Empirijsko (**iskustveno**) istraživanje.

Svako naučno istraživanje ima više međusobno logično povezanih faza.
**Faze** su:

- identifikovanje i određivanje problema
- određivanje cilja istraživanja
- definisanje ključnih izraza
- postavljanje hipoteze i izvođenje logičkih posledica iz hipoteze
- izbor istraživačke strategije i plana istraživanja
- razvijanje mernih i drugih instrumenata istraživanja
- određivanje onovnog skupa (populacije) i odabir uzorka
- sprovođenje istraživanja i prikupljanje relevantnih podataka
- obrađivanje i analiza podataka dobijenih istraživanjem
- tumačenje rezultata istraživanja i izvođenje zaključ(a)ka
- izrada izveštaja o obavljenom istraživanju
- prezentacija rezultata istraživanja

## 1.2 Osnovni pojmovi

**Entitet/jedinica posmatranja** (en. 'observation unit') - živo biće ili objekat čija su svojstva predmet istraživanja.

**Populacija** ('population') - skup / kolekcija entiteta.

Na osnovu broja entiteta, tj. **obima** / veličine **populacije** ('populationsize') $N$, može biti:

- konačna populacija$-N$ je prirodan broj
- beskonačna populacija$-N \to +\infty$

Trebalo bi razlikovati:

- ciljnu populaciju('target population')
- populaciju na kojoj se efektivno sprovodi istraživanje ('study population') [1]

**Uzorak** ('sample') - podskup populacije; sadrži izvesne entitete koji potiču iz populacije, na bazi čijeg proučavanja će se izvoditi zaključci o čitavoj populaciji

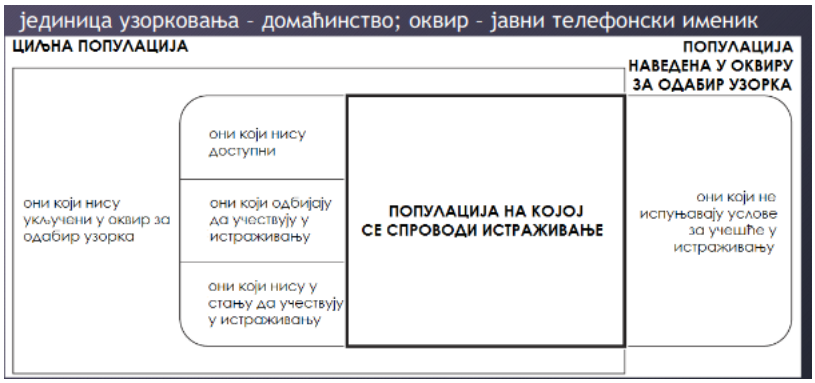
**Obim uzorka** ('samplesize') n [2]

**Jedinica uzorkovanja** ('sampling unit') [3]

**Okvir za odabir uzorka** ('sampling frame') - popis (ili neka druga specifikacija) svih jedinica uzorkovanja

Npr. svakoj jedinici uzorkovanja pridruži se različit prirodan broj (počevši od 1). Ti brojevi nazivaju se **oznake jedinica**, služe za njihovo identifikovanje i ostaju nepromenjeni sve do kraja istraživanja.

Primer - telefonsko istraživanje biračkog tela.




Zašto uzorkovanje?

**Potpuno** ispitivanje populacije (proučavanje tzv. **cenzusa**) je, u mnogim slučajevima, neracionalno ili čak principijelno nemoguće. Čak i onda kada postoji

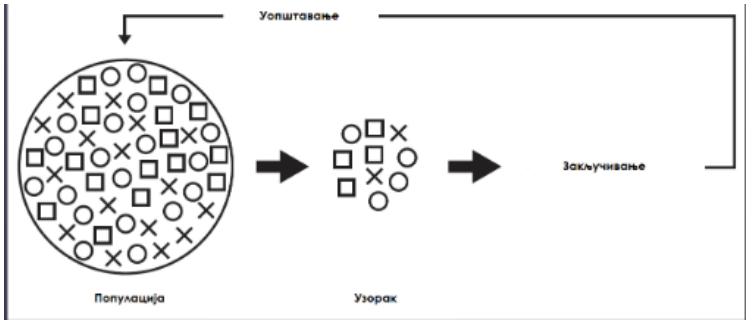
[1] Nadalje se pretpostavlja: target population = study population i $N < +\infty$

[2] Uvek konačna vrednost

[3] U opštem slučaju nije isto što i jedinica posmatranja, koja predstavlja osnovni objekat posmatranja i prikupljanja informacija. Jedinice uzorkovanja su međusobno disjunktni skupovi entiteta

mogućnost potpunog ispitivanja populacije istraživač se obično opredeljuje za **delimično** ispitivanje (proučavanje uzorka) jer je (u odnosu na potpuno ispitivanje):

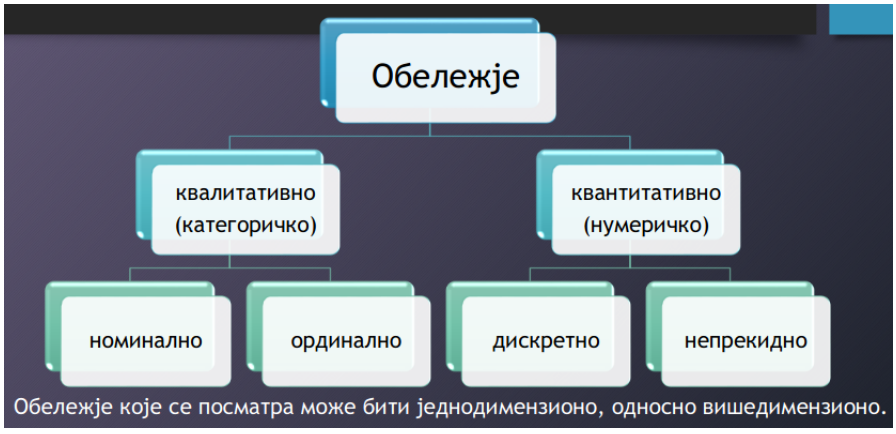
- jeftinije
- brže
- kontrola tačnosti prikuplenih podataka je jednostavnija i lakša




Termin populacija odnosi se na skup entiteta istovrsnih u odnosu na jedno ili više zajedničkih svojstava, koja se mogu posmatrati. Ipak, entiteti, iako **istovrsni**, **nisu istovetni**.
Određivanje populacije predstavlja značajnu i, neretko, tešku fazu istraživanja. Populacija mora biti definisana: pojmovno (u smislu svog sadržaja - šta su entiteti, a šta jedinice uzorkovanja?), prostorno i vremenski.

**Obeležje** ('study variable') - posmatrana zajednička karakteristika svih entiteta u populaciji, tj. preciznije, izvesno varijabilno svojstvo od interesa, koje je određeno za svaki entitet u populaciji. [4]

## 1.3 Tipovi obeležja




[4] Obeležje najčešće nije neko od definicionih svojstava populacije.

Primer: tipovi obeležja

- kvalitativna
  - nominalna
    - boja očiju, krvna grupa
    - etnička / verska pripadnost
    - radna mesta na fakultetu
    - raspoloženje građana Srbije prema pristupanju u EU
    - posedovanje profila na društvenim mrežama
  - ordinalna
    - nivo akademskih studija
    - čin oficira u vojsci
    - ocena restorana na Tripadvisor
    - stanje pacijenta
    - intezitet bola
- kvantitativna
  - diskretna
    - broj stanovnik sa pravom glasa u određenoj opštini
    - broj blizanaca rođenih u toku godine u određenoj regiji
    - broj kućnih ljubimaca u domaćinstvu
  - neprekidna
    - visina, težina, starost, IQ
    - dužina lista određene biljne vrste
    - koncetracija soli u morskoj vodi

Primer: populacija i obeležje

- Populacija: skup studenata koji su upisali Uvod u teoriju uzoraka školske 2019/20. godine.
  Obeležje: pol; broj položenih ispita, broj položenih ESPB bodova,prosečna ocena svih položenih ispita –zaključno sa rokom Januar 2 ove školske godine; ocena na kursu Statistika
- Populacija: skup svih poljoprivrednih gazdinstava u Srbiji(referentni period–oktobar/novembar2018)
  Obeležje:površina korišćenog poljoprivrednog zemljišta; broj grla stoke; primenjeni proizvodni metodi
- Populacija: skup svih domaćinstava u regionu Šumadije i Istočne Srbije(referentni period –2017. g)
  Obeležje: lična potrošnja domaćinstva (mesečni prosek)
- Populacija: jedna serija LED sijalica izvesnog proivođača.
  Obeležje: dužina radnog veka sijalice u satima.
- Populacija: skup svih meseci u periodu od 2000. do 2016. g.
  Obeležje: mesečni broj vetrovitih dana u Vršcu

Obeležje se može shvatiti kao funkcija koja entitetima u populaciji pridružuje realne brojeve ili neke druge vrednosti.
Neka je data populacija sa $N$ jedinica, koje su u okviru za odabiruzorka označene brojevima iz skupa $\omega = 1, 2, ..., N$ (i time jednoznačno određene)i neka je $Y$ obeležje od interesa.Neka je sa $y_k$ označena vrednost obeležja $Y$ entiteta označenog sa $k$.

Zadatak pri istraživanju obično se svodi na donošenje zaključaka o (nepoznatoj) vrednosti realne funkcije

$$\theta = f(y_1, y_2, , y_n)$$

, koja se naziva **populacijska vrednost** ('population value') ili **parametar populacije**.

Najčešće funkcije koje se pojavljuju kao parametri populacije:

- Kvantitativna obeležja
  - populacijska srednja vrednost ('population mean')

$$m_Y = m = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y_K$$

  - populacijski total ('population total')

$$\tau_Y = \tau = \sum_{k=1}^{N} y_K = N m_Y$$

  - populacijska disperzija ('population variance') / standardno odstupanje

$$\sigma_Y^2 = \sigma^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(y_K - m_Y)^2$$

    i

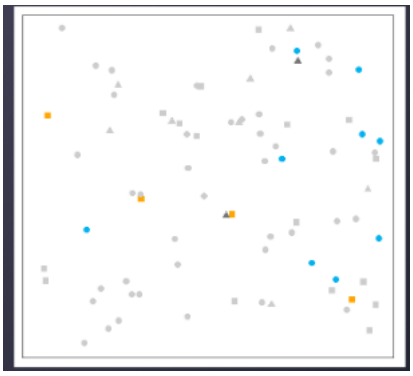
$$\sigma_Y = \sigma = \sqrt{\sigma_Y^2}$$

- Kvalitativna obeležja
  - populacijska proporcija ('population proportion')
  - populacijska medijana, kvantili, moda...

Ideja je da se zaključci o populacijskim vrednostima donose na osnovu informacija dobijenih ispitivanjem uzorka.
„Dobar“ uzorak ima osobinu **reprezentativnosti**. To je uzorak koji predstavlja „umanjenu“, a nikako „iskrivljenu“, niti „uveličanu“ sliku jednog dela populacije. Uzorak sa ovom osobinom verno odslikava strukturu populacije koju predstavlja, „izgledajući“ kao i populacija u svim aspektima relevatnim za istraživanje.

Na reprezentativnost uzorka utiču:

- tip uzorka (prema metodu odabira)
- veličina uzorka
- varijabilnost posmatranog obeležja



**Plan uzorkovanja** ('sampling design') poseduje dve osnovne komponente:

- metod odabira uzorka
- metod zaključivanja

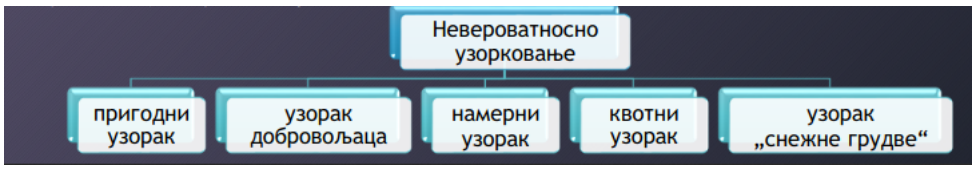
**Metod odabira uzorka** je postupak kojim se biraju elementi populacije u uzorak, uz određivanje adekvatnog obima uzorka.
Ovi metodi se mogu podeliti u dve grupe:

- **Verovatnosno uzorkovanje** ('probability sampling')
- **Neverovatnosno uzorkovanje** ('nonprobability sampling')

## 1.4 Nevereovatnosno uzorkovanje

Ovakvi metodi uzorkovanja ne zasnivaju se na teoriji verovatnoća, nego na određenim kriterijumima istraživača.
Dakle, njihova osnovna osobina jeste da se uzorkovanje vrši na osnovu **subjektivne procene istraživača**, a ne slučajnim izborom. Njima se pribegava onda kada je, zbog ograničenih vremenskih rokova, iznosa troškova i osetljivosti predmeta istraživanja (etičkih obzira), teško sprovesti slučajno uzorkovanje.

- Prednosti: efikasnije se primenjuju kod eksplorativnih istraživanja (pilot istraživanja, studije u cilju dokazivanja koncepta, kvalitativna istraživanja, studije za generisanje hipoteza), čiji cilj nije precizno zaključivanje o parametrima populacije na osnovu reprezentativnog uzorka.
- Mane: nije moguće određivanje kvaliteta uzorka, a samim tim ni kvantifikovanje tačnosti zaključivanja (zaključivanje je ovde analitičko).



## 1.5 Verovatnosno uzorkovanje

Ovakvi metodi uzorkovanja zasnivaju se na teoriji verovatnoća, tj. na „planiranoj“ slučajnosti. Mogući uzorci su faktički matematički konstruisani, i za svakog od njih poznata je verovatnoća da bude odabran. Dakle, uzorkovanje se vrši u skladu sa raspodelom verovatnoća, definisanom na kolekciji svih mogućih uzoraka.

•Neka je sa $\Omega$ označen skup oznaka jedinica u populaciji i neka $s \subset \Omega$ predstavlja uzorak. Verovatnosno uzorkovanje se zasniva na poznavanju raspodele verovatnoća $p(\bullet)$:

$$p(s) \geq 0, \forall s \subset \Omega, \sum_{s \subset \Omega} p(s) = 1$$

Slučajan uzorak $S$ je onda slučajan skup oznaka jedinica sa raspodelom verovatnoća:

$$P\{S = s\} = p(s), \forall s \subset \Omega$$


Prednosti:

- doslednom primenom isključuje se postojanje bilo kakve pristrasnosti, što doprinosi postizanju objektivnosti istraživanja
- viši nivo pouzdanosti rezultata istraživanja
- mogućnost procene / kvantifikovanja uzoračke greške
- povećane su šanse za donošenje valjanih zaključaka o čitavoj populaciji, uopštavanjem rezultata dobijenih ispitivanjem uzorka

Mane:

- uglavnom se tiču potreba za vremenom, resursima, finansijama i ljudstvom (npr. potrebno je posedovati kompletan okvir za odabir uzorka)

## 1.6 Osnovni pojmovi, nastavak

Ako se na slučajan način (sa unapred određenom verovatnoćom) odabere jedna jedinica iz populacije, vrednost obeležja koju ona ima nije unapred poznata / određena. To znači da se vrednost obeležja slučajno odabrane jedinice može shvatiti kao realizacija slučajne veličine. Raspodela verovatnoća te slučajne veličina naziva se **raspodela obeležja**[5].

**Statistika** ('statistic') je funkcija vrednosti obeležja registrovanih na jedinicama iz odabranog uzorka, u kojoj eventualno mogu figurisati i neke poznate

[5]Zadatak matematičke statistike je određivanje raspodele obeležja ili određivanje bar nekih opštih numeričkih karakteristika te raspodele

konstante.[6]

Statistike su značajne jer se često koriste za formiranje **ocena** ('estimator') parametara populacije. Realizovane vrednosti statistika su realni brojevi koji tada daju **ocene** ('estimate') nepoznatih parametara. Npr. ako je $\theta$ nepoznata populacijska vrednost onda je $\hat{\theta} = \theta\hat{(}s)$ statistika, koja predstavlja **tačkastu ocenu** ('point estimator') parametra.

Često korišćene statistike ($n(S)$ predstavlja obim uzorka $S$):

- uzoračka srednja vrednost

$$\overline{Y} = \frac{1}{n(S)} \sum_{k \in S} y_k$$

- uzorački total

$$T = n(S)\overline{Y}$$

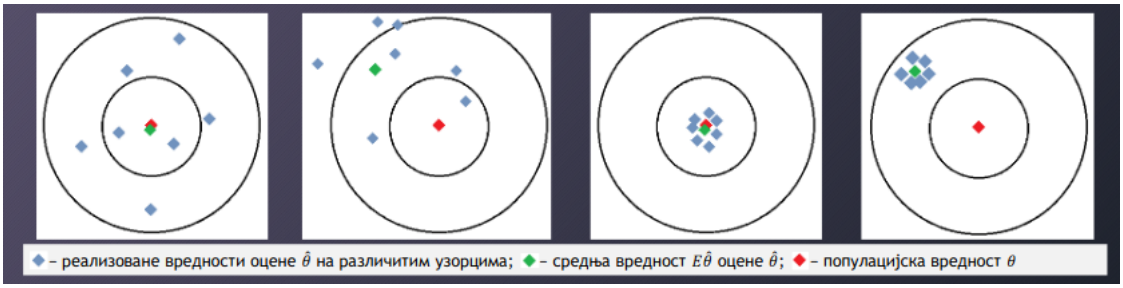
- uzoračka disperzija / standardno odstupanje

$$\overline{S}^2 = \frac{1}{n(S)-1} \sum_{k \in S} (y_k - \overline{Y})^2, \overline{S} = \sqrt{\overline{S}^2}$$

- uzoračka proporcija
- uzoračka medijana, kvantili, moda

Neka je $\hat{\theta}$ tačkasta ocenapopulacijske vrednosti $\theta$. Ona je:

- **nepristrasna** ('unbiased')
  ako jednakost $E\hat{\theta} = \theta$ važi za svaku vrednost parametra $\theta$; ako ocena $\hat{\theta}$ nije nepristrasna onda se ona naziva **pristrasna ocena**, a vrednošću razlike $B(\hat{\theta}) := E\hat{\theta} - \theta$ meri se njena **pristrasnost**.
- **precizna** ('precise')
  ako je disperzija $D\hat{\theta} = E(\hat{\theta} - E\hat{\theta})^2$ ocene $\hat{\theta}$ mala (teži 0).
- **tačna** ('accurate')
  ako je srednje kvadratna greška $MSE(\hat{\theta}) := E(\hat{\theta} - \theta)$ ocene $\hat{\theta}$ mala.[7]




[6]Statistika je slučajna veličina sa svojom raspodelom verovatnoća, koja se naziva **uzoračka raspodela**

[7]važi i jednakost: $MSE(\hat{\theta}) = D\hat{\theta} + (B(\hat{\theta}))^2$, pa je ocena tačna ako je i precizna i nepristrasna.

# 2 nedelja

## 2.1 (Prost) slučajan uzorak

Kod (prostog) slučajnog uzorkovanja ('simple random sampling') **jedinica posmatranja = jedinica uzorkovanja**.
Neka je data populacija sa $N$ jedinica, koje su u okviru za odabir uzorka označene brojevima iz skupa $\Omega = \{1, 2, ..., N\}$ i neka je $Y$ obeležje od interesa. Bira se uzorak obima $n$.

Može biti:

- bez ponavljanja (SRSWOR)
- sa ponavljanjem (SRSWR)

## 2.2 SRSWOR

Predstavlja jedan od najjednostavnijih i najstarijih metoda odabira uzorka. Raspodela verovatnoća $p(\cdot)$ na kolekciji svih uzoraka $s \subset \Omega$ data je sa:

$$p(s) = \begin{cases} \binom{N}{n}^{-1}, \text{ako je obim uzorka } s \text{ jednak } n \\ 0, \text{ inače} \end{cases} \quad (1)$$

Dakle, ovde se svaki od $\binom{N}{n}$ mogućih podskupova skupa $\Omega$ kardinalnosti $n$ sa podjednakom (pozitivnom) verovatnoćom može odabrati kao uzorak
Pomenuti plan obično se u praksi implementira jednim od sledeća dva ekvivalentna postupka:

- odabir uzorka vrši se kroz $n$izvlačenja („koraka“) na slučajan način, pri čemu je u svakom koraku verovatnoća izvlačenja bilo koje od jedinica, koje u ranijim koracima nisu odabrane u uzorak, ista
- odabir uzorka vrši se kroz niz **nezavisnih** izvlačenja na slučajan način **iz cele populacije**, pri čemu je u svakom koraku verovatnoća izvlačenja bilo koje od jedinica ista $\binom{1}{N}$,uz odbacivanje jedinica ranije odabranih u uzorak i ponavljanje koraka sve dok se ne dobije uzorak obima $n$

Uzorak odabran na opisani način može se prikazati i kao **uređen** niz $j_1, j_2, ..., j_n$oznaka jedinica koje su se našle u uzorku($j_k$je oznaka $k$-te jedinice zadržane u uzorku)

Uzorak odabran na opisani način može se prikazati i kao uređen niz $j_1, j_2, ..., j_n$ oznaka jedinica koje su se našle u uzorku ($j_k$ je oznaka $k$-te) jedinice zadržane u uzorku).Pod uzorkom se, takođe, podrazumeva i pripadni niz $y_{j1}, y_{j2}, ..., y_{jn}$vrednosti posmatranog obeležja $Y$ registrovanih na odabranim jedinicama.

Parovi $(j_k, y_{jk}), k = \overline{1, n}$, predstavljaju **podatke dobijene u istraživanju**.

## 2.3 SRSWR

•Odabir uzorka vrši se kroz $N$ nezavisnih izvlačenja na slučajan način, i to uvek iz kompletne populacije, pri čemu je u svakom koraku verovatnoća

izvlačenja bilo koje od jedinica ista i jednaka $\frac{1}{N}$.
•Raspodela verovatnoća $p(\cdot)$ na kolekciji svih uzoraka $s \in \Omega^n$kao uređenih nizova dužine $n$sa dozvoljenim ponavljanjem elemenata data je sa $p(s) = N^{-n}$

## 2.4 Izvlačenje jedinice na slučajan način

Slučajan odabir jedinice (iz populacije u uzorak) vrši se korišćenjem **slučajnih** i **pseudoslučajnih brojeva**.
Slučajni brojevi obično se dobijaju pomoću tzv. **fizičkih generatora** (TRNG –'true random number generator').

- u makro svetu: bacanje fer novčića / kockica, slučajan izbor karte iz špila / kuglice iz kutije, rulet itd.
- u mikro svetu: prirodni fenomeni za koje važe zakonitosti kvantne mehanike, šum itd.

Oni su sadržani u tzv. **tablicama slučajnih brojeva**.

Pseudoslučajni brojevi se dobijaju pomoću tzv. **programskih generatora** (PRNG –'pseudorandom number generator'). To su računarski programi koji koriste izvestan algoritam za dobijanje niza brojeva čija svojstva, u određenoj meri, oponašaju svojstva niza slučajnih brojeva.

## 2.5 Novi pojmovi

- **Indikator uključenja** ('inclusion indicator')

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{ako je jedinica označena sa } k \text{ odabrana u uzorak} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \tag{2}$$

- **Verovatnoća uključenja** ('inclusion probability') prvog, odnosno drugog reda:
  $\pi_k$ - verovatnoća da jedinica označena sa $k$ bude odabrana u uzorak
  $\pi_{kl}$ - verovatnoća da i jedinica označena sa $k$ i jedinica označena sa $l$ budu odabrane u uzorak
- **'Težina' uzorkovanja** ('sampling weight') recipročna vrednost očekivanog broja pojavljivanja jedinice označene sa $k$ u uzorku (što se, kod uzorka bez ponavljanja, svodi na recipročnu vrednost verovatnoće uključenja prvog reda $\pi_k$) [8].

## 2.6 SRSWOR VS SRSWR

[8] može se interpretirati kao broj jedinica u populaciji koje reprezentuje jedinica označena sa $k$

| SRSWOR | SRSWR |
|---|---|
| Verovatnoća uključenja prvog reda: $\pi_k = \frac{n}{N}$ za svako $k$ | Verovatnoća uključenja prvog reda: $\pi_k = 1 - (\frac{N-1}{N})^n$ za svako $k$ |
| Verovatnoća da će jedinica označena sa $k$ biti odabrana u uzorak u $j$-tom koraku: $\frac{1}{N}$ | Verovatnoća da će jedinica označena sa $k$ biti odabrana u uzorak u $j$-tom koraku: $\frac{1}{N}$ |
| | Verovatnoća da će jedinica označena sa $k$ biti odabrana u uzorak više od jedanput: $1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}\left(\frac{N-1-n}{N}\right)$ |
| Očekivanibroj pojavljivanja jedinice označene sa $k$ u uzorku: $\pi_k$ | Očekivanibroj pojavljivanja jedinice označene sa $k$ u uzorku: $\frac{n}{N}$ |
| Verovatnoća uključenja drugog reda: $\pi_{kl} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$ za $k \neq l$ | Verovatnoća uključenja drugog reda: $\pi_{kl} = 1 - 2\left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n$ za $k \neq l$ |

## 2.7 Pristupi prilikom zaključivanja

| **pristup zasnovan na metodu odabira uzorka ('design-based approach')** | **pristup zasnovan na modelu ('model-based approach')** |
|---|---|
| uzoračka raspodela statistike je **diskretna raspodela verovatnoća**: ako je $\hat{\theta} = \hat{\theta}(S)$ statistika, onda važi: $P\{\hat{\theta} = m\} = \sum_{s:\hat{\theta}(s)=m} p(s)$ a njeno matematičko očekivanje i disperzija izračunavaju se po formulama: $E\hat{\theta} = \sum_m mP\{\hat{\theta} = m\} = \sum_s \hat{\theta}(s)p(s)$ $D\hat{\theta} = \sum_s (\hat{\theta}(s) - E\hat{\theta})^2 p(s)$ | uzoračka raspodela statistike je **neka** jednodimenziona **raspodela verovatnoća** određena zajedničkom raspodelom verovatnoća pretpostavljenog modela populacije |
| **nepristrasnost** tačkaste ocene $E\hat{\theta}$ **u odnosu na metod odabira uzorka** | **nepristrasnost** tačkaste ocene $E\hat{\theta}$ **u odnosu na metod model** |

## 2.8 SRSWOR VS SRSWR tačkaste ocene

| | SRSWOR | SRSWR | SRSWR (u obzir se uzimaju samo različite jedinice) |
|---|---|---|---|
| tačkasta ocena $\hat{m}_Y$ | $\frac{1}{n}\sum_{k\in S} y_k$ | $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{jk}$ | $\frac{1}{n_D}\sum_k y_{(k)}$ |
| $E\hat{m}_Y$ | $m_Y$ | $m_Y$ | $m_Y$ |
| $D\hat{m}_Y$ | $\frac{\sigma^2}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)$ | $\frac{N-1}{N}\frac{\sigma^2}{n}$ | $\sum_{k=1}^{N-1} \frac{k^{n-1}}{N^n}\sigma^2$ |
| tačkasta ocena $D\hat{m}_Y$ | $\frac{\overline{S^2}}{n}\left(1 - \frac{n}{N}\right)$ | $\frac{\overline{S^2}}{n}$ | |

[9]

gde je $\sigma^2$ (nepoznata) populacijska disperzija, a $\overline{S}^2$ (poznata) uzoračka disperzija. [10]

## 2.9 Novi pojmovi

**Stopa odabira uzorka**, ili tzv. **razlomak uzorkovanja**('sampling fraction'), je odnos obima uzorka i obima populacije, tj. količnik $\frac{n}{N}$.

Vrednost $1 - \frac{n}{N}$ naziva se **faktor korekcije** zbog konačnosti populacije ('finite-population correction factor'). [11]

Kada su poznati matematičko očekivanje i disperzija tačkaste ocene $\hat{\theta}$ može se odrediti **koeficijent varijacije** ocene $\hat{\theta}$, definisan sa:

$$CV(\hat{\theta}) := \frac{SE(\hat{\theta})}{E\hat{\theta}}$$

i koji predstavlja meru varijabilnosti ocene.

[9] $n_D$ je **efektivan obim uzorka**, tj. obim redukovanog uzorka $(y_{(1)}, y_{(2)}, ..., y_{n_D})$ u kome su izostavljena eventualna ponavljanja jedinica iz originalnog uzorka

[10] može se pokazati da je $\hat{S}^2$ nepristrasna ocena $\sigma^2$

[11] U praksi se često zanemaruje kada stopa odabira uzorka ne prelazi 5%, a u mnogim slučajevima i kada je do 10%