Grafo de ruas da ilha de Manhattan

Anne Kéllen Reis; Luis Roberto Piva; Luiz Francisco Faria

Disciplina: Cálculo Numérico - SME0205

Professor: Antonio Castelo Filho

22 de maio de 2023

Sumário

- Introdução
- Metodologia
- Resultados
- Conclusões
- Referências

Ferramentas computacionais:

- MATLAB

Introdução

Objetivos

Análise dos diferentes métodos (diretos e iterativos) ensinados em sala de aula na resolução de sistemas lineares de um dado problema.

Problema: Análise da temperatura da cidade de Manhattan - EUA.

Introdução

Abordagem:

- Ruas são arestas que conectam as esquinas.
- As esquinas são vértices.

Após a identificação da maior componente conexa, construímos a matriz penalidade e a matriz Laplaciana.
Informações dadas:

- Arquivo com as coordenadas (x, y) de cada vértice;
- Arquivo com as arestas que conectam cada vértice;

Definição de grafo

Um grafo é uma estrutura matemática composta por um conjunto de vértices (ou nós) e um conjunto de arestas (ou conexões) que ligam esses vértices. É uma representação visual e abstrata de relacionamentos entre objetos ou entidades.

Introdução

Matriz Penalidade

Estabiliza a solução de um sistema linear mal-condicionado, adicionando um termo de penalização à matriz de coeficientes orignal.

Matriz Laplaciana

Descreve a relação entre os nós ou pontos em uma rede, especialmente em problemas de difusão de calor.

$L = D - A$

-D é a matriz diagonal que contém os graus dos vértices do grafo associado ao sistema linear;

-A é a Matriz Adjacência;

- Método Laplace-Beltrami

Introdução

Aplicação da metodologia:

- Selecionamos k valores ($k << n$), sendo n número de vértices da componente encontrada
- Aleatóriamente escolheu-se 80 vértices aleatórios desta mesma componente para atribuir valores no intervalo de (0, 10]
- Construção da matriz de Penalidades e do vetor solução inicial
- $\alpha = 1.0e7$
- Construção da matriz Laplaciana

A resolução dos métodos é feita para resolver o sistema:

$$(L + P)x = Pb,$$

- com a técnica da matriz de Penalidades;
- para encontrar uma interpolação;

Introdução

Métodos utilizados

1. Métodos Diretos
   - Decomposição LU
   - Decomposição de Cholesky
2. Métodos Iterativos
   - Método Gauss-Jacobi
   - Método Gauss-Seidel
   - Método dos Gradientes conjugados

Introdução - Decomposição LU

Passos:

1. Dado o sistema linear $Ax = b$;
2. Decompor a matriz A em duas matrizes L(matriz triangular inferior com diagonal principal igual a 1) e U(matriz triangular superior).
3. Defina $y=Ux$
4. Resolver do sistema $Ly = b$ - substituição progressiva.
5. Resolver o sistema $Ux = y$ - substituição regressiva

Introdução - Decomposição de Cholesky

É um método utilizado para resolver sistemas lineares simétricos e positivos definidos de forma eficiente. É um processo de fatoração de uma matriz em duas componentes: uma matriz triangular inferior e sua transposta.

Passos:

1. Verificação se a matriz é simétrica e positiva;
2. $A = H \times H^T$
3. Resolver o sistema usando substituição progressiva regressiva, como no método anterior.

Introdução - Gauss-Jacobi

É um método que permite obter uma solução aproximada ao realizar iterações sucessivas, atualizando os valores das incógnitas até alcançar uma convergência desejada.

Passos:

1. Tranformar o sistema de equações $A \cdot x = b$ em um sistema equivalente da forma $x = Cx + g$, e resolvê-lo.
2. Inicializar uma estimativa inicial
3. A cada iteração se atualiza a estimativa das incognitas
4. Repete até que o critério de convergência seja satisfeito.

Introdução - Método de Seidel

É um método que permite obter uma solução aproximada por meio de iterações sucessivas, atualizando os valores das incógnitas. No entanto, o método Gauss-Seidel leva em consideração as estimativas mais recentes das incógnitas durante o processo iterativo.

Passos:

1. Tranformar o sistema de equações $A \cdot x = b$ em um sistema equivalente da forma $x = Cx + g$, e resolvê-lo.
2. Inicializar uma estimativa inicial para as incógnitas
3. Para cada iteração k, atualizar as estimativas das incógnitas e o passo se repete até que o critério de convergência seja satisfeito.

Introdução - Método dos Gradientes Conjugados

É um método iterativo utilizado para resolver sistemas lineares simétricos e positivos definidos. É especialmente eficiente para sistemas de grande escala, evitando a necessidade de armazenar a matriz completa na memória. O método encontra a solução aproximada ao minimizar o erro iterativamente.

Passos:

1. Trocar o problema de encontrar uma solução $A \cdot x = b$ pelo problema de encontrar um minimizador de $\frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, com A SPD.
2. Encontrar a solução é encontrar o ponto x tal que $Ax - b = 0$, ou seja, o minimizador da função.
3. Converge com iterações finitas.

Resultados

O grafo gerado pela construção da matriz adjacência foi:

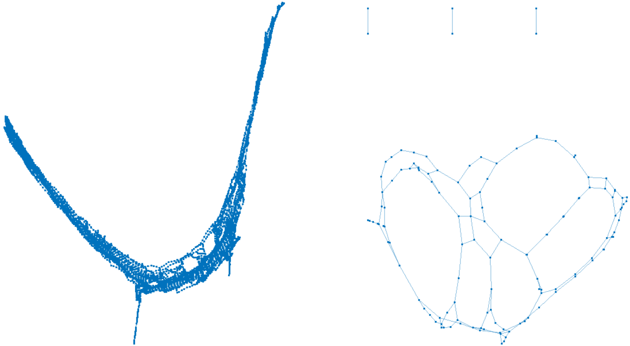

Figura: Grafo de ruas de Manhattan gerado pelo MATLAB

Resultados

Por meio da função adjacência e da função SplitEdges foi possível encontrar:

- Número total de componentes conexas;
- Número de vértices em cada componente;
- Matriz com os vértices de cada componente conexa;

Por meio desses dados foi possível construir a representação gráfica da matriz adjacência de cada componente conexa.

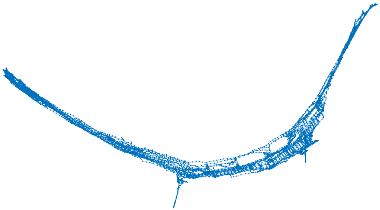

Figura: Maior componente conexa do grafo de Manhattan

Resultados

Considerações:

- Todos os métodos convergiram para uma solução satisfatória;
- Similaridade entre os valores da interpolação e não houve valores com grande discrepância

Método	tempo
Decomposição LU	3,8625
Decomposição LU com barra	3,1599
Cholesky	3,2326
Cholesky com barra	1,6573
Jacobi	899,5014
Gauss-Seidel	460,6127
Gradientes conjugados	146,7786

Tabela: Valores de tempo de execução dos métodos diretos e iterativos em segundos

Conclusão

A análise dos resultados variou de acordo com:

- Implementação
- Complexidade
- tempo de execução

A análise dos métodos Diretos:

Cholesky com barra < *LU com barra*

Cholesky < *LU*

A análise dos métodos Iterativos:

Gradiente conjugado < *Gauss-Seidel* < *Jacobi*

Conclusão

Em resumo, a escolha entre Métodos Diretos e Métodos Iterativos depende das características do sistema linear, da precisão desejada, da complexidade computacional tolerável e dos recursos disponíveis. Cada método possui vantagens e desvantagens, e é importante considerar cuidadosamente esses aspectos ao selecionar a abordagem mais adequada para resolver sistemas lineares em um determinado contexto.

Referências

- PAIVA, Afonso. Sistema Lineares: Métodos Diretos. Disponível em: https://ae4.tidia-ae.usp.br/access/content/group/ff1f4693-e871-413f-ac2f-6c4ab44f10b5/Slides/linsis_diretos.pdf. Acesso em 20/05/2023.
- PAIVA,Afonso. Sistema Lineares: Métodos Iterativos. Disponível em: https://ae4.tidia-ae.usp.br/access/content/group/ff1f4693-e871-413f-ac2f-6c4ab44f10b5/Slides/linsis_iterativo.pdf. Acesso em 20/05/2023.

Referências

- ANDRETTA,Marina. TOLEDO, Franklina. Resolução de sistemas de equações lineares: Métodos dos Gradientes Conjugfados. Disponível em: https://sites.icmc.usp.br/andretta/ensino/aulas/sme0100-2-12/aula6-gradconj.pdf. Acesso em 20/05/2023.
- SCHEWCHUK,Jonathan Richard. Classroom figures for the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain. Disponível em: https://ae4.tidia-ae.usp.br/access/content/group/ff1f4693-e871-413f-ac2f-6c4ab44f10b5/Slides/painless-conjugate-gradient-figs.pdf. Acesso em 19/05/2023.