

## 4η Εργαστηριακή Άσκηση

Ονοματεπώνυμο: Γεώργιος Γιάτσος

ΑΜ: 3202

Μάθημα: Θεωρία Γραφημάτων

Διδάσκων: Ιωσήφ Πολενάκης

### 1η Άσκηση

Έστω  $G$  ένα μη κατευθυνόμενο άκυκλο γράφημα και έστω  $H$  ένα συνεκτικό υπογράφημα του  $G$ . Πρέπει να δείξουμε ότι το  $H$  είναι ένα επαγόμενο υπογράφημα του  $G$ .

Ας υποθέσουμε για λόγους αντίφασης ότι το  $H$  δεν είναι επαγόμενο υπογράφημα του  $G$ . Τότε θα πρέπει να υπάρχει μια κορυφή  $u$  στο  $G$  που δεν είναι στο  $H$ , αλλά τέτοια ώστε όλοι οι γείτονες της  $u$  στο  $G$  να είναι στο  $H$ . Έστω  $V(H)$  που συμβολίζει το σύνολο των κορυφών του  $H$ . Επειδή το  $G$  είναι άκυκλο, υπάρχει μονοπάτι  $P$  από το  $u$  σε κάποια κορυφή  $v$  στο  $V(H)$ . Έστω  $w$  η πρώτη κορυφή στο  $V(H)$  που συναντάμε κατά μήκος του  $P$ . Αφού το  $H$  είναι συνεκτικό, όλες οι κορυφές στο μονοπάτι  $P$  μεταξύ  $u$  και  $w$  πρέπει να είναι στο  $H$ . Έστω  $x$  η πρώτη κορυφή στο  $P$  μετά την  $w$  που δεν είναι στο  $H$ . Αφού όλοι οι γείτονες του  $u$  στο  $G$  είναι στο  $H$ , και το  $x$  είναι γείτονας του  $w$ , προκύπτει ότι το  $x$  επίσης δεν είναι στο  $H$ . Εξετάζοντας το μονοπάτι  $Q$  από το  $x$  στο  $w$  στο  $G$ , αφού το  $G$  είναι άκυκλο, τότε το  $Q$  πρέπει να περνάει από κάποια κορυφή  $y$  στο  $V(H)$ . Ωστόσο, αφού το  $x$  δεν είναι στο  $H$  και το  $y$  είναι στο  $H$ , προκύπτει ότι υπάρχει μια ακμή μεταξύ του  $x$  και του  $y$  στο  $G$  που δεν είναι στο  $H$ . Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι το  $H$  είναι ένα συνεκτικό υπογράφημα του  $G$ . Επομένως, συμπεραίνουμε ότι κάθε συνεκτικό υπογράφημα του  $G$  είναι ένα επαγόμενο υπογράφημα του  $G$ .

### 2η Άσκηση

Για να αποδείξουμε ότι το γράφημα  $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$  είναι συνεκτικό, πρέπει να δείξουμε ότι μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους κορυφών στο  $(V_1 \cap V_2)$ , υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι.

Έστω  $u$  και  $v$  δύο κορυφές στο  $(V_1 \cap V_2)$ . Εφόσον αυτές οι κορυφές υπάρχουν τόσο στο  $G_1$  όσο και στο  $G_2$ , υπάρχουν μονοπάτια  $p_1$  μεταξύ τους στο  $G_1$  και  $p_2$  μεταξύ τους στο  $G_2$ . Εφόσον οι κορυφές  $u$  και  $v$  βρίσκονται στο  $(V_1 \cap V_2)$ , οι ακμές που ανήκουν στα μονοπάτια  $p_1$  και  $p_2$  ανήκουν επίσης στο  $E_1 \cap E_2$ . Επομένως, υπάρχει μονοπάτι από την κορυφή  $u$  στην κορυφή  $v$  στο γράφημα  $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ , που σημαίνει ότι είναι συνεκτικό. Άρα δείξαμε ότι αν τα  $G_1$  και  $G_2$  έχουν κοινές κορυφές, το γράφημα  $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$  θα είναι συνεκτικό.

### 3<sup>η</sup> Άσκηση

Αρχικά, δημιουργώ τη συνάρτηση encoding με την οποία μετατρέπω το μήνυμα σε μία λίστα με δεκαεξαδικές αναπαραστάσεις (επέλεξα αυτόν τον τύπο encoding) κάθε χαρακτήρα της συμβολοσειράς του μηνύματος. Έπειτα, στη συνάρτηση encryption κρυπτογραφώ τη λίστα με τις δεκαεξαδικές αναπαραστάσεις με τη μέθοδο της ολίσθησης κατά ένα κλειδί. Στη συνάρτηση decryption γίνεται η αποκρυπτογράφηση της λίστας κατά το αντίστροφο του κλειδιού. Ενώ, η συνάρτηση decoding επιστρέφει το αρχικό μας μήνυμα, μετατρέποντας τους δεκαεξαδικούς χαρακτήρες της λίστας στους αντίστοιχους χαρακτήρες. Στη συνέχεια, ορίζω το μήνυμα σύμφωνα με την εκφώνηση της άσκησης και επιλέγω το κλειδί της κρυπτογράφησης. Εκτελώ μία-μία τις συναρτήσεις και εκτυπώνω τα αποτελέσματα κάθε συνάρτησης. Τέλος, εξάγω τις ακμές του γραφήματος από το αποκρυπτογραφημένο μήνυμα αφού χωρίζω τις λέξεις, αφαιρώ τις αγκύλες και το ερωτηματικό και κρατάω μόνο τις λέξεις που περιέχουν την παύλα. Δημιουργώ το γράφημά μου προσθέτοντας τις ακμές στο γράφημα με βάση το αποκρυπτογραφημένο μήνυμα.

Τα αποτελέσματα των prints και το τελικό γράφημα από το αποκωδικοποιημένο μήνυμα:

```
Message: [Alpha-Charlie]; [Alpha-Golf]; [Bravo-Delta]; [Delta-Alpha]; [Delta-Echo]; [Echo-Fox]; [Echo-Hotel];
Encoded message: ['5b', '41', '6c', '70', '68', '61', '2d', '43', '68', '61', '72', '6c', '69', '65', '5d', '3b', '20', '5b', '41', '6c', '70', '68', '61', '2d', '47', '6f', '6c', '66', '5d', '3b', '20', '5b', '42', '72', '61', '76', '6f', '2d', '44', '65', '6c', '74', '61', '5d', '3b', '20', '5b', '44', '65', '6c', '74', '61', '2d', '41', '6c', '70', '68', '61', '5d', '3b', '20', '5b', '44', '65', '6c', '74', '61', '2d', '45', '63', '68', '6f', '5d', '3b', '20', '5b', '45', '63', '68', '6f', '2d', '46', '6f', '78', '5d', '3b', '20', '5b', '45', '63', '68', '6f', '2d', '48', '6f', '74', '65', '6c', '5d', '3b']
Encrypted message: ['62', '48', '73', '77', '6f', '68', '34', '4a', '6f', '68', '79', '73', '70', '6c', '64', '42', '27', '62', '48', '73', '77', '6f', '68', '34', '4e', '76', '73', '6d', '64', '42', '27', '62', '49', '79', '68', '7d', '76', '34', '4b', '6c', '73', '7b', '68', '64', '42', '27', '62', '4b', '6c', '73', '7b', '68', '34', '48', '73', '77', '6f', '68', '64', '42', '27', '62', '4b', '6c', '73', '7b', '68', '34', '4c', '6a', '6f', '76', '64', '42', '27', '62', '4c', '6a', '6f', '76', '34', '4f', '76', '7b', '6c', '73', '64', '42']
Decrypted message: ['5b', '41', '6c', '70', '68', '61', '2d', '43', '68', '61', '72', '6c', '69', '65', '5d', '3b', '20', '5b', '41', '6c', '70', '68', '61', '2d', '47', '6f', '6c', '66', '5d', '3b', '20', '5b', '42', '72', '61', '76', '6f', '2d', '44', '65', '6c', '74', '61', '5d', '3b', '20', '5b', '44', '65', '6c', '74', '61', '2d', '41', '6c', '70', '68', '61', '5d', '3b', '20', '5b', '44', '65', '6c', '74', '61', '2d', '45', '63', '68', '6f', '5d', '3b', '20', '5b', '45', '63', '68', '6f', '2d', '46', '6f', '78', '5d', '3b', '20', '5b', '45', '63', '68', '6f', '2d', '48', '6f', '74', '65', '6c', '5d', '3b']
Decoded message: [Alpha-Charlie]; [Alpha-Golf]; [Bravo-Delta]; [Delta-Alpha]; [Delta-Echo]; [Echo-Fox]; [Echo-Hotel];
```

