Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 2º semestre de 2016 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

   Calcule os seguintes limites:

   a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$$

   b) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{onde} \quad f(x) = x^4 - x^2 + 1$$

   Solução:

   a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3/x^2}{x^2/x^2+1/x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+1/x^2} = -\infty$$

   b) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^4-(x+h)^2+1]-[x^4-x^2+1]}{h}$$

   $$= \lim_{h\to 0} \frac{[x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^2-2xh-h^2+1]-[x^4-x^2+1]}{h}$$

   $$= \lim_{h\to 0} \frac{[x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^2-2xh-h^2+1-x^4+x^2-1]}{h}$$

   $$= \lim_{h\to 0} \frac{[4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-2xh-h^2]}{h}$$

   $$= \lim_{h\to 0} \; [4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3-2x-h]$$

$$= \lim_{h\to 0} \ [4x^3 - 2x] + \lim_{h\to 0} \ [6x^2h + 4xh^2 + h^3 - h]$$
$$= 4x^3 - 2x + 0$$
$$= 4x^3 - 2x$$

2. (2,5 pontos) ---

Verifique se a função

$$f(x) = \frac{|\ x\ |}{x}$$

é contínua em $x = 0$, justifique sua resposta.

Solução:

A função não está definida em $x = 0$. Além disso se verificarmos os limites laterais no ponto $x = 0$, teremos

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\ x\ |}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\ x\ |}{x} = +1$$

portanto o limite não existe em $x = 0$. O que mostra claramente que a função não é contínua em $x = 0$.

3. (2,5 pontos) ---

Ache a derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$, informe seu domínio e sua imagem e calcule seus valores em $x = 1$ e $x = 2$.

Solução:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \Longrightarrow f'(x) = \left[\sqrt[3]{x^2+1}\right]'$$

$$f'(x) = \left[(x^2+1)^{1/3}\right]'$$

$$= \left[(x^2+1)^{1/3}\right]'$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{(1/3-1)}\left[x^2+1\right]'$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{(-2/3)}(2x)$$

$$= \frac{2x}{3(x^2+1)^{(2/3)}}$$

$$= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

Como a radiciação é cúbica qualquer valor real é válido, sendo então a função definida em toda a reta real. Logo,

$$\text{Domínio } = \{x \in \mathbb{R}\}$$

como o termo sob radiciação é sempre maior ou igual a 1, o valor da função sempre será também maior ou igual a 1, logo

$$\text{Imagem } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \geq 1\}.$$

E agora os valores da função nos pontos solicitados,

$$f(1) = \sqrt[3]{(1)^2+1} = \sqrt[3]{1+1} = \sqrt[3]{2}$$

e

$$f(2) = \sqrt[3]{(2)^2+1} = \sqrt[3]{4+1} = \sqrt[3]{5}$$

4. (2,5 pontos)

Determine as primeiras e segundas derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^{1/2}} + \dfrac{x^2}{x^{2/3}} + \dfrac{x^2+1}{x^2}$

b) $f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

Solução:

a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{x^2}{x^{2/3}} + \frac{x^2+1}{x^2} \\
&= \ 2x^{-1/2} + x^2 x^{-2/3} + (x^2+1)x^{-2} \\
&= \ 2x^{-1/2} + x^{2-2/3} + x^2 x^{-2} + x^{-2} \\
&= \ 2x^{-1/2} + x^{4/3} + 1 + x^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2\left(-\frac{1}{2}\right)\ x^{-1/2-1} + \left(\frac{4}{3}\right) x^{4/3-1} + 0 + (-2)x^{-2-1} \\
&= -x^{-3/2} + \frac{4}{3} x^{1/3} - 2x^{-3} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} - 2\frac{1}{x^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left[-x^{-3/2} + \frac{4}{3}x^{1/3} - 2x^{-3}\right]' \\
&= -\left(-\frac{3}{2}\right) x^{(-3/2-1)} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right) x^{(1/3-1)} - 2(-3)x^{(-3-1)} \\
&= \frac{3}{2} x^{-5/2} + \frac{4}{6} x^{-2/3} + 6x^{-4} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{x^5}} + \frac{4}{6\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{x^4}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+4)^2(2x^3-1)^3 \\
f'(x) &= \left[(x^2+4)^2\right]' \cdot (2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2 \cdot \left[(2x^3-1)^3\right]' \\
&= \left[2(x^2+4)^{(2-1)}(2x)\right] \cdot (2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2 \cdot \left[3(2x^3-1)^{(3-1)}(6x^{(3-1)})\right] \\
&= \left[4x(x^2+4)\right] \cdot (2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2 \cdot \left[18x^2(2x^3-1)^2\right] \\
&= 4(x^3+4x) \cdot (2x^3-1)^3 + 18(x^2+4)^2 \cdot (2x^7-x^4)^2 \\
f''(x) &= \left[4(x^3+4x) \cdot (2x^3-1)^3 + 18(x^2+4)^2 \cdot (2x^7-x^4)^2\right]' \\
&= \left[4(x^3+4x) \cdot (2x^3-1)^3\right]' + \left[18(x^2+4)^2 \cdot (2x^7-x^4)^2\right]'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\left[(x^3+4x)\cdot(2x^3-1)^3\right]' + 18\left[(x^2+4)^2\cdot(2x^7-x^4)^2\right]' \\
&= 4\left\{(x^3+4x)\cdot\left[(2x^3-1)^3\right]' + \left[(x^3+4x)\right]'\cdot(2x^3-1)^3\right\} \\
&\quad + 18\left\{(x^2+4)^2\cdot\left[(2x^7-x^4)^2\right]' + \left[(x^2+4)^2\right]'\cdot(2x^7-x^4)^2\right\} \\
&= 4\left\{(x^3+4x)\cdot\left[3(2x^3-1)^2(6x)\right] + \left[(3x^2+4)\right]\cdot(2x^3-1)^3\right\} \\
&\quad + 18\left\{(x^2+4)^2\cdot\left[2(2x^7-x^4)^1(14x^6)\right] + \left[2(x^2+4)^1(2x)\right]\cdot(2x^7-x^4)^2\right\} \\
&= 4\left\{18x(x^3+4x)(2x^3-1)^2 + (3x^2+4)(2x^3-1)^3\right\} \\
&\quad + 18\left\{28x^6(x^2+4)^2(2x^7-x^4) + 4x(x^2+4)(2x^7-x^4)^2\right\}
\end{aligned}
$$