<u>3η Εργαστηριακή Άσκηση</u>

Ονοματεπώνυμο: Γεώργιος Γιάτσος
AM: 3202
Μάθημα: Θεωρία Γραφημάτων
Διδάσκων: Ιωσήφ Πολενάκης

<u>1η Άσκηση</u>

Μπορούμε να το αποδείξουμε αυτό χρησιμοποιώντας την έννοια των κυκλωμάτων Euler. Ένα κύκλωμα Euler είναι ένα κύκλωμα που διέρχεται από κάθε ακμή ενός γραφήματος ακριβώς μία φορά. Αν ένα γράφημα έχει ένα κύκλωμα Euler, τότε πρέπει να έχει ζυγό αριθμό περιττών κορυφών, αφού κάθε κορυφή συνεισφέρει έναν περιττό βαθμό στο άθροισμα των βαθμών, και το άθροισμα των βαθμών πρέπει να είναι ζυγό, ώστε να υπάρχει κύκλωμα Euler. Ωστόσο, αν ένα γράφημα έχει περιττό αριθμό περιττών κορυφών, τότε δεν μπορεί να έχει κύκλωμα Euler. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε μέσω αντίφασης:

- ➔ Έστω ότι ένα γράφημα με περιττό αριθμό περιττών κορυφών έχει κύκλωμα Euler. Από τη στιγμή που το κύκλωμα επισκέπτεται κάθε κορυφή ακριβώς δύο φορές, ο αριθμός των περιττών κορυφών πρέπει να είναι ζυγός, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την αρχική μας υπόθεση.

Έτσι, αν ένα συνδεδεμένο γράφημα G έχει $2k$ περιττές κορυφές, δεν μπορεί να έχει κύκλωμαEuler. Ωστόσο, μπορούμε και πάλι να χωρίσουμε το σύνολο E σε k υποσύνολα έτσι ώστε κάθε υποσύνολο να συνδέει δύο περιττές κορυφές.

Για να το κάνουμε αυτό, ξεκινάμε επιλέγοντας οποιαδήποτε περιττή κορυφή του γραφήματος και διασχίζουμε το γράφημα από την εν λόγω κορυφή, σημειώνοντας κάθε ακμή που συναντάμε. Δεδομένου ότι το γράφημα έχει περιττό αριθμό περιττών κορυφών, τελικά θα φτάσουμε σε μια άλλη περιττή κορυφή που είναι διαφορετική από την πρώτη που επιλέξαμε. Σε αυτό το σημείο, έχουμε ένα σύνολο σημειωμένων ακμών που συνδέουν τις δύο περιττές κορυφές.

Στη συνέχεια, αφαιρούμε όλες τις σημειωμένες ακμές από το γράφημα και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, επιλέγοντας μια άλλη μη σημειωμένη περιττού βαθμού κορυφή και συνδέοντάς την με μια διαφορετική μη σημειωμένη περιττού βαθμού κορυφή. Συνεχίζουμε έως ότου όλες οι περιττές κορυφές συνδεθούν μεταξύ τους.

Εφόσον, έχουμε $2k$ περιττές κορυφές, θα εκτελέσουμε αυτή τη διαδικασία k φορές και κάθε φορά θα σημειώνουμε ένα σύνολο ακμών που συνδέουν δύο περιττές κορυφές. Επομένως, μπορούμε να χωρίσουμε το σύνολο E σε k υποσύνολα, όπου κάθε υποσύνολο αποτελείται από τις ακμές που σημειώνονται κατά τη διάρκεια μιας επανάληψης της διαδικασίας. Κάθε υποσύνολο συνδέει δύο περιττές κορυφές, όπως είναι επιθυμητό.

Έτσι, δείξαμε ότι αν ένας συνδεδεμένο γράφημα G έχει $2k$ περιττές κορυφές, τότε το σύνολο E μπορεί να χωριστεί σε k υποσύνολα, έτσι ώστε οι ακμές σε κάθε υποσύνολο να αποτελούν ίχνος μεταξύ δύο περιττών κορυφών.

2η Άσκηση

Για να αποδείξουμε ότι ένα γράφημα είναι γράφημα Euler αν και μόνο αν είναι συνδεδεμένο και αν το σύνολο των ακμών του μπορεί να διαιρεθεί σε ένωση ανεξάρτητων κύκλων, πρέπει να αποδείξουμε δύο υποθέσεις:

Α) Αν ένα γράφημα είναι γράφημα Euler, τότε είναι συνδεδεμένο και οι ακμές του μπορούν να διαιρεθούν σε ένωση ανεξάρτητων κύκλων.

Β) Αν ένα γράφημα είναι συνδεδεμένο και οι ακμές του μπορούν να διαιρεθούν σε ένωση ανεξάρτητων κύκλων, τότε είναι γράφημα Euler.

Α. Αρχικά θεωρούμε ένα γράφημα Gότι είναι γράφημα Euler. Εξ ορισμού, το G έχει ένα κύκλωμα Euler, το οποίο είναι ένα κύκλωμα που διέρχεται από κάθε ακμή του G ακριβώς μία φορά. Εφόσον το κύκλωμα είναι κλειστό μονοπάτι, πρέπει να ξεκινά και να καταλήγει στην ίδια κορυφή και κάθε κορυφή του γραφήματος πρέπει να διατρέχεται από το κύκλωμα. Συνεπώς, το G είναι συνδεδεμένο.

Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι το σύνολο των ακμών στο G μπορεί να χωριστεί σε μια ένωση ανεξάρτητων κύκλων. Για την απόδειξη, σημειώνουμε ότι το κύκλωμα Euler μπορεί να υποδιαιρεθεί σε μια συλλογή κύκλων, καθένας από τους οποίους διατρέχεται προς μια μόνο κατεύθυνση. Μπορούμε στη συνέχεια να αφαιρέσουμε καθέναν από αυτούς τους κύκλους από το γράφημα και να μείνουμε με ένα νέο γράφημα στο οποίο κάθε κορυφή εξακολουθεί να έχει ζυγό βαθμό. Αυτό το νέο γράφημα πρέπει επίσης να είναι συνδεδεμένο, αφού η αφαίρεση ενός κύκλου δεν μπορεί να αποσυνδέσει το γράφημα. Μπορούμε να επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία, αφαιρώντας έναν κύκλο κάθε φορά, μέχρι να αφαιρεθούν όλες οι ακμές. Σε κάθε βήμα, το σύνολο των ακμών που αφαιρούμε σχηματίζει έναν κύκλο που είναι ανεξάρτητος από όλους τους άλλους κύκλους που έχουμε αφαιρέσει. Επομένως, δείξαμε ότι το σύνολο των ακμών του G μπορεί να χωριστεί σε μια ένωση ανεξάρτητων κύκλων.

Β. Σε αυτήν την περίπτωση υποθέτουμε ότι ένα γράφημα G είναι συνδεδεμένο και οι ακμές του μπορούν να διαιρεθούν σε μία ένωση ανεξάρτητων κύκλων. Έστω C οποιοσδήποτε από αυτούς τους κύκλους. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κύκλωμα Euler για το G ως εξής:

Ξεκινώντας από οποιαδήποτε κορυφή του C, διασχίζουμε το C προς μία κατεύθυνση μέχρι να επιστρέψουμε στην αρχική κορυφή. Εφόσον το C είναι κύκλος, θα επισκεφθούμε κάθε κορυφή του C ακριβώς μία φορά. Στη συνέχεια επιλέγουμε οποιονδήποτε άλλο κύκλο από τη διάσπαση του G και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, ξεκινώντας και καταλήγοντας σε μια κορυφή που είναι διαφορετική από την αρχική κορυφή του πρώτου κύκλου. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο, επιλέγοντας κάθε φορά έναν νέο κύκλο, μέχρι να διατρέξουμε κάθε κύκλο της αποδόμησης του G. Σε αυτό το σημείο, θα έχουμε διασχίσει κάθε ακμή στο G ακριβώς μία φορά και θα έχουμε επιστρέψει στην αρχική μας κορυφή. Επομένως, το G είναι ένα γράφημα Euler.

Συνοψίζοντας, αφού αποδείξαμε και τις δύο προτάσεις, δείξαμε ότι ένα γράφημα είναι γράφημα Euler αν και μόνο αν είναι συνδεδεμένο και αν το σύνολο των ακμών του μπορεί να διαιρεθεί σε ένωση ανεξάρτητων κύκλων.

3η Άσκηση

Για την απόδειξη αυτού του ερωτήματος θα χρησιμοποιήσουμε μαθηματική επαγωγή.

Βασική περίπτωση: Όταν n = 3, η μόνη δυνατή ακολουθία βαθμών είναι η (1, 1, 2) και το γράφημα με αυτή την ακολουθία βαθμών είναι ένας κύκλος μήκους 3, ο οποίος είναι κύκλος Hamilton. Συνεπώς, η υπόθεση είναι αληθής για n = 3.

Επαγωγική υπόθεση: Υποθέτουμε ότι η δήλωση είναι αληθής για όλα τα n ≤ k, όπου k≥ 3.

Επαγωγικό βήμα: Θέλουμε να δείξουμε ότι η δήλωση είναι αληθής για n = k + 1. Έστω *G* ένα γράφημα με n = k + 1 κορυφές και ακολουθία βαθμών d1, d2, ..., dk+1, που ικανοποιεί τις συνθήκες της δήλωσης.

Εξετάζουμε το υπογράφημα *H* του *G* που προκύπτει αφαιρώντας την κορυφή dk+1 και όλες τις προσπίπτουσες ακμές της. Ο *H* έχει k κορυφές και ακολουθία βαθμών d1, d2, ..., dk, η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες της δήλωσης. Σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, ο *H* είναι κύκλος Hamilton, δηλαδή έχει έναν κύκλο Hamilton *C*.

Έπειτα, προσθέτουμε την κορυφή dk+1 πίσω στο *G*. Αφού dk+1>k, υπάρχει μια κορυφή v στο *C* έτσι ώστε η v να είναι γειτονική με την dk+1 (αλλιώς, το *C* θα ήταν ένας κύκλος Hamilton του *H*, και θα μπορούσαμε να τον επεκτείνουμε σε κύκλο Hamilton του *G* προσθέτοντας την dk+1). Έστω w η κορυφή στο *C* αμέσως πριν από την v, και έστω u η κορυφή στο *C* αμέσως μετά την v (στην κυκλική σειρά των κορυφών στο *C*).

Ισχυριζόμαστε ότι το μονοπάτι από το w στο u στο *C*, μαζί με τις ακμές {v, w} και {v, u}, σχηματίζει έναν Hamilton κύκλο στο *G*. Αυτό συμβαίνει επειδή:

- ➔ Το μονοπάτι από το w στο u στο *C* επισκέπτεται όλες τις κορυφές του *G* εκτός από το dk+1.
- ➔ Η ακμή {v, w} συνδέει την dk+1 με τον κύκλοHamilton.
- ➔ Η ακμή {v, u} δεν δημιουργεί κανέναν κύκλο αφού οι w και u είναι ήδη γειτονικές στο *C*.

Επομένως, το *G* έχει έναν κύκλο Hamilton και η δήλωση είναι αληθής για $n = k + 1$. Με μαθηματική επαγωγή, η δήλωση είναι αληθής για όλα τα $n \geq 3$.

4η Άσκηση

Για να το αποδείξουμε το πρώτο μέρος του ερωτήματος, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Ore, το οποίο δηλώνει ότι:

➔ Αν ένα γράφημα *G* έχει n κορυφές και για κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών u και v, το άθροισμα των βαθμών τους είναι τουλάχιστον n, τότε το *G* είναι Χαμιλτονιανό.

Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Ore, πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών u και v στο *G*, το άθροισμα των βαθμών τους είναι τουλάχιστον n.

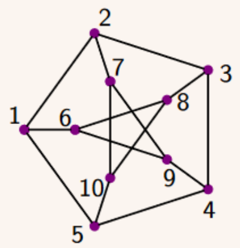
Έστω u και v δύο μη γειτονικές κορυφές στο *G*. Τότε υπάρχουν το πολύ n-2 κορυφές που είναι γειτονικές τόσο με την u όσο και με την v, αφού αν υπήρχαν περισσότερες, τότε το *G* θα περιείχε ένα Χαμιλτονιανό κύκλο που θα περιείχε την u, την v και αυτούς τους κοινούς γείτονες. Επομένως, το άθροισμα των βαθμών των u και v είναι τουλάχιστον $(n-2) + (n-2) = 2n-4$. Εφόσον έχουμε m ακμές στο *G*, το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών στο *G* είναι 2m. Επομένως, ο μέσος βαθμός των κορυφών στο *G* είναι 2m/n. Από την ανισότητα στη δήλωση του προβλήματος, έχουμε:

$m \geq (((n-1)(n-2))/2)+2$, το οποίο συνεπάγεται με $2m/n >= n-1$.

Έτσι, ο μέσος βαθμός των κορυφών στο *G* είναι τουλάχιστον n-1, που σημαίνει ότι για κάθε ζεύγος μη γειτονικών κορυφών u και v, το άθροισμα των βαθμών τους είναι τουλάχιστον 2n-2, το οποίο ικανοποιεί τη συνθήκη του θεωρήματος του Ore. Επομένως, το γράφημα *G* είναι Χαμιλτονιανό.

Για να δείξουμε ότι η ανισότητα με αυτό το όριο είναι "αυστηρή", πρέπει να κατασκευάσουμε ένα non-Hamilton γράφημα με n κορυφές και m ακμές, έτσι ώστε το m να είναι μικρότερο από $(((n-1)(n-2))/2)+2$.

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το γνωστό γράφημα Petersen,



Σχήμα : Το γράφημα του Petersen

το οποίο έχει 10 κορυφές και 15 ακμές. Το γράφημα Petersen είναι μη Χαμιλτονιανό, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει κύκλος Hamilton στο γράφημα. Για να δούμε ότι το γράφημα Petersen ικανοποιεί την ανισότητα με το όριο, μπορούμε να υπολογίσουμε τη δεξιά πλευρά της ανισότητας για n = 10 ως εξής:

(((n-1)(n-2))/2)+2 = (((9)(8))/2)+2 = 38.

Δεδομένου ότι το γράφημα Petersen έχει 15 ακμές, οι οποίες είναι λιγότερες από 38, δείξαμε ότι η ανισότητα είναι "αυστηρή" για αυτό το παράδειγμα, αφού δώσαμε ένα παράδειγμα ενός μη Χαμιλτονιανού γράφου με n κορυφές και m ακμές όπου το m είναι μικρότερο του ορίου.