

Teoría de Lenguajes

Gianfranco Zambonni

28 de enero de 2023

Teoría de Lenguajes

Gianfranco Zambonni

28 de enero de 2023

Índice

1. Introducción	4
1.1. Relaciones	4
1.1.1. Operaciones	4
1.2. Alfabetos	5
1.3. Lenguajes	6
1.4. Gramáticas	7
1.4.1. Clasificación de gramáticas (Chomsky)	8
2. Autómatas finitos	9
2.1. Autómatas finitos determinísticos (AFD)	9
2.2. Autómatas finitos no deterministas (AFND)	9
2.2.1. Equivalencia entre AFD y AFND	10
2.3. Autómatas finitos no determinístico con transiciones λ	11
2.3.1. Equivalencia entre AFND y AFND- λ	13
3. Expresiones regulares	15
3.1. Expresiones regulares a AFND- λ	15
3.1.1. Casos base	15
3.1.2. Pasos inductivos	16
3.2. AFD a expresión regular	18
3.2.1. Demostración	18
3.3. Gramática regular a AFND	19
3.3.1. Demostración	19
3.4. AFD a gramática regular	21
3.4.1. Demostración	21

4. Minimización de AFD	22
4.1. Indistinguibilidad	22
4.1.1. Indistinguibilidad de orden k	23
4.2. Autómatas finito determinístico mínimo	24
4.3. Algoritmo de minimización de un AFD	25
5. Lenguajes regulares	28
5.1. Lema de pumping	28
5.2. Operaciones sobre lenguajes regulares	29
5.2.1. Unión de lenguajes regulares	29
5.2.2. Intersección de lenguajes regulares	30
5.2.3. Complemento de lenguajes regulares	30
5.3. Problemas decibles acerca de lenguajes regulares	32
6. Autómatas de Pila	33
6.1. Configuración instantanea	33
6.2. Lenguajes reconocidos por un autómata	34
6.2.1. Lenguaje aceptado por estado final	34
6.2.2. Lenguaje aceptado por pila vacía	34
6.3. Gramáticas independientes de contexto	36
6.4. Autómatas de pila determinísticos	37
6.4.1. Propiedad del prefijo	37
7. Gramáticas Independientes del Contexto	38
7.1. Árboles de Derivación	38
7.2. Gramáticas Ambiguas	39
7.3. Lema de Pumping para Lenguajes Independientes del Contexto	39
7.3.1. Demostración	39
7.4. Propiedades de los Lenguajes Independientes del Contexto	41
7.4.1. Lenguajes libres de contexto determinísticos	43
7.5. Gramáticas propias	44
7.5.1. Conjunto de símbolos activos	44
7.5.2. Conjunto de símbolos anulables	45
7.5.3. Gramáticas reducidas	45
7.5.4. Forma normal de Chomsky	46
7.5.5. Forma normal de Greibach	46
7.6. Otras propiedades	46
8. Máquinas de Turing	47
8.1. Autómatas linealmente acotados	49
8.1.1. Lenguajes recursivos	50

1. Introducción

1.1. Relaciones

Dados dos conjuntos A y B , se llama **relación** $R : A \rightarrow B$ de A en B a todo subconjunto de $A \times B$, es decir $R \subset A \times B$.

Dos elementos $a \in A$ y $b \in B$ están relacionados si $(a, b) \in R$ y lo notamos aRb .

Si $A = B$, se dice que R es una relación sobre A y se dice que:

- es **reflexiva** cuando $\forall a, aRa$.
- es **simétrica** cuando $\forall a, b \in A, aRb \implies bRa$.
- es **transitiva** cuando $a, b, c \in A, aRb \wedge bRc \implies aRc$.

Relación de equivalencia: Una relación $R : A \rightarrow A$ es de **equivalencia** cuando es reflexiva, simétrica y transitiva. Este tipo de relaciones particiona a A en subconjuntos disjuntos llamados **clases de equivalencia**.

1.1.1. Operaciones

Composición de relaciones: Si $R : A \rightarrow B$ y $S : B \rightarrow C$ son relaciones, entonces la composición de R y S es la relación $S \circ R : A \rightarrow C$ definida por:

$$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C : \exists b \in B, aRb \wedge bSc\}$$

Relación de identidad: La relación de identidad sobre A es la relación $id_A : A \rightarrow A$ definida por: $id_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

- La relación de identidad es el elemento neutro de la composición de relaciones.

Relación de potencia: Dado $R : A \rightarrow A$ se define la relación de potencia $R^k : A \rightarrow A$ como la composición de k copias de R :

$$R^n = \begin{cases} id_A & \text{si } n = 0 \\ R \circ R^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Clausura transitiva/positiva: Dada una relación $R : A \rightarrow A$ se define la clausura transitiva de R como la relación R^+ definida por:

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

La clausura transitiva de R cumple las siguientes propiedades:

1. $R \subseteq R^+$

2. R^+ es transitiva**DEMOSTRACIÓN**

Si aR^+b entonces existe una secuencia de elementos $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$ tales que $a_i R a_{i+1}$ para todo $i \in [0, n-1]$.

Análogamente, como bR^+c existe una secuencia de elementos

$$b = b_0, b_1, \dots, b_m = c$$

tales que $b_i R b_{i+1}$ para todo $i \in [0, m-1]$.

Entonces $aR^{n+m}c$ pues puedo armar la secuencia

$$a = a_0, a_1, \dots, a_n, b_1 \dots b_m = c$$

.

Luego como $R^{n+m} \subseteq R^+$ vale que aR^+c .

3. Para toda relación $G : A \rightarrow A$ tal que $R \subseteq G \wedge G$ es transitiva, entonces $R^+ \subseteq G$, es decir R^+ es la relación transitiva más pequeña que contiene a R .**DEMOSTRACIÓN**

Si aR^+b entonces existe una secuencia de elementos $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$ tales que $a_i R a_{i+1}$ para todo $i \in [0, n-1]$.

Como $R \subseteq G$ entonces $a_i G a_{i+1}$ para todo $i \in [0, n-1]$. Como G es transitiva entonces la aplicación repetida de la transitividad nos lleva a que $a_1 G a_n$, por lo que aGb .

Clausura transitiva reflexiva:

$$R^* = R^+ \cup id_A = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$$

Observaciones:

- Si A es un conjunto finito, entonces todas las relaciones $R : A \rightarrow A$ son finitas.
- Si R es reflexiva, entonces $R^* = R^+$.

1.2. Alfabetos

Alfabeto: Un alfabeto es un conjunto finito de símbolos.

Cadena: Una cadena sobre un alfabeto Σ es una secuencia finita de símbolos de Σ . Los símbolos son notados respetando el orden de la secuencia.

Concatenación: Es una operación entre un símbolo del alfabeto Σ y una cadena sobre dicho alfabeto:

$$\circ : \Sigma \times \{\text{cadenas sobre } \Sigma\} \rightarrow \{\text{cadenas de } \Sigma\}$$

- La cadena nula λ es el elemento neutro de la concatenación.

Clausura de Kleene de Σ : Σ^*

- $\lambda \in \Sigma^*$
- $\alpha \in \Sigma^* \implies \forall a \in \Sigma, a \circ \alpha \in \Sigma^*$

Clausura positiva de Σ : $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\lambda\}$

1.3. Lenguajes

Lenguaje: Un lenguaje es un conjunto de cadenas sobre un alfabeto Σ .

Concatenación de lenguajes: Si L_1 y L_2 son lenguajes definidos sobre los alfabetos Σ_1 y Σ_2 respectivamente, entonces la concatenación de L_1 y L_2 es un lenguaje $L_1 L_2$ sobre el alfabeto $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ definido de la siguiente manera:

$$L_1 L_2 = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L_1, \beta \in L_2\}$$

Clausura de Kleene L^* :

$$L^0 = \{\lambda\}$$

$$L^n = L L^{n-1} \text{ para } n \geq 1$$

$$L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$$

Clausura positiva L^+ :

$$L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$$

Observaciones:

- $L^+ = L L^*$
- $L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$
- Si L es un lenguaje definido sobre Σ entonces $L \subseteq \Sigma^*$

1.4. Gramáticas

Una gramática es una 4-tupla (V_N, V_T, P, S) donde:

- V_N es un conjunto finito de símbolos no terminales.
- V_T es un conjunto finito de símbolos terminales.
- P es un conjunto finito de reglas de producción: Son pares ordenados $\alpha \rightarrow \beta$ donde

$$\alpha \in (V_N \cup V_T)^* V_N (V_N \cup V_T)^* \text{ y } \beta \in (V_N \cup V_T)^*$$

- $S \in V_N$ es el símbolo inicial.

Dada una producción $A \rightarrow \alpha \in P$, se denomina a A como **cabeza** de la producción y a α como su **cuerpo**.

Derivación: El proceso por el cual se obtiene una cadena a partir de un símbolo inicial reemplazando recursivamente símbolos no terminales por cuerpos de producciones en P cuya cabeza coincida con los símbolos que están siendo reemplazados.

Forma setencial de una gramática: Se llama forma setencial a cualquier derivación de la gramática:

- S es una forma setencial de G
- Si $\alpha\beta\gamma$ es una forma setencial de G y $\beta \rightarrow \delta \in P$ entonces $\alpha\delta\gamma$ es una forma setencial de G .

Derivación directa en G : Si $\alpha\beta\gamma \in (V_N \cup V_T)^*$ y $\beta \rightarrow \delta \in P$ entonces $\alpha\delta\gamma$ es una derivación directa de G de $\alpha\beta\gamma$ y se denota como $\alpha\beta\gamma \xRightarrow{G} \alpha\delta\gamma$.

- \xRightarrow{G}^+ es la clausura positiva.
- \xRightarrow{G}^* es la clausura transitiva y reflexiva.
- \xRightarrow{G}^k será la potencia k -ésima.

Lenguaje de una gramática $\mathcal{L}(G)$: Es el conjunto de todas las cadenas de símbolos terminales que son formas setenciales de G .

$$\mathcal{L}(G) = \{\alpha \in V_T^* : S \xRightarrow{G}^+ \alpha\}$$

1.4.1. Clasificación de gramáticas (Chomsky)

Gramáticas regulares (tipo 3): Son aquellas gramáticas que cumplen alguna de las siguientes condiciones:

- Todas sus producciones son de la forma $A \rightarrow aB$ ó $A \rightarrow a$ ó $A \rightarrow \lambda$ donde $A, B \in V_N$ y $a \in V_T$. En este caso se dice que es una gramática lineal a derecha.
- Todas sus producciones son de la forma $A \rightarrow Ba$ ó $A \rightarrow a$ ó $A \rightarrow \lambda$ donde $A, B \in V_N$ y $a \in V_T$. En este caso se dice que es una gramática lineal a izquierda.

Gramáticas libres de contexto (tipo 2): Son aquellas gramáticas en las que cada producción es de la forma $A \rightarrow \alpha$ donde $A \in V_N$ y $\alpha \in (V_N \cup V_T)^*$.

De la definición anterior puede inferirse que toda gramática regular es libre de contexto.

Gramáticas sensibles al contexto (tipo 1): Son aquellas gramáticas en las que cada producción es de la forma $\alpha \rightarrow \beta$ donde $\alpha, \beta \in (V_N \cup V_T)^*$ y $|\alpha| \leq |\beta|$. Se puede inferir que toda gramática independiente del contexto que no posea regla borradora (es decir, que no posea producciones de la forma $A \rightarrow \lambda$) es sensible al contexto.

Gramáticas sin restricciones (tipo 0): Son aquellas gramáticas que no poseen ninguna restricción sobre la forma de sus producciones. El conjunto de las gramáticas tipo 0 es el conjunto de todas las gramáticas y permite generar todos los lenguajes aceptados por una máquina de Turing.

Definición: Un lenguaje generado por una gramática tipo t es llamado **lenguaje tipo t** .

2. Autómatas finitos

2.1. Autómatas finitos determinísticos (AFD)

Un autómata finito determinista es una 5-tupla $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde:

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es un conjunto finito de símbolos de entrada.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ es una función de transición.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Función de transición generalizada $\hat{\delta}$: La función de transición δ está definida para que tome como parámetro un único símbolo de Σ . Se puede extender para que tome como parámetro una cadena de símbolos de Σ , es decir $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$:

- $\hat{\delta}(q, \lambda) = q$
- $\hat{\delta}(q, \beta a) = \delta(\hat{\delta}(q, \beta), a)$ con $\beta \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$

Cadena aceptada por un AFD: Una cadena $\beta \in \Sigma^*$ es aceptada por un AFD $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ si y solo si $\hat{\delta}(q_0, \beta) \in F$.

Lenguaje aceptado por un AFD: El lenguaje aceptado por un AFD $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ es el conjunto de todas las cadenas $\beta \in \Sigma^*$ que son aceptadas por \mathcal{M} :

$$L(\mathcal{M}) = \{\beta \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, \beta) \in F\}$$

2.2. Autómatas finitos no deterministas (AFND)

Un autómata finito no determinista es una 5-tupla $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde:

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es un conjunto finito de símbolos de entrada.
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ es una función de transición.

A diferencia de los AFD, la función δ devuelve un conjunto de estados en lugar de un solo estado.

- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Función de transición generalizada $\hat{\delta}$: Primero vamos a definir $\delta_P : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ de la siguiente manera:

$$\delta_P(P, a) = \bigcup_{p \in P} \delta(p, a)$$

La función $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ se define de manera recursiva como:

- $\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$
- $\hat{\delta}(q, \beta a) = \{p : \exists r \in \hat{\delta}(q, \beta) \text{ tal que } p \in \delta(r, a)\} = \delta_P(\hat{\delta}(q, \beta), a) \text{ con } \beta \in \Sigma^* \text{ y } a \in \Sigma$

Para generalizar a un más podemos definir $\hat{\delta}_P : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ de la siguiente manera:

$$\hat{\delta}_P(P, \beta) = \bigcup_{q \in P} \hat{\delta}(q, \beta)$$

Cadena aceptada por un AFND: Una cadena $\beta \in \Sigma^*$ es aceptada por un AFND $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ si y solo si $\hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset$. Es decir, si alguno de los estados alcanzados por $\hat{\delta}(q_0, \beta)$ es un estado final.

Lenguaje aceptado por un AFND: El lenguaje aceptado por un AFND $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ es el conjunto de todas las cadenas $\beta \in \Sigma^*$ que son aceptadas por \mathcal{M} :

$$L(\mathcal{M}) = \{\beta \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset\}$$

2.2.1. Equivalencia entre AFD y AFND

Es trivial ver que para todo AFD existe un AFND que acepte el mismo lenguaje.

Teorema 2.1. Dado una AFND $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, existe un AFD $\mathcal{M}' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$ tal que $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$.

Vamos a demostrar este teorema construyendo una AFD \mathcal{M}' a partir de \mathcal{M} . Una vez constuido deberemos demostrar que \mathcal{M}' acepta el mismo lenguaje que \mathcal{M} .

Construcción de \mathcal{M}' :

- Q' será el conjunto de partes $\mathcal{P}(Q)$. Vamos a denotar cada estado $s \in Q'$ con etiquetas del estilo $[q_1, \dots, q_k]$ donde $q_1, \dots, q_k \in Q$. Entonces:

$$Q' = \mathcal{P}(Q)$$

- $\delta'([q_1, \dots, q_k], a) = [p_1, \dots, p_m] \iff \delta_P(\{q_1, \dots, q_k\}, a) = \{p_1, \dots, p_m\}$
- $q'_0 = [q_0]$
- $F' = \{[q_1, \dots, q_n] \in Q' : \{q_1, \dots, q_n\} \cap F \neq \emptyset\}$

Equivalencia entre funciones de transición: Antes de demostrar que ambos autómatas aceptan el mismo lenguaje, vamos a demostrar que las funciones de transición generalizadas de ambos autómatas son equivalentes cuando las llamamos con el estado inicial como primer parámetro. Es decir, queremos ver que $\hat{\delta}'(q'_0, \beta) = [p_1, \dots, p_k] \iff \hat{\delta}(q_0, \beta) = \{p_1, \dots, p_k\}$.

Lo vamos a hacer por inducción. Recordemos que $q'_0 = [q_0]$:

■ Caso base: $\beta = \lambda$:

- $\hat{\delta}'([q_0], \lambda) = [q_0]$ por definición de $\hat{\delta}'$.
- $\hat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$ por definición de $\hat{\delta}$.

Luego $\hat{\delta}'([q_0], \lambda) = [q_0] \iff \hat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

■ Caso inductivo: $\beta \implies \beta a$:

Nuestra hipótesis inductiva es $\hat{\delta}'(q'_0, \beta) = [r_1, \dots, r_m] \iff \hat{\delta}(q_0, \beta) = \{r_1, \dots, r_m\}$.

Queremos ver que $\hat{\delta}'(q'_0, \beta a) = [p_1, \dots, p_k] \iff \hat{\delta}(q_0, \beta a) = \{p_1, \dots, p_k\}$

$$\begin{aligned}
 \hat{\delta}'(q'_0, \beta a) = [p_1, \dots, p_k] &\stackrel{\text{def.}}{\iff} \delta'(\hat{\delta}'(q'_0, \beta), a) = [p_1, \dots, p_k] \\
 &\stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists [r_1, \dots, r_m] \in Q' \text{ tal que } \delta'(q'_0, \beta) = [r_1, \dots, r_m] \\
 &\quad \wedge \delta'([r_1, \dots, r_m], a) = [p_1, \dots, p_k] \\
 &\stackrel{\text{H.I.}}{\iff} \exists \{r_1, \dots, r_m\} \in Q \text{ tal que } \hat{\delta}(q_0, \beta) = \{r_1, \dots, r_m\} \\
 &\quad \wedge \delta_P(\{r_1, \dots, r_m\}, a) = \{p_1, \dots, p_k\} \\
 &\stackrel{\text{def.}}{\iff} \delta_P(\hat{\delta}(q_0, \beta), a) = \{p_1, \dots, p_k\} \stackrel{\text{def.}}{\iff} \hat{\delta}(q_0, \beta a) = \{p_1, \dots, p_k\}
 \end{aligned}$$

Demostración de la equivalencia: Ahora que hemos demostrado que las funciones de transición generalizadas de ambos autómatas son equivalentes, vamos a demostrar que ambos autómatas aceptan el mismo lenguaje:

$$\begin{aligned}
 \beta \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) &\stackrel{\text{def.}}{\iff} \hat{\delta}(q_0, \beta) = \{q_1, \dots, q_n\} \wedge \{q_1, \dots, q_n\} \cap F \neq \emptyset \\
 &\stackrel{\text{equiv.}}{\iff} \hat{\delta}(q'_0, \beta) = [q_1, \dots, q_n] \wedge [q_1, \dots, q_n] \in F' \\
 &\stackrel{\text{def.}}{\iff} x \in \mathcal{L}(M')
 \end{aligned}$$

2.3. Autómatas finitos no determinístico con transiciones λ

Un autómata finito no determinista con transiciones λ es un autómata finito no determinista que tiene transiciones λ . Estas transacciones nos permiten ir de un estado a otro sin consumir ningún símbolo de entrada.

Los definimos con una 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es un conjunto finito de símbolos de entrada.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ es una función de transición.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Clausura λ de un estado q : Se denota $Cl_\lambda(q)$ es el conjunto de estados que se pueden alcanzar desde q siguiendo solo transiciones λ . Es decir,

$$Cl_\lambda(q) = \delta(q, \lambda)$$

Además $q \in Cl_\lambda(q)$.

Clausura λ de un conjunto de estados P :

$$Cl_{P\lambda}(P) = \bigcup_{p \in P} Cl_\lambda(p)$$

Generalización de la función de transición: Podemos extender δ a conjunto de estados:

$$\delta_P : \mathcal{P}(Q) \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

$$\delta_P(P, a) = \bigcup_{p \in P} \delta(p, a)$$

Entonces podemos definir:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

$$\hat{\delta}(q_0, \lambda) = Cl_\lambda(q_0)$$

$$\hat{\delta}(q_0, \beta a) = Cl_{P\lambda} \left(\delta_P(\hat{\delta}(q_0, \beta), a) \right) = Cl_{P\lambda} \left(\left\{ p : \exists q \in \hat{\delta}(q_0, \beta) \text{ tal que } p \in \delta(q, a) \right\} \right)$$

También extendemos $\hat{\delta}$ a conjuntos de estados:

$$\hat{\delta}_P : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$$

$$\hat{\delta}_P(P, \beta a) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}(p, \beta a)$$

Cadena aceptada por un AFND- λ : Una cadena β es aceptada por un AFND- λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ si y solo si $\hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset$.

Lenguaje aceptado por un AFND- λ : El lenguaje aceptado por un AFND- λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ es el conjunto de todas las cadenas aceptadas por M :

$$\mathcal{L}(M) = \{\beta \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset\}$$

2.3.1. Equivalencia entre AFND y AFND- λ

Dado un AFND- λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ podemos construir un AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F' \rangle$ tal que M acepte el mismo lenguaje que M' .

Construcción de M' : Notemos que ambos autómatas tiene el mismo conjunto de estados Q , el mismo conjunto de símbolos de entrada Σ y el mismo estado inicial q_0 . Por lo que solo debemos definir δ' y F' .

$$\begin{aligned} \blacksquare \delta'(q, a) &= \hat{\delta}(q, a) = Cl_{P\lambda} \left(\delta_P(\hat{\delta}(q, \lambda), a) \right) \\ \blacksquare F' &= \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{si } Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \\ F & \text{si no} \end{cases} \end{aligned}$$

Equivalencia de funciones de transición generalizada: Vamos a demostrar por inducción que $\hat{\delta}'(q_0, \beta) = \hat{\delta}(q_0, \beta)$ para todo $|\beta| \geq 1$:

- Caso base: $|\beta| = 1$. Sea $\beta = a$, entonces $\hat{\delta}'(q_0, \beta) = \hat{\delta}'(q_0, a) = \hat{\delta}(q_0, a)$ por como definimos δ' .
- Caso inductivo: Supongamos que $\hat{\delta}'(q_0, \beta) = \hat{\delta}(q_0, \beta)$ para todo $|\beta| \leq n$. Sea $\omega = \beta a$. Entonces:

$$\hat{\delta}'(q_0, \omega) = \hat{\delta}'(q_0, \beta a) \stackrel{\text{def.}}{=} \delta'_P(\hat{\delta}'(q_0, \beta), a) \stackrel{\text{H.I.}}{=} \delta'_P(\hat{\delta}(q_0, \beta), a) \quad (1)$$

Por otro lado, dado $P \subseteq Q$ tenemos que:

$$\delta'_P(P, a) \stackrel{\text{def.}}{=} \bigcup_{p \in P} \delta'(p, a) \stackrel{\text{constr.}}{=} \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}(p, a) \stackrel{\text{def.}}{=} \hat{\delta}_P(P, a)$$

Entonces, remplazando el último término en (1), nos queda:

$$\delta'_P(\hat{\delta}(q_0, \beta), a) = \hat{\delta}_P(\hat{\delta}(q_0, \beta), a) \stackrel{\text{def.}}{=} \hat{\delta}(q_0, \beta a) \stackrel{\text{def.}}{=} \hat{\delta}(q_0, \omega)$$

Demostración de equivalencia: Veamos ahora que M acepta el mismo lenguaje que M' , vamos a separar la demostración en dos casos: $\beta = \lambda$ y $\beta \neq \lambda$.

- $\beta = \lambda$

$$\bullet \lambda \in \mathcal{L}(M) \implies \lambda \in \mathcal{L}(M')$$

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathcal{L}(M) &\stackrel{\text{def.}}{\iff} \hat{\delta}(q_0, \lambda) \cap F \neq \emptyset \\ &\stackrel{\text{def.}}{\iff} Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \\ &\stackrel{\text{constr.}}{\implies} q_0 \in F' \stackrel{\text{def.}}{\iff} \lambda \in \mathcal{L}(M') \end{aligned}$$

- $\lambda \in \mathcal{L}(M') \implies \lambda \in \mathcal{L}(M)$.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathcal{L}(M') &\xRightarrow{\text{def.}} q_0 \in F' \\
&\xRightarrow{\text{constr.}} q_0 \in F \vee Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \\
&\xRightarrow{\text{def. } F} Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \vee Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \\
&\xRightarrow{\text{def.}} Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \\
&\xLeftrightarrow{\text{def.}} \lambda \in \mathcal{L}(M)
\end{aligned}$$

■ $\beta \neq \lambda$

- $\beta \in \mathcal{L}(M) \implies \beta \in \mathcal{L}(M')$

$$\begin{aligned}
\beta \in \mathcal{L}(M) &\xRightarrow{\text{def.}} \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset \\
&\xRightarrow{\text{equiv. tran.}} \hat{\delta}'(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset \\
&\xRightarrow{\text{constr. } M'} \hat{\delta}'(q_0, \beta) \cap F' \neq \emptyset \xRightarrow{\text{def.}} \beta \in \mathcal{L}(M')
\end{aligned}$$

- $\beta \in \mathcal{L}(M') \implies \beta \in \mathcal{L}(M)$

$$\begin{aligned}
\beta \in \mathcal{L}(M') &\xRightarrow{\text{def.}} \hat{\delta}'(q_0, \beta) \cap F' \neq \emptyset \\
&\xRightarrow{\text{equiv. trans}} \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset \vee \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap (F \cup \{q_0\}) \neq \emptyset \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap \\
&\xRightarrow{\text{constr. } M'} \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset
\end{aligned}$$

Si vale la primera parte de la última expresión $\delta(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset$ entonces $\beta \in \mathcal{L}(M)$ por definición.

Veamos que pasa si vale $\hat{\delta}(q_0, \beta) \cap (F \cup \{q_0\}) \neq \emptyset$, es decir hay un camino de transiciones λ desde q_0 hasta algún estado estado $q' \in F$:

$$\hat{\delta}(q_0, \beta) \cap (F \cup \{q_0\}) \neq \emptyset \implies \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset \vee \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap \{q_0\} \neq \emptyset$$

La primer parte es lo mismo que arriba, analizemos la segunda:

$$\hat{\delta}(q_0, \beta) \cap \{q_0\} \neq \emptyset \implies Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \implies \lambda \in \mathcal{L}(M)$$

Queda demostrada la equivalencia de lenguajes.

3. Expresiones regulares

Una expresión regular es una expresión que describe un lenguaje de forma compacta y sencilla:

- \emptyset es una expresión regular que describe el lenguaje vacío \emptyset .
- λ es una expresión regular que describe el lenguaje unitario $\{\lambda\}$.
- Para cada $a \in \sigma$, a es una expresión regular que describe el lenguaje $\{a\}$.
- Si r y s son dos expresiones que denotan los lenguajes R y S entonces:
 - $r|s$ ó $r + s$ es una expresión regular que describe el lenguaje $R \cup S$.
 - rs es una expresión regular que describe el lenguaje RS .
 - r^* es una expresión regular que describe el lenguaje R^* .
 - r^+ es una expresión regular que describe el lenguaje R^+ .

Expresiones regulares recursivas: Si $r = \alpha r + \beta$, entonces $r = \alpha^* \beta$. Además, si $\alpha^* = \alpha^+$, entonces $r = \alpha^*(\beta + \gamma)$ para cualquier expresión regular γ .

3.1. Expresiones regulares a AFND- λ

Dada una expresión regular r , existe una AFND- λ M con un solo estado final y sin transiciones a partir del mismo tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(r)$.

Vamos a demostrar por inducción sobre los operadores de las expresiones regulares.

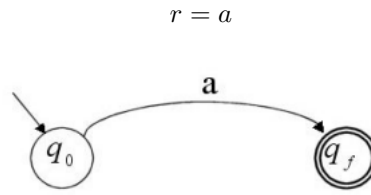
3.1.1. Casos base

$$r = \emptyset$$



$$r = \lambda$$





3.1.2. Pasos inductivos

Sean r_1 y r_2 dos expresiones regulares. Supongamos que existen AFND- λ $M_1 = \langle Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, \{f_1\} \rangle$ y $M_2 = \langle Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, \{f_2\} \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(r_1)$ y $\mathcal{L}(M_2) = \mathcal{L}(r_2)$. Vamos a armar a partir de estos autómatas uno nuevo que acepte los lenguajes generados por las expresiones $r_1|r_2$, r_1r_2 , r_1^* y r^+ .

$r_1|r_2$: Podemos construir un automata $M_0 = \langle Q_0, \Sigma_0, \delta_0, q_0, \{f_0\} \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M_0) = \mathcal{L}(r_1|r_2)$ de la siguiente forma:

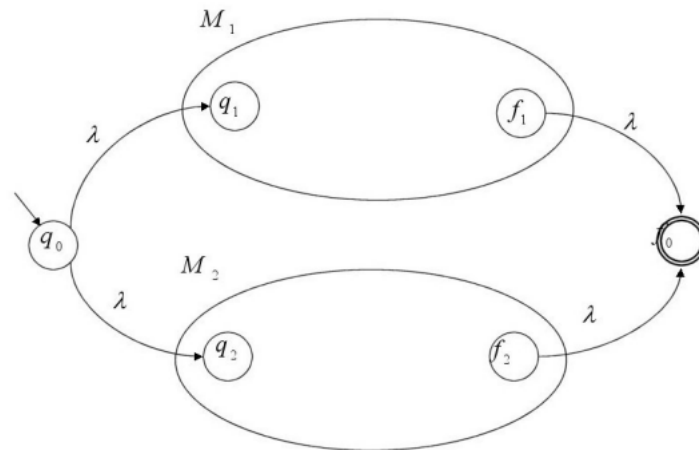
- $Q_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, f_0\}$
- $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $\delta_0 : Q_0 \times \Sigma_0 \rightarrow \mathcal{P}(Q_0)$

$$\delta(q_0, \lambda) = \{q_1, q_2\}$$

$$\delta(q, a) = \delta_1(q, a) \text{ para } q \in Q_1 - \{f_1\} \text{ y } a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$$

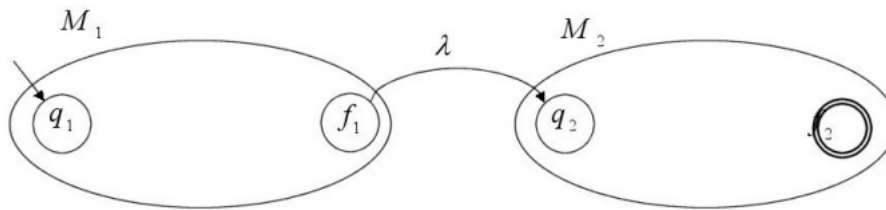
$$\delta(q, a) = \delta_2(q, a) \text{ para } q \in Q_2 - \{f_2\} \text{ y } a \in \Sigma_2 \cup \{\lambda\}$$

$$\delta(f_1, \lambda) = \delta(f_2, \lambda) = \{f_0\}$$



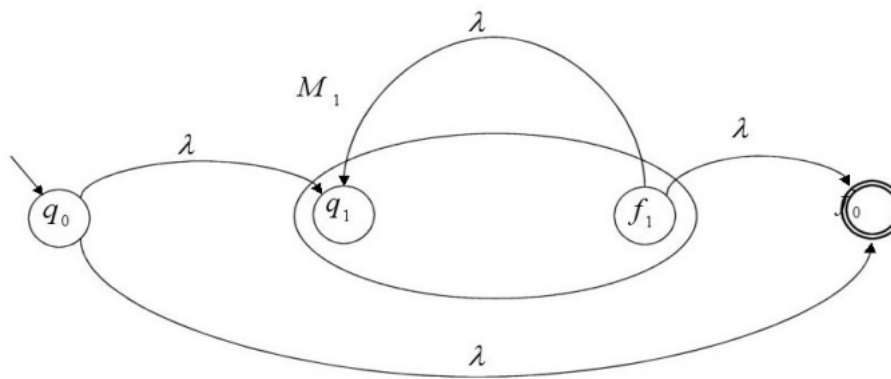
$r_1 r_2$: $M_0 = \langle Q_0, \Sigma_0, \delta_0, q_1, \{f_2\} \rangle$:

- $Q_0 = Q_1 \cup Q_2$
- $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $\delta_0 : Q_0 \times \Sigma_0 \rightarrow \mathcal{P}(Q_0)$
 - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para $q \in Q_1 - \{f_1\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$
 - $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ para $q \in Q_2 - \{f_2\}$ y $a \in \Sigma_2 \cup \{\lambda\}$
 - $d(f_1, \lambda) = \{q_2\}$



r_1^* : $M_0 = \langle Q_0, \Sigma_1, \delta_0, q_0, \{f_0\} \rangle$:

- $Q_0 = Q_1 \cup \{f_0, q_0\}$
- $\delta_1 : Q_0 \times \Sigma_1 \rightarrow \mathcal{P}(Q_0)$
 - $\delta(q_0, \lambda) = \delta(f_1, \lambda) = \{q_1, f_0\}$
 - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para $q \in Q_1 - \{f_1\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$



Para el caso r_1^+ es el mismo autómata que para este caso sin la transición $q_0 \xrightarrow{\lambda} f_0$.

3.2. AFD a expresión regular

Dado un AFD $M = \langle \{q_1, \dots, q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, F \rangle$, que acepta el lenguaje \mathcal{L} , existe una expresión regular que denota el mismo lenguaje.

3.2.1. Demostración

Nombremos $R_{i,j}^k$ a la expresión regular cuyo lenguaje $\omega \subseteq \Sigma^*$ son las cadenas que llevan al autómata M desde el estado q_i al estado q_j pasando solo por estados q_l con $l \leq k$. En particular $R_{i,j}^n$ es la expresión regular que representa todas las cadenas que permiten ir del estado i al estado j .

Vamos a buscar como construir $R_{i,j}^k$ para cada $k \in \{0, \dots, n\}$ de manera inductiva. Suponiendo que demostramos la existencia de esta expresión regular, podemos concluir que la unión $R_{1,f_1}^n | R_{1,f_2}^n | \dots | R_{1,f_m}^n$ (con $f_1 \dots f_m \in F$) es la expresión regular que representa el lenguaje \mathcal{L} :

Caso base ($k = 0$): Como todos los estados están enumerados del 1 para arriba, $k = 0$ significa que no debe haber estados intermedios en el camino entre q_i y q_j , por lo que pueden ser de dos formas:

- Una arco del estado i al estado j .
- Un camino de longitud cero que solo contiene el estado i .

Si $i \neq j$, entonces solo es posible la primera opción. Debemos examinar el AFD y encontrar aquellos símbolos que nos permitan ir del estado i al estado j .

1. Si no existe tal símbolo, entonces $R_{i,j}^0 = \emptyset$.
2. Si existe exactamente un símbolo a , entonces $R_{i,j}^0 = a$.
3. Si existen más de un símbolo, entonces $R_{i,j}^0 = a_1 | a_2 | \dots | a_n$.

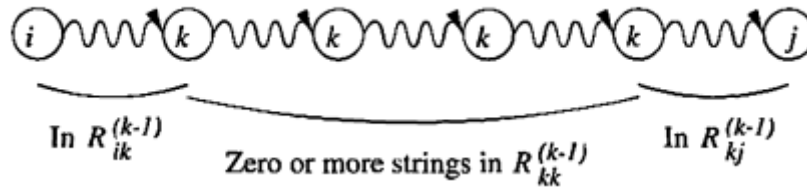
Ahora, si $i = j$ entonces los caminos de longitud cero también son posibles, por lo que habría que agregar a cada una de las expresiones recién mencionadas el símbolo λ :

1. $R_{i,j}^0 = \lambda$.
2. $R_{i,j}^0 = a | \lambda$.
3. $R_{i,j}^0 = a_1 | a_2 | \dots | a_n | \lambda$.

Paso inductivo: Supongamos que hay un camino desde el estado i al estado j que no pasa por estados mas grandes k . Entonces podemos considerar las siguientes dos opciones:

1. El camino no pasa por el estado k , por lo que el lenguaje de $R_{i,j}^{k-1}$ contiene a ese camino.

2. El camino pasa por el estado k por lo menos una vez. Entonces podemos partir el camino en varias partes:



La primer parte, va desde el estado i al estado k sin pasar por k , la última parte es desde el estado k al estado j sin pasar por k , y todas las partes intermedia s van desde el estado k al estado k sin pasar por k . Cada una de estas partes ya tiene una expresión regular asociada: $R_{i,k}^{k-1}$, $R_{k,k}^{k-1}$, $R_{k,j}^{k-1}$, por lo que podemos unir las para obtener la expresión regular que representa el camino completo de la siguiente forma:

$$R_{i,k}^{k-1} \left(R_{k,k}^{k-1} \right)^* R_{k,j}^{k-1}$$

Entonces $R_{i,j}^k$ es la unión de las expresiones de los dos tipos de caminos que acabamos de describir:

$$R_{i,j}^k = R_{i,j}^{k-1} \cup R_{i,k}^{k-1} \left(R_{k,k}^{k-1} \right)^* R_{k,j}^{k-1}$$

Finalmente, si construimos en orden todas estas expresiones regulares desde $R_{i,j}^0$, eventualmente llegaremos hasta $R_{i,j}^n$.

Y como dijimos, más arriba si calculamos $R_{1,j}^0$ para cada $q_j \in F$ y unimos todas las expresiones, obtendremos la expresión regular que representa el lenguaje \mathcal{L} .

3.3. Gramática regular a AFND

Dada una gramática regular $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$, podemos construir un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ que reconozca el lenguaje generado por G

3.3.1. Demostración

Vamos a construir el autómata finito no determinista M y demostrar que reconoce el lenguaje generado por G .

Construcción de M : Construyamos M de la siguiente manera:

- $Q = V_N \cup \{q_f\}$. Denotaremos q_A al estado que representa al no símbolo no terminar A .
- $\Sigma = V_T$
- $q_0 = q_S$

- Si $A, B \in V_N$ y $a \in \Sigma$, entonces:
 - $q_B \in \delta(q_A, a) \iff A \rightarrow aB \in P$
 - $q_f \in \delta(q_A, a) \iff A \rightarrow a \in P$
 - $q_A \in F \iff A \rightarrow \lambda \in P$
 - $q_f \in F$

Equivalencia clausura transitiva de producciones y δ : Vamos a probar por inducción que

$$A \xRightarrow{*} \alpha B \iff q_B \in \hat{\delta}(q_A, \alpha)$$

- **Caso base $\alpha = \lambda$:**

- $A \xRightarrow{*} \alpha B$, pero las gramáticas regulares no acentan producciones que vayan de un no terminal a otro sin pasar por un terminal, por lo que $B = A$. Osea $A \xRightarrow{*} \alpha A$.
- Además, como es un AFND, no tiene transiciones lambda, osea que $\delta(q_A, \lambda) = \{q_A\}$, por lo que $q_A \in \hat{\delta}(q_A, \alpha)$.

- **Caso inductivo $\alpha = \beta a$:**

$$\begin{aligned}
 A \xRightarrow{*} \alpha B &\iff A \xRightarrow{*} \beta a B \xLeftrightarrow[\text{def.}] \exists C \in V_N : A \xRightarrow{*} \beta C \wedge C \rightarrow a B \\
 &\xLeftrightarrow[\text{H.I.}] \exists q_C \in Q, q_c \in \hat{\delta}(q_A, \alpha) \wedge q_B \in \delta(q_C, a) \\
 &\quad \text{constr. M} \\
 &\iff q_B \in \delta(\hat{\delta}(q_A, \alpha), a) \\
 &\iff q_B \in \hat{\delta}(q_A, \beta a) \iff q_B \in \hat{\delta}(q_A, \alpha)
 \end{aligned}$$

Demostración de la equivalencia: Vamos a demostrar que el lenguaje generado por G y M son iguales, osea que $\alpha a \in \mathcal{L}(M) \iff S \xRightarrow{*} \alpha a$. Como G es una gramática regular, hay solo dos formas de llegar desde S hasta αa :

1. $\exists A \in V_N : S \xRightarrow{*} \alpha A \wedge A \rightarrow a \in P$
2. $\exists B \in V_N : S \xRightarrow{*} \alpha a B \wedge B \rightarrow \lambda \in P$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 S \xRightarrow{*} \alpha a &\xLeftrightarrow[\text{def. G}] (\exists A \in V_N : S \xRightarrow{*} \alpha A \wedge A \rightarrow a \in P) \vee (\exists B \in V_N : S \xRightarrow{*} \alpha a B \wedge B \rightarrow \lambda \in P) \\
 &\xLeftrightarrow[\text{Equiv. anterior}] (\exists q_A \in Q, q_A \in \hat{\delta}(q_0, \alpha) \wedge q_f \in \delta(q_A, a)) \vee (\exists q_B \in Q, q_B \in \hat{\delta}(q_0, \alpha a) \wedge q_B \in F) \\
 &\xLeftrightarrow[\text{def. } \delta] q_f \in \delta(q_S, \alpha a) \vee (\exists q_B \in Q, q_B \in \hat{\delta}(q_0, \alpha a) \wedge q_B \in F) \\
 &\iff \alpha a \in \mathcal{L}(M)
 \end{aligned}$$

Falta ver que pasa si $\lambda \in \mathcal{L}(G)$:

$$\lambda \in \mathcal{L}(G) \iff S \xrightarrow{*} \lambda \iff S \rightarrow \lambda \in P \iff q_S \in F \iff \lambda \in \mathcal{L}(M)$$

3.4. AFD a gramática regular

Dado un AFD $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, existe una gramática regular $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ equivalente

3.4.1. Demostración

Contrucción de G : Vamos a construir G de la siguiente forma:

- $V_N = Q$, para mayor claridad llamamos A_p al no terminal correspondiente al estado $p \in Q$
- $V_T = \Sigma$
- $S = q_0$
- Si $q \in Q \wedge q \notin F$ entonces $A_p \rightarrow aA_q \in P \iff \delta(p, a) = q$
- Si $q \in F$ entonces $A_p \rightarrow a \in P \iff \delta(p, a) = q$
- $S \rightarrow \lambda \in P \iff q_0 \in F$

Paso intermedio: Vamos a demostrar por inducción:

$$\hat{\delta}(p, \alpha) = q \iff A_p \xrightarrow{*} \alpha A_q$$

- **Caso base:** $\alpha = \lambda$ es trivial:

$$\hat{\delta}(p, \lambda) = q \iff A_p \xrightarrow{*} A_p$$

- **Caso inductivo** $\alpha = \beta a$: Queremos probar que $\hat{\delta}(p, \alpha) = q \iff A_p \xrightarrow{*} \alpha A_q$.

Nuestra hipótesis inductiva: $\hat{\delta}(p, \beta) = q \iff A_p \xrightarrow{*} \beta A_q$ para todo $|\beta| \leq n$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(p, \alpha) = \hat{\delta}(p, \beta a) = q &\stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists r \in Q : \hat{\delta}(p, \beta) = r \wedge \delta(r, a) = q \\ &\stackrel{\text{H.I}}{\iff} \exists A_r, A_p \xrightarrow{*} \beta A_r \wedge A_r \rightarrow aA_q \in P \iff A_p \xrightarrow{*} \beta aA_q \\ &\text{constr. } G \end{aligned}$$

Demostración de equivalencia de lenguajes:

$$\begin{aligned} \alpha a \in \mathcal{L}(M) &\stackrel{\text{def.}}{\iff} \hat{\delta}(q_0, \alpha a) \in F \stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists q \in Q : \hat{\delta}(q_0, \alpha) = q \wedge \delta(q, a) \in F \\ &\stackrel{\text{paso intermedio}}{\iff} \exists A_p, A_{q_0} \xrightarrow{*} \alpha A_p \wedge A_p \rightarrow a \in P \iff A_{q_0} \xrightarrow{*} \alpha a \\ &\stackrel{\text{def.}}{\iff} \alpha a \in \mathcal{L}(G) \end{aligned}$$

4. Minimización de AFD

4.1. Indistinguibilidad

Sea $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un AFD, decimos que $p, q \in Q$, son indistinguibles ($p \equiv q$) si para toda cadena $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $\hat{\delta}(p, \alpha) \in F$ entonces pasa que $\hat{\delta}(q, \alpha) \in F$ y viceversa. Si $p, q \in Q$ son indistinguibles, entonces decimos que p y q son equivalentes.

$$p \equiv q \iff \forall \alpha \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F)$$

Teorema: Si p y q son indistinguibles, sea $\alpha \in \Sigma^*$ entonces $\hat{\delta}(p, \alpha) \equiv \hat{\delta}(q, \alpha)$

$$p \equiv q \implies \forall \alpha \in \Sigma^* : \hat{\delta}(p, \alpha) \equiv \hat{\delta}(q, \alpha)$$

DEMOSTRACIÓN

Sean $p, q \in Q$, $p \equiv q$.

Supongamos que existe $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $\hat{\delta}(p, \alpha) \neq \hat{\delta}(q, \alpha)$ entonces existe una cadena $\gamma \in \Sigma^*$ que distingue a $\hat{\delta}(p, \alpha)$ de $\hat{\delta}(q, \alpha)$. Osea que $\hat{\delta}(\hat{\delta}(p, \alpha), \gamma) \in F$ y $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \alpha), \gamma) \notin F$ (o viceversa).

Por def: $\hat{\delta}(\hat{\delta}(p, \alpha), \gamma) = \hat{\delta}(p, \alpha\gamma)$ y $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \alpha), \gamma) = \hat{\delta}(q, \alpha\gamma)$. Entonces, como $\alpha\gamma$ es una cadena que nos permite distinguir p de q , es decir $p \not\equiv q$. Absurdo.

Teorema: \equiv es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN

■ **Reflexividad:** $p \equiv p$:

$$\forall \alpha \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(p, \alpha) \in F) \iff p \equiv p$$

■ **Simetría:** $p \equiv q \implies q \equiv p$:

$$\begin{aligned} p \equiv q &\implies \forall \alpha \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F) \\ &\iff \forall \alpha \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(q, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(p, \alpha) \in F) \iff q \equiv p \end{aligned}$$

■ **Transitividad:** $p \equiv q \wedge q \equiv r \implies p \equiv r$:

$$\begin{aligned} p \equiv q &\implies \forall \alpha \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F) \\ q \equiv r &\implies \forall \alpha \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(q, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(r, \alpha) \in F) \end{aligned}$$

Entonces

$$\forall \alpha \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(r, \alpha) \in F) \iff p \equiv r$$

4.1.1. Indistinguibilidad de orden k

$$p \stackrel{k}{\equiv} q \iff \forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k) \implies (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F)$$

Propiedades:

1. $\stackrel{k}{\equiv}$ es un relación de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN

Es exactamente igual a la demostración \equiv es transitiva.

2. $\stackrel{k+1}{\equiv} \subseteq \stackrel{k}{\equiv}$

DEMOSTRACIÓN

$$p \stackrel{k+1}{\equiv} q \implies \forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k+1) \implies (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F)$$

Ahora como esto vale $\forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k+1)$, necesariamente vale $\forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k)$. Entonces

$$\forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k+1) \implies (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F) \implies p \stackrel{k}{\equiv} q$$

3. $(Q / \stackrel{0}{\equiv}) = \{Q - F, F\}$ si $Q - F \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$. En castellano, $\stackrel{0}{\equiv}$ divide al conjunto de estados en estados finales y no finales.
4. $p \stackrel{k+1}{\equiv} q \iff (p \stackrel{0}{\equiv} q) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \stackrel{k}{\equiv} \delta(q, a) \right)$

DEMOSTRACIÓN

\Rightarrow) Como $\stackrel{k+1}{\equiv} \subseteq \stackrel{k}{\equiv}$ entonces $p \stackrel{k+1}{\equiv} q \implies p \stackrel{0}{\equiv} q$.

Por otro lado, supongamos que no vale $\left(\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \stackrel{k}{\equiv} \delta(q, a) \right)$ entonces

$$\exists a \in \Sigma, \exists \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k) \wedge \hat{\delta}(\delta(p, a), \alpha) \in F \wedge \hat{\delta}(\delta(q, a), \alpha) \notin F$$

o viceversa. Pero entonces $p \not\stackrel{k+1}{\equiv} q$ ya que $a\alpha \leq k+1$ y $a\alpha$ distingue a p y a q .

\Leftarrow) Supogamos que $p \stackrel{k}{\equiv} q$. Entonces ó $p \stackrel{0}{\equiv} q$ ó $\exists a\alpha, |\alpha| \leq k+1$ que distingue p de q , o sea que:

$$\hat{\delta}(\delta(p, a), \alpha) \in F \wedge \hat{\delta}(\delta(q, a), \alpha) \notin F$$

o viceversa. Pero entonces $\delta(p, a) \stackrel{k+1}{\not\equiv} \delta(q, a)$.

$$5. \left(\stackrel{k+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv} \right) \implies \forall n \geq 0, \left(\stackrel{k+n}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv} \right)$$

DEMOSTRACIÓN

Lo vamos a demostrar por inducción:

Caso base: $n = 0$. Entonces $k \stackrel{k}{\equiv} \stackrel{k}{\equiv}$.

Paso inductivo: Suponemos que es cierto para n , osea que vale $\stackrel{k+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv} \implies \stackrel{k+n}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}$

Queremos probar $\stackrel{k+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv} \implies \stackrel{k+n+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}$:

Sabemos que $\stackrel{k+n+1}{\equiv} = \stackrel{k}{\equiv}$ si y solo si $\forall p, q \in Q, \left(p \stackrel{k}{\equiv} q \iff p \stackrel{k+n+1}{\equiv} q \right)$

Por la propiedad (4), tenemos:

$$\begin{aligned} p \stackrel{k+n+1}{\equiv} &\iff \left(p \stackrel{0}{\equiv} q \right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \stackrel{k+n}{\equiv} \delta(q, a) \right) \left(p \stackrel{0}{\equiv} q \right) \\ &\wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \stackrel{k+n}{\equiv} \delta(q, a) \right) \\ &\stackrel{\text{prop. 2}}{\implies} \left(p \stackrel{0}{\equiv} q \right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \stackrel{k}{\equiv} \delta(q, a) \right) \\ &\stackrel{\text{prop. 4}}{\implies} p \stackrel{k+1}{\equiv} q \stackrel{\text{prop. 2}}{\implies} q \stackrel{k}{\equiv} p \end{aligned}$$

4.2. Autómatas finito determinístico mínimo

Sea $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un AFD sin estados inaccesibles, el AFD mínimo equivalente $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ se define de la siguiente manera:

- $Q' = Q / \equiv$. Vamos a notar $[q]$ al estado que representa a la clase de equivalencia que contiene a q .
- $\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$
- $q_0' = [q_0]$
- $F' = \{[q] \in Q' : q \in F\}$

Teorema:

$$\forall \alpha \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q, \alpha) = r \implies \hat{\delta}'(q'_0, \alpha) = \hat{\delta}'([q], \alpha) = [r]$$

DEMOSTRACIÓN

Va a ser por inducción en la longitud de α :

- $\alpha = \lambda$: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$, por def. de $\hat{\delta}$

$$\hat{\delta}'(q'_0, \epsilon) = \hat{\delta}'([q], \epsilon) = [q] \text{ por def. de } \hat{\delta}'$$

$$\text{Entonces } \hat{\delta}(q, \lambda) = q \implies \hat{\delta}'([q], \lambda) = [q]$$

- Paso inductivo: Sea $\alpha = \beta a$, queremos probar que $\hat{\delta}(q, \alpha) = r \implies \hat{\delta}'([q], \alpha) = [r]$.

$$\text{Nuestra hipótesis inductiva es } \forall \beta \in \Sigma^*, |\beta| \leq n, \hat{\delta}(q, \beta) = p \implies \hat{\delta}'([q], \beta) = [p]$$

Entonces:

$$\hat{\delta}(q, \alpha) = \hat{\delta}(q, \beta a) = \delta(\hat{\delta}(q, \beta), a) = \hat{\delta}(p, a) = r \underbrace{\implies}_{\text{constr. } \delta'} \delta'([p], a) = [r] \quad (1)$$

Además, por hipótesis inductiva sabemos que $\hat{\delta}'([q], \beta) = [p]$, entonces reemplazando en el último término de la ecuación (1) obtenemos:

$$\delta'([p], \alpha) = \delta'(\hat{\delta}'([q], \beta), a) = \hat{\delta}(q, \beta a) = \hat{\delta}(q, \alpha) = [r]$$

4.3. Algoritmo de minimización de un AFD

Require: $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

$$P \leftarrow \{Q - F, F\}$$

▷ $P \stackrel{0}{=} \equiv$, separamos los estados finales de los no finales

$$\text{stop} \leftarrow \text{false}$$

while $\text{stop} = \text{false}$ **do**

$$P' \leftarrow \emptyset$$

for $X \in P$ **do** ▷ Separamos cada clase de equivalencia en las subclases de $\stackrel{n+1}{=} \equiv$

while $\exists e \in X : \neg \text{marked}(e, X)$ **do** ▷ Elegimos un nuevo representante para cada clase

$$X_1 \leftarrow \{e\}$$

$$\text{marked}(e, X)$$

for $e' \in X : e \neq e'$ **do** ▷ Conseguimos los elementos de esa clase

if $\neg \text{marked}(e', X) \wedge (\forall a \in \Sigma, [\delta(e, a)] = [\delta(e', a)])$ **then**

$$X_1 \leftarrow X_1 \cup \{e'\}$$

$$\text{mark}(e', X)$$

end if

```

    end for
     $P' \leftarrow P' \cup \{X_1\}$ 
  end while
end for
if  $P \neq P'$  then
   $P \leftarrow P'$ 
else
   $stop \leftarrow true$ 
end if
end while

```

Lema: Sean $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ y $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$ dos AFDs. Si M no posee estados inaccesibles y todo par de cadenas que conducen a estados diferentes de M conducen a estados diferentes de M' , entonces la cantidad de estados de M' es mayor o igual a la cantidad de estados de M . Es decir:

$$\left(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q, \alpha) \neq \hat{\delta}(q, \beta) \implies \hat{\delta}'(q'_0, \alpha) \neq \hat{\delta}'(q'_0, \beta) \right) \implies |Q| \leq |Q'|$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $g : Q \rightarrow \Sigma^*$ definida por $g(q) = \min \left\{ \alpha \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, \alpha) = q \right\}$ donde suponemos una relación de orden en Σ^* dada por la longitud para cadenas de distinta longitud, y por el lexicográfico para las cadenas de igual longitud. Definamos $f : Q \rightarrow Q'$ con $f(q) = \hat{\delta}'(q'_0, g(q))$. Como para cualquier par de estados diferentes $p, q \in Q$ es cierto que $\hat{\delta}(q_0, g(p)) \neq \hat{\delta}(q_0, g(q))$, entonces $\hat{\delta}'(q'_0, g(p)) \neq \hat{\delta}'(q'_0, g(q))$. Lo que equivale a decir que $f(p) \neq f(q)$. Por lo tanto, f es una función inyectiva, es decir que $|Q| \leq |Q'|$.

Lema: Sea $M_R = \langle Q_R, \Sigma, \delta_R, q_{R0}, F_R \rangle$ el autómata reducido correspondiente a $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$. Entonces, cualquier autómata $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q'_0, F' \rangle$ que reconozca el mismo lenguaje que M no poseerá menos estados que M_R . Osea:

$$\forall M', \mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M) \implies |Q'| \geq |Q_R|$$

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_R|$, entonces según el lema anterior deben existir dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\hat{\delta}_R(q_0, \alpha) \neq \hat{\delta}_R(q_0, \beta) \wedge \hat{\delta}'(q'_0, \alpha) = \hat{\delta}'(q'_0, \beta)$$

Pero entonces, como $\hat{\delta}_R(q_0, \alpha)$ y $\hat{\delta}_R(q_0, \beta)$ son estados diferentes, entonces $\hat{\delta}(q_0, \alpha)$ y $\hat{\delta}(q_0, \beta)$ son estados distinguibles por pertenecer al autómata reducido M_R entonces $\exists \gamma \in \Sigma^*$ tal que:

$$\hat{\delta}(q_0, \alpha\gamma) \in F \wedge \hat{\delta}(q_0, \beta\gamma) \notin F$$

o viceversa. Entonces $\alpha\gamma \in \mathcal{L}(M_R) \iff \beta\gamma \notin \mathcal{L}(M_R)$.

Por otro lado, como $\hat{\delta}'(q'_0, \alpha) = \hat{\delta}'(q'_0, \beta)$, es obvio que

$$\hat{\delta}'(q'_0, \alpha\gamma) \in F \wedge \hat{\delta}'(q'_0, \beta\gamma) \in F$$

o ninguno de los dos perteneces a F . De esto se infiere que $\alpha\gamma \in \mathcal{L}(M') \iff \beta\gamma \in \mathcal{L}(M')$.

Pero entonces, $\mathcal{L}(M') \neq \mathcal{L}(M)$, se contradice nuestra hipótesis inicial.

5. Lenguajes regulares

5.1. Lema de pumping

Propiedad: Sea \mathcal{L} un lenguaje regular, si las longitudes de las cadenas de un lenguaje \mathcal{L} están acotadas superiormente, entonces \mathcal{L} tiene que ser finito.

Propiedad: Si \mathcal{L} es un lenguaje regular infinito, entonces el grafo de un autómata finito que acepte \mathcal{L} tiene que tener un camino desde el estado inicial hasta algún estado final que pase por algún ciclo.

Lema de pumping: Sea \mathcal{L} un lenguaje regular, si \mathcal{L} es infinito, entonces todas las cadenas ω de longitud mayor o igual a n (para algún $n > 1$) van a ser de la forma $\omega = xy^iz$, es decir hay una parte de ω que se repite i cantidad de veces:

\mathcal{L} es regular e infinito $\implies \exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall \omega \in \mathcal{L}, |\omega| \geq n : (\exists x, y, z \in \Sigma^* : \omega = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |z| \geq 1 \wedge (\forall i \geq 0 : xy^iz \in \mathcal{L}))$

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que \mathcal{L} es un lenguaje regular. Entonces existe una AFD $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ que acepta \mathcal{L} .

Sea $n = |Q|$ la cantidad de estados de A y $\omega = a_1a_2 \dots a_m \in \Sigma^*$ de longitud $m > n$. Para cada $i = 0, \dots, m$ definamos el estado $p_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 \dots a_i)$ (el estado en el que se encuentra A después de haber consumido los primeros i símbolos de ω).

Como el A solo tiene n estados pero hay $m > n$ estados p_i , es imposible que todos sean distintos. Por lo tanto, existen $0 \leq i < j \leq n$ tales que $p_i = p_j$.

Considerar entonces la siguiente descomposición para $\omega = xyz$:

$$x = a_1 \dots a_i$$

$$y = a_{i+1} \dots a_j$$

$$z = a_{j+1} \dots a_m$$

Entonces podemos concluir que:

$$\hat{\delta}(q_0, x) = p_i$$

$$\hat{\delta}(p_i, y) = p_j \text{ (que como son el mismo estado implica que } A \text{ tiene un ciclo)}$$

$$\hat{\delta}(p_j, z) = p_m$$

Observar que x podría ser la cadena vacía cuando $i = 0$, z podría ser vacía si $j = n = m$, pero y no puede ser vacía ya que se tomó $i < j$.

Vimos entonces que si \mathcal{L} es regular y $|\omega| \geq n$ entonces podemos dividirla en cadenas x, y, z tal que $|xy| \leq n$ y $|z| \geq 1$. Ahora vamos a ver que si $xyz \in \mathcal{L}$ entonces $xy^kz \in \mathcal{L}$ para todo $k \geq 0$.

- Si $k = 0$ entonces $xy^0z = xz$:

$$\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), z) = \hat{\delta}(p_i, z) = \hat{\delta}(p_j, z) = p_m$$

Y p_m es un estado final pues es el mismo estado al que llegamos si la entrada fuese $xyz \in \mathcal{L}$. Entonces $xz = xy^0z \in \mathcal{L}$.

- Si $i > 0$. Entonces A consume x desde q_0 y llega hasta p_i . Luego A consume y desde p_i y llega hasta p_j (que son iguales) y repite este ciclo k veces hasta consumir todas las apariciones de y en la cadena. Finalmente A consume z desde p_j y llega hasta p_m . Entonces A llega a un estado final y por lo tanto $xy^kz \in \mathcal{L}$.

Contrarecíproco:

$\forall n \in \mathbb{N} \exists \omega \in \mathcal{L}$ tal que $|\omega| \geq n \wedge \forall x, y, z \in \Sigma^* : \omega \neq xyz \vee |xy| \geq n \vee |z| \leq 1 \vee \exists i \geq 0, xy^iz \notin \mathcal{L}$
 $\implies \mathcal{L}$ no es regular

5.2. Operaciones sobre lenguajes regulares

5.2.1. Unión de lenguajes regulares

Dados M_1 y M_2 AFDs que aceptan los lenguajes L_1 y L_2 , respectivamente, podemos construir un AFD $M = \langle Q_{\cup}, \Sigma, \delta_{\cup}, q_{0\cup}, F_{\cup} \rangle$ que acepte el lenguaje $L_1 \cup L_2$ con:

- $Q_{\cup} = Q_1 \times Q_2$
- $\delta_{\cup}((q, r), a) = (\delta_1(q, a), \delta_2(r, a))$ para $q \in Q_1, r \in Q_2$ y $a \in \Sigma$
- $q_{0\cup} = (q_{01}, q_{02})$
- $F_{\cup} = \{(q, r) \in Q_{\cup} \mid q \in F_1 \vee r \in F_2\}$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathcal{L}(M_{\cup}) &\iff \hat{\delta}_{\cup}((q_{01}, q_{02}), \alpha) \in F_{\cup} \iff (\hat{\delta}_1(q_{01}, \alpha), \hat{\delta}_2(q_{02}, \alpha)) \in F_{\cup} \\ &\iff \hat{\delta}_1(q_{01}, \alpha) \in F_1 \vee \hat{\delta}_2(q_{02}, \alpha) \in F_2 \\ &\iff \alpha \in \mathcal{L}(M_1) \vee \alpha \in \mathcal{L}(M_2) \end{aligned}$$

5.2.2. Intersección de lenguajes regulares

Dados M_1 y M_2 AFDs que aceptan los lenguajes L_1 y L_2 , respectivamente, podemos construir un AFD $M_\cap = \langle Q_\cap, \Sigma, \delta_\cap, q_{0\cap}, F_\cap \rangle$ que acepte el lenguaje $L_1 \cap L_2$ con:

- $Q_\cap = Q_1 \times Q_2$
- $\delta_\cap((q, r), a) = (\delta_1(q, a), \delta_2(r, a))$ para $q \in Q_1, r \in Q_2$ y $a \in \Sigma$
- $q_{0\cap} = (q_{0_1}, q_{0_2})$
- $F_\cap = \{(q, r) \in Q_\cap \mid q \in F_1 \wedge r \in F_2\}$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned}
 \alpha \in \mathcal{L}(M_\cap) &\iff \hat{\delta}_\cap((q_{0_1}, q_{0_2}), \alpha) \in F_\cap \iff (\hat{\delta}_1(q_{0_1}, \alpha), \hat{\delta}_2(q_{0_2}, \alpha)) \in F_\cap \\
 &\iff \hat{\delta}_1(q_{0_1}, \alpha) \in F_1 \wedge \hat{\delta}_2(q_{0_2}, \alpha) \in F_2 \\
 &\iff \alpha \in \mathcal{L}(M_1) \wedge \alpha \in \mathcal{L}(M_2)
 \end{aligned}$$

5.2.3. Complemento de lenguajes regulares

Teorema 5.1. El conjunto de lenguajes regulares incluido en Σ^* es cerrado respecto de la complementación. Es decir, si $L \in \mathcal{L}(\Sigma^*)$ es un lenguaje regular entonces $\bar{L} \in \mathcal{L}(\Sigma^*)$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\mathcal{L} = \mathcal{L}(M)$ con $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ un AFD cuya función de transición δ está definida para todos los elementos del alfabeto Σ . Si hay algún símbolo $a \in \Sigma$ que falta en las posibles transiciones desde un estado $q \in Q$ entonces se puede agregar un estado trampa q_{trampa} (no final) y una transición $\delta(q, a) = q_{trampa}$ para completar la definición de la función.

Si armamos el automáta $M_\neg = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F \rangle$, entonces $\alpha \in \mathcal{L}M_\neg \iff \delta(q_0, w) \in Q - F \iff \alpha \in \Sigma^* - L$.

Teorema 5.2. El conjunto de lenguajes regulares es cerrado respecto de la intersección

DEMOSTRACIÓN

Como ya probamos que el conjunto de lenguajes regulares es cerrado respecto de la unión y el complemento entonces si logramos escribir la intersección como combinación de estas dos operaciones podremos decir que también es cerrada respecto de la intersección:

$$L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$$

Entonces si L_1 y L_2 son lenguajes regulares, entonces sus complementos también lo son y la unión de los complementos y el complemento de la misma también lo son.

Teorema 5.3. De estos ultimos tres teoremas puede deducirse que la unión finita y la intersección finita de lenguajes regulares dan por resultado un lenguaje regular.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcup_{i=1}^n L_i \text{ es regular}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \bigcap_{i=1}^n L_i \text{ es regular}$$

DEMOSTRACIÓN

Por inducción sobre n :

Caso base: $n = 0$.

$$\bigcup_{i=1}^0 L_i = \emptyset \text{ es regular}$$

$$\bigcap_{i=1}^0 L_i = \emptyset \text{ es regular}$$

- **Caso inductivo:** $n \geq 1$. Supongamos que L_1, \dots, L_n son lenguajes regulares y que $\bigcup_{i=1}^{n-1} L_i$ y $\bigcap_{i=1}^{n-1} L_i$ son lenguajes regulares. Entonces:

$$\bigcup_{i=1}^n L_i = \bigcup_{i=1}^{n-1} L_i \cup L_n \text{ es regular}$$

$$\bigcap_{i=1}^n L_i = \bigcap_{i=1}^{n-1} L_i \cap L_n \text{ es regular}$$

Teorema 5.4. Todo lenguaje finito es regular

DEMOSTRACIÓN

Sea L un lenguaje finito tal que $|L| = n$ y $x_i \in L$ con $1 \leq i \leq n$.

Entonces podemos definir n lenguajes $L_i = \{x_i\}$ regulares. Por el teorema anterior, la unión finita de lenguajes regulares es un lenguaje regular. Entonces

$$L = \bigcup_{i=1}^n L_i \text{ es un lenguaje regular.}$$

5.3. Problemas decicibles acerca de lenguajes regulares

1. **Pertenencia:** Dado un lenguaje regular L y una cadena w , determinar si $w \in L$.

Se construye un AFD M que reconozca L y se verifica si w es aceptada por M .

2. **Finitud:** Dado un lenguaje regular L , determinar si L es finito.

Un lenguaje regular L es finito, si en su AFD ningún ciclo que es alcanzable desde el estado inicial puede, a su vez, alcanzar algún estado final.

$$L \text{ finito} \iff \left(\forall q \in Q, \left(q_0 \xrightarrow{*} q \wedge q \xrightarrow{*} f \in F \implies \left(\nexists q \xrightarrow{+} q \right) \right) \right)$$

Escrito en función de δ :

$$L \text{ finito si y solo si: } \forall q \in Q \text{ tal que } \left(\exists \alpha, \omega \in \Sigma^*, \delta(q_0, \alpha) = q \wedge \delta(q, \omega) = f \in F \right) \\ \text{vale que } \left(\nexists \beta \in \Sigma^+, \delta(q, \beta) = q \right)$$

3. **Vacuidad:** Dado un lenguaje regular L , determinar si L es vacío.

Se construye el AFD M que reconozca L y se verifica si el conjunto A de estados alcanzables de M tiene un estado final. Si $F \cap A = \emptyset$, entonces L es vacío.

4. **Equivalencia:** Dados dos lenguajes regulares L_1 y L_2 , determinar si L_1 y L_2 son equivalentes.

Si el lenguaje $(L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (\overline{L_1} \cap L_2)$ es vacío, entonces L_1 y L_2 son equivalentes, si no lo son.

6. Autómatas de Pila

Los autómatas de pila (AP) son autómatas finitos que además tienen la capacidad de almacenar información en una pila con dos operaciones básicas: apilar y desapilar. La operación apilar consiste en agregar un elemento a la pila, mientras que la operación desapilar consiste en eliminar el elemento que se encuentra en la cima de la misma.

Cuando se va a realizar una transición, se consume un elemento de la cadena de entrada y un elemento del tope de la pila. Al moverse al nuevo estado, el automata pusha (apila) una cadena de símbolos en la pila (que puede ser vacía).

Definición: Un autómata de pila (AP) es una 7-tupla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ donde:

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es el alfabeto de entrada y es finito.
- Γ es un alfabeto de la pila y es finito.
- δ es la función de transición, que es un conjunto de reglas de la forma:

$$\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma \rightarrow \mathcal{P}(Q \times \Gamma^*)$$

$$\delta(q, a, Z) = \{(p_1, \gamma_1), (p_2, \gamma_2), \dots, (p_n, \gamma_n)\}$$

δ indica el estado que p_i al que se transiciona y la cadena γ_i que se apila en la pila.

- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $Z_0 \in \Gamma$ es el símbolo inicial de la pila.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

6.1. Configuración instantanea

Una configuración instantánea de un autómata de pila es una 3-tupla $(q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma \times \Gamma^*$ donde:

- $q \in Q$ es el estado actual.
- $w \in \Sigma^*$ es la parte de la cadena de entrada que no ha sido consumida.
- $\gamma \in \Gamma^*$ es el contenido de la pila.

La configuración inicial de un automata será entonces $\sigma = (q_0, \alpha, Z_0)$ si α es la cadena que usamos de entrada.

Cambio de configuración: Sea $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ un autómata de pila, $a \in \Sigma$, $\alpha \in \Sigma^*$, $t \in \Gamma$, $\tau, \pi \in \Sigma^*$ y $q, r \in Q$. Definimos las transiciones (\vdash) entre dos configuraciones instantaneas de la siguiente manera:

- $(q, a\alpha, t\pi) \vdash (r, \alpha, \tau\pi)$ si $(r, \tau) \in \delta(q, a, t)$.
- $(q, \alpha, t\pi) \vdash (r, \alpha, \tau\pi)$ si $(r, \tau) \in \delta(q, \lambda, t)$.

6.2. Lenguajes reconocidos por un autómata

6.2.1. Lenguaje aceptado por estado final

Son todas las cadenas $\alpha \in \Sigma^*$ que hacen que el autómata llegue a un estado final $q \in F$.

$$\mathcal{L}(M) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists q \in F \text{ tal que } (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, Z_0)\}$$

6.2.2. Lenguaje aceptado por pila vacía

Son todas las cadenas $\alpha \in \Sigma^*$ que hacen que el autómata llegue a un estado en el cual la pila quede vacía.

$$\mathcal{L}_\lambda(M) = \{\alpha \in \Sigma^* \mid \exists q \in F \text{ tal que } (q_0, \alpha, Z_0) \vdash^* (q, \lambda, \lambda)\}$$

Teorema 6.1. Sea $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ un autómata que acepta el lenguaje $\mathcal{L}(M)$ por estado final, entonces existe $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, X_0, \emptyset \rangle$ tal que $\mathcal{L}_\lambda(M') = \mathcal{L}(M)$.

DEMOSTRACIÓN

Construimos M' de la siguiente manera:

- $Q' = Q \cup \{q_\lambda, q'_0\}$
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\}$
- $\delta' : Q' \times \Sigma \times \Gamma' \rightarrow \mathcal{P}(Q' \times \Gamma')$

1. $\delta'(q'_0, \lambda, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$

M' entra al estado inicial de M con la pila $Z_0 X_0$. como X_0 no es un símbolo de la pila de M , M no puede vaciar la pila.

2. $\forall q \in Q, a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \delta'(q, a, Z) = \{(r, \tau) \mid (r, \tau) \in \delta(q, a, Z) \text{ con } r \in Q \wedge \tau \in \Gamma^*\}$

M' sigue las mismas transiciones que M para todos los estados originales.

3. $\forall q \in F, \forall Z \in \Gamma', (q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q, \lambda, Z)$

Cuando M' llega a un estado que es final en M automáticamente se activa el estado q_λ que desencola el último elemento de la pila (y no pushea nada).

4. $\forall Z \in \Gamma', (q_\lambda, \lambda) \in \delta'(q_\lambda, \lambda, Z)$

Cuando M' llega al estado q_λ , sin importar cual es el tope de la pila lo desencola hasta que la pila queda vacía (hay un loop sobre q_λ que consume toda la pila).

Veamos que $\mathcal{L}_\lambda(M) = L$, lo vamos a demostrar en dos pasos:

$\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}_\lambda(M)$:

Si $\alpha \in \mathcal{L}(M)$ entonces $(q_0, \alpha, Z_0) \stackrel{*}{\vdash}_M (q, \lambda, \gamma)$ con $q \in F$ (por def.).

Por la regla 1, tenemos que $(q'_0, \alpha, X_0) \stackrel{*}{\vdash}_{M'} (q_0, \alpha, Z_0 X_0)$

Por la regla 2, $(q_0, \alpha, Z_0) \stackrel{*}{\vdash}_{M'} (q, \lambda, \gamma)$, entonces

$$(q'_0, \alpha, X_0) \stackrel{*}{\vdash}_{M'} (q_0, \alpha, Z_0 X_0) \stackrel{*}{\vdash}_{M'} (q, \lambda, \gamma X_0)$$

Por las reglas 3 y 4 es cierto que $(q, \lambda, \gamma X_0) \stackrel{*}{\vdash}_{M'} (q_\lambda, \lambda, \lambda)$

Por lo tanto, $\alpha \in \mathcal{L}_\lambda(M)$

$\mathcal{L}_\lambda(M) \subseteq L$:

Si $\alpha \in \mathcal{L}_\lambda(M)$ entonces, por como construimos M' vale que

$$(q'_0, \alpha, X_0) \stackrel{*}{\vdash}_{M'} \underbrace{(q_0, \alpha, Z_0 X_0) \stackrel{*}{\vdash}_{M'} (q, \lambda, \gamma X_0)}_A \stackrel{*}{\vdash}_{M'} (q_\lambda, \lambda, \lambda)$$

De A se puede ver que $(q_0, \alpha, Z_0) \stackrel{*}{\vdash}_M (q, \lambda, \gamma)$. Además como los únicos estados que pueden llegar a q_λ son estados finales de M (por 3) vale que $q \in F$. Luego $\alpha \in \mathcal{L}(M)$

Teorema 6.2. Sea $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset \rangle$ y $\mathcal{L}_\lambda(M)$ el lenguaje que acepta por pila vacía. Entonces existe $M' = \langle Q', \Sigma, \Gamma', \delta', q'_0, X_0, F \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M') = \mathcal{L}_\lambda(M)$.

DEMOSTRACIÓN

Construimos M' de la siguiente manera:

- $Q' = Q \cup \{q'_0, q'_f\}$
- $\Gamma' = \Gamma \cup \{X_0\}$
- $F = \{q'_f\}$
- $\delta' : Q' \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times \Gamma' \rightarrow \mathcal{P}(Q' \times \Gamma'^*)$

$$1. \delta'(q'_0, \lambda, X_0) = \{(q_0, Z_0 X_0)\}$$

M' activa automáticamente el estado q_0 con pila $Z_0 X_0$ y como X_0 no es un símbolo de Γ , M no puede consumirlo y vaciar la pila.

$$2. \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma \cup \{\lambda\}, \delta'(q, a, Z) = \delta(q, a, Z)$$

Simulación de M .

$$3. \forall q \in Q, (q'_f, \lambda) \in \delta(q, \lambda, X_0)$$

Todos los estados a los que se puede llegar con la pila vacía en M , llegarán con X_0 en M' . En este caso, podrán saltar automáticamente al estado $q'_f \in F$.

La demostración de que ambos lenguajes son equivalentes es similar a la anterior.

6.3. Gramáticas independientes de contexto

Para toda gramática independiente de contexto G , puede definirse un autómata de pila M que acepta por pila vacía el lenguaje generado por dicha gramática.

DEMOSTRACIÓN

Esto no es una demostración completa.

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente de contexto, vamos a contruir $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, S, \emptyset \rangle$ tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$:

- $Q = \{q_0\}$
- $\Sigma = V_T$
- $\Gamma = V_N \cup V_T$
- $\delta(q_0, a, t) = \begin{cases} \{(q_0, \alpha) : t \rightarrow \alpha \in P\} & \text{si } t \in V_N \wedge a = \lambda \\ \{(q_0, \lambda)\} & \text{si } t \in V_T \wedge a = t \neq \lambda \end{cases}$

Veamos que M acepta $\mathcal{L}(G)$:

- Si en el tope de la pila hay un símbolo no terminal $t \in V_N$, entonces el autómata lo reemplazará por el lado derecho α de alguna producción que tenga a t en el lado izquierdo. Esto lo hará de manera tal que el símbolo que está más a la izquierda en el lado derecho de dicha producción sea el siguiente tope de la pila.
- Si en el tope de la pila hay un símbolo terminal $t \in V_T$, entonces el autómata verificará que este sea igual al próximo símbolo en la cadena de entrada y lo desapilará.

6.4. Autómatas de pila determinísticos

Es un autómata de pila $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ que cumple que para todo $q \in Q$, $a \in \sigma$ y $A \in \Gamma$:

1. $|\delta(q, a, A)| \leq 1$
2. $|\delta(q, \lambda, A)| \leq 1$
3. $|\delta(q, \lambda, A)| = 1 \implies |\delta(q, a, A)| = 0$

6.4.1. Propiedad del prefijo

Se dice que un lenguaje L posee la **propiedad del prefijo** si y solo si para todo par de cadenas **no nulas** x e y es cierto que $x \in L \implies xy \notin L$.

Si un lenguaje L no posee la propiedad del prefijo, entonces todo autómata de pila M que acepte L por pila vacía es necesariamente **no determinístico**

7. Gramáticas Independientes del Contexto

Una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ es independiente del contexto si y solo si las producciones en P son de la forma $A \rightarrow \alpha$ con $A \in V_N$ y $\alpha \in (V_N \cup V_T)^*$.

Si en particular para toda $A \rightarrow \alpha \in P$ pasa que $\alpha \in (V_N \cup V_T)^+$ (o sea, sin reglas borradoras), entonces decimos que G es una **gramática propia**.

7.1. Árboles de Derivación

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente del contexto. Un árbol de derivación de una cadena ω en G es una estructura de árbol tal que:

- Cada vértice posee una etiqueta que pertenece al conjunto $V_N \cup V_T \cup \{\lambda\}$.
- La raíz del árbol posee la etiqueta S .
- Si un vértice es interior, entonces su etiqueta pertenece al conjunto V_N .
- Si un vértice v_n posee la etiqueta A y sus hijos v_1, \dots, v_m poseen las etiquetas X_1, \dots, X_m , entonces $A \rightarrow X_1 \dots X_m \in P$.
- Si un vértice es hoja, entonces su etiqueta pertenece al conjunto $V_T \cup \{\lambda\}$.
- Si una hoja posee la etiqueta λ , entonces es el único hijo de su.

Camino: Sea $A \in V_N$ y $X \in V_N \cup V_T$ un vértice de un árbol de derivación. El camino de A a X es la secuencia de vértices $A = v_1, v_2, \dots, v_n = X$ tal que v_i es hijo de v_{i+1} para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Altura de un árbol: La altura de un árbol de derivación es la longitud del camino más largo de la raíz a una hoja.

Longitud de un camino: La longitud de un camino es la cantidad de arcos que lo componen.

Lema 7.1. Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente del contexto con $P \neq \emptyset$ y sea $T(S)$ el árbol de derivación de S en G para algún $\alpha \in \Sigma^*$ de altura h .

Si $a = \max\{|\beta| : A \rightarrow \beta \in P\}$, entonces $|\alpha| \leq a^h$

DEMOSTRACIÓN

Por inducción en h :

- **Caso base:** $h = 0$. El único árbol de derivación posible de esta altura es el símbolo S . Por lo tanto $a^h = a^0 = 1 = |S|$.
- **Paso inductivo:** Sea $T(S)$ el árbol de derivación para α de altura $h+1$. Sea $\gamma \in (V_N \cup V_T)^+$ una cadena tal que $\gamma \Rightarrow \alpha$ en G . Entonces el árbol de derivación de γ en G tiene altura h .

Por hipótesis inductiva, vale que $|\gamma| \leq a^h$. Por lo tanto, $|\alpha| \leq a^h$.

Por otra parte, $|\alpha| \leq a|\gamma|$ ya que en el peor de los casos cada símbolo de γ usa la reducción de mayor tamaño. Luego, $|\alpha| \leq aa^h = a^{h+1}$.

7.2. Gramáticas Ambiguas

Una gramática independiente del contexto G es **ambigua** si y solo si $\exists \alpha \in \mathcal{L}(G)$ tal que posea más de un árbol de derivación.

Lenguaje intrínsecamente ambiguo: Un lenguaje independiente del contexto L es **intrínsecamente ambiguo** si y solo si todas las gramáticas que lo tienen como lenguaje son ambiguas.

Derivación más a la izquierda: Una **derivación más a la izquierda** $\left(\Rightarrow_L\right)$ de una cadena ω es aquella que se obtiene reemplazando el primer símbolo no terminal que contenga por alguna de sus derivaciones: Si $A \in V_N$, $\alpha \in V_T^*$, $\beta \in (V_N \cup V_T)^*$ y $A \rightarrow \gamma \in P$ entonces $\alpha A \beta \Rightarrow_L \alpha \gamma \beta$

Derivación más a la derecha: Una **derivación más a la derecha** $\left(\Rightarrow_R\right)$ de una cadena ω es aquella que se obtiene reemplazando el último símbolo no terminal que contenga por alguna de sus derivaciones: Si $A \in V_N$, $\alpha \in (V_N \cup V_T)^*$, $\beta \in V_T^*$ y $A \rightarrow \gamma \in P$ entonces $\alpha A \beta \Rightarrow_R \alpha \gamma \beta$

7.3. Lema de Pumping para Lenguajes Independientes del Contexto

Sea L un lenguaje independiente del contexto sobre un alfabeto Σ , existe $n > 0$ tal que para todo $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq n$ existe $r, x, y, z, s \in \Sigma^*$ tales que:

1. $\alpha = rxyzs$
2. $|xyz| \leq n$
3. $|xz| > 0$
4. $\forall i \geq 0, rx^i y z^i s \in L$

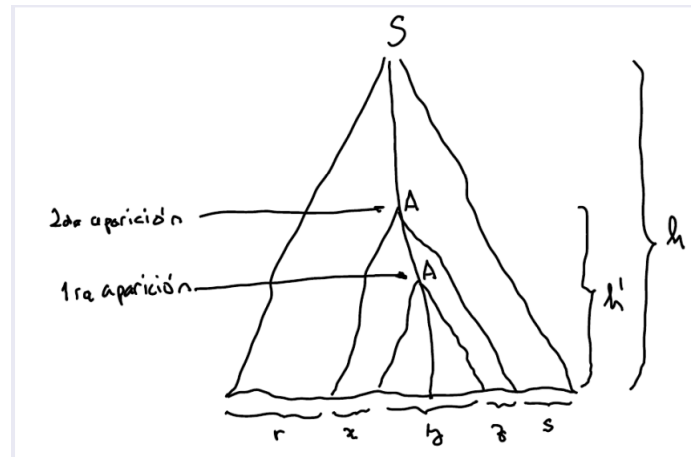
7.3.1. Demostración

Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente del contexto y sea $a = \max\{|\beta| : A \rightarrow \beta \in P\}$.

1. Tomemos $n = a^{|V_N|+1}$. Sea $\alpha \in \mathcal{L}(G)$ tal que $|\alpha| \geq n$ y sea $T(S)$ un árbol mínimo de derivación de α en G , es decir tiene la mínima altura posible y tal que no existe otro con menos derivaciones.

Por el lema 7.1, resulta que $a^h \geq |\alpha| \geq n = a^{|V_N|+1}$. Por lo tanto, $h \geq |V_N| + 1$. Entonces existe algún símbolo $b \in \alpha$ tal que su camino desde la raíz es de longitud $h \geq |V_N| + 1$.

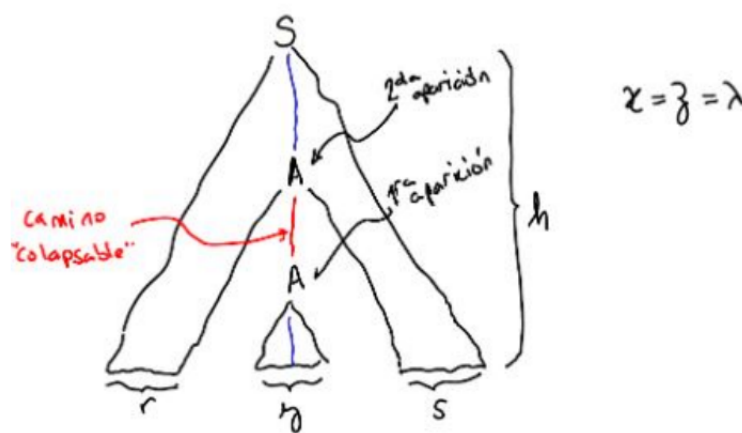
Como la cantidad de símbolos no terminales es $|V_N|$, entonces en ese camino seguramente existe un no-terminal A repetido. Recorriendo el camino de forma ascendente, buscamos sus primeras dos apariciones:



Entonces podemos escribir $\alpha = rxyzs$ con r, x, y, z y s como se muestra en la figura.

2. $|xyz| \leq n = a^{|V_N|+1}$. Como A es el primer no terminal que se repite, podemos asegurar que $h' \leq |V_N| + 1$. La segunda aparición de A tiene que pasar a lo sumo $|V_N|$ pasos mas adelante, sino se debería repetir otro no terminal antes. Entonces por el lema 7.1, resulta que $|xyz| \leq a^{h'} \leq a^{|V_N|+1}$.
3. $|xz| > 0$.

Supongamos que $|xz| = 0$, esto quiere decir que podríamos remplazar el subárbol con raíz en la segunda aparición de A por el subárbol con raíz en la primera aparición.



Esto es absurdo ya que habíamos dicho que el árbol era mínimo por lo que no debería poder colapsarse ninguno de sus caminos.

4. $\forall i \geq 0, rx^i y z^i s \in L$ Finalmente, vamos a demostrar esto por inducción:

- **Caso base** ($i = 0$): Sabemos que $S \xRightarrow{*} rAs$ y $A \xRightarrow{*} y$, entonces $S \xRightarrow{*} rAs \xRightarrow{*} rys$. Además $rys = rx^0 y z^0 s$.
- **Paso inductivo** $i - 1 \Rightarrow i$:

Hipotesis inductiva: $S \xRightarrow{*} rx^{i-1} Az^{i-1} s$.

Sabemos $A \xRightarrow{*} xyz$, entonces:

$$S \xRightarrow{*} rx^{i-1} Az^{i-1} s \Rightarrow rx^{i-1} xyz z^{i-1} s \Rightarrow rx^i y z^i s$$

Y por lo tanto $rx^i y z^i s \in L$.

7.4. Propiedades de los Lenguajes Independientes del Contexto

- Si L_1 y L_2 son lenguajes independientes del contexto, entonces $L_1 \cup L_2$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN

Como L_1 y L_2 son dos lenguajes independientes del contexto, entonces existen dos gramáticas independientes del contexto $G_1 = \langle V_{N_1}, \Sigma, P_1, S_1 \rangle$ y $G_2 = \langle V_{N_2}, \Sigma, P_2, S_2 \rangle$ tales que $L_1 = \mathcal{L}(G_1)$ y $L_2 = \mathcal{L}(G_2)$. Supongamos, además, sin pérdida de generalidad que $V_{N_1} \cap V_{N_2} = \emptyset$. Definamos entonces:

$$G = \langle V_{N_1} \cup V_{N_2} \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}, S \rangle$$

Veamos que $\forall \alpha \in \Sigma^*, \alpha \in \mathcal{L}(G) \iff \alpha \in \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)$.

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathcal{L}(G) &\iff S \xRightarrow{*} \alpha \iff S_1 \xRightarrow{*} \alpha \vee S_2 \xRightarrow{*} \alpha \\ &\iff \alpha \in \mathcal{L}(G_1) \vee \alpha \in \mathcal{L}(G_2) \\ &\iff \alpha \in \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2) \end{aligned}$$

- Si L_1 y L_2 son lenguajes independientes del contexto, entonces $L_1 L_2$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN

Como L_1 y L_2 son dos lenguajes independientes del contexto, entonces existen dos gramáticas independientes de contexto $G_1 = \langle V_{N_1}, \Sigma, P_1, S_1 \rangle$ y $G_2 = \langle V_{N_2}, \Sigma, P_2, S_2 \rangle$ tales que $L_1 = \mathcal{L}(G_1)$ y $L_2 = \mathcal{L}(G_2)$. Supongamos, además, sin pérdida de generalidad que $V_{N_1} \cap V_{N_2} = \emptyset$. Definamos entonces:

$$G = \langle V_{N_1} \cup V_{N_2} \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 S_2\}, S \rangle$$

Veamos que $\forall \alpha \in \Sigma^*, \alpha \in \mathcal{L}(G) \iff \alpha \in \mathcal{L}(G_1)\mathcal{L}(G_2)$.

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathcal{L}(G) &\iff S \xRightarrow{*} \alpha \iff S_1 S_2 \xRightarrow{*} \alpha \\ &\iff \exists \beta_1, \beta_2 \in \Sigma^* : \alpha = \beta_1 \beta_2 \wedge S_1 \xRightarrow{*} \beta_1 \wedge S_2 \xRightarrow{*} \beta_2 \\ &\iff \beta_1 \in \mathcal{L}(G_1) \wedge \beta_2 \in \mathcal{L}(G_2) \\ &\iff \beta_1 \beta_2 = \alpha \in \mathcal{L}(G_1)\mathcal{L}(G_2) \end{aligned}$$

- Si L es un lenguaje independiente del contexto, entonces L^+ también lo es.

DEMOSTRACIÓN

Como L es un lenguaje independiente del contexto, entonces existe una gramática independiente del contexto $G = \langle V_N, \Sigma, P, S \rangle$ tal que $L = \mathcal{L}(G)$. Definamos entonces:

$$G^+ = \langle V_N \cup \{S\}, \Sigma, P \cup \{S' \rightarrow SS', S' \rightarrow S\}, S' \rangle$$

Veamos que $\mathcal{L}(G^+) = L^+$

$$\alpha \in \mathcal{L}(G^+) \iff S' \xRightarrow{*} \alpha \iff SS' \xRightarrow{*} \alpha \vee S \xRightarrow{*} \alpha$$

Supongamos que $S \xRightarrow{*} \alpha$, entonces trivialmente vale $\alpha \in L \subseteq L^+$.

Por inducción, Supongamos que $S' \xRightarrow{*} \beta \in L^+$: Sea $\alpha = \gamma\beta$ con $\gamma \in \Sigma^*$. Entonces $SS' \xRightarrow{*} \alpha \iff SS' \xRightarrow{*} \gamma\beta \iff S \xRightarrow{*} \gamma \wedge S' \xRightarrow{*} \beta$ Entonces pasa que $\gamma \in L$ y, por hipótesis inducción, $\beta \in L^+$, Luego $\gamma\beta \in L^+$

- Si L es un lenguaje independiente del contexto, entonces L^* también lo es.

DEMOSTRACIÓN

Como L es un lenguaje independiente del contexto, entonces existe una gramática independiente del contexto $G = \langle V_N, \Sigma, P, S \rangle$ tal que $L = \mathcal{L}(G)$. Definamos entonces:

$$G^* = \langle V_N \cup \{S\}, \Sigma, P \cup \{S' \rightarrow SS', S' \rightarrow \varepsilon\}, S' \rangle$$

Veamos que $\mathcal{L}(G^*) = L^*$. Esta demostración es similar a la anterior. La única diferencia es que en algún momento, en vez de usarse la regla $S' \rightarrow S$, se usa la regla $S' \rightarrow \varepsilon$.

- Si L_1 y L_2 son lenguajes independientes del contexto, entonces $L_1 \cap L_2$ no siempre es lenguaje independiente del contexto.

DEMOSTRACIÓN

Sean $L_1 = \{a^n b^m c^l : n, m, l \geq 0 \wedge n = m\}$ y $L_2 = \{a^n b^m c^l : n \geq 0 \wedge m = l\}$ dos lenguajes independientes de contexto (**Demostrar?**). Pero $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^m c^l : n, m, l \geq 0 \wedge n = m = l\}$ no es lenguaje independiente como puede demostrarse utilizando el lema de pumping.

- El lenguaje $L = \{ww : w \in \Sigma^*\}$ no es independiente del contexto.

DEMOSTRACIÓN

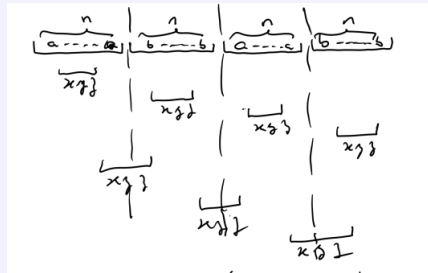
Sea $L_1 = \{a^n b^m a^n b^m : n, m \geq 0\}$ es tal que $L_1 = L \cap a^* b^* a^* b^*$ donde $a^* b^* a^* b^*$ es un lenguaje regular.

La intersección entre un lenguaje regular y un lenguaje independiente de contexto da como resultado un lenguaje independiente de contexto (**Demostrar?**).

Entonces, si L fuera independiente del contexto, L_1 también debería serlo.

Veamos que L_1 no es independiente de contexto:

Analizemos las composiciones disponibles para la cadena $a^n b^n a^n b^n \in L_1$:



En los primeros cuatro casos se desbalancean la cantidad de a o b , respectivamente y en el último caso se desbalancean la cantidad de a y b simultáneamente.

7.4.1. Lenguajes libres de contexto determinísticos

Un lenguaje L es libre de contexto determinísticos si existe un autómata de pila determinista A tal que $L = \mathcal{L}(A)$.

Para ver más sobre lenguajes libres de contexto determinísticos, ver Wikipedia.

Lema 7.2. El conjunto de lenguajes libres de contexto determinísticos es cerrado por la complementación.

Teorema 7.1. Para todo automáta de pila M , existe otro automáta de pila M' equivalente que siempre consume toda la cadena de entrada.

Teorema 7.2. El complemento de un lenguaje independiente del contexto determinístico es un lenguaje independiente del contexto determinístico.

Teorema 7.3. Existe un lenguaje independiente del contexto que es **no-determinístico**

DEMOSTRACIÓN

Consideremos el lenguaje $L = a^k b^k c^k, k \geq 0$. Sabemos que L no es independiente del contexto. Su complemento puede escribirse como:

$$\bar{L} = \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 \wedge i \neq j\} \cup \{a^i b^j c^k : i, j, k \geq 0 \wedge j \neq k\} \cup \overline{a^* b^* c^*}$$

Osea que \bar{L} puede escribirse como la unión de dos lenguajes independientes del contexto y un lenguaje regular. Es, por lo tanto, independiente del contexto. Supongamos que \bar{L} es un lenguaje independiente del contexto determinístico. Entonces, $\bar{\bar{L}}$ también debería serlo por el teorema anterior. Pero $\bar{\bar{L}} = L$ que ni siquiera es un lenguaje independiente del contexto. Luego \bar{L} no es determinístico.

7.5. Gramáticas propias

7.5.1. Conjunto de símbolos activos

Símbolo alcanzable: Dada una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$, un símbolo $A \in V_N$ es alcanzable si existe una forma sentencial que lo contiene, $S \xRightarrow{*} \dots A \dots$.

Símbolo activo: Dada una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ un símbolo $A \in V_N$ es activo si existe $\alpha \in V_T^*$ tal que $A \xRightarrow{*} \alpha$.

Símbolo útil: Un no terminal A es útil si y solo si es parte de una forma sentencial que genera una cadena de terminales, osea, si $S \xRightarrow{*} \alpha A \beta \xRightarrow{*} \omega$ con $\omega \in \Sigma^*$ y $\alpha, \beta \in (V_T \cup V_N)^*$.

Algoritmos para conseguir el conjunto de no-terminales activos de una gramática:

```
function ACTIVOS( $\langle V_N, V_T, P, S \rangle$ : Gramática)
  Act  $\leftarrow \emptyset$ 
  repeat
    for  $A \rightarrow \alpha \in P$  do
      if  $\alpha \in (A \cup V_T)^*$  then
        Act  $\leftarrow \text{Act} \cup \{A\}$ 
      end if
    end for
```

```

until Act no cambie
return Act
end function

```

7.5.2. Conjunto de símbolos anulables

Lema 7.3. Sea G una gramática libre de contexto. Entonces existe una gramática propia (sin producciones borradoras) G' tal que genere el mismo lenguaje que G sin la cadena nula.

No terminal anulado: Un no terminal A es anulado si y solo $A \Rightarrow^* \varepsilon$.

Algoritmo para conseguir el conjunto de no terminales anulables de una gramática:

```

function ANULABLES( $\langle V_N, V_T, P, S \rangle$ : Gramática)
  An  $\leftarrow \emptyset$ 
  for  $A \rightarrow \alpha \in P$  do
    if  $\alpha = \lambda$  then
      An  $\leftarrow$  An  $\cup \{A\}$ 
    end if
  end for
  repeat
    for  $A \rightarrow \alpha \in P$  do
      if  $\alpha \in \text{An}^*$  then
        An  $\leftarrow$  An  $\cup \{A\}$ 
      end if
    end for
  until An no cambie
  return Anul
end function

```

7.5.3. Gramáticas reducidas

Gramática reducida: Una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ es reducida si y solo si para todo $A \in V_N$ se cumple que A es alcanzable y activo.

Algoritmo para conseguir una gramática propia:

```

function PROPIA( $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ : Gramática)
  An  $\leftarrow$  anulables( $G$ )
  for  $A \rightarrow \alpha \in P$  do
    if  $\alpha = X_1 \dots X_k$  con  $X_{j_1}, \dots, X_{j_m} \in \text{An}$  then
      Agregar todas las producciones  $A \rightarrow \alpha'$  donde las  $\alpha'$  se obtiene eliminando cada
      subconjunto en  $X_{j_1}, \dots, X_{j_m}$  de  $\alpha$ . Si todos los símbolos de  $\alpha$  son anulables, no agregar  $A \rightarrow \lambda$ .
    end if
  end for
end function

```

```

    if  $\alpha = \lambda$  then
        Eliminar la producción  $A \rightarrow \lambda$ 
    end if
end for
return G modificada
end function

```

7.5.4. Forma normal de Chomsky

Una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ está en forma normal de Chomsky si y solo si todas sus producciones son de la forma $A \rightarrow BC$ o $A \rightarrow a$, donde $A, B, C \in V_N$ y $a \in V_T$.

Si L un lenguaje independiente del contexto tal que $\lambda \notin L$ entonces existe una gramática G en forma normal de Chomsky.

7.5.5. Forma normal de Greibach

Una gramática $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ está en forma normal de Greibach si y solo si todas sus producciones son de la forma $A \rightarrow a\alpha$ donde $A \in V_N$, $a \in V_T$ y $\alpha \in V_N^*$.

Si L un lenguaje independiente del contexto tal que $\lambda \notin L$ entonces existe una gramática G en forma normal de Greibach.

7.6. Otras propiedades

- Si $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$ es un autómata de pila y L el lenguaje tal que $L = \mathcal{L}_\lambda(M)$, entonces L es independiente del contexto.
- Sea $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ una gramática independiente del contexto. Se puede construir un autómata de pila M tal que $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}_\lambda(M)$.

8. Máquinas de Turing

El modelo más básico de una máquina de turing consiste en un control finito, una cinta infinita dividida en celdas y una cabeza de lectura. Cada celda de la cinta puede contener un único símbolo del alfabeto finito de la cinta.

Inicialmente, la cinta contiene una cadena de símbolos de entrada, seguida de un símbolo especial llamado blanco. La cabeza de lectura se coloca sobre el primer símbolo de la cadena de entrada. La máquina de Turing puede leer y escribir símbolos en la cinta o mover la cabeza de lectura a la izquierda o a la derecha.

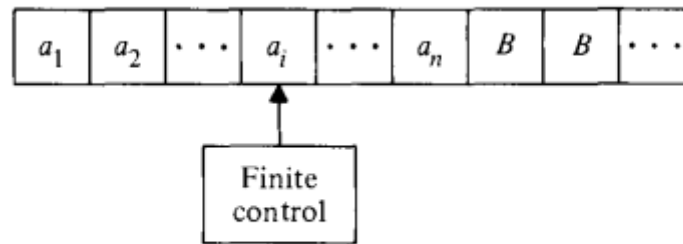


Fig. 7.1 Basic Turing machine.

Formalmente, definimos la máquina de Turing (MT) M como una tupla:

$$M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F \rangle$$

Donde:

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es un alfabeto de entrada.
- Γ es un alfabeto de cinta.
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ es una función de transición. Podría estar indefinido para algunos argumentos. La función indica devuele el estado al que se debe pasar, el símbolo a escribir en la posición actual de la cinta y el movimiento del cabezal (izquierda o derecha).
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $B \in \Gamma$ es el símbolo blanco.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Configuración instantánea: Una configuración instantánea de una MT es una tupla $\alpha_1 q \alpha_2$ donde $q \in Q$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma^*$ donde:

- α_1 son los simbolos de la cinta a la izquierda del cabezal.

- q es el estado actual.
- α_2 son los símbolos de la cinta a la derecha del cabezal hasta el último símbolo distinto de B .

Notemos que $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma^*$, osea que pueden tener apariciones de B .

Asumimos que el cabezal está escaneando el símbolo más a la derecha de α_2 o un blanco si $\alpha_2 = \lambda$.

Movimiento del cabezal: El movimiento del cabezal se define como sigue: Sea

$$X_1 \dots X_{i-2} q X_i \dots X_n$$

una configuración instantánea de una MT M .

Supongamos que $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$:

- Si $i - 1 = n$, asumimos $X_i = B$
- Si $i = 1$ entonces es imposible moverse a la izquierda.
- Si $1 < i < n$ entonces escribimos:

$$X_1 \dots X_{i-1} q X_i \dots X_n \vdash_M X_1 \dots X_{i-2} p X_{i-1} Y X_{i+1} \dots X_n$$

En caso de haya algún sufijo de $X_{i-1} Y X_{i+1} \dots X_n$ que sea completamente blanco, entonces se elimina.

Similarmente, si $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$:

$$X_1 \dots X_{i-1} q X_i \dots X_n \vdash_M X_1 \dots X_{i-1} Y p X_{i+1} \dots X_n$$

Si dos configuraciones instantáneas están relacionadas por \vdash_M , entonces decimos que la segunda es un resultado de la primera.

Si una configuración instantánea resulta de otra en un número finito de pasos, entonces están relacionadas por el símbolo \vdash_M^* .

Lenguaje aceptado por una MT: Definimos al lenguaje aceptado por una MT $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F \rangle$ como:

$$\mathcal{L}(M) = \{\omega \in \Sigma^* : q_0 \omega \vdash_M^* \alpha_1 p \alpha_2 \text{ con } p \in F \wedge \alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma^*\}$$

Asumimos que la máquina de Turing se detiene cuando el input es aceptado. Además es posible que nunca se detenga si el input no es aceptado.

8.1. Autómatas linealmente acotados

Es una máquina de Turing no determinística que cumple con las siguientes condiciones:

1. El alfabeto de entrada incluye dos símbolos especiales (ϵ y $\$$) que son utilizados como topes izquierdo y derecho, respectivamente.
2. El autómata no se mueve ni a la izquierda de ϵ ni a la derecha de $\$$, ni los sobrescribe.

Máquinas de dos cintas

Una máquina de Turing con dos o más cintas puede simularse usando la definición dada anteriormente. Para ello, definimos los estados en Γ como tuplas $[x_1, x_2]$ donde x_i sería el símbolo guardado en la i -ésima cinta.

Teorema 8.1. Si L es un lenguaje dependiente del contexto, entonces existe un autómata linealmente acotado A tal que $\mathcal{L}(A) = L$.

DEMOSTRACIÓN

Se construye el autómata linealmente acotado M tal que:

1. La primera cinta contiene la cadena de entrada $\epsilon\omega\$$.
2. La segunda cinta se utiliza para generar las formas de la derivación. En cualquier instante, esta cinta contendrá la forma sentencial α que representa la derivación de la cadena de entrada. Se inicializa con el símbolo distinguido S .

El autómata funcionará de la siguientes manera:

1. Si $\omega = \lambda$, entonces M se detiene rechazando la cadena de entrada.
2. Sino:
 - a) Selecciona (en forma no determinística) la posición i dentro de α (la derivación que se encuentra en la cinta)
 - b) Selecciona (en forma no determinística) la producción $\beta \rightarrow \gamma \in P$.
 - c) Si β aparece a partir de la posición i en α , entonces reemplaza β por γ en α .
 - d) Si la nueva forma sentencial α es tal que $|\alpha| > |\omega|$, entonces M se detiene rechazando la cadena de entrada.
 - e) Sino, comparamos α con ω . Si son iguales, entonces M se detiene aceptando la cadena de entrada. Sino, se vuelve a repetir el paso 2.

8.1.1. Lenguajes recursivos

Son lenguajes L sobre un alfabeto Σ para el cual existe una máquina de Turing que se detiene para todo $\alpha \in \Sigma^*$ y la acepta (termina en un estado final) si $\alpha \in L$ o la rechaza (termina en un estado no final) si $\alpha \notin L$. En otras palabras, son los lenguajes para los cuales existe un algoritmo que permite decidir la pertenencia (o no) de toda cadena al lenguaje.

Teorema 8.2. Todo lenguaje dependiente del contexto es recursivo

DEMOSTRACIÓN

Sea $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ un gramática dependiente del contexto y $\omega \in \Sigma^*$. Vamos a construir un grafo finito en el cual cada nodo tiene asociada un $\alpha \in (V_N \cup V_T)^+$ con $|\alpha| \leq |\omega|$. Las aristas representan una producción de G , osea si $\gamma_1\tau\gamma_2$ y $\gamma_1\beta\gamma_2$ son dos nodos, entonces van a estar conectados si y solo si $\tau \rightarrow \beta \in P$. Por ser G dependiente del contexto, vale $|\tau| \leq |\beta|$, entonces $|\gamma_1\tau\gamma_2| \leq |\gamma_1\beta\gamma_2|$. Por lo tanto, el grafo es acotado.

En este grafo finito, es cierto que $S \xrightarrow[G]{*} \omega$ si y solo si existe un camino desde el nodo correspondiente a S hasta el nodo correspondiente a ω . Y esto último es decidable, o sea, tiene algoritmo. Por lo tanto, G es recursivo.

Lema 8.1. Sea M_1, M_2, \dots una enumeración de un conjunto de máquinas de Turing que paran para todas las entradas. Siempre existe un lenguaje recursivo que no es aceptado por ninguna de ellas, o sea, siempre existe un lenguaje L tal que L es recursivo y $L \notin \mathcal{L}(M_i)$ para todo i .

DEMOSTRACIÓN

Consideremos el lenguaje definido $L = \{\omega_i : \omega_i \notin \mathcal{L}(M_i)\}$, es decir L está formado por todas las cadenas que son rechazadas por alguna de las máquinas M_i . Como es decidable si $\omega_i \in L$ o no (pues simplemente corremos las M_i con entrada ω y vemos si para en un estado no final), entonces L es recursivo.

Supongamos ahora que este lenguaje es aceptado por alguna de las máquinas enumeradas. Sea M_j , la misma. Entonces ¿que pasa si $\omega_j \in L$?

Por definición de L tenemos que $\omega_j \in L \iff \omega_j \notin \mathcal{L}(M_j) \iff \omega_j \notin L$. Esto es un absurdo, por lo tanto L no es aceptado por ninguna máquina M_1, M_2, \dots

Lema 8.2. Existe un lenguaje recursivo que no es dependiente del contexto

DEMOSTRACIÓN

Vamos a tratar de demostrar que podemos encontrar una numeración de máquinas Turing correspondientes a cada uno de los lenguajes dependientes del contexto definidos sobre $\{0, 1\}^*$.

Estas máquinas de Turing paran en todas las entradas porque como los lenguajes son dependientes de contexto, siempre hay un algoritmo de reconocimiento cuando el lenguaje es dependiente del contexto.

Codifiquemos todas estas gramáticas con cadenas binarias, es decir, demos una representación binaria a cada símbolo de la gramática codificando:

- $0 = 10$
- $1 = 100$
- y al resto de los símbolos $s_k = 10^k$

Gracias a esta codificación mediante 0s y 1s, podemos enumerarlas de la siguiente manera: G_1, G_2, \dots . Además, por el teorema 8.2, existen autómatas M_1, M_2, \dots que aceptan los lenguajes generados por cada una de ellas.

Luego, por el lema, anterior, tenemos que existe un lenguaje L recursivo que no es aceptado por ninguno de estos autómatas y no es dependiente del contexto.

Teorema 8.3. Sea M una máquina de Turing no determinística y $L = \mathcal{L}(M)$. Entonces existe una máquina de Turing determinista M' que acepta el mismo lenguaje.

DEMOSTRACIÓN

Sea r la máxima cantidad posible de transiciones que parte de un estado cualquiera de M