GABARITO AP 01 – CÁLCULO I – 17/09/2006

Questão 1 [3,0 pt] Calcule os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{3x+1}{x^2-4x+3} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3x+1}{(x-1)\,(x-3)} = \frac{4}{0^+} = \infty$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{x} = \lim_{x\to 0} 5\,\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x} = 5$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1-2x^2-2x}{\sqrt{x^2+x-2}} = -\infty$

Questão 2 [2,0 pt] Suponha que a equação $x^2-3xy+y^3=5$ defina, implicitamente, y como uma função diferenciável de x. Expresse $\dfrac{dy}{dx}$ em termos de x e de y. Determine a equação da reta tangente à curva definida por essa equação no ponto $(-1,1)$.

Solução:

Derivando implicitamente y em relação a x temos:

$$\begin{aligned} 2x-3y-3x\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3y-2x}{3y^2-3x}. \end{aligned}$$

Para calcular a equação da reta no ponto $(-1,1)$, temos $\displaystyle\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=-1\\ y=1}} = \frac{3+2}{3+3} = \frac{5}{6}.$

Assim, a resposta é

$$\begin{aligned} y-1 &= \frac{5}{6}(x+1) \\ y &= \frac{5}{6}x+\frac{11}{6}. \end{aligned}$$

Questão 3 [3,0 pt] Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{(2x^2+3)^2}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{8x}{3\sqrt[3]{2x^2+3}}$

(b) $g(x) = \dfrac{\cos x}{x^2-2x}$ $\qquad f'(x) = -\left(\dfrac{\operatorname{sen}(x)\,(x^2-2)+\cos(x)\,(2x-2)}{(x^2-2x)^2}\right)$

c) $h(x) = \text{sen}(4x^5 + 3)$ $f'(x) = 20\ x^4\ \cos(4\ x^5 + 3)$

Questão 4 [2,0 pt] Determine os valores de α e de β, tais que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4, & \text{se} \quad x \geq 1, \\ \alpha x + \beta, & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}$$

seja diferenciável.

Resposta: $\alpha = -3$ e $\beta = 3$.