Transformation de Jordan-Wigner

La transformation de Jordan-Wigner est une transformation permettant de passer d'opérateurs de spin σ à des opérateurs de création et annihilation fermioniques. Celle-ci s'applique aux modèles de réseaux unidimensionnels. Elle est notamment utilisée dans la résolution exacte des chaînes unidimensionnelles de spin.

La transformation est donnée par :

$$c_j = \left(\prod_{l<j} \sigma_l^z\right) \frac{\sigma_j^x + i\sigma_j^y}{2} = \left(\prod_{l<j} \sigma_l^z\right) \sigma_j^+$$

$$c_j^\dagger = \frac{\sigma_j^x - i\sigma_j^y}{2} \left(\prod_{l<j} \sigma_l^z\right) = \sigma_j^- \left(\prod_{l<j} \sigma_l^z\right)$$

Les opérateurs c_k et $c_k^\dagger$ sont les opérateurs fermioniques annihilation et création respectivement, s'appliquant tous deux sur l'état j. Il est notable que la définition des opérateurs fermioniques n'est pas locale, elle dépend des modes fermioniques déjà occupés. Cela découle du *principe d'exclusion de Pauli*, propre aux fermions.

La transformation inverse est donnée par :

$$\sigma_j^+ = \frac{\sigma_j^x + i\sigma_j^y}{2} = e^{\left(-i\pi \sum_{k=1}^{j-1} c_k^\dagger c_k\right)} c_k^\dagger$$

$$\sigma_j^- = \frac{\sigma_j^x - i\sigma_j^y}{2} = e^{\left(+i\pi \sum_{k=1}^{j-1} c_k^\dagger c_k\right)} c_k$$

$$\sigma_j^z = 2c_k^\dagger c_k - I$$

Si l'on applique cette transformation à une fonction d'onde quelconque, dans un système de particules de spin ½ :

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1,\dots,i_n=0,1} \psi_{i_1,\dots,i_n} |i_1\ i_2 \dots\ i_n\rangle$$
$$= \sum_{i_1,\dots,i_n=0,1} \psi_{i_1,\dots,i_n} \left(c_1^\dagger\right)^{i_1} \dots \left(c_n^\dagger\right)^{i_n} |\psi_0\rangle$$

On remarque qu'aucun des coefficients $\psi_{i_1,\dots,i_n}$ n'a été modifié par la transformation, la fonction d'aide est donc finalement inchangée. Cette transformation montre ainsi l'équivalence entre des particules de spin ½ et des fermions.