Teoría de Lenguajes

Gianfranco Zambonni

11 de enero de 2023

Teoría de Lenguajes

Gianfranco Zambonni

11 de enero de 2023

Índice

1. Introducción

1.1. Relaciones

Dados dos conjuntos A y B, se llama **relación** $R : A \to B$ de A en B a todo subconjutno de $A \times B$, es decir $R \subset A \times B$.

Dos elementos $a \in A$ y $b \in B$ están relacionados si $(a, b) \in R$ y lo notamos aRb.

Si $A = B$, se dice que R es una relación sobre A y se dice que:

- es **reflexica** cuando $\forall a,\ aRa$.
- es **simétrica** cuando $\forall a, b \in A,\ aRb \implies bRa$.
- es **transitiva** cuando $a, b, c \in A,\ aRb \ \wedge \ bRc \implies aRc$.

Relación de equivalencia: Una relación $R : A \to A$ es de **equivalencia** cuando es reflexiva, simétrica y transitiva. Este tipo de relaciones particiona a A en subconjuntos disjuntos llamados **clases de equivalencia**.

1.1.1. Operaciones

Composición de relaciones: Si $R : A \to B$ y $S : B \to C$ son relaciones, entonces la composición de R y S es la relación $S \circ R : A \to C$ definida por:

$$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A,\ c \in C : \exists b \in B,\ aRb \ \wedge \ bSc\}$$

Relación de identidad: La relación de identidad sobre A es la relación $id_A : A \to A$ definida por: $id_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

- La relación de identidad el el elemento neutro de la composición de relaciones.

Relación de potencia: Dado $R : A \to A$ se define la relación de potencia $R^k : A \to A$ como la composición de k copias de R:

$$R^n = \begin{cases} id_A & \text{si } n = 0 \\ R \circ R^{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Clausura transitiva/positiva: Dada una relación $R : A \to A$ se define la clausura transitiva de R como la relación R^+ definida por:

$$R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

La clausura transitiva de R cumple las siguientes propiedades:

1. $R \subseteq R^+$

2. R^+ es transitiva

DEMOSTRACIÓN

Si aR^+b entonces existe una secuencia de elementos $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ tales que a_iRa_{i+1} para todo $i \in [0, n-1]$.

Análogamente, como bR^+c existe una secuencia de elementos

$$b = b_0, b_1, \ldots, b_m = c$$

tales que b_iRb_{i+1} para todo $i \in [0, m-1]$.

Entonces $aR^{n+m}c$ pues puedo armar la secuencia

$$a = a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots b_m = c$$

.

Luego como $R^{n+m} \subseteq R^+$ vale que aR^+c.

3. Para toda relación $G : A \to A$ tal que $R \subseteq G \wedge G$ es transitiva, entonces $R^+ \subseteq G$, es decir R^+ es la relación transitiva más pequeña que contiene a R.

DEMOSTRACIÓN

Si aR^+b entonces existe una secuencia de elementos $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$ tales que a_iRa_{i+1} para todo $i \in [0, n-1]$.

Como $R \subseteq G$ entonces a_iGa_{i+1} para todo $i \in [0, n-1]$. Como G es transitiva entonces la aplicación repetida de la transitividad nos lleva a que a_1Ga_n, por lo que aGb.

Clausura transitiva reflexiva:

$$R^* = R^+ \cup id_A = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$$

Observaciones:

- Si A es un conjunto finito, entonces todas las relaciones $R : A \to A$ son finitas.
- Si R es reflexiva, entonces $R^* = R^+$.

1.2. Alfabetos

Alfabeto: Un alfabeto es un conjunto finito de símbolos.

Cadena: Una cadena sobre un alfabeto Σ es una secuencia finita de símbolos de Σ. Los símbolos son notados respetando el orden de la secuencia.

Concatenación: Es una operación entre un símbolo del alfabeto Σ y una cadena sobre dicho alfabeto:

$$\circ : \Sigma \times \{\text{cadenas sobre } \Sigma\} \rightarrow \{\text{cadenas de } \Sigma\}$$

- La cadena nula λ es el elemento neutro de la concatenación.

Clausura de Kleene de Σ: Σ^*

- $\lambda \in \Sigma^*$
- $\alpha \in \Sigma^* \implies \forall\, a \in \Sigma,\ a \circ \alpha \in \Sigma^*$

Clausura positiva de Σ: $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\lambda\}$

1.3. Lenguajes

Lenguaje: Un lenguaje es un conjunto de cadenas sobre un alfabeto Σ.

Concatenación de lenguajes: Si L_1 y L_2 son lenguajes definidos sobre los alfabetos Σ_1 y Σ_2 respectivamente, entonces la concatenación de L_1 y L_2 es un lenguaje L_1L_2 sobre el alfabeto $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ dfinido de la siguiente manera:

$$L_1L_2 = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L_1,\ \beta \in L_2\}$$

Clausura de Kleene L^*:

$L^0 = \{\lambda\}$

$L^n = LL^{n-1}$ para $n >= 1$

$L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$

Clausura positiva L^+:

$L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$

Observaciones:

- $L^+ = LL^*$
- $L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$
- Si L es un lenguaje definido sobre Σ entonces $L \subseteq \Sigma^*$

1.4. Gramáticas

Una gramática es una 4-tupla (V_N, V_T, P, S) donde:

- V_N es un conjunto finito de símbolos no terminales.
- V_T es un conjunto finito de símbolos terminales.
- P es un conjunto finito de reglas de producción: Son pares ordenados $\alpha \to \beta$ donde

$$\alpha \in (V_N \cup V_T)^* V_N (V_N \cup V_T)^* \text{ y } \beta \in (V_N \cup V_T)^*$$

- $S \in V_N$ es el símbolo inicial.

Dada una producción $A \to \alpha \in P$, se denomina a A como **cabeza** de la producción y a α como su **cuerpo**.

Derivación: El el proceso por el cual se obtiene una cadena a partir de un símbolo inicial remplazando recursivamente símbolos no terminales por cuerpos de producciones en P cuya cabeza coincida con los símbolos que están siendo remplazados.

Forma setencial de una grámatica: Se llama forma sentencial a cualquier derivación de la grámatica:

- S es una forma setencial de G
- Si $\alpha\beta\gamma$ es una forma setencial de G y $\beta \to \delta \in P$ entonces $\alpha\delta\gamma$ es una forma setencial de G.

Derivación directa en G: Si $\alpha\beta\gamma \in (V_N \cup V_T)^*$ y $\beta \to \delta \in P$ entonces $\alpha\delta\gamma$ es una derivación directa de G de $\alpha\beta\gamma$ y se denota como $\alpha\beta\gamma \underset{G}{\Longrightarrow} \alpha\delta\gamma$.

- $\overset{+}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$ es la clausura positiva.
- $\overset{*}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$ es la clausura transitiva y reflexiva.
- $\overset{k}{\underset{G}{\Longrightarrow}}$ será la potencia k-ésima.

Lenguaje de una grámatica $\mathcal{L}(G)$: Es el conjunto de todas las cadenas de símbolos terminales que son formas setenciales de G.

$$\mathcal{L}(G) = \{\alpha \in V_T^* : \ S \overset{+}{\underset{G}{\Longrightarrow}} \alpha\}$$

1.4.1. Clasificación de grámaticas (Chomsky)

Gramáticas regulares (tipo 3): Son aquellas gramáticas que cumplen alguna de las siguientes condiciones:

- Todas sus producciones son de la forma $A \to aB$ ó $A \to a$ ó $A \to \lambda$ donde $A, B \in V_N$ y $a \in V_T$. En este caso se dice que es una gramática lineal a derecha.
- Todas sus producciones son de la forma $A \to Ba$ ó $A \to a$ ó $A \to \lambda$ donde $A, B \in V_N$ y $a \in V_T$. En este caso se dice que es una gramática lineal a izquierda.

Gramáticas libres de contexto (tipo 2): Son aquellas gramáticas en las que cada producción es de la forma $A \to \alpha$ donde $A \in V_N$ y $\alpha \in (V_N \cup V_T)^*$.

De la definición anterior puede inferirse que toda grámatica regular es libre de contexto.

Gramáticas sensibles al contexto (tipo 1): Son aquellas gramáticas en las que cada producción es de la forma $\alpha \to \beta$ donde $\alpha, \beta \in (V_N \cup V_T)^*$ y $|\alpha| \leq |\beta|$. Se puede inferir que toda gramática independiente del contexto que no posea regla borradoraas (es decir, que no posea producciones de la forma $A \to \lambda$) es sensible al contexto.

Gramáticas sin restricciones (tipo 0): Son aquellas gramáticas que no poseen ninguna restricción sobre la forma de sus producciones. El conjunto de las grámaticas tipo 0 es el conjunto de todas las grámaticas y permite generar todos los lenguajes aceptados por una máquina de Turing.

Definición: Un lenguaje generado por una grámatica tipo t es llamado **lenguaje tipo** t.

2. Autómatas finitos

2.1. Autómatas finitos deterministicos (AFD)

Un autómata finito determinista es una 5-tupla $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde:

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es un conjunto finito de símbolos de entrada.
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ es una función de transición.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Función de transición generalizada $\hat{\delta}$: La función de transición δ está definida para que tome como parámetro un único símbolo de Σ. Se puede extender para que tome como parámetro una cadena de símbolos de Σ, es decir $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$:

- $\hat{\delta}(q, \lambda) = q$
- $\hat{\delta}(q, \beta a) = \delta(\hat{\delta}(q, \beta), a)$ con $\beta \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$

Cadena aceptada por un AFD: Una cadena $\beta \in \Sigma^*$ es aceptada por un AFD $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ si y solo si $\hat{\delta}(q_0, \beta) \in F$.

Lenguaje aceptado por un AFD: El lenguaje aceptado por un AFD $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ es el conjunto de todas las cadenas $\beta \in \Sigma^*$ que son aceptadas por $\mathcal{M}$:

$$L(\mathcal{M}) = \{\beta \in \Sigma^* : \ \hat{\delta}(q_0, \beta) \in F\}$$

2.2. Autómatas finitos no deterministas (AFND)

Un autómata finito no determinista es una 5-tupla $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde:

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es un conjunto finito de símbolos de entrada.
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ es una función de transición.

  A diferencia de los AFD, la función δ devuelve un conjunto de estados en lugar de un solo estado.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Función de transición generalizada $\hat{\delta}$: Primero vamos a definir $\delta_P : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ de la siguiente manera:

$$\delta_P(P, a) = \bigcup_{p \in P} \delta(p, a)$$

La función $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ se define de manera recursiva como:

- $\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$
- $\hat{\delta}(q, \beta a) = \{p : \exists r \in \hat{\delta}(q, \beta) \text{ tal que } p \in \delta(r, a)\} = \delta_P(\hat{\delta}(q, \beta), a)$ con $\beta \in \Sigma^*$ y $a \in \Sigma$

Para generalizar a un más podemos definir $\hat{\delta}_P : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ de la siguiente manera:

$$\hat{\delta}_P(P, \beta) = \bigcup_{q \in P} \hat{\delta}(q, \beta)$$

Cadena aceptada por un AFND: Una cadena $\beta \in \Sigma^*$ es aceptada por un AFND $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ si y solo si $\hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset$. Es decir, si alguno de los estados alcanzados por $\hat{\delta}(q_0, \beta)$ es un estado final.

Lenguaje aceptado por un AFND: El lenguaje aceptado por un AFND $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ es el conjunto de todas las cadenas $\beta \in \Sigma^*$ que son aceptadas por $\mathcal{M}$:

$$L(\mathcal{M}) = \{\beta \in \Sigma^* : \ \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset\}$$

2.2.1. Equivalencia entre AFD y AFND

Es trivial ver que para todo AFD existe un AFND que acepte el mismo lenguaje.

Teorema 2.1. Dado una AFND $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, existe un AFD $\mathcal{M}' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ tal que $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$.

Vamos a demostrar este teorema construyendo una AFD $\mathcal{M}'$ a partir de $\mathcal{M}$. Una vez constuido deberemos demostrar que $\mathcal{M}'$ acepta el mismo lenguaje que $\mathcal{M}$.

Construcción de $\mathcal{M}'$:

- Q' será el conjunto de partes $\mathcal{P}(Q)$. Vamos a denotar cada estado $s \in Q'$ con etiquetas del estilo $[q_1, \ldots, q_k]$ donde $q_1, \ldots, q_k \in Q$. Entonces:

$$Q' = \mathcal{P}(Q)$$

- $\delta'([q_1, \ldots, q_k], a) = [p_1, \ldots, p_m] \iff \delta_P(\{q_1, \ldots, q_k\}, a) = \{p_1, \ldots, p_m\}$
- $q_0' = [q_0]$
- $F' = \{[q_1, \ldots, q_n] \in Q' : \{q_1, \ldots, q_n\} \cap F \neq \emptyset\}$

Equivalencia entre funciones de transición: Antes de demostrar que ambos automátas aceptan el mismo lenguaje, vamos a demostrar que las funciones de transición generalizadas de ambos automátas son equivalentes cuando las llamamos con el estado inicial como primer parámetro. Es decir, queremos ver que $\hat{\delta}'(q_0', \beta) = [p_1, \ldots, p_k] \iff \hat{\delta}(q_0, \beta) = \{p_1, \ldots, p_k\}$.

Lo vamos a hacer por inducción. Recordemos que $q_0' = [q_0]$:

- Caso base: $\beta = \lambda$:
  - $\hat{\delta}'([q_0], \lambda) = [q_0]$ por definición de $\hat{\delta}'$.
  - $\hat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$ por definición de $\hat{\delta}$.

  Luego $\hat{\delta}'([q_0], \lambda) = [q_0] \iff \hat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

- Caso inductivo: $\beta \implies \beta a$:

  Nuestra hipotesis inductiva es $\hat{\delta}'(q_0', \beta) = [r_1, \ldots, r_m] \iff \hat{\delta}(q_0, \beta) = \{r_1, \ldots, r_m\}$.

  Queremos ver que $\hat{\delta}'(q_0', \beta a) = [p_1, \ldots, p_k] \iff \hat{\delta}(q_0, \beta a) = \{p_1, \ldots, p_k\}$

$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}'(q_0', \beta a) = [p_1, \ldots, p_k] &\underset{\text{def.}}{\iff} \delta'(\hat{\delta}'(q_0', \beta), a) = [p_1, \ldots, p_k] \\
&\underset{\text{def.}}{\iff} \exists [r_1, \ldots, r_m] \in Q' \text{ tal que } \delta'(q_0', \beta) = [r_1, \ldots, r_m] \\
&\qquad \wedge \delta'([r_1, \ldots, r_m], a) = [p_1, \ldots, p_k] \\
&\underset{\substack{\text{H.I} \\ \text{constr.}}}{\iff} \exists \{r_1, \ldots, r_m\} \in Q \text{ tal que } \hat{\delta}(q_0, \beta) = \{r_1, \ldots, r_m\} \\
&\qquad \wedge \delta_P(\{r_1, \ldots, r_m\}, a) = \{p_1, \ldots, p_k\} \\
&\underset{\text{def.}}{\iff} \delta_P(\hat{\delta}(q_0, \beta), a) = \{p_1, \ldots, p_k\} \underset{\text{def.}}{\iff} \hat{\delta}(q_0, \beta a) = \{p_1, \ldots, p_k\}
\end{aligned}
$$

Demostración de la equivalencia: Ahora que hemos demostrado que las funciones de transición generalizadas de ambos automátas son equivalentes, vamos a demostrar que ambos automátas aceptan el mismo lenguaje:

$$
\begin{aligned}
\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{M}) &\underset{\text{def.}}{\iff} \hat{\delta}(q_0, \beta) = \{q_1, \ldots, q_n\} \wedge \{q_1, \ldots, q_n\} \cap F \neq \emptyset \\
&\underset{\substack{\text{equiv.} \\ \text{constr.}}}{\iff} \hat{\delta}(q_0', \beta) = [q_1, \ldots, q_n] \wedge [q_1, \ldots, q_n] \in F' \\
&\underset{\text{def.}}{\iff} x \in \mathcal{L}(M')
\end{aligned}
$$

2.3. Autómatas finitos no deterministico con transiciones λ

Un autómata finito no determinista con transiciones λ es un autómata finito no determinista que tiene transiciones λ. Estas transacciones nos permiten ir de un estado a otro sin consumir ningún símbolo de entrada.

Los definimos con una 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ donde:

- Q es un conjunto finito de estados.
- Σ es un conjunto finito de símbolos de entrada.
- $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$ es una función de transición.
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Clausura λ de un estado q: Se denota $Cl_\lambda(q)$ es el conjunto de estados que se pueden alcanzar desde q siguiendo solo transiciones λ. Es decir,

$$Cl_\lambda(q) = \delta(q, \lambda)$$

Además $q \in Cl_\lambda(q)$.

Clausura λ de un conjunto de estados P:

$$Cl_{P\lambda}(P) = \bigcup_{p \in P} Cl_\lambda(p)$$

Generalización de la función de transición: Podemos extender δ a conjunto de estados:

$$\delta_P : \mathcal{P}(Q) \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q)$$
$$\delta_P(P, a) = \bigcup_{p \in P} \delta(p, a)$$

Entonces podemos definir:

$$\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$$
$$\hat{\delta}(q_0, \lambda) = Cl_\lambda(q_0)$$
$$\hat{\delta}(q_0, \beta a) = Cl_{P\lambda}\left(\delta_P(\hat{\delta}(q_0, \beta), a)\right) = Cl_{P\lambda}\left(\left\{p : \exists q \in \hat{\delta}(q_0, \beta) \text{ tal que } p \in \delta(q, a)\right\}\right)$$

Tambien extendemos $\hat{\delta}$ a conjuntos de estados:

$$\hat{\delta}_P : \mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$$
$$\hat{\delta}_P(P, \beta a) = \bigcup_{p \in P} \hat{\delta}(p, \beta a)$$

Cadena aceptada por un AFND-λ: Una cadena β es aceptada por un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ si y solo si $\hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset$.

Lenguaje aceptado por un AFND-λ: El lenguaje aceptado por un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ es el conjunto de todas las cadenas aceptadas por M:

$$\mathcal{L}(M) = \{\beta \in \Sigma^* : \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset\}$$

2.3.1. Equivalencia entre AFND y AFND-λ

Dado un AFND-λ $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ podemos construir un AFND $M' = \langle Q, \Sigma, \delta', q_0, F'\rangle$ tal que M acepte el mismo lenguaje que M'.

Construcción de M': Notemos que ambos autómatas tiene el mismo conjunto de estados Q, el mismo conjunto de símbolos de entrada Σ y el mismo estado inicial q_0. Por lo que solo debemos definir δ' y F'.

- $\delta'(q,a) = \hat{\delta}(q,a) = Cl_{P\lambda}\left(\delta_P(\hat{\delta}(q,\lambda),a)\right)$
- $F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{si } Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \\ F & \text{si no} \end{cases}$

Equivalencia de funciones de transición generalizada: Vamos a demostrar por inducción que $\hat{\delta}'(q_0,\beta) = \hat{\delta}(q_0,\beta)$ para todo $|\beta| \geq 1$:

- Caso base: $|\beta| = 1$. Sea $\beta = a$, entonces $\hat{\delta}'(q_0,\beta) = \hat{\delta}'(q_0,a) = \hat{\delta}(q_0,a)$ por como definimos δ'.
- Caso inductivo: Supongamos que $\hat{\delta}'(q_0,\beta) = \hat{\delta}(q_0,\beta)$ para todo $|\beta| \leq n$. Sea $\omega = \beta a$. Entonces:

$$\hat{\delta}'(q_0,\omega) = \hat{\delta}'(q_0,\beta a) \underset{\text{def.}}{=} \delta'_P(\hat{\delta}'(q_0,\beta),a) \underset{\text{H.I}}{=} \delta'_P(\hat{\delta}(q_0,\beta),a) \tag{1}$$

Por otro lado, dado $P \subseteq Q$ tenemos que:

$$\delta'_P(P,a) \underset{\text{def.}}{=} \bigcup_{p\in P} \delta'(p,a) \underset{\text{constr.}}{=} \bigcup_{p\in P} \hat{\delta}(p,a) \underset{\text{def}}{=} \hat{\delta}_P(P,a)$$

Entonces, remplazando el último término en (1), nos queda:

$$\delta'_P(\hat{\delta}(q_0,\beta),a) = \hat{\delta}_P(\hat{\delta}(q_0,\beta),a) \underset{\text{def.}}{=} \hat{\delta}(q_0,\beta a) \underset{\text{def.}}{=} \hat{\delta}(q_0,\omega)$$

Demostración de equivalencia: Veamos ahora que M acepta el mismo lenguaje que M', vamos a separar la demostración en dos casos: $\beta = \lambda$ y $\beta \neq \lambda$.

- $\beta = \lambda$
  - $\lambda \in \mathcal{L}(M) \implies \lambda \in \mathcal{L}(M')$

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathcal{L}(M) &\underset{\text{def.}}{\iff} \hat{\delta}(q_0,\lambda) \cap F \neq \emptyset \\ &\underset{\text{def.}}{\iff} Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \\ &\underset{\text{constr.}}{\implies} q_0 \in F' \underset{\text{def.}}{\iff} \lambda \in \mathcal{L}(M') \end{aligned}$$

- $\lambda \in \mathcal{L}(M') \implies \lambda \in \mathcal{L}(M)$.

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathcal{L}(M') &\underset{\text{def.}}{\implies} q_0 \in F' \\
&\underset{\text{constr.}}{\implies} q_0 \in F \vee Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \\
&\underset{\text{def. F}}{\implies} Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \vee Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \\
&\underset{\text{def.}}{\implies} Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \\
&\underset{\text{def.}}{\iff} \lambda \in \mathcal{L}(M)
\end{aligned}$$

- $\beta \neq \lambda$
  - $\beta \in \mathcal{L}(M) \implies \beta \in \mathcal{L}(M')$

$$\begin{aligned}
\beta \in \mathcal{L}(M) &\underset{\text{def.}}{\implies} \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset \\
&\underset{\text{equiv. tran.}}{\implies} \hat{\delta}'(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset \\
&\underset{\text{constr. M'}}{\implies} \hat{\delta}'(q_0, \beta) \cap F' \neq \emptyset \underset{\text{def.}}{\implies} \beta \in \mathcal{L}(M')
\end{aligned}$$

  - $\beta \in \mathcal{L}(M') \implies \beta \in \mathcal{L}(M)$

$$\begin{aligned}
\beta \in \mathcal{L}(M') &\underset{\text{def.}}{\implies} \hat{\delta}'(q_0, \beta) \cap F' \neq \emptyset \\
&\underset{\text{equiv. trans}}{\implies} \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset \vee \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap (F \cup \{q_0\}) \neq \emptyset \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap \\
&\underset{\text{constr.} M'}{\implies} \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset
\end{aligned}$$

Si vale la primera parte de la última expresión $\delta(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset$ entonces $\beta \in \mathcal{L}(M)$ por definición.

Veamos que pasa si vale $\hat{\delta}(q_0, \beta) \cap (F \cup \{q_0\}) \neq \emptyset$, es decir hay un camino de transiciones λ desde q_0 hasta algún estado estado $q' \in F$:

$$\hat{\delta}(q_0, \beta) \cap (F \cup \{q_0\}) \neq \emptyset \implies \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap F \neq \emptyset \vee \hat{\delta}(q_0, \beta) \cap \{q_0\} \neq \emptyset$$

La primer parte es lo mismo que arriba, analizemos la segunda:

$$\hat{\delta}(q_0, \beta) \cap \{q_0\} \neq \emptyset \implies Cl_\lambda(q_0) \cap F \neq \emptyset \implies \lambda \in \mathcal{L}(M)$$

Queda demostrada la equivalencia de lenguajes.

3. Expresiones regulares

Una expresión regular es una expresión que describe un lenguaje de forma compacta y sencilla:

- $\varnothing$ es una expresión regular que describe el lenguaje vacío $\emptyset$.
- λ es una expresión regular que describe el lenguaje unitario $\{\lambda\}$.
- Para cada $a \in \sigma$, a es una expresión regular que describe el lenguaje $\{a\}$.
- Si r y s son dos expresiones que denotan los lenguajes R y S entonces:
  - $r|s$ ó $r + s$ es una expresión regular que describe el lenguaje $R \cup S$.
  - rs es una expresión regular que describe el lenguaje RS.
  - r^* es una expresión regular que describe el lenguaje R^*.
  - r^+ es una expresión regular que describe el lenguaje R^+.

Expresiones regulares recursivas: Si $r = \alpha r + \beta$, entonces $r = \alpha^*\beta$. Además, si $\alpha^* = \alpha^+$, entonces $r = \alpha^*(\beta + \gamma)$ para culquier expresión regular γ.

3.1. Expresiones regulares a AFND-λ

Dada una expresión regular r, existe una AFND-λ M con un solo estado final y sin trancisiones a partir del mismo tal que $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(r)$.

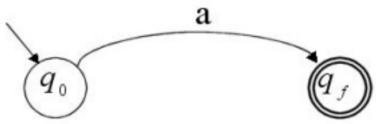
Vamosa a demostrar por inducción sobre los operadores de las expresiones regulares.

3.1.1. Casos base

$$r = \varnothing$$

$$r = \lambda$$

$$r = a$$



3.1.2. Pasos inductivos

Sean r_1 y r_2 dos expresiones regulares. Supongamos que existen AFND-λ $M_1 = \langle Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, \{f_1\}\rangle$ y $M_2 = \langle Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, \{f_{\}}\rangle$ tal que $\mathcal{L}(M_1) = \mathcal{L}(r_1)$ y $\mathcal{L}(M_2) = \mathcal{L}(r_2)$. Vamos a armar a partir de estos autómata uno nuevo que acepte los lenguajes generados por las expresiones $r_1|r_2$, r_1r_2, r_1^* y r^+.

$\boldsymbol{r_1|r_2}$**:** Podemos construir un automata $M_0 = \langle Q_0, \Sigma_0, \delta_0, q_0, \{f_0\}\rangle$ tal que $\mathcal{L}(M_0) = \mathcal{L}(r_1|r_2)$ de la siguiente forma:

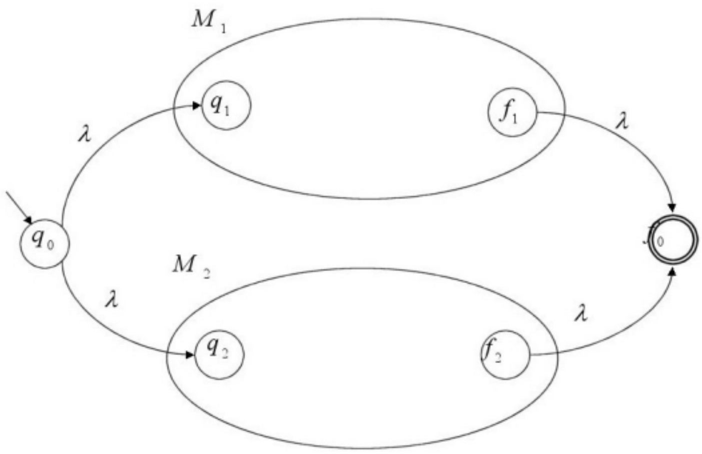
- $Q_0 = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, f_0\}$
- $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $\delta_0 : Q_0 \times \Sigma_0 \to \mathcal{P}(Q_0)$

$\delta(q_0, \lambda) = \{q_1, q_2\}$

$\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para $q \in Q_1 - \{f_1\}$ y $a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$

$\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$ para $q \in Q_2 - \{f_2\}$ y $a \in \Sigma_2 \cup \{\lambda\}$

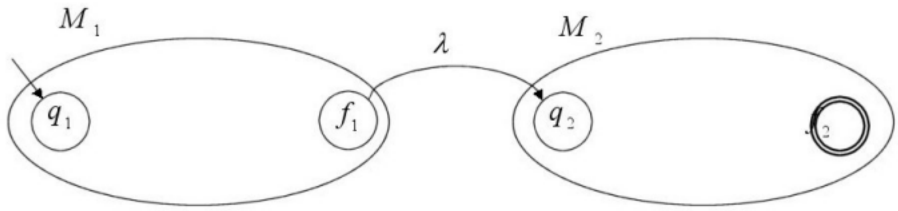
$d(f_1, \lambda) = d(f_2, \lambda) = \{f_0\}$



$\boldsymbol{r_1 r_2}$**:** $M_0 = \langle Q_0, \Sigma_0, \delta_0, q_1, \{f_2\}\rangle$:

- $Q_0 = Q_1 \cup Q_2$
- $\Sigma_0 = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
- $\delta_0 : Q_0 \times \Sigma_0 \to \mathcal{P}(Q_0)$

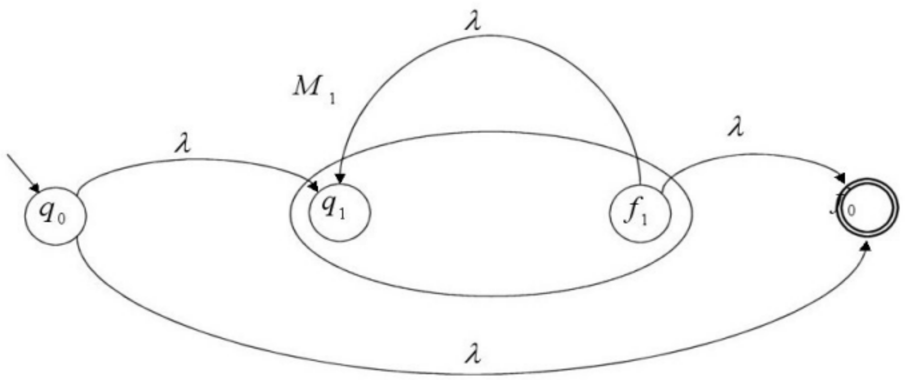
$$\delta(q, a) = \delta_1(q, a) \text{ para } q \in Q_1 - \{f_1\} \text{ y } a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$$
$$\delta(q, a) = \delta_2(q, a) \text{ para } q \in Q_2 - \{f_2\} \text{ y } a \in \Sigma_2 \cup \{\lambda\}$$
$$d(f_1, \lambda) = \{q_2\}$$



$\boldsymbol{r_1^*}$**:** $M_0 = \langle Q_0, \Sigma_1, \delta_0, q_0, \{f_0\}\rangle$:

- $Q_0 = Q_1 \cup \{f_0, q_0\}$
- $\delta_1 : Q_0 \times \Sigma_1 \to \mathcal{P}(Q_0)$

$$\delta(q_0, \lambda) = \delta(f_1, \lambda) = \{q_1, f_0\}$$
$$\delta(q, a) = \delta_1(q, a) \text{ para } q \in Q_1 - \{f_1\} \text{ y } a \in \Sigma_1 \cup \{\lambda\}$$



Para el caso r_1^+ es el mismo autómata que para este caso sin la transición $q_0 \xrightarrow{\lambda} f_0$.

3.2. AFD a expresión regular

Dado un AFD $M = \langle \{q_1, \ldots, q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, F \rangle$, que acepta el lenguaje $\mathcal{L}$, existe una expresión regular que denota el mismo lenguaje.

3.2.1. Demostración

Nombremos $R^k_{i,j}$ a la expresión regular cuyo lenguaje $\omega \subseteq \Sigma^*$ son las cadenas que llevan al autómata M desde el estado q_i al estado q_j pasando solo por estados q_l con $l \leq k$. En particular $R^n_{i,j}$ es la expresión regular que representa todas las cadenas que permiten ir del estado i al estado j.

Vamos a buscar como construir $R^k_{i,j}$ para cada $k \in \{0, \ldots, n\}$ de manera inductiva. Suponiendo que demostramos la existencia de esta expresión regular, podemos concluir que la unión $R^n_{1,f_1}|R^n_{1,f_2}|...|R^n_{1,f_m}$ (con $f_1 \ldots f_m \in F$) es la expresión regular que representa el lenguaje $\mathcal{L}$:

Caso base ($k = 0$): Como todos los estados están enumerados del 1 para arriba, $k = 0$ significa que no debe haber estados intermedios en el camino entre q_i y q_j, por lo que pueden ser de dos formas:

- Una arco del estado i al estado j.
- Un camino de longitud cero que solo contiene el estado i.

Si $i \neq j$, entonces solo es posible la primera opción. Debemos examinar el AFD y encontrar aquellos simbolos que nos permitan ir del estado i al estado j.

1. Si no existe tal símbolo, entonces $R^0_{i,j} = \varnothing$.
2. Si existe exactamente un símbolo a, entonces $R^0_{i,j} = a$.
3. Si existen más de un símbolo, entonces $R^0_{i,j} = a_1|a_2|...|a_n$.

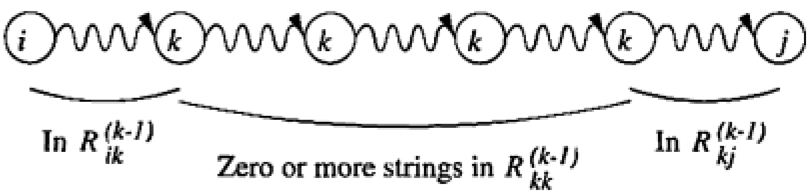
Ahora, si $i = j$ entonces los caminos de longitud cero también son posibles, por lo que habría que agregar a cada una de las expresiones recién mencionadas el simbolo λ:

1. $R^0_{i,j} = \lambda$.
2. $R^0_{i,j} = a|\lambda$.
3. $R^0_{i,j} = a_1|a_2|...|a_n|\lambda$.

Paso inductivo: Supongamos que hay un camino desde el estado i al estado j que no pasa por estados mas grandes k. Entonces podemos considerar las siguientes dos opciones:

1. El camino no pasa por el estado k, por lo que el lenguaje de $R^{k-1}_{i,j}$ contiene a ese camino.

2. El camino pasa por el estado k por lo menos una vez. Entonces podemos partir el camino en varias partes:



La primer parte, va desde el estado i al estado k sin pasar por k, la última parte es desde el estado k al estado j sin pasar por k, y todas las partes intermedia s van desde el estado k al estado k sin pasar por k. Cada una de estas partes ya tiene una expresión regular asociada: $R_{i,k}^{k-1}$, $R_{k,k}^{k-1}$, $R_{k,j}^{k-1}$, por lo que podemos unirlas para obtener la expresión regular que representa el camino completo de la siguiente forma:

$$R_{i,k}^{k-1}\left(R_{k,k}^{k-1}\right)^{*}R_{k,j}^{k-1}$$

Entonces $R_{i,j}^{k}$ es la unión de las expresiones de los dos tipos de caminos que acabamos de describir:

$$R_{i,j}^{k}=R_{i,j}^{k-1}\cup R_{i,k}^{k-1}\left(R_{k,k}^{k-1}\right)^{*}R_{k,j}^{k-1}$$

Finalmente, si construimos en orden todas estas expresiones regulares desde $R_{i,j}^{0}$, eventualmente llegaremos hasta $R_{i,j}^{n}$.

Y como dijimos, más arriba si calculamos $R_{1,j}^{0}$ para cada $q_j \in F$ y unimos todas las expresiones, obtendremos la expresión regular que representa el lenguaje $\mathcal{L}$.

3.3. Gramática regular a AFND

Dada una grámatica regular $G = \langle V_N, V_T, P, S\rangle$, podemos construir un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ que reconozca el lenguaje generado por G

3.3.1. Demostración

Vamos a constuir el autómata finito no determinista M y demostrar que reconoce el lenguaje generado por G.

Construcción de M: Construyamos M de la siguiente manera:

- $Q = V_N \cup \{q_f\}$. Denotarmeos q_A al estado que representa al no símbolo no terminar A.
- $\Sigma = V_T$
- $q_0 = q_S$
- Si $A, B \in V_N$ y $a \in \Sigma$, entonces:
  - $q_B \in \delta(q_A, a) \iff A \to aB \in P$
  - $q_f \in \delta(q_A, a) \iff A \to a \in P$
  - $q_A \in F \iff A \to \lambda \in P$
  - $q_f \in F$

Equivalencia clausura transitiva de producciones y δ: Vamos a probar por inducción que

$$A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha B \iff q_B \in \hat{\delta}(q_A, \alpha)$$

- **Caso base $\alpha = \lambda$:**
  - $A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha B$, pero las gramáticas regulares no acentan producciones que vayan de un no terminal a otro sin pasar por un terminal, por lo que $B = A$. Osea $A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A$.
  - Además, como es un AFND, no tiene transiciones lambda, osea que $\delta(q_A, \lambda) = \{q_A\}$, por lo que $q_A \in \hat{\delta}(q_A, \alpha)$.
- **Caso inductivo $\alpha = \beta a$:**

$$\begin{aligned} A \overset{*}{\Rightarrow} \alpha B \iff A \overset{*}{\Rightarrow} \beta a B &\underset{\text{def.}}{\iff} \exists C \in V_N : A \overset{*}{\Rightarrow} \beta C \wedge C \to aB \\ &\underset{\substack{\text{H.I} \\ \text{constr. M}}}{\iff} \exists q_C \in Q, q_c \in \hat{\delta}(q_A, \alpha) \wedge q_B \in \delta(q_C, a) \\ &\iff q_B \in \delta(\hat{\delta}(q_A, \alpha), a) \\ &\iff q_B \in \hat{\delta}(q_A, \beta a) \iff q_B \in \hat{\delta}(q_A, \alpha) \end{aligned}$$

Demostración de la equivalencia: Vamos a demostrar que el lenguaje generado por G y M son iguales, osea que $\alpha a \in \mathcal{L}(M) \iff S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha a$. Como G es una grámatica regular, hay solo dos formas de llegar desde S hasta αa:

1. $\exists A \in V_N : S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A \wedge A \to a \in P$
2. $\exists B \in V_N : S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha a B \wedge B \to \lambda \in P$

Entonces:

$$\begin{aligned}
S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha a &\underset{\text{def. G}}{\iff} (\exists A \in V_N : S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A \wedge A \to a \in P) \vee (\exists B \in V_N : S \overset{*}{\Rightarrow} \alpha a B \wedge B \to \lambda \in P) \\
&\underset{\text{Equiv. anterior}}{\iff} (\exists q_A \in Q, q_A \in \hat{\delta}(q_0, \alpha) \wedge q_f \in \delta(q_A, a)) \vee (\exists q_B \in Q, q_B \in \hat{\delta}(q_0, \alpha a) \wedge q_B \in F) \\
&\underset{\text{def. } \delta}{\iff} q_f \in \delta(q_S, \alpha a) \vee (\exists q_B \in Q, q_B \in \hat{\delta}(q_0, \alpha a) \wedge q_B \in F) \\
&\iff \alpha a \in \mathcal{L}(M)
\end{aligned}$$

Falta ver que pasa si $\lambda \in \mathcal{L}(G)$:

$$\lambda \in \mathcal{L}(G) \iff S \overset{*}{\Rightarrow} \lambda \iff S \to \lambda \in P \iff q_S \in F \iff \lambda \in \mathcal{L}(M)$$

3.4. AFD a gramática regular

Dado un AFD $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, existe una gramática regular $G = \langle V_N, V_T, P, S \rangle$ equivalente

3.4.1. Demostración

Contrucción de G: Vamos a construir G de la siguiente forma:

- $V_N = Q$, para mayor claridad llamamos A_p al no terminal correspondiente al estado $p \in Q$
- $V_T = \Sigma$
- $S = q_0$
- Si $q \in Q \wedge q \notin F$ entonces $A_p \to a A_q \in P \iff \delta(p, a) = q$
- Si $q \in F$ entonces $A_p \to a \in P \iff \delta(p, a) = q$
- $S \to \lambda \in P \iff q_0 \in F$

Paso intermedio: Vamos a demostrar por inducción:

$$\hat{\delta}(p, \alpha) = q \iff A_p \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A_q$$

- **Caso base:** $\alpha = \lambda$ es trivial:

$$\hat{\delta}(p, \lambda) = q \iff A_p \overset{*}{\Rightarrow} A_p$$

- **Caso inductivo** $\alpha = \beta a$**:** Queremos probar que $\hat{\delta}(p, \alpha) = q \iff A_p \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A_q$.

  Nuestra hipotesis inductiva: $\hat{\delta}(p, \beta) = q \iff A_p \overset{*}{\Rightarrow} \beta A_q$ para todo $|\beta| \leq n$

$$\hat{\delta}(p, \alpha) = \hat{\delta}(p, \beta a) = q \underset{\text{def.}}{\iff} \exists r \in Q : \ \hat{\delta}(p, \beta) = r \wedge \delta(r, a) = q$$

$$\underset{\substack{\text{H.I} \\ \text{constr. G}}}{\iff} \exists A_r, A_p \overset{*}{\Rightarrow} \beta A_r \wedge A_r \rightarrow a A_q \in P \iff A_p \overset{*}{\Rightarrow} \beta a A_q$$

Demostración de equivalencia de lenguajes:

$$\alpha a \in \mathcal{L}(M) \underset{\text{def.}}{\iff} \hat{\delta}(q_0, \alpha a) \in F \underset{\text{def.}}{\iff} \exists q \in Q : \ \hat{\delta}(q_0, \alpha) = q \wedge \delta(q, a) \in F$$

$$\underset{\text{paso intermedio}}{\iff} \exists A_p, A_{q0} \overset{*}{\Rightarrow} \alpha A_p \wedge A_p \rightarrow a \in P \iff A_{q0} \overset{*}{\Rightarrow} \alpha a$$

$$\underset{\text{def.}}{\iff} \alpha a \in \mathcal{L}(G)$$

4. Minimización de AFD

4.1. Indistinguibilidad

Sea $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un AFD, decimos que $p, q \in Q$, son indistinguibles ($p \equiv q$) si para toda cadena $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $\hat{\delta}(p, \alpha) \in F$ entonces pasa que $\hat{\delta}(q, \alpha) \in F$ y viceversa. Si $p, q \in Q$ son indistinguibles, entonces decimos que p y q son equivalentes.

$$p \equiv q \iff \forall \alpha \in \Sigma^* : \ (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F)$$

Teorema: Si p y q son indistinguibles, sea $\alpha \in \Sigma^*$ entonces $\hat{\delta}(p, \alpha) \equiv \hat{\delta}(q, \alpha)$

$$p \equiv q \implies \forall \alpha \in \Sigma^* : \ \hat{\delta}(p, \alpha) \equiv \hat{\delta}(q, \alpha)$$

DEMOSTRACIÓN

Sean $p, q \in Q$, $p \equiv q$.
Supogamos que existe $\alpha \in \Sigma^*$ tal que $\hat{\delta}(p, \alpha) \not\equiv \hat{\delta}(q, \alpha)$ entonces existe una cadena $\gamma \in \Sigma^*$ que distingue a $\hat{\delta}(p, \alpha)$ de $\hat{\delta}(q, \alpha)$. Osea que $\hat{\delta}(\hat{\delta}(p, \alpha), \gamma) \in F$ y $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \alpha), \gamma) \notin F$ (o viceversa).
Por def: $\hat{\delta}(\hat{\delta}(p, \alpha), \gamma) = \hat{\delta}(p, \alpha\gamma)$ y $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, \alpha), \gamma) = \hat{\delta}(p, \alpha\gamma)$. Entonces, como $\alpha\gamma$ es una cadena que nos permite distinguir p de q, es decir $p \not\equiv q$. Absurdo.

Teorema: $\equiv$ es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN

- **Reflexividad:** $p \equiv p$:

$$\forall \alpha \in \Sigma^* : \ (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(p, \alpha) \in F) \iff p \equiv p$$

- **Simetría:** $p \equiv q \implies q \equiv p$:

$$\begin{aligned} p \equiv q &\implies \forall \alpha \in \Sigma^* : \ (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F) \\ &\iff \forall \alpha \in \Sigma^* : \ (\hat{\delta}(q, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(p, \alpha) \in F) \iff q \equiv p \end{aligned}$$

- **Transitividad:** $p \equiv q \wedge q \equiv r \implies p \equiv r$:

$$\begin{aligned} p \equiv q &\implies \forall \alpha \in \Sigma^* : \ (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F) \\ q \equiv r &\implies \forall \alpha \in \Sigma^* : \ (\hat{\delta}(q, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(r, \alpha) \in F) \end{aligned}$$

Entonces

$$\forall \alpha \in \Sigma^* : \ (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(r, \alpha) \in F) \iff p \equiv r$$

4.1.1. Indestinguibilidad de orden k

$$p \overset{k}{\equiv} q \iff \forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k) \implies (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F)$$

Propiedades:

1. $\overset{k}{\equiv}$ es un relación de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN

Es exactamente igual a la demostración $\equiv$ es transitiva.

2. $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$

DEMOSTRACIÓN

$$p \overset{k+1}{\equiv} q \implies \forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k+1) \implies (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F)$$

Ahora como esto vale $\forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k+1)$, necesarimente vale $\forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k)$. Entonces

$$\forall \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k+1) \implies (\hat{\delta}(p, \alpha) \in F \iff \hat{\delta}(q, \alpha) \in F) \implies p \overset{k}{\equiv} q$$

3. $\left(Q/ \overset{0}{\equiv}\right) = \{Q - F, F\}$ si $Q - F \neq \emptyset$ y $F \neq \emptyset$. En castellano, $\overset{0}{\equiv}$ divide al conjunto de estados en estados finales y no finales.

4. $p \overset{k+1}{\equiv} q \iff \left(p \overset{0}{\equiv} q\right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta(q, a)\right)$

DEMOSTRACIÓN

$\Rightarrow$) Como $\overset{k+1}{\equiv} \subseteq \overset{k}{\equiv}$ entonces $p \overset{k+1}{\equiv} q \implies p \overset{0}{\equiv} q$.

Por otro lado, supongamos que no vale $\left(\forall a \in \Sigma, \delta(p, a) \overset{k}{\equiv} \delta(q, a)\right)$ entonces

$$\exists a \in \Sigma,\ \exists \alpha \in \Sigma^*, (|\alpha| \leq k) \wedge \hat{\delta}(\delta(p, a), \alpha) \in F \wedge \hat{\delta}(\delta(q, a), \alpha) \notin F$$

o viceversa. Pero entonces $p \overset{k+1}{\not\equiv} q$ ya que $a\alpha \leq k+1$ y $a\alpha$ distinque a p y a q.

$\Leftarrow$ Supogamos que $p \overset{k}{\not\equiv} q$. Entonces ó $p \overset{0}{\not\equiv} q$ ó $\exists a\alpha,\ |a\alpha| \leq k+1$ que distingue p de q, o sea que:

$$\hat{\delta}(\delta(p,a),\alpha) \in F \wedge \hat{\delta}(\delta(q,a),\alpha) \notin F$$

o viceversa. Pero entonce $\delta(p,a) \overset{k+1}{\not\equiv} \delta(q,a)$.

5. $\left(\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right) \implies \forall n \geq 0, \left(\overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}\right)$

DEMOSTRACIÓN

Lo vamos a demostrar por inducción:

Caso base:$n = 0$. Entonces $k \overset{k}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$.

Paso inductivo: Suponemos que es cierto para n, osea que vale $\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv} \implies \overset{k+n}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$

Queremos probar $\overset{k+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv} \implies \overset{k+n+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$:

Sabemos que $\overset{k+n+1}{\equiv} = \overset{k}{\equiv}$ si y solo si $\forall p, q \in Q, \left(p \overset{k}{\equiv} q \iff p \overset{k+n+1}{\equiv} q\right)$

Por la propiedad (4), tenemos:

$$\begin{aligned} p \overset{k+n+1}{\equiv} &\iff \left(p \overset{0}{\equiv} q\right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \overset{k+n}{\equiv} \delta(q,a)\right) \left(p \overset{0}{\equiv} q\right) \\ &\wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \overset{k+n}{\equiv} \delta(q,a)\right) \\ &\underset{\text{prop. }2}{\implies} \left(p \overset{0}{\equiv} q\right) \wedge \left(\forall a \in \Sigma, \delta(p,a) \overset{k}{\equiv} \delta(q,a)\right) \\ &\underset{\text{prop. }4}{\implies} p \overset{k+1}{\equiv} q \underset{\text{prop. }2}{\implies} q \overset{k}{p} \end{aligned}$$

4.2. Autómatas finito determinístico mínimo

Sea $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ un AFD sin estados inaccesibles, el AFD mínimo equivalente $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0, F'\rangle$ se define de la siguiente manera:

- $Q' = Q/\equiv$. Vamos a notar $[q]$ al estado que representa a la clase de equivalencia que contiene a q.
- $\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$
- $q_0' = [q_0]$
- $F' = \{[q] \in Q' \ :\ q \in F\}$

Teorema:

$$\forall \alpha \in \Sigma^*, \hat{\delta}(q, \alpha) = r \implies \hat{\delta}'(q'_0, \alpha) = \hat{\delta}'([q], \alpha) = [r]$$

DEMOSTRACIÓN

Va a ser por inducción en la longitud de α:

- $\alpha = \lambda$: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$, por def. de $\hat{\delta}$

  $\hat{\delta}'(q'_0, \epsilon) = \hat{\delta}'([q], \epsilon) = [q]$ por def. de $\hat{\delta}'$

  Entonces $\hat{\delta}(q, \lambda) = q \implies \hat{\delta}'([q], \lambda) = [q]$

- Paso inductivo: Sea $\alpha = \beta a$, queremos probar que $\hat{\delta}(q, \alpha) = r \implies \hat{\delta}'([q], \alpha) = [r]$.

  Nuestra hipotesis inductiva es $\forall \beta \in \Sigma^*,\ |\beta| \leq n,\ \hat{\delta}(q, \beta) = p \implies \hat{\delta}'([q], \beta) = [p]$

  Entonces:

  $$\hat{\delta}(q, \alpha) = \hat{\delta}(q, \beta a) = \delta(\hat{\delta}(q, \beta), a) = \hat{\delta}(p, a) = r \underbrace{\implies}_{\text{constr. } \delta'} \delta'([p], a) = [r] \ (1)$$

  Además, por hipotesis inductiva sabemos que $\hat{\delta}'([q], \beta) = [p]$, entonces remplazando en el último término de la ecuación (1) obtenemos:

  $$\delta'([p], \alpha) = \delta'(\hat{\delta}'([q], \beta), a) = \hat{\delta}(q, \beta a) = \hat{\delta}(q, \alpha) = [r]$$

4.3. Algoritmo de minimización de un AFD

Require: $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$

$P \leftarrow \{Q - F, F\}$ ▷ $P = \overset{0}{\equiv}$, separamos los estados finales de los no finales
$stop \leftarrow false$
while $stop = false$ **do**
  $P' \leftarrow \emptyset$
  for $X \in P$ **do** ▷ Separamos cada clase de equivalencia en las subclases de $\overset{n+1}{\equiv}$
    while $\exists e \in X : \neg\texttt{marked}(e, X)$ **do** ▷ Elegimos un nuevo representante para cada clase
      $X_1 \leftarrow \{e\}$
      $\texttt{marked}(e, X)$
      for $e' \in X : e \neq e'$ **do** ▷ Conseguimos los elementos de esa clase
        if $\neg\texttt{marked}(e', X) \wedge (\forall a \in \Sigma,\ [\delta(e, a)] = [\delta(e', a)])$ **then**
          $X_1 \leftarrow X_1 \cup \{e'\}$
          $\texttt{mark}(e', X)$

            end if
        end for
        $P' \leftarrow P' \cup \{X_1\}$
    end while
end for
if $P \neq P'$ **then**
    $P \leftarrow P'$
else
    $stop \leftarrow true$
end if
end while

Lema: Sean $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ y $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F'\rangle$ dos AFDs. Si M no poseee estados inaccesibles y todo par de cadenas que conducen a estados diferentes de M conducen a estados diferentes de M', entonces la cantidad de estados de M' es mayor o igual a la cantidad de estados de M. Es decir:

$$\left(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^*,\ \hat{\delta}(q,\alpha) \neq \hat{\delta}(q,\beta) \implies \hat{\delta}'(q_0',\alpha) \neq \hat{\delta}'(q_0',\beta)\right) \implies |Q| \leq |Q'|$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $g : Q \rightarrow \Sigma^*$ definida por $g(q) = \min\left\{\alpha \in \Sigma^* :\ \hat{\delta}(q_0,\alpha) = q\right\}$ donde suponemos una relación de orden en Σ^* dada por la longitud para cadenas de distinta longitud, y por el lexicográfico para las cadenas de igual longitud. Definamos $f : Q \rightarrow Q'$ con $f(q) = \hat{\delta}'(q_0', g(q))$.
Como para cualquier par de estados diferentes $p, q \in Q$ es cierto que $\hat{\delta}(q_0, g(p)) \neq \hat{\delta}(q_0, g(q))$, entonces $\hat{\delta}'(q_0', g(p)) \neq \hat{\delta}'(q_0', g(q))$. Lo que equivale a decir que $f(p) \neq f(q)$. Por lo tanto, f es una función inyectiva, es decir que $|Q| \leq |Q'|$.

Lema: Sea $M_R = \langle Q_R, \Sigma, \delta_R, q_{R0}, F_R\rangle$ el autómata reducido correspondiente a $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$. Entonces, cualquier autómata $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_{0'}, F'\rangle$ que reconozca el mismo lenguaje que M no poseerá menos estados que M_R. Osea:

$$\forall M',\ \mathcal{L}(M') = \mathcal{L}(M) \implies |Q'| \geq |Q_R|$$

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $\exists M'$ tal que $|Q'| < |Q_R|$, entonces según el lema anterior deben existir dos cadenas $\alpha, \beta \in \Sigma^*$ tales que

$$\hat{\delta_R}(q_0, \alpha) \neq \hat{\delta_R}(q_0, \beta) \wedge \hat{\delta}'(q_0', \alpha) = \hat{\delta}'(q_0', \beta)$$

Pero entonces, como $\hat{\delta_R}(q_0, \alpha)$ y $\hat{\delta_R}(q_0, \beta)$ son estados diferentes, entonces $\hat{\delta}(q_0, \alpha)$ y $\hat{\delta}(q_0, \beta)$ son estados distinguibles por pertenecer al autómata reducido M_R entonces $\exists \gamma \in \Sigma^*$ tal que:

$$\hat{\delta}(q_0, \alpha\gamma) \in F \wedge \hat{\delta}(q_0, \beta\gamma) \notin F$$

o viceversa. Entonces $\alpha\gamma \in \mathcal{L}(M_R) \iff \beta\gamma \notin \mathcal{L}(M_R)$.
Por otro lado, como $\hat{\delta}'(q_0', \alpha) = \hat{\delta}'(q_0', \beta)$, es obvio que

$$\hat{\delta}'(q_0', \alpha\gamma) \in F \wedge \hat{\delta}'(q_0', \beta\gamma) \in F$$

o ninguno de los dos perteneces a F. De esto se inifiere que $\alpha\gamma \in \mathcal{L}(M') \iff \beta\gamma \in \mathcal{L}(M')$.
Pero entonces, como $\mathcal{L}(M') \neq \mathcal{L}(M)$, lo que contradice nuestra hipotesis inicial. f

5. Lenguajes regulares y lema de pumping

5.1. Lema de pumping

Propiedad: Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje regular, si las longitudes de las cadenas de un lenguaje $\mathcal{L}$ están acotadas superiormente, entonces $\mathcal{L}$ tiene que ser finito.

Propiedad: Si $\mathcal{L}$ es un luenguaje regular infinito, entonces el grafo de un autómata fínito que acepte $\mathcal{L}$ tiene que tener un camino desde el estado inicial hasta algún estado final que paso por algún ciclo.

Lema de pumping: Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje regular, si $\mathcal{L}$ es infinito, entonces todas las cadenas ω de longitud mayor o igual a n (para algún $n > 1$) van a ser de la forma $\omega = xy^iz$, estext decir hay una parte de ω que se repite i cantidad de veces:

$$\mathcal{L} \text{ es regular e infinito } \implies \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que}$$
$$\forall \omega \in \mathcal{L},\ |\omega| \geq n : \big(\exists x, y, z \in \Sigma^* : \omega = xyz \wedge |xy| \leq n \wedge |z| \geq 1 \wedge (\forall i \geq 0 :\ xy^iz \in \mathcal{L}\big)$$

DEMOSTRACIÓN

Supongamos que $\mathcal{L}$ es un lenguaje regular. Entonces existe una AFD $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ que acepta $\mathcal{L}$.
Sea $n = |Q|$ la cantidad de estados de A y $\omega = a_1a_2\dots a_m \in \Sigma^*$ de longitud $m > n$. Para cada $i = 0, \dots, m$ definamos el estado $p_i = \hat{\delta}(q_0, a_1 \dots a_i)$ (el estado en el que se encuentra A después de haber consumido los primeros i símbolos de ω.
Como el A solo tiene n estados pero hay $m > n$ estados p, poes imposible que todos los p sean distintos. Por lo tanto, existen $0 \leq i < j \leq n$ tales que $p_i = p_j$.
Considerar entonces la siguiente descomposición para $\omega = xyz$:

$x = a_1 \dots a_i$

$y = a_{i+1} \dots a_j$

$z = a_{j+1} \dots a_m$

Entonces podemos concluir que:

$\hat{\delta}(q_0, x) = p_j$

$\hat{\delta}(p_i, y) = p_j$ (que como son el mismo estado implica que A tiene un ciclo)

$\hat{\delta}(p_j, z) = p_m$

Observar que x podría ser la cadena cuando $i = 0$, z podría ser vacía si $j = n = m$, pero y no puede ser vacía ya que se tomó $i < j$.
Vimos entonces que si $\mathcal{L}$ es regular y $|\omega| \geq n$ entonces podemos dividirla en cadenas x, y, z tal que $|xy| \leq n$ y $|z| \geq 1$. Ahora vamos a ver que si $xyz \in \mathcal{L}$ entonces $xy^k z \in \mathcal{L}$ para todo $k \geq 0$.

- Si $k = 0$ entonces $xy^0 z = xz$:

  $$\hat{\delta}(q_0, xz) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), z) = \hat{\delta}(p_i, z) = \hat{\delta}(p_j, z) = p_m$$

  Y p_m es un estado final pues es el mismo estado al que llegamos si la entrada fuese $xyz \in \mathcal{L}$. Entonces $xz = xy^0 z \in \mathcal{L}$.

- Si $i > 0$. Entonces A consume x desde q_0 y llega hasta p_i. Luego A consume y desde p_i y llega hasta p_j (que son iguales) y repite este ciclo k veces hasta consumir todas las apariciones de y en la cadena. Finalmente A consume z desde p_j y llega hasta p_m. Entonces A llega a un estado final y por lo tanto $xy^k z \in \mathcal{L}$.

Contrarecíproco:

$\forall n \in \mathbb{N} \exists \omega \in \mathcal{L}$ tal que $|\omega| \geq n \wedge \forall x, y, z \in \Sigma^* : \omega \neq xyz \wedge |xy| \geq n \vee |z| \leq 1 \vee \exists i \geq 0,\ xy^i z \notin \mathcal{L}$
$\implies \mathcal{L}$ no es regular