Laboratorium 9
13.12.2019

Eliminacja Gaussa z wyborem elementu głównego

Eliminacja Gaussa jest jednym z najprostszych algorytmów numerycznego rozwiązywania układu równań:

$$AX = b \quad , \qquad \text{gdzie}$$

X - poszukiwane zmienne $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$

Polega ona na iteracyjnym doprowadzeniu macierzy A do postaci macierzy górnej trójkątnej (czyli takiej, która ma wyzerowane elementy poniżej diagonali). Proces ten będziemy nazywać "schodkowaniem". Korzysta on z 2 operacji:

diagonala

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot \\ 0 & \boxed{\cdot} & \cdot \\ 0 & 0 & \boxed{\cdot} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

- mnożenia wiersza macierzy przez skalar
- odejmowania dwóch wierszy.

Po schodkowaniu rozwiązanie układu równań jest trywialne - korzystamy ze wstecznego podstawiania. Czyli:

dla macierzy

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

rozpoczynamy od ostatniego równania (3):

$$a_6 x_3 = b_3 \rightarrow x_3 = \frac{b_3}{a_6}$$

wynik x_3 można wstawić do równania (2):

$$a_4 x_2 + a_5 x_3 = b_2 \rightarrow x_2 = \frac{1}{a_4}\left(b_2 - a_5 x_3\right) = \frac{1}{a_4}\left(b_2 - \frac{a_5 b_3}{a_6}\right)$$

analogicznie możemy obliczyć x_1 korzystając z pośrednich wyników

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b_1$$

$$x_1 = \frac{1}{a_1}\left(b_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3\right) = \frac{1}{a_1}\left(b_1 - \frac{a_2}{a_4}\left(b_2 - \frac{a_5 b_3}{a_6}\right) - \frac{a_3 b_3}{a_6}\right)$$

Tak samo postępując możemy rozwiązać układ równań przedstawiony macierzowo o dowolnym rozmiarze n.

Niestety przy schodkowaniu macierzy mogą pojawić się problemy. Przykładowo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dla tego układu równań algorytm eliminacji Gaussa "nie ruszy", ponieważ w pierwszym kroku musielibyśmy podzielić pierwsze równanie przez 0. A widać przecież, że układ ten posiada rozwiązanie $\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 = 2 \end{cases}$.

Dlatego do klasycznej części algorytmu Gaussa dodaje się etap wyboru elementu głównego. Polega on na wytypowaniu równania, które posiada największą co do modułu wartość w kolumnie, w której zamierzamy "zerować" wartości, a następnie zamianie kolejności wierszy w macierzy rozszerzonej [A|b].

Na naszym prostym przykładzie

$$\underbrace{\underbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array}}_{\text{macierz } A}\ \underbrace{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}}_{\text{wektor } B}}_{\text{macierz rozszerzona}}$$

będziemy zerować elementy w kolumnie 0. największą wartością co do modułu będzie 1 czyli zamienimy ze sobą wiersze 0 i 1.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

Działanie algorytmu Gaussa z wyborem elementu głównego pokazane zostanie na przykładzie układu 3 równań:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

Chcemy obliczyć niewiadome x_1, x_2, x_3.

Budujemy macierz rozszerzoną dla powyższego URL (układu równań liniowych).

$$\begin{array}{r|cccc} \text{równanie 1} \rightarrow & -1 & 2 & 1 & -1 \\ \text{równanie 2} \rightarrow & 1 & -3 & -2 & -1 \\ \text{równanie 3} \rightarrow & 3 & -1 & -1 & 4 \\ \hline & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ & x_1 & x_2 & x_3 & b \end{array}$$

$$\underbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3}_{A}$$

$$Ax = b \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

I zerowanie w kolumnie 0

① Wybór elementu głównego

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ \boxed{3} & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

② Pierwszy etap schodkowania

$$-\left(\tfrac{1}{3}\right)\cdot \quad \left(\tfrac{1}{3}\right)\cdot \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 1-\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3} & -3-\frac{1}{3}\cdot(-1) & -2-\frac{1}{3}(-1) & -1-\frac{1}{3}\cdot 4 \\ -1-((-\frac{1}{\cancel{3}})\cdot\cancel{3}) & 2-((-\frac{1}{3})\cdot(-1)) & 1-((-\frac{1}{3})(-1)) & -1-(-\frac{1}{3})\cdot 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

II zerowanie w kolumnie 1

– pierwszy i drugi wiersz są już gotowe do etapu wstecznego podstawienia

① wybór elementu głównego

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{-\frac{8}{3}} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

największy element co do modułu to $-\frac{8}{3}$, więc nie trzeba niczego zamieniać miejscami

② Drugi etap schodkowania

$$\cdot\left(\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{3}\right)\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{5}{3}-\left(-\frac{8}{\cancel{3}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}}\cdot\frac{5}{3}\right) & \frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{\cancel{3}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{3}}{8}\cdot\frac{5}{3}\right) & \frac{1}{3}-\left(-\frac{7}{\cancel{3}}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{3}}{8}\cdot\frac{5}{3}\right) \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{5}{3}-\frac{5}{3} & \frac{2}{3}-\frac{25}{24} & \frac{1}{3}-\frac{35}{24} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{9}{8} \end{array}\right]$$

III wsteczne podstawianie

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{8} & -\frac{9}{8} \end{array}\right]$$

① $x_3 = \dfrac{-\frac{9}{8}}{-\frac{3}{8}} = \dfrac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{8}}\cdot\dfrac{\cancel{8}}{\cancel{3}} = 3$

② $x_2 = -\dfrac{\cancel{3}}{8}\left(-\dfrac{7}{\cancel{3}}+\dfrac{5}{\cancel{3}}\cdot 3\right) = -\dfrac{1}{8}(15-7) = -1$

③ $x_1 = \dfrac{1}{3}\left(4+x_2+x_3\right) = \dfrac{1}{3}(4-1+3) = \dfrac{6}{3} = 2$

Czyli rozwiązaniem naszego układu równań jest wektor

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$