

6η Εργαστηριακή Άσκηση

Ονοματεπώνυμο: Γεώργιος Γιάτσος

ΑΜ: 3202

Μάθημα: Θεωρία Γραφημάτων

Διδάσκων: Ιωσήφ Πολενάκης

1^η Άσκηση

Γνωρίζουμε ότι ένα επίπεδο γράφημα με 6 κορυφές και 12 ακμές είναι επίπεδο, επειδή μπορεί να σχεδιαστεί σε ένα επίπεδο χωρίς να διασταυρώνονται ακμές. Σύμφωνα με τον τύπο του Euler, έχουμε:

$$n + r = m + 2$$

Δεδομένου ότι το γράφημα έχει 6 κορυφές και 12 ακμές, έχουμε $n = 6$ και $m = 12$. Επομένως:

$$6 - 12 + r = 2 \Rightarrow r = 8$$

Αυτό σημαίνει ότι το γράφημα έχει 8 περιοχές, συμπεριλαμβανομένης της εξωτερικής περιοχής.

Το Handshake Lemma για επίπεδους γράφους δηλώνει ότι το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών σε έναν επίπεδο γράφο είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών του γράφου. Μαθηματικά, αυτό μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$\sum \deg(v) = 2e$, όπου $\sum \deg(v)$ δηλώνει το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών στο γράφημα και e δηλώνει τον αριθμό των ακμών στο γράφημα.

Εφόσον το γράφημα είναι επίπεδο, κάθε κορυφή έχει βαθμό 2. Επομένως, το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών του γραφήματος είναι:

$$\sum \deg(v) = 2v = 12$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $\sum \deg(v)$ και e στο Λήμμα Χειραψίας για επίπεδους γράφους, έχουμε:

$$12 = 2e, \text{ και άρα } e = 6.$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε περιοχή στο γράφημα περικλείεται από έναν κύκλο 3 ακμών (δεδομένου ότι το γράφημα είναι κανονικό 2ου βαθμού, κάθε κύκλος στο γράφημα πρέπει να είναι τρίγωνο). Επομένως, δείξαμε ότι σε ένα επίπεδο γράφημα με 6 κορυφές και 12 ακμές κάθε περιοχή του περικλείεται από 3 ακμές χρησιμοποιώντας το Λήμμα Χειραψίας για επίπεδα γραφήματα.

4^η Άσκηση

Σε ένα συνεκτικό και επίπεδο γράφημα ισχύει ο τύπος του Euler:

$$n + r = m + 2, (1).$$

Έστω ότι για κάθε περιοχή r του G ισχύει $d(r) \geq 6$. Δεδομένου ότι κάθε κορυφή στο G έχει βαθμό 3, αυτό σημαίνει ότι κάθε ακμή στο G είναι γειτονική με τουλάχιστον δύο περιοχές. Αφού λοιπόν κάθε περιοχή έχει βαθμό τουλάχιστον 6 τότε ισχύει:

$$2m \geq 6r, (2).$$

Επίσης, επειδή κάθε κορυφή στο G έχει βαθμό 3 έχουμε:

$$3n = 2m, (3).$$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (1) παίρνουμε:

$$r = m/3 + 2, (4).$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (2) έχουμε:

$$2m \geq 2m + 12.$$

Ατοπο. Συνεπώς, πρέπει να υπάρχει μια περιοχή στο G με λιγότερες από 6 ακμές στο σύνολό της.

5^η Άσκηση

Για να αποδείξουμε ότι ένα επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνα έχει το πολύ $2n-4$ ακμές, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Euler για επίπεδα γραφήματα:

$$n + r = m + 2, (1)$$

Επειδή, το γράφημα είναι επίπεδο και δεν έχει τρίγωνα, κάθε περιοχή πρέπει να έχει τουλάχιστον τέσσερις κορυφές. Άρα, ισχύει ότι:

$$4r \leq 2m \Rightarrow m \geq 2r.$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα, μπορούμε να εξάγουμε ένα ανώτερο όριο για την (1),

$$m = n + r - 2 \leq n + (m/2) - 2,$$

$$\Rightarrow m \leq 2n - 4.$$

Συνεπώς, κάθε επίπεδο γράφημα χωρίς τρίγωνα έχει το πολύ $2n - 4$ ακμές.

6^η Άσκηση

Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε ένα επίπεδο γράφημα είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών. Επομένως, στο G , έχουμε:

$$3n = 2m \Rightarrow m = 3n/2, (1)$$

Έστω r το σύνολο των περιοχών του G . Θεωρούμε δυικό γράφημα G^* του G που έχει μία κορυφή για κάθε περιοχή r του G , και μία ακμή μεταξύ δύο κορυφών εάν και μόνο εάν οι αντίστοιχες περιοχές στο G μοιράζονται μία ακμή. Δεδομένου ότι το G είναι ένα επίπεδο γράφημα, έχει πεπερασμένο αριθμό περιοχών. Επιπλέον, αφού κάθε ακμή του G μοιράζεται από ακριβώς δύο περιοχές, κάθε κορυφή του δυικού γράφου προσπίπτει σε ακριβώς τρεις ακμές. Έστω τώρα r^* ο αριθμός των πεπερασμένων περιοχών στο δυικό γράφημα του G . Από το λήμμα χειραγίας γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των κορυφών στο δυικό γράφημα είναι ίσο με το διπλάσιο του αριθμού των ακμών. Κι επειδή κάθε κορυφή στο διπλό γράφημα έχει βαθμό 3 έχουμε:

$$3r^* = 2m.$$

Από την (1) όμως παίρνουμε:

$$3r^* = 3n \text{ ή ισοδύναμα } r^* = n.$$

Επομένως, ο αριθμός των πεπερασμένων περιοχών στο δυικό γράφημα του G είναι ίσος με τον αριθμό των κορυφών του G . Επειδή όμως κάθε κορυφή του G έχει βαθμό 3, ξέρουμε ότι το n πρέπει να είναι περιττό, αφού το άθροισμα των βαθμών των κορυφών σε ένα γράφημα είναι πάντα άρτιο. Επομένως, ο αριθμός των πεπερασμένων περιοχών στο δυικό γράφημα G^* του G είναι επίσης περιττός.