Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação – UFF

Disciplina: MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO - AP3 - 2° semestre de 2016

GABARITO ALTERNATIVO (COMENTADO)

Questões

1. (2,50 pontos)

Calcule os limites a seguir:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+\ 5x-8}{7x^2-2x+1}$$

Resposta:

Se aplicarmos +∞ para cada x da fração, ficaremos com uma fração "∞/∞", que é uma forma indeterminada.

Pela regra de L'Hôpital, temos que o limite do quociente de funções é igual ao limite do quociente das derivadas dessas funções. Assim, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+\ 5x-8}{7x^2-2x+1}=\ \lim_{x\to+\infty}\frac{[3x^2+\ 5x-8]'}{[7x^2-2x+1]'}=\ \lim_{x\to+\infty}\frac{6x+\ 5}{14x-2}$$

A nova expressão ainda nos leva para uma forma indeterminada, então, aplicando a regra de L'Hôpital mais uma vez, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+\ 5x-8}{7x^2-2x+1}=\ \lim_{x\to+\infty}\frac{[6x+\ 5]'}{[14x-2]'}=\ \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{14}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+\ 5x-8}{7x^2-2x+1}=\ \frac{6}{14}$$

$$b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$$

Resposta:

Se aplicarmos +∞ para cada x da fração, ficaremos com uma fração "∞/∞", que é uma forma indeterminada.

Pela regra de L'Hôpital, temos que o limite do quociente de funções é igual ao limite do quociente das derivadas dessas funções. Assim, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\ =\ \lim_{x\to+\infty}\frac{[\ln x]'}{[x]'}\ =\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}\ =\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ =0$$

2. (2,50 pontos)

Analise onde a função é crescente ou decrescente e ache os pontos de máximo e de mínimo relativos da seguinte função:

$$f(x)=x^3+\ 6x^2-\ 7$$

Resposta:
Para iniciar a análise da função, precisamos determinar os pontos críticos dela.
São pontos críticos os valores de x onde:
1 – A derivada da função não está definida;
2 – A derivada da função se anula.

Então primeiro vamos achar a derivada da função. Derivando, temos:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x$$

Como a derivada é um polinômio, não há pontos onde a mesma não está definida. Resta apenas verificarmos os pontos onde a derivada se anula. Assim, fazemos a derivada igual à zero:

$$3x^2 + 12x = 0 \qquad x(3x + 12) = 0$$

Os pontos onde a função se anula é x = 0 e 3x+12 = 0, ou seja, x = 0 e x = -4

Verificando o sinal da derivada, temos:

++++++++ 0 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 0 +++++++++++++++++

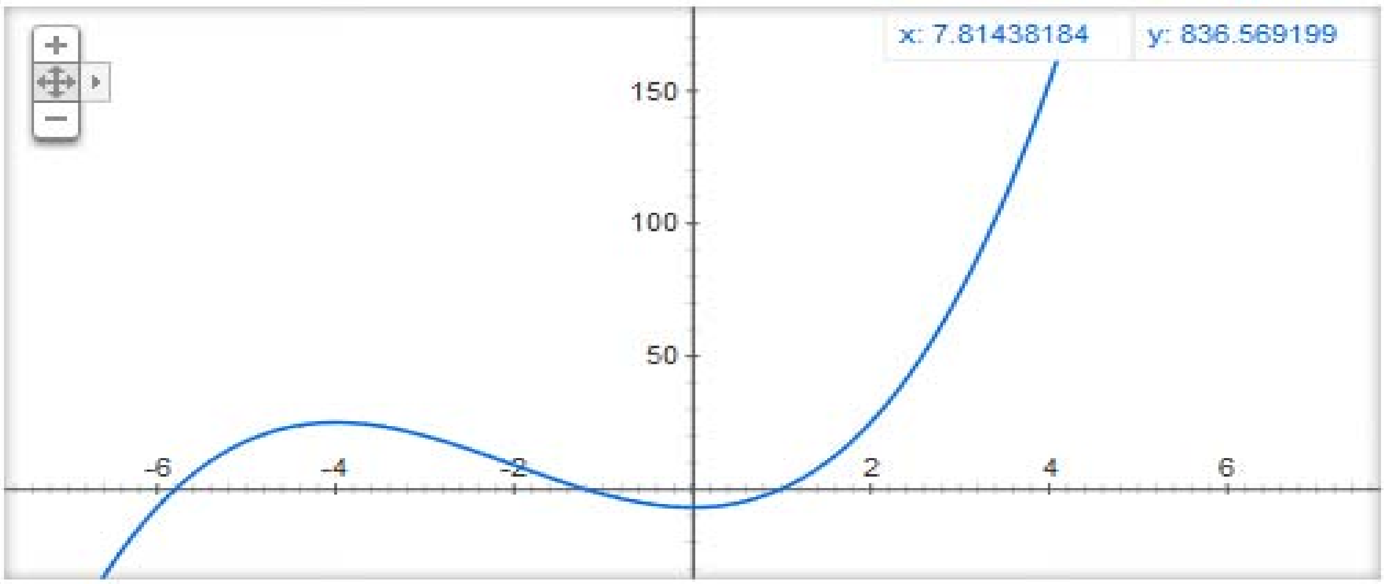
-4 0

Ou seja:
Para valores de x maiores que 0 e para valores de x menores que -4, a derivada é positiva. Nesses intervalos, a função original é crescente.
Para valores de x entre 0 e -4, a derivada é negativa. Nesse intervalo, a função original é decrescente.

Fica claro que os pontos onde x = 0 e onde x = -4 são pontos de mínimo e máximo relativos, respectivamente.
Aplicando o valor de x à função original, descobrimos quais pontos são esses:

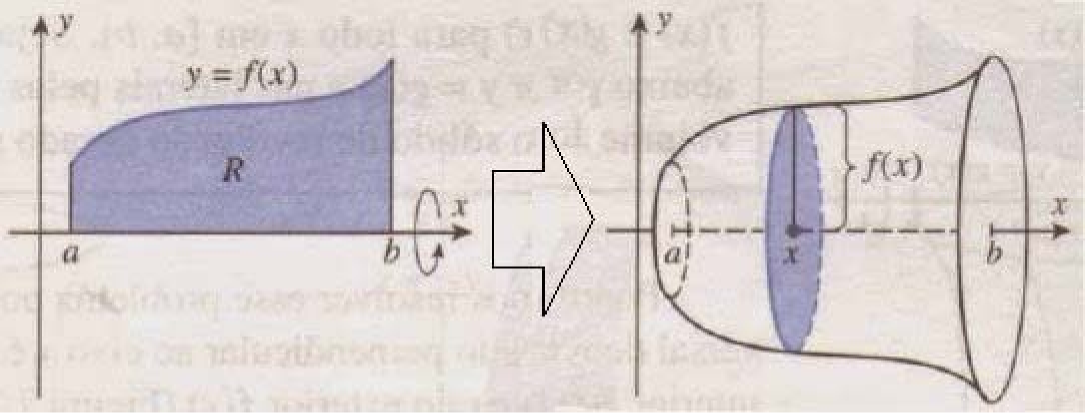
$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 7$$
$$f(0) = 0^3 + 6.0^2 - 7 = -7$$
$$f(-4) = -4^3 + 6.(-4)^2 - 7 = -64 + 96 - 7 = 25$$

Logo, o ponto de mínimo relativo é o ponto (0,-7) e o de máximo relativo é o (-4,25).
O gráfico da função original está logo abaixo:



3. (2,50 pontos)
Se $f(x) = x^4 + 2$, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo x, da região sob o gráfico de f(x) entre x = 1 e x = 2.

Resposta:
Sempre que giramos uma função em torno de um dos eixos (no caso do exemplo, no eixo x), criamos um sólido de revolução onde suas seções são discos. Veja o exemplo com o gráfico abaixo:



Repare que cada seção do sólido gerado é um disco, cujo raio é igual ao valor da f(x).
Assim, a integral para definir o volume é a soma de todas as áreas (discos) desse intervalo.
Sabemos que a área de um círculo é πr^2 e que o raio, nesse caso, é a f(x). Então:

$$Volume\ V = \int_a^b \pi (f(x))^2\ dx = \int_1^2 \pi (x^4 + 2)^2\ dx$$

$$V = \pi \int_1^2 (x^8 + 4x^4 + 4)\ dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^9}{9} + \frac{4x^5}{5} + 4x\right]_1^2 = \pi \left[\left(\frac{2^9}{9} + \frac{4.2^5}{5} + 4.2\right) - \left(\frac{1^9}{9} + \frac{4.1^5}{5} + 4.1\right)\right]$$

$$V = \pi \left[\left(\frac{512}{9} + \frac{128}{5} + 8\right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{5} + 4\right)\right] = \pi \left[\frac{2560 + 1152 + 360}{45} - \frac{5 + 36 + 180}{45}\right]$$

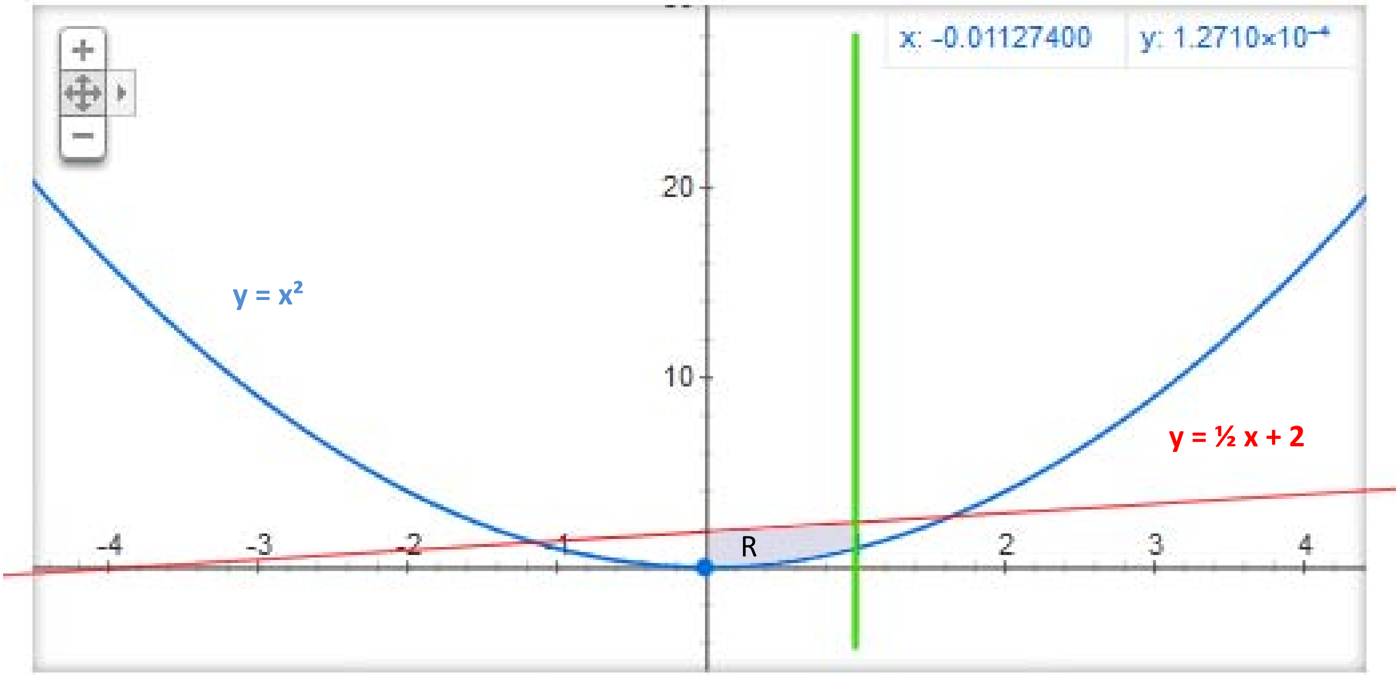
$$V = \pi \left[\frac{4072}{45} - \frac{221}{45}\right] = \frac{3851}{45}\pi$$

4. (2,50 pontos)

Calcular a área da região R situada abaixo da linha $y = \frac{1}{2}x + 2$, acima da parábola $y = x^2$, e entre o eixo y e x = 1.

Resposta:

Para facilitar a visualização, vamos traçar os gráficos e verificar qual é a área R pedida:



A área pedida é a pequena área em cinza.

Para calcularmos a área entre duas curvas, integramos a diferença entre as duas funções, nos pontos onde as duas curvas se interceptam, sendo a função de maior valor no intervalo menos a função de menor valor no intervalo.

Porém, o que foi pedido foi a área compreendida entre as duas curvas, o eixo y e a linha x = 1.

Sendo assim, temos que integrar a diferença das duas funções apenas entre os intervalos de x= 0 (eixo y) a x = 1.

Se você olhar o gráfico acima, notará que a função de maior valor nesse intervalo é a reta (em vermelho), logo a área será:

$$\acute{A}rea\ A = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 2\right) - (x^2)\ \ dx \ = \int_0^1 \frac{1}{2}x + 2 - x^2\ \ dx$$

$$A = \left[\frac{1}{2}.\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$A = \left(\frac{1^2}{4} + 2 - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{4} + 0 - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{3 + 24 - 4}{12} = \frac{23}{12}$$