Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação – UFF

Disciplina: MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO - AP1 - 2° semestre de 2016

GABARITO ALTERNATIVO (COMENTADO)

Questões

1. (2,50 pontos)

Calcule os seguintes limites:

$$a)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$$

Resposta:

Se aplicarmos -∞ para cada x da divisão de fração, ficaríamos com uma fração "∞/∞", que na AP1 ainda não poderia ser resolvido por L'Hôpital (matéria de AP2). Então, fazemos uma modificação nos termos da fração, de forma a eliminar a possibilidade de dar infinito nos dois termos da fração.

Assim, dividindo numerador e denominador por x², temos:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Repare que, agora, fazendo x tendendo a -∞, o numerador tende a -∞, porém o denominador não mais tende a -∞. Agora, o denominador tende a 1. Assim:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$$

$$b)\ \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad onde\ f(x) = x^4 - x^2 + 1$$

Resposta:

O que essa questão pede, nada mais é do que calcular a derivada da função através da definição de derivada.

Para isso, basta jogarmos a função nos dois pontos (x e x+h) dentro do limite e calcular quando h tende a zero. O resultado final deverá ser a derivada de f(x).

<u>O que precisamos saber aqui?</u>

$$f(x) = x^4 - x^2 + 1 \quad e \quad f(x+h) = (x+h)^4 - (x+h)^2 + 1$$

Basta aplicar agora no limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - (x+h)^2 + 1 - [x^4 - x^2 + 1]}{h}$$

Aqui, temos que ter em mente que:

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

E que:

$$(x+h)^4 = (x+h)^2 . (x+h)^2 = (x^2 + 2xh + h^2).(x^2 + 2xh + h^2) =$$

$$= x^4 + 2x^3h + x^2h^2 + 2x^3h + 4x^2h^2 + 2xh^3 + x^2h^2 + 2xh^3 + h^4$$
$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

Substituindo então, temos:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - (x^2 + 2xh + h^2) + 1 - [x^4 - x^2 + 1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^2 - 2xh - h^2 + 1 - x^4 + x^2 - 1}{h}$$

Removendo termos semelhantes (em vermelho), temos:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - 2xh - h^2}{h}$$

Colocando h em evidência, temos:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h.\left(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 - 2x - h\right)}{h}$$

Eliminando o h do numerador com o denominador, temos:

$$= \lim_{h\to 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 - 2x - h$$

Fazendo h tender a zero, temos:

$$= \lim_{h\to 0} 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 - 2x - h = 4x^3 + 6x^20 + 4x0 + 0 - 2x - 0$$

$$= 4x^3 - 2x$$

2. (2,50 pontos)

Verifique se a função:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

É contínua em x = 0, justifique sua resposta.

Resposta:

Para uma função ser contínua em um determinado ponto, duas condições devem ser satisfeitas:

1 – A função deve estar definida no ponto em questão.

2 – A os limites laterais ao ponto em questão devem ser iguais.

De cara verificamos que a função não está definida para x = 0 (pois x é o denominador da função, e este não pode ser igual a zero). Logo, a condição 1 não foi satisfeita e, por consequência a função não é contínua.

Poderíamos parar por aí, e a resposta já seria satisfatória, porém, a título de curiosidade, vejamos os limites laterais da função, e constatemos que eles são diferentes (nesse caso).

Limite lateral pela direita:

Quando nos aproximamos de zero pela direita, temos valores muito próximos de zero, porém, positivos. Nesses casos, módulo de x é igual a x (ambos são positivos). Assim:

$$\lim_{x\to 0^+} = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = +1$$

Limite lateral pela esquerda:
Quando nos aproximamos de zero pela esquerda, temos valores muito próximos de zero, porém, negativos. Nesses casos, módulo de x é igual a -x (o inverso de x, x negativo, módulo de x, positivo). Assim:

$$\lim_{x \to 0^-} = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

Como o limite não existe (os limites laterais são diferentes), conclui-se, mais uma vez, que a função não é contínua no ponto x =0.

3. (2,50 pontos)

Ache a derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$, informe seu domínio e sua imagem e calcule seus valores em x = 1 e x = 2.

Resposta:
Esse é um caso de função composta.
Sendo:

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$
$$g(x) = x^2 + 1$$

$$fog(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$$

Sabendo que:

$$fog'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Fazemos:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad f(x) = x^{1/3} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \qquad f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g(x) = x^2 + 1 \qquad g'(x) = 2x$$

Então:

$$fog'(x) = f'(g(x)).g'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

Domínio e Imagem da função original (não da derivada)

Como a raiz é cúbica, admite qualquer valor dentro dela (inclusive negativos, embora o quadrado evite que fique negativo), logo, a função está definida para todo x Real
Assim, o Domínio da função é:

Domínio = $\{x \in \mathbb{R}\}$

Da mesma forma poderemos ver que o resultado da raiz será sempre maior que 1, logo, para todo x, a função sempre retornará valores maiores ou iguais a 1. Assim a imagem é:

Imagem = $\{y = f(x) \mid y \in \mathbb{R}\, e\, y \geq 1\}$ ***ou***

Imagem = $[1, +\infty)$

Para calcular os valores da função nos postos pedidos, basta aplicar os pontos à função:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$$

$$f(1) = \sqrt[3]{1^2 + 1} = = \sqrt[3]{2}$$

$$f(2) = \sqrt[3]{2^2 + 1} = = \sqrt[3]{5}$$

4. (2,50 pontos)
Determine as primeiras e segundas derivadas das seguintes funções:

$$a)\ f(x) = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{x^2}{x^{2/3}} + \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

Resposta:
Para facilitar a derivação, vamos ajustar as parcelas a serem derivadas, reescrevendo a função:

$$f(x) = 2x^{-1/2} + x^2x^{-2/3} + (x^2 + 1)x^{-2}$$

$$f(x) = 2x^{-1/2} + x^{2-2/3} + x^2x^{-2} + x^{-2}$$

$$f(x) = 2x^{-1/2} + x^{4/3} + x^0 + x^{-2}$$

$$f(x) = 2x^{-1/2} + x^{4/3} + 1 + x^{-2}$$

Determinando a primeira derivada, temos:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\, 2x^{-\frac{1}{2}-1} + \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} + 0 + (-2)x^{-2-1}$$

$$f'(x) = -x^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-3} \quad ou \quad f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} - \frac{2}{x^3}$$

Determinando a segunda derivada, temos:

$$f''(x) = \left[-x^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - 2x^{-3}\right]'$$

$$f''(x) = -\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - (-3)2x^{-3-1}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{4}{9}\,x^{-\frac{2}{3}} + 6x^{-4} \quad ou \quad f''(x) = \frac{3}{2\sqrt{x^5}} + \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{x^4}$$

$$b)\ f(x) = (x^2 + 4)^2\,(2x^3 - 1)^3$$

Resposta:
Aqui temos o produto de duas funções. Temos a regra:

(f.g)' = f'.g + f.g'
Onde:

$$f = (x^2 + 4)^2 \quad e\ g = (2x^3 - 1)^3$$

Assim, derivando, temos:

$$f'(x) = [(x^2 + 4)^2]'\,(2x^3 - 1)^3 + (x^2 + 4)^2\,[(2x^3 - 1)^3]'$$

$$f'(x) = [2(x^2 + 4)2x]\,(2x^3 - 1)^3 + (x^2 + 4)^2\,[3(2x^3 - 1)^2 6x^2]$$

$$f'(x) = [4x(x^2 + 4)]\,(2x^3 - 1)^3 + (x^2 + 4)^2\,[18x^2(2x^3 - 1)^2]$$

$$f'(x) = 4(x^3 + 4x)\,(2x^3 - 1)^3 + 18\,(x^2 + 4)^2\,(2x^7 - x^4)^2$$

Determinando a segunda derivada, temos:

$$f''(x) = 4[(x^3 + 4x)\,(2x^3 - 1)^3]' + 18\,[(x^2 + 4)^2\,(2x^7 - x^4)^2]'$$

$$f''(x) = 4\left\{[x^3 + 4x]'(2x^3 - 1)^3 + (x^3 + 4x)\;\;[(2x^3 - 1)^3]'\right\}$$
$$+ 18\,\{[(x^2 + 4)^2]'\,(2x^7 - x^4)^2 + (x^2 + 4)^2\,[(2x^7 - x^4)^2]'\}$$

$$f''(x) = 4\left\{(3x^2 + 4)(2x^3 - 1)^3 + (x^3 + 4x)\;\;[3(2x^3 - 1)^2 6x^2]\right\}$$
$$+ 18\,\{[2(x^2 + 4)2x]\,(2x^7 - x^4)^2$$
$$+ (x^2 + 4)^2\,[2(2x^7 - x^4)(14x^6 - 4x^3)]\}$$

$$f''(x) = 4[(3x^2 + 4)(2x^3 - 1)^3 + 18(x^3 + 4x)(2x^7 - x^4)^2]$$
$$+18\,\{4(x^3 + 4x)\,(2x^7 - x^4)^2 + 2(x^2 + 4)^2\,(2x^7 - x^4)(14x^6 - 4x^3)\}$$