# Laboratório 3

Controle Digital - 2° Semestre de 2024

Prof. Marcos R. Fernandes

**Transformada Z**

**Entrega:**[1] entregue um arquivo PDF com os gráficos e código fonte utilizado para cada questão além da resposta para as perguntas dos enunciados. Não esqueça de colocar título na figura para identificar o que cada figura representa, nome dos eixos, e legenda.

O objetivo dessa aula de laboratório é apresentar as ferramentas computacionais do Matlab para o cálculo da Transformada Z e sua inversa, além de apresentar na prática algumas das propriedades da transformada.

**Dica: Confira sempre o help do matlab para cada comando antes de utiliza-lo!**

## 1 Atividade 1

Nessa atividade, o objetivo é usar o recurso de cálculo simbólico do Matlab para obter a transformada Z de um sinal.

Para isso, considere o seguinte exemplo:

$$f[n] = 10 - e^{-5nT}$$

A transformada Z de $f[n]$ pode ser obtida usando o Matlab da seguinte forma: primeiramente defina a equação literal no matlab, para definir a variável $n$ e outras variáveis que existirem na equação como $T$, utilize o comando **syms**. Em seguida utilize o comando **ztrans**.

```
close all %fecha todas janelas
clear all %limpa memoria
clc %limpa command window
%%
syms T n %define variaveis simbolicas
f=10-exp(-5*n*T); %define sinal
F=ztrans(f); %obtem transformada Z
pretty(F)% exibe equacao da transf. Z numa forma "bonita"
```

Seguindo a mesma lógica, encontre a transformada Z para:

1. $f_a[n] = 1 + n(\frac{1}{3})^n$
2. $f_b[n] = (\frac{1}{2})^n + n(\frac{1}{5})^n$

[1]Ultima atualização: 30/08/2024

3. $f_c[n] = e^{anT}$

4. $f_d[n] = nT$

## 2 Atividade 2

Nessa atividade, o objetivo é usar o recurso de cálculo simbólico do Matlab para obter a transformada Z Inversa. Para isso, considere o seguinte exemplo:

$$F(z) = \frac{z}{z - 1/3}$$

A transformada Z inversa de $F(z)$ pode ser obtida usando o Matlab da seguinte forma: primeiramente defina a equação literal no matlab, para definir a variável $z$, e outras variáveis que existirem na equação, utilize o comando **syms**. Em seguida utilize o comando **iztrans**. Após encontrar a transformada Z inversa, pode-se visualizar o sinal no tempo discreto usando o comando **subs**.

```
close all %fecha todas janelas
clear all %limpa memoria
clc %limpa command window
%%
syms z %define variaveis simbolicas
F = z/(z-1/3); %define eq da transf. Z
f=iztrans(F); %obtem transf. z inversa
pretty(f) %exibe na tela de forma "bonita"
td=1:10; %cria vetor de tempo discreto
figure
stem(td,subs(f,'n',td)) %exibe sinal em tempo discreto
```

Seguindo a mesma lógica, encontre a transformada Z inversa dos seguintes sinais e mostre ao menos as 10 primeiras amostras usando **stem**.

1. $F_a(z) = \frac{1}{z}$

2. $F_b(z) = \frac{z+2}{(z-1/3)(z-1/4)}$

3. $F_c(z) = 5\frac{z}{z-1/2} + 2\frac{z}{(z-1/9)^2}$

4. $F_d(z) = 5\frac{z(z-cos(5))}{z^2-2cos(5)z+1}$

5. $F_e(z) = \frac{3z}{3z-2}$

# 3 Atividade 3

Nessa atividade, o objetivo é usar o Matlab para obter as frações parciais de uma transformada Z na forma de função racional e em seguida obter a transformada Z inversa. Para isso, pode-se utilizar o comando residuez do matlab conforme exemplo a seguir. Seja

$$X(z) = \frac{30(1+3z^{-1})}{30-16z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{A_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}$$

Usando o seguinte código, obtem-se os coeficientes e polos da expansão em frações parciais de $X(z)$:

```
close all
clear all
clc
%%
format rational %configura exibicao na forma de numero racional
b=30*[1 3];
a=[30 -16 2];
[r,p]=residuez(b,a);
r %coeficientes
p %polos
```

Também pode-se obter a expansão em frações parciais usando o comando residue, porém, nesse caso, precisa considerar $X(z)$ na forma

$$X(z) = \frac{30z(z+3)}{30z^2-16z+2}$$

Portanto, primeiro deve-se considerar a expansão em frações parciais de $X(z)/z$:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{30(z+3)}{30z^2-16z+2} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2}$$

e após obter a expansão em frações parciais, basta multiplicar o resultado por $z$ para obter o resultado para $X(z)$:

$$X(z) = \frac{A_1z}{z-p_1} + \frac{A_2z}{z-p_2}$$

Além do mais, tomando a Transformada Z inversa, pode-se obter o sinal $x[k]$ relacionado a $X(z)$ da mesma forma que na atividade 2.

```
syms z %define variavel simbolica
F=r(1)*z/(z-p(1))+r(2)*z/(z-p(2)); %constroi transformada Z usando a expansao
f=iztrans(F); %calcula transforma Z inversa
t=1:10; %define vetor de tempo discreto
fn=subs(f,'n',t); %avalia f substituindo n por t
figure
stem(t,fn)% mostra resultado
```

Atenção: caso tenha pólos com multiplicade, lembrar que precisa considerar a expansão na forma

$$\frac{1}{(z-p_j)^k} = \frac{A_{j1}}{(z-p_j)} + \frac{A_{j2}}{(z-p_j)^2} + \cdots + \frac{A_{jk}}{(z-p_j)^k}$$

ou

$$\frac{1}{(1-p_j z^{-1})^k} = \frac{A_{j1}}{(1-p_j z^{-1})} + \frac{A_{j2}}{(1-p_j z^{-1})^2} + \cdots + \frac{A_{jk}}{(1-p_j z^{-1})^k}.$$

Seguindo a mesma lógica, encontre o sinal das seguintes transformadas Z e mostre as primeiras 10 amostras do sinal usando o comando **stem**:

1. $F_a(z) = \frac{1+2z^{-1}}{(1-3z^{-1})(1-4z^{-1})}$
2. $F_b(z) = \frac{(z^2+z+5)z}{z^3-31/36z^2+5/24z-1/72}$
3. $F_c(z) = 5\frac{(1-1/3z^{-1})(1-1/5z^{-}1)}{(1-1/2z^{-1})^2(1-1/9z^{-1})}$
4. $F_d(z) = \frac{z(z-7)}{z^3-25/12z^2+35/24z^2-5/12z+1/24}$
5. $F_e(z) = \frac{3z^2+10}{(10z-4)^3}$

# 4 Atividade 4

Usando a mesma lógica das atividades anteriores, encontre a resposta temporal do controle PID em tempo discreto a seguir.

Para essa atividade, considere a transformada Z de um controlador tipo PID na forma

$$C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_P + \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1}K_I + \frac{z-1}{Tz}K_D$$

Considere também um erro em degrau ($E(z) = \frac{z}{z-1}$). Obtenha a transforma Z inversa de $U(z)$ usando o Matlab e mostre o resultado das primeiras 10 amostras do sinal de controle usando o comando **stem** para $T = 1$, e

1. $K_p = 1$, $K_I = 0$ e $K_D = 0$;
2. $K_p = 10$, $K_I = 0$ e $K_D = 0$;
3. $K_p = 1$, $K_I = 1$ e $K_D = 0$;

4. $K_p = 1$, $K_I = 10$ e $K_D = 0$.

5. $K_p = 1$, $K_I = 0$ e $K_D = 1$;

# 5 Atividade 5

Considere um sistema de segunda ordem em tempo discreto dado por

$$G(z) = \frac{\omega_n^2}{\frac{T^2(z-1)^2}{4(z+1)^2} + T\omega_n\xi\frac{(z-1)}{(z+1)} + \omega_n^2}$$

1. Obtenha a transformada Z do sistema em malha fechada para $T = 1$, $\omega_n = 1$ e $\xi = 0.5$ usando o recurso de cálculo simbólico do Matlab. Lembre que a função de transferência em malha fechada (realimentação unitária) é dada por:

$$G_f(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + G(z)}.$$

2. Usando o **Teorema do Valor Final**, obtenha o valor de regime estacionário do sistema em malha fechada para uma referência em degrau deslocado em 1 amostra ($R(z) = \frac{1}{z-1}$) (dica: use o comando **subs** na transformada Z)

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z)$$

3. Mostre as 50 primeiras amostras do sinal de saída do sistema em malha fechada do exercício anterior usando o comando **stem**. A saída em regime estacionário coincide com o valor calculado pelo teorema do valor final?