Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação – UFF

Disciplina: MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO - AP2 - 2° semestre de 2016

GABARITO ALTERNATIVO (COMENTADO)

Questões

1. (2,50 pontos)

Determine os extremos relativos da função $f(x) = (x-2)^{2/3}$

Resposta:

Para determinarmos os extremos relativos (máximos e/ou mínimos da função), precisamos analisar a função no tocante aos valores de sua derivada. Os locais onde a derivada da função se anula ou não está definida determinam os pontos críticos da função, ou seja, nesses locais podem ter extremos relativos (mínimos e/ou máximos da função).

Sendo assim, determinemos a derivada da função proposta:

$$f(x) = (x-2)^{2/3}$$

$$f'(x) = ?$$

A função proposta é do tipo f(x) = (g(x))^{exp}, onde g(x) = x-2. A resolução dessa derivada é dada abaixo:

f(x) = (g(x))^{exp} f'(x) = exp (g(x))$^{exp-1}$ g'(x)

Resolvendo, temos:

$$f'(x) = \frac{2}{3}\,(x-2)^{\frac{2}{3}-1}\,.\,(x-2)'$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\,(x-2)^{-\frac{1}{3}}\,.\,1 \quad \ldots \quad f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}} \quad \ldots \quad \ldots \quad f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$

Analisando o resultado da derivada, notaremos que não existe nenhum valor de x para o qual a função se anula (pois 2 dividido por qualquer que seja o valor nunca vai dar zero). Porém, temos um valor onde a derivada da função não está definida: o valor 2. Para x = 2, o denominador se anula, o que representa uma impossibilidade.

<u>O que precisamos saber aqui?</u>

Um valor onde a derivada não existe representa (no gráfico) um ponto onde não existe reta tangente ao gráfico (já que a derivada é o coeficiente angular da reta tangente). Assim, existem duas situações onde não existe a derivada: Uma descontinuidade (salto) ou um bico. O que determina isso (qual é a situação do problema em questão) é a análise da função e dos sinais de sua derivada.

Ao olharmos para a função original, vemos que ela está definida para x=2, logo, já percebemos que o fato de não ter uma derivada definida neste ponto não significa uma descontinuidade.

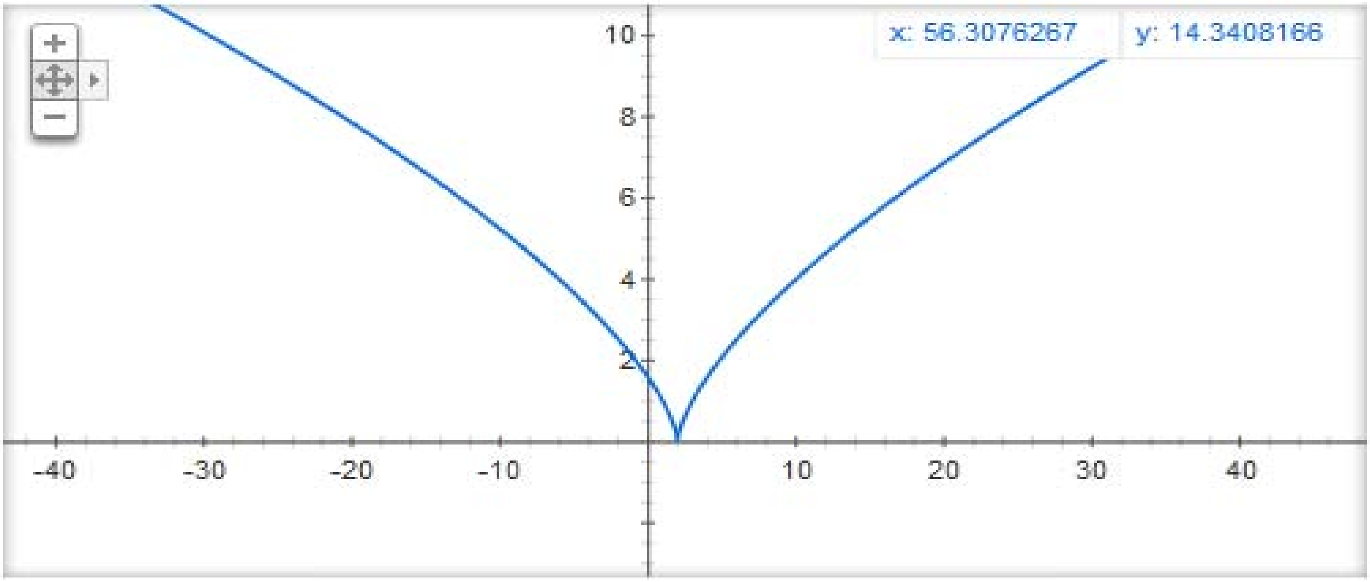
Se olharmos os sinais da derivada, temos:

Para x < 2, f'(x) será <0 (pois o denominador será negativo) – logo a função original é decrescente nesse intervalo (-∞, 2).

Para x > 2, f'(x) será >0 (pois o denominador será positivo) – logo a função original é crescente nesse intervalo(2,+ ∞).

Com essa análise, percebemos que a função decresce até x = 2 e cresce após x=2, formando um bico "para baixo" em x=2, justamente nesse ponto onde não existe a derivada.

O gráfico da função é o exposto abaixo:



Fica fácil observar que x=2 é um ponto de mínimo relativo da função original.

2. (2,50 pontos)
Encontre as seguintes antiderivadas:
a)

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\, dx$$

Resposta: Separando os itens do integrando, temos:

$$\int \left[\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right] dx$$

Eliminando os denominadores, temos:

$$\int \left[x + 5 - 4x^{-2}\right]\, dx$$

Integrando cada termo, temos:

$$= \frac{x^2}{2} + 5x - 4\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + C$$

Unificando sobre o mesmo denominador, temos:

$$= \frac{x^3 + 10x^2 + 8}{2x} + C$$

b)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx$$

Resposta:
Este integrando não dá para "eliminar o denominador" da forma como o anterior, porém, ele possui uma particularidade interessante: O numerador contém parte da derivada do interior da raiz (o x² de 3x²)...
Assim, podemos reescrever a integral da seguinte maneira:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx = \int \frac{x^2}{(x^3+2)^{1/4}}\,dx = \int x^2\ (x^3+2)^{-1/4}\,dx$$

Poderemos, sem alterar o resultado, multiplicar o integrando por 1, na forma 3/3 (de forma a ter o 3x²):

$$= \int \frac{3}{3}x^2\ (x^3+2)^{-1/4}\,dx$$

Poderemos, também, retirar 1/3 da integral (pois é constante):

$$= \frac{1}{3}\int 3x^2\ (x^3+2)^{-1/4}\,dx$$

Fazendo u = x³ + 2 , temos que:

$$u = (x^3+2)\quad ,logo\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \quad logo, du = 3x^2\,dx$$

Substituindo na integral, temos:

$$= \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{-1/4}\,3x^2dx = \frac{1}{3}\int u^{-1/4}\,du$$

Agora ficou bem mais fácil, integrando em du, temos:

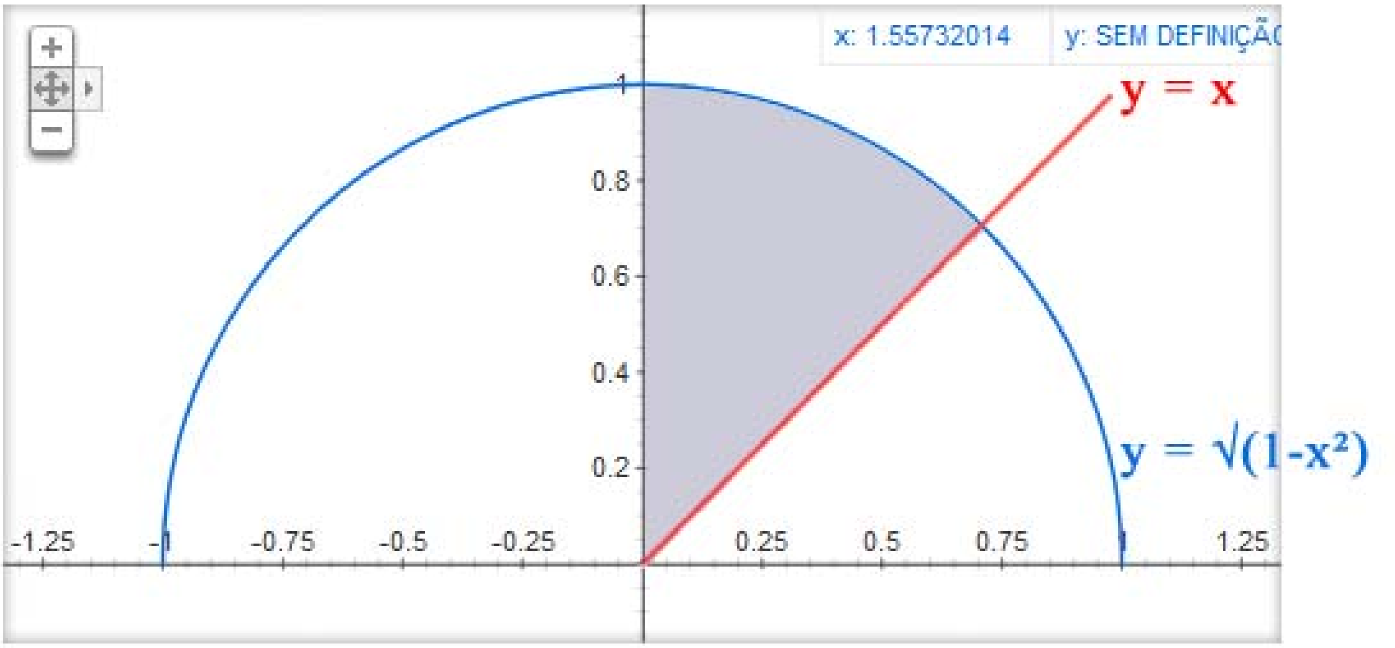
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{u^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}\right] + C = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{3/4}}{3/4}\right] + C = \frac{1}{3}\,.\frac{4}{3}u^{3/4} + C = \frac{4}{9}u^{3/4} + C$$

Retornando a variável x (u = x³ + 2), temos:

$$= \frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4} + C$$

3. (2,50 pontos)
Use integrais definidas para achar a área entre o semicírculo $v = \sqrt{1-x^2}$ e a linha em 45º definida por v = x, no primeiro quadrante.

Resposta:
A área que se deseja calcular é a do gráfico abaixo:



Precisaremos, primeiro definir os limites da integração, que serão de zero (origem) até o encontro das duas funções. Então, para determinar a interseção entre as duas funções, temos:

$$x = \sqrt{1-x^2} \quad \ldots \quad x^2 = 1 - x^2 \quad \ldots \quad 2x^2 = 1 \quad \ldots \quad x = \pm\sqrt{1/2}$$

Como a interseção pedida é no primeiro quadrante, consideraremos apenas o valor positivo, ou seja, $x = \sqrt{1/2}$

O cálculo da área entre duas curvas é determinado pela integral definida (entre as interseções das funções) da diferença entre as funções, onde será a função maior (no intervalo) menos a função menor (no intervalo).
Assim, no intervalo entre 0 e $\sqrt{1/2}$, a função maior é a do semicírculo e a menor é a reta y = x.

Assim, ficamos com a integral abaixo:

$$\text{Área } A = \int_0^{\sqrt{1/2}} \left(\sqrt{1-x^2} - x\right) \quad dx$$

Separando os termos do integrando, temos:

$$\text{Área } A = \int_0^{\sqrt{1/2}} \sqrt{1-x^2} \quad dx \quad - \int_0^{\sqrt{1/2}} x \quad dx$$

A integral de x dx é trivial. Vamos nos ater a mais complicada, que é o primeiro termo. Depois juntaremos as duas soluções no cálculo da área.

Para resolvermos esta parte, teremos que ter em mente as seguintes relações trigonométricas:

$$Cos^2\, x + sen^2\, x = 1 \qquad (Relação\ fundamental\ da\ trigonometria)$$

$$Cos^2\, x = \frac{1}{2}\ (1 + cos\, 2x) \qquad e \qquad sen\, 2x = 2senx\, cos\, x$$

Então, fazendo:

$$x = sen\, u, \; temos\ que \;\; dx = cos\, u\, du$$

Substituindo na integral, temos (na primeira parte):

$$= \int \sqrt{1-x^2}\;\; dx \;=\; \int \sqrt{1-sen^2\, u}\;\; cos\, u\, du$$

Da relação fundamental da trigonometria, temos que:

$$Cos^2\, u + sen^2\, u = 1 \;\ldots\quad Cos^2\, u = 1 - sen^2\, u \quad\ldots\; Cos\, u = \sqrt{1 - sen^2\, u}$$

Substituindo na integral, temos:

$$= \int \sqrt{1-sen^2\, u}\;\; cos\, u\, du = \int \; cos\, u\,.\; cos\, u\, du \;\; = \int \; cos^2\, u\; du$$

$$Mas,\;\; Cos^2\, u \;= \frac{1}{2}\;(1 + cos\, 2u), então, substituindo, temos:$$

$$= \int \; cos^2\, u\; du \;= \frac{1}{2}\int \;(1 + cos\, 2u)\; du$$

$$= \;\frac{1}{2}\left[\int \; 1\; du + \int \; cos\, 2u\; du\right]$$

Resolvendo as integrais, temos:

$$= \;\frac{1}{2}\left[(u + c1) + \left(\frac{sen\, 2u}{2} + \; c2\right)\right]$$

$$Mas, sabendo\ que\ sen\, 2u = 2sen\, u\, cos\, u, \qquad e\ substituindo, temos:$$

$$= \;\frac{1}{2}\left[(u + c1) + \left(\frac{2sen\, u\, cos\, u}{2} + \; c2\right)\right]$$

$$= \;\frac{1}{2}(u + \; sen\, u\, cos\, u) + \; C$$

Agora teremos que voltar à variável x...
Sabendo que x = sen u, então u = arc sen x   ou sen^{-1} x

E da relação fundamental, temos que

$$Cos^2\, u + sen^2\, u = 1 \;\ldots\quad Cos^2\, u = 1 - sen^2\, u \quad\ldots\; Cos\, u = \sqrt{1 - sen^2\, u}$$

Substituindo, temos:

$$= \;\frac{1}{2}(u + \; sen\, u\, cos\, u) + \; C$$

$$= \frac{1}{2} sen^{-1}\, x + \frac{1}{2} sen(sen^{-1}\, x).\sqrt{1 - sen^2\,(sen^{-1}\, x)} \; + C$$

Mas, seno do arco cujo seno é x, só pode ser igual a x... (a própria expressão diz "arco cujo seno é x"). Então, substituindo, temos:

$$= \frac{1}{2} sen^{-1}\, x + \frac{1}{2} x . \sqrt{1 - x^2} + C$$

Assim, chegamos à conclusão de que:

$$\int \sqrt{1 - x^2} \quad dx = \frac{1}{2} sen^{-1}\, x + \frac{1}{2} x . \sqrt{1 - x^2} + C$$

Voltando ao início, para calcular a diferença das integrais, tínhamos:

$$\text{Área } A = \int_0^{\sqrt{1/2}} \sqrt{1 - x^2} \quad dx - \int_0^{\sqrt{1/2}} x \quad dx$$

$$A = \left[\frac{1}{2} sen^{-1}\, x + \frac{1}{2} x . \sqrt{1 - x^2}\right]_0^{\sqrt{1/2}} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1/2}}$$

$$A = \left[\frac{1}{2} sen^{-1} \sqrt{1/2} + \frac{1}{2} \sqrt{1/2} . \sqrt{1 - \left(\sqrt{1/2}\right)^2}\right] - \left[\frac{\left(\sqrt{1/2}\right)^2}{2}\right]$$

O arco cujo seno é raiz de meio é igual a $\pi/4$, ou seja, 45º (basta observar no próprio gráfico). Assim:

$$A = \left[\frac{1}{2} . \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{1/2} . \sqrt{1 - 1/2}\right] - \left[\frac{1/2}{2}\right]$$

$$A = \left[\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \sqrt{1/2} . \sqrt{1/2}\right] - \frac{1}{4}$$

$$A = \left[\frac{\pi}{8} + \frac{1/2}{2}\right] - \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$A = \frac{\pi}{8}$$

4. (2,50 pontos)

Use a Regra de L'Hopital uma ou mais vezes para avaliar os seguintes limites:

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2}$$

Resposta: Aplicando o limite quando x tende a zero pela direita, temos que tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero.
Assim, temos a forma indeterminada 0/0.
Pela regra de L'Hôpital, temos que o limite do quociente de funções é igual ao limite do quociente das derivadas dessas funções. Assim, temos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{[e^x - 1]'}{[x^2]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2x} =$$

Agora, quando x tende a zero pela direita, o numerador tende a 1, enquanto o denominador tende a zero (em números positivos), logo:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2x} = +\infty$$

$$b)\ \lim_{x\to 0} \frac{x + sen\,2x}{x - sen\,2x}$$

Resposta: Aplicando o limite quando x tende a zero, temos que tanto o numerador quanto o denominador tendem a zero.
Assim, temos, novamente, a forma indeterminada 0/0.

Pela regra de L'Hôpital, temos que o limite do quociente de funções é igual ao limite do quociente das derivadas dessas funções. Assim, temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + sen\,2x}{x - sen\,2x} = \lim_{x\to 0} \frac{[x + sen\,2x]'}{[x - sen\,2x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2cos\,2x}{1 - 2cos\,2x}$$

Agora, quando x tende a zero, o numerador tende a 3, enquanto o denominador tende a -1 (pois o cosseno de zero é igual a 1), logo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + 2cos\,2x}{1 - 2cos\,2x} = \frac{1+2}{1-2} = \frac{3}{-1} = -3$$