Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP3 - 2^o semestre de 2011 - Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

   Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$, utilizando as ferramentas do cálculo.

   Solução:

   $$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$$

   $$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4 = 2(3x^2 - 5x + 2) = 2(3x - 2)(x - 1)x = 1$$

   $$f'(x) = 0 \longrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = 1$$

   $$f''(x) = 12x - 10$$

   $$f''(x) = 0 \longrightarrow x = \frac{5}{6}$$

   Da segunda derivada concluímos que o grafíco de f tem concavidade voltada para cima quando $x > \frac{5}{6}$ e concavidade voltada para baixo quando $x < \frac{5}{6}$, sendo $x = \frac{5}{6}$ um ponto de inflexão.

   Da primeira derivada verificamos que são pontos críticos $x = \frac{2}{3}$ e $x = 1$. Como $f''(2/3) = -2$ e $f''(1) = 2$, há em $x = 2/3$ um máximo relativo e em $x = 1$ um mínimo relativo.

Interseções:

Eixo x:

$$f(x) = 0 \longrightarrow f(2) = -3 \text{ e } f(3) = 14 \longrightarrow \text{ Logo } f \text{ se anula entre 2 e 3}$$

Eixo y:

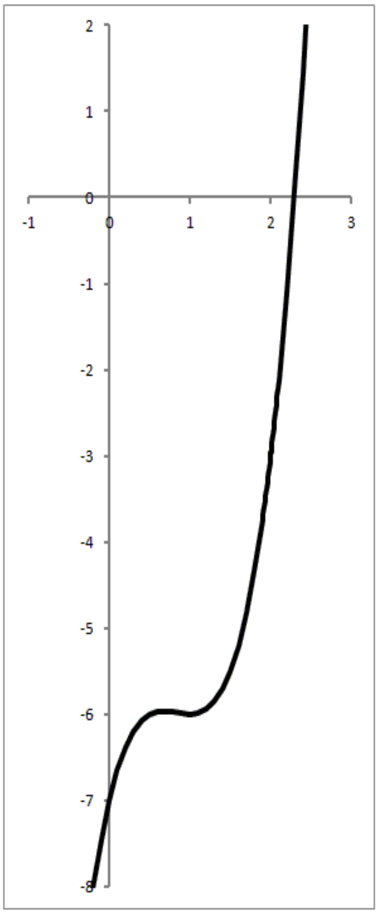
$$x = 0 \longrightarrow f(0) = -7$$

Não há assíntotas verticais posto que a função polinomial é contínua em toda a reta real. Não há assíntotas horizontais já que

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7 = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to\infty} 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7 = \infty$$



2. (2,5 pontos)

Calcule as derivadas abaixo:

(a) $\dfrac{df}{dx}$ onde $f(x) = \dfrac{2}{x^{1/2}} + \dfrac{6}{x^{1/3}} - \dfrac{2}{x^{3/2}} - \dfrac{4}{x^{3/4}}$

(b) $\dfrac{df}{dx}$ onde $f(x) = \sqrt[3]{3x^2}$

(c) $\dfrac{dy}{dx}$ onde $y(u) = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ e $u(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$

Solução:

(a)

$$f(x) = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{4}{x^{3/4}}$$

$$\frac{df}{dx} = \left[2 \cdot x^{-1/2} + 6 \cdot x^{-1/3} - 2 \cdot x^{-3/2} - 4 \cdot x^{-3/4}\right]'$$

$$\frac{df}{dx} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-1/2-1} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-1/3-1} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{-3/2-1} - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot x^{-3/4-1}$$

$$\frac{df}{dx} = -1 \cdot x^{-3/2} - 2 \cdot x^{-4/3} + 3 \cdot x^{-5/2} + 3 \cdot x^{-7/4}$$

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}$$

(b)

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \left[\sqrt[3]{3x^2}\right]' = \left[3^{1/3}x^{2/3}\right]' = \sqrt[3]{3}\left[x^{2/3}\right]' = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{(2/3-1)}$$

$$\frac{df}{dx} = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{x}}$$

(c)

$$y(u) = \frac{u^2-1}{u^2+1} \quad \text{e} \quad u(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}\left(\frac{u^2-1}{u^2+1}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2+2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{(u^2-1)'(u^2+1) - (u^2-1)(u^2+1)'}{(u^2+1)^2}\right) \cdot \left((x^2+2)^{1/3}\right)'$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{(2u)(u^2+1) - (u^2-1)(2u)}{(u^2+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}(x^2+2)^{1/3-1}(x^2+2)'\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2u^3 + 2u - 2u^3 + 2u}{(u^2+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}(x^2+2)^{-2/3}2x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{4u}{(u^2+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{2x}{3(x^2+2)^{2/3}}\right) = \left(\frac{4u}{(u^2+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{2x}{3(u)^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{8x}{3u(u^2+1)^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{8x}{3\sqrt[3]{x^2+2}((\sqrt[3]{x^2+2})^2+1)^2}\right)$$

3. (2,5 pontos)

Se $f(x) = x^2 + 1$, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo x, da região sob o gráfico de $f(x)$ entre $x = -1$ e $x = 1$.

Solução:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \pi(x^2+1)^2\, dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1)\, dx \\ &= \pi \left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^2 + x\right]_{-1}^{1} \\ &= \pi \left[\left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{3} + 1\right) - \left(-\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{3} - 1\right)\right] \\ &= \pi \frac{56}{15} \end{aligned}$$

4. (2,5 pontos)

Calcular as seguintes integrais.

(a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

(b) $\displaystyle\int (s^3+2)^2(3s^2)\, ds$

Solução:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

Com $u = x^2 + 1 \longrightarrow u' = 2x$ e substituindo na integral, teremos

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln u + C = \ln(x^2+1) + C$$

(b) $\displaystyle\int (s^3+2)^2(3s^2)\, ds = \frac{1}{3}(s^3+2)^3 + C$

Com $u = s^3 + 2 \longrightarrow u' = 3s^2$ e substituindo na integral, teremos

$$\int (s^3+2)^2(3s^2)\, ds = \int (u)^2 u'\, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}(s^3+2)^3 + C$$