Transformation de Bogoliubov

La transformation de Bogoliubov s'applique principalement dans le cas des problèmes à corps multiples. Elle est généralement utilisée pour diagonaliser des hamiltoniens, notamment lorsque ceux-ci présentent des couplages de modes opposés ou entre les opérateurs création et annihilation. Celle-ci consiste à introduire une paire de nouveaux opérateurs $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^\dagger$ mélangeant les opérateurs création et annihilation de la base établie.

On posera généralement :

$$\begin{cases} \hat{b}_k = u\hat{a}_{\pm k} + v\hat{a}_{\pm k}^\dagger \\ \hat{b}_{\pm k}^\dagger = u^*\hat{a}_{\pm k}^\dagger + v^*\hat{a}_{\pm k} \end{cases}$$

Bien qu'il existe d'autres manières de procédés, en fonction des cas [1]. On ne parle donc en réalité pas de *la* transformation de Bogoliubov, mais d'*une* transformation de Bogoliubov.

Une transformation de Bogoliubov est un isomorphisme des algèbres des relations de commutation ou d'anticommutation canoniques (resp. cas bosonique et fermionique). Cela impose donc des conditions sur les opérateurs $\hat{b}_k$, $\hat{b}_k^\dagger$ permettant leur définition exacte.

Exemple dans le cas bosonique

On pose la transformation :

$$\begin{cases} \hat{b}_k = u\hat{a}_k + v\hat{a}_k^\dagger \\ \hat{b}_k^\dagger = u^*\hat{a}_k^\dagger + v^*\hat{a}_k \end{cases}$$

On a la relation commutation canonique entre les opérateurs création et annihilation :

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger\right] = 1$$

Et on calcul la relation :

$$\left[\hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger\right] = \cdots = (|u|^2 - |v|^2)\left[\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger\right]$$

Ce qui impose donc $|u|^2$-$|v|^2$=1.

Il suffit ensuite de résoudre notre système à partir de là.

Un exemple supplémentaire dans le cas bosonique avec des modes opposés se trouve dans l'article suivant [2].

Exemple dans le cas fermionique

On pose la même transformation que précédemment.

Cette fois, on a la relation d'anticommutation canonique entre les opérateurs création et annihilation :

$$\{\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger\} = 1$$

Et on calcul la relation :

$$\{\hat{b}_k, \hat{b}_k^\dagger\} = \cdots = (|u|^2 + |v|^2)\{\hat{a}_k, \hat{a}_k^\dagger\}$$

Ce qui impose donc $|u|^2+|v|^2=1$.

Il suffit ensuite de résoudre notre système à partir de là.

Un exemple supplémentaire dans le cas fermionique avec des modes opposés se trouve dans l'article suivant [3].

Pour aller plus loin

Liste d'articles présentant des applications de transformées de Bogoliubov :

[1] J. Chalker, « Quantum Theory of Condensed Matter ». Physics Department, Oxford University, 2013. Consulté le: 17 juin 2024. [En ligne]. Disponible sur: https://www-thphys.physics.ox.ac.uk/people/JohnChalker/qtcm/lecture-notes.pdf

[2] E. Demler, « Strongly correlated systems in atomic and condensed matter physics ». Harvard University, 24 janvier 2028. [En ligne]. Disponible sur: http://cmt.harvard.edu/demler/TEACHING/Physics284/chapter3.pdf

[3] A. Cervera-Lierta, « Exact Ising model simulation on a quantum computer », *Quantum*, vol. 2, p. 114, déc. 2018, doi: 10.22331/q-2018-12-21-114.