

SME0205 - Métodos do Cálculo Numérico I

Modelagem e previsão de crescimento populacional utilizando o método dos mínimos quadrados (e ponderados)

Anne Kéllen de Nazaré dos Reis Dias
Luiz Francisco Franca de Farias
Luis Roberto Piva

6 de Julho de 2023

Introdução

Motivação

O **crescimento populacional** é um fenômeno que afeta a economia, demografia e planejamento urbano. A compreensão desse fenômeno influencia na criação de políticas públicas e no desenvolvimento de estratégias para o futuro além de ser um bom indicativo em relação ao desempenho dos governantes e da boa qualidade de vida dos moradores.

Objetivo

Aproximar uma função qualquer (conhecida ou não) por uma combinação de funções conhecidas de forma que seja possível encontrar a melhor função possível

Minimizando a História do MMQ

Aplicação dos método dos mínimos quadrados

- 1 Mínimos Quadrados Padrão
- 2 Mínimos Quadrados Ponderados

Histórico do método:

- Análise de fenômenos astronômicos
- XVIII - XIX fundametação teórica do modelo
- Legendre e Gauss
- Melhor estimativa

$$MMQ \approx \min \sum (y_{real} - y_{previsto})^2 \quad (1)$$

- Equações Normais

Minimos Quadrados padrão

Método dos Mínimos Quadrados-Padrão

Minimos quadrados é uma técnica que ajusta uma dada curva aos dados observados, reduzindo ao mínimo a diferença entre os valores reais e os valores previstos.

$$\min \sum (y_{real} - y_{previsto})^2 \quad (2)$$

Uma ferramenta essencial do método dos mínimos quadrados é a **Matriz de Vandermonde**

Matriz de Vandermonde

Matriz de Vandermonde

Essa matriz é construída de maneira que cada elemento seja o valor de uma variável (normalmente representada por x) elevada a uma determinada potência. Ela consiste em uma sequência de colunas, onde cada coluna corresponde a uma potência crescente da variável x .

A matriz de Vandermonde é uma matriz especial. Ela possui propriedades importantes e é aplicada em uma variedade de problemas, tornando-se uma ferramenta valiosa na análise e manipulação de funções e equações.

- Problemas de interpolação
- Ajuste de curvas

Matriz de Vandermonde

Um exemplo geral seria:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

onde os valores x_1, x_2, \dots, x_n são os valores da variável x correspondentes aos dados.

Desempenha papel no método:

- Encontrar os coeficientes
 - ▶ Contribuição dos termos do polinômio no ajuste e forma da curva

Erro Médio Quadrático e Coeficiente de determinação

Para avaliar se o modelo é apropriável:

Erro quadrático médio (MSE)

Medida que avalia o erro médio entre os valores reais e os valores previstos pelo modelo. Quanto menor o valor do MSE, melhor o ajuste do modelo.

Coeficientes de determinação (R^2)

É a medida estatística que indica a proporção da variabilidade dos dados observados. Sua variação é de 0 a 1, onde 1 corresponde a um ajuste perfeito e 0 indica a não variação dos dados.

O Erro Quadrático médio **quantifica a diferença entre os valores reais e previstos.**

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \quad (4)$$

onde n é o número de observações, x_i é o valor observado e y_i é o valor previsto pelo modelo.

Enquanto, que o coeficiente de determinação R^2 **quantifica a proporção de variação explicada pelo modelo**

- Matriz de correlação
 - ▶ É uma matriz simétrica que indica a correlação entre as variáveis

Mínimos Quadrados Ponderados

Mínimos Quadrados Ponderados

A função objetivo ainda consiste em minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores previstos pela curva ajustada. Entretanto, cada termo da soma é multiplicado pelo peso correspondente à observação.

$$\min \sum_{i=1}^n (\rho_i (y_{real_i} - y_{previsto_i})^2) \quad (5)$$

onde n é o número de observações, y_{real_i} são valores observados dos dados, $y_{previsto_i}$ são valores previstos pela curva, ρ_i é o peso atribuído a observação y_{real_i}

Pesos Ponderados

Na estimativa dos coeficientes, os pontos dos dados podem ser ponderados de forma diferente com base em certos critérios.

Os pesos foram calculado de duas maneiras diferentes:

1 Função do Erro Absoluto

► Erros absolutos de cada ponto

- ★ Quanto maior o erro absoluto, maior o peso atribuído ao ponto correspondente.
- ★ Enfatiza pontos de dados discrepantes em relação a média.

2 Função dos Anos Críticos

► Critérios específicos

- ★ Atribuição de pesos diferentes aos dados mais recentes (10 anos).

Minimos Quadrados Ponderados

O Método dos Mínimos quadrados padrão também utiliza um tipo de peso, porém esse peso é o mesmo para todos os pontos. Assim sendo, os pesos únicos, para o MMQ, e os pesos ponderados são usados na etapa de ajuste do modelo:

- Aplicação do Método dos Mínimos Quadrados (e Ponderados) para ajustar a curva das populações
- Verificação do modelo
 - ▶ MSE
 - ▶ R^2

Fundamentação do Trabalho:

- Problema: crescimento populacional
- Python

Metologia da construção do código:

- Leitura e armazenamento dos dados:
 - 1 Brasil (1961-2021)
 - 2 Bulgária (1961-2021)
 - 3 China (1961-2021)
- Ajuste das curvas pelo MMQ e pelo MMQ ponderados
- Verificação do ajuste pelo MSE e R^2
- Feito o ajuste das curvas usando grau 2,3 e o modelo linear
- Previsão do crescimento populacional

Resultados

Parte I

- Anos entre 1961 e 2021
- Base de dados: *DadosMundiais.com*
- Análise exploratória
 - ▶ Tendências, padrões, *outliers*
- Gráfico de dispersão

Gráfico de dispersão - é uma ferramenta gráfica utilizada para visualizar a relação entre duas variáveis numéricas. Tal ferramenta exibe no plano cartesiano pontos que representam pares de valores correspondentes às variáveis em análise. Dessa forma é possível visualizar tendências, padrões e correlações entre as variáveis bem como padrões não lineares.

Gráfico de Dispersão: Brasil

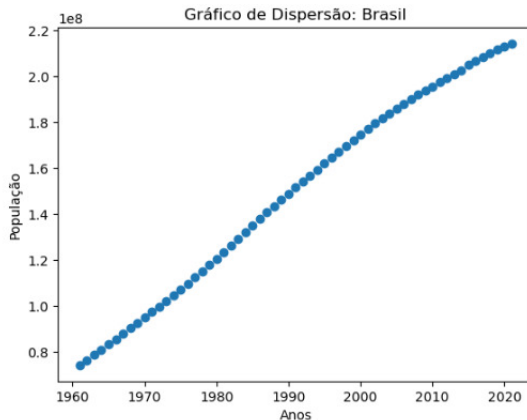


Gráfico de Dispersão: Bulgária

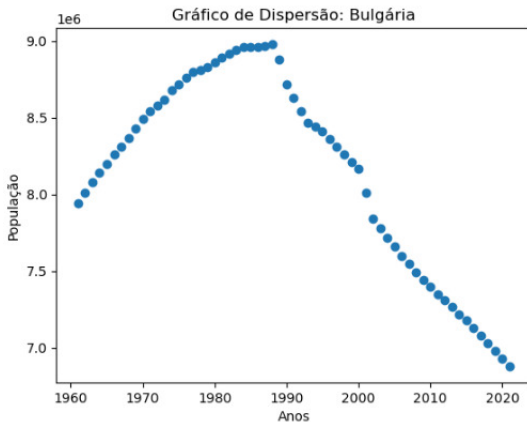
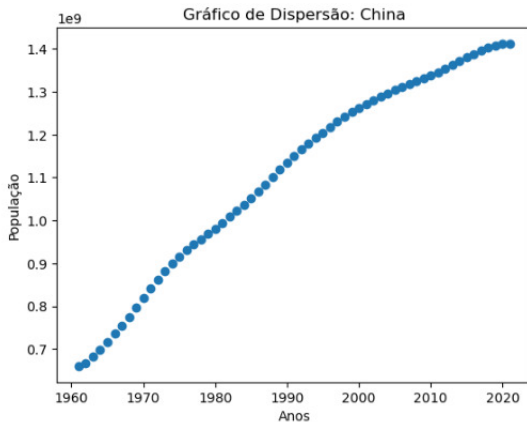


Gráfico de Dispersão: China



Resultados

Parte II

A **taxa de crescimento populacional** é um indicador crucial que representa a variação percentual no tamanho da população ao longo do tempo. Ajuda a compreender o ritmo de aumento ou diminuição dos indivíduos em uma certa área geográfica durante certo período

- Identificar os anos com as taxas de crescimento mais elevadas
- Informações relevantes que ajudam a identificar tendências de crescimento populacional.

Calculo da taxa de crescimento:

$$T = \left(\frac{P_f - P_i}{P_i} \right) \times 100 \quad (6)$$

P_i - população inicial

P_f - população final

Considerações dos dados

Taxa de crescimento populacional:

- Positiva - aumento líquido da população ao longo do tempo
- Negativa - diminuição líquida da população ao longo do tempo

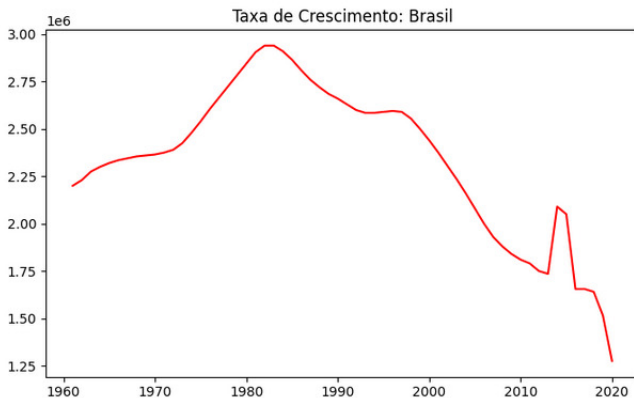
Valores não considerados devido a falta de dados correlacionados obtidos de maneira inteligente (não estamos em otimização).

- Taxa de natalidade
- Taxa de mortalidade
- Taxa de migração

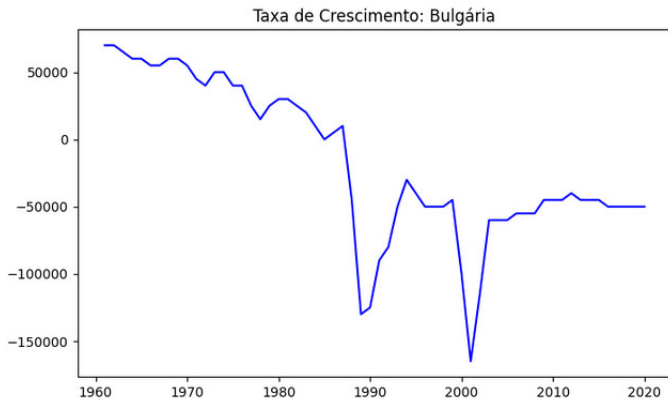
Valores coletados são percentuais anuais

- Comparação de crescimento entre diferentes populações
 - ▶ variações geográficas
 - ▶ variações temporais
 - ▶ recursos naturais
 - ▶ qualidade de vida

Taxa de Crescimento da população brasileira



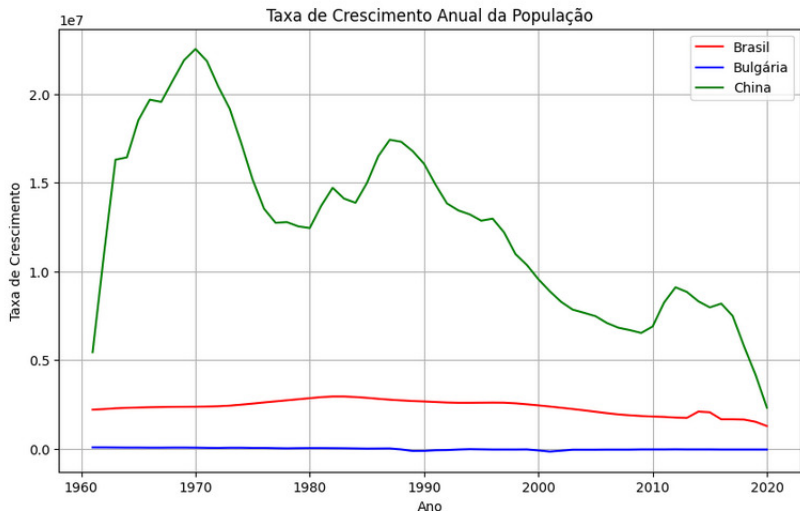
Taxa de Crescimento da população búlgara



Taxa de Crescimento da população chinesa



Comparação das Taxas de Crescimento



Resultados

Parte III e IV

Representação dos ajustes:

- Modelo polinomial e Linear

Ajuste da curva populacional

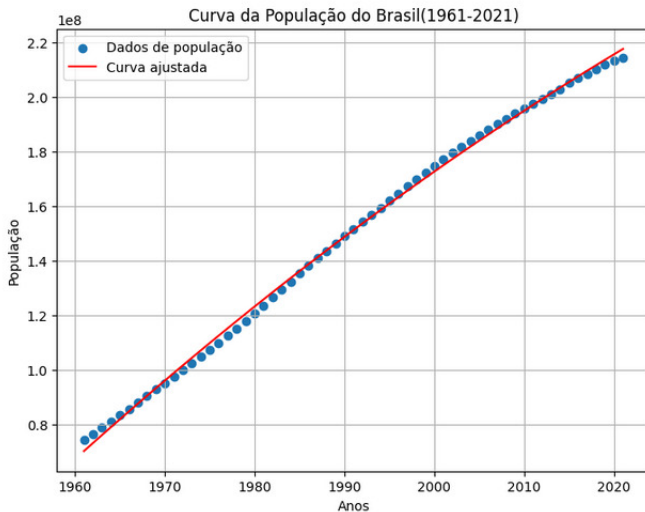
- Método dos mínimos quadrados
- Método dos mínimos quadrados ponderados

Ajuste polinomial:

- MMQ e MMQ Ponderados
 - ▶ Polinômio de Grau 2
 - ▶ Polinômio de Grau 3
 - ▶ Modelo Linear

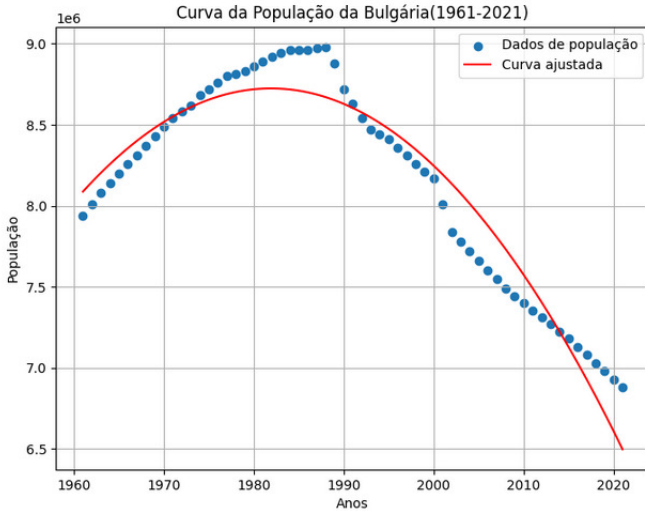
Resultados - Minimos Quadrados Padrão

Ajuste polinomial grau 2- Brasil



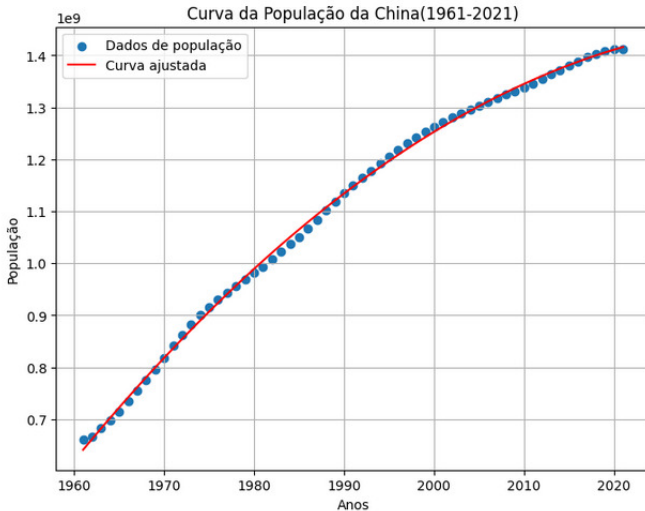
Resultados - Minimos Quadrados Padrão

Ajuste polinomial grau 2- Bulgária



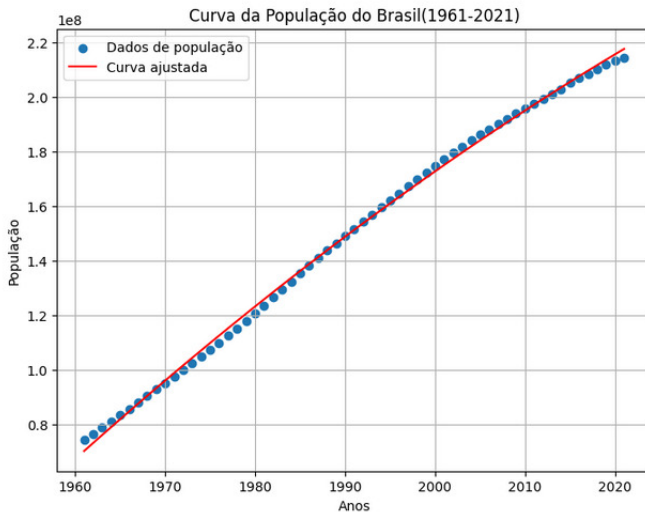
Resultados - Mínimos Quadrados Padrão

Ajuste polinomial grau 2-China



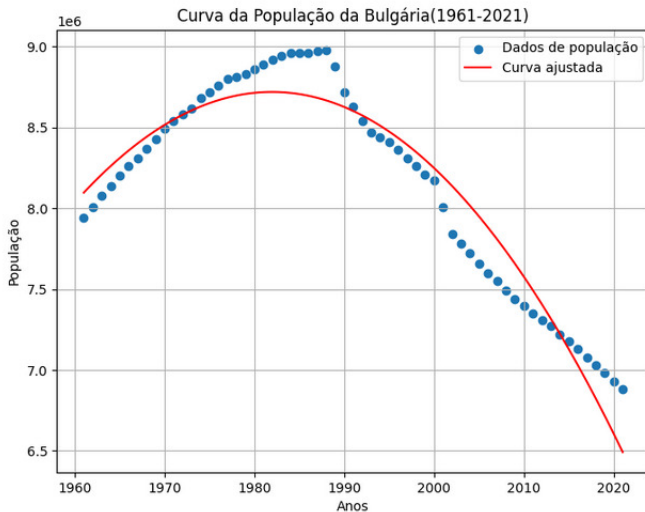
Resultados - Minimos Quadrados Padrão

Ajuste polinomial grau 3-Brasil



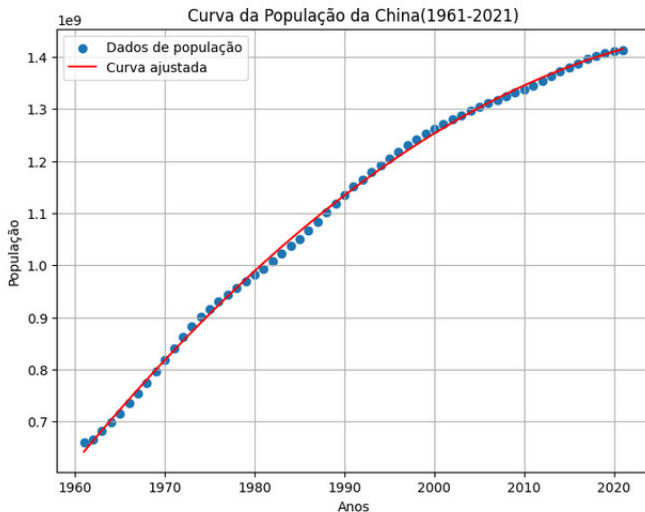
Resultados - Mínimos Quadrados Padrão

Ajuste polinomial grau 3-Bulgária



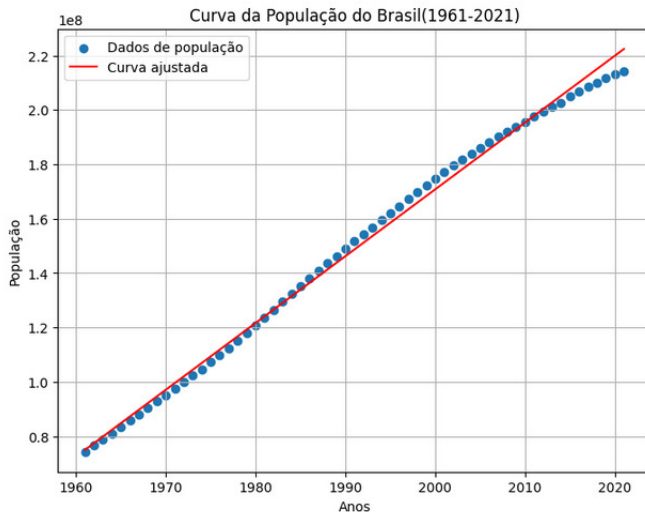
Resultados - Mínimos Quadrados Padrão

Ajuste polinomial grau 3-China



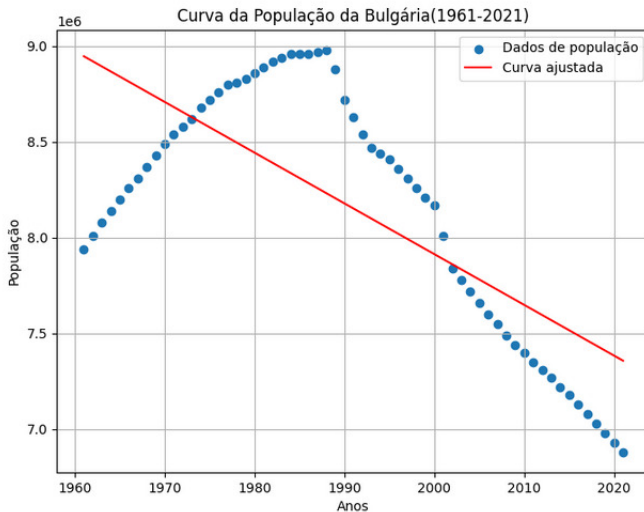
Resultados - Mínimos Quadrados Padrão

Ajuste polinomial linear- Brasil



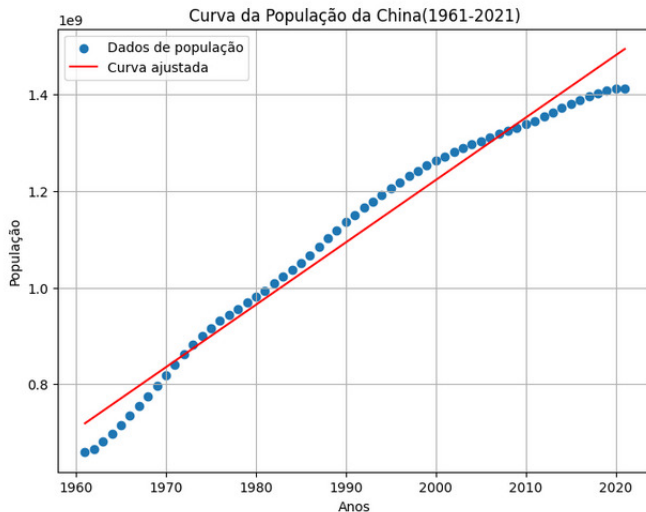
Resultados - Mínimos Quadrados Padrão

Ajuste polinomial linear- Bulgária



Resultados - Minimos Quadrados Padrão

Ajuste polinomial linear-China



Resultados - Mínimos Quadrados Padrão

Tabela: Valores de Erro média quadrático - MSE e Coeficiente de determinação - R^2 do ajuste Polinomial de grau 2

País	MSE	R^2
Brasil	3.215.347.101.730,852	0,9982907992326633
Bulgária	30.307.816.277,15164	0,9262374701469414
China	54.485.299.512.597,71	0,9989737261513592

Resultados - Minimos Quadrados Padrão

Tabela: Valores de Erro média quadrático - MSE e Coeficiente de determinação - R^2 do ajuste Polinomial de grau 3

País	MSE	R^2
Brasil	3.146.372.083.499, 1465	0, 9983274646844412
Bulgária	31.222.438.641, 236183	0, 9240114813547154
China	53.353.789.091.024, 06	0, 9989950390479666

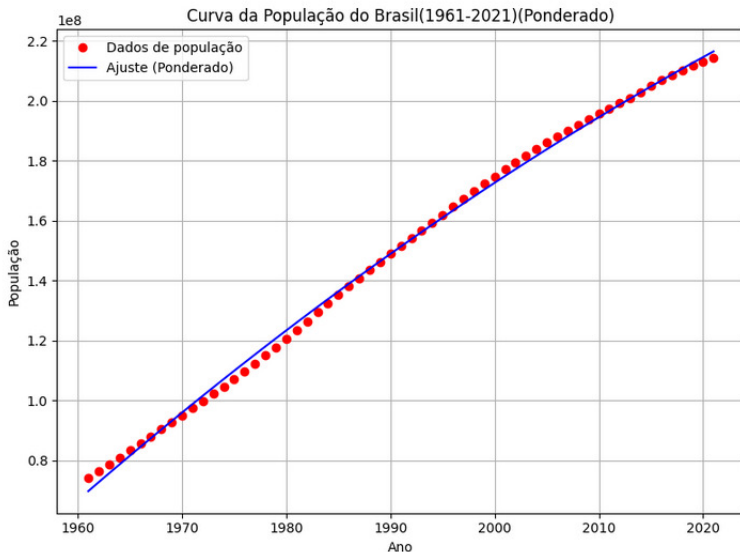
Resultados - Minimos Quadrados Padrão

Tabela: Valores de Erro média quadrático - MSE e Coeficiente de determinação - R^2 do ajuste linear

País	MSE	R^2
Brasil	8.265.245.965.444, 675	0, 9956063951108839
Bulgária	193.338.156.062, 79953	0, 529457636343512
China	1.390.519.446.596.128, 0	0, 9738084628911887

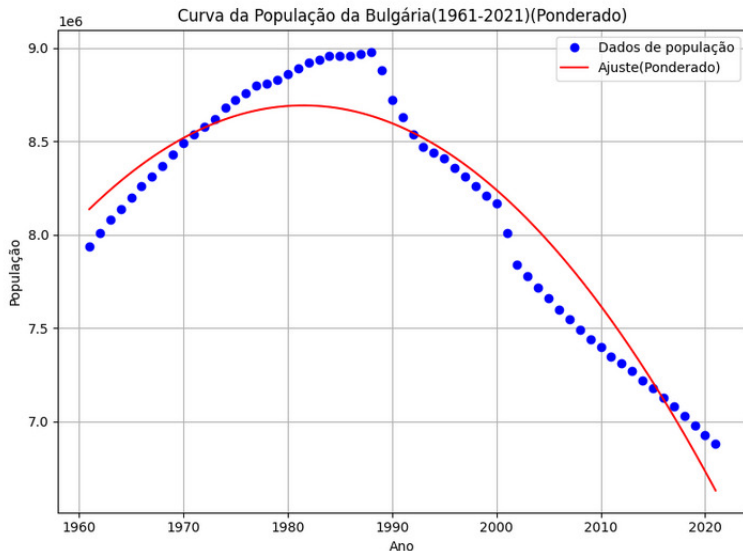
Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Primeira função peso: Ajuste polinomial grau 2 - Brasil



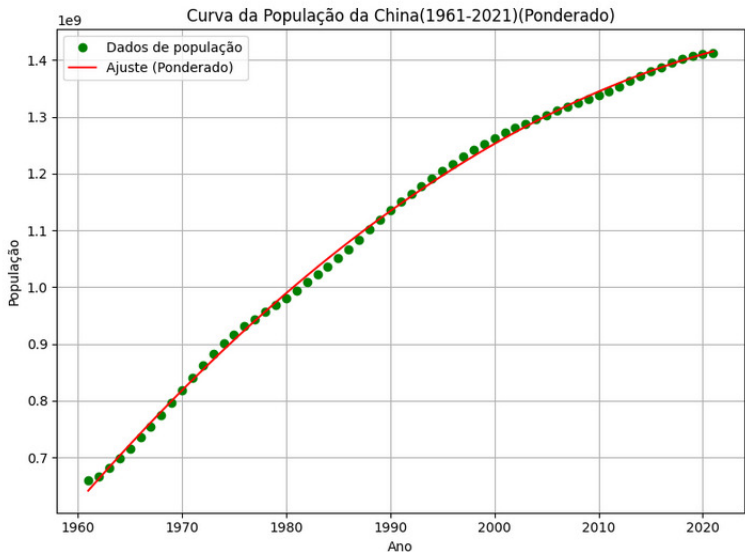
Resultados - Mínimos Quadrados Ponderados

Primeira função peso: Ajuste polinomial grau 2 - Bulgária



Resultados - Mínimos Quadrados Ponderados

Primeira função peso: Ajuste polinomial grau 2 - China



Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

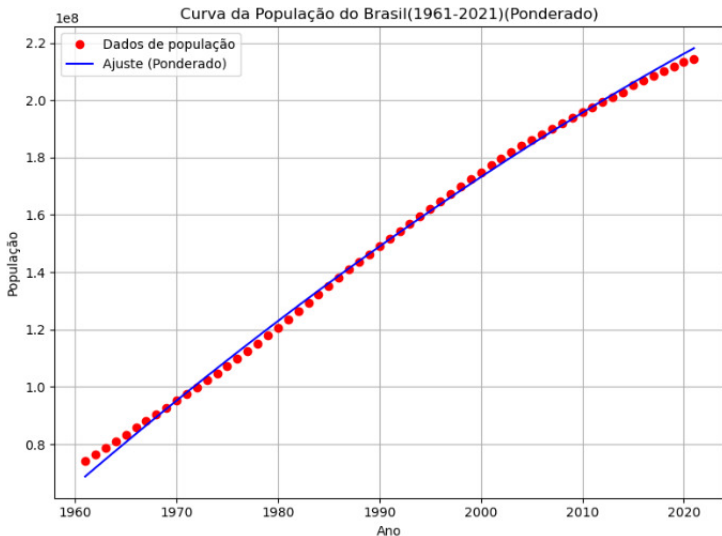
Primeira função peso: Ajuste polinomial grau 2

Tabela: Valores de Erro média quadrático - MSE e Coeficiente de determinação - R^2 do grau 2

País	MSE	R^2
Brasil	3, 615, 187, 413, 468.8726	0.9982726235829383
Bulgária	37, 783, 614, 754.77895	0.9259053988865357
China	63, 440, 596, 628, 990.16	0.9989213461669469

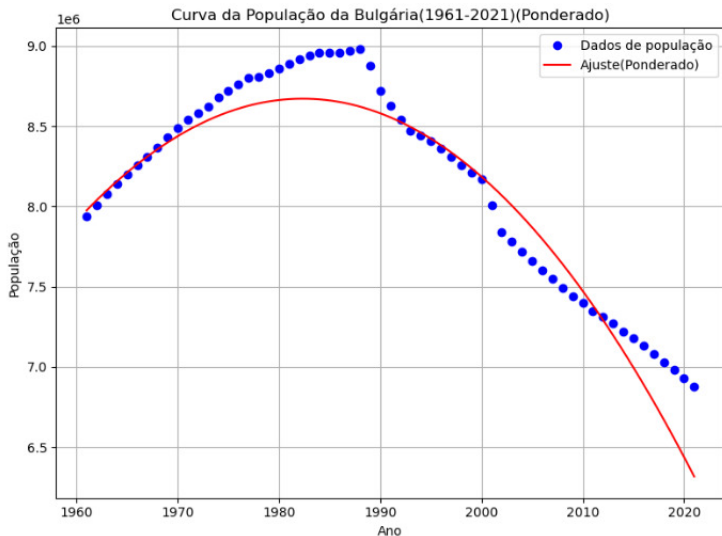
Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Primeira função peso: Ajuste polinomial grau 3-Brasil



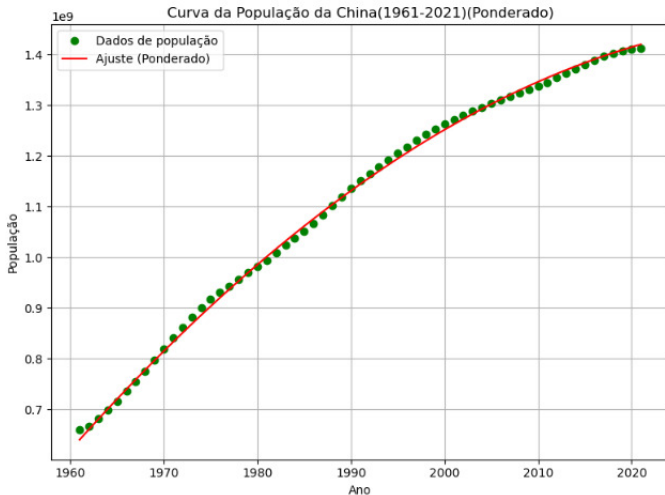
Resultados - Mínimos Quadrados Ponderados

Primeira função peso: Ajuste polinomial grau 3-Bulgária



Resultados - Mínimos Quadrados Ponderados

Primeira função peso: Ajuste polinomial grau 3-China



Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

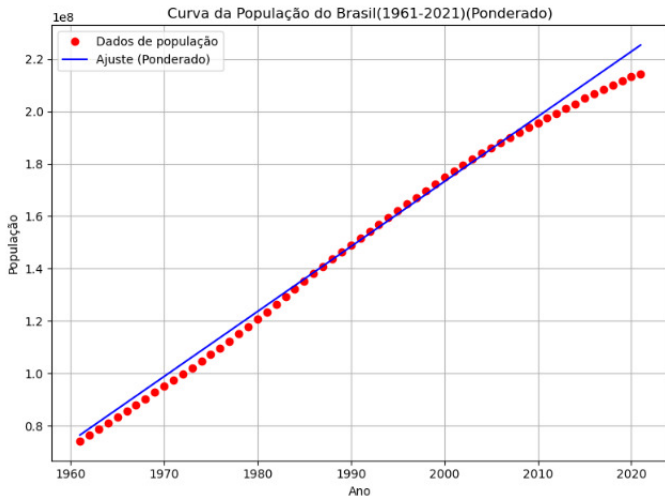
Primeira função peso: Ajuste polinomial grau 3

Tabela: Valores de Erro média quadrático - MSE e Coeficiente de determinação - R^2 do grau 3

País	MSE	R^2
Brasil	3, 537, 247, 463, 558.931	0.9983098401385776
Bulgária	39, 111, 841, 062.00217	0.9236146157706085
China	61, 750, 156, 266, 311.6	0.9989448177378589

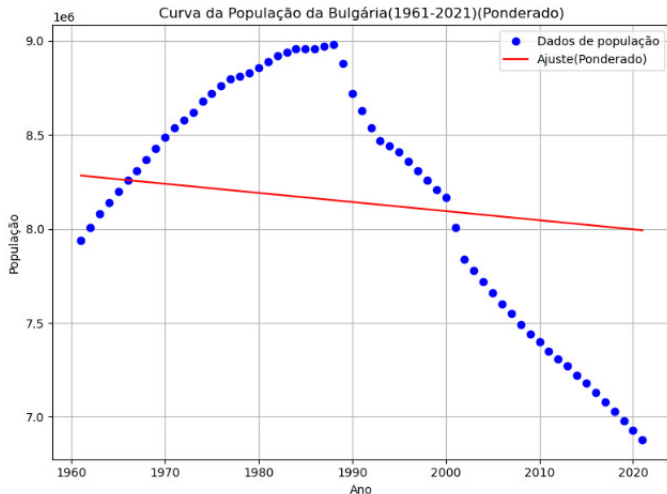
Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Primeira função peso: Ajuste linear - Brasil



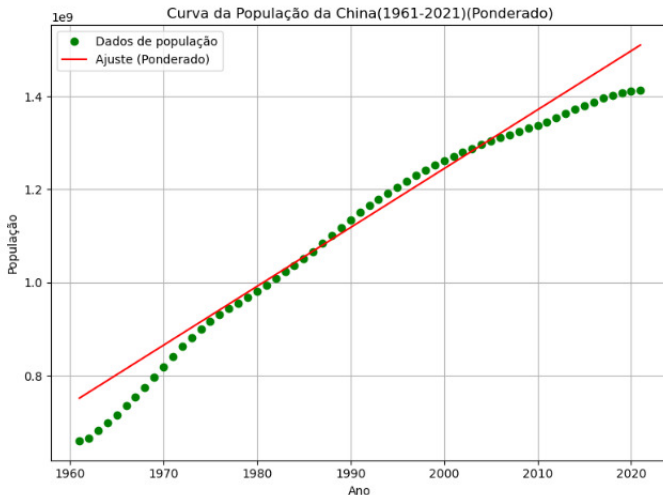
Resultados - Mínimos Quadrados Ponderados

Primeira função peso: Ajuste linear - Bulgária



Resultados - Mínimos Quadrados Ponderados

Primeira função peso: Ajuste linear - China



Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

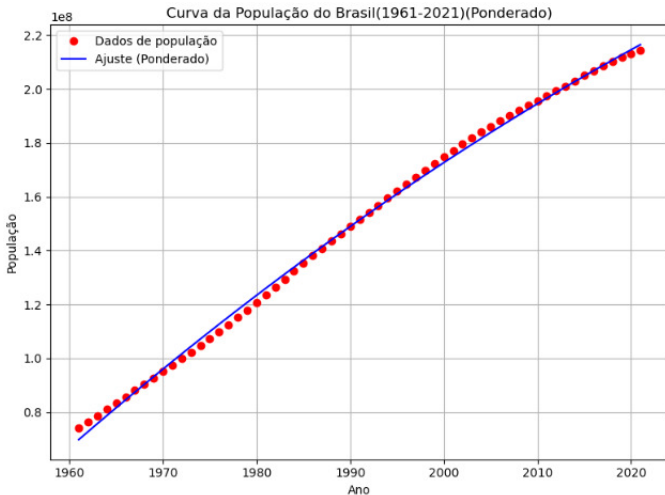
Primeira função peso: Ajuste linear

Tabela: Valores de Erro média quadrático - MSE e Coeficiente de determinação - R^2 linear

País	MSE	R^2
Brasil	13,377,081,161,478.633	0.9956063951108841
Bulgária	338,697,753,984.5878	0.5294576363435122
China	2,008,659,217,374,633.2	0.9738084628911878

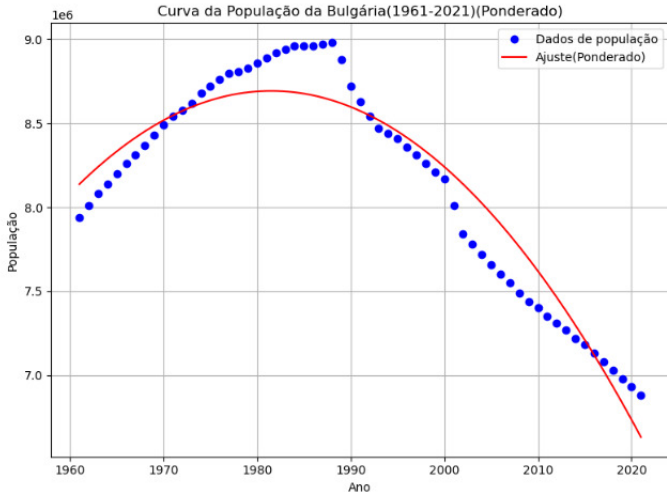
Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Segunda função peso: Ajuste polinomial grau 2 - Brasil



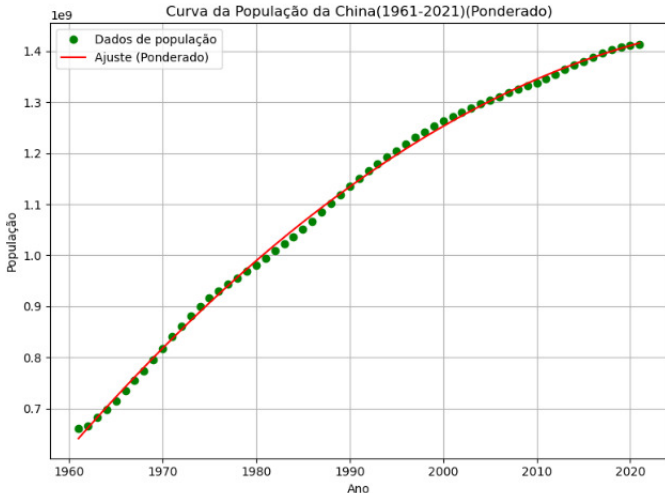
Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Segunda função peso: Ajuste polinomial grau 2 - Bulgaria



Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Segunda função peso: Ajuste polinomial grau 2 - China



Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

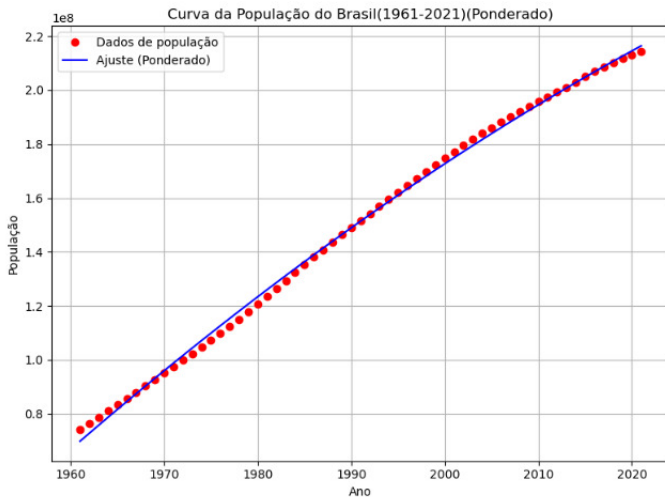
Segunda função peso: Ajuste polinomial grau 2

Tabela: Valores de Erro média quadrático - MSE e Coeficiente de determinação - R^2 grau 2

País	MSE	R^2
Brasil	3, 375, 907, 509, 516.374	0.9982388186360449
Bulgária	32, 469, 318, 471.521393	0.9258126606419655
China	54, 569, 900, 295, 413.03	0.9989737183045013

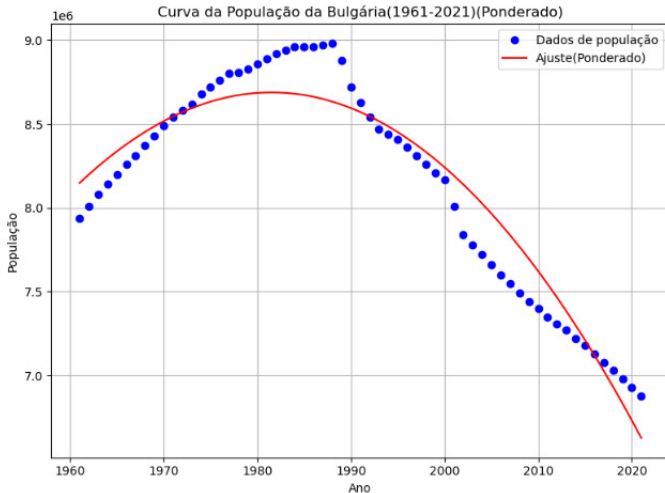
Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Segunda função peso: Ajuste polinomial grau 3 - Brasil



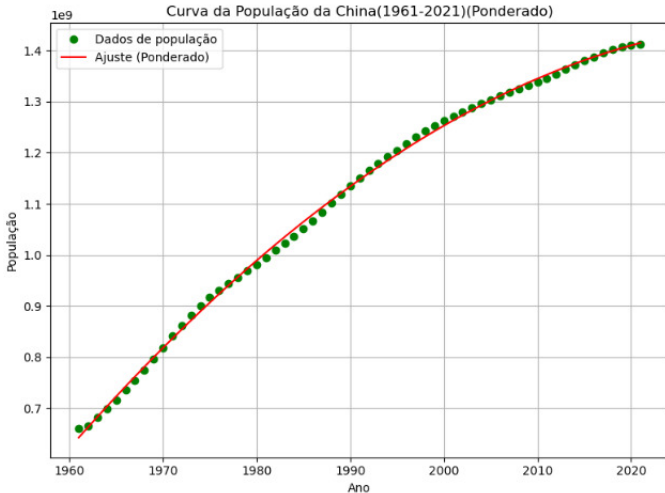
Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Segunda função peso: Ajuste polinomial grau 3 - Bulgária



Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Segunda função peso: Ajuste polinomial grau 3 - China



Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

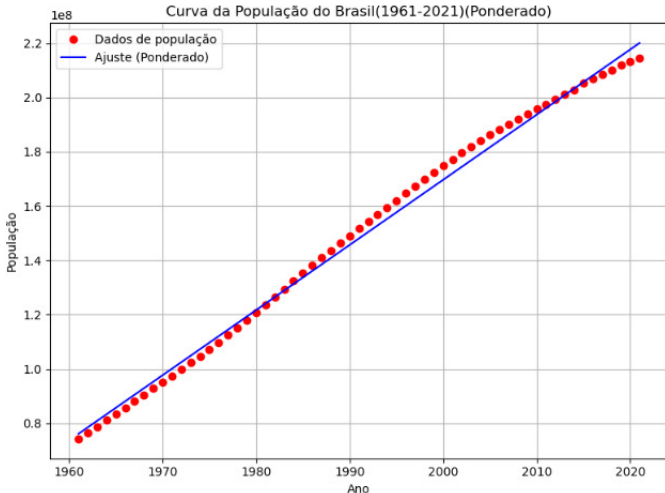
Segunda função peso: Ajuste polinomial grau 3

Tabela: Valores de Erro média quadrático - MSE e Coeficiente de determinação - R^2 grau 3

País	MSE	R^2
Brasil	3, 299, 306, 060, 661.0864	0.9982776365161009
Bulgária	33, 427, 901, 460.3141	0.9235499103938889
China	53, 422, 326, 604, 442.09	0.998994982670932

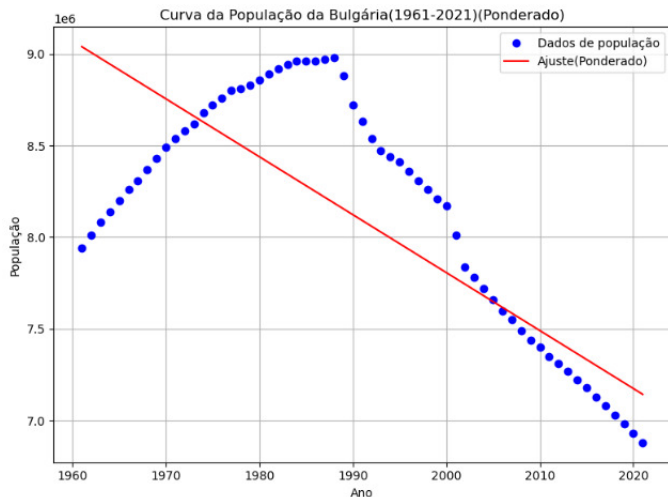
Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Segunda função peso: Ajuste linear - Brasil

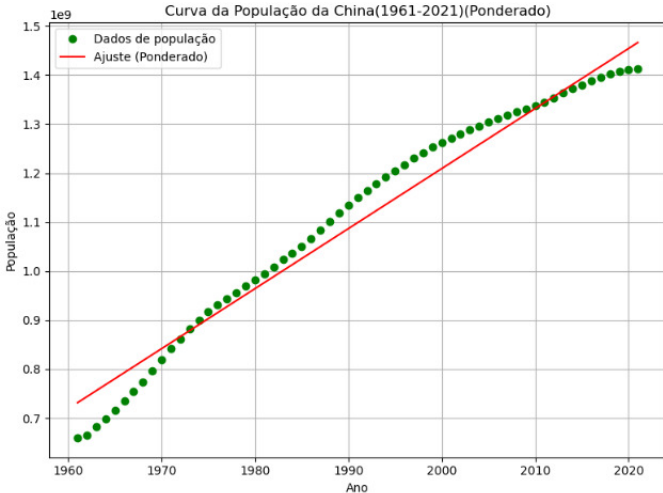


Resultados - Mínimos Quadrados Ponderados

Segunda função peso: Ajuste linear - Bulgária



Resultados - Mínimos Quadrados Ponderados



Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Segunda função peso: Ajuste linear

Tabela: Valores de Erro média quadrático - MSE e Coeficiente de determinação - R^2 linear

País	MSE	R^2
Brasil	9, 729, 204, 544, 366.678	0.9956063951108846
Bulgária	205, 108, 451, 741.2424	0.5294576363435117
China	1, 581, 755, 784, 477, 203.8	0.9738084628911898

Resultados

Parte V e VI

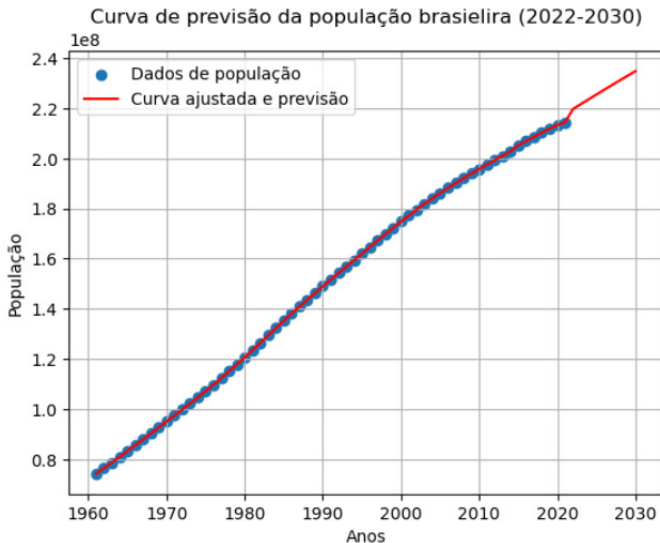
Previsão do crescimento populacional para o Método dos Mínimos Quadrados e o Método dos Mínimos quadrados ponderados

O produto entre a matriz de Vandermonde e o vetor dos coeficientes encontrados, resulta no vetor que representa a previsão da população para os anos futuros.

Cada elemento do vetor resultado é uma estimativa da população para um determinado ano.

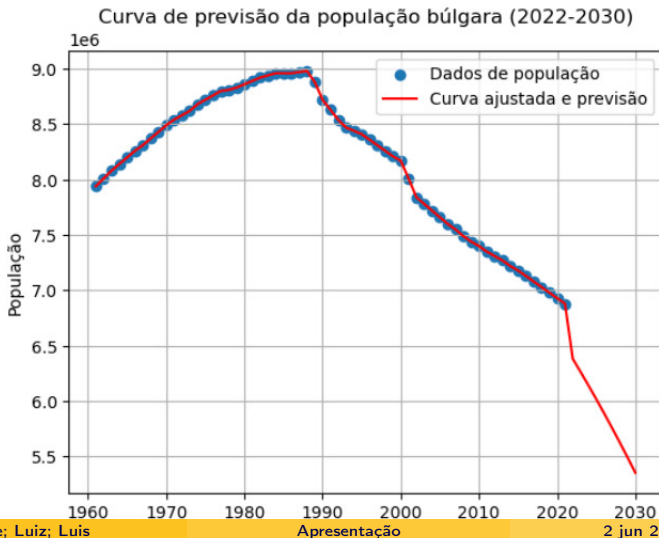
Resultados - Mínimos Quadrados Padrão

Previsão Populacional em 10 anos - Ajuste de grau 2 (Brasil)



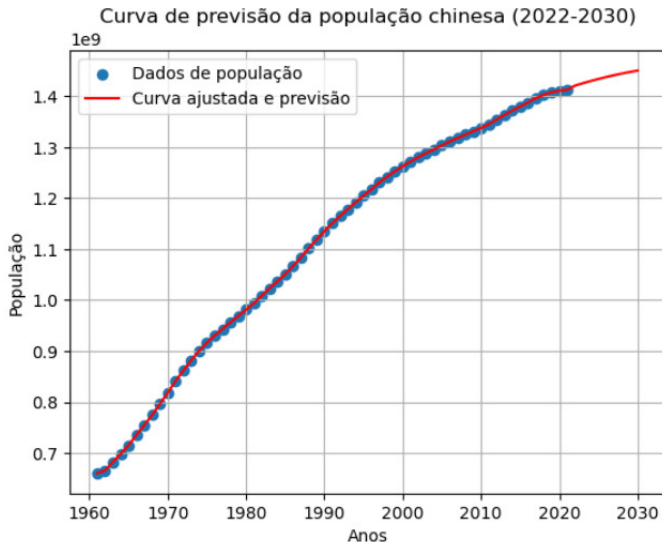
Resultados - Mínimos Quadrados Padrão

Previsão Populacional em 10 anos - Ajuste de grau 2 (Bulgária)



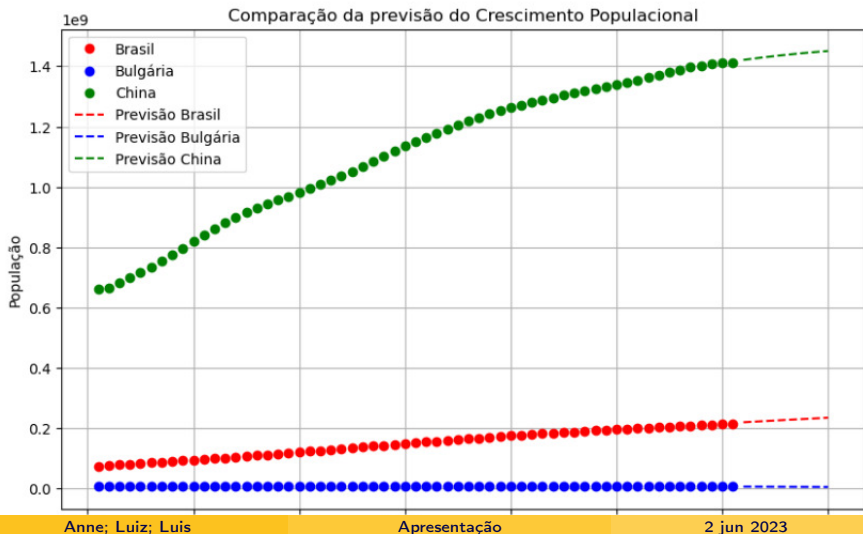
Resultados - Mínimos Quadrados Padrão

Previsão Populacional em 10 anos - Ajuste de grau 2(China)



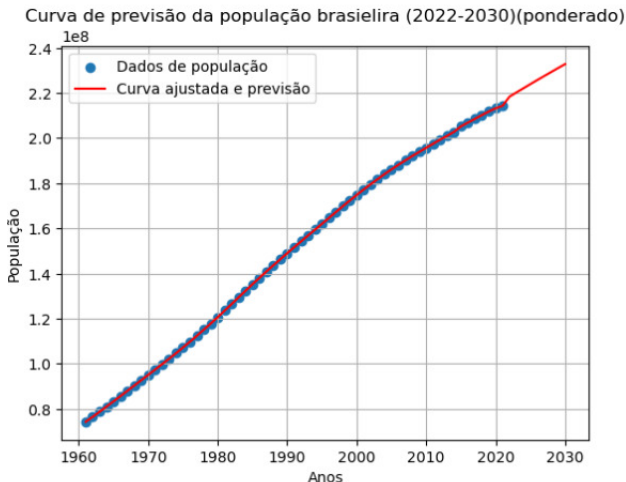
Resultados - Mínimos Quadrados Padrão

Previsão Populacional em 10 anos - Comparação dos ajuste



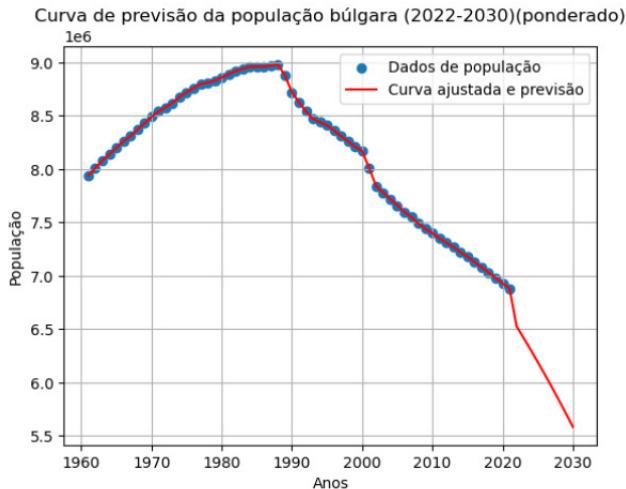
Resultados - Minimos Quadrados Ponderados

Previsão Populacional em 10 anos - Ajuste de grau 3(Brasil)



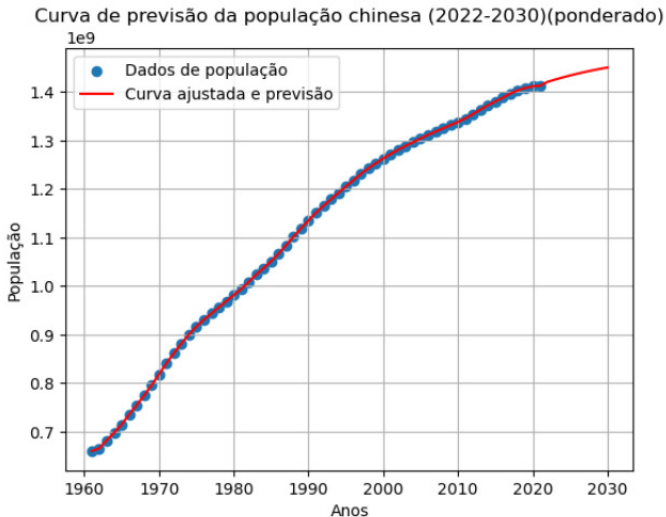
Resultados - Mínimos Quadrados Ponderados

Previsão Populacional em 10 anos - Ajuste de grau 3 (Bulgária)



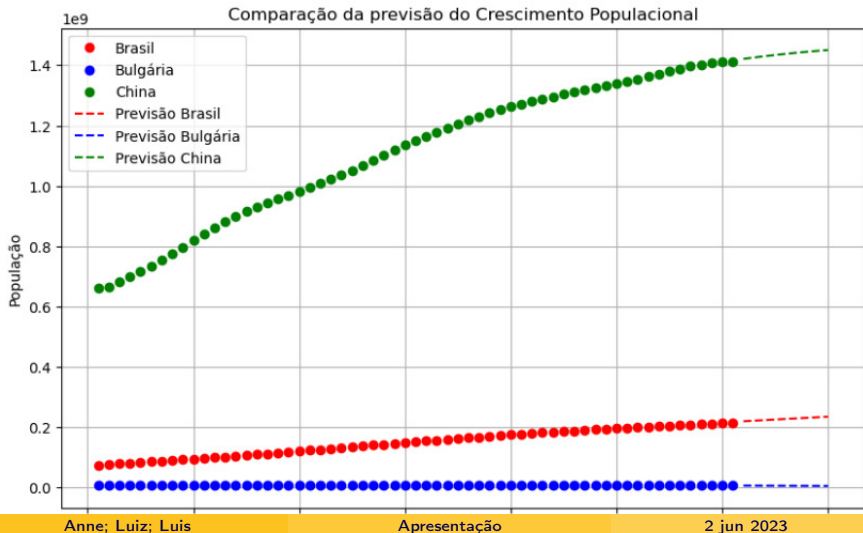
Resultados - Mínimos Quadrados Ponderados

Previsão Populacional em 10 anos - Ajuste de grau 3 (China)



Resultados - Mínimos Quadrados Ponderados

Previsão Populacional em 10 anos - Comparação dos ajustes



Discussão

Crescimento populacional:

- setores sociais
- setores industriais
- setores governamentais

Objetivo fundamental

Compreender o Método dos Mínimos quadrados e aplicá-lo em situações práticas.

Discussões

Gráficos de dispersão

Visão preliminar das tendências populacionais

Brasil

- Crescimento populacional
- Aumento gradual até meados de 1980
- Estabilização e ligeiro declínio.

Bulgária

- Crescimento populacional
- Aumento moderado até 1990
- Declínio

China

- Estável, porém expressivo
- Crescimento significativo após 1970
- Crescente

Com base nos resultados iniciais, é possível compreender as razões por trás da escolha desses países para demonstrar as diferenças nas previsões populacionais

Crescimento:

- Brasil
 - ▶ Moderado e estável
- Bulgária
 - ▶ Declínio
- China
 - ▶ Crescimento rápido

Discussões

Mínimos quadrados padrão

Ajustes das curvas

- Ajuste polinomial de grau 2 e 3
- Bulgária
- Modelo linear

MSE e R^2

- Valores semelhantes
- Sem discrepâncias
- Relação tamanho da população

Discussões

Minimos quadrados ponderados

- Tendência semelhante
- Modelo linear
- Polinômios de grau 2 e 3

A aplicação do MMQ Ponderados com pesos diferenciados aos pontos de dados pode melhorar a eficiência da curva. A função peso que prioriza os últimos 10 anos apresentou uma maior eficiência em comparação à função que utiliza os erros absolutos.

Discussão

Estimativas

População Chinesa

- Acadêmcia Chinesa de Ciências Sociais (2019)
- 2029
- MMQ
- 1,44 bilhão

Importante ressaltar

- Limitações
- Incertezas
- Fatores imprevistos
- Relevante estimativas precisas e confiáveis

Conclusão

Mínimos quadrados padrão

Conclusão

No geral, o uso do método dos mínimos quadrados para análise e previsão do crescimento populacional é uma abordagem valiosa que pode fornecer insights significativos sobre as tendências demográficas. No entanto, é fundamental manter uma abordagem cautelosa e atualizar constantemente as previsões à medida que novos dados e circunstâncias se tornam disponíveis.

Referências

1 - Dados Mundiais. Crescimento da População no Brasil. Disponível em: <https://www.dadosmundiais.com/america/brasil/crescimento-populacao.php>. Acesso em: 29 jun. 2023.

2 - Dados Mundiais. Crescimento Populacional na Bulgária. Disponível em: <https://www.dadosmundiais.com/europa/bulgaria/crescimento-populacao.php>. Acesso em: 29 jun. 2023.

3 - Dados Mundiais. Crescimento Populacional na China. Disponível em: <https://www.dadosmundiais.com/asia/china/crescimento-populacao.php>. Acesso em: 29 jun. 2023.

Refrências

- 4 - PAIVA, Afonso. SIMEONI, Fabricio. O método dos Mínimos Quadrados. Disponível em: <https://ae4.tidia-ae.usp.br/access/content/group/ff1f4693-e871-413f-ac2f-6c4ab44f10b5/Slides/mmq.pdf>. Acesso em 29/06/2023.
- 5 - ALMEIDA, Renato Neves de. O método dos mínimos quadrados: estudo e aplicações para o ensino médio. Disponível em: <https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/28052015Renato-Neves-de-Almeida.pdf>. Acesso em 29/06/2023.
- 6 - GUITARRARA, Paloma. Crescimento Populacional. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/o-crescimento-populacional-no-mundo.htm>. Acesso em 29/06/2023.

7 - GONÇALVES, Fabiana Santos. Crescimento Populacional. Disponível em: <https://www.infoescola.com/geografia/crescimento-populacional/>. Acesso em 29/06/2023.

8 - MARTINS, Ricardo M.. Matriz de Vandermonde. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~rmiranda/cursos/2009-2-ma719/vandermonde.pdf>. Acesso em 02/07/2023