

# **Apuntes Metnum**

October 8, 2023

**Gian**

# **Contents**

1 Elementos del álgebra lineal .....	5
1.1 Vectores .....	6
1.1.1 Suma .....	6
1.1.2 Multiplicación por escalares .....	6
1.1.3 Producto interno .....	6
1.1.4 Combinación Lineal .....	6
1.1.5 Base vectorial .....	6
1.2 Matrices .....	8
1.2.1 Suma .....	8
1.2.2 Producto por escalares .....	8
1.2.3 Producto de matrices .....	8
1.2.4 Rango de una matriz .....	9
1.2.5 Determinante de una matriz .....	9
1.2.6 Espacio imagen .....	9
1.2.7 Espacio nulo .....	9
1.2.8 Matriz inversa .....	10
1.2.9 Matriz traspuesta .....	11
1.2.10 Submatriz principal .....	11
1.2.11 Matrices especiales .....	11
2 Sistema de ecuaciones lineales .....	14
2.1 Definición .....	15
2.2 Resolución .....	16
2.2.1 Sistemas de ecuaciones diagonales .....	16
2.2.2 Sistemas de ecuaciones triangulares .....	16
2.3 Sistemas de ecuaciones generales .....	18
2.3.1 Eliminación gaussiana .....	18
2.3.2 Eliminación Gaussiana con pivoteo .....	18
3 Factorización LU .....	20
3.1 Objetivo .....	21
3.2 Método .....	22
3.3 Propiedades .....	25
3.4 Factorización PLU .....	31
4 Normas vectoriales y matriciales .....	33
4.1 Normas vectoriales .....	34
4.2 Normas matriciales .....	35
4.2.2 Cota del error .....	36
5 Factorización de Cholesky .....	37
5.1 Matrices Simétricas Definidas Positivas .....	38
5.2 Método .....	42
5.2.1 Algoritmo .....	42
6 Factorización QR .....	44
6.1 Marices Ortogonales .....	45
6.1.1 Métodos .....	45
6.2 Método de Givens .....	47
6.2.1 Rotaciones de Givens .....	47
6.2.2 Factorización QR en el plano ( $2 \times 2$ ) .....	47
6.2.3 Factorización en $\mathbb{R}^{n \times n}$ .....	47
6.3 Método de Householder .....	50
6.3.1 Reflexiones de Householder .....	50

6.3.2 Factorización en el plano ( $2 \times 2$ ) .....	51
6.3.3 Factorización en $\mathbb{R}^{n \times n}$ .....	52
6.4 Propiedades .....	53
7 Factorización SVD .....	54
7.1 Autovalores .....	55
7.1.1 Disco de Gershgorin .....	59
7.1.2 Matriz semejantes .....	61
7.1.3 Propiedades de autovalores .....	63
7.2 Métodos para calcular autovalores .....	68
7.2.1 Método de la potencia .....	68
7.2.2 Método de la deflación .....	68
7.3 Descomposición en valores singulares (SVD) .....	69
7.3.1 Método .....	69
7.3.2 Demostración .....	69
7.3.3 Propiedades .....	71
8 Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales .....	73
8.1 Introducción .....	74
8.1.1 Método de Jacobi .....	74
8.1.2 Método de Gauss-Seidel .....	75
8.2 Análisis de convergencia .....	76
8.2.1 Matriz convergente .....	76
8.2.2 Teorema de convergencia .....	76
8.2.3 Cota del error .....	78
9 Cuadrados Mínimos Lineales .....	81
9.1 El problema .....	82
9.1.1 Ecuaciones normales .....	84
9.2 Resolución usando la factorización QR .....	86
9.2.1 Matriz de rango completo .....	86
9.2.2 Matriz de rango no completo .....	86
9.3 Resolución usando la factorización SVD .....	87
10 Bibliografía .....	88
10.1 Videos de clases .....	89
10.2 Enlaces .....	90
10.3 Libros .....	91

# **Elementos del álgebra lineal**

# 1.1 Vectores

Un **vector es un conjunto ordenado de números reales**, que se pueden representar como una lista de números. Por ejemplo, el vector  $v \in \mathbb{R}^n$  se puede representar como  $v = (1, 2, 3)$ .

## 1.1.1 Suma

Para **sumar dos vectores**, se suman las componentes correspondientes:

$$w = v + u \quad \text{con } w_i = v_i + u_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

La suma de vectores es **conmutativa** y **asociativa**.

## 1.1.2 Multiplicación por escalares

Los vectores se pueden **multiplicar por escalares**: Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $v \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\alpha \cdot v = (\alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2, \dots, \alpha \cdot v_n)$  para

## 1.1.3 Producto interno

El **producto interno** de dos vectores  $v, u \in \mathbb{R}^n$  se define como:

$$v \cdot u = \sum_{i=1}^n v_i u_i = \|v\| \|u\| \cos \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $v$  y  $u$

Graficamente, el producto interno se puede interpretar como la **proyección de un vector sobre otro**.

## 1.1.4 Combinación Lineal

Una **combinación lineal**  $w$  de vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  es un vector de la forma

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{R}$$

Decimos que  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son **linealmente independientes** si la única combinación lineal que da el vector nulo es la trivial, es decir, si  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

En cambio, si existe una combinación lineal no trivial (algún  $\alpha_i \neq 0$ ) que da el vector nulo, entonces los vectores son **linealmente dependientes**.

Nombramos **espacio generado** por un conjunto de vectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  al conjunto de todas las combinaciones lineales de esos vectores:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \quad \text{tal que } x = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\}$$

y su **dimensión** es la cantidad máxima de vectores linealmente independientes que lo generan.

## 1.1.5 Base vectorial

Una **base vectorial**  $B$  es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial. En otras palabras,  $B$  es una base de  $S$  si todos los vectores  $v \in S$  **se pueden escribir como una combinación lineal de los vectores de  $B$** .

## 1.2 Matrices

Una matriz es un **arreglo rectangular de números reales**. Por ejemplo, la matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se puede representar como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

### 1.2.1 Suma

Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , entonces  $A + B = C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , donde  $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$ .

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

La suma de matrices es **conmutativa** y **asociativa**.

Notar que para poder sumar dos matrices, **deben tener la misma dimensión**.

### 1.2.2 Producto por escalares

Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces  $\alpha A = B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , donde  $B_{ij} = \alpha A_{ij}$ .

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

### 1.2.3 Producto de matrices

Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , entonces  $AB = C \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , donde

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$



$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{kp} \end{bmatrix}$$

## 1.2.4 Rango de una matriz

El **rango de una matriz**  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la **cantidad máxima de columnas linealmente independientes** que tiene.

## 1.2.5 Determinante de una matriz

El **determinante**  $\det(A)$  de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es un **número real** que se calcula como:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad \text{para cualquier } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

donde  $A_{ij}$  es la matriz que se obtiene de  $A$  al eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$ .

Graficamente, **es el área del paralelogramo que forman las filas de  $A$** . En un espacio, el determinante es el volumen del paralelepípedo correspondiente.

## 1.2.6 Espacio imagen

El **espacio imagen** de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es el conjunto de todos los vectores  $b \in \mathbb{R}^m$  que se pueden escribir como  $b = Ax$  para algún  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$Im(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } b = Ax \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^n\}$$

Los vectores  $b \in Im(A)$  son **combinaciones lineales de las columnas de  $A$** .

## 1.2.7 Espacio nulo

El **espacio nulo** de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es el conjunto de todos los vectores  $x \in \mathbb{R}^n$  tales que  $Ax = 0$

$$Nu(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Ax = 0\}$$

Propiedad

$\text{Nu}(A) \neq \{0\} \Leftrightarrow$  las columnas de  $A$  son linealmente dependientes

Propiedad

$$\text{Im}(A) \oplus \text{Nu}(A) = \mathbb{R}^m$$

## 1.2.8 Matriz inversa

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , entonces  $A$  es **invertible** si existe una matriz  $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Propiedad

$A$  es invertible  $\Leftrightarrow \text{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Cuando  $A$  es invertible, decimos que  $A$  es una **matriz no singular**

Propiedad

La **inversa de una matriz diagonal** (si existe), es una **matriz diagonal**.

Propiedad

La inversa de un **matriz triangular superior** (si existe), es una **matriz triangular superior**.

Analogamente, la inversa de un **matriz triangular inferior** (si existe), es una **matriz triangular inferior**.

## 1.2.9 Matriz traspuesta

La **matriz traspuesta** de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz  $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$  tal que

$$A_{ij}^T = A_{ji}$$

### Propiedad

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

## 1.2.10 Submatriz principal

Una **submatriz principal** de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de orden  $k$  es una matriz  $A^{(k)}$  que se obtiene de  $A$  al eliminar las últimas  $m - k$  filas y las últimas  $n - k$  columnas. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A^{(4)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

## 1.2.11 Matrices especiales

### Matriz Identidad

La **matriz identidad**  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz cuadrada que tiene 1 en la diagonal y 0 en el resto de las posiciones:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

## Matriz diagonal

Una **matriz diagonal**  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz cuadrada que tiene 0 en todas las posiciones excepto en la diagonal:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

## Matriz triangular superior

Una **matriz triangular superior**  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz cuadrada que tiene 0 en todas las posiciones por debajo de la diagonal:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

## Matriz triangular inferior

Una **matriz triangular inferior**  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz cuadrada que tiene 0 en todas las posiciones por encima de la diagonal:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

### Propiedad

El **producto de dos matrices triangulares superiores** es una matriz **triangular superior**.

Analogamente, el **producto de dos matrices triangulares inferiores** es una **matriz triangular inferior**.

## Matriz estrictamente diagonal dominante

Una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **estrictamente diagonal dominante** si para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  se cumple que

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

## Matriz de permutación

Una **matriz de permutación**  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz que se obtiene de la matriz identidad  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  al **intercambiar dos o más filas (o columnas)** de  $I$ .

Al multiplicar una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  por una matriz de permutación  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se obtiene:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad PA = \begin{bmatrix} - & \text{fila}_2(A) & - \\ - & \text{fila}_4(A) & - \\ - & \text{fila}_3(A) & - \\ - & \text{fila}_1(A) & - \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \text{col}_4(A) & \text{col}_2(A) & \text{col}_3(A) & \text{col}_1(A) \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

## Matriz elemental (tipo 1)

Una **matriz elemental (tipo 1)** es la matriz identidad con una **fila multiplicada por un escalar no nulo**:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad EA = \begin{bmatrix} - & \text{fila}_1(A) & - \\ - & \alpha \text{fila}_2(A) & - \\ - & \text{fila}_3(A) & - \\ - & \text{fila}_4(A) & - \end{bmatrix}$$

$$AE = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \alpha \text{col}_2(A) & \text{col}_1(A) & \text{col}_3(A) & \text{col}_4(A) \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

## Matriz elemental (tipo 2)

Una **matriz elemental (tipo 2)** es la matriz identidad con **un elemento no nulo fuera de la diagonal**:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad EA = \begin{bmatrix} - & \text{fila}_1(A) & - \\ - & \text{fila}_2(A) & - \\ - & \text{fila}_3(A) + \alpha \text{fila}_1(A) & - \\ - & \text{fila}_4(A) & - \end{bmatrix}$$

$$AE = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \text{col}_1(A) + \alpha \text{col}_3(A) & \text{col}_2(A) & \text{col}_3(A) & \text{col}_4(A) \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

## **Sistema de ecuaciones lineales**

## 2.1 Definición

Un sistema de ecuaciones lineales es un **conjunto de ecuaciones lineales que se deben cumplir simultáneamente**.

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

Podemos armar una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con los coeficientes de las incógnitas, un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  con las incógnitas y un vector  $b \in \mathbb{R}^m$  con los resultados de las ecuaciones:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Entonces, el sistema de ecuaciones lineales **se puede representar como una operación matricial**, en la que se busca encontrar el vector  $x$  que cumple

$$Ax = b$$

.

Si  $b \notin \text{Im}(A)$  entonces el sistema **no tiene solución**.

Si  $b \in \text{Im}(A)$  entonces:

- Si  $\text{rang}(A) = n$  entonces el sistema **tiene una única solución**.
- Si  $\text{rang}(A) < n$  entonces el sistema **tiene infinitas soluciones**.

### Sistemas equivalentes

Sean  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , y  $b, d \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $Ax = b$  y  $Bx = d$  son **sistemas equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

## 2.2 Resolución

### 2.2.1 Sistemas de ecuaciones diagonales

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz diagonal y  $b \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $Ax = b$  es un **sistema de ecuaciones diagonales** y se puede resolver despejando cada incógnita por separado:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 &= b_1 \\a_{22}x_2 &= b_2 \\&\vdots \\a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

- Si  $a_{ii} \neq 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , el sistema **tiene única solución** y

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

- Si  $a_{ii} = 0$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ :
  - Si  $b_i = 0$  entonces el sistema **tiene infinitas soluciones**.
  - Si  $b_i \neq 0$  entonces el sistema **no tiene solución**.

### 2.2.2 Sistemas de ecuaciones triangulares

#### Backward Substitution

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una **matriz triangular superior** y  $b \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $Ax = b$  es un sistema de ecuaciones triangulares de la forma:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\&\vdots \\a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

- Si  $a_{ii} \neq 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , el sistema **tiene una única solución** y se puede resolver usando **backward substitution**:

$$\begin{aligned}x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}} \\&\vdots \\x_i &= \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j}{a_{ii}} \\&\vdots \\x_1 &= \frac{b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j}{a_{11}}\end{aligned}$$



Esté método tiene **complejidad**  $\mathcal{O}(n^2)$ .

- Si  $a_{ii} = 0$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ :
  - Ejecutamos el algoritmo de backward substitution hasta llegar a la fila  $i$ . Osea que obtenemos los valores para  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{i+1}$ .
  - Como todos estos valores son conocidos, simplemente hacemos la cuenta  $\text{fila}_i(A)x$ .
    - Si  $b_i$  es el valor que obtenemos, entonces el sistema **tiene infinitas soluciones**.
    - Si no lo es, entonces el sistema **no tiene solución**.

## Forward Substitution

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una **matriz triangular inferior** y  $b \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $Ax = b$  es un sistema de ecuaciones triangulares que se resuelve de forma similar al los sistemas triangulares superiores, la única diferencia es que se resuelve de arriba hacia abajo:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \\\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

## 2.3 Sistemas de ecuaciones generales

### 2.3.1 Eliminación gaussiana

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ , entonces usaremos el **método de eliminación gaussiana** para transformar el sistema original en un **sistema equivalente** que sea más fácil de resolver. En particular, vamos a transformar el sistema  $Ax = b$  en uno de la forma  $Ux = c$ , donde  $U$  es una **matriz triangular superior**.

Para esto, se aplican las siguientes **operaciones elementales**:

- **Multiplicar una fila por un escalar no nulo** usando una matriz elemental (tipo 1).
- **Intercambiar dos filas** usando una matriz de permutación.
- **Sumar una fila multiplicada por un escalar no nulo a otra** fila usando una matriz elemental (tipo 2).

Debemos aplicar estas operaciones de forma tal que al final del proceso obtengamos un sistema de ecuaciones triangular superior. Para esto, vamos a aplicar el siguiente esquema:

**ELIMINACIÓN GAUSSIANA**( $A$ : Matriz):

```
1  Para  $i \leftarrow 1$  a  $n$  hacer
2      Para  $j \leftarrow i + 1$  a  $n$  hacer
3           $m_{ij} = \frac{a_{ji}}{a_{ii}}$ 
4           $\text{fila}_j(A) = \text{fila}_j(A) - m_{ij} \text{fila}_i(A)$ 
5      Fin
6  Fin
```

La version mostrada **asume que  $a_{ii} \neq 0$**  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , en todo momento.

#### Propiedad

El algoritmo propuesto tiene complejidad  $\mathcal{O}(n^3)$ .

### 2.3.2 Eliminación Gaussiana con pivoteo

Si en alguna iteración, nos encontramos con que  $a_{ii} = 0$  entonces pueden darse dos posibles situaciones:

- $a_{ji} = 0$  para todo  $j \in \{i + 1, i + 2, \dots, n\}$ : En este caso, la fila  $i$  es nula, y podemos **pasar a la siguiente iteración**.
- Existe algún  $j \in \{i + 1, i + 2, \dots, n\}$  tal que  $a_{ji} \neq 0$ : En este caso, **intercambiamos la fila  $i$  con la fila  $j$** , y continuamos con el algoritmo.

**En la práctica** debemos tener en cuenta que **los números de coma flotante tienen precisión finita** por lo que debemos elegir de manera cuidadosa el pivote. Usaremos dos estrategias para esto:

- **Pivoteo parcial:** En cada iteración, elegimos entre las filas  $i, i + 1, \dots, n$  aquella que tiene el mayor valor absoluto en la columna  $i$ . Luego, intercambiamos la fila  $i$  con la fila elegida.
- **Pivoteo completo:** En cada iteración, buscamos la celda que tiene el mayor valor absoluto entre todas las filas  $i, i + 1, \dots, n$  y todas las columnas  $i, i + 1, \dots, n$ . Luego, intercambiamos la fila  $i$  con la fila de la celda elegida, y la columna  $i$  con la columna de la celda elegida.

# **Factorización LU**

## 3.1 Objetivo

Resolver varios sistemas de ecuaciones lineales con Eliminación Gaussiana tiene complejidad  $\mathcal{O}(n^3)$  por cada uno. Existen técnicas de factorización de matrices que nos permiten mejorar esta complejidad.

La **factorización LU** de una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una factorización de la forma  $A = LU$ , donde  $L$  es una **matriz triangular inferior** y  $U$  es una **matriz triangular superior**.

Podemos usar esta factorización para resolver el sistema  $Ax = b$  de la siguiente forma:

- Factorizamos  $A = LU$ : Entonces  $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$ .
- Definimos  $y = Ux$ : Entonces podemos resolver  $Ly = b$  usando **forward substitution**.
- Luego, resolvemos el sistema  $Ux = y$  usando **backward substitution**.

Osea que resolvemos dos sistemas triangulares, lo cual tiene **complejidad  $\mathcal{O}(n^2)$  por cada uno**. Hay que ver cuanto nos cuesta factorizar  $A$ .

## 3.2 Método

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , supongamos que aplicamos eliminación gaussiana y se verifica que  $a_{ii} \neq 0$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sea  $E$  la matriz elemental (tipo 2) que representa la **primer operación de la eliminación gaussiana**:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Vemos que  $EA = A_1$  representa la operación

$$\text{fila}_2(A) = \text{fila}_2(A) - m_{21} \text{fila}_1(A)$$

. Podemos juntar todas las matrices elementales (tipo 2) que representan las operaciones que anulan todos los elementos por debajo de la diagonal, y obtener una matriz  $M_1$ :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

.

Entonces  $M^1 A = A^1$  donde  $A^1$  es la matriz que se obtiene de  $A$  al aplicar el primer paso de eliminación gaussiana.

De la misma manera, podemos definir  $M^i$  como la matriz que representa las operaciones que anulan todos los elementos por debajo de la diagonal en la columna  $i$ :

$$M^i = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & -m_{i+1i} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -m_{ni} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces  $M^i A^{i-1} = A^i$  donde  $A^i$  es la matriz que se obtiene de  $A$  al aplicar el paso  $i$  de eliminación gaussiana.

Luego, podemos pensar al proceso de eliminación gaussiana como una **secuencia de multiplicaciones de matrices**: Sea  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz triangular superior que se obtiene de aplicar eliminación gaussiana a  $A$ , entonces:

$$U = M^n M^{n-1} \dots M^2 M^1 A$$

Propiedad

Sea  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz identidad,  $e_i$  el vector que tiene 1 en la posición  $i$  y 0 en el resto, y  $m_i = [0, \dots, m_{i+1i}, \dots, m_{ni}]$ , entonces:

$$M^i = I - m_i^t e_i$$

#### Propiedad

$M^i$  es una matriz **triangular inferior** con 1 en la diagonal.

#### Propiedad

$M^i$  es **invertible** y su inversa es

$$(M^i)^{-1} = I + m_i^t e_i$$

#### Demostración

$$\begin{aligned} M_i(M_i)^t &= (I - m_i^t e_i)(I + m_i^t e_i) \\ &= I + m_i^t e_i - m_i^t e_i - m_i^t e_i m_i^t e_i \\ &= I - m_i^t e_i m_i^t e_i \end{aligned}$$

Pero  $e_i m_i^t = 0$  porque  $e_i$  tiene 0 en todas las posiciones salvo en la  $i$  y  $m_i^t$  tiene 0 en todas las posiciones hasta la posición  $i$ . Entonces  $e_i m_i^t = 0$ :

$$I - m_i^t e_i m_i^t e_i = I - m_i^t 0 e_i = I$$

Como habíamos dicho que  $U = M^n M^{n-1} \dots M^2 M^1 A$  y ahora sabemos que  $M^i$  es invertible para todo  $i = \{1, \dots, n\}$ , entonces:

$$A = (M^1)^{-1} (M^2)^{-1} \dots (M^n)^{-1} U$$

Entonces, si definimos  $L = (M^1)^{-1} (M^2)^{-1} \dots (M^n)^{-1}$ , tenemos que  $A = LU$  obtenemos la factorización LU de  $A$  asociada a la eliminación gaussiana.

**¡Cuidado!**

**La factorización LU no siempre existe.** Si en algún paso de la eliminación gaussiana, nos encontramos con que  $a_{ii} = 0$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces la factorización LU no existe.



### 3.3 Propiedades

#### Propiedad

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **no singular** y tiene **factorización LU**, entonces esa **factorización es única**.

#### Demostración

Supongamos que existen al menos dos factorizaciones LU de  $A$ :  $A = L_1 U_1$  y  $A = L_2 U_2$ .

Como  $A$  es invertible, entonces  $U_1$  y  $U_2$  son invertibles. Además, las inversas son también triangulares superiores. Tanto  $L_1$  como  $L_2$  son triangulares inferiores con 1 en la diagonal. Entonces, partiendo de las dos factorizaciones:

$$\begin{aligned}L_1 U_1 &= L_2 U_2 \\L_1^{-1} L_1 U_1 &= L_1^{-1} L_2 U_2 \\U_1 &= L_1^{-1} L_2 U_2 \\U_1 U_2^{-1} &= L_1^{-1} L_2 U_2 U_2^{-1} \\U_1 U_2^{-1} &= L_1^{-1} L_2\end{aligned}$$

$U_1 U_2^{-1}$  es una matriz triangular superior por ser producto de dos matrices triangulares superiores.  $L_1^{-1} L_2$  es una matriz triangular inferior por ser producto de dos matrices triangulares inferiores.

Como  $D = U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2$  entonces  $D$  necesariamente tiene que ser una matriz diagonal.

También sabemos que  $L_1^{-1} L_2$  tiene 1 en la diagonal. Entonces  $D = I$ .

Luego,  $U_1 U_2^{-1} = I$  y  $U_1 = U_2$ . Entonces  $L_1 = L_2$ . ■

#### Propiedad

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no singular.

$A$  tiene factorización LU

$\Leftrightarrow$

todas sus matrices principales son no singulares

#### Demostración

$\Rightarrow$ ) Si  $A$  es no singular y tiene factorización LU, tanto  $L$  como  $U$  son no singulares. Los elementos de la diagonal de  $L$  son todos 1 y los elementos de la diagonal de  $U$  son todos no nulos. Las submatrices principales de  $L$  son también triangulares con 1 en la diagonal, por

lo tanto son no singulares. Las submatrices principales de  $U$  son triangulares superiores con elementos no nulos en la diagonal, por lo tanto son no singulares.

Como  $A = LU$ , entonces las submatriz de orden  $k$  de  $A$  es el resultado del producto de la submatriz de orden  $k$  de  $L$  y la submatriz de orden  $k$  de  $U$ . Como ambas son no singulares, entonces la submatriz de orden  $k$  de  $A$  tambien es no singular.

$\Leftarrow$ ) Demostramos por inducción en la dimensión de la matriz  $A$ .

- **Caso base:**  $n = 2$

Como  $a_{11}$  no es nulo por ser la submatriz principal de orden 1 de  $A$ , entonces el primer (y único) paso de la eliminación Gaussiana se puede realizar sin inconvenientes y se encuentra la factorización LU.

- **Paso inductivo:** Supongamos que vale para matrices de imensión2  $n$  y veamos que vale para matrices de orden  $n + 1$ .

Consideremos  $A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  con todas sus submatrices principales no singulares. Veamos que  $A$  tiene factorización LU.

Si escribimos  $A$  como:

$$A = \begin{bmatrix} A^{(n)} & c_{n+1} \\ f_{n+1}^t & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

donde  $A^{(n)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $c_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ ,  $f_{n+1} \in \mathbb{R}^n$  y  $a_{n+1,n+1} \in \mathbb{R}$ .

Como todas las submatrices principales de  $A$  son no singulares, entonces  $A^{(n)}$  y todas sus submatrices principales son no singulares. Entonces, por hipótesis inductiva,  $A^{(n)}$  tiene factorización LU. Sea  $A^{(n)} = L^{(n)}U^{(n)}$ .

Propongamos una factorización LU para  $A$ , se resaltan los valores que necesitamos calcular:

$$A = \begin{bmatrix} A^{(n)} & c_{n+1} \\ f_{n+1}^t & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^{(n)} & 0 \\ l_{n+1}^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(n)} & u_{n+1} \\ 0 & u_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

Realizando el producto en bloques, tenemos que verificar que:

1.  $A^{(n)} = L^{(n)}U^{(n)}$

Se pueden calcular usando eliminación gaussiana ya que es la factorización LU de  $A^{(n)}$ .

2.  $c_{n+1} = L^{(n)}u_{n+1}$

Como  $L^{(n)}$  es no singular, entonces este sistema tiene solución y es única, por lo que es posible determinar  $u_{n+1}$ .

3.  $f_{n+1}^t = l_{n+1}^t U^{(n)}$

La matriz  $U^{(n)}$  es no singular ya que  $A^{(n)}$  es no singular, por lo tanto el tercer sistema también tiene solución y es única, por lo que es posible determinar  $l_{n+1}^t$ .

$$4. a_{n+1n+1} = l_{n+11}^t u_{n+1} + u_{n+1,n+1}$$

Como  $l_{n+11}^t$  y  $u_{n+1}$  son conocidos, entonces es posible determinar unívocamente  $u_{n+1,n+1}$ .

Concluimos entonces que  $A$  tiene factorización LU, ya que todos los sistemas propuestos tienen solución y es única. ■

### Propiedad

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es **estrictamente diagonal dominante**, entonces  $A$  **tiene factorización LU**.

### Demostración

Vamos a demostrar que  $A$  es no singular y que todas sus submatrices principales son no singulares. De esta manera, estamos en condiciones de aplicar la propiedad anterior y concluir que  $A$  tiene factorización LU.

- **$A$  es no singular:** Supongamos que  $A$  es singular, entonces existe  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$  tal que  $Ax = 0$ .

Como  $x \neq 0$ , entonces tiene una coordenada con máximo valor absoluto, o dicho de otra manera existe  $k_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que

$$|x_{k_0}| = \max_{j=1 \dots n} |x_j|$$

con  $|x_{k_0}| \neq 0$ .

Consideremos la ecuación  $k_0$  del sistema  $Ax = 0$ :

$$\sum_{j=1}^n a_{k_0 j} x_j = 0$$

Separamos el término  $k_0$ :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n a_{k_0 j} x_j + a_{k_0 k_0} x_{k_0} = 0$$

Pasamos restando:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n a_{k_0 j} x_j = -a_{k_0 k_0} x_{k_0}$$

Tomamos valor absoluto, como  $|-a_{k_0 k_0} x_{k_0}| = |a_{k_0 k_0}| |x_{k_0}|$  :

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n a_{k_0 j} x_j \right| = |a_{k_0 k_0}| |x_{k_0}|$$

Aplicamos desigualdad triangular al lado izquierdo de la ecuación:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n |a_{k_0 j} x_j| \geq \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n a_{k_0 j} x_j \right| = |a_{k_0 k_0}| |x_{k_0}|$$

Entonces:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n |a_{k_0 j} x_j| \geq |a_{k_0 k_0}| |x_{k_0}|$$

Pasamos  $|x_{k_0}|$  dividiendo:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n \frac{|a_{k_0 j}| |x_j|}{|x_{k_0}|} \geq |a_{k_0 k_0}|$$

Pero  $|x_j| \leq |x_{k_0}|$  para todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces  $\frac{|x_j|}{|x_{k_0}|} \leq 1$ :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n |a_{k_0 j}| |x_j| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n \frac{|a_{k_0 j}| |x_j|}{|x_{k_0}|} \geq |a_{k_0 k_0}|$$

Entonces:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n |a_{k_0 j}| |x_j| \geq |a_{k_0 k_0}|$$

Pero  $\mathbf{A}$  es estrictamente diagonal dominante, entonces  $|a_{k_0 k_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n |a_{k_0 j}|$  por lo que llegamos a una contradicción. Entonces  $\mathbf{A}$  es no singular. ■

### Demostración alternativa

Vamos a demostrar que es posible realizar el primer paso de la eliminación Gaussiana y que la matriz conformada por las filas **2** a **n** y columnas **2** a **n** es estrictamente diagonal dominante. De esta manera, podremos afirmar que la eliminación Gaussiana se puede aplicar sin inconvenientes y por lo tanto existe la factorización LU.

- **Primer paso de la eliminación Gaussiana:** Como  $A$  es estrictamente diagonal dominante, entonces podemos afirmar que  $a_{11} \neq 0$ . Entonces, el primer paso de la eliminación Gaussiana es:

$$\tilde{F}_i = F_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} F_1 \rightarrow \tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}$$

- **La parte de la matriz que queda por triangular es estrictamente diagonal dominante:** Tenemos que ver que

$$\tilde{a}_{ii} \geq \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |\tilde{a}_{ij}| \quad \text{para todo } i \in \{2, 3, \dots, n\}$$

Analicemos el término de la sumatoria:

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |\tilde{a}_{ij}| = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right|$$

Aplicando la desigualdad triangular, tenemos:

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |\tilde{a}_{ij}| = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left| a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right| \leq \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left( |a_{ij}| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right| \right)$$

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |\tilde{a}_{ij}| \leq \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left( |a_{ij}| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right| \right)$$

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |\tilde{a}_{ij}| \leq \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n \left( |a_{ij}| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j} \right| \right) = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{1j}|$$

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |\tilde{a}_{ij}| \leq \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{1j}|$$

Como  $A$  es estrictamente diagonal dominante, entonces

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \Rightarrow |a_{ii}| - |a_{i1}| > \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{1j}|$$

Entonces, remplazamos en la desigualdad anterior:

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |a_{1j}| < |a_{ii}| - |a_{i1}| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| (|a_{11}| - |a_{1i}|)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |\tilde{a}_{ij}| &< |a_{ii}| - |a_{i1}| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| (|a_{11}| - |a_{1i}|) \\
\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |\tilde{a}_{ij}| &< |a_{ii}| - |a_{i1}| + \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| |a_{11}| - \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| |a_{1i}| \\
\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |\tilde{a}_{ij}| &< |a_{ii}| - |a_{i1}| + |a_{i1}| - \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| |a_{1i}| \\
\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |\tilde{a}_{ij}| &< |a_{ii}| - \left| \frac{a_{i1}}{a_{11}} \right| |a_{1i}| \\
\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n |\tilde{a}_{ij}| &\leq \left| a_{ii} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1i} \right| = |\tilde{a}_{ii}|
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que la matriz conformada por las filas **2** a  **$n$**  y columnas **2** a  **$n$**  que resulta del primer paso de eliminación Gaussiana es estrictamente diagonal dominante por lo que exist efactorización LU. ■

### 3.4 Factorización PLU

En caso de que la factorización LU no exista, podemos usar **pivoteo parcial** para obtener una factorización PLU que es una factorización LU la **matriz original con sus filas permutadas**:

$$PA = LU$$

#### Propiedad

Toda matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tiene factorización PLU.

#### Demostración

Si aplicamos eliminación Gaussiana con pivoteo parcial, aplicando permutaciones cuando sea necesario por la presencia de elementos nulos en la diagonal durante el proceso, se obtiene el siguiente producto de matrices:

$$M^{n-1}P^{n-1}M^{n-2}P^{n-2}\dots M^iP^i\dots M^2P^2M^1P^1A = U$$

donde  $M^i = I - m_i^t e_i$  y  $P^i$  es una matriz de permutación que indican los intercambios realizados entre las filas.

Tenemos que encontrar una forma de llegar desde esta ecuación hasta una ecuación de la forma  $PA = LU$

Como cada  $P^i$  es una matriz de permutación entre filas, entonces  $P^i$  es no singular y su inversa es ella misma. Osea que  $P^iP^i = I$ . Podemos agregar entonces los siguientes terminos a la ecuación, sin modificar su resultado:

$$M^{n-1}P^{n-1}M^{n-2}P^{n-1}P^{n-1}P^{n-2}\dots P^{i+2}\dots P^{n-1}P^{n-1}\dots P^{i+1}P^i \\ \dots M^2P^3\dots P^{n-1}P^{n-1}\dots P^3P^2M^1P^2\dots P^{n-1}P^{n-1}\dots P^2P^1A = U$$

Notemos ahora  $\tilde{M}^i = (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1}M^i(P^{i+1}\dots P^{n-1}))$ , entonces tenemos que:

$$M^{n-1}\tilde{M}^{n-2}\dots\tilde{M}^i\dots\tilde{M}^2\tilde{M}^1(P^{n-1}\dots P^2P^1)A = U$$

Veamos que estructura tiene  $\tilde{M}^i$ :

$$\begin{aligned} \tilde{M}^i &= (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})(I - m_i^t e_i)(P^{i+1}\dots P^{n-1}) \\ &= (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})I(P^{i+1}\dots P^{n-1}) \\ &\quad - (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})(m_i^t e_i)(P^{i+1}\dots P^{n-1}) \\ &= I - (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})(m_i^t e_i)(P^{i+1}\dots P^{n-1}) \end{aligned}$$

Como  $P^{i+1}\dots P^{n-1}$  son matrices de permutación que realizan intercambios entre las filas  $i+1$  a  $n$ , entonces  $e_i(P^{i+1}\dots P^{n-1}) = e_i$ .

Además nombremos  $\tilde{m}_i = (P^{n-1}\dots P^{i+2}P^{i+1})m_i^t$  al entonces tenemos que:

$$\tilde{M}^i = I - \tilde{m}_i^t e_i$$

Entonces, vemos que  $\tilde{M}^i$  son matrices triangulares inferiores con 1 en la diagonal. Además, como  $P^{n-1} \dots P^{i+2} P^{i+1}$  son matrices de permutación, entonces  $\tilde{M}^i$  son no singulares. Por lo que, podemos escribir:

$$(P^{n-1} \dots P^2 P^1)A = (\tilde{M}^1)^{-1} (\tilde{M}^2)^{-1} \dots (\tilde{M}^i)^{-1} U$$

Definimos  $L = (\tilde{M}^1)^{-1} (\tilde{M}^2)^{-1} \dots (\tilde{M}^i)^{-1}$  y  $P = P^{n-1} \dots P^2 P^1$ , entonces:

$$PA = LU \blacksquare$$



# **Normas vectoriales y matriciales**

## 4.1 Normas vectoriales

Una **norma vectorial** es una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las siguientes propiedades:

- $f(x) > 0$  para todo  $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$
- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}^n$
- $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$

**Norma 1 (norma Manhattan)**

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

**Norma 2 (norma Euclídea)**

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

**Norma  $p$**

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Norma infinito**

$$\|x\|_{\inf} = \max_{\{1 \leq i \leq n\}} |x_i|$$

## 4.2 Normas matriciales

Una **norma matricial** es una función  $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple las siguientes propiedades:

- $f(A) > 0$  para todo  $A \neq 0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $f(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $f(\alpha A) = |\alpha| f(A)$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $f(A + B) \leq f(A) + f(B)$  para todo  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Adicionalmente, si  $f$  cumple que  $f(AB) \leq f(A)f(B)$  para todo  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  entonces diremos que  $f$  es una **norma submultiplicativa**.

### Norma de Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$$

### Normas matriciales inducidas

Sean  $f_1$  una norma vectorial definida en  $\mathbb{R}^m$  y  $f_2$  una norma vectorial definida en  $\mathbb{R}^n$ , entonces la función  $F : \mathbb{R}^{m \times n}$  es una **norma inducida** si:

$$F(A) = \max_{x \neq 0} \frac{f_1(Ax)}{f_2(x)} = \max_{x: f_2(x)=1} f_1(Ax)$$

### Número de condición

Cuando representamos una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  en una computadora, usamos aritmética de punto flotante finita. Esto quiere decir que los coeficientes que usamos y los cálculos que hacemos no son exactos. El **número de condición** de una matriz nos da una idea de cuánto puede variar la solución de un sistema de ecuaciones lineales si se dan errores de redondeo:

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Mientras más chico sea este número, mejor condicionada estará la matriz para que la podamos usar en un algoritmo que resuelve sistemas de ecuaciones.

#### Propiedad

Si  $\|\cdot\|$  es una norma matricial inducida, entonces  $\kappa(I) = 1$ .

#### Propiedad

Si  $\|\cdot\|$  es una norma submultiplicativa, entonces  $\kappa(A) \geq 1$

## 4.2.2 Cota del error

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matriz no singular y  $\|\cdot\|$  una norma matricial inducida. Sea  $\tilde{x}$  una solución aproximada de  $Ax = b$  con  $b \neq 0$  y sea  $A\tilde{x} = \tilde{b}$  entonces:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

# **Factorización de Cholesky**

## 5.1 Matrices Simétricas Definidas Positivas

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz cuadrada, se dice que es **simétrica definida positiva (SDP)** si:

- $A = A^T$  (es simétrica)
- $x^T A x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $x \neq 0$  (es definida positiva)

### Propiedad

Si  $A$  es SDP, entonces  $A$  es no singular.

### Demostración

Supongamos que  $A$  es SDP y singular. Entonces existe  $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $Ax = 0$ . Entonces  $x^T Ax = 0$  lo cual es absurdo pues contradice la definición de SDP ■

### Propiedad

Si  $A$  es SDP, entonces  $a_{ii} > 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### Demostración

Sea  $e_i$  el  $i$ -ésimo vector canónico. Entonces  $e_i^T A e_i = a_{ii} > 0$  pues  $A$  es SDP ■

### Propiedad

Si  $A$  es SDP, todas sus submatrices principales son SDP.

### Demostración

Sea  $A^{(k)}$  la submatriz principal de  $A$  de orden  $k$ . Tenemos que ver que cumple con las dos condiciones de SDP:

- $A^{(k)} = (A^{(k)})^T$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij} = a_{ji} = (a_{ji}^{(k)})$$

- $x^T A^{(k)} x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^k$  con  $x \neq 0$

Supongamos que esto no sucede, entonces existe  $\bar{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^k$  tal que  $\bar{x}^T A^{(k)} \bar{x} = 0$ .  
Armemos un vector  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x = (\bar{x}, 0, \dots, 0)$ . Entonces:

$$\begin{aligned}
x^T A x &= [\bar{x}^t \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} A^{(k)} & * & \dots & * \\ * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= [\bar{x}^t \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} A^{(k)} \bar{x} \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} = x^t A^{(k)} x \leq 0
\end{aligned}$$

Entonces  $x^t A x \leq 0$ , lo cual es absurdo pues  $A$  era una matriz SDP.

Entonces  $A^{(k)}$  cumple con ambas condiciones y es SDP ■

### Propiedad

$A$  es SDP  $\Leftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no singular vale que  $B^T A B$  es SDP.

#### Demostración

Supongamos que  $A$  es SDP. Entonces tenemos que ver que  $B^T A B$  cumple las condiciones de SDP:

- $B^T A B = (B^T A B)^T$

$$(B^T A B)^t = ((B^T A) B)^T = B^T (B^T A)^T = B^T A^T B$$

Como  $A^T = A$ , queda:

$$(B^T A B)^t = B^T A^T B = B^T A B$$

- $x^T B^T A B x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $x \neq 0$

Sea  $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ , entonces:

$$x^T B^T A B x = (Bx)^T A (Bx)$$

Si nombramos  $y = Bx$ , entonces  $y \neq 0$  pues  $B$  es no singular y  $x \neq 0$ . Entonces resulta  $x^T B^T A B x = y^T A y > 0$  pues  $A$  es SDP.

Luego  $B^T A B$  es SDP ■

### Propiedad

Si  $A$  es SDP, entonces la submatriz conformada por las filas  $2$  a  $n$  y las columnas  $2$  a  $n$  después del primer paso de la eliminación gaussiana es SDP.

### Demostración

Sea  $M_1$  la matriz asociada al primer paso de la eliminación gaussiana y  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$  conformada por las filas  $2$  a  $n$  y las columnas  $2$  a  $n$  de  $M_1 A$ .

Realicemos el producto  $M_1 A M_1^T$ :

$$\begin{aligned} M_1 A M_1^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{21}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{n1}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & & \tilde{A} & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{21}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{n1}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por la propiedad anterior, podemos afirmar que  $M_1 A M_1^T$  es SDP. Entonces  $\tilde{A}$  es SDP

### Corolario

Si  $A$  es SDP, entonces **tiene factorización LU**.

### Corolario

Si  $A$  es SDP, entonces se puede aplicar el **método de eliminación gaussiana sin pivoteo**.



### Propiedad

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , entonces  $A^t A$  es una matriz semidefinida positiva.

### Demostración

Sea  $x \in \mathbb{R}^m$ , entonces:

$$x^t A^t A x = (Ax)^t Ax = \|Ax\|^2 \geq 0$$

## 5.2 Método

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz SDP. Entonces existe una única matriz triangular inferior  $L$  tal que  $A = LL^T$ .

Como  $A$  tiene factorización LU

$$A = LU \Rightarrow A^t = (LU)^t = U^t L^t$$

Además como es SDP,  $A^t = A \Rightarrow U^t L^t = LU$

Como  $L$  es triangular inferior con 1s en la diagonal y  $L^t$  es triangular superior con 1s en la diagonal, ambas son inversibles. Entonces:

$$\begin{aligned} LU = U^t L^t &\Rightarrow L^{-1}LU = L^{-1}U^t L^t \Rightarrow U = L^{-1}U^t L^t \\ &\Rightarrow U(L^t)^{-1} = L^{-1}U^t L^t (L^t)^{-1} \\ &\Rightarrow U(L^t)^{-1} = L^{-1}U^t \end{aligned}$$

$U(L^t)^{-1}$  es triangular superior pues ambas matrices son triangulares superiores. Además  $L^{-1}U^t$  es triangular inferior pues ambas matrices son triangulares inferiores. Por lo tanto, la igualdad a la que llegamos solo se puede dar si ambas matrices son diagonales:

$$U(L^t)^{-1} = L^{-1}U^t = D \text{ matriz diagonal}$$

Además, podemos escribir  $U$  como:

$$U = DL^t$$

Entonces  $A = LU = LDL^t$

Sea ahora  $x \neq 0$  tal que  $L^t x = e_i$ . Entonces:

$$0 < x^t A x = x^t L D L^t x = (L^t x)^t D (L^t x) = e_i^t D e_i = d_{ii}$$

Esto implica que todos los elementos de la diagonal son distintos de cero, por lo tanto  $D$  es no singular. Además:

$$D = \sqrt{D} \sqrt{D}$$

donde  $\sqrt{D}$  es la matriz diagonal con la raíz cuadrada de los elementos de  $D$  en la diagonal. Entonces:

$$A = LDL^t = L \sqrt{D} \sqrt{D} L^t = (L \sqrt{D}) (L \sqrt{D})^t = \tilde{L} \tilde{L}^t$$

### 5.2.1 Algoritmo

El algoritmo para calcular la factorización de Cholesky es el siguiente:

Si  $l_{ij}$  son los elementos de  $L$  y  $a_{ij}$  son los elementos de  $A$ , entonces:

CHOLESKY(**A**: Matriz):

1  $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$  **Para**  $j \leftarrow 2$  a  $n$  **hacer**

2  $l_{j1} = \frac{a_{j1}}{l_{11}}$  **Para**  $i \leftarrow 2$  a  $n - 1$  **hacer**

3  $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$

4 **Para**  $j \leftarrow i + 1$  a  $n$  **hacer**

5  $l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik}}{l_{ii}}$

6 **Fin**

7  $l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}^2}$

8 **Fin**

# Factorización QR

## 6.1 Marices Ortogonales

Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q$  es **ortogonales** si y solo si  $QQ^T = Q^TQ = I$

### Propiedad

Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal, entonces  $\|\text{col}_i(Q)\|_2 = 1$  para todo  $i = 1 \dots n$

### Propiedad

Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal, entonces  $\|\text{fila}_i(Q)\|_2 = 1$  para todo  $i = 1 \dots n$

### Propiedad

Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal, entonces  $\|Q\|_2 = 1$

### Propiedad

Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal, entonces  $\kappa(Q) = 1$

### Propiedad

Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal y  $x \in \mathbb{R}^n$  entonces  $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$

### Propiedad

Sea  $Q, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonales entonces  $QR$  es ortogonal

### 6.1.1 Métodos

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  **ortogonal** y  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  **triangular superior** tal que  $A = QR$

Entonces podemos resolver el sistema de ecuaciones  $Ax = b$  de la siguiente manera:

$$Ax = b \Rightarrow QRx = b \Rightarrow Q^tQRx = Q^tb \Rightarrow Rx = Q^tb$$

Entonces **podemos resolver el sistema  $Rx = Q^tb$  en  $\mathcal{O}(n^2)$  operaciones.**

Veamos como obtener  $Q$  y  $R$  usando dos métodos distintos: **Método de Givens** y **Método de Householder**.

## 6.2 Método de Givens

### 6.2.1 Rotaciones de Givens

Dado un ángulo  $\theta$  definimos la transformación lineal  $W : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que rota al vector  $\theta$  grados en el sentido horario:

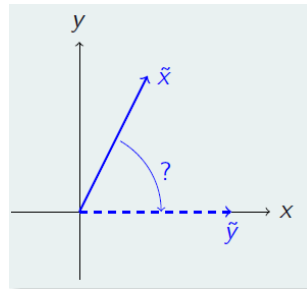
$$W = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Entonces  $W$  es ortogonal y  $\|Wx\|_2 = \|x\|_2$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ .

Sean  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^2$  tal que

$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Queremos encontrar  $W$  tal que  $W\tilde{x} = \tilde{y}$ . Proponemos:



$$W = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} \\ -\frac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} & \frac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} \end{bmatrix}$$

### 6.2.2 Factorización QR en el plano ( $2 \times 2$ )

Si  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  y tomamos

$$\tilde{x} = \text{col}_1(A) \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces podemos armar  $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $W\tilde{x} = \tilde{y}$ . Además:

$$WA = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 & * \\ 0 & * \end{bmatrix} = R \Rightarrow WA = R \Rightarrow W^t WA = W^t R \Rightarrow A = W^t R$$

Si renombramos  $W^t = Q$  entonces  $A = QR$ .

### 6.2.3 Factorización en $\mathbb{R}^{n \times n}$

Tenemos que ver como adaptar este proceso a más dimensiones. Sean  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , nuestro primer objetivo es anular el elemento  $a_{21}$ . Sabemos que si tomamos un vector

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

entonces existe  $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que

$$W\tilde{x} = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos a inventar una matriz  $W_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que realice esta misma operación sobre  $A$ . Definimos entonces  $W_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  como:

$$W_{12} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 & \dots & 0 \\ w_{21} & w_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow W_{12}A = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^1$$

Ahora queremos anular el elemento  $a_{31}$ , para eso vamos a usar una matriz  $W_{23} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que realice esta misma operación sobre  $A^1$ . Nuestro nuevo es

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

y nuestro nuevo  $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que

$$W\tilde{x} = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definimos entonces  $W_{13} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  como:

$$W_{23} = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & w_{12} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \dots & 0 \\ w_{21} & 0 & w_{22} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow W_{23}A^1 = \begin{bmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = A^2$$

Podemos repetir este proceso, por cada elemento que queremos anular: Supongamos que queremos anular el elemento  $a_{ij}$ , entonces elegimos

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} a_{ii} \\ a_{ij} \end{bmatrix}$$

y  $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que

$$W\tilde{x} = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y definimos  $W_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  como:



$$W_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & w_{ii} & \dots & w_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & w_{ji} & \dots & w_{jj} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

En las coordenadas resaltadas, ubicamos los elementos de  $W$ .

Tras realizar este proceso  $n - 1$  veces, obtenemos una matriz  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  triangular superior:

$$W_{n-1n} W_{n-2n} W_{n-2n-1} \dots W_{1n} \dots W_{12} A = R$$

Ademas como cada  $W_{ij}$  es ortogonal, entonces es inversible y podemos armar una matriz  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que:

$$Q = W_{12}^t \dots W_{1n}^t \dots W_{n-2n-1}^t W_{n-2n}^t W_{n-1n}^t$$

Luego:

$$A = QR$$

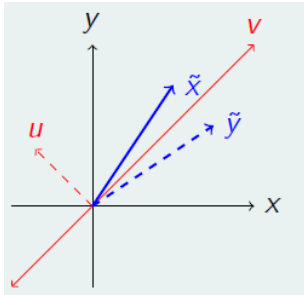
#### Propiedad

Ejecutar el método de Givens sobre una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  cuesta  $\mathcal{O}(\frac{4}{3}n^3)$  operaciones

## 6.3 Método de Householder

### 6.3.1 Reflexiones de Householder

Dado tres vectores  $u, v \in \mathbb{R}^2$  ortogonales entre si y  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$ . Buscamos la transformación lineal  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que refleja al vector  $x$  respecto del plano definido por  $u$  y  $v$ :



Esta matriz debe cumplir las siguientes condiciones:

1.  $Hu = -u$
2.  $Hv = v$
3.  $H\tilde{x} = \tilde{y}$

Como  $u$  y  $v$  son ortogonales, forman una base de  $\mathbb{R}^2$ , entonces podemos escribir  $\tilde{x}$  como combinación lineal de  $u$  y  $v$ :

$$\tilde{x} = \alpha v + \beta u$$

Además, la reflexión de  $\tilde{x}$  respecto del plano definido por  $u$  y  $v$  se puede escribir como  $\tilde{y} = \alpha v - \beta u$ .

Entonces, si remplazamos  $\tilde{y}$  en la ecuación  $H\tilde{x} = \tilde{y}$  obtenemos que:

$$\begin{aligned} H\tilde{x} &= \tilde{y} \\ &= \alpha v - \beta u \\ &= \alpha v + \beta u - \beta u - \beta u \quad (\text{agregamos un termino que es cero}) \\ &= \alpha v + \beta u - 2\beta u \\ &= \tilde{x} - 2\beta u \\ &= I\tilde{x} - W\tilde{x} \quad \text{con } W\tilde{x} = 2\beta u \\ &= (I - W)\tilde{x} \end{aligned}$$

Entonces  $H = I - W$ . Ahora tenemos que encontrar  $W$ . Como  $\tilde{x} = \alpha v + \beta u$  entonces:

$$\begin{aligned} W\tilde{x} &= W(\alpha v + \beta u) = \alpha Wv + \beta Wu = 2\beta u \\ \Rightarrow \alpha &= 0 \quad \text{y} \quad Wu = 2u \end{aligned}$$

Por ahora, asumamos por simplicidad que  $\|u\|_2 = 1$ . Sea

$$P = uu^t = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1 u_2 \\ u_1 u_2 & u_2^2 \end{bmatrix}$$

Entonces  $P$  es simétrica y cumple las siguientes propiedades:

- $P^t = P$
- $PP^t = P$
- $Pu = u$
- $Pv = 0$

Entonces, si tomamos  $W = 2P$  entonces  $Wu = 2Pu = 2u$ .

Finalmente,  $H = I - 2P$ .

### Propiedad

$H$  es simétrica y ortogonal

### Propiedad

Sean  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\tilde{x}\|_2 = \|\tilde{y}\|_2$  entonces existe una reflexión  $H$  tal que  $H\tilde{x} = \tilde{y}$ :

$$H = I - 2 \frac{(\tilde{x} - \tilde{y})(\tilde{x} - \tilde{y})^t}{\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2^2}$$

## 6.3.2 Factorización en el plano ( $2 \times 2$ )

Sea  $A \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  busquemos una reflexión  $H$  tal que  $HA$  resulte en una matriz triangular. Tomemos

$$\tilde{x} = \text{col}_1(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, por la propiedad anterior, existe una reflexión  $H$  tal que  $H\tilde{x} = \tilde{y}$ . Entonces:

$$HA = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 & * \\ 0 & * \end{bmatrix} = R \Rightarrow HA = R \Rightarrow H^t HA = H^t R \Rightarrow A = H^t R$$

Como  $H^t$  es ortogonal, podemos renombrar  $H^t = Q$  y entonces  $A = QR$ .

### 6.3.3 Factorización en $\mathbb{R}^{n \times n}$

Se puede extender el mismo concepto a múltiples dimensiones. En este caso, nuestro primer objetivo es anular todos los elementos de la primer fila por debajo de la diagonal. Para eso, tomamos

$$\tilde{x} = \text{col}_1(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \quad \tilde{y} = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

y buscamos una reflexión  $H_1$  tal que  $H_1 \tilde{x} = \tilde{y}$ .

Por la misma propiedad anterior, existe una reflexión  $H_1$  tal que  $H_1 \tilde{x} = \tilde{y}$ . Entonces:

$$H_1 A = \begin{bmatrix} \|\tilde{x}\|_2 & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{bmatrix} = A^1$$

En los siguientes paso, buscamos  $H_2$  tal que  $H_2 A^1$  anule todos los elementos de la segunda fila por debajo de la diagonal.

En cada paso, buscamos la reflexión  $H_i$  que permite anular las entradas de la fila  $i$  por debajo de la diagonal.

Al final del proceso, obtenemos una secuencia de productos matriciales que nos permiten obtener una matriz  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  triangular superior:

$$H_n H_{n-1} \dots H_1 A = R$$

Además, como cada  $H_i$  es ortogonal, entonces es inversible y podemos armar una matriz  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que:

$$Q = H_1^t H_2^t \dots H_{n-1}^t$$

## 6.4 Propiedades

### Propiedad

Ejecutar el método de Householder sobre una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  cuesta  $\mathcal{O}(\frac{2}{3}n^3)$  operaciones

### Propiedad

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $A$  no singular. Existen únicas  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal y  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  triangular superior tal que  $A = QR$

# **Factorización SVD**

## 7.1 Autovalores

Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  es **autovalor de  $A$**  si y solo si existe  $v \in \mathbb{C}^n$  tal que  $v \neq 0$  y

$$Av = \lambda v$$

Si  $\lambda$  es autovalor de  $A$ , entonces  $v$  es **autovector asociado a  $\lambda$** .

Vamos a llamar **radio espectral** de  $A$  al número

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es autovalor de } A\}$$

### Propiedad

$A - \lambda I$  es una **matriz singular** (no inversible)

Vamos a definir el **polinomio característico** de  $A$  como:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

### Propiedad

$\lambda$  es **autovalor** de  $A$  si y solo si es **raíz de  $P(\lambda)$**  (si  $P(\lambda) = 0$ )

### Propiedad

$A$  **tiene  $n$  autovalores**, algunos pueden tener multiplicidad mayor a 1 (pueden estar repetidos)

### Propiedad

Si  $v$  es autovector entonces  $\alpha v$  **también es autovector**.

### Propiedad

Si  $\lambda$  es autovalor de  $A \Rightarrow \lambda - \alpha$  es autovalor de  $A - \alpha I$ .

### Demostración

$$(A - \alpha I)v = Av - \alpha v = \lambda v - \alpha v = (\lambda - \alpha)v$$

### Propiedad

Si  $\lambda$  es autovalor de  $A$  y  $v$  autovector de asociado, entonces  $(\lambda)^{(k)}$  es autovalor de  $A^{(k)}$  y  $v$  es autovector asociado.

### Demostración

Vamos a demostrar por inducción en  $k$ :

- **Caso base ( $k = 1$ ):**  $Av = \lambda v \Rightarrow A^1 v = \lambda_1 v$  por definición de autovector.
- **Paso inductivo:** Supongamos que vale para  $k$ , entonces  $A^k v = \lambda^k v$ . Queremos ver que  $A^{k+1} v = \lambda^{k+1} v$ .

$$A^{k+1} v = A^k(Av) = A^k(\lambda v) = \lambda A^k v$$

Por hipótesis inductiva  $A^k v = \lambda^k v$  entonces

$$\lambda A^k v = \lambda \lambda^k v = \lambda^{k+1} v \quad \blacksquare$$

### Propiedad

Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz ortogonal, entonces sus autovalores reales son 1 o  $-1$

### Demostración

Por ser  $Q$  ortogonal, sabemos que  $\|Av\|_2 = \|v\|_2$ . Supongamos que  $v$  es autovector asociado a  $\lambda$  entonces  $Av = \lambda v$  y  $\|Av\|_2 = \|\lambda v\|_2 = |\lambda| \|v\|_2$ . Entonces  $|\lambda| = 1 \quad \blacksquare$



## Propiedad

Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda^n$  son los autovalores distintos con autovalores asociados  $v^1, v^2, \dots, v^n$  son linealmente independientes.

### Demostración

Vamos a demostrar por inducción en  $k$ :

- **Caso base ( $k = 1$ ):** es válido ya que  $v_1$  no es el vector nulo.
- **Paso inductivo:** Supongamos que vale para  $k$ , entonces  $v^1, v^2, \dots, v^k$  son linealmente independientes. Queremos ver que  $v^1, v^2, \dots, v^{k+1}$  también lo son.

Supongamos que no, entonces  $v^{k+1}$  se puede escribir como combinación lineal de  $v^1, v^2, \dots, v^k$ :

$$v^{k+1} = \sum_{i=1}^k c_i v^i$$

Los coeficientes  $c_i$  no son todos nulos ya que  $v^{k+1} \neq 0$  por definición de autovector.

Multiplicando por  $A$  a ambos lados de la igualdad queda:

$$Av^{k+1} = \lambda^{k+1} v^{k+1}$$

y

$$A \sum_{i=1}^k c_i v^i = \sum_{i=1}^k c_i Av^i = \sum_{i=1}^k c_i \lambda^i v^i$$

Osea que:

$$\lambda^{k+1} v^{k+1} = \sum_{i=1}^k c_i \lambda^i v^i$$

Por otro lado, si multiplicamos la igualdad original por  $\lambda^{k+1}$  queda:

$$\lambda^{k+1} v^{k+1} = \lambda^{k+1} \sum_{i=1}^k c_i v^i = \sum_{i=1}^k c_i \lambda^{k+1} v^i$$

Entonces podemos combinar las igualdades y nos queda:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k c_i \lambda^i v^i &= \sum_{i=1}^k c_i \lambda^{k+1} v^i \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^k c_i \lambda^i v^i - \sum_{i=1}^k c_i \lambda^{k+1} v^i &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^k c_i (\lambda^i - \lambda^{k+1}) v^i &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, como  $v^1, v^2, \dots, v^k$  son linealmente independientes (por hipótesis inductiva), la única manera de que esta combinación lineal resulte en el vector nulo es que  $c_j (\lambda^j - \lambda^{k+1}) = 0$  para todo  $j = 1 \dots k$ .

Sabemos que existe algún  $c_j \neq 0$ , lo que implica que para ese  $j$  tiene que valer que  $\lambda^j - \lambda^{k+1} = 0 \Rightarrow \lambda^j = \lambda^{k+1}$ , lo cual es una contradicción ya que por hipótesis  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda^n$  son distintos. ■

### Propiedad

$A$  y  $A^t$  tienen los **mismos autovalores**

### Demostración

Sabemos que los autovalores de  $A$  son las raíces del polinomio característico  $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ . Además sabemos que *la determinante de una matriz y su traspuesta son iguales*, entonces

$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^t) = \det(A^t - \lambda I)$$

Entonces el polinomio característico de  $A$  y  $A^t$  es el mismo y sus raíces también lo son.

## 7.1.1 Disco de Gershgorin

Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y

$$r_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{ik}|$$

definimos el disco de Gershgorin

$$D_i = \{x \in \mathbb{C} : |x - a_{ii}| \leq r_i\}$$

### Propiedad

Sea  $\lambda$  autovalor de  $A$  entonces  $\lambda \in D_i$  para algún  $i = 1, 2, \dots, n$

### Demostración

Sea  $v$  el autovector asociado a  $\lambda$ . Como  $v \neq 0$  entonces

$$\|v\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |v_i| \neq 0$$

Sea  $k_0$  el índice de una coordenada de  $v$  tal que  $\|v\|_\infty = |v_{k_0}|$ . Sabemos que  $Av = \lambda v$ . En particular, considerando la fila  $k_0$  de  $A$ , tenemos que:

$$\sum_{j=1}^n a_{k_0 j} v_j = \lambda v_{k_0}$$

Separando de la sumatoria el término  $k_0$ :

$$\begin{aligned} a_{k_0 k_0} v_{k_0} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n a_{k_0 j} v_j &= \lambda v_{k_0} \\ \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n a_{k_0 j} v_j &= \lambda v_{k_0} - a_{k_0 k_0} v_{k_0} = (\lambda - a_{k_0 k_0}) v_{k_0} \end{aligned}$$

Si tomamos módulo a ambos lados de la igualdad nos queda:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n a_{k_0 j} v_j \right| &= |\lambda - a_{k_0 k_0}| |v_{k_0}| = |\lambda - a_{k_0 k_0}| \|v\|_\infty \\ \Rightarrow \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n |a_{k_0 j} v_j| &\geq |\lambda - a_{k_0 k_0}| |v_{k_0}| \end{aligned}$$

Como  $|v_{k_0}| \neq 0$  podemos pasar dividiendo y nos queda:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n |a_{k_0 j}| \frac{|v_j|}{|v_{k_0}|} \geq |\lambda - a_{k_0 k_0}|$$

Como  $\|v\|_\infty = |v_{k_0}|$  entonces  $\frac{|v_j|}{|v_{k_0}|} \leq 1$  y por lo tanto:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n |a_{k_0 j}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k_0}}^n |a_{k_0 j}| \frac{|v_j|}{|v_{k_0}|} \geq |\lambda - a_{k_0 k_0}|$$

Luego  $\lambda$  cumple la condición para pertenecer a  $D$  ■

### Propiedad

Si  $M = D_{i_1} \cup D_{i_2} \cup \dots \cup D_{i_k}$  es disjunto con la unión de los restantes discos  $D_i$  entonces hay exactamente  $m$  autovalores de  $A$  (contados con su multiplicidad) en  $M$ .

## 7.1.2 Matriz semejantes

Sean  $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$  son **matrices semejantes** si existe  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$  matriz inversible, tal que:

$$A = P^{-1}BP$$

### Propiedad

Si  $A$  y  $B$  son semejantes entonces **tienen los mismos autovalores**

### Demostración

Sea  $\lambda$  autovalor de  $A$  y  $v$  autovector asociado. Queremos ver que  $\lambda$  es autovalor de  $B$ . Sabemos que

$$Av = \lambda v$$

Multiplicando a ambos lados por  $P^{-1}$  nos queda:

$$P^{-1}Av = \lambda P^{-1}v$$

Como  $A$  y  $B$  son semejantes:

$$\begin{aligned} P^{-1}PBP^{-1}v &= \lambda P^{-1}v \\ \Rightarrow BP^{-1}v &= \lambda P^{-1}v \end{aligned}$$

Como  $P$  es inversible y  $v \neq 0$ , entonces  $P^{-1}v \neq 0$  y por lo tanto  $\lambda$  Si nombramos  $u = P^{-1}v$  entonces  $Bu = \lambda u$  podemos concluir que  $\lambda$  es autovalor de  $B$  y  $u$  su autovector asociado ■

## Diagonalización por semejanza

Dada  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $A$  es **diagonalizable por semejanza** si es semejante a una matriz diagonal.

### Propiedad

**$A$  es diagonalizable por semejanza** si y solo si sus **autovectores forman una base**.

### Demostración

$\Rightarrow$ ) Si  $A$  es diagonalizable por semejanza, entonces existe  $P$  matriz inversible tal que  $A = PDP^{-1}$ . Por la propiedad anterior,  $D$  tiene los mismos autovalores que  $A$ . Además si  $v$  es autovector de  $D$ , entonces  $Pv$  es autovector de  $A$ .

Los autovectores de una matriz diagonal son los vectores canónicos  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Entonces los autovectores de  $A$  son  $Pe_1, Pe_2, \dots, Pe_n$ .

Ahora,  $Pe_i = \text{col}_{i(P)}$ . Como  $P$  es inversible, sus columnas son linealmente independiente, por lo tanto,  $Pe_1, Pe_2, \dots, Pe_n$  son linealmente independientes y forman una base.

Luego, los autovalores de  $A$  forman una base.

$\Leftrightarrow$  Si  $A$  tiene base de autovectores, entonces existen  $v_1, v_2, \dots, v_n$  autovectores linealmente independientes tal que  $Av_i = \lambda_i v_i$  siendo  $\lambda_i$  el autovalor al que están asociados.

Definamos  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a la matriz cuyas columnas son los autovectores  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Como  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son linealmente independientes  $\Rightarrow P$  es invertible.

$$\begin{aligned} AP &= A[v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] = [Av_1 \ Av_2 \ \dots \ Av_n] \\ &= [\lambda_1 v_1 \ \lambda_2 v_2 \ \dots \ \lambda_n v_n] \\ &= [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= PD \end{aligned}$$

Entonces logramos conseguir  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  diagonal tal que  $AP = PD$  y como  $P$  es invertible, si multiplicamos a derecha por su inversa en ambos lados nos queda:

$$APP^{-1} = PDP^{-1} \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

Luego  $A$  es diagonalizable por semejanza ■

## 7.1.3 Propiedades de autovalores

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

### Propiedad

Si  $A$  es **simétrica**, sus **autovectores son reales**.

### Demostración

Sea  $\lambda$  autovalor de  $A$  y  $v \neq 0$  su autovector asociado. Entonces  $Av = \lambda v$ . Conjugemos (Si  $a = x + yi \Rightarrow \bar{a} = x - yi$ ) ambos lados de la igualdad:

$$Av = \lambda v \Rightarrow \bar{A}v = \bar{\lambda}v \Rightarrow \bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

Como  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\bar{A} = A$ :

$$\bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

Multipliquemos por  $v^t$  ambos lados de la igualdad:

$$v^t A\bar{v} = v^t \bar{\lambda}\bar{v} \Rightarrow v^t A\bar{v} = \bar{\lambda}v^t \bar{v} \Rightarrow (A^t v)^t \bar{v} = \bar{\lambda}v^t \bar{v}$$

Como  $A$  es simétrica:

$$(A^t v)^t \bar{v} = \bar{\lambda}v^t \bar{v} \Rightarrow (Av)^t \bar{v} = \bar{\lambda}v^t \bar{v}$$

Como  $v$  es autovector asociado a  $\lambda$ :

$$(Av)^t \bar{v} = \bar{\lambda}v^t \bar{v} \Rightarrow \lambda v^t \bar{v} = \bar{\lambda}v^t \bar{v}$$

Ahora como  $v \neq 0$ :

$$v^t \bar{v} = v_1 * \bar{v}_1 + v_2 * \bar{v}_2 + \dots + v_n * \bar{v}_n = |v_1|^2 + |v_2|^2 + \dots + |v_n|^2 > 0$$

Entonces:

$$\lambda v^t \bar{v} = \bar{\lambda}v^t \bar{v} \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \frac{v^t \bar{v}}{v^t \bar{v}} \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

Luego  $\lambda$  es real ■

### Propiedad

Si  $A$  tiene un **autovalor real** entonces existe un **autovector asociado con coeficientes reales**.

#### Demostración

Sea  $\lambda$  autovalor real de  $A$  y  $v$  autovector asociado. Entonces  $v$  es solución al sistema  $(A - \lambda I)v = 0$ . Este sistema puede resolverse utilizando elminación gaussiana. Como  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , todos los coeficientes que se usan en el proceso son reales, por lo tanto, la solución que se obtiene tendrá coeficientes reales ■

### Propiedad

Si  $A$  es **simétrica** y  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  **autovalores distintos** con  $v_1$  y  $v_2$  autovectores asociados. Entonces  $v_1$  y  $v_2$  **son ortogonales**.

#### Demostración

Sea  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  autovalores distintos de  $A$  y  $v_1$  y  $v_2$  autovectores asociados. Entonces  $Av_1 = \lambda_1 v_1$  y  $Av_2 = \lambda_2 v_2$ .

Multiplicando a ambos lados de la primera igualdad por  $v_2$  y a ambos lados de la segunda igualdad por  $v_1$  nos queda:

$$v_2^t Av_1 = v_2^t \lambda_1 v_1$$

$$v_1^t Av_2 = v_1^t \lambda_2 v_2$$

Como  $A$  es simétrica,  $A^t = A$  y entonces:

$$v_2^t Av_1 = (A^t v_2)^t v_1 = (Av_2)^t v_1 = (v_1^t Av_2)^t = v_1^t Av_2$$

Entonces:

$$\lambda_1 v_2^t v_1 = \lambda_2 v_1^t v_2$$

Como por hipótesis  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  y además  $v_2^t v_1 = v_1^t v_2$ , entonces  $v_1^t v_2 = 0$  y por lo tanto  $v_1$  y  $v_2$  son ortogonales ■



### Propiedad

Sea  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal,  $\lambda$  es autovalor de  $A$  si y solo si  $\lambda$  es autovalor de  $QAQ^t$ .

### Teorema de Schur (simplificado)

Si  $A$  tiene todos sus autovalores reales, existe  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal tal que

$$Q^t A Q = T$$

con  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  triangular superior.

#### Demostración

Sea  $\lambda_1$  autovalor de  $A$  y  $v_1$  su autovector asociado, asumamos que  $\|v_1\|_2 = 1$ .

Sabemos que existe una transformación de Householder  $H_1$  tal que  $H_1 v_1 = e_1$  con  $e_1$  el primer vector canónico. Como  $H_1$  es una transformación de householder es simétrica y ortogonal, por lo tanto  $H_1^t = H_1^{-1} = H_1$ . Entonces:

$$H_1 A H_1^t e_1 = H_1 A v_1 = H_1 \lambda_1 v_1 = \lambda_1 H_1 v_1 = \lambda_1 e_1$$

Osea que

$$H_1 A H_1^t = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \tilde{A} & & \end{bmatrix}$$

Además  $A$  es semejante a  $H_1 A H_1^t$  pues:

$$\begin{aligned} A &= H_1^{-1} H_1 A H_1^{-1} H_1 \\ &= H_1^t H_1 A H_1^t H_1 \quad (\text{porque } H_1 \text{ es ortogonal}) \\ &= H_1^t (H_1 A H_1^t) H_1 \end{aligned}$$

Luego, como  $A$  es semejante a  $H_1 A H_1^t$ , ambas matrices tienen los mismos autovalores.

Como  $\text{col}_1(H_1 A H_1^t) = \lambda_1 e_1$ , sabemos también que el resto de los autovalores están determinados por los autovalores de la matriz  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  que se obtiene al eliminar la primera fila y la primera columna de  $A$ :

Repitiendo el proceso para  $\tilde{A}$  obtenemos una reflexión de Householder  $\tilde{H}_2 \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  que tiene exactamete las mismas propiedades que  $H_1$ :

- $\tilde{H}_2 \tilde{A} \tilde{H}_2^t = \lambda_2 e_2$  con  $e_2 \in \mathbb{R}^{n-1}$
- $\tilde{A}$  y  $\tilde{H}_2 \tilde{A} \tilde{H}_2^t$  son semejantes y tienen los mismos autovalores.

Armamos entonces  $H_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  de la siguiente manera:

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0^t \\ 0 & \tilde{H}_2 \end{bmatrix}$$

Queda entonces que:

$$H_2 H_1 A H_1^t H_2^t = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}$$

Repitiendo este proceso  $n - 1$  llegaremos a una matriz  $T$  triangular superior tal que

$$H_{n-1} \dots H_2 H_1 A H_1^t H_2^t \dots H_{n-1}^t = T$$

Solo queda renombrar  $Q = H_{n-1} \dots H_2 H_1$  y listo ■

### Propiedad

Si  $A$  es simétrica, entonces  $T$  es diagonal. Los elementos de la diagonal de  $T$  son los autovalores y las columnas de  $Q$  son los autovectores.

### Demostración

Como  $A$  es simétrica, todos sus autovalores son reales. Entonces, por el teorema de Schur, existe  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonal y  $T$  triangular superior tal que

$$A = QTQ^t$$

Además

$$A^t = (QTQ^t)^t = (TQ^t)^t Q^t = (Q^t)^t T^t Q^t = QT^t Q^t$$

Como  $A$  es simétrica,  $A^t = A$  y entonces:

$$QTQ^t = QT^t Q^t$$

Como  $Q$  es ortogonal,  $Q^t = Q^{-1}$ :

$$QTQ^t = QT^t Q^t \Rightarrow Q^t QTQ^t Q = Q^t QT^t Q^t Q \Rightarrow T = T^t$$

Luego  $T^t$  es una matriz triangular superior y simétrica, por lo tanto es diagonal, es decir  $A$  es diagonalizable por semejanza ■

### Corolario

Si  $A$  es simétrica, entonces tiene base (ortonormal) de autovectores.

### Demostración

Sabemos que  $A$  es diagonalizable por semejanza a  $QTQ^t$ , esto implica que tiene base de autovectores. Por la propiedad anterior, también sabemos que las columnas de  $Q$  son los autovectores de  $A$ . Como  $Q$  es ortogonal, sus columnas son linealmente independientes y además  $\|\text{col}_i(Q)\|_2 = 1$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  concluimos que esa base es ortonormal ■

## 7.2 Métodos para calcular autovalores

### 7.2.1 Método de la potencia

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sus  $n$  autovalores con **autovectores asociados**  $v^1, v^2, \dots, v^n$  que **forman una base**.

Supongamos que  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots \geq |\lambda_n|$ . Sea  $q_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|q_0\| = 1$ , definimos la sucesión  $\{q_k\}$  donde cada uno de sus elementos se define como:

$$q^k = \frac{Aq^{k-1}}{\|Aq^{k-1}\|_2}$$

Esta sucesión **converge al autovector**  $v^1$ . Además  $\lambda_k = (q^k)^t A q^k$  **converge a**  $\lambda_1$ .

### 7.2.2 Método de la deflación

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda_1$  autovalor de  $A$  con autovector asociado  $v^1$  y  $\|v^1\| = 1$ .

Sea  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  **ortogonal** tal que  $H^t v^1 = e_1$ , entonces:

$$H^t A H = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a^t \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Como  $A$  y  $H^t A H$  tienen los mismos autovalores, **los otros autovalores de  $A$  son los autovalores de  $B$** .

## 7.3 Descomposición en valores singulares (SVD)

### 7.3.1 Método

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $r = \text{rang}(A)$ , existen matrices  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonales y  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  **diagonal** tal que:

$$A = U\Sigma V^t$$

Además,  $\Sigma$  tiene la forma:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

con  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ . Llamamos a los  $\sigma_i$  **valores singulares** de  $A$ .

Proponemos las siguientes condiciones para las matrices de esta descomposición:

- $U$  tiene como columnas los autovectores de  $AA^t$
- $V$  tiene como columnas los autovectores de  $A^tA$
- $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$  donde  $\lambda_i$  es el  $i$ -ésimo autovalor de  $A^tA$  si los tomamos ordenados de mayor a menor:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$ .

### 7.3.2 Demostración

Sea  $u_1, u_2, \dots, u_m$  a las columnas de  $U$  y  $v_1, v_2, \dots, v_n$  a las columnas de  $V$ . Si la descomposición SVD existe, entonces  $A = U\Sigma V^t$  y  $A^t = V\Sigma^t U^t$ . Entonces:

$$AV = U\Sigma \underbrace{V^t V}_{\text{ortogonales}} = U\Sigma \Rightarrow Av_i = \begin{cases} \sigma_i u_i & \text{si } i \leq r \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$A^t U = V\Sigma^t \underbrace{U^t U}_{\text{ortogonales}} = V\Sigma^t \Rightarrow A^t u_i = \begin{cases} \sigma_i v_i & \text{si } i \leq r \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

#### Columnas de $V$

Supongamos  $i \leq r$  multiplicamos la primera relación por  $A^t$  obtenemos:

$$A^t A v_i = \sigma_i A^t u_i = \sigma_i^2 v_i$$

Entonces  $v_i$  es autovector de  $A^t A$ , además  $\sigma_i^2$  deben ser sus autovalores.

$A^t A$  es una matriz simétrica definida positiva (ver Section 5.1) y su rango es  $r$ . Por la condición de simetría sabemos que **existe una base ortonormal de autovectores** (ver Section 7.1.3). Además por ser semidefinida positiva, **todos sus autovalores son reales y positivos**.

Sabemos que  $r$  de esos autovalores son no nulos y el  $0$  es autovalor con multiplicidad  $n - r$ . Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  los autovalores no nulos de  $A^t A$  y  $v_1, \dots, v_r$  los autovectores asociados y  $v_{r+1}, \dots, v_n$  los autovectores asociados al  $0$ , entonces  $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$  es una base ortonormal de autovectores de  $A^t A$ .

Estos vectores son los candidatos a conformar las columnas de  $V$  y definimos  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} > 0$ .

## Columnas de $U$

De la relación  $Av_i = \sigma_i u_i$  podemos despejar  $u_i$  para  $i \leq r$ :

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} Av_i$$

Para que esta relación sea correcta, debemos ver que  $u_1, \dots, u_r$  son ortonormales:

$$\begin{aligned} u_i^t u_j &= \left( \frac{1}{\sigma_i} Av_i \right)^t \left( \frac{1}{\sigma_j} Av_j \right) = \frac{1}{\sigma_i} (Av_i)^t \frac{1}{\sigma_j} Av_j = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} (Av_i)^t Av_j \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} v_i^t A^t Av_j = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} v_i^t \lambda_j v_j \quad (v_j \text{ autovector de } A^t A) \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \lambda_j v_i^t v_j = 0 \quad (v_i \text{ y } v_j \text{ son ortonormales}) \end{aligned}$$

Luego  $u_1, \dots, u_r$  son ortogonales. Falta ver que  $\|u_i\|_2 = 1$ :

$$\begin{aligned} u_i^t u_i &= \left( \frac{1}{\sigma_i} Av_i \right)^t \left( \frac{1}{\sigma_i} Av_i \right) = \frac{1}{\sigma_i} (Av_i)^t \frac{1}{\sigma_i} Av_i = \frac{1}{\sigma_i^2} (Av_i)^t Av_i \\ &= \frac{1}{\sigma_i^2} v_i^t A^t Av_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \lambda_i v_i^t v_i \quad (v_i \text{ autovector de } A^t A) \\ &= \frac{1}{\sigma_i^2} \lambda_i v_i^t v_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \lambda_i \quad (v_i^t v_i = 1) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\lambda_i})^2} \lambda_i \quad (\text{por definición de } \sigma_i) \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \lambda_i = 1 \end{aligned}$$

Entonces  $u_1, \dots, u_r$  son ortonormales. Falta definir los  $u_i$  con  $i > r$ :

Como  $\dim(\text{Im}(A)) = r$  y los  $u_i \in \text{Im}(A)$ , entonces estos vectores conforman una base ortonormal de  $\text{Im}(A)$ . Además  $\text{Nu}(A^t) = \text{Im}(A)^\perp$ . Entonces toda base ortonormal de  $\text{Im}(A)$  se puede extender a una base ortonormal de  $\mathbb{R}^m$  con vectores que pertenecen a  $\text{Nu}(A^t)$ . Sean  $u_{r+1}, \dots, u_m$  dicha extensión, entonces  $u_1, \dots, u_m$  es una base ortonormal de  $\mathbb{R}^m$ .

Veamos que cumplen la relaciones definidas para  $u_i$  con  $i > r$ :

- $Av_i = \sigma_i u_i$  para  $i = 1, \dots, r$  se cumple por definición de  $u_i$ .
- $Av_i = 0$  para  $i = r + 1, \dots, n$ . Como  $v_i$  es autovector de  $A^t A$  del autovalor  $0$ , entonces  $A^t Av_i = 0 \Rightarrow v_i^t A^t Av_i = 0 \Rightarrow \|Av_i\|_2 = 0 \Rightarrow Av_i = 0$ .
- $A^t u = \sigma_i v$  para  $i = 1, \dots, r$ , se cumple por definición de  $u_i$ .
- $A^t u = 0$  para  $i = r + 1, \dots, n$ . Como  $u_i \in \text{Nu}(A^t)$ , entonces  $A^t u_i = 0$ .

### 7.3.3 Propiedades

#### Propiedad

$$\|A\|_2 = \sigma_1$$

#### Demostración

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \\&= \max_{\|x\|_2=1} \|U\Sigma V^t x\|_2 \\&= \max_{\|x\|_2=1} \|\Sigma V^t x\|_2 \text{ (porque } U \text{ es ortogonal)} \\&= \max_{\|x\|_2=1} \|\Sigma x\|_2 \text{ (porque } V \text{ es ortogonal)} \\&= \max_{\|x\|_2=1} \|\Sigma x\|_2 \\&= \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2 x_i^2} \\&\leq \max_{\|x\|_2=1} \sigma_1 \sqrt{\sum_{i=1}^r x_i^2} \\&\leq \sigma_1\end{aligned}$$

Además,

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \geq \|Av_1\| = \sqrt{v_1^t A v_1} = \sqrt{v_1^t \sigma_1 v_1} = \sigma_1$$

Luego, concluimos que  $\|A\|_2 = \sigma_1$  ■

### Propiedad

Si  $A$  es inversible entonces:

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$$

### Demostración

Como  $A$  es inversible,  $r = n$  y tiene  $n$  valores singulares no nulos. Además, los valores singulares de  $A^{-1}$  son  $\frac{1}{\sigma_n}, \dots, \frac{1}{\sigma_1}$  de los valores singulares de  $A$ . Por definición de  $\kappa$ :

$$\kappa(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \sigma_1 \frac{1}{\sigma_n} = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

### Propiedad

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}$$



# **Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales**

## 8.1 Introducción

Sean  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^n$ . Un **método iterativo** para resolver el sistema  $Ax = b$  es un algoritmo **que** produce una secuencia de vectores  $\{x^k\}$  que **se espera converja a la solución del sistema**.

Estos métodos, en la práctica, son **muy útiles para sistemas de gran tamaño**, en los que los métodos exactos son muy costosos en términos de tiempo y memoria.

Vamos a estudiar dos métodos iterativos muy conocidos: el **método de Jacobi** y el **método de Gauss-Seidel** que

### 8.1.1 Método de Jacobi

Sean  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1 \dots n$ . Definimos  $x^1$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= \frac{b_1 - \sum_{j=1, j \neq 1}^n a_{1j} x_j^0}{a_{11}} \\ x_2^1 &= \frac{b_2 - \sum_{j=1, j \neq 2}^n a_{2j} x_j^0}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_i^1 &= \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^0}{a_{ii}} \\ &\vdots \\ x_n^1 &= \frac{b_n - \sum_{j=1, j \neq n}^n a_{nj} x_j^0}{a_{nn}} \end{aligned}$$

A partir de  $x^1$ , definimos  $x^2, x^3, \dots$  de la misma manera:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^k}{a_{ii}}$$

Si quisieramos escribir usando operaciones matriciales, debemos encontrar una forma de escribir  $A$  un poco más cómoda. Para ello, descompongamosla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &= D - L - U \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{nn-1} & \dots & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \dots & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & -a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
Ax &= b \\
(D - L - U)x &= b \\
Dx - (L + U)x &= b \\
Dx &= (L + U)x + b \\
x &= D^{-1}((L + U)x + b) = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b
\end{aligned}$$

Si ahora vemos como es la forma que tiene cada uno de los elementos de  $x$ , vemos que es igual a la forma al principio de cada sección, por lo que cada iteración de Jacobi se puede escribir como:

$$x^{k+1} = D^{-1}(L + U)x^k + D^{-1}b$$

## 8.1.2 Método de Gauss-Seidel

Sea  $x^0 \in \mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $a_{ii} \neq 0 \forall i = 1 \dots n$ . Definimos  $x^1$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
x_1^1 &= \frac{b_1 - \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j^0}{a_{11}} \\
x_2^1 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1^1 - \sum_{j=3}^n a_{2j}x_j^1}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_i^1 &= \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^1 - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^1}{a_{ii}} \\
&\vdots \\
x_n^1 &= \frac{b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}x_j^1}{a_{nn}}
\end{aligned}$$

De manera similar, los siguientes valores de  $x$  se definen como:

$$x_i^{k+1} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^k - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k}{a_{ii}}$$

Y usando la descomposición de  $A$  en  $D - L - U$ , podemos despejar  $x$  de tal manera que nos permitirá escribir el método de Gauss-Seidel de manera matricial:

$$\begin{aligned}
Ax &= b \\
(D - L - U)x &= b \\
(D - L)x - Ux &= b \\
(D - L)x &= Ux + b \\
x &= (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b
\end{aligned}$$

Luego, la iteración de Gauss-Seidel se puede escribir como:

$$x^{k+1} = (D - L)^{-1}Ux^k + (D - L)^{-1}b$$

## 8.2 Análisis de convergencia

Dado un vector inicial  $x^0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $c \in \mathbb{R}^n$ ,

$$x^{k+1} = Tx^k + c$$

En Jacobi,  $T = D^{-1}(L + U)$  y  $c = D^{-1}b$ . En Gauss-Seidel,  $T = (D - L)^{-1}U$  y  $c = (D - L)^{-1}b$ .

Si  $x^*$  es la solución del sistema, vamos a ver condiciones necesarias para que la secuencia  $\{x^k\}$  converja a  $x^*$ .

### 8.2.1 Matriz convergente

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , decimos que  $A$  es convergente si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$$

#### Propiedad

$A$  es convergente  $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k\| = 0 \text{ para toda norma inducida}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A^k x = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

#### Propiedad

Si  $\rho(A) < 1 \Rightarrow I - A$  es no singular y

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$$

### 8.2.2 Teorema de convergencia

La sucesión  $\{x^k\}$  definida por  $x^{k+1} = Tx^k + c$  converge a  $x^*$  para cualquier  $x^0$  inicial a la solución del sistema  $x = Tx + c$  si y solo si  $\rho(T) < 1$ .

#### Demostración

$\Leftarrow$ ) Como  $\rho(T) < 1$ , entonces  $(I - T)$  es inversible. Entonces

$$x = Tx + c \Leftrightarrow (I - T)x = c \Leftrightarrow x^* = (I - T)^{-1}c$$

Sea la sucesión  $x^k = Tx^{k-1} + c$ . Entonces podemos expresar a  $x^{k-1}$  en función de  $x^{k-2}$  quedándonos:

$$x^k = Tx^{k-1} + c = T(Tx^{k-2} + c) + c = T^2x^{k-2} + Tc + c$$

De manera similar, podemos expresar a  $x^{k-2}$  en función de  $x^{k-3}$  y así sucesivamente. Entonces, podemos expresar a  $x^k$  en función de  $x^0$  de la siguiente manera:

$$x^k = T^k x^0 + T^{k-1}c + T^{k-2}c + \dots + c = T^k x^0 + (T^{k-1} + T^{k-2} + \dots + I)c$$

Como  $\rho(T) < 1$ , entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k = 0$ . Además  $\sum_{k=0}^{\infty} T^k = (I - T)^{-1}$ . Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k x^0 + \lim_{k \rightarrow \infty} (T^{k-1} + T^{k-2} + \dots + I)c = 0 + (I - T)^{-1}c.$$

Luego el límite de la sucesión existe, no depende de  $x^0$  y es igual a  $x^* = (I - T)^{-1}c$ .

$\Rightarrow$ ) Debemos ver que  $\rho(T) < 1$  sabiendo que la sucesión converge independientemente del  $x^0$  inicial.

Sabemos que

$$\rho(T) < 1 \Leftrightarrow A \text{ es convergente} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} T^k z = 0 \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^n$$

Demostremos entonces que  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k z = 0$  para todo  $z \in \mathbb{R}^n$ :

Sea  $z \in \mathbb{R}^n$ . Consideremos  $x^0 = x^* - z$ , con  $x^*$  el límite de la sucesión  $\{x^k\}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} T^k z &= \lim_{k \rightarrow \infty} T^k (x^* - x^0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} T^{k-1} (Tx^* - Tx^0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} T^{k-1} (x^* - c - Tx^0) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} T^{k-1} (x^* - c - x^1 + c) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} T^{k-1} (x^* - x^1) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} T^{k-2} (Tx^* - Tx^1) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} T^{k-2} (x^* - c - Tx^1) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} T^{k-2} (x^* - c - x^2 + c) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} T^{k-2} (x^* - x^2) \end{aligned}$$

Si seguimos haciendo los remplazos correspondientes, llegaremos a que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T^k z = \lim_{k \rightarrow \infty} (x^* - x^k)$$

Este último límite es igual a 0, ya que la sucesión converge a  $x^*$ . Por lo tanto,  $\rho(T) < 1$ .

#### Propiedad

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es estrictamente diagonal dominante, entonces el método de Jacobi converge.

#### Propiedad

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es estrictamente diagonal dominante, entonces el método de Gauss-Seidel converge.

#### Propiedad

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es simétrica definida positiva, entonces el método de Gauss-Seidel converge.

#### Propiedad

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $a_{ij} \leq 0 \ \forall i \neq j$  y  $a_{ii} > 0 \ \forall i$ . Se satisface una sola de las siguientes propiedades:

- $\rho(T_{GS}) < \rho(T_J) < 1$
- $1 < \rho(T_J) < \rho(T_{GS})$
- $\rho(T_{GS}) = \rho(T_J) = 0$
- $\rho(T_{GS}) = \rho(T_J) = 1$

#### Propiedad

Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $a_{ij} \leq 0 \ \forall i \neq j$  y  $a_{ii} > 0 \ \forall i$ . Entonces, ambos métodos divergen o ambos convergen. En el segundo caso, el método de Gauss-Seidel converge más rápido.

### 8.2.3 Cota del error

Sea  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $\|T\| < 1$  para una norma inducida. Entonces:

#### Propiedad

$x^{k+1} = Tx^k + c$  converge independientemente del  $x^0$  inicial.

#### Demostración

---

Hay una propiedad que establece que  $|\rho(A)| \leq \|A\|$  para toda norma inducida. Por lo tanto  $\rho(T) < \|T\| < 1$  y la sucesión converge independientemente del  $x^0$  inicial (por el teorema de convergencia).

### Propiedad

$$\|x^* - x^k\| \leq \|T\|^k \|x^* - x^0\|$$

### Demostración

Sabemos que  $x^* = Tx^* + c$  y que la sucesión  $x^k = T^k x^{k-1} + c$ :

$$\begin{aligned} \|x^* - x^k\| &= \|Tx^* + c - T^k x^{k-1} - c\| \\ &= \|T(x^* - x^{k-1})\| \leq \|T\| \|x^* - x^{k-1}\| \end{aligned}$$

Volviendo a aplicar el mismo razonamiento, llegamos a que:

$$\begin{aligned} \|x^* - x^k\| &\leq \|T\| \|Tx^* + c - T^k x^{k-1} - c\| \\ &= \|T\| \|T(x^* - x^{k-1})\| \leq \|T\|^2 \|x^* - x^{k-1}\| \end{aligned}$$

Repetimos el proceso  $k$  veces y llegamos a que:

$$\|x^* - x^k\| \leq \|T\|^k \|x^* - x^0\| \blacksquare$$

### Propiedad

$$\|x^* - x^k\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^1 - x^0\|$$

### Demostración

Veamos primero la diferentes dos iteraciones sucesivas de la serie:

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^k\| &= \|Tx^{k+1} + c - T^k x^{k-1} - c\| \\ &= \|T(x^k - x^{k-1})\| \leq \|T\| \|x^k - x^{k-1}\| \end{aligned}$$

Si seguimos remplazando, nos queda que:

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \|T\|^k \|x^1 - x^0\| \leq$$

Ahora tomamos  $x^i$  y  $x^j$  con  $j > k$ :

$$\begin{aligned}\|x^j - x^k\| &\leq (\|T\|^{j-1} + \|T\|^{j-2} + \dots + \|T\|^k) \|x^1 - x^0\| \\ &\leq \|T\|^k \left( \sum_{i=0}^{j-1-k} \|T\|^i \right) \|x^1 - x^0\|\end{aligned}$$

Si ahora tomamos el límite cuando  $j \rightarrow \infty$ , como  $\{x^j\}_{j=0}^{\infty}$  converge a  $x^*$  y

$$\sum_{i=0}^{j-1-k} \|T\|^i = \sum_{i=0}^{\infty} \|T\|^i \quad \text{que es la serie geométrica}$$

Entonces, como  $\|T\| < 1$ , la serie converge a  $\frac{1}{1-\|T\|}$ . Por lo tanto,

$$\|x^* - x^k\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \|x^1 - x^0\| \quad \blacksquare$$



# **Cuadrados Mínimos Lineales**

## 9.1 El problema

Dado un conjunto de  $m$  pares ordenados  $(x_i, y_i)$  con  $i = 1, 2, \dots, m$ , buscamos una función  $f(x)$  perteneciente a una familia  $\mathcal{F}$  tal que “mejor aproxime” a los datos.

Hay diferentes formas de realizar esta aproximación:

- Se puede intentar minimizar el error máximo, es decir, buscar la función  $f(x)$  que minimiza la siguiente función:

$$\min_{f \in \mathcal{F}} \max_{i=1, \dots, m} |f(x_i) - y_i|$$

Sin embargo, al considerar el error máximo, la función obtenida es sensible a valores atípicos que pueden aparecer en la muestra.

- Se puede intentar minimizar la suma de los errores absolutos, es decir, buscar la función  $f(x)$  que minimiza la siguiente función:

$$\min_{f \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^m |f(x_i) - y_i|$$

En este caso, los valores atípicos dejan de dominar a la muestra y reflejan mejor la tendencia de los datos. Sin embargo, la función obtenida puede no ser continua o diferenciable en todos los puntos.

- En general, **la forma más común de realizar la aproximación es minimizar la suma de los cuadrados de los errores**. Es decir, buscar la función  $f(x)$  que minimiza la siguiente función:

$$\min_{f \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2$$

Dado un conjunto de funciones  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$  **linealmente independientes**, la familia  $\mathcal{F}$  se define como:

$$\mathcal{F} = \left\{ f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \phi_{j(x)} \right\}$$

Donde  $c_j$  son los coeficientes que se deben determinar **para minimizar la función de error**. Entonces:

$$\min_{f \in \mathcal{F}} \sum_{i=1}^m (f(x_i) - y_i)^2 = \min_{c_1, \dots, c_n} \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n c_j \phi_{j(x_i)} - y_i \right)^2$$

Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  y  $x \in \mathbb{R}^n$  definidos como:

$$A = \begin{bmatrix} \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_m) & \dots & \phi_n(x_m) \end{bmatrix} \quad b = [y_1 \ \dots \ y_m] \quad x = [c_1 \ \dots \ c_n]$$

Entonces podemos reescribir **el problema de minimización de manera matricial** como:

$$\bar{x} = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$$

### Propiedad

Existe  $\bar{x}$  solución del problema de cuadrados mínimos lineales (CML).

### Demostración

Hay un resultado de álgebra lineal que establece que dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{Im}(A) \oplus \text{Nu}(A) = \mathbb{R}^m$ . Es decir, todo vector de  $\mathbb{R}^m$  se puede escribir como la suma de dos vectores, uno en la imagen de  $A$  y otro en el núcleo de  $A^t$ . Además, el  $\text{Nu}(A^t) = \text{Im}(A)^\perp$ .

Aplicando este resultado al vector  $b$ , nos queda que  $b = b^1 + b^2$  con  $b^1 \in \text{Im}(A)$  y  $b^2 \in \text{Nu}(A^t)$ . Entonces, el problema de minimización se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b^1 - b^2\|_2^2 \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} ((Ax - b^1) + b^2)^t ((Ax - b^1) - b^2) \quad (\text{por def de norma 2}) \\ &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} (Ax - b^1)^t (Ax - b^1) - 2(Ax - b^1)^t b^2 + b^{2t} b^2 \end{aligned}$$

Como  $Ax - b^1 \in \text{Im}(A)$  y  $b^2 \in \text{Nu}(A^t) = \text{Im}(A)^\perp$ , entonces  $(Ax - b^1)^t b^2 = 0$  y:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 &= (Ax - b^1)^t (Ax - b^1) + b^{2t} b^2 \\ &= \|Ax - b^1\|_2^2 + \|b^2\|_2^2 \end{aligned}$$

Como el segundo termino es constante (no depende de  $x$ ), el minimo será aquel que minimice  $\|Ax - b^1\|_2^2$ .

Ahora como  $b^1 \in \text{Im}(A)$ , entonces existe  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $A\bar{x} = b^1$ . Luego,  $\|A\bar{x} - b^1\|_2^2 = 0$  que es lo mínimo que puede valer una norma.

Por lo tanto, siempre existe  $\bar{x}$  solución del problema de cuadrados mínimos lineales (CML). ■

### Propiedad

La solución es única si y solo si las columnas de  $A$  son linealmente independientes.

### Demostración

$\Rightarrow$ ) Sea  $\bar{x}$  una solución única del problema. Supongamos las columnas de  $A$  son linealmente dependientes, entonces existe  $z \neq 0$  tal que  $Az = 0$ . Entonces,  $A(\bar{x} + z) = A\bar{x} + Az = A\bar{x} = b^1$ . Luego,  $\bar{x} + z$  también es solución del problema, lo que contradice la unicidad de la solución.

$\Leftarrow$ ) Supongamos que las columnas de  $A$  son linealmente independientes y existen al menos dos soluciones distintas  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$ . Entonces,  $A(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 - A\bar{x}_2 = b^1 - b^1 = 0$ . Luego,  $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$  es un vector no nulo que es solución del sistema homogéneo ( $Az = 0$ ). Esto contradice que las columnas de  $A$  sean linealmente independientes. ■

### 9.1.1 Ecuaciones normales

La caracterización de la solución de CML depende del valor de  $b^1$  (proyección de  $b$  en  $\text{Im}(A)$ ), sin embargo **nos gustaría conseguir un sistema que dependa de los valores conocidos originales:  $A$  y  $b$ .**

Si  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  es la solución de CML, entonces sabemos que

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= b^1 - b^2 \Rightarrow b^1 - A\bar{x} = b^2 \\ &\Rightarrow A^t(b^1 - A\bar{x}) = A^tb^2 \end{aligned}$$

Como  $b^2 \in N(A^t)$  entonces  $A^tb^2 = 0$ :

$$\begin{aligned} A^t(b - A\bar{x}) &= A^tb = 0 \Rightarrow A^t(b - A\bar{x}) = 0 \\ &\Rightarrow A^tb - A^tA\bar{x} = 0 \\ &\Rightarrow A^tA\bar{x} = A^tb \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones es conocido como las **ecuaciones normales** del problema de CML.

Esta formulación nos da  **$A^tA$  que es una matriz simétrica semidefinida positiva** (y si todas las columnas de  $A$  son linealmente independientes es simétrica definida positiva). Gracias a esto podemos utilizar el método de Cholesky para resolver el sistema.

Sin embargo, **debido a la aritmética finita se pueden presentar algunos problemas**. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \Rightarrow A^tA = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon^2 & 1 \\ 1 & 1 + \varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

En este caso, la matriz original  $A$  tiene dos columnas iguales, pero problemas de representación numérica, las columnas guardadas en la computadora no lo son y la representación de  $A$  termina teniendo dos columnas linealmente independientes. Por lo tanto

#### Propiedad

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $\text{rang}(A) = n$ . Entonces  $A^tA$  es inversible y la solución de CML es

$$\bar{x} = (A^tA)^{-1}A^tb$$

Definimos  $\chi(A) = \|A\|_2 \|(A^tA)^{-1}A^t\|_2$ .

#### Propiedad

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $\text{rang}(A) = n$ . Sean  $b, \bar{b} \in \mathbb{R}^m$  y  $b^1, \bar{b}^1$  las proyecciones en  $\text{Im}(A)$ . Si  $b^1 \neq 0$  entonces:

$$\frac{\|(A^tA)^{-1}A^tb - (A^tA)^{-1}A^t\bar{b}\|_2}{\|(A^tA)^{-1}A^tb\|_2} \leq \chi(A) \frac{\|b^1 - \bar{b}^1\|_2}{\|b^1\|_2}$$

Propiedad

$$\chi(A)^2 = \chi(A^t A)$$

## 9.2 Resolucion usando la factorización QR

### 9.2.1 Matriz de rango completo

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rang}(A) = n$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  matriz ortogonal y  $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$  triangular superior con  $\text{rang}(R_1) = n$  tal que:

$$A = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces el problema de Minimos Cuadrados Lineales (MCL) nos queda:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Q^t Ax - Q^t b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} x - Q^t b \right\|_2^2$$

Si definimos  $c = Q^t b$ , entonces queda:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{1..n} \\ c_{n+1..m} \end{bmatrix} \right\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|R_1 x - c_{1..n}\|_2^2 + \|c_{n+1..m}\|_2^2$$

Luego la solución  $x^*$  a CML es:

$$x^* = R_1^{-1} c_{1..n}$$

### 9.2.2 Matriz de rango no completo

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rang}(A) = r < n$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  matriz ortogonal y  $R_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$  matriz triangular inferior con  $\text{rang}(R_1) = r$ ,  $R_2 \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$  tal que:

$$AP = Q \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

con  $P$  matriz de permutación. Analicemos el problema de MCL:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|APx - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Q^t APx - Q^t b\|_2^2$$

Si  $Px = \bar{x}$  y  $c = Q^t b$ , entonces:

$$\min_{\bar{x} \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \bar{x} - c \right\|_2^2 = \min_{\bar{x} \in \mathbb{R}^n} \|R_1 \bar{x}_{1..r} + R_2 \bar{x}_{r+1..n} - c_{1..r}\|_2^2 + \|c_{r+1..m}\|_2^2$$

La soluciones  $\bar{x}^*$  de este sistema entonces son:

$$R_1 \bar{x}_{1..r}^* + R_2 \bar{x}_{r+1..n}^* = c_{1..r}$$

## 9.3 Resolucion usando la factorización SVD

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rang}(A) = r$ ,  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices ortogonales y  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$  matriz diagonal con  $\Sigma_{i,i} > 0$  tal que:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  tal que  $A = U\Sigma V^t$ . Analicemos el problema de MCL:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|U^t Ax - U^t b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|\Sigma V^t x - U^t b\|_2^2$$

Definiendo  $y = V^t x$ :

$$\min_{y \in \mathbb{R}^n} \|\Sigma V^t x - U^t b\|_2^2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \|\Sigma y - U^t b\|_2^2 = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^r (\sigma_i y_i - (U^t b)_i)^2 + \sum_{i=r+1}^m (U^t b)_i^2$$

Definimos  $y^*$  tal que  $y_i^* = \frac{(U^t b)_i}{\sigma_i}$  para  $i = 1, \dots, r$

Luego las soluciones  $x^*$  para el problema de MCL son:

$$x^* = V y^*$$

## **Bibliografía**



## 10.1 Videos de clases

- [Algebra Lineal](#)
- [Sistemas Lineales](#)
- [Factorización LU](#)
- [Normas y error](#)
- [Factorización SDP](#)
- [Factorización QR](#)
- [Autovalores](#)
- [Factorización SVD](#)
- [Métodos Iterativos](#)
- [Cuadrados Mínimos Lineales](#)
- [Interpolación](#)

## 10.2 Enlaces

- [Métodos Numéricos, CubaWiki](#)

## 10.3 Libros

- R. Burden y J.D.Faires, **Análisis numérico**, International Thomson Editors, 2002.
- V. Chvatal, **Linear programming**, Freeman, 1983.
- G. Dahlquist, A. Bjorck, **Numerical methods**, Dover, 2003.
- J. Demmel, **Applied Numerical Linear Algebra**, SIAM, 1997.
- J. Dennis y J. More, **Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations**, Prentice- Hall, 1983.
- P. Gill, W. Murray and M. Wright, **Numerical Linear Algebra and Optimization**, Addison Wesley, 1991.
- G. H. Golub, **Matrix Computations**, Charles F. Van Loan, JHU Press, 2013.
- G. Jerónimo, J. Sabia, S. Tesauri, **Algebra lineal**, Depto de Matemática, FCEN - UBA, 2008.
- M. Heath, **Scientific computing: an introductory survey**, **Philosophical Transactions**. Series A, Mathematical, Physical, and Engineering Sciences, 2002
- N. Higham, **Accuracy and Stability of Numerical Algorithms**, SIAM, 2002.
- K. Hoffman y R. Kunze, **Algebra lineal**, Prentice- Hall, 1977.
- R. Horn and C. Johnson, **Matrix Analysis**, Cambridge University Press, 2012.
- E. Isaacson and H. Keller, **Analysis of Numerical Methods**, Dover Publications, 1994.
- D. Kincaid y W. Cheney, **Análisis numérico**, Addison Wesley Iberoamericana, 1994.
- B. Kernighan y R. Pike, **The Practice of Programming**, Addison Wesley, 1999.
- C. Meyer, **Matrix analysis and applied linear algebra**, SIAM, 2010.
- P. J. Olver, C. Shakiban, **Applied Linear Algebra**, Second Edition, Springer International Publishing, 2018.
- T. Sauer, **Numerical Analysis**, Pearson, 3rd Edition, 2017.
- G. Stewart, **Introduction to matrix computations**, Academic Press, 1973.
- G. Strang, **Algebra lineal y sus aplicaciones**, Ediciones Paraninfo, 4ta ed., 2007.
- E. Süli, David F. Mayers, **An Introduction to Numerical Analysis**, Cambridge University Press, 2003.+
- L. N. Trefethen, **Numerical Linear Algebra**, SIAM, 1997.
- R. Varga, **Matrix Iterative Analysis**, Springer, 2000.
- D. Watkins, **Fundamentals of matrix computations**, John Wiley & Sons, 2010