A. Écriture d'un entier naturel dans une base b (b est un entier supérieur ou égal à 2) :

Activité 1 :

1. Calcule le nombre entier $3\times4^3+1\times4^2+2\times4^1+0\times4^0$ **=** $\mathbf{3\times64+1\times16+0\times1=172+16=188}$

(**Rappel :** $x^0=1$ pour tout nombre x non nul).

Ce nombre est écrit comme la somme ***de puissances de 4*** multipliées par des entiers ***compris entre 0 et 3***.
On dira que ce nombre s'écrit $(3120)_4$ ***en base 4***. $\mathbf{188=(3120)_4}$

2. A quel nombre entier est égal : ***a.*** $(3311)_4$. ***b.*** $(200)_3$. ***c.*** $(543210)_6$. ***d.*** $(708)_9$. ***e.*** $(8439)_{10}$.

3125 ***18*** ***10 885 032 150*** ***575*** ***8 439***

3. a. Calcule les puissances de 2 ($2^0=$ … ; $2^1=$ … ; $2^2=$ … ; .... ; $2^7=$ ...).

$\mathbf{2^7}$	$\mathbf{2^6}$	$\mathbf{2^5}$	$\mathbf{2^4}$	$\mathbf{2^3}$	$\mathbf{2^2}$	$\mathbf{2^1}$	$\mathbf{2^0}$
128	**64**	**32**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**

b. Déduis en l'écriture du nombre entier 203 en base 2.

$\mathbf{203=128+64+8+2+1=1\times2^7+1\times2^6+0\times2^5+0\times2^4+1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0=(11001011)_2}$

c. De la même manière écris 203 en base 5, puis en base 8.

$\mathbf{203=(1303)_5=(313)_8}$

4. a. Quelle est l'écriture de $2\times3^2+2$ en base 3 ? $\mathbf{2\times3^2+2=2\times3^2+0\times3^1+2\times3^0=(202)_3}$

b. Quelle est l'écriture de $4\times3^2+2\times3+5$ en base 3 ?

$\mathbf{4\times3^2+2\times3+5=1\times3^3+1\times3^2+2\times3^1+5\times3^0=(1125)_3}$

Ce qu'il faut savoir : Si N est un entier naturel tel que $N=a_k\times b^k+a_{k-1}\times b^{k-1}+$ …… $+a_1\times b^1+a_0\times b^0$, b étant un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 et tous les nombres a_i étant ***des entiers compris entre 0 et b-1*** , alors on dit que $(a_k a_{k-1}\ldots a_1 a_0)_b$ est ***l'écriture en base b*** du nombre entier naturel N .

On notera $\mathbf{N=(a_k a_{k-1}\ldots a_1 a_0)_b}$ **.**

Remarque : On utilisera la notation $(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)_b$ pour préciser dans quelle base est l'écriture.
On conviendra que si l'on n'écrit pas cette notation, l'écriture est en base « naturelle », c'est à dire la base 10.

B. Cas particulier de la base 2 :

Activité 2 :

On veut écrire le nombre entier naturel 73 en base 2.

Pour cela on va chercher à l'écrire sous la forme $b_n \times 2^n + \ldots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$ car ainsi on obtient en base 2 le nombre $(b_n \ldots b_1 b_0)_2$.

1. Écris la division euclidienne de 73 par 2 et l'égalité euclidienne : $dividende = quotient \times diviseur + reste$.
Écris ensuite la division euclidienne du quotient obtenu par 2 et l'égalité euclidienne correspondante que tu inséreras dans l'égalité euclidienne précédente. Pour finir poursuis ainsi jusqu'à obtenir un quotient nul.

$\mathbf{73 = 2 \times 36 + 1}$ **.**

Or $\mathbf{36 = 2 \times 18 + 0}$ **, donc** $\mathbf{73 = 2 \times (2 \times 18 + 0) + 1 = 2^2 \times 18 + 1}$ **.**

Or $\mathbf{18 = 2 \times 9 + 0}$ **, donc** $\mathbf{73 = 2^2 \times (2 \times 9 + 0) + 1 = 2^3 \times 9 + 1}$ **.**

Or $\mathbf{9 = 2 \times 4 + 1}$ **, donc** $\mathbf{73 = 2^3 \times (2 \times 4 + 1) + 1 = 2^4 \times 4 + 2^3 \times 1 + 1}$ **.**

Or $\mathbf{4 = 2 \times 2 + 0}$ **, donc** $\mathbf{73 = 2^4 \times (2 \times 2 + 0) + 2^3 \times 1 + 1}$

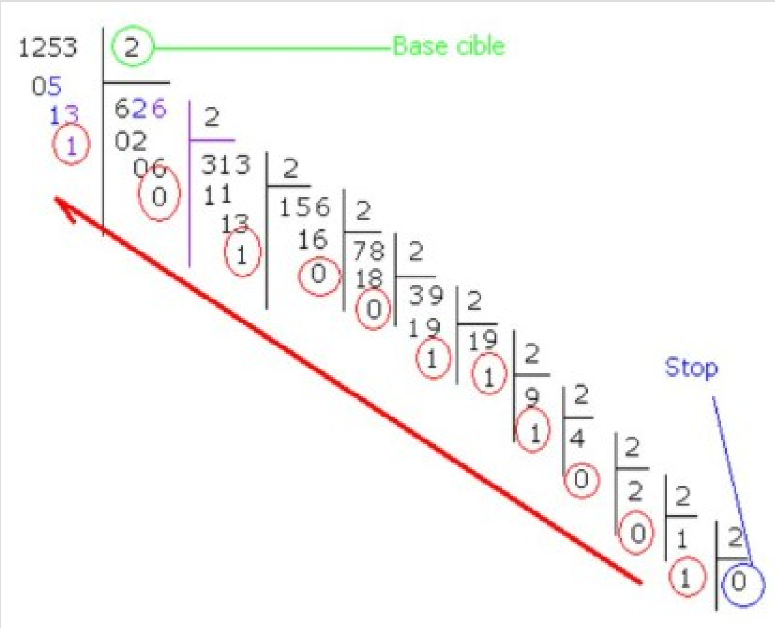
$\mathbf{= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0}$ **.**

2. Déduis-en l'écriture de 73 sous la forme $b_n \times 2^n + \ldots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$, puis son écriture en base 2.

$\mathbf{73 = (1001001)_2}$ **.**

<u>Ce qu'il faut savoir :</u> Pour convertir un entier naturel (qui est en base 10) en base b avec $b \geqslant 2$, on divise cet entier naturel par b jusqu'à obtenir un quotient égal à 0.
Le résultat cherché est ***<u>la juxtaposition des restes du dernier au premier</u>***.

<u>Exemple :</u>



1 253 = $(10011100101)_2$

<u>Activité 3 :</u> En utilisant la méthode ci-dessus, effectue les conversions ci-dessous.

1. Écris 47 , puis 53 et 245 en base 2. $\mathbf{47 = (101111)_2}$ **,** $\mathbf{53 = (110101)_2}$ **et** $\mathbf{245 = (11110101)_2}$ **.**

2. Écris 67, puis 231 et 2 578 en base 7. $\mathbf{67 = (124)_7}$ **,** $\mathbf{231 = (450)_7}$ **et** $\mathbf{2\ 578 = (10342)_7}$ **.**

C. Cas particulier de la base 16 :

Activité 4 :

1. Combien de chiffres différents utilise-t-on pour écrire un nombre en base 2 ? ***2 chiffres = 0 et 1.***

2. Combien de chiffres différents utilise-t-on pour écrire un nombre en base 5 ? ***5 chiffres = 0, 1, 2, 3 et 4.***

3. Combien de chiffres différents utilise-t-on pour écrire un nombre en base 10 ? ***10 chiffres = 0, 1, ..., 8 et 9.***

4. Combien de chiffres différents utilise-t-on pour écrire un nombre en base 12 ? Quel est le problème ?
12 chiffres. Problème : il n'y a que 10 chiffres !

Ce qu'il faut savoir : Pour convertir un nombre entier naturel N en base 16, il faut l'écrire sous la forme $N = a_k \times 16^k + a_{k-1} \times 16^{k-1} + \dots\dots + a_1 \times 16^1 + a_0 \times 16^0$, les a_i étant ***des entiers compris entre 0 et 15***.
On pose alors $c_i = a_i$ si $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ et $c_i =$ A, B, C, D ou E si $a_i =$ 10, 11, 12, 13, 14 ou 15.
Et on dit que $(c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0)_{16}$ est ***l'écriture en base 16*** ou ***en hexadécimal*** du nombre entier naturel N.

On notera $N = (c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0)_{16}$.

Exemple : $(A5E)_{16} = 10 \times 16^2 + 5 \times 16^1 + 14 \times 16^0 =$ 2 654.

Activité 5 :

1. A quel nombre entier est égal : ***a.*** $(7DD)_{16}$. ***b.*** $(2A)_{16}$. ***c.*** $(4F2C)_{16}$.
2 013 ***42*** ***20 268***

2. Écris chaque nombre entier en base 16 : ***a.*** 62. ***b.*** 1455. ***c.*** 8675.
$(\mathbf{3E})_{16}$ $(\mathbf{5AF})_{16}$ $(\mathbf{21E3})_{16}$

D. Exercices d'application :

Exercice 1 :

1. A quel entier est égal : ***a.*** $(101010101)_2$. ***b.*** $(111000)_2$. ***c.*** $(00110011)_2$. ***d.*** $(101000001)_2$.
341 ***56*** ***51*** ***321***

2. Convertis en binaire : ***a.*** 458. ***b.*** 133. ***c.*** 47. ***d.*** 1 024. ***e.*** 65.
$(\mathbf{111001010})_2$ $(\mathbf{10000101})_2$ $(\mathbf{101111})_2$ $(\mathbf{10000000000})_2$ $(\mathbf{1000001})_2$

Exercice 2 :

1. A quel entier est égal : ***a.*** $(A320)_{16}$. ***b.*** $(FABE51)_{16}$.
41 760 ***16 432 721***

2. Convertis en hexadécimal : ***a.*** 2 020. ***b.*** 1 234. ***c.*** 56 026. ***d.*** 64 218.
$(\mathbf{7E4})_{16}$ $(\mathbf{4D2})_{16}$ $(\mathbf{DADA})_{16}$ $(\mathbf{FADA})_{16}$

Exercice 3 : Convertis en binaire les nombres écrits en hexadécimal suivants (On commencera par les convertir en base 10). ***a.*** $(101010)_{16}$. ***b.*** $(59A75)_{16}$
1 052 688 = $(\mathbf{100000001000000010000})_2$ ***367 221 =*** $(\mathbf{1011001101001110101})_2$

Exercice 4 :

1. On veut convertir en hexadécimal $\left(1001101\right)_2$. Pour cela, il suffit de compléter le tableau ci-dessous.

Écriture binaire « par paquets de 4 »	**0**100	1101
Écriture décimal « des paquets de 4 »	4	13
Écriture hexadécimale	4	D

On ajoute des « 0 » pour avoir un paquet de 4 chiffres.

Complète ce tableau et convertis $\left(1001101\right)_2$ en hexadécimal. $\boldsymbol{\left(1001101\right)_2=\left(4\,D\right)_{16}}$ **.**

2. En utilisant la même méthode, convertis en hexadécimal les nombres ci-dessous.

a. $\left(10000000011001\right)_2$. $\boldsymbol{\left(2019\right)_{16}}$ ***b.*** $\left(10001000010001\right)_2$. $\boldsymbol{\left(2211\right)_{16}}$ ***c.*** $\left(100110000111\right)_2$. $\boldsymbol{\left(987\right)_{16}}$ ***d.*** $\left(101110101100\right)_2$. $\boldsymbol{\left(BAC\right)_{16}}$

Exercice 5 :

1. Pose et effectue chacune des opérations ci-dessous en base 2. Pour vérifier, convertis chaque terme des opérations en base 10, refais les opérations en base 10 et compare le résultat avec celui obtenu en base 2.
Important : On utilisera le fait que en base 2 on a $\left(1\right)_2+\left(1\right)_2=\left(10\right)_2$ pour bien gérer les retenues.

a. $\left(100011\right)_2+\left(110100\right)_2$. $\boldsymbol{\left(1010111\right)_2}$ ***b***. $\left(100101\right)_2+\left(110000\right)_2$. $\boldsymbol{\left(1010101\right)_2}$ ***c.*** $\left(100011\right)_2+\left(111\right)_2$. $\boldsymbol{\left(101010\right)_2}$ ***d.*** $\left(10000000\right)_2-\left(100\right)_2$. $\boldsymbol{\left(1111100\right)_2}$

2. Pose et effectue : ***a.*** $\left(98\right)_{16}+\left(B9\right)_{16}$. $\boldsymbol{\left(151\right)_{16}}$ ***b.*** $\left(D23\right)_{16}+\left(46\,A\right)_{16}$. $\boldsymbol{\left(118\,D\right)_{16}}$ ***c.*** $\left(150\,F6\right)_{16}-\left(7\,E3\,A\right)_{16}$. $\boldsymbol{\left(D2\,BC\right)_{16}}$

Exercice 6 : Considérons le programme écris ci-dessous en Python.

```
n = int(input("Entrez un nombre entier"))
b = ""
while n!= 0:
    q = int(n/2)
    b = str(n-q*2)+b
    n = q
print(b)
```

1. Recopie et complète ce tableau jusqu'à ce que le programme se termine lorsqu'on a choisi ***n=71*** :

q		35	17	8	4	2	1	0
n-q*2		1	1	1	0	0	0	1
b	""	" 1 "	"11"	"111"	"0111"	"00111"	"000111"	"1000111"
n	71	35	17	8	4	2	1	0
n!=0	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	VRAI	FAUX

2. Explique le rôle de ce programme.
Ce programme convertit un entier naturel en base 2.

3. Tape ce programme sur Python et teste le sur certains résultats de cette fiche d'exercices.