Apuntes Metnum

October 8, 2023

Gian

Índice

Elementos del álgebra lineal

1.1 Vectores

Un **vector es un conjunto ordenado de números reales**, que se pueden representar como una lista de números. Por ejemplo, el vector $v \in \mathbb{R}^n$ se puede representar como $v = (1, 2, 3)$.

1.1.1 Suma

Para **sumar dos vectores**, se suman las componentes correspondientes:

$$w = v + u \quad \text{con } w_i = v_i + u_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3, ..., n$$

La suma de vectores es **conmutativa** y **asociativa**.

1.1.2 Multiplicación por escalares

Los vectores se pueden **multiplicar por escalares**: Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $v \in \mathbb{R}^n$, entonces $\alpha \cdot v = (\alpha \cdot v_1, \alpha \cdot v_2, ..., \alpha \cdot v_n)$ para

1.1.3 Producto interno

El **producto interno** de dos vectores $v, u \in \mathbb{R}^n$ se define como:

$$v \cdot u = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = \|v\| \ \|u\| \cos\theta$$

$$\text{donde } \theta \ \text{ es el angulo entre } v \ \text{ y } u$$

Graficamente, el producto interno se puede interpretar como la **proyección de un vector sobre otro**.

1.1.4 Combinación Lineal

Una **combinación lineal** w de vectores $v_1, v_2, ..., v_n$ es un vector de la forma

$$w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{R}^n$$

Decimos que $v_1, v_2, ..., v_n$ son **linealmente independientes** si la única combinación lineal que da el vector nulo es la trivial, es decir, si $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

En cambio, si existe una combinación lineal no trivial (algún $\alpha_i \neq 0$) que da el vector nulo, entonces los vectores son **linealmente dependientes**.

Nombramos **espacio generado** por un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de esos vectores:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ \ \text{tal que } x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\}$$

y su **dimensión** es la cantidad máxima de vectores linealmente independientes que lo generan.

1.1.5 Base vectorial

Una **base vectorial** B es un conjunto de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial. En otras palabras, B es una base de S si todos los vectores $v \in S$ **se pueden escribir como una combinación lineal de los vectores de B**.

1.2 Matrices

Una matriz es un **arreglo rectangular de números reales**. Por ejemplo, la matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se puede representar como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{\in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2.1 Suma

Sean $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces $A + B = C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, donde $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \dots & a_{\in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

La suma de matrices es **conmutativa** y **asociativa**.

Notar que para poder sumar dos matrices, **deben tener la misma dimensión**.

1.2.2 Producto por escalares

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha A = B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, donde $B_{ij} = \alpha A_{ij}$.

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{\in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2.3 Producto de matrices

Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, entonces $AB = C \in \mathbb{R}^{m \times p}$, donde

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{kp} \end{bmatrix}$$

1.2.4 Rango de una matriz

El **rango de una matriz** $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la **cantidad máxima de columnas linealmente independientes** que tiene.

1.2.5 Determinante de una matriz

El **determinante** $\det(A)$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es un **número real** que se calcula como:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad \text{para cualquier } j \in \{1, 2, ..., n\}$$

donde A_{ij} es la matriz que se obtiene de A al eliminar la fila i y la columna j.

Graficamente, **es el área del paralelogramo que forman las filas de A**. En un espacio, el determinante es el volumen del paralelepípedo correspondiente.

1.2.6 Espacio imagen

El **espacio imagen** de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es el conjunto de todos los vectores $b \in \mathbb{R}^m$ que se pueden escribir como $b = Ax$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$.

$$Im(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \quad \text{tal que } b = Ax \quad \text{para algún } x \in \mathbb{R}^n\}$$

Los vectores $b \in Im(A)$ son **combinaciones lineales de las columnas de A**.

1.2.7 Espacio nulo

El **espacio nulo** de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es el conjunto de todos los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $Ax = 0$

$$Nu(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \ \text{ tal que } Ax = 0\}$$

Propiedad

$$N(A) \neq \{0\} \Leftrightarrow \text{las columnas de A son linealmente dependientes}$$

1.2.8 Matriz inversa

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces A es **inversible** si existe una matriz $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

.

Propiedad

$$A \ \text{ es inversible} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Cuando A es inversible, decimos que A es una **matriz no singular**

Propiedad

La **inversa de un matriz diagonal** (si existe), es una **matriz diagonal**.

Propiedad

La inversa de un **matriz triangular superior** (si existe), es una **matriz triangular superior**.

Analogamente, la inversa de un **matriz triangular inferior** (si existe), es una **matriz triangular inferior**.

1.2.9 Matriz traspuesta

La **matriz traspuesta** de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que

$$A_{ij}^T = A_{ji}$$

.

Propiedad

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

1.2.10 Submatriz principal

Una **submatriz principal** de una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de orden k es una matriz $A^{(k)}$ que se obtiene de A al eliminar las ultimas $m-k$ filas y las ultimas $n-k$ columnas. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

entonces:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad A^{(4)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

1.2.11 Matrices especiales

Matriz Identidad: La **matriz identidad** $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz cuadrada que tiene 1 en la diagonal y 0 en el resto de las posiciones:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal: Una **matriz diagonal** $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuadrada que tiene 0 en todas las posiciones excepto en la diagonal:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior: Una **matriz triangular superior** $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuadrada que tiene 0 en todas las posiciones por debajo de la diagonal:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior: Una **matriz triangular inferior** $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz cuadrada que tiene 0 en todas las posiciones por encima de la diagonal:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Propiedad

El **producto de dos matrices triangulares superiores** es una matriz **triangular superior**.

Analogamente, el **producto de dos matrices triangulares inferiores** es una **matriz triangular inferior**.

Matriz estrictamente diagonal dominante: Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es **estrictamente diagonal dominante** si para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se cumple que

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Matriz de permutación: Una **matriz de permutación** $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz que se obtiene de la matriz identidad $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ al **intercambiar dos o más filas (o columnas)** de I.

Al multiplicar una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ por una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se obtiene:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad PA = \begin{bmatrix} — & \text{fila}_2(A) & — \\ — & \text{fila}_4(A) & — \\ — & \text{fila}_3(A) & — \\ — & \text{fila}_1(A) & — \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \text{col}_4(A) & \text{col}_2(A) & \text{col}_3(A) & \text{col}_1(A) \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

Matriz elemental (tipo 1): Una **matriz elemental (tipo 1)** es la matriz identidad con una **fila multiplicada por un escalar no nulo**:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad EA = \begin{bmatrix} — & \text{fila}_1(A) & — \\ — & \alpha\,\text{fila}_2(A) & — \\ — & \text{fila}_3(A) & — \\ — & \text{fila}_4(A) & — \end{bmatrix}$$

$$AE = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \alpha\,\text{col}_2(A) & \text{col}_1(A) & \text{col}_3(A) & \text{col}_4(A) \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

Matriz elemental (tipo 2): Una **matriz elemental (tipo 2)** es la matriz identidad con **un elemento no nulo fuera de la diagonal**:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad EA = \begin{bmatrix} — & \text{fila}_1(A) & — \\ — & \text{fila}_2(A) & — \\ — & \text{fila}_3(A) + \alpha\ \text{fila}_1(A) & — \\ — & \text{fila}_4(A) & — \end{bmatrix}$$

$$AE = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ \text{col}_1(A) + \alpha\,\text{col}_3(A) & \text{col}_2(A) & \text{col}_3(A) & \text{col}_4(A) \\ | & | & | & | \end{bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un conjunto de ecuaciones lineales que se deben cumplir simultáneamente.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Podemos armar una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con los coeficientes de las incógnitas, un vector $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ con las incógnitas y un vector $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$ con los resultados de las ecuaciones:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Entonces, el sistema de ecuaciones lineales **se puede representar como una operación matricial**, en la que se busca encontrar el vector x que cumple

$$Ax = b$$

.

Si $b \notin Im(A)$ entonces el sistema **no tiene solución**.

Si $b \in Im(A)$ entonces:

- Si $\operatorname{rang}(A) = n$ entonces el sistema **tiene una única solución**.
- Si $\operatorname{rang}(A) < n$ entonces el sistema **tiene infinitas soluciones**.

Sistemas equivalentes: Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, y $b, d \in \mathbb{R}^{n}$, entonces $Ax = b$ y $Bx = d$ son **sistemas equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

2.2 Sistemas de ecuaciones diagonales

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz diagonal y $b \in \mathbb{R}^n$, entonces $Ax = b$ es un **sistema de ecuaciones diagonales** y se puede resolver despejando cada incógnita por separado:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &= b_1 \\ a_{22}x_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

- **Si $a_{ii} \neq 0$** para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, el sistema **tiene única solución** y

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

- **Si $a_{ii} = 0$** para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
  - Si $b_i = 0$ entonces el sistema **tiene infinitas soluciones**.
  - Si $b_i \neq 0$ entonces el sistema **no tiene solución**.

2.3 Sistemas de ecuaciones triangulares

2.3.1 Backward Substituion

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una **matriz triangular superior** y $b \in \mathbb{R}^n$, entonces $Ax = b$ es un sistema de ecuaciones triangulares de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

- **Si $a_{ii} \neq 0$** para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, el sistema **tiene una única solución** y se puede resolver usando **backward substitution**:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \\ x_{n-1} &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}} \\ &\vdots \\ x_i &= \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{1j}x_j}{a_{11}} \end{aligned}$$

Esté método tiene **complejidad $\mathcal{O}(n^2)$**.

- **Si $a_{ii} = 0$** para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:
  - Ejecutamos el algoritmo de backward substitution hasta llegar a la fila i. Osea que obtenemos los valores para $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{i+1}$.
  - Comos todos estos valores son conocidos, simplemente hacemos la cuenta $\mathbf{fila}_i(A)x$.
    - Si b_i es el valor que obtenemos, entonces el sistema **tiene infinitas soluciones**.
    - Si no lo es, entonces el sistema **no tiene solución**.

2.3.2 Forward Substituion

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una **matriz triangular inferior** y $b \in \mathbb{R}^n$, entonces $Ax = b$ es un sistema de ecuaciones triangulares que se resuelve de forma similar al los sistemas triangulares superiores, la única diferencia es que se resuelve de arriba hacía abajo:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

2.4 Sistemas de ecuaciones generales

2.4.1 Eliminación gaussiana

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$, entonces usaremos el **método de eliminación gaussiana** para transformar el sistema original en un **sistema equivalente** que sea más fácil de resolver. En particular, vamos a transformar el sistema $Ax = b$ en uno de la forma $Ux = c$, donde U es una **matriz triangular superior**.

Para esto, se aplican las siguientes **operaciones elementales**:

- **Multiplicar una fila por un escalar no nulo** usando una matriz elemental (tipo 1).
- **Intercambiar dos filas** usando una matriz de permutación.
- **Sumar una fila multiplicada por un escalar no nulo a otra** fila usando una matriz elemental (tipo 2).

Debemos aplicar estas operaciones de forma tal que al final del proceso obtengamos un sistema de ecuaciones triangular superior. Para esto, vamos a aplicar el siguiente esquema:

```
ELIMINACIÓNGAUSSIANA(A: Matriz):
Para i ← 1 a n hacer
    Para j ← i + 1 a n hacer
        m_ij = a_ji / a_ii
        fila_j(A) = fila_j(A) − m_ij fila_i(A)
    Fin
Fin
```

La version mostrada **asume que** $a_{ii} \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$, en todo momento.

Propiedad

El algoritmo propuesto tiene complejidad $\mathcal{O}(n^3)$.

2.4.2 Eliminación Gaussiana con pivoteo

Si en alguna iteración, nos encontramos con que $a_{ii} = 0$ entonces pueden darse dos posibles situaciones:

- $a_{ji} = 0$ para todo $j \in \{i+1, i+2, ..., n\}$: En este caso, la fila i es nula, y podemos **pasar a la siguiente iteración**.
- Existe algún $j \in \{i+1, i+2, ..., n\}$ tal que $a_{ji} \neq 0$: En este caso, **intercambiamos la fila i con la fila j**, y continuamos con el algoritmo.

En la práctica debemos tener en cuenta que **los números de coma flotante tienen precisión finita** por lo que debemos elegir de manera cuidadosa el pivote. Usaremos dos estrategias para esto:

- **Pivoteo parcial**: En cada iteración, elegimos entre las filas $i, i+1, ..., n$ aquella que tiene el mayor valor absoluto en la columna i. Luego, intercambiamos la fila i con la fila elegida.
- **Pivoteo completo**: En cada iteración, buscamos la celda que tiene el mayor valor absoluto entre todas las filas $i, i+1, ..., n$ y todas las columnas $i, i+1, ..., n$. Luego, intercambiamos la fila i con la fila de la celda elegida, y la columna i con la columna de la celda elegida.

Factorización de Matrices

3.1 Factorización LU

Resolver varios sistemas de ecuaciones lineales con Eliminación Gaussiana tiene complejidad $\mathcal{O}(n^3)$ por cada uno. Existen técnicas de factorización de matrices que nos permiten mejorar esta complejidad.

La **factorización LU** de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una factorización de la forma $A = LU$, donde L es una **matriz triangular inferior** y U es una **matriz triangular superior**.

Podemos usar esta factorización para resolver el sistema $Ax = b$ de la siguiente forma:

- Factorizamos $A = LU$: Entonces $Ax = b \Leftrightarrow LUx = b$.
- Definimos $y = Ux$: Entonces podemos resolver $Ly = b$ usando **forward substitution**.
- Luego, resolvemos el sistema $Ux = y$ usando **backward substitution**.

Osea que resolvemos dos sistemas triangulares, lo cual tiene **complejidad $\mathcal{O}(n^2)$ por cada uno**. Hay que ver cuanto nos cuesta factorizar A.

3.1.1 Método

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, supongamos que aplicamos eliminación gaussiana y se verifica que $a_{ii} \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Sea E la matriz elemental (tipo 2) que representa la **primer operación de la eliminación gaussiana**:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

Vemos que $EA = A_1$ representa la operación

$$\mathrm{fila}_2(A) = \mathrm{fila}_2(A) - m_{21}\,\mathrm{fila}_1(A)$$

. Podemos juntar todas las matrices elementales (tipo 2) que representan las operaciones que anulan todos los elementos por debajo de la diagonal, y obtener una matriz M_1:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -m_{n1} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

.

Entonces $M^1 A = A^1$ donde A^1 es la matriz que se obtiene de A al aplicar el primer paso de eliminación gaussiana.

De la misma manera, podemos definir $\boldsymbol{M^i}$ **como la matriz que representa las operaciones que anulan todos los elementos por debajo de la diagonal** en la columna i:

$$M^i = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & -m_{i+1i} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \dots & -m_{ni} & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $M^i A^{i-1} = A^i$ donde A^i es la matriz que se obtiene de A al aplicar el paso i de eliminación gaussiana.

Luego, podemos pensar al proceso de eliminación gaussiana como una **secuencia de multiplicaciones de matrices**: Sea $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz triangular superior que se obtiene de aplicar eliminación gaussiana a A, entonces:

$$U = M^n M^{n-1} \dots M^2 M^1 A$$

Propiedad

Sea $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz identidad, e_i el vector que tiene 1 en la posición i y 0 en el resto, y $m_i = [0, \dots, m_{i+1i}, \dots, m_{ni}]$, entonces:

$$\boldsymbol{M^i = I - m_i^t e_i}$$

Propiedad

M^i es una matriz **triangular inferior** con 1 en la diagonal.

Propiedad

M^i es **inversible** y su inversa es

$$(\boldsymbol{M^i})^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{m_i^t e_i}$$

Demostración

$$\begin{aligned} M_i(M_i)^t &= (I - m_i^t e_i)(I + m_i^t e_i) \\ &= I + m_i^t e_i - m_i^t e_i - m_i^t e_i m_i^t e_i \\ &= I - m_i^t e_i m_i^t e_i \end{aligned}$$

Pero $e_i m_i^t = 0$ porque e_i tiene 0 en todas las posiciones salvo en la i y m_i^t tiene 0 en todas las posiciones hasta la posición i. Entonces $e_i m_i^t = 0$:

$$I - m_i^t e_i m_i^t e_i = I - m_i^t 0 e_i = I$$

Como habiamos dicho que $U = M^n M^{n-1} ... M^2 M^1 A$ y ahora sabemos que M^i es inversible para todo $i = \{1, ..., n\}$, entonces:

$$A = (M^1)^{-1}(M^2)^{-1} ... (M^n)^{-1} U$$

Entonces, si definimos $\boldsymbol{L = (M^1)^{-1}(M^2)^{-1} ... (M^n)^{-1}}$, tenemos que $A = LU$ obtenemos la factorización LU de A asociada a la eliminación gaussiana.

¡Cuidado!

La factorización LU no siempre existe. Si en algún paso de la eliminación gaussiana, nos encontramos con que $a_{ii} = 0$ para algún $i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces la factorización LU no existe.

Propiedad

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es **no singular** y tiene **factorización LU**, entonces esa **factorización es única**.

Demostración

Supongamos que existen al menos dos factorizaciones LU de A: $A = L_1U_1$ y $A = L_2U_2$.

Como A es inversible, entonces U_1 y U_2 son inversibles. Además, las inversas son tambien triangulares superiores. Tanto L_1 como L_2 son triangulares inferiores con 1 en la diagonal. Entonces, partiendo de las dos factorizaciones:

$$\begin{aligned} L_1U_1 &= L_2U_2 \\ L_1^{-1}L_1U_1 &= L_1^{-1}L_2U_2 \\ U_1 &= L_1^{-1}L_2U_2 \\ U_1U_2^{-1} &= L_1^{-1}L_2U_2U_2^{-1} \\ U_1U_2^{-1} &= L_1^{-1}L_2 \end{aligned}$$

$U_1U_2^{-1}$ es una matriz triangular superior por ser producto de dos matrices triangulares superiores. $L_1^{-1}L_2$ es una matriz triangular inferior por ser producto de dos matrices triangulares inferiores.

Como $D = U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2$ entonces D necesariamente tiene que ser una matriz diagonal.

Tambien sabemos que $L_1^{-1}L_2$ tiene 1 en la diagonal. Entonces $D = I$.

Luego, $U_1U_2^{-1} = I$ y $U_1 = U_2$. Entonces $L_1 = L_2$. ■

Propiedad

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular.

$$\boldsymbol{A} \ \ \textbf{tiene factorización} \ \boldsymbol{LU}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\textbf{todas sus matrices principales son no singulares}$$

Demostración

$\Rightarrow$) Si A es no signular y tiene factorización LU, tanto L como U son no singulares. Los elementos de la diagona de L son todos 1 y los elementos de la diagonal de U son todos no nulos. Las submatrices principales de L son tambien triangulares con 1 en la diagonal, por lo tanto son no singulares. Las submatrices principales de U son triangulares superiores con elementos no nulos en la diagonal, por lo tanto son no singulares.

Como $A = LU$, entonces las submatriz de orden k de A es el resultado del producto de la submatriz de orden k de L y la submatriz de orden k de U. Como ambas son no singulares, entonces la submatriz de orden k de A tambien es no singular.

$\Leftarrow$) Demostramos por inducción en la dimensión de la matriz A.

- **Caso base**: $n = 2$

  Como a_{11} no es nulo por ser la submatriz principal de orden 1 de A, entonces el primer (y único) paso de la eliminación Gaussiana se puede realizar sin inconvenientes y se encuentra la factorización LU.

- **Paso inductivo**: Supongamos que vale para matrices de imensión2 n y veamos que vale para matrices de orden $n + 1$.

  Consideremos $A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ con todas sus submatrices principales no singulares. Veamos que A tiene factorización LU.

  Si escribimos A como:

  $$A = \begin{bmatrix} A^{(n)} & c_{n+1} \\ f^t_{n+11} & a_{n+1n+1} \end{bmatrix}$$

  donde $A^{(n)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c_{n+1} \in \mathbb{R}^n$, $f_{n+11} \in \mathbb{R}^n$ y $a_{n+1n+1} \in R$.

Propiedad

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es estrictamente diagonal dominante, entonces A tiene factorización LU.

3.1.2 Factorización PLU

En caso de que la factorización LU no exista, podemos usar **pivoteo parcial** para obtener una factorización PLU que es una factorización LU la **matriz original con sus filas permutadas**.

Bibliografía

4.1 Videos de clases

- Algebra Lineal
- Sistemas Lineales
- Factorización LU
- Normas y error
- Factorización SDP
- Factorización QR
- Autovalores
- Factorización SVD
- Métodos Iterativos
- Cuadrados Mínimos Lineales
- Interpolación

4.2 Enlaces

- Métodos Numéricos, CubaWiki

4.3 Libros

- R. Burden y J.D.Faires, **Análisis numérico**, International Thomson Editors, 2002.
- V. Chvatal, **Linear programming**, Freeman, 1983.
- G. Dahlquist, A. Bjorck, **Numerical methods**, Dover, 2003.
- J. Demmel, **Applied Numerical Linear Algebra**, SIAM,1997.
- J. Dennis y J. More, **Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations**, Prentice- Hall, 1983.
- P. Gill, W. Murray and M. Wright, **Numerical Linear Algebra and Optimization** , Addison Wesley, 1991.
- G. H. Golub, **Matrix Computations**, Charles F. Van Loan,JHU Press, 2013.
- G. Jerónimo, J. Sabia, S. Tesauri, **Algebra lineal**, Depto de Matemática, FCEN - UBA, 2008.
- M. Heath, **Scientific computing: an introductory survey, Philosophical Transactions**. Series A, Mathematical, Physical, and Engineering Sciences, 2002
- N. Higham, **Accuracy and Stability of Numerical Algorithms**, SIAM, 2002.
- K. Hoffman y R. Kunze, **Algebra lineal**, Prentice- Hall, 1977.
- R. Horn and C. Johnson, **Matrix Analysis**, Cambridge University Press, 2012.
- E. Isaacson and H. Keller, **Analysis of Numerical Methods**, Dover Publications, 1994.
- D. Kincaid y W. Cheney, **Análisis numérico**, Addison Wesley Iberoamericana, 1994.
- B. Kernighan y R. Pike, **The Practice of Programming**, Addison Wesley, 1999.
- C. Meyer, **Matrix analysis and applied linear algebra**, SIAM, 2010.
- P. J. Olver, C. Shakiban, **Applied Linear Algebra**, Second Edition, Springer International Publishing, 2018.
- T. Sauer, **Numerical Analysis**, Pearson, 3rd Edition, 2017.
- G. Stewart, **Introduction to matrix computations**, Academic Press, 1973.
- G. Strang, **Algebra lineal y sus aplicaciones**, Ediciones Paraninfo, 4ta ed., 2007.
- E. Süli, David F.Mayers, **An Introduction to Numerical Analysis**, Cambridge University Press, 2003.+
- L. N. Trefethen, **Numerical Linear Algebra**, SIAM, 1997.

- R. Varga, **Matrix Iterative Analysis**, Springer, 2000.
- D. Watkins, **Fundamentals of matrix computations**, John Wiley & Sons, 2010