Introduction:

מאמר זה מגיע למצוא פתרון לבעיה של חלוקה הוגנת של טובות שלא חליקים לכמות מסויימת של "סוכנים" באופן הוגן עם שיקולי עוצמות, כלומר חלוקה של 3 מכוניות מ3 סוגים ל3 אנשים לפי העדפה מסויימת של סוגי רכב כאשר לכל אדם העדפה לסוג שונה של רכב ורכב אינו מתחלקת לשלישים. הביקוש לבעיה זו גדל מכיוון שבעיה זו חוזרת בהרבה ענפי חישוב, כמו חישוב בענן, אלגוריתמים של תורת המשחקים ובניה מלאכותית. המאמר אפילו מציין דוגמא של חלוקה של קורסים לסטודנטים באוניברסיטת פנסילבניה. באופן כולל ענף המחקר של חלוקה הוגנת לרוב מתעסק בחלוקה הוגנת – או חוסר קנאה , עבור חלוקה הוגנת של טובות חליקים, קיימת תמיד חלוקה הוגנת (או ללא קנאה) אבל בחלוקה של טובות לא חליקים הדבר לא בהכרח נכון. חלוקה "הוגנת" יכולה להיות מושגת ע"י שני הגדות עיקריות :

הגדרה:

- חלוקה- חלוקה של X טובת עבור X סוכנים, ל Y חבילות
- Envy freeness up to one good- חלוקה תקרא EF1 אם כל סוכן מעריך את החבילה שקיבל באותה רמה כמו כל החבילות השונות שקיבלו הסוכנים האחרים עד כדי הוצאה של מוצר אחד. חלוקה זו לא בהכרח קיימת עמור טובות לא חליקים.
- Maximin share guarantee – חלוקה נחשבת MMS אם כל סוכן מקבל את החלק המקסימין שלו, כלומר, אם סוכן i מתקבש לחלק את הטובות לN חבילות (עבור N סוכנים) כך ש N-1 הסוכנים הנותרים בוחרים חבילה לפניו, אז החבילה הN של הסוכן i תהיה החלק המקסימלי של i. (חלוקה כזאת לא תמיד קיימת, קיימם אלגוריתם שרץ בזמן פולינומיאלי שמבטיח לכל סוכן ערך חבילה בסדר גודל של 2\3 מהערך המקסימלי שהוא מצפה לו)

רוב המחקרים שמתעסקים בתחום המחקר של החלוקה בדר"כ לא מתחשבים בהגבלות שחוקרים פה התשתמשו בהם, חלוקה של מוצרים שלא מתחלקים לשברים, לכן חלוקה שממשת את שני ההגדרות לעיל לא תהיה נפוצה. כמו כן לפעמים הטובות שצריכים לחלק מחולקות לקטגוריות מראש, נציג זאת בדוגמא (האלגוריתם של החוקרים מתחשב גם בבעיה הזו)

דוגמא מחיי היום יום שבה צריך להשתמש בחלוקה הוגנת מהצורה הנל: רשת של מוזיאונים גדולה רוצה לפתוח כמה סניפים חדשים, כעת יש לחלק למוזאונים החדשים מוצגים. נניח שהמוצגים מחולקים לשלושה קטגוריות, פסלים תמונות וכלי חרס. בנוסף יש כמות מסויימת של כל מוצר שהמוזאון החדש יכול להציג (מקסימום) כעת השאלה היא איך נחלק את המוצגים לכל המוזאינים החדשים.

Related work:

הגדרת EF1 נעשתה ע"י חוקר אחר- Budish, הקיום של חלוקה זו מוכח ע"י אלגוריתם cycle-elimination של Lipton ו- Caegiannis. בחלוקות בהם ההערכות של הסוכנים הם בינאריים (רוצה לא רוצה) וחיבוריים, קיימת תמיד חלוקה MMS. מנגד Procaccia Wang ו- Kurokawa (חוקרים אחרים) הביאו דוגמא נגדית שסותרת את הקיום האונברסלי של חלוקת MMS אפילו תחת הערכות חיבוריות. לכן זה הוביל למחקר בשם חלוקה משוערכת מקסימלית או– a-MMS, שבה הסוכן מקבל חלוקה שהיא a פעמים החלוקה המקסימלית שלו. (a*maximum). Procaccia ו- Wang פיתחו אלגוריתם יעיל שמשיג חלוקה הוגנת עד כדי a=2/3 מהחלוקה המקסימלית של הסוכן, כאשר מספר הסוכנים קבוע. חוקר נוסף בשם Amanatidis הוכיח שהאלוגריתם רץ בזמן ריצה פולינומיאלי בגודל הקלט. המאמר ממשיך לתת דוגמאות עבורם הצליחו להמציא חלוקה משוערכת מקסימלית במקרים שהערכת הסוכן אינה חיבורית, לדוגמא הערכות סאבמודולריות של Ghodsi הגיע לחלוקה 1/3MMS.

המאמר מציין שוב ושוב, שרוב האלגוריתמים ומהחקרים שנעשו בנושא החלוקות הם ללא העילוצים של עוצמות הקבוצות, וכעת המאמר ממשיך לתת דוגמאות לחלוקות הוגנות אשר **מתחשבות** בהגבלה הזו. כמו המחקר של BOUVERET, אשר השתמש בחלוקה שמקבילה לגרף וצמתים כלומר שכל סוכן יקבל תתגרף קשיר, והם גילו שחלוקת MMS לא בהכרח קיימת עבור גרף כללי אבל כאשר הגרף הוא עץ היא קיימת. המחקר של FERRAIOLI התחשב בחלוקה הוגנת בה סוכן חייב לקבל K טובות, לכל K טבעי, והוכיח שקיימת חלוקה 1/k משוערת MMS.

Notations and preliminaries:

נתאר את בעיית החלוקה הכללית לטאפל שיוגדר בצורה הבאה: ([m],[n],(vi) s.t. i in [n]) כאשר:

- [m]- היא קבוצג של מספרים טבעיים המייצגים את הטובות שיש לחלק.
- [n]- היא קבוצה של מספרים טבעיים המייצגים את כמות ושמות הסוכנים.
- Vi- (מייצג את ההעדפה של סוכן i מתוך n הסוכנים) פונצייה המוגרדרת בצורה הבאה:
  - Vi: 2^[m] -> R+ כלומר פונקציה ממרחב בגדול 2 בחזקת כמות הטובות לR חיובי.

    הפונקציה חיבורית – כלומר לכל סוכן i מתוך n ותת קבוצה S של m מתקיים ש-

    $$v_i(S) = \sum_{g \in S} v_i(\{g\}).$$

    $$v_i(\{g\}) \geq 0 \text{ for all } i \in [n] \text{ and } g \in [m].$$

    כלומר ההערכה הכללית של סוכן i לתתקבוצה S של טובות מM היא סכום כל ההערכות של הסוכן הזה לכל טובה G.
- $\Pi_t(S)$ - קבוצת כל החלוקות בגודל t של תת הקבוצה s מתוך m.
- חבילה A- מוגדרת בצורה הבאה :
  - $\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \Pi_n([m])$ כאשר n מייצג את כמות החלוקות מתוך סיגמא האפשריות בגודל n של m כאשר כל Ai היא חלוקה עבור סוכן i.

עד כה ההגדרות הבסיסיות, כעת החלוקות עבור עילוצים עוצמות:

- [l] – קבוצה של מספרים טבעיים המייצגת את כמות הקטגוריות לחלוקה – נציין כי הקטגוריות יבואו לידי ביטיוי בצורה {c1, c2, c3, …, cl} כאשר ci היא קטגוריה.
- לכל קטגוריה h נגדיר סף גודל Kh.

נגיד כי החלוקה -(A = (A1, A2, … , An היא אפשרית א"ם לכל חבילה Ai וקטגוריה h מתקיים:

$$|A_i \cap C_h| \leq k_h$$

F תהיה, לאורך כל המאמר, קבוצת כל החלוקות האפשריות ותוגדר בצורה הבאה:

$$\mathcal{F} := \{\mathcal{A} \in \Pi_n([m]) \mid |A_i \cap C_h| \leq k_h \text{ for all } i \in [n] \text{ and } h \in [\ell]\}.$$

כדי להבטיח ש F איננה ריקה נדרוש ש –

$k_h \geq \frac{|C_h|}{n}$ לכל קטגרויה h ב- [l].

ולכן לבסוף נאתר את הבעיה שאנו באים לפתור ע"י האטפל הבא (עם שיקולי עוצמות):

$$\langle [m], [n], (v_i)_{i \in [n]}, \mathcal{F} \rangle$$

שתעמוד בשני עמות המידה הבאות להוגנות:

- EF1 – עבור בעיית חלוקה מסויימת , $\langle [m],[n],(v_i)_{i\in[n]},\mathcal{F}\rangle$ החלוקה Ai מתוך F תיקרא EF1 אם"ם לכל זוג סוכנים i,j ב- n קיים מוצר g ב- Ai כך ש-

$$v_i(A_i) \geq v_i(A_j \setminus \{g\}).$$

- MMS- עבור בעיית חלוקה מוגבלת מסויימת $\langle [m],[n],(v_i)_{i\in[n]},\mathcal{F}\rangle$, החלוקה המקסימלים של סוכן i תוגדר:

$$\mathrm{CMMS}_i := \max_{(P_1,\ldots,P_n)\in\mathcal{F}} \min_{j\in[n]} v_i(P_j).$$

  - כלומר לכל חלוקה A= (A1, A2, … ,An) מתוך F נגיד שהיא מספקת MMS א"ם לכל סוכן i מ-n מתקיים ש- $v_i(A_i) \geq \mathrm{CMMS}_i$
    (ומכיוון שחלוקה לא בהכרח קיימת, נתכוון לחלוקה amms כאשר הפרמטר a הוא בין 0 ל1 ונכוון להגיע לa גדול ככל הניתן.)

Algorithm 1:

פסודו:

קלט: $\langle [m],[n],(v_i)_{i\in[n]},\mathcal{F}\rangle$ חלוקה הוגנת כלשהי עם ערכים חיבוריים (כפי שהוגדר למעלה) תחת שיקולי עוצימות

פלט: חלוקה אפשרית שעומדת בתנאי EF1:

1. הגדר ואתחל חלוקות מהצורה $\mathcal{A}^0 = (A_1^0,\ldots,A_n^0)$ כך שלכל i - A_i^0 תהיה קבוצה ריקה.
2. קבע פרמוטציה כלשהי עבור הסוכנים הנתונים והגדר סיגמא = $\sigma = (\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(n))$
3. עבור בלולאה מ- h=1 עד גודל הקטגוריות l:
   1. שמור במקום Bh- את הפלט של אלגוריתם 2 – $\text{Greedy-Round-Robin}(C_h,[n],(v_i)_i,\sigma)$
   2. שמור ב- A_i^h את איחוד הקבוצות $A_i^{h-1}\cup B_i^h$ לכל i בקטע [n].
      - עדכן את $\mathcal{A}^h = (A_1^h,\ldots,A_n^h)$ להיות גרף הקנאה ללא המעגל שהתקבל
      - עדכן את הפרמוטציה סיגמה להיות הטופוגרפיה של הגרף הזה.
4. סיים פור
5. החזר $\mathcal{A}^\ell$.

Algorithm 2: Greedy – Round - Robin

פסודו:

קלט: $\langle C, [n], (v_i)_i \rangle$ כאשר – C היא קטגוריה כלשהי, n כמות הסוכנים וVi ההערכה של סוכן i.

פלט: חלוקה של |C| טובות מתוך C לn סוכנים.

1. אתחול משתנה Bi עבור כל סוכן כקבוצה ריקה, אשר ייצג את כמות הטובות שיקבל, והעתק את כל הטובות ב C למשתנה עזר בשם M. הגדר t = 0.
2. כל עוד m שונה מקבוצה ריקה (while):
3.
   a. t++
   b. לכל i=1 עד n בצע:
      i. $g^t_{\sigma(i)} \in \arg\max_{g \in M} v_{\sigma(i)}(g)$ הסבר- שייך ושמור ב{G} עבור הסוכן i את הטובה שהוא מעריך הכי הרבה, (ההערכה שלו היא הגבוהה ביותר אליה), מתוך הקבוצה m.
      ii. עדכן את Bi להיות איחוד הקבוצות שהיא Bi ו {G} כלומר : $B_{\sigma(i)} \cup \{g^t_{\sigma(i)}\}$
      iii. שנה את m להיות m-g.
         1. אם m היא קבוצה ריקה:
            צא
4. החזר B=(B1, B2, … , Bn)

הסבר מילולי של האלגוריתם:

ראשית נאתחל משתנים, עבור פרמוטציה סיגמא כלשהי האלגוריתם בוחר קטגוריה h (לפי הסדר) , ומפעיל את האלגוריתם השני - grr על הקלט מספר סוכנים n, מספר הטובות |Ch| אשר לא חולקו, והסדר סיגמא.

- grr – עובר לפי הסדר בעזרת round robin על כל הסוכנים ומחלק את הטובות לכולם בצורה כזאת שכל סוכן מקבל את הטובה שהכי רצה מהרשימה הנתונה של הטובות הזמינים. מחזיר את Bn. (שהיא פרמוטציה מתוך כל הפרמוטציות שקיימות עבור קטגוריה ספציפית של טובות)

אחרי החלוקה של כל הקטגוריות בh האלגוריתם יוצר את גרף הקנאה G(Ah) :

- גרף מכוון זה מייצג את החלוקה A , כל קודקוד הוא סוכן, וקיימת צלע אם ורק אם סוכן i מקנא בסוכן j כלומר- א"ם Vi(Ai)<Vj(Aj) לכל

סיגמא מתעדכנת להיות הטופולוגיה של גרף הקנאה שחזר וכן הלאה.

Algorithm proof:

הוכחת האלגוריתם תתחלק לשניים- בחלק הראשון נראה כי האלגוריתם 2 עומד בשני קריטריונים:

עבור טאפל $\langle C, [n], (v_i)_i \rangle$ עם הערכות חיבוריות וסדר סוכנים סיגמא, החלוקה B=(B1, … ,Bn) :

- לכל 1<i ,j<n הסוכן iה לא "מקנא" בסוכן jה, מתמטית - $v_{\sigma(i)}(B_{\sigma(i)}) \geq v_{\sigma(i)}(B_{\sigma(j)}).$ או במילים ההערכה של הסוכן iה בסדר גדולה או שווה לכל סוכן j בסדר.
- B היא חלוקה EF1.

בחלק השני נוכיח את הנכונות אלגוריתם 1 באינדוקציה ואז הנכנות של האלגוריתם תנבע.

הוכחה:

חלק א':

ראשית נסמן $T := \lceil \frac{|C|}{n} \rceil$ הסבר- T מסמן את כמות האיטרציות שהאלגוריתים 2 ירוץ, |C| הוא כמות הקטגוריות שיש לחלק ו n הוא כמות הסוכנים, לכן בערך עליון נקבל את כמות האיטרציה לכל הקטגרויות.
קודם כל הוכח בעבר שהאלגורתים Round robin הוא EF1, אבל אם נסתכל על כל 1< i < j < n אז הסוכן ה i תמיד יקבל את המוצר (הפנוי) שהוא הכי רוצה בכל איטרציה ולכן לא יקנא בסוכן j, בנוסף מכיוון שההערכה של הסוכנים היא חיבורית בכל איטרציה t מתוך {1, … , T} נקבל כי סכום כל הערכים שהסוכן ה i קיבל בסדר מסויים גדולה מהסוכן j או במילים אחרות $v_{\sigma(i)}(B_{\sigma(i)}) \geq v_{\sigma(i)}(B_{\sigma(j)})$. , מצד שני אם נסתכל על המקרה שבוא 1 < j < i < n עדיין נקבל את התוצאה הרצוייה, כי נניח שבאיטרציה t קיבלנו כי הסוכן ה i מקנא ב j באיטרציה ה t+1 נקבל כי $v_{\sigma(i)}(g^t_{\sigma(i)}) \geq v_{\sigma(i)}(g^{t+1}_{\sigma(j)})$ כלומר הערך של המוצר שקיבל הסוכן i באיטרציה t תהיה לא פחות בערכה מהמוצר שקיבל j באיטרציה ה t+1. ואם נסכום את כל ההערכות (שוב כי הכל חיבורי) נקבל כי $\sum_{t=1}^{T-1} v_{\sigma(i)}(g^t_{\sigma(i)}) \geq v_{\sigma(i)}(B_{\sigma(j)}) - v_{\sigma(i)}(g^1_{\sigma(j)})$ מתקיים. לכן B היא חלוקה שמספקת EF1.

חלק ב':

כעת נוכיח באינדוקציה שאלגוריתם 1 המחזור חלוקה EF1.

הוכחה באינדוקציה:

בסיס(הנחה)- h=1 יש קטגוריה אחת, לכן Ah שהאלגוריתם יחזיר היא EF1 לכן Al שבסופו של דבר חזר היא EF1 , מכייוון שכאשר h = 1 ,A1=B1 והוכח בחלק א' כי B הם חלוקות EF1 .

הנחת האינקוציה- עבור כל h טבעי החלוקה Ah היא EF1.

נוכיח את הטענה עבור h+1, לפי הנחת האינדוקציה החלוקה Ah היא EF1 כלומר החלוקה התקבלה מהגרף ללא מעגלים G(Ah) (לפי האלגוריתם). נשים לב שהסדר של הקטגריה Ch+1 מתקבלת ע"י סידור טופולוגי של G(Ah), נסמן בפאי את הסדר הזה וב $\pi^{-1}(a)$ נסמן את האינדקס של סוכן a לפי הסדר פאי. אזי אם סוכן a מקנא בסוכן b תהיה צלע בG (כי כך הרכבנו את G) או במילים אחרות - $\pi^{-1}(a) < \pi^{-1}(b)$. ולכן לפי חלק א' נובע ש Bh+1 היא חלוקה EF1. כלומר מתקיים ש- $v_a(B_a^{h+1}) \geq v_a(B_b^{h+1})$. כלומר ההערכה של הסוכן a בחלוקה Bh+1 תהיה גדולה יותר מההערכה שלו בBh+1. ומכיוון ש Ah היא EF1 נקבל ש- $v_a(A_a^h) \geq v_a(A_b^h) - v_a(g)$ עבור הערכה של סוכן a לעומת b עבור מוצר g כלשהו. ומכייון ש- $A_a^{h+1} = A_a^h \cup B_a^{h+1}$ לפי הגדרת האלגוריתם נקבל כי Ah+1 הוא גם EF1 לכן הטענה נכונה.

Future work:

במאמר סוקרים את העובדה שאלגוריתם שלהם מבטיח חלוקה שהיא EF1 עבור חלוקות של טובות לא חליקים תחת עילוצי עוצמות של קבוצות, כמו כן אמרים שיש אפיקי מחקר אחרים תחת עילוצים הטרוגנים.