<u>7η Εργαστηριακή Άσκηση</u>

Ονοματεπώνυμο: Γεώργιος Γιάτσος
ΑΜ: 3202
Μάθημα: Θεωρία Γραφημάτων
Διδάσκων: Ιωσήφ Πολενάκης

<u>1η Άσκηση</u>

Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι:

➔ Οι περιοχές ενός επίπεδου γραφήματος δε μπορούν να χρωματιστούν με 2 χρώματα αν και μόνο αν υπάρχει κορυφή περιττού βαθμού.

Επομένως, για το παράδειγμά μας σε επίπεδο γράφημα με 9 κορυφές και 17 ακμές του οποίου κάθε κορυφή έχει βαθμό τουλάχιστον 3, αρκεί να δείξουμε ότι περιέχει αναγκαστικά μια τουλάχιστον κορυφή περιττού βαθμού. Έστω ότι κάθε κουφή του γραφήματος έχει βαθμό τουλάχιστον 4. Τότε για το γράφημά μας θα πρέπει να έχει 9*4/2 = 18 ακμές, κάτι που δεν ισχύει από την υπόθεση και άρα είναι άτοπο. Συνεπώς, αποδεικνύεται το ζητούμενο της άσκησης.

<u>3η Άσκηση</u>

Α) Έστω ότι στο γραμμικό γράφημα της άσκησης δεν υπάρχει κορυφή με βαθμό ≤ 4. Τότε έχουμε:

$$\deg(v) \geq 5 \ \forall v \Longrightarrow$$

$$\sum \deg(v) \geq 5v \Longrightarrow 2e \geq 5v \Longrightarrow v \leq 2e/5, \ (1).$$

Από την εξίσωση του Euler για επίπεδα γραφήματα έχουμε: $r = e - v + 2$, και αντικαθιστώντας από την (1) παίρνουμε:

$$r \geq e - 2e/5 + 2 \Longrightarrow r \geq 3e/5 + 2, \ (2)$$

Επειδή όμως το γράφημά μας είναι γραμμικό, κάθε περιοχή του περικλείεται από τουλάχιστον 3 ακμές και επομένως έχουμε:

$$3r \leq 2e \Longrightarrow r \leq 2e/3, \ (3)$$

Από τις εξισώσεις (2) και (3) έχουμε:

$$2e/3 \geq r \geq 3e/5 + 2 \Longrightarrow$$

$$10e \geq 9e + 30 \Longrightarrow$$

$$e \geq 30.$$

Σύμφωνα με το παραπάνω αποτέλεσμα το γράφημά μας θα πρέπει να έχει τουλάχιστον 30 ακμές, κάτι που είναι αντίθετο με την υπόθεση της άσκησης και άρα αποδεικνύεται ότι ένα γραμμικό επίπεδο γράφημα με λιγότερες από 30 ακμές έχει μια κορυφή βαθμού το πολύ 4.

Β) Από τη θεωρία γνωρίζουμε για το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων ότι:

- ➔ Οποιοδήποτε επίπεδο γράφημα μπορεί να χρωματιστεί με τέσσερα χρώματα με τέτοιο τρόπο ώστε καμία από τις δύο γειτονικές κορυφές να μην μοιράζεται το ίδιο χρώμα.

Επίσης, ένα γραμμικό επίπεδο γράφημα κατασκευάζεται ξεκινώντας από μία κορυφή και προσθέτοντας ακμές με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε νέα ακμή να συνδέεται με μία υπάρχουσα κορυφή ώστε να μην δημιουργείται κύκλος. Επιπλέον, δεδομένου ότι ένας κύκλος χρειάζεται τουλάχιστον 3 ακμές, ένα γράφημα με λιγότερες από 30 ακμές δεν μπορεί να περιέχει περισσότερες από 10 κορυφές, αφού κάθε κορυφή μπορεί να έχει το πολύ 3 ακμές. Άρα, κάθε γραμμικό επίπεδο γράφημα με λιγότερες από 30 ακμές πρέπει να έχει μέγιστο βαθμό 3 ή λιγότερο. Τέλος από τη θεωρία ξέρουμε ότι κάθε επίπεδο γράφημα με μέγιστο βαθμό 3 ή λιγότερο μπορεί να χρωματιστεί με το πολύ 4 χρώματα.

<u>4η Άσκηση</u>

Από την υπόθεση για επίπεδο γράφημα με περιοχές $r \leq 12$ περιοχές, και κάθε κορυφή του να έχει βαθμό τουλάχιστον 3 έχουμε:

$$\deg(v) \geq 3 \ \forall \ v \Longrightarrow 2e \geq 3v, \ (1)$$

Αν υποθέσουμε διαφορετικά ότι κάθε περιοχή του γραφήματος περικλείεται από τουλάχιστον 5 ακμές, τότε θα ισχύει $5r \leq 2e$ (2). Από τη (2) και γνωρίζοντας ότι το γράφημα είναι επίπεδο, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler παίρνουμε:

$$r + v = e + 2 \Longrightarrow$$

$$e - v + 3 < 12 \Longrightarrow$$

$$e - 10 < v \leq 2/3e \Longrightarrow$$

$$e < 30, \ (3).$$

Από την (1) και τον τύπο του Euler όμως:

$$r + v = e + 2 \Longrightarrow$$

$$r \geq e - 2e/3 + 2 \Longrightarrow$$

$$r \geq e/3 + 2$$

και με τη (2) γίνεται:

$$2e/5 \geq r \geq e/3 + 2 \Longrightarrow$$

$$e \geq 30, \ (4).$$

Συγκρίνοντας τις (3) και (4) καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα υπάρχει περιοχή του γραφήματος που περικλείεται από 4 το πολύ ακμές.

Από το παραπάνω συμπέρασμα, πως υπάρχει περιοχή του γραφήματος που περικλείεται από 4 το πολύ ακμές, συμπεραίνουμε επίσης ότι το δυικό γράφημα του επίπεδου γραφήματός μας έχει τουλάχιστον μια κορυφή που έχει βαθμό το πολύ 4. Από τη θεωρία, το γράφημα αυτό χρωματίζεται με 4 χρώματα και κατά συνέπεια οι περιοχές του αρχικού γραφήματος χρωματίζονται και αυτές με 4 χρώματα.