.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS
E DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Relatório de Trabalho II

Modelagem e previsão de crescimento populacional utilizando o método dos mínimos quadrados

Disciplina: Cálculo Numérico- SME0205
Aluna: Anne Kéllen de Nazaré dos Reis Dias Nº USP 10552210
Aluno: Luiz Francisco Franca de Farias Nº USP 13686542
Aluno: Luis Roberto Piva Nº USP 13687727
Professor: Antonio Castelo Filho

São Carlos- SP
Junho 2023

Conteúdo

1 Introdução

O crescimento populacional é um fenômeno dinâmico de extrema importância e interesse em diversas áreas, como demografia, economia e planejamento urbano. Compreender e prever o crescimento populacional desempenha um papel fundamental na formulação de políticas públicas e no desenvolvimento de estratégias para o futuro.

O propósito deste trabalho é apresentar a aplicação do método dos mínimos quadrados (e ponderados) na modelagem e previsão do crescimento populacional. O método dos mínimos quadrados é uma técnica estatística que busca encontrar a melhor linha de ajuste para um conjunto de dados, minimizando a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores previstos pelo modelo.

Portanto, nosso objetivo principal é adquirir conhecimento sobre o método dos mínimos quadrados e sua aplicação prática, visando explorar suas vantagens, limitações e possíveis insights que possam contribuir para uma compreensão mais profunda do processo analisado, aplicando tais conhecimentos para modelar curvas de populações e realizar previsões futuras com base nesse modelo.

2 Motivação

O crescimento populacional é um fenômeno complexo e multifatorial, influenciado por uma série de elementos, como natalidade, mortalidade, migração, avanços tecnológicos e mudanças socioeconômicas. Compreender e modelar esse processo é um desafio que exige o uso de métodos analíticos adequados. O estudo desta área é de extrema importância, pois nos permite compreender as mudanças demográficas que ocorrem em um determinado país ao longo do tempo. O conhecimento dessas tendências é fundamental para o planejamento urbano, desenvolvimento econômico e a implementação de políticas públicas eficientes. Além disso, o estudo do crescimento populacional também oferece um importante indicativo do desempenho governamental e do modo de vida dos habitantes.

Este trabalho tem como objetivo principal, porém, estudar e aplicar o método dos mínimos quadrados em um problema específico, sem a pretensão de modelar o processo em todas as suas instâncias ou realizar previsões precisas. Reconhecemos que a obtenção de um catálogo completo de dados seria necessário para utilizar técnicas mais avançadas de previsão com maior precisão.

Nesse contexto, nosso foco está na compreensão e aplicação do método dos mínimos quadrados em um cenário prático. Nosso objetivo é explorar a teoria e as etapas desse método, bem como analisar suas características e resultados em um contexto específico. Assim, embora não possamos realizar previsões altamente precisas, a aplicação do método dos mínimos quadrados nos permitirá compreender os princípios subjacentes e avaliar a adequação dessa abordagem para o problema em questão.

Portanto, nosso objetivo principal é adquirir conhecimento sobre o método dos mínimos quadrados e sua aplicação prática, visando explorar suas vantagens, limitações e possíveis insights que possam contribuir para uma compreensão mais profunda do processo analisado.

3 Minimizando a História

O método dos mínimos quadrados é uma técnica matemática amplamente empregada para obter a melhor aproximação de um conjunto de dados através de uma função matemática. Sua origem remonta à aplicação de *métodos e estudos estatísticos nas ciências sociais*. Ademais, o método científico, estabelecido por *Galileu Galilei (1564-1642)* e ainda em vigor nos dias de hoje, baseado em observações e medições precisas, desempenhou um papel crucial nesse desenvolvimento.

Anteriormente, o astrônomo dinamarquês *Tycho Brahe (1546-1601)* já fazia uso de métodos estatísticos rudimentares para estimar as órbitas de determinados corpos celestes. Com o decorrer do tempo, à medida que novas descobertas astronômicas eram realizadas, a necessidade de um tratamento mais preciso dos dados, baseado em medições pontuais, tornou-se cada vez mais crucial. Nesse contexto, o método dos mínimos quadrados se destacou como uma solução eficaz e de amplo alcance para a análise desses problemas.

Foi necessário um período significativo de tempo para que o estudo de conjuntos de observações experimentais recebesse um tratamento matemático mais meticuloso e sistemático. Durante essa fase, surgiram nomes de extrema relevância, como *Roger Joseph Boscovich (1711-1787), Pierre de Laplace (1749-1827), Adrien Marie Legendre (1752-1833)* e *Carl Friedrich Gauss (1777-1855).* Estes dois últimos são conhecidos como os **pioneiros (pais) do Método dos Mínimos Quadrados**.

Naquele período, caracterizado por intensas descobertas e debates sobre fenômenos astronômicos, havia uma necessidade premente de calcular os parâmetros das órbitas dos cometas com base em medidas pontuais obtidas em momentos distintos.

A análise de fenômenos requer uma descrição precisa das equações e curvas que os dados geram. Ao enfrentar um problema, os dados fornecem relações entre as variáveis, resultando em um modelo matemático que representa satisfatoriamente o fenômeno em questão. A construção desses modelos matemáticos é aprimorada quando inclui termos relacionados aos erros, às suposições subjacentes do modelo ou à coleta dos dados. Essa abordagem possibilita o desenvolvimento de *estimativas futuras* e orienta a tomada de decisões de forma coerente e fundamentada. A integração desses elementos no processo de modelagem contribui para uma análise mais completa e confiável dos fenômenos estudados.

Entre as várias soluções propostas para esse problema na transição do século $XVIII$ para o século XIX, o Método dos Mínimos Quadrados destacou-se como a abordagem mais eficaz, prática e fundamentada teoricamente. Foi publicado pela primeira vez em 1805, na obra "*Nouvelles Methodes pour la Determination des Orbites des Comètes*", de autoria de **Legendre**. Essa conquista representou um avanço significativo na análise e na compreensão das órbitas cometárias.

No entanto, foi **Gauss** quem desenvolveu uma formulação mais rigorosa e abrangente do método. Em 1809, ele publicou um trabalho intitulado " *Teoria do Movimento dos Corpos Celestes Segundo Newton*" no qual descreveu minuciosamente o método dos mínimos quadrados. As conclusões apresentadas neste trabalho destacaram que o método proporciona a melhor estimativa ao se partir do pressuposto de que os erros nas medições seguem a distribuição da curva normal. Essa contribuição de Gauss foi fundamental para solidificar e ampliar a aplicação do método na prática científica.

As conclusões presentes no trabalho de Gauss destacaram que o método dos mínimos quadrados fornece a **melhor estimativa** quando se assume que os erros nas medições seguem a distribuição da curva normal.

Os aprimoramentos realizados por Gauss consistiram na análise de órbitas de corpos celestes com base em um período de observação curto e com poucos dados disponíveis. Essa abordagem permitiu estimar de forma precisa os parâmetros da função. É por essa razão que o método dos mínimos quadrados possui ampla aplicação no campo da astronomia, sendo de grande utilidade para o estudo e análise de fenômenos celestes.

Gauss formulou o problema dos mínimos quadrados como um *problema de otimização*, visando **minimizar a soma dos quadrados dos resíduos**, que são as diferenças entre os valores observados e os valores previstos pela curva ajustada.

$$MMQ \equiv min \sum (y_{real} - y_{previsto})^2$$

Ele demonstrou que a solução para esse problema pode ser obtida por meio das chamadas equações normais, um sistema de equações diferenciais parciais. Esse enfoque inovador de Gauss permitiu uma abordagem matemática precisa e rigorosa na resolução dos problemas de ajuste de curvas, consolidando assim os fundamentos do método dos mínimos quadrados.

A contribuição de Gauss para o método dos mínimos quadrados foi de importância fundamental para sua aceitação e posterior desenvolvimento. Ele aplicou o método em diversas áreas, abrangendo desde astronomia e geodésia até análise de dados experimentais. Sua abordagem matemática rigorosa e suas aplicações práticas foram essenciais para estabelecer o método dos mínimos quadrados como uma *ferramenta fundamental* no ajuste de curvas e na análise de dados. Graças ao trabalho pioneiro de Gauss, o método dos mínimos quadrados se tornou amplamente reconhecido e utilizado, proporcionando uma base sólida para a investigação científica e permitindo avanços significativos em diversas disciplinas.

4 Metodologia

O problema proposto foi abordado por meio de uma implementação em **Python**, que foi dividida em seis etapas distintas. Cada etapa teve seu objetivo específico, conforme descrito a seguir:

1. Leitura de dados e Gráficos de dispersão;
2. Cálculo das taxas de crescimento anuais;
3. Ajuste da curva dos dados populacionais utilizando o método dos mínimos quadrados;
4. Ajuste da curva dos dados populacionais utilizando o método dos mínimos quadrados ponderados;
5. Previsão do crescimento populacional utilizando o método dos mínimos quadrados polinomialmente;
6. Previsão do crescimento populacional utilizando o método dos mínimos quadrados ponderados polinomialmente.

Essas etapas foram realizadas sequencialmente, proporcionando uma abordagem completa para analisar e compreender o processo de crescimento populacional através do método dos mínimos quadrados.

Inicialmente, selecionamos três países em continentes distintos, buscando analisar populações que apresentam comportamentos demográficos diferentes. Optamos por incluir a **Bulgária**, um país europeu, devido à sua população em declínio. Também escolhemos a **China**, devido ao seu rápido crescimento populacional anual, e o **Brasil**, por possuir um crescimento moderado, não muito alto, mas também não muito baixo, ao longo dos anos.

4.1 Primeira Parte: Leitura de dados e Gráficos de dispersão

Para analisar os dados populacionais dos países selecionados entre os anos de 1961 e 2021, utilizamos o site *DadosMundiais.com* para coletar as informações e armazená-las em um arquivo *CSV*. Em seguida, realizamos uma análise exploratória dos dados, com o objetivo de identificar tendências, padrões e possíveis outliers [1] que possam influenciar a modelagem. Para isso, plotamos um *gráfico de dispersão* para cada país, utilizando os dados coletados.

O **gráfico de dispersão** é uma ferramenta gráfica utilizada para visualizar a relação entre duas variáveis numéricas. Ele exibe os pontos no plano cartesiano, representando pares de valores correspondentes às variáveis em análise. O gráfico de dispersão é útil para identificar padrões, tendências e correlações entre as variáveis, além de facilitar a detecção de outliers. Também possibilita visualizar agrupamentos ou padrões não lineares, fornecendo uma análise exploratória de dados eficaz antes de análises mais avançadas.

4.2 Segunda Parte: Cálculo das taxas de crescimento anuais

A segunda parte foi adicionada ao trabalho com o objetivo de despertar curiosidade e fornecer uma oportunidade para identificar os anos com as taxas de crescimento mais elevadas. Logo, são informações complementares que nos ajudam a perceber o crescimento populacional.

A **taxa de crescimento populacional** é um indicador crucial que representa a variação percentual no tamanho da população ao longo do tempo. Ele nos ajuda a compreender o ritmo de aumento ou diminuição dos indivíduos em uma área geográfica específica durante um período determinado.

Para calcular a taxa de crescimento, utiliza-se a diferença percentual entre pontos consecutivos dos dados populacionais, dividindo-se pelo intervalo de tempo correspondente. Isso nos fornece uma aproximação da taxa de crescimento para cada ponto dos dados populacionais:

$$T = (\frac{P_f - P_i}{P_i}) \times 100$$

onde:

- T: é a taxa de crescimento;

[1] Outliers, em estatística, são valores que se desviam significativamente do padrão geral de um conjunto de dados. A detecção e o tratamento adequado dos outliers são importantes para garantir que as análises e as conclusões baseadas nos dados sejam precisas e representativas do padrão geral dos dados.

- P_i: é a população inical;
- P_f: é a população final.

Uma taxa de crescimento populacional positiva indica um aumento líquido na população ao longo do tempo, enquanto uma taxa negativa indica uma diminuição. É importante mencionar que a taxa de crescimento não leva em consideração apenas o número absoluto de indivíduos, mas também considera fatores como a taxa de natalidade, a taxa de mortalidade e a migração. No entanto, esses fatores não foram considerados neste trabalho devido à falta de conjuntos de dados correlacionados e ao objetivo principal do trabalho.

Essa medida é especialmente útil para analisar variações geográficas e temporais do crescimento populacional, fazer estimativas e projeções populacionais para períodos curtos, bem como subsidiar processos de planejamento, gestão e avaliação de políticas públicas.

É importante ressaltar que a taxa de crescimento populacional pode ter implicações significativas para o meio ambiente, os recursos naturais e a qualidade de vida das pessoas. Um crescimento populacional acelerado pode exercer pressão sobre a disponibilidade de recursos, e ter um impacto negativo na sustentabilidade de uma região. Por outro lado, uma taxa de crescimento populacional baixa ou negativa pode apresentar desafios econômicos, como uma força de trabalho envelhecida e uma diminuição no consumo e na demanda.

Portanto, compreender e monitorar a taxa de crescimento populacional é essencial para a formulação de políticas e a implementação de estratégias que visem garantir um desenvolvimento sustentável e equilibrado em uma área geográfica específica.

4.3 Terceira parte: Ajuste da curva dos dados populacionais utilizando o método dos mínimos quadrados

Prosseguindo, para o ajuste dos dados descritos por uma função, escolhemos o modelo polinomial de grau 2 para representar a curva dos dados. Com isso, utilizamos o método dos mínimos quadrados para ajustar a curva dos dados populacionais.

O **método dos mínimos quadrados** é uma técnica amplamente empregada para ajustar uma curva aos dados observados, reduzindo ao mínimo a diferença entre os valores reais e os valores previstos. É utilizado em diversos campos, como cálculo numérico, estatística e análise de dados, e oferece uma abordagem robusta e matematicamente sólida para extrair informações e fazer previsões.

A fórmula geral para o método dos mínimos quadrados envolve a minimização da soma dos quadrados dos resíduos entre os valores observados (reais) e os valores previstos pela curva. Os resíduos são definidos como a diferença entre os valores observados e os valores previstos em cada ponto de dados:

$$min \sum (y_{real} - y_{previsto})^2$$

Onde:

- y_{real}: são os valores observados dos dados;
- $y_{previsto}$: são os valores previstos pela curva ajustada.

Uma ferramenta essencial do método dos mínimos quadrados é a **matriz de Vandermonde**, que possui propriedades especiais e é frequentemente utilizada em problemas de interpolação polinomial e ajuste de curvas. Recebe esse nome em homenagem ao matemático *Alexandre-Théophile Vandermonde (1735,1796).*

Essa matriz é construída de maneira que cada elemento seja o valor de uma variável (normalmente representada por x) elevada a uma determinada potência. Ela consiste em uma sequência de colunas, onde cada coluna corresponde a uma potência crescente da variável x.

Por exemplo, considere uma matriz de Vandermonde de ordem n. A primeira coluna dessa matriz seria composta pelos valores de x elevados à potência 0, a segunda coluna à potência 1, a terceira à potência 2 e assim por diante até a potência $n-1$.

Ao construir a matriz de Vandermonde, os valores dos pontos de dados podem ser utilizados como entrada para resolver um sistema de equações e encontrar os coeficientes da curva polinomial desejada.

A matriz de Vandermonde pode ser representada matematicamente como:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ são os valores da variável x correspondentes aos pontos de dados. A matriz resultante V pode então ser usada para realizar cálculos e obter os coeficientes do polinômio ajustado.

No contexto deste ambiente, a matriz de Vandermonde é empregada para representar as variáveis independentes (anos) em um ajuste polinomial de grau definido, permitindo uma análise mais precisa e eficaz dos dados disponíveis. Mais ainda, a matriz de Vandermonde desempenha um papel fundamental no método dos mínimos quadrados para encontrar os **coeficientes da curva** ajustada aos dados. Esses coeficientes representam as contribuições dos termos do polinômio no ajuste da curva e têm influência direta na forma da curva.

No caso de um ajuste polinomial de grau 2, por exemplo, os coeficientes encontrados indicam os valores dos coeficientes dos termos do polinômio quadrático. Por exemplo, se os coeficientes encontrados forem $[a, b, c]$, a curva ajustada seria representada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Esses coeficientes não apenas permitem construir a curva ajustada, mas também podem fornecer informações valiosas sobre tendências e padrões presentes nos dados.

Dessa forma, os coeficientes da curva ajustada são essenciais para compreender a relação entre os dados observados e a curva ajustada. Eles desempenham um papel crucial na interpretação dos resultados, na realização de previsões e na extração de informações relevantes a partir da curva ajustada.

Agora, para ver se o modelo é apropriado, calculamos computacionalmente o **erro médio quadrático** (MSE) e o **coeficiente de determinação** (R^2).

O *erro médio quadrático* (MSE) é uma medida que avalia o erro médio entre os valores reais e os valores previstos pelo modelo. Ele calcula a média dos quadrados das diferenças entre os valores reais e os valores previstos. Um valor menor de MSE indica um melhor ajuste do modelo aos dados.

A fórmula matemática para calcular o MSE é a seguinte:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$$

Onde:

- n: número de observações;
- x_i : valor real observado;
- y_i : valor previsto pelo modelo

No entanto, o MSE não fornece uma interpretação direta da proporção de variação explicada pelo modelo. Para tanto calculamos também o coeficiente de determinação.

O *coeficiente de determinação* (R^2), por sua vez, é uma medida estatística que indica a proporção da variabilidade dos dados observados que é explicada pelo modelo ajustado. Ele varia de 0 a 1, sendo 1 um ajuste perfeito e 0 indicando que o modelo não explica nenhuma variação nos dados. O R^2 é utilizado como uma medida de qualidade do ajuste, mostrando o quanto o modelo é capaz de descrever as variações dos dados.

Para calcular o coeficiente de determinação, calculamos primeiro a **matriz de correlação** entre os valores observados e os valores previstos. A matriz de correlação é uma matriz simétrica que indica a correlação entre as variáveis. O valor na posição $(0,1)$ da matriz corresponde à correlação entre x_i (valor observado) e y_i(valor previsto). O coeficiente de determinação é calculado elevando ao quadrado o valor de correlação obtido no passo anterior.

Embora o MSE e o R^2 estejam relacionados, eles medem aspectos diferentes da qualidade do ajuste. O MSE quantifica o erro médio entre os valores reais e previstos, enquanto o R^2 quantifica a proporção de variação explicada pelo modelo. Ambos são importantes para avaliar a qualidade do ajuste.

4.4 Quarta Parte: Ajuste da curva dos dados populacionais utilizando o método dos mínimos quadrados ponderados

O método dos mínimos quadrados ponderados é uma extensão do método dos mínimos quadrados convencional, utilizado para ajustar uma curva ou uma função aos dados observados. A diferença fundamental é que no método dos mínimos quadrados ponderados, são atribuídos pesos diferentes às observações com base na confiabilidade ou importância de cada uma.

No método dos mínimos quadrados padrão, utilizado na *Terceira Parte*, todos os pontos de dados têm o **mesmo peso** na estimativa dos coeficientes do modelo. Porém, no **método dos mínimos quadrados ponderados**, os pontos de dados podem ser ponderados de forma diferente com base em certos critérios.

A ideia por trás desse método é considerar que algumas observações podem ser mais precisas ou ter menos variação do que outras. Portanto, atribuir um peso maior a essas observações confiáveis ou de baixa variação resulta em um ajuste mais preciso da curva aos dados.

Nesta Parte, calculamos os pesos ponderados de duas maneiras diferentes. A primeira maneira é baseada nos erros absolutos entre cada ponto de dados e a média desse conjunto de dados. Quanto maior o erro absoluto, maior será o peso atribuído ao ponto de dados correspondente. Essa abordagem é útil para enfatizar pontos de dados discrepantes em relação à média, especialmente quando eles podem afetar significativamente a estimativa dos coeficientes do modelo.

A segunda maneira de calcular os pesos é baseada em critérios específicos. Esse método atribui pesos diferentes aos dados de população, dando maior peso aos anos considerados críticos para o sistema, pois refletem as condições mais atualizadas do crescimento populacional.

Os pesos ponderados são então usados na etapa de ajuste do modelo, onde os coeficientes são estimados levando em conta os pesos atribuídos. Dessa forma, aplicamos o método dos mínimos quadrados ponderados para ajustar as curvas da população e verificar a adequação do modelo, calculando novamente o **erro médio quadrático** (MSE) e o **coeficiente de determinação** (R^2), assim como na *Terceira Parte.*

A forma geral do método dos mínimos quadrados ponderados é semelhante ao método dos mínimos quadrados convencional. A função objetivo ainda consiste em minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores previstos pela curva ajustada. No entanto, cada termo dessa soma é multiplicado pelo peso correspondente à observação.

$$min \sum_{i=1}^{n} (\rho_i * (y_{real_i} - y_{previsto_i}))^2$$

onde:

- n é o número de observações;
- y_{real_i} são os valores observados dos dados;
- $y_{previsto_i}$ são os valores previstos pela curva ajustada;
- ρ_i é o peso atrbuído à observação y_{real_i}.

Ao utilizar o método dos mínimos quadrados ponderados, é possível obter um ajuste mais preciso da curva aos dados, dando maior importância às observações mais confiáveis. Isso é particularmente útil em situações onde existem observações com variação significativamente diferente ou quando se deseja enfatizar certas regiões dos dados.

4.5 Quinta e Sexta Parte: Previsão do crescimento populacional utilizando o método dos mínimos quadrados padrão e ponderados polinomialmente

A metodologia utilizada na *Quinta Parte* deste trabalho apresenta muitas semelhanças com a adotada na *Sexta Parte*. Por essa razão, optamos por abordá-las conjuntamente em uma única seção, a fim de fornecer uma explicação coerente e abrangente.

A **previsão populacional** é obtida multiplicando a *matriz de Vandermonde*, já vista na *Terceira Parte*, pelos coeficientes do polinômio encontrados no método dos mínimos quadrados, e no método dos mínimos quadrados ponderados, para a *Quarta Parte*. Essa multiplicação é realizada utilizando a operação de produto escalar entre as duas matrizes.

Após obter o resultado da multiplicação, teremos um vetor que representa a previsão da população para os anos futuros. Cada elemento desse vetor corresponderá à estimativa da população para um determinado ano.

5 Resultados

Para a **Primeira Parte**, realizamos a coleta dos dados populacionais dos países selecionados: *Brasil, Bulgária* e *China*. Essa etapa envolveu a compilação de informações ao longo de um extenso período, abrangendo desde o ano de 1961 até 2021. Para facilitar a organização e manipulação dos dados, eles foram armazenados em arquivos *CSV* individuais, sendo eles: ’*brasil.csv*’ para os dados do Brasil, ’*bulgaria.csv*’ para os dados da Bulgária e ’*china.csv*’ para os dados da China.

Essa abordagem de armazenamento em formato *CSV* permitirá que os dados sejam facilmente acessados e utilizados para análises subsequentes, possibilitando a identificação de padrões, tendências e comparações entre os países selecionados.

```python
def ler_dados_csv(dados):
    anos = []
    populacao = []

    with open(dados, 'r') as arquivo:
        leitor_csv = csv.reader(arquivo)

        for linha in leitor_csv:
            anos.append(int(linha[0]))
            populacao.append(float(linha[1]))

    return anos, populacao

```

Figura 1: Código utilizado para a leitura dos arquivos *CSV*

Com os arquivos em posse, procedemos à separação dos dados em duas listas distintas: uma contendo os anos e outra com os dados populacionais dos países ao longo desses anos. Em seguida, utilizamos essas informações para criar **gráficos de dispersão** individuais para cada país. Os resultados obtidos foram os seguintes:

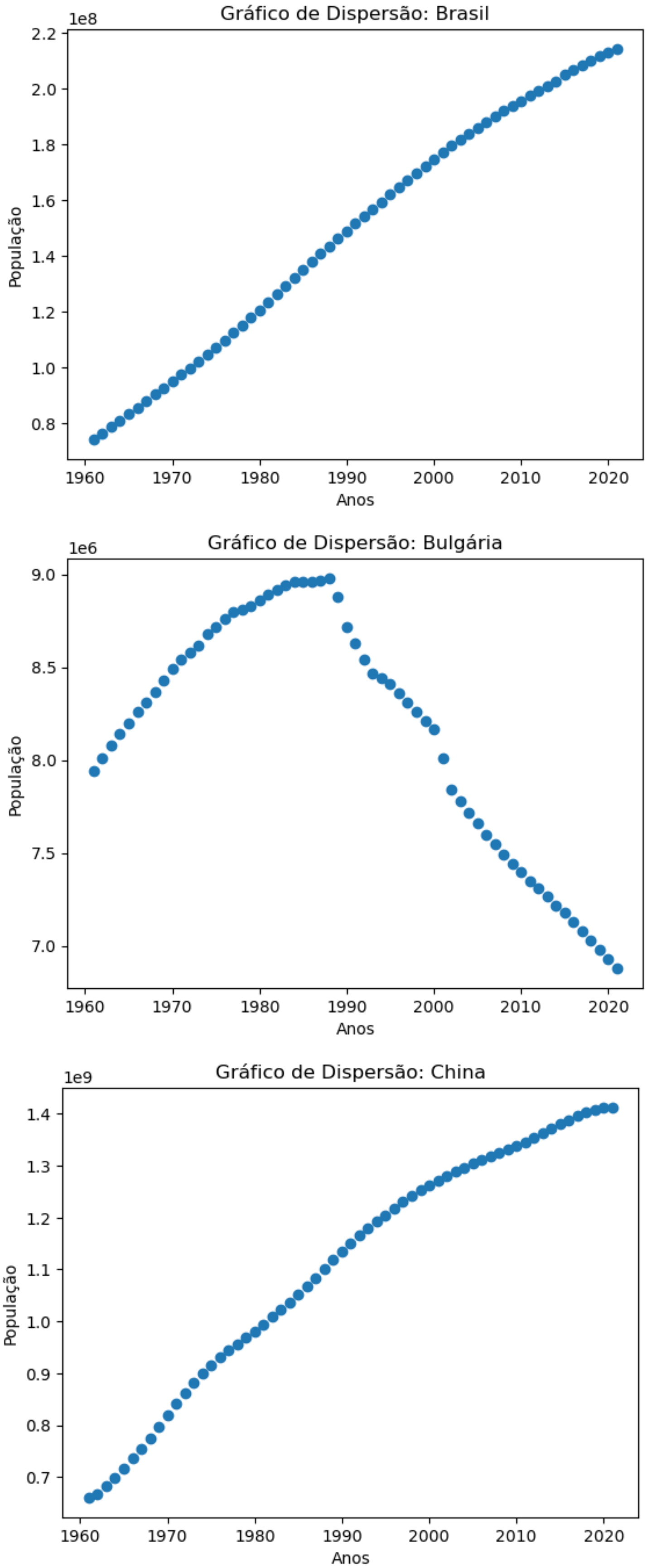

Figura 2: Gráficos de Dispersão dos Países

Para a **Segunda Parte**, realizamos o cálculo da taxa de crescimento populacional de cada país no período de 1961 a 2021. Aqui estão os resultados obtidos para cada país:

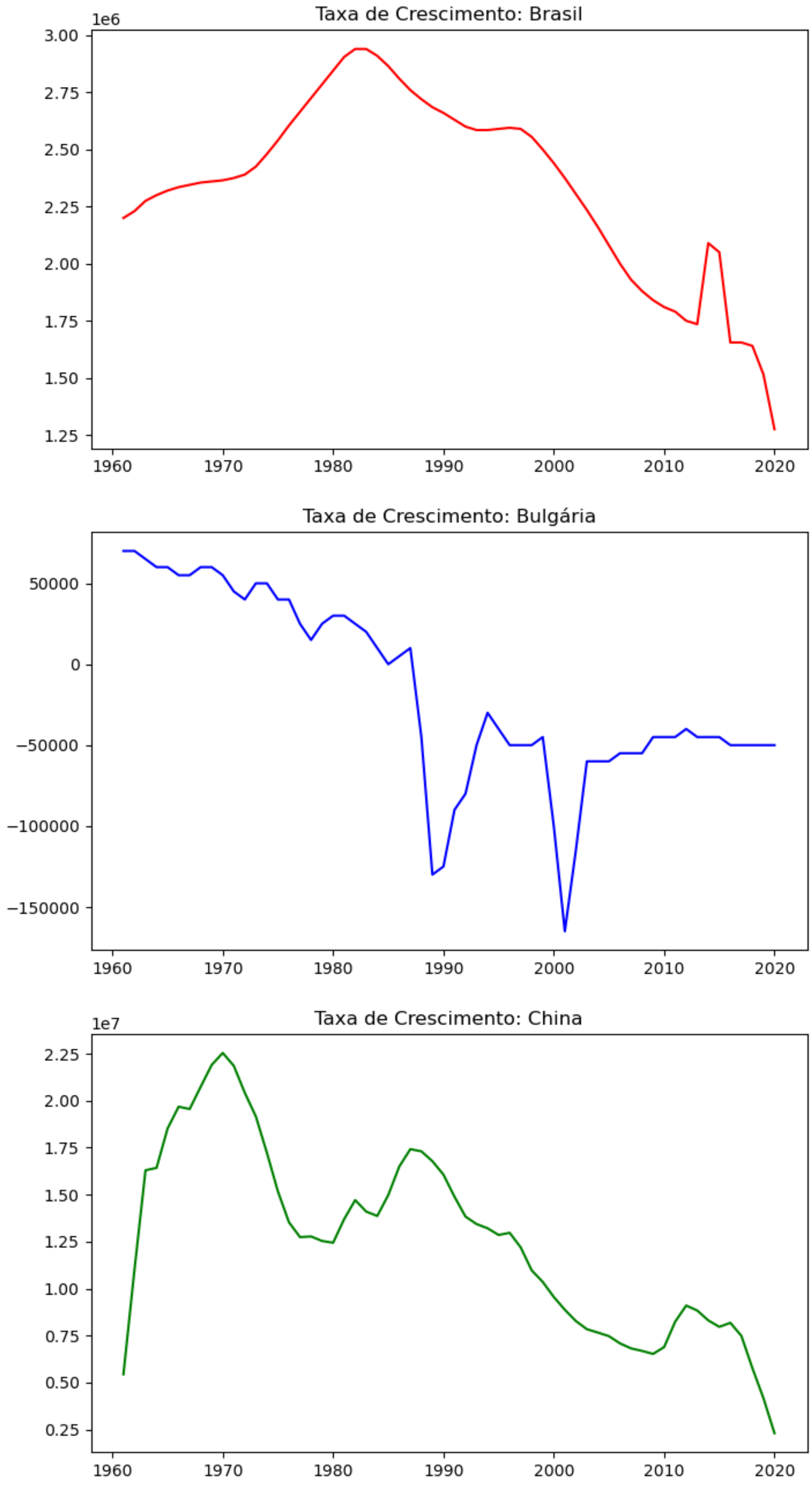

Figura 3: Taxas de crescimento dos países: Isoladamente

1. Brasil: Taxa de crescimento = 153.45%
2. Bulgária: Taxa de crescimento = 13.62%
3. China: Taxa de crescimento = 147.65%

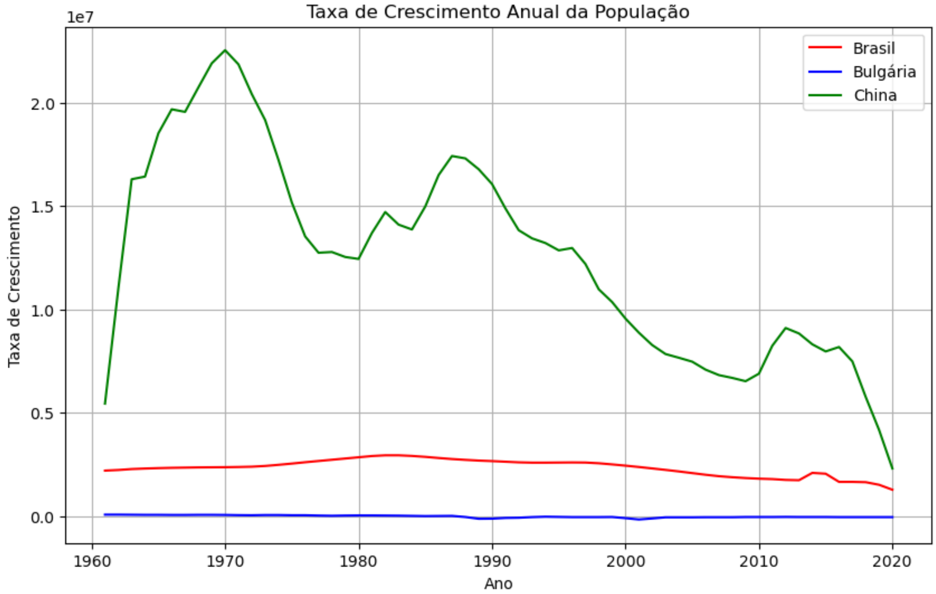

Figura 4: Comparação das taxas de crescimento entre os países

Após a etapa de criação dos gráficos de dispersão e o cálculo das taxas de crescimento das populações, prosseguimos com o ajuste dos dados utilizando modelos matemáticos, a *Terceira Parte*. Optamos por utilizar o *modelo polinomial de grau* 2 como a primeira abordagem, além de outros modelos para fins de comparação. Utilizamos o **método dos mínimos quadrados** padrão para realizar o ajuste da curva aos dados populacionais.

```
def ajuste_minimos_quadrados(anos, pop, grau):
    A = np.vander(anos, grau+1) # cria a matriz Vandermonde
    coeficientes, _, _, _ = np.linalg.lstsq(A, pop, rcond=None)

    return coeficientes

```

Figura 5: Código do método do mínimos quadrados

Ao examinar os gráficos resultantes dos ajustes realizados, somos capazes de visualizar as curvas suavizadas e avaliar a adequação dos modelos escolhidos para representar os dados populacionais ao longo do tempo. Apresentaremos a seguir os resultados dos principais modelos utilizados:

1. **Ajuste Polinomial de Grau 2:**

   Utilizando esse modelo, conseguimos uma curva suavizada que se ajusta razoavelmente bem aos dados populacionais de cada país. O ajuste polinomial de grau 2 permite capturar tanto as variações iniciais quanto as tendências de crescimento ou declínio ao longo do tempo.

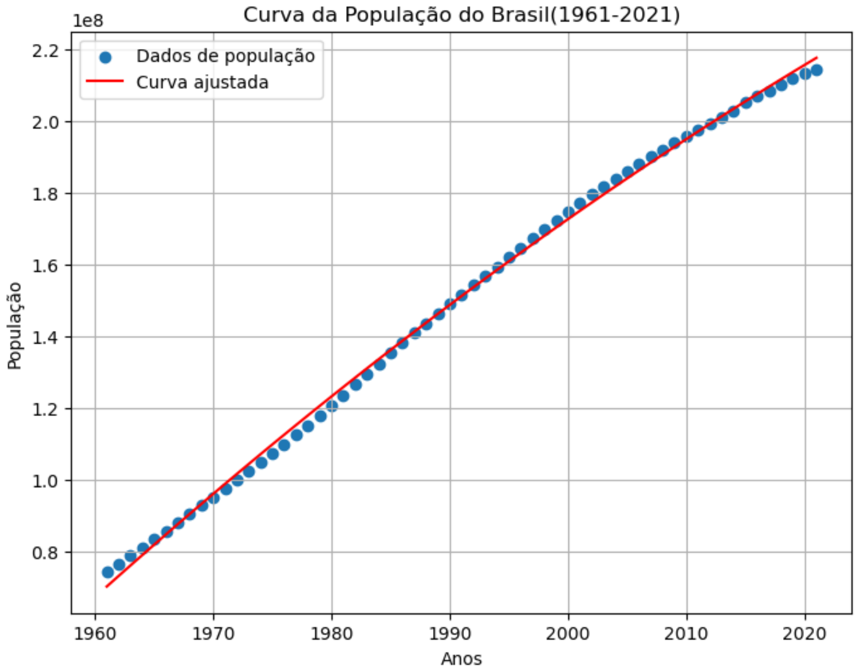

Figura 6: Curva do ajuste polinomial de grau 2 da população do Brasil

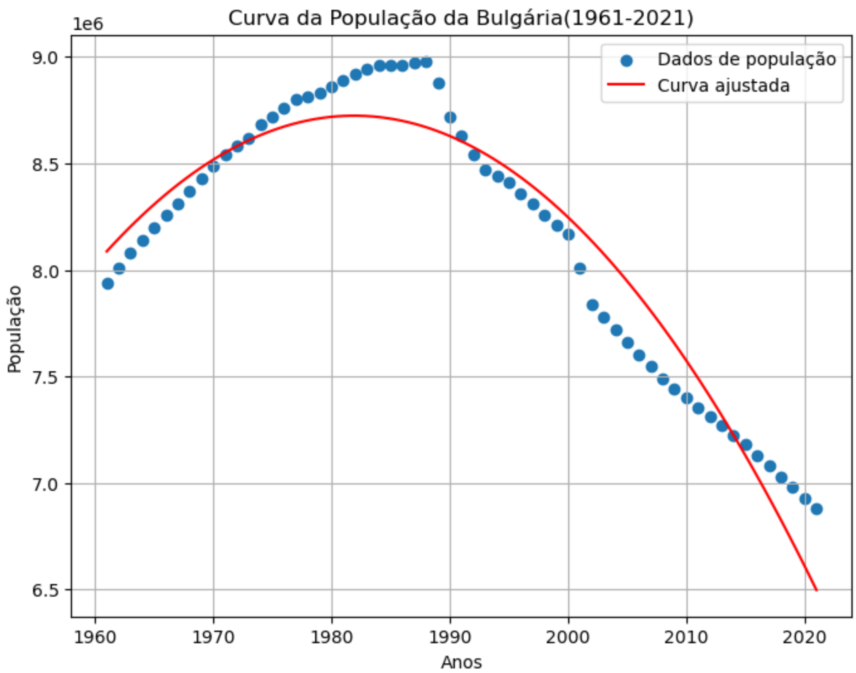

Figura 7: Curva do ajuste polinomial de grau 2 da população da Bulgária

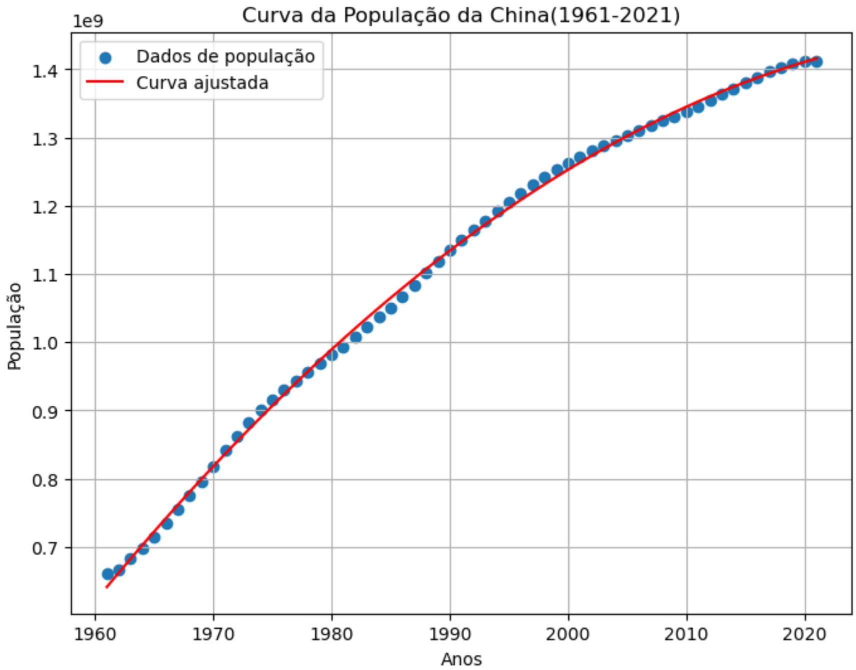

Figura 8: Curva do ajuste polinomial de grau 2 da população da China

2. **Outros Modelos (para comparação):**

   Além do modelo polinomial de grau 2, também experimentamos outros modelos. Essas alternativas foram usadas para comparar a qualidade de ajuste e determinar se algum modelo se adequa melhor aos dados populacionais de cada país.

   - **Ajuste Polinomial de Grau 3:**

     Essa abordagem permite uma maior flexibilidade na curva ajustada aos dados, capturando possíveis variações mais sutis ou não lineares. No entanto, é importante observar que um grau mais alto pode introduzir maior complexidade e risco de overfitting aos dados, requerendo uma análise criteriosa, por isso não exporemos resultados para polinômios de graus muito grandes:

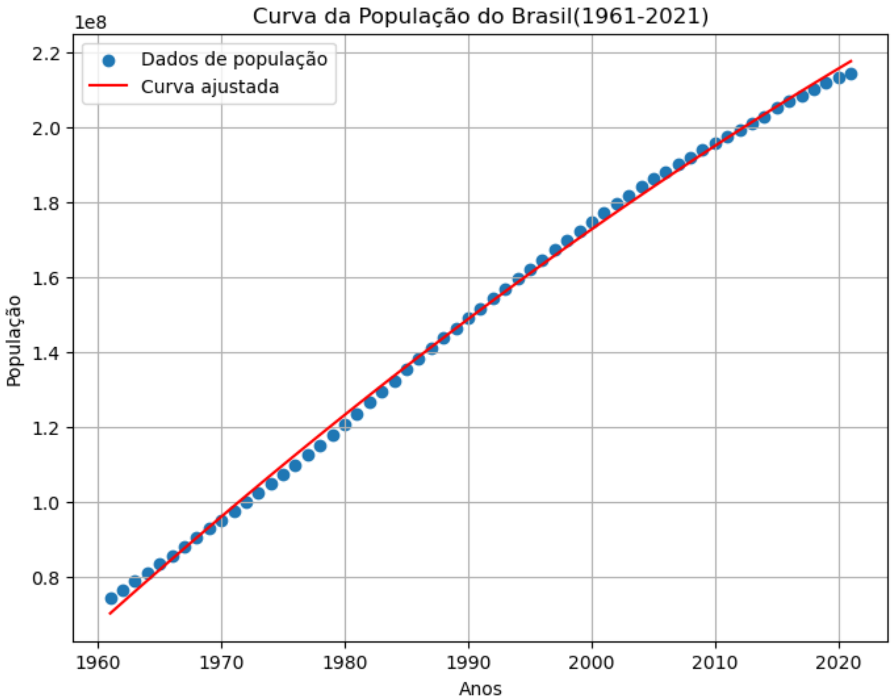

Figura 9: Curva do ajuste polinomial de grau 3 da população do Brasil

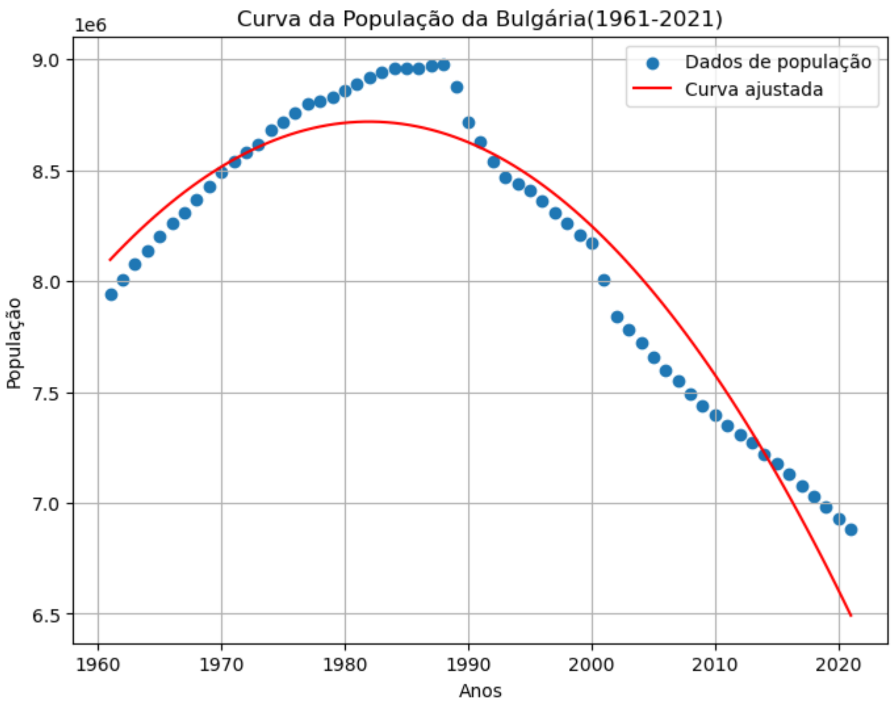

Figura 10: Curva do ajuste polinomial de grau 3 da população da Bulgária

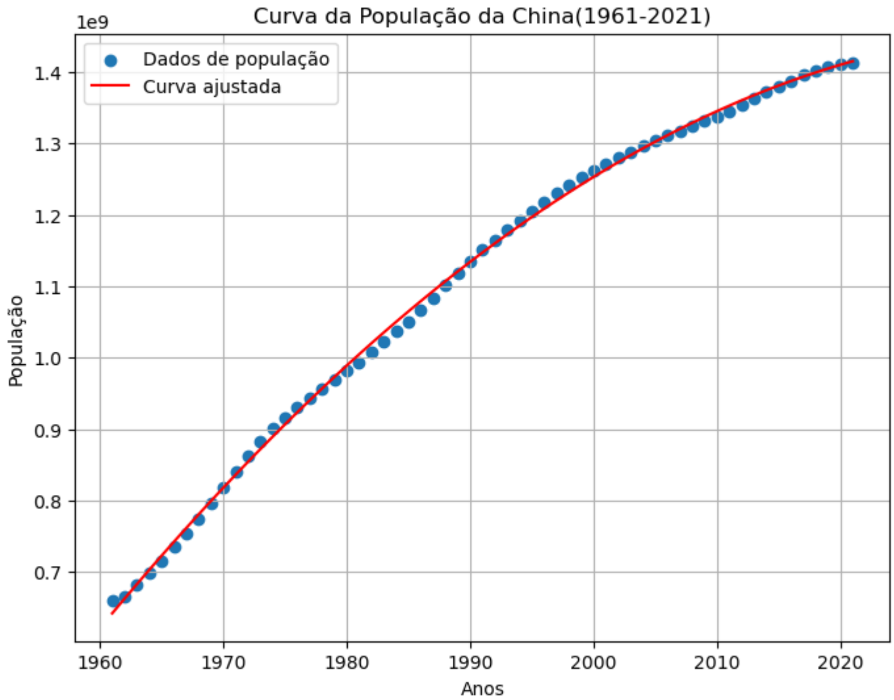

Figura 11: Curva do ajuste polinomial de grau 3 da população da China

- **Ajuste Linear:**
  Para fins de comparação, também realizamos um ajuste linear simples. Esse modelo pressupõe uma relação linear entre os anos e a população, o que pode ser apropriado em certos casos. No entanto, é importante considerar que um ajuste linear pode não capturar adequadamente possíveis mudanças de tendência ou padrões não lineares nos dados populacionais.

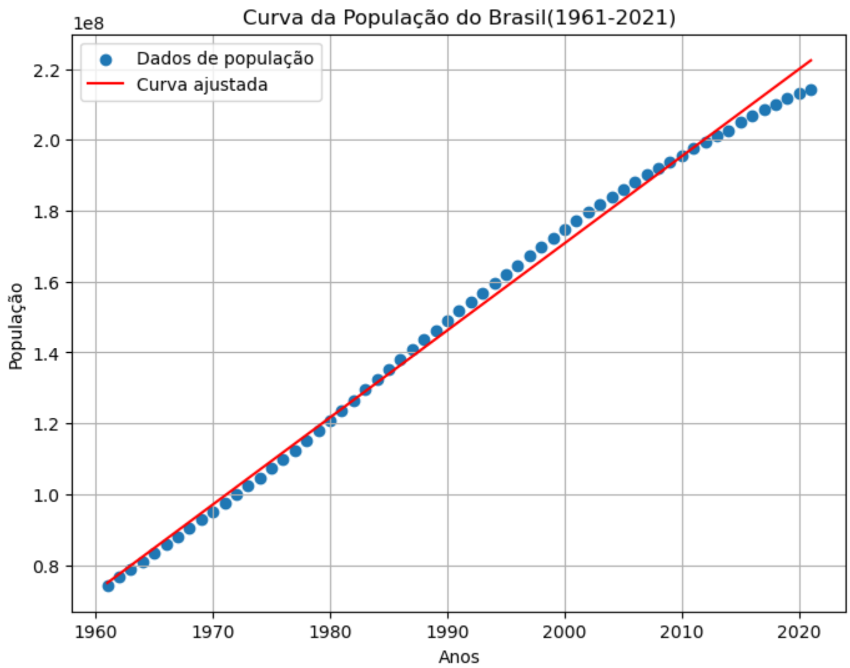

Figura 12: Curva do ajuste linear da população do Brasil

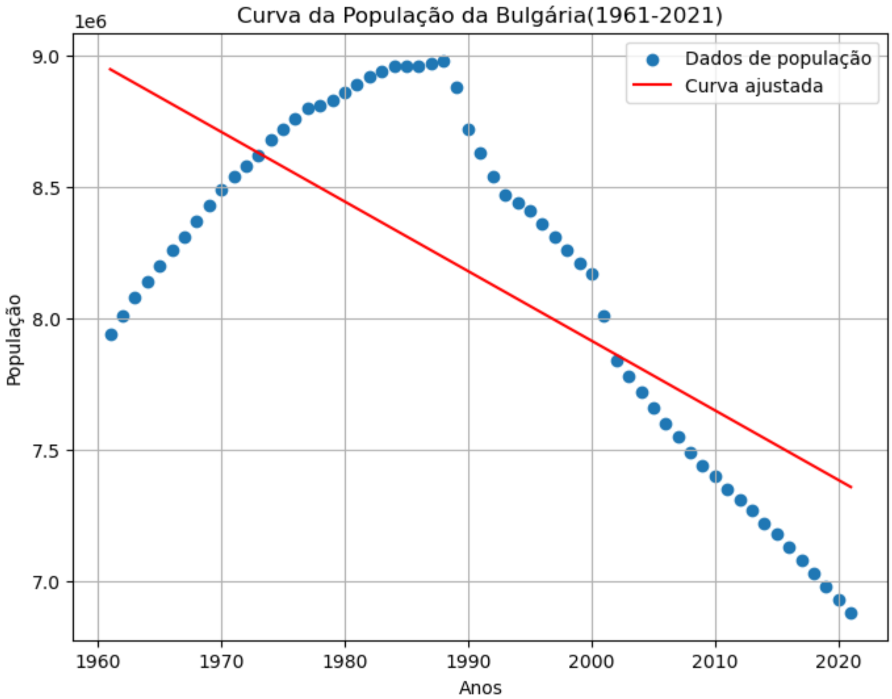

Figura 13: Curva do ajuste linear da população da Bulgária

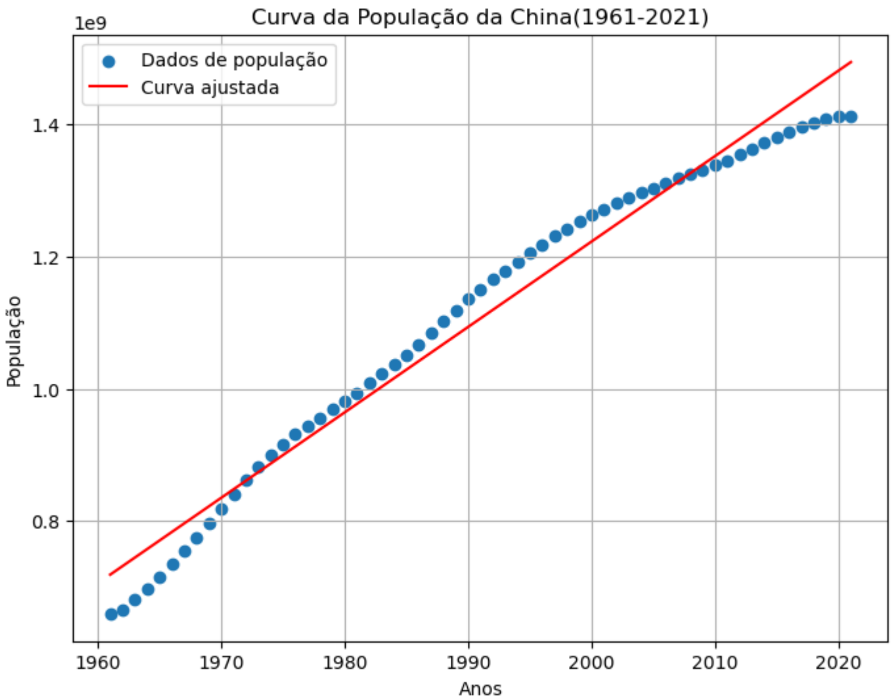

Figura 14: Curva do ajuste linear da população China

Além de avaliar visualmente os gráficos resultantes dos ajustes, é importante quantificar a qualidade dos modelos através de métricas estatísticas, Usaremos aqui, como previsto pelo leitor, o erro médio quadrático (MSE) e o coeficiente de determinação (R^2). Apresentaremos a seguir os resultados para cada modelo e em seguida o código usado:

1. **Ajuste Polinomial de Grau 2:**

Tabela 1: Erro médio quadrático - MSE e coeficiente de determinação R^2 do ajuste polinomial de grau 2 dos países via minimos quadrados padrão

País	MSE	R^2
Brasil	3.215.347.101.730,852	0,9982907992326633
Bulgária	30.307.816.277,15164	0,9262374701469414
China	54.485.299.512.597,71	0,9989737261513592

2. **Ajuste Polinomial de Grau 3:**

Tabela 2: Erro médio quadrático - MSE e coeficiente de determinação R^2 do ajuste polinomial de grau 3 dos países via minimos quadrados padrão

País	MSE	R^2
Brasil	3.146.372.083.499,1465	0,9983274646844412
Bulgária	31.222.438.641,236183	0,9240114813547154
China	53.353.789.091.024,06	0,9989950390479666

3. **Modelo Linear:**

Tabela 3: Erro médio quadrático - MSE e coeficiente de determinação R^2 do ajuste linear dos países via minimos quadrados padrão

País	MSE	R^2
Brasil	8.265.245.965.444,675	0,9956063951108839
Bulgária	193.338.156.062,79953	0,529457636343512
China	1.390.519.446.596.128,0	0,9738084628911887

```python
def calcular_mse(y_real, y_previsto):
    return np.mean((y_real - y_previsto)**2)
```

```python
def coeficiente_determinacao(y_obs, y_pred):
    correlacao = np.corrcoef(y_obs, y_pred)
    coef = correlacao[0, 1] ** 2

    return coef

```

Figura 15: Erro médio quadrático (MSE) e o Coeficiente de determinação R^2

Em seguida, na *Quarta Parte* realizamos o ajuste das curvas das populações desses memsos países utilizando o **método dos mínimos quadrados ponderados**. Para sua aplicação, foi necessário calcular os pesos adequados que seriam utilizados no ajuste. Isso foi feito por meio das seguintes duas funções:

```python
def calcular_pesos_ponderados(pop):
    erros_absolutos = np.abs(pop - np.mean(pop))
    pesos =  1 / erros_absolutos

    return pesos

```

```python
def calcular_pesos_criticos(pop):
    pesos = np.ones_like(pop)
    pesos[-10:] = 3  # Atribui um peso maior para os últimos 10 anos

    return pesos
```

Figura 16: Funções para calcular os pesos ponderados

Através da aplicação dos pesos ponderados, utilizamos o método dos mínimos quadrados ponderados para ajustar as curvas das populações e, em seguida, calculamos o erro médio quadrático (MSE) e o coeficiente de determinação (R^2) para cada ajuste feito: polinomial de grau 2 e 3, e o ajuste linear:

```python
def ajuste_minimos_quadrados_ponderados(anos, pop, grau, pesos):
    A = np.vander(anos, grau + 1)
    W = np.diag(np.sqrt(pesos))

    A_pond = np.dot(W, A)
    y_pond = np.sqrt(pesos) * pop

    coeficientes = np.linalg.lstsq(A_pond, y_pond, rcond=None)[0]

    return coeficientes

```

Figura 17: Método dos mínimos quadrados ponderados

1. **Primeira função peso:**

   (a) **Polinômio de grau 2:**

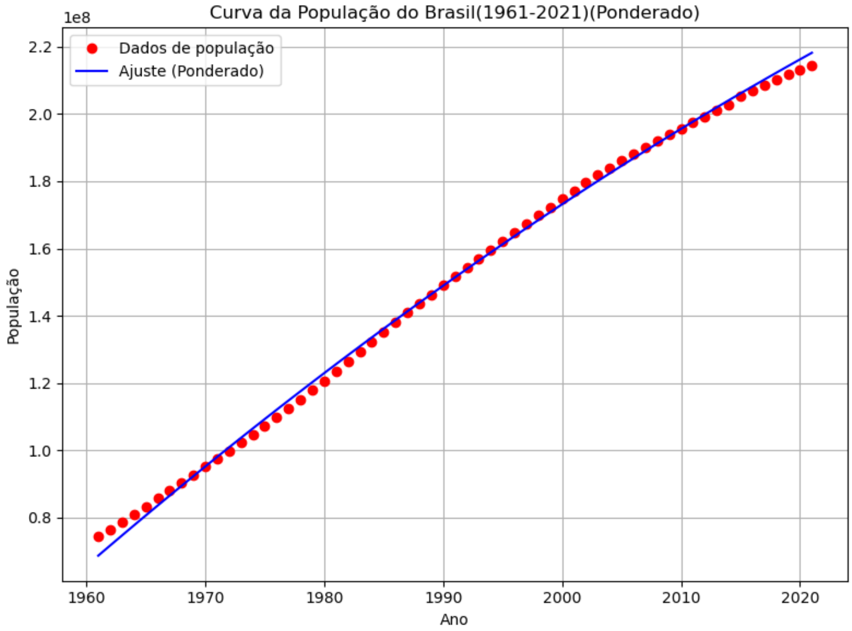

Figura 18: Ajuste da curva polinomial de grau 2 para a primeira função peso da População do Brasil via minimos quadrados ponderado

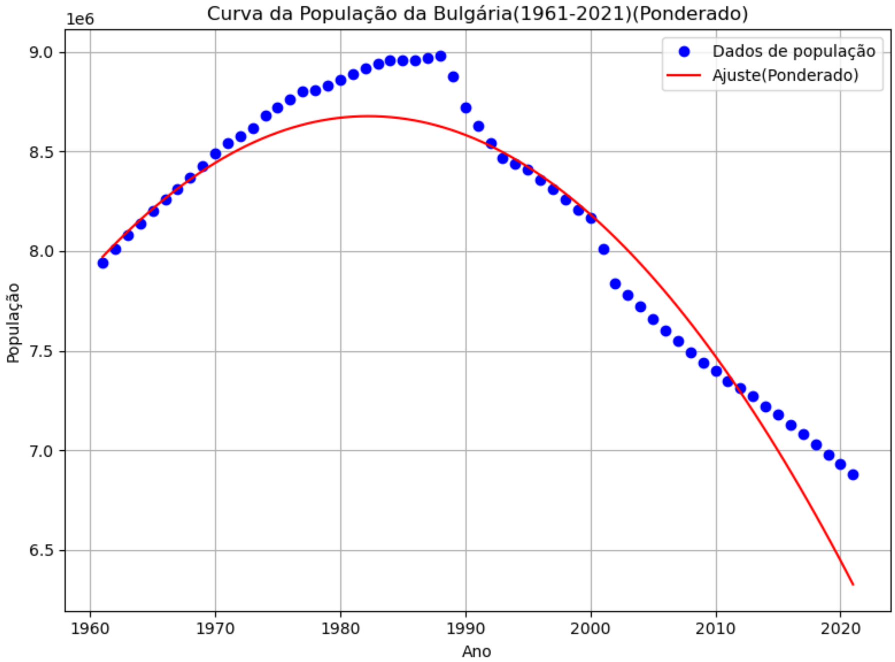

Figura 19: Ajuste da curva polinomial de grau 2 para a primeira função peso da população da Bulgária via minimos quadrados ponderado

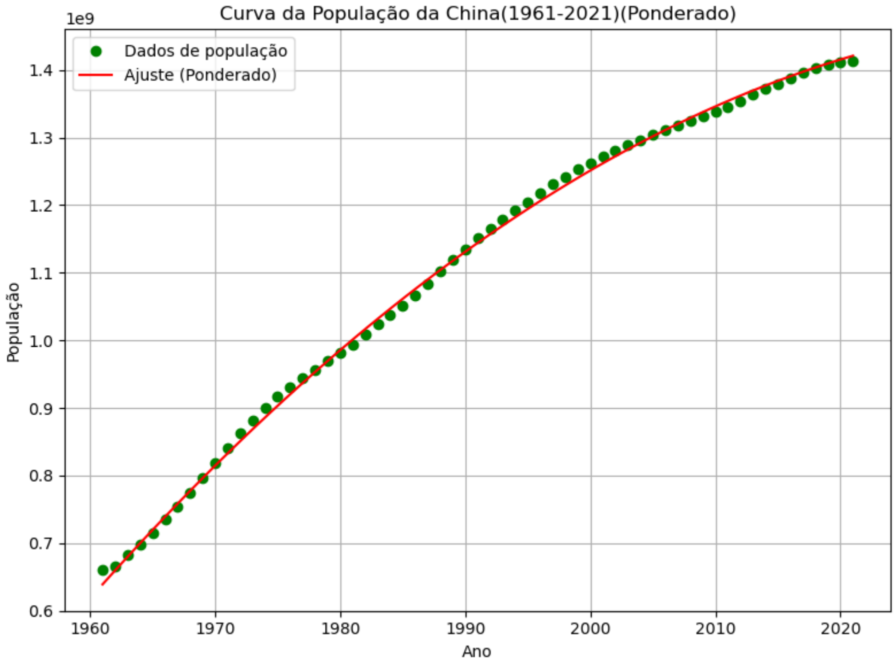

Figura 20: Ajuste da curva polinomial de grau 2 para a primeira função peso da população da China via minimos quadrados ponderado

E os dados de MSE e R^2 foram:

Tabela 4: Erro médio quadrático - MSE e coeficiente de determinação R^2 do ajuste polinomial de grau 2 dos países via minimos quadrados ponderados

País	MSE	R^2
Brasil	3,615,187,413,468.8726	0.9982726235829383
Bulgária	37,783,614,754.77895	0.9259053988865357
China	63,440,596,628,990.16	0.9989213461669469

(b) **Polinômio de grau 3:**

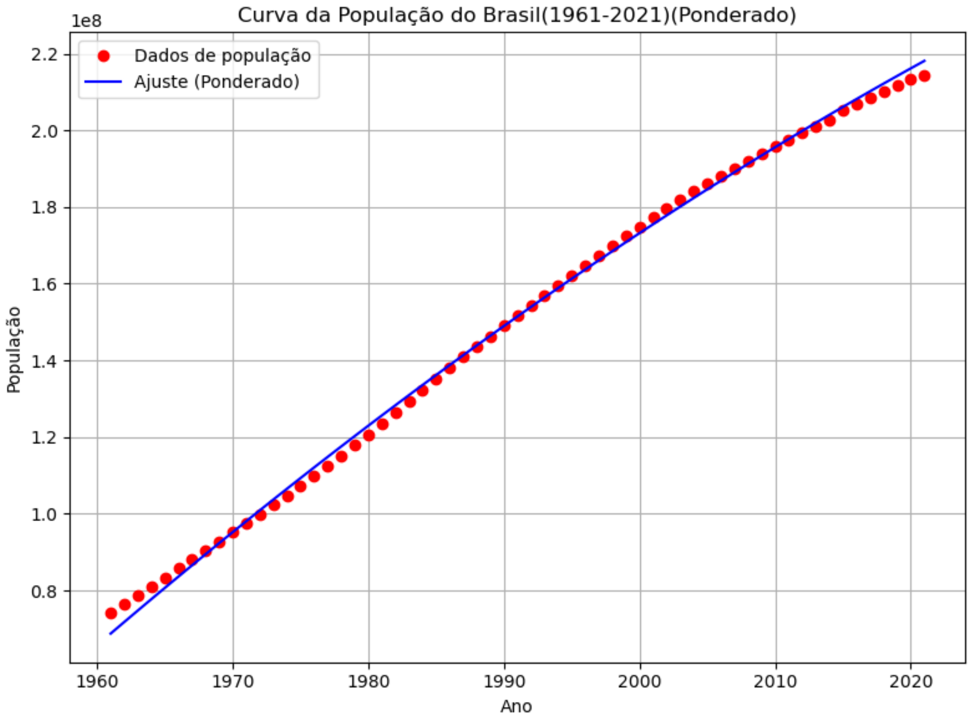

Figura 21: Ajuste da curva polinomial de grau 3 para a primeira função peso da População do Brasil via minimos quadrados ponderado

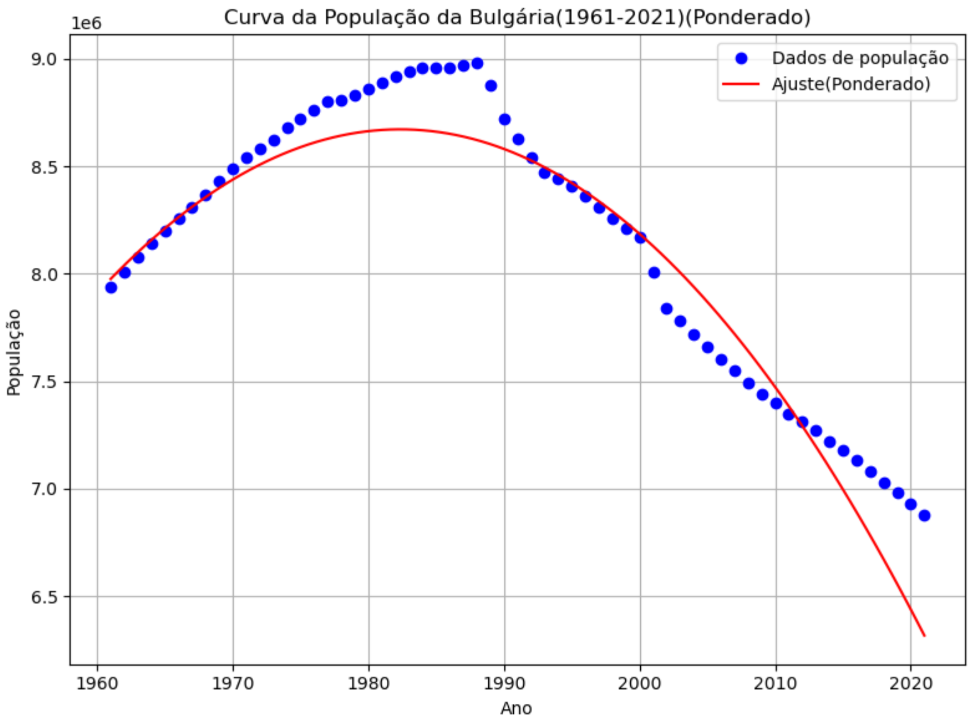

Figura 22: Ajuste da curva polinomial de grau 3 para a primeira função peso da População da Bulgária via minimos quadrados ponderado

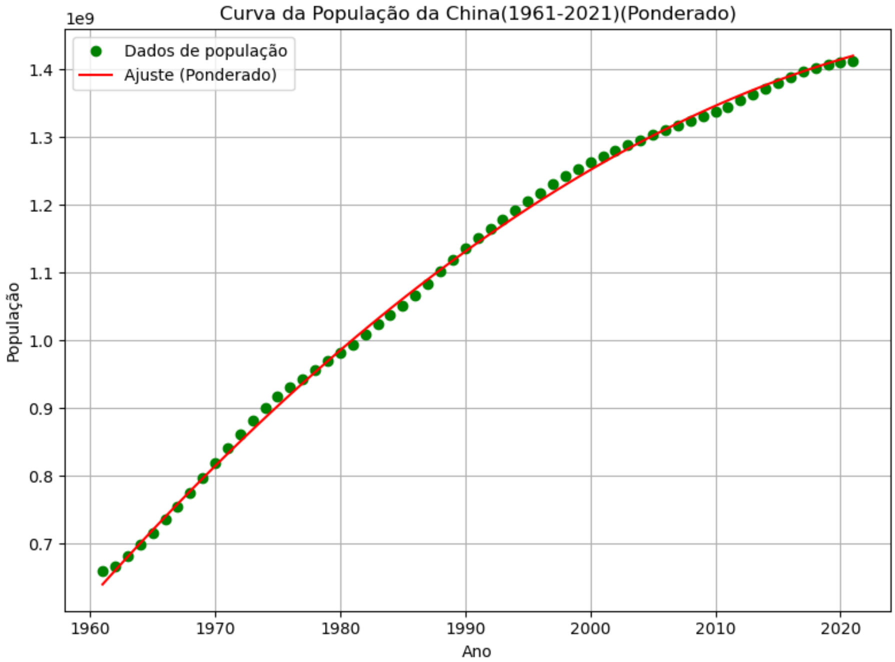

Figura 23: Ajuste da curva polinomial de grau 3 para a primeira função peso da População da China via minimos quadrados ponderado

E os dados de MSE e R^2 foram:

Tabela 5: Erro médio quadrático - MSE e coeficiente de determinação R^2 do ajuste polinomial de grau 3 dos países via minimos quadrados ponderados

País	MSE	R^2
Brasil	3,537,247,463,558.931	0.9983098401385776
Bulgária	39,111,841,062.00217	0.9236146157706085
China	61,750,156,266,311.6	0.9989448177378589

(c) **Modelo linear:**

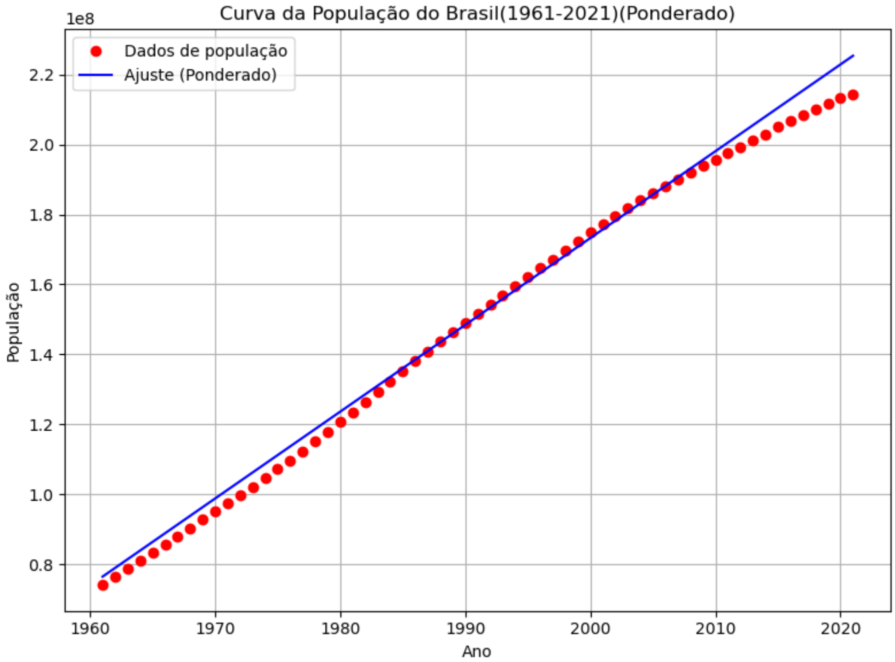

Figura 24: Ajuste da curva linear para a primeira função peso da População do Brasil via minimos quadrados ponderado

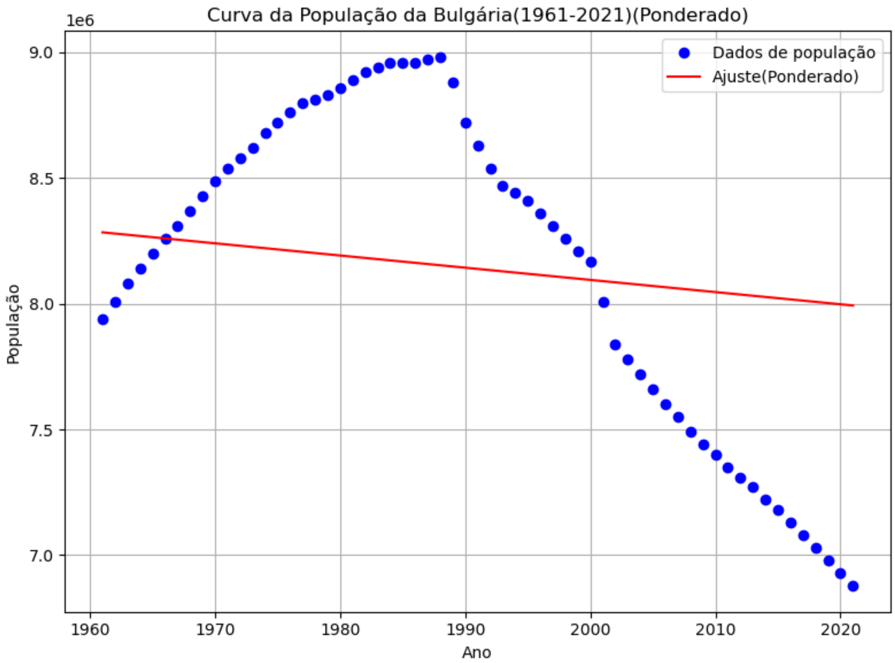

Figura 25: Ajuste da curva linear para a primeira função peso da População da Bulgária via minimos quadrados ponderado

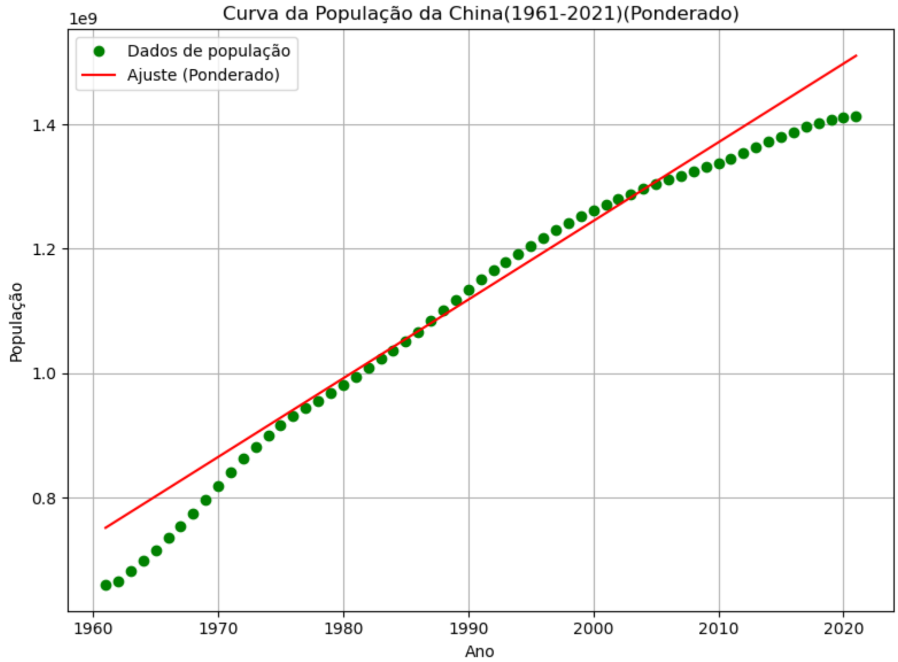

Figura 26: Ajuste da curva linear para a primeira função peso da População da China via minimos quadrados ponderado

E os dados de MSE e R^2 foram:

Tabela 6: Erro médio quadrático - MSE e coeficiente de determinação R^2 do ajuste linear dos países via minimos quadrados ponderados

País	MSE	R²
Brasil	13,377,081,161,478.633	0.9956063951108841
Bulgária	338,697,753,984.5878	0.5294576363435122
China	2,008,659,217,374,633.2	0.9738084628911878

2. **Segunda Função peso:**

   (a) **Polinômio grau 2:**

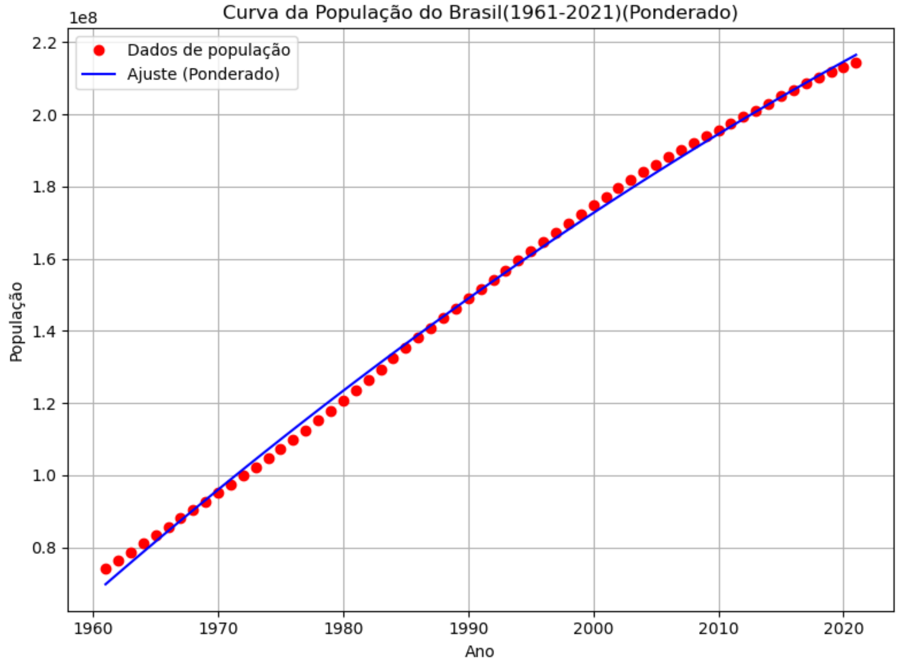

Figura 27: Ajuste da curva polinomial de grau 2 para a segunda função peso da População do Brasil via minimos quadrados ponderado

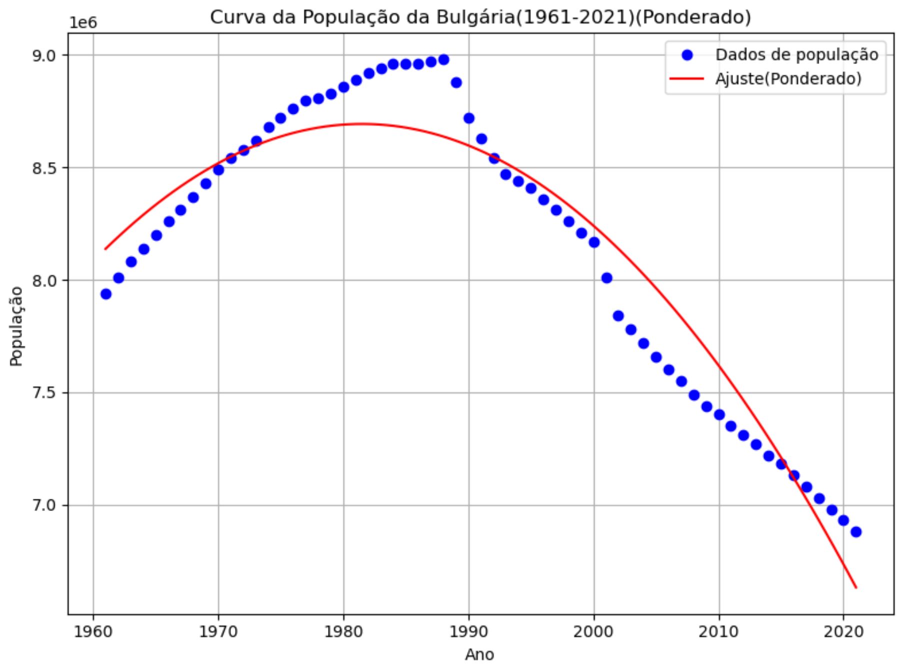

Figura 28: Ajuste da curva polinomial de grau 2 para a segunda função peso da População da Bulgária via minimos quadrados ponderado

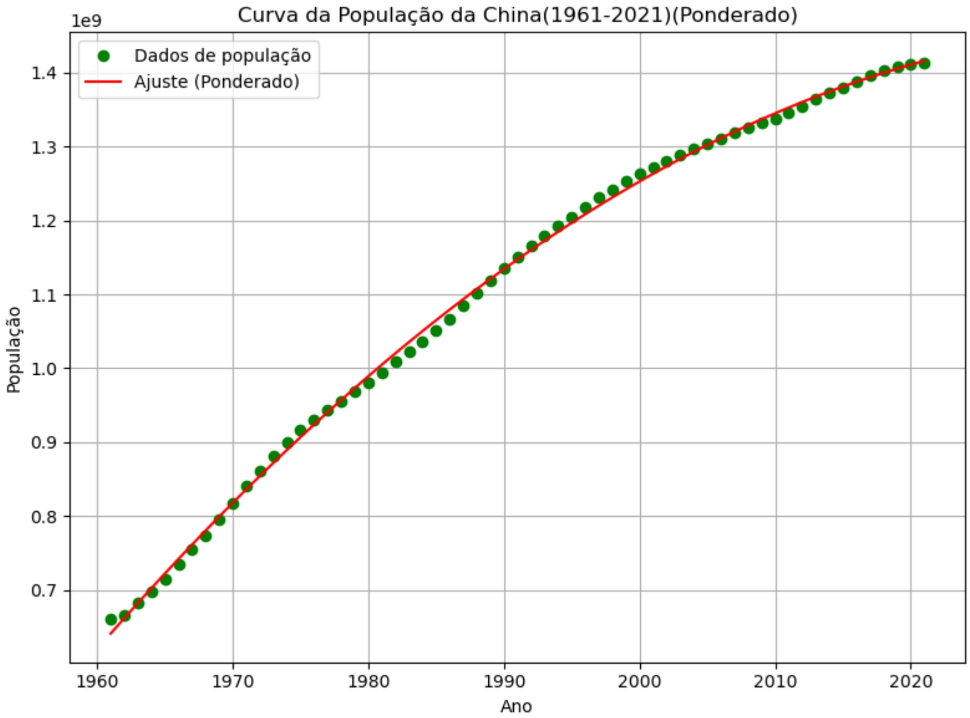

Figura 29: Ajuste da curva polinomial de grau 2 para a segunda função peso da População da China via minimos quadrados ponderado

E os dados de MSE e R^2 foram:

Tabela 7: Erro médio quadrático - MSE e coeficiente de determinação R^2 do ajuste polinomial de grau 2 dos países via minimos quadrados ponderados

País	MSE	R²
Brasil	3,375,907,509,516.374	0.9982388186360449
Bulgária	32,469,318,471.521393	0.9258126606419655
China	54,569,900,295,413.03	0.9989737183045013

(b) **Polinômio grau 3:**

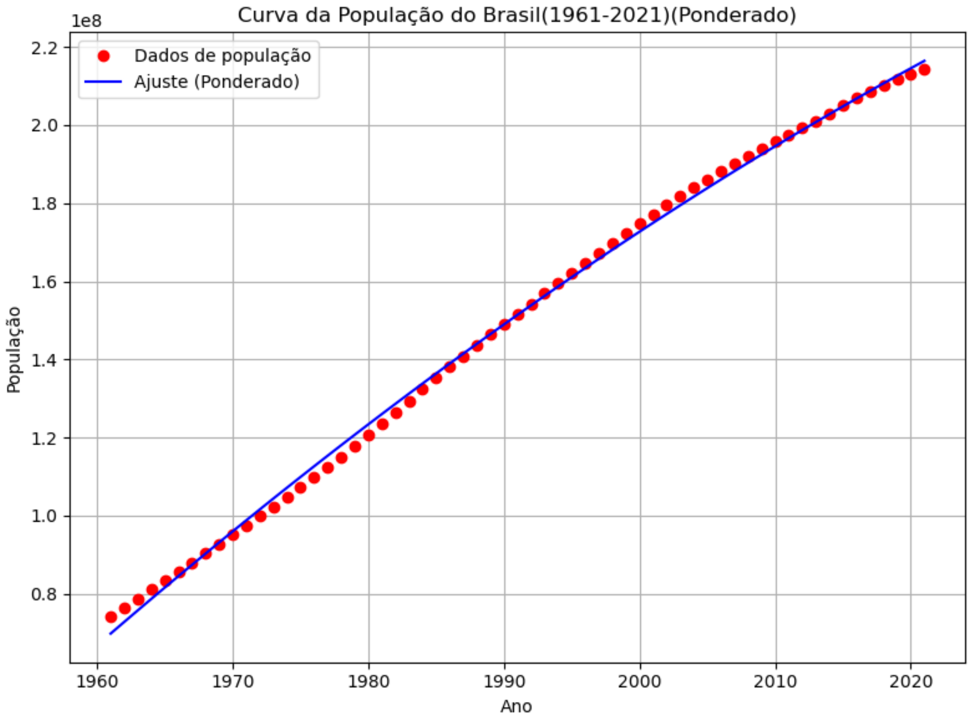

Figura 30: Ajuste da curva polinomial de grau 3 para a segunda função peso da População do Brasil via minimos quadrados ponderado

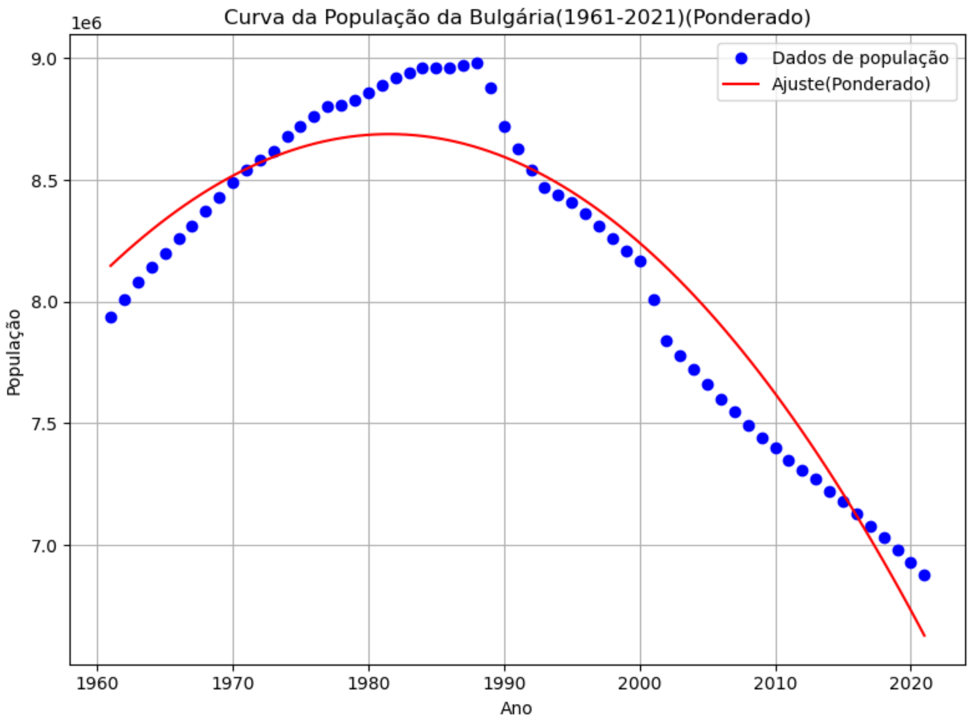

Figura 31: Ajuste da curva polinomial de grau 3 para a segunda função peso da População da Bulgária via minimos quadrados ponderado

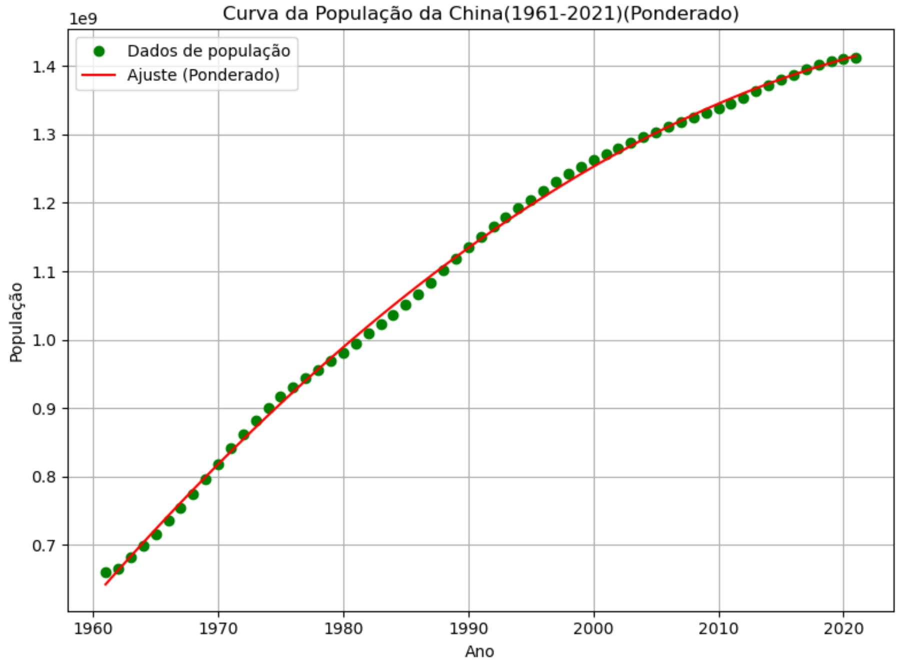

Figura 32: Ajuste da curva polinomial de grau 3 para a segunda função peso da População da China via minimos quadrados ponderado

E os dados de MSE e R^2 foram:

Tabela 8: Erro médio quadrático - MSE e coeficiente de determinação R^2 do ajuste polinomial de grau 3 dos países via minimos quadrados ponderados

País	MSE	R²
Brasil	3,299,306,060,661.0864	0.9982776365161009
Bulgária	33,427,901,460.3141	0.9235499103938889
China	53,422,326,604,442.09	0.998994982670932

(c) **Modelo Linear:**

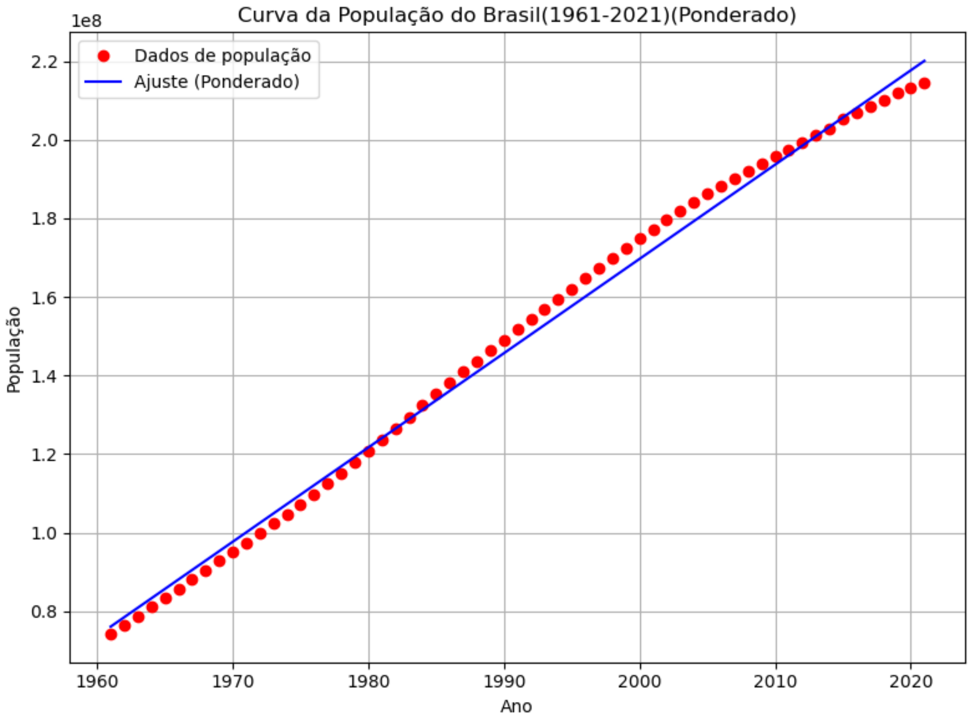

Figura 33: Ajuste da curva linear para a segunda função peso da População do Brasil via minimos quadrados ponderado

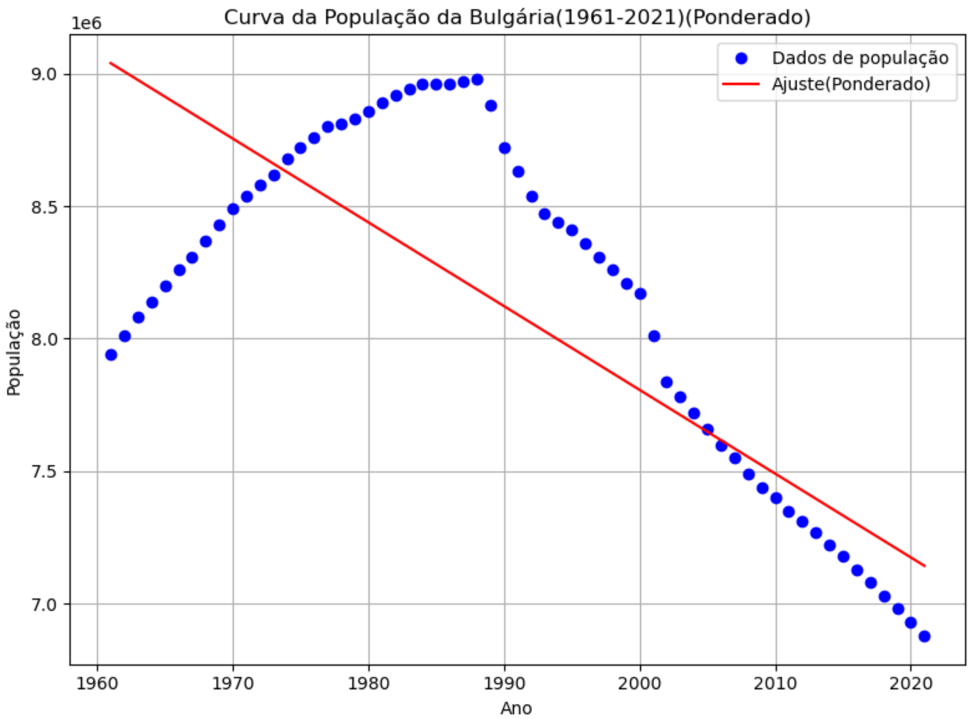

Figura 34: Ajuste da curva linear para a segunda função peso da População do Bulgária via minimos quadrados ponderado

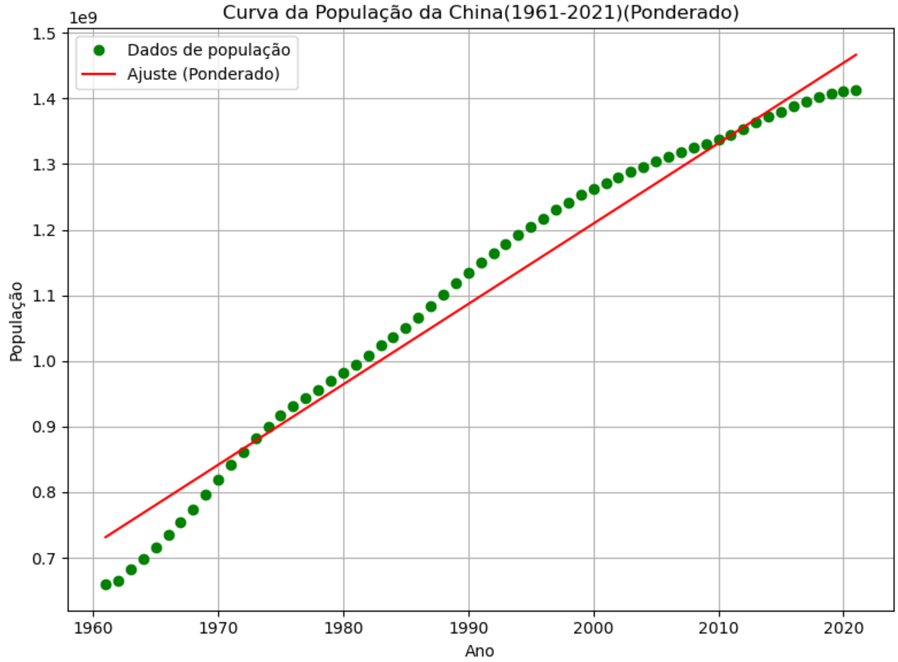

Figura 35: Ajuste da curva linear para a segunda função peso da População da China via Minimos Quadrados Ponderado

E os dados de MSE e R^2 foram:

Tabela 9: Erro médio quadrático - MSE e coeficiente de determinação R^2 do ajuste linear dos países via Minimos Quadrados Ponderados

País	MSE	R²
Brasil	9,729,204,544,366.678	0.9956063951108846
Bulgária	205,108,451,741.2424	0.5294576363435117
China	1,581,755,784,477,203.8	0.9738084628911898

Com base nos dados disponíveis, utilizamos o método dos mínimos quadrados padrão para realizar previsões da população dos países em um período de **10 anos**.O objetivo é dar mais importância aos dados mais recentes, considerando-os mais relevantes para a análise.

Optamos por utilizar o *ajuste polinomial de grau* 2, pois observamos que esse modelo proporcionou uma melhor adaptação às curvas dos dados. Excluímos o modelo linear, pois não conseguiu ajustar adequadamente as curvas, e também não apresentamos os resultados utilizando o polinômio de grau 3, pois os gráficos obtidos foram bastante semelhantes aos resultados com o polinômio de grau 2.

```python
def previsao_populacional(coeficientes, futuro):
    grau = len(coeficientes) - 1
    A = np.vander(futuro, grau + 1)
    predicao = np.dot(A, coeficientes)

    return predicao
```

Figura 36: Previsão populacional de 10 anos com ajuste polinomial de grau 2 via Método dos Mínimos Quadrados Padrão

A seguir, apresentamos os resultados obtidos:

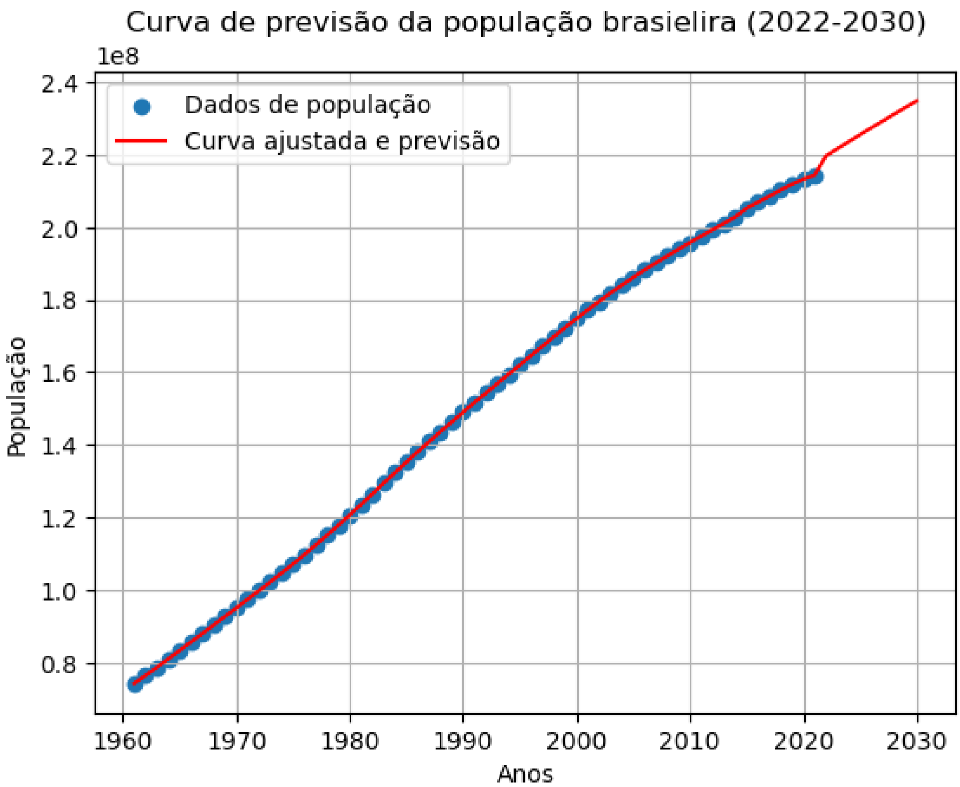

Figura 37: Previsão populacional da população brasileira com ajuste polinomial de grau 2 via Método dos Mínimos Quadrados Padrão

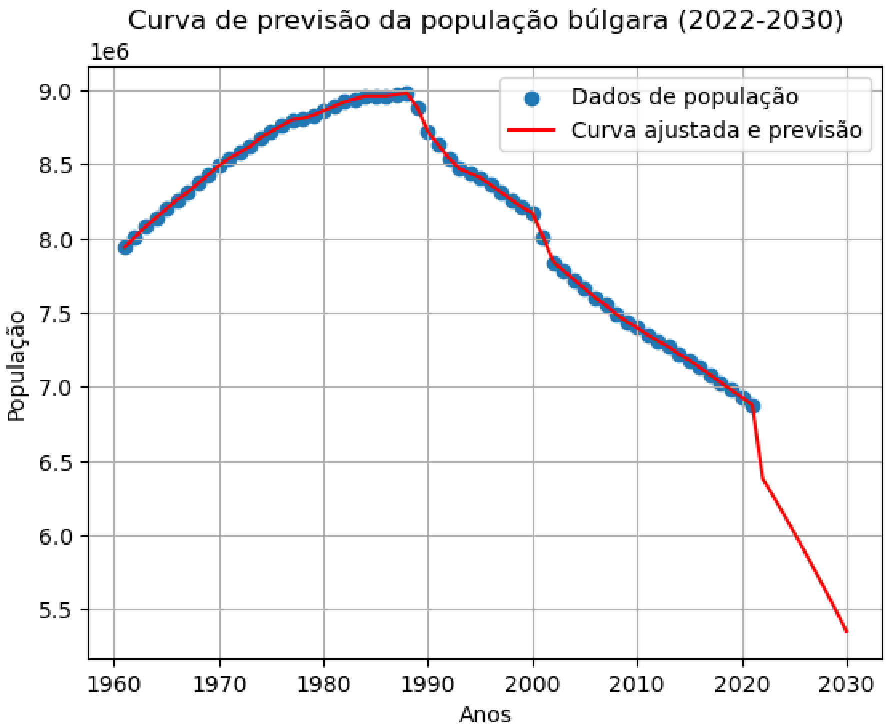

Figura 38: Previsão populacional da população búlgara com ajuste polinomial de grau 2 via Método dos Mínimos Quadrados Padrão

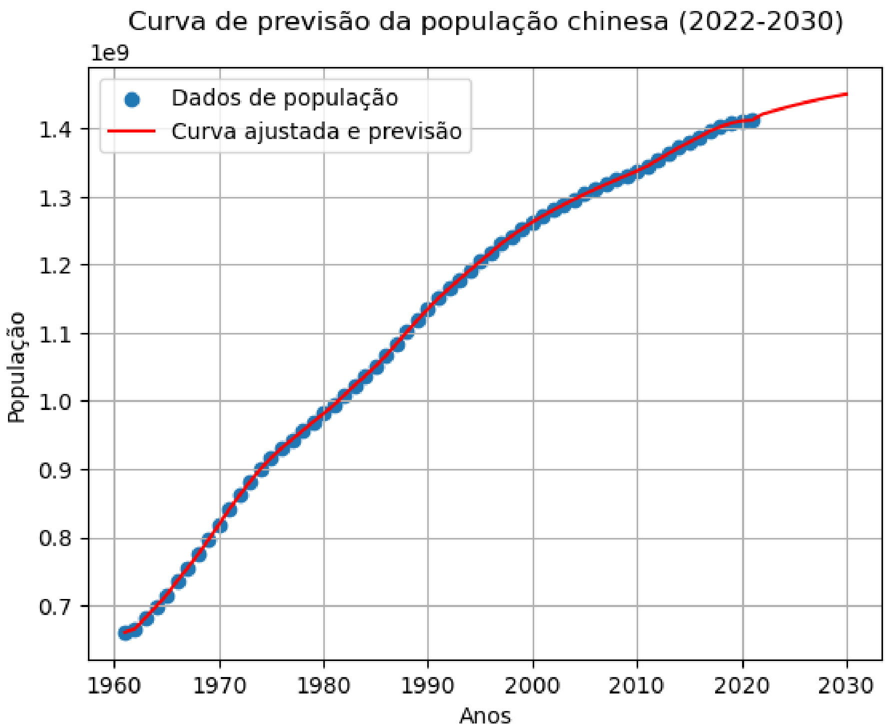

Figura 39: Previsão populacional da população chinesa com ajuste polinomial de grau 2 via Método dos Mínimos Quadrados Padrão

Para comparação:

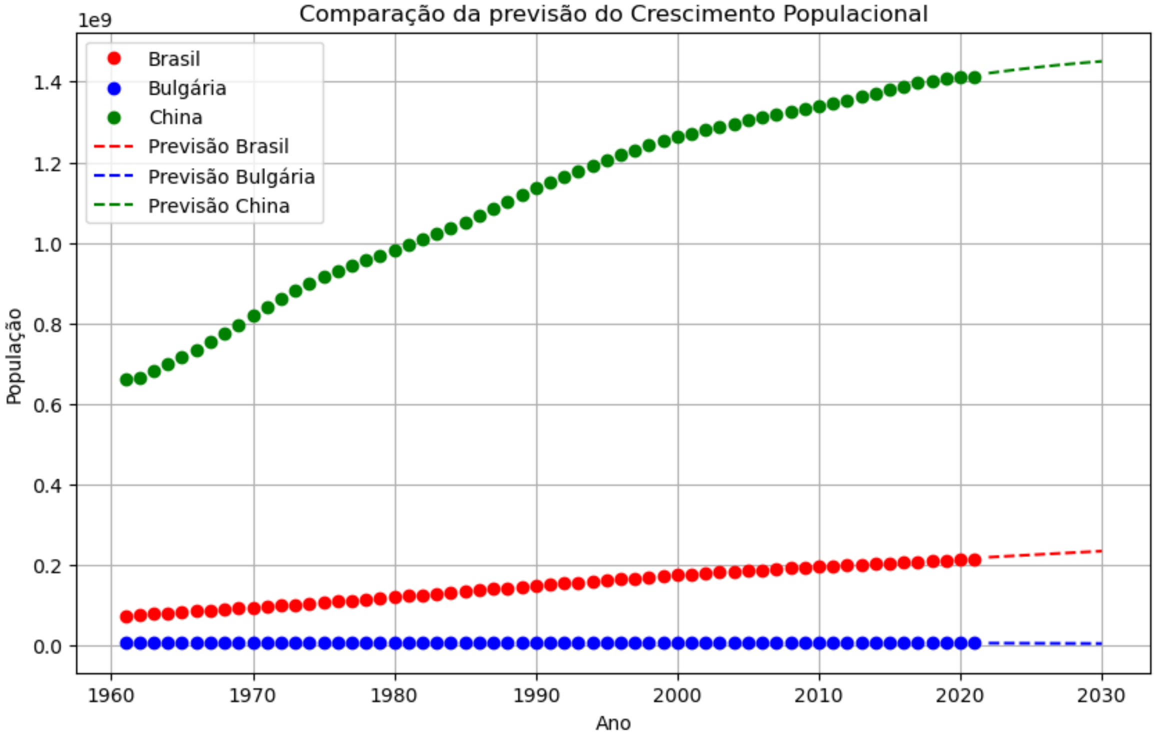

Figura 40: Comparação da previsão populacional entre os páises com ajuste polinomial de grau 2 via Método dos Mínimos Quadrados Padrão

Por fim, utilizando o método dos mínimos quadrados ponderados, realizamos a previsão para **10 anos** a frente também. Optamos, nesse caso, por utilizar o *ajuste polinomial de grau* 3 e a segunda função de peso apresentada mais acima, o de pesos críticos. Excluímos o modelo linear, pois não conseguiu ajustar adequadamente as curvas, e também não apresentamos os resultados utilizando o polinômio de grau 2, pois os gráficos obtidos foram bastante semelhantes aos resultados com o polinômio de grau 3.

A seguir, apresentamos os resultados obtidos:

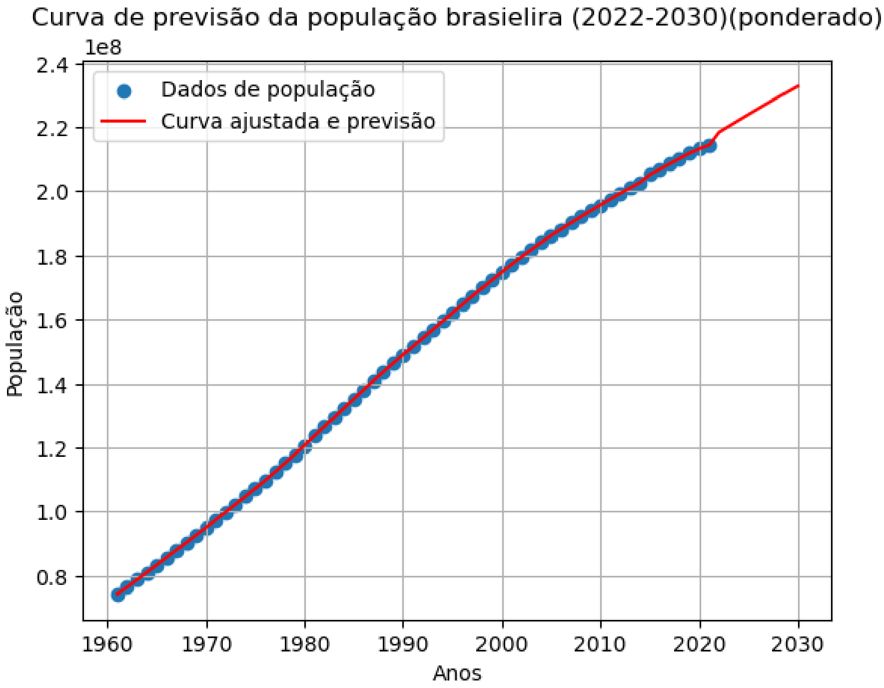

Figura 41: Comparação da previsão populacional da população brasielira com ajuste polinomial de grau 3 via Método dos Mínimos Quadrados Ponderados

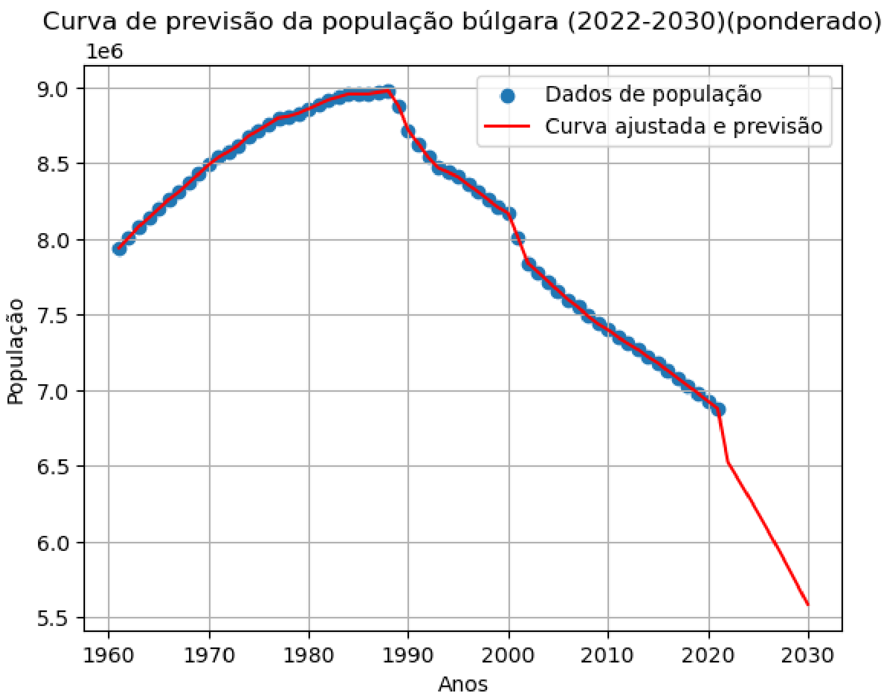

Figura 42: Comparação da previsão populacional da população búlgara com ajuste polinomial de grau 3 via Método dos Mínimos Quadrados Ponderados

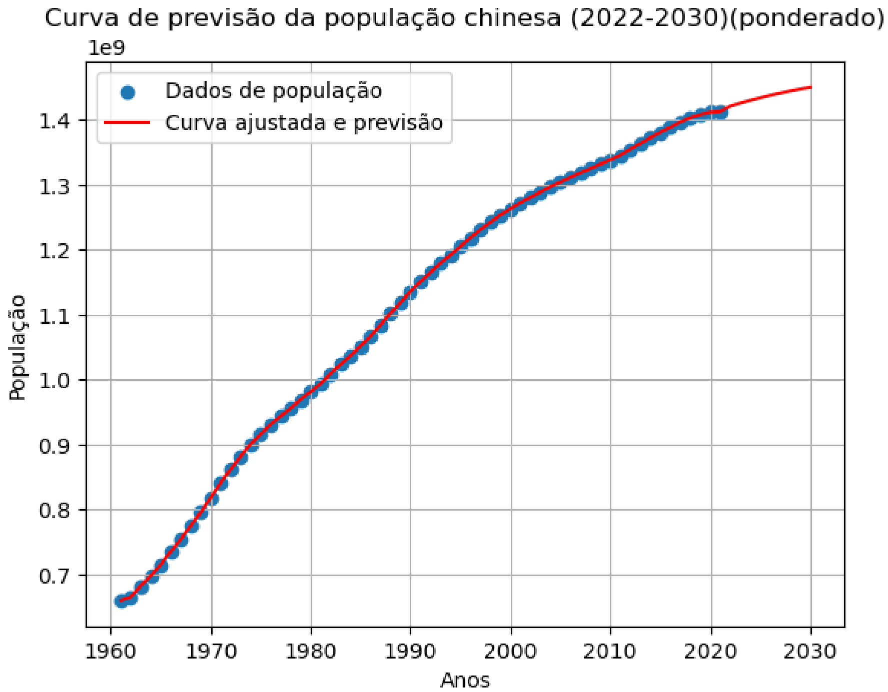

Figura 43: Comparação da previsão populacional da população chinesa com ajuste polinomial de grau 3 via Método dos Mínimos Quadrados Ponderados

Para comparação:

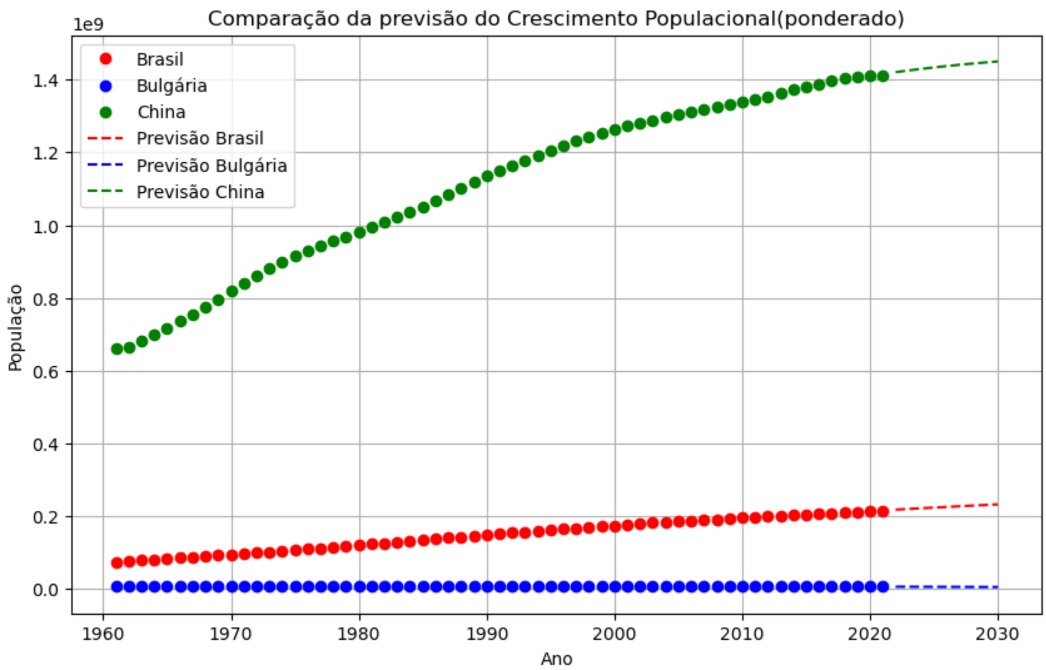

Figura 44: Comparação da previsão populacional entre os páises com ajuste polinomial de grau 2 via Método dos Mínimos Quadrados Ponderados

6 Discussão

O crescimento populacional é um fenômeno dinâmico de extrema importância em várias áreas. Compreendê-lo, aplicá-lo e ser capaz de fazer previsões precisas são aspectos de grande interesse e relevância para diversos setores sociais, industriais e governamentais. Trata-se de um tema de estudo teoricamente fundamental e complexo, pois sua análise requer um amplo conjunto de dados, além de considerar nuances históricas e econômicas de cada região demográfica. A previsão desse crescimento é um verdadeiro desafio de otimização. No entanto, é importante ressaltar que nosso objetivo neste trabalho é compreender o método dos mínimos quadrados e aprender a aplicá-lo em uma situação prática, em vez de solucionar um problema que demandaria conhecimentos mais aprofundados sobre o assunto.

Utilizamos o conhecimento adquirido nas etapas anteriores para realizar uma previsão da população futura, utilizando dados históricos da população, a matriz de Vandermonde e os coeficientes do polinômio encontrados por meio dos métodos dos mínimos quadrados ou dos mínimos quadrados ponderados. Essa aplicação nos permite tanto ajustar uma curva aos dados coletados quanto estimar o comportamento populacional e obter insights sobre possíveis tendências futuras. A previsão é fundamentada no padrão identificado nos dados históricos e nas tendências observadas.

Ao analisar os gráficos de dispersão apresentados anteriormente, pudemos identificar algumas informações e tendências. Essa análise iniciai, por meio dos gráficos de dispersão, fornecem uma visão preliminar das tendências populacionais nos respectivos países.

No caso do **Brasil**, observamos uma clara tendência de crescimento populacional ao longo dos anos, com um aumento gradual até meados da década de 1980. A partir desse ponto, a taxa de crescimento parece diminuir, indicando uma *estabilização* ou até mesmo um ligeiro declínio em alguns anos mais recentes.

Na **Bulgária**, por outro lado, notamos uma dinâmica diferente. Durante o período inicial, a população do país apresentou um crescimento moderado. No entanto, a partir da década de 1990, observa-se uma tendência de *declínio* populacional, caracterizada por uma diminuição constante ao longo dos anos.

Já na **China**, o gráfico de dispersão revela uma história notável. Nos primeiros anos do período analisado, a população se manteve relativamente estável. No entanto, a partir da década de 1970, ocorreu um crescimento populacional significativo e constante, resultando em um *aumento expressivo* ao longo do tempo.

Com base nos resultados iniciais, é possível compreender as razões por trás da escolha desses países para demonstrar as diferenças nas previsões populacionais. O Brasil, um país sul-americano apresenta um crescimento moderado e considerado estável em comparação aos outros dois países. A Bulgária, como país europeu, possui uma população em declínio, enquanto a China, um país asiático em ascensão, demonstra um rápido crescimento populacional.

Diante desses diferentes padrões de crescimento, é relevante analisar como os métodos dos mínimos quadrados se ajustam a cada um deles. Como se comportam esses ajustes em relação aos diferentes métodos empregados? Além disso, uma questão fundamental é a confiabilidade das previsões geradas por esses métodos.

Ao analisarmos os ajustes de curvas, utilizando os métodos dos mínimos quadrados padrão, podemos observar os resultados obtidos. Graficamente, tanto os ajustes polinomiais de grau 2 quanto os de grau 3 apresentaram eficiência semelhante na modelagem dos dados para todos os países, como esperado. No entanto, esses ajustes não foram adequados para aproximar a curva dos dados populacionais da Bulgária. Por outro lado, o modelo linear não foi adequado para modelar as curvas de nenhum dos países, apesar de ter se aproximado das curvas de população do Brasil e da China. A falta de flexibilidade do modelo pode levar a uma má descrição da curva, além da disposição dos dados.

Ao analisarmos as métricas de avaliação, como o erro médio quadrático (MSE) e o coeficiente de determinação (R^2), percebemos que, para os ajustes polinomiais dos três países, os valores são semelhantes, sem grandes discrepâncias. No entanto, devemos considerar que, ao trabalhar com dados populacionais, a relação entre o tamanho da população e o erro não é direta. Portanto, um erro maior para uma população maior não necessariamente indica que o ajuste da curva é pior.

Ao considerarmos o método dos mínimos quadrados ponderados e suas funções de pesos, observamos uma tendência semelhante aos resultados anteriores. O modelo linear não se mostrou eficiente na modelagem dos dados de nenhum dos países, enquanto os ajustes polinomiais de grau 2 e 3 apresentaram resultados comparáveis entre si.

A comparação entre os métodos dos mínimos quadrados (MMQ) e os mínimos quadrados ponderados ($MMQP$) revelou que o MMQ apresentou valores menores de erro médio quadrático (MSE) em relação aos métodos ponderados. Ao analisar as tendências dos resultados, observou-se que a ordem de eficiência foi a seguinte:

$$MMQ < MMQP_2 < MMQP_1 \tag{1}$$

onde $MMQP_1$ e $MMQP_2$ representam o método dos mínimos quadrados ponderados com a primeira e segunda função peso, respectivamente.

Esses resultados indicam que, independentemente do método utilizado, o modelo linear não é adequado para representar as curvas de crescimento populacional dos países estudados, uma vez que os dados considerados não tinham um padrão linear, como observado nos gráficos de dispersão. Por outro lado, os ajustes polinomiais de grau 2 e 3 se mostram mais eficientes e apresentam resultados comparáveis entre si.

A aplicação do método dos mínimos quadrados ponderados, considerando pesos diferenciados aos pontos de dados, pode melhorar a eficiência do ajuste da curva em alguns casos. No entanto, essa melhoria não foi significativa em todos eles. Ademais, a função de peso que prioriza os 10 últimos anos apresentou uma maior eficiência em comparação à função que utiliza os erros absolutos. Essa abordagem reflete a tendência de que as informações mais recentes possuem maior influência na previsão do comportamento futuro da população.

Ao analisarmos as previsões de comportamento populacional, chegamos à conclusão de que a melhor previsão foi obtida por meio do método dos mínimos quadrados ponderados, utilizando pesos calculados com base nos dados dos últimos 10 anos. Essa abordagem resultou em uma previsão mais consistente e condizente com os dados observados, visualmente.

Ao compararmos as estimativas feitas para a população chinesa em 2029, por exemplo, podemos observar uma notável similaridade entre a aproximação feita pelo método dos mínimos quadrados e as estimativas realizadas pela Academia Chinesa de Ciências Sociais ($CASS$) em 2019. Os resultados da $CASS$ indicam que a população chinesa atingiria cerca de $1,44$ bilhão de habitantes em 2029, o que é muito próximo à estimativa obtida pelo método dos mínimos quadrados.

É importante considerar que a incerteza aumenta à medida que projetamos para um período futuro mais distante. A seleção do método de previsão e do horizonte de previsão adequados devem levar em conta a incerteza inerente à projeção de longo prazo e os desafios relacionados a mudanças bruscas na população.

Ao realizar previsões populacionais, é crucial estar ciente dos limites e incertezas associados a essas estimativas. Mudanças abruptas na população e fatores imprevistos podem afetar o comportamento populacional e o ajuste da curva. Portanto, é necessário considerar esses aspectos para obter estimativas mais precisas e confiáveis.

7 Conclusão

Em conclusão, a aplicação do método dos mínimos quadrados para analisar e prever o crescimento populacional em diferentes países revela insights interessantes sobre as tendências demográficas e a eficiência dos modelos de ajuste de curvas. Ao utilizar dados históricos da população e aplicar o método dos mínimos quadrados, pudemos ajustar curvas polinomiais e realizar previsões para o comportamento futuro da população.

Os resultados obtidos mostraram que os ajustes polinomiais de grau 2 e 3 apresentaram uma melhor capacidade de modelar os dados de crescimento populacional em comparação com o modelo linear. Isso sugere que a dinâmica populacional tende a ter um comportamento mais complexo do que uma relação linear simples.

Além disso, a aplicação do método dos mínimos quadrados ponderados, considerando pesos diferenciados para os pontos de dados, proporcionou melhorias em alguns casos, mas não em todos. A função de peso que prioriza os dados mais recentes, refletindo a influência decrescente ao longo do tempo, mostrou-se mais eficiente na previsão do comportamento futuro da população.

No entanto, é importante ressaltar que as previsões populacionais são acompanhadas de incertezas. O método dos mínimos quadrados e outros modelos de ajuste de curvas são ferramentas úteis para obter estimativas e insights sobre tendências populacionais, mas devem ser usados com cautela. Mudanças inesperadas nas taxas de natalidade, mortalidade ou migração podem afetar significativamente as projeções populacionais.

Portanto, é essencial considerar as limitações dos modelos de previsão, a incerteza inerente à projeção de longo prazo e outros fatores que possam impactar o crescimento populacional. As previsões devem ser atualizadas regularmente e ajustadas com base em novos dados e informações relevantes para obter estimativas mais precisas.

No geral, o uso do método dos mínimos quadrados para análise e previsão do crescimento populacional é uma abordagem valiosa que pode fornecer insights significativos sobre as tendências demográficas. No entanto, é fundamental manter uma abordagem cautelosa e atualizar constantemente as previsões à medida que novos dados e circunstâncias se tornam disponíveis.

8 Referências

Dados Mundiais. Crescimento da População no Brasil. Disponível em: `https://www.dadosmundiais.com/america/brasil/crescimento-populacao.php`. Acesso em: 29 jun. 2023.

Dados Mundiais. Crescimento Populacional na Bulgária. Disponível em: `https://www.dadosmundiais.com/europa/bulgaria/crescimento-populacao.php`. Acesso em: 29 jun. 2023.

Dados Mundiais. Crescimento Populacional na China. Disponível em: https://www.dadosmundiais.com/asia/china/crescimento-populacao.php. Acesso em: 29 jun. 2023.

PAIVA, Afonso. SIMEONI, Fabricio. O método dos Mínimos Quadrados. Disponível em: https://ae4.tidia-ae.usp.br/access/content/group/ff1f4693-e871-413f-ac2f-6c4ab44f10 Slides/mmq.pdf. Acesso em 29/06/2023.

ALMEIDA, Renato Neves de. O método dos mínimos quadrados: estudo e aplicações para o ensino médio. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/28052015Renato-Neves-de-Almeida.pdf. Acesso em 29/06/2023.

GUITARRARA, Paloma. Crescimento Populacional. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/geografia/o-crescimento-populacional-no-mundo.htm. Acesso em 29/06/2023.

GONÇALVES, Fabiana Santos. Crescimento Populacional. Disponível em: https://www.infoescola.com/geografia/crescimento-populacional/. Acesso em 29/06/2023.

PENG, Xiujian. BBC. População da China está prestes a encolher pela 1ª vez em 60 anos. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/internacional-61746137#:~:text=Encolhimento%20%E2%80%94%20suposi%C3%A7%C3%B5es%20razo%C3%A1veis&text=Em%202019%2C%20a%20Academia%20Chinesa,popula%C3%A7%C3%A3o%20de%201%2C46%20bilh%C3%A3o. Acesso em: 03/07/2023.