



UNIVERSITÀ DI PISA

## Corso di Laurea Magistrale INGEGNERIA ROBOTICA E DELL'AUTOMAZIONE

Corso di Robotica  
Modulo di Controllo dei Robot

Tavole Applicative

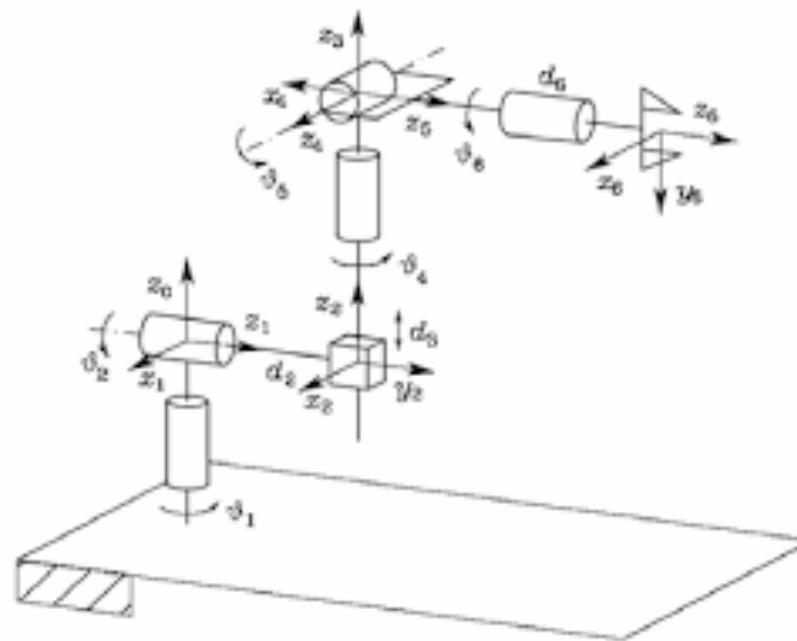
Docenti:  
Prof. Antonio BICCHI  
Prof. Giorgio GRIOLI

Studente:  
Arianna GASPARRI

# Indice:

- Manipolatore di Stanford
  - Controllore PD con compensazione di Gravità
  - Controllore Computed Torque
  - Controllore Adaptive Computed Torque
  - Confronto tra controllori
- Gantry crane
  - Controllabilità e Osservabilità
  - Feedback Linearization

# Manipolatore di Stanford



Parametri del  
manipolatore:

$$m_1 = m_3 = 10 \text{ kg}$$

$$m_2 = 5 \text{ kg}$$

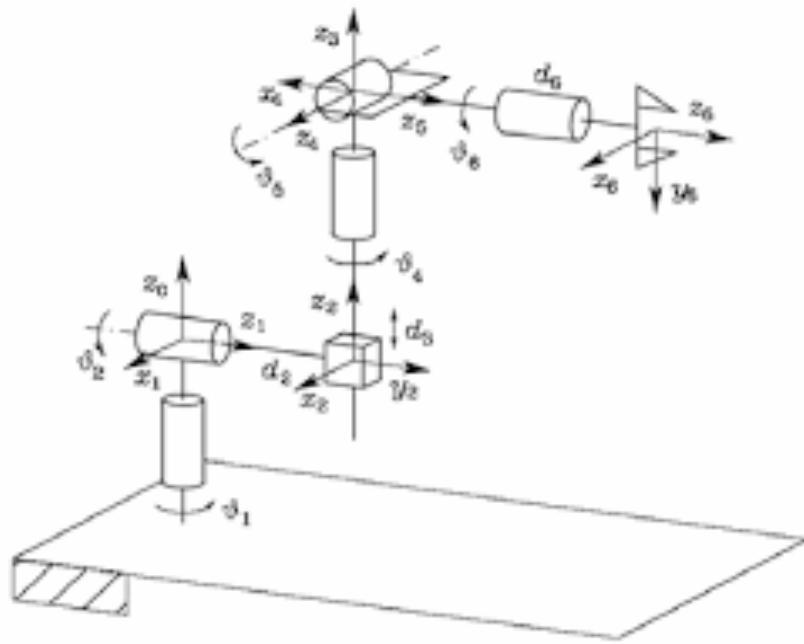
$$m_4 = m_6 = 2 \text{ kg}$$

$$m_5 = 4 \text{ kg}$$

$$d_1 = d_2 = d_6 = 1 \text{ m}$$

$$d_3 = d_4 = d_5 = 0 \text{ m}$$

# Manipolatore di Stanford



Il manipolatore di Stanford può essere scomposto in un manipolatore sferico, giunti 1, 2, 3, e un polso sferico, giunti 4, 5 e 6.

Inoltre i giunti si considerano ideali, privi di elasticità.

| Link | $a_i$ | $\alpha_i$ | $d_i$   | $\vartheta_i$   |
|------|-------|------------|---------|-----------------|
| 1    | 0     | $-\pi/2$   | 0       | $\vartheta_1^*$ |
| 2    | 0     | $\pi/2$    | $d_2$   | $\vartheta_2^*$ |
| 3    | 0     | 0          | $d_3^*$ | 0               |
| 4    | 0     | $-\pi/2$   | 0       | $\vartheta_4^*$ |
| 5    | 0     | $\pi/2$    | 0       | $\vartheta_5^*$ |
| 6    | 0     | 0          | $d_6$   | $\vartheta_6^*$ |

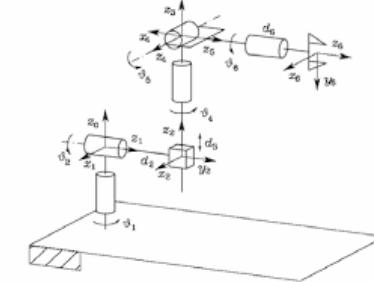
Tabella dei parametri secondo convenzione D-H

# Manipolatore di Stanford

## CINEMATICA DIRETTA

A partire dalla tabella di D-H è possibile associare a ciascun giunto una terna destrorsa di riferimento e ricavare le matrici di trasformazione tra la terna i e la terna i+1.

Componendo le trasformazioni in assi correnti a partire dalla terna base fino alla terna dell'end-effector, si ottiene una mappa della cinematica diretta che rappresenta la postura dell'organo terminale rispetto alla base.



$$\mathbf{T}_6^0 = \mathbf{T}_3^0 \mathbf{T}_6^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^0 & \mathbf{s}^0 & \mathbf{a}^0 & \mathbf{p}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + (c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + (s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) d_6 \\ c_2 d_3 + (-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) d_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}^0 = \begin{bmatrix} c_1(c_2(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) - s_1(s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_1(c_2(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) + c_1(s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ -s_2(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6 \end{bmatrix}$$

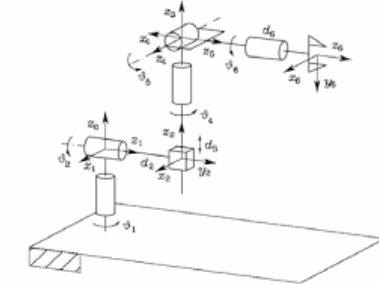
$$\mathbf{s}^0 = \begin{bmatrix} c_1(-c_2(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) - s_1(-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_1(-c_2(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) + c_1(-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_2(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^0 = \begin{bmatrix} c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

# Manipolatore di Stanford

## DINAMICA DIRETTA:

Il problema della dinamica diretta consiste nel determinare, per  $t > t_0$ , le accelerazioni dei giunti  $\ddot{q}(t)$  (e quindi  $\dot{q}(t)$  e  $q(t)$ ) risultanti dalle date coppie di giunti  $\tau(t)$ , una volta che le posizioni iniziali  $q(t_0)$  e le velocità iniziali  $\dot{q}(t_0)$  sono note (stato iniziale del sistema).



## DINAMICA INVERSA:

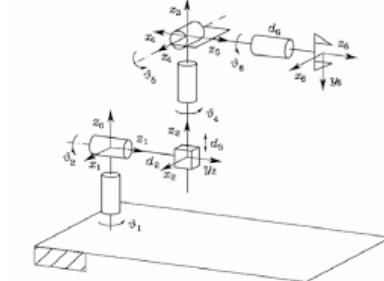
Il problema della dinamica inversa consiste nel determinare le coppie articolari  $\tau(t)$  che sono necessarie per generare il movimento specificato dall'accelerazioni  $\ddot{q}(t)$ , velocità  $\dot{q}(t)$  e posizioni  $q(t)$ .

$$B(\underline{q})\ddot{\underline{q}} + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}} + G(\underline{q}) = \underline{\tau}$$

# Manipolatore di Stanford

## MATRICE DI INERZIA

$$\begin{aligned}
 B = & (m(1)*(JpG1')*JpG1 + (JgG1')*rG1*I_f(m(1),d(1))*(rG1')*JgG1+... \\
 & m(2)*(JpG2')*JpG2 + (JgG2')*rG2*I_f(m(2),d(2))*(rG2')*JgG2+... \\
 & m(3)*(JpG3')*JpG3 + (JgG3')*rG3*I_f(m(3),q(3))*(rG3')*JgG3+... \\
 & m(4)*(JpG4')*JpG4 + (JgG4')*rG4*I_f(m(4),d(4))*(rG4')*JgG4+... \\
 & m(5)*(JpG5')*JpG5 + (JgG5')*rG5*I_f(m(5),d(5))*(rG5')*JgG5+... \\
 & m(6)*(JpG6')*JpG6 + (JgG6')*rG6*I_f(m(6),d(6))*(rG6')*JgG6);
 \end{aligned}$$



## MATRICE DELLE FORZE CENTRIFUGHE E DI CORIOLIS

Calcolata mediante i simboli di Christoffel

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k$$

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right)$$

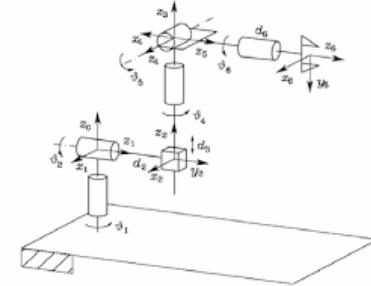
## MATRICE GRAVITAZIONALE

$$\begin{aligned}
 G = & -(m(1)*(JpG1')*g0 + m(2)*(JpG2')*g0 + m(3)*(JpG3')*g0 +... \\
 & m(4)*(JpG4')*g0 + m(5)*(JpG5')*g0 + m(6)*(JpG6')*g0);
 \end{aligned}$$

# Manipolatore di Stanford

Nelle slide successive è mostrato il comportamento della dinamica libera del sistema, verificando che tutti e tre i controllori proposti siano in grado di reiettare un disturbo sullo stato iniziale e controllare a 0 l'errore.

In particolare è stato posto il vincolo  $q_0 = qf = [0,0,0,0,0,0]^T$  per cui lo stato iniziale e finale siano uguali e poi è stato inserito un disturbo sullo stato iniziale pari a 0.1 rad per i giunti rotoidali e 0.1 m per il giunto prismatico.

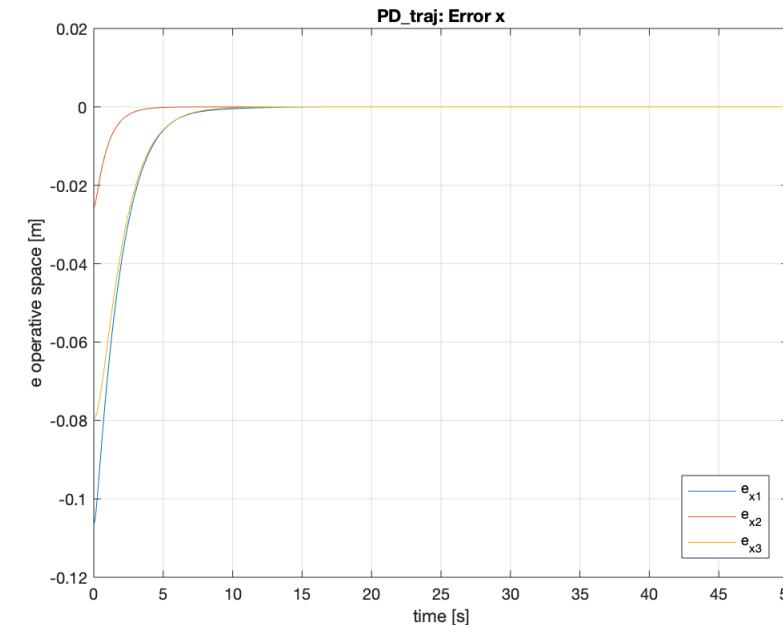
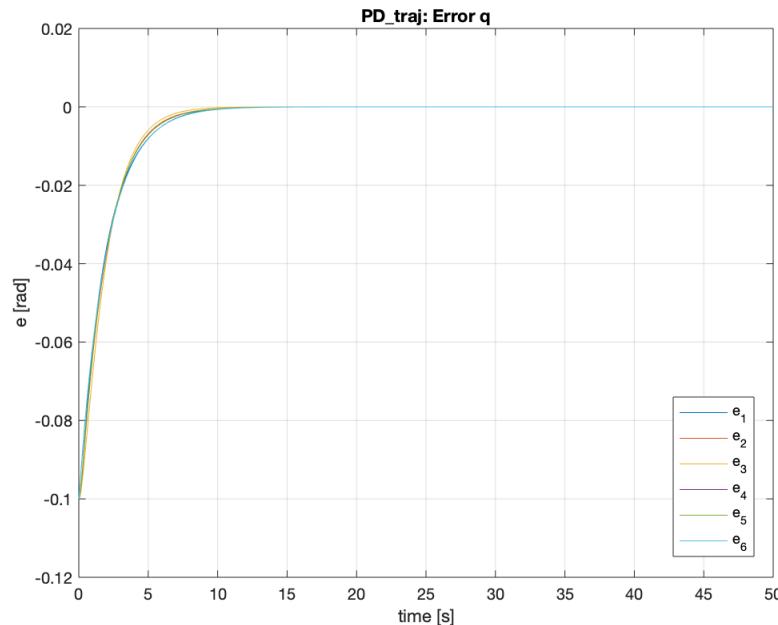


# Manipolatore di Stanford

## Reiezione di un disturbo sullo stato iniziale $q_0$

### Controllore PD con compensazione di Gravità

Di seguito è riportato l'andamento dell'errore nello spazio dei giunti e nello spazio operativo ottenuto per il controllo PD+G sulla dinamica libera del manipolatore descritto nelle slide precedenti.

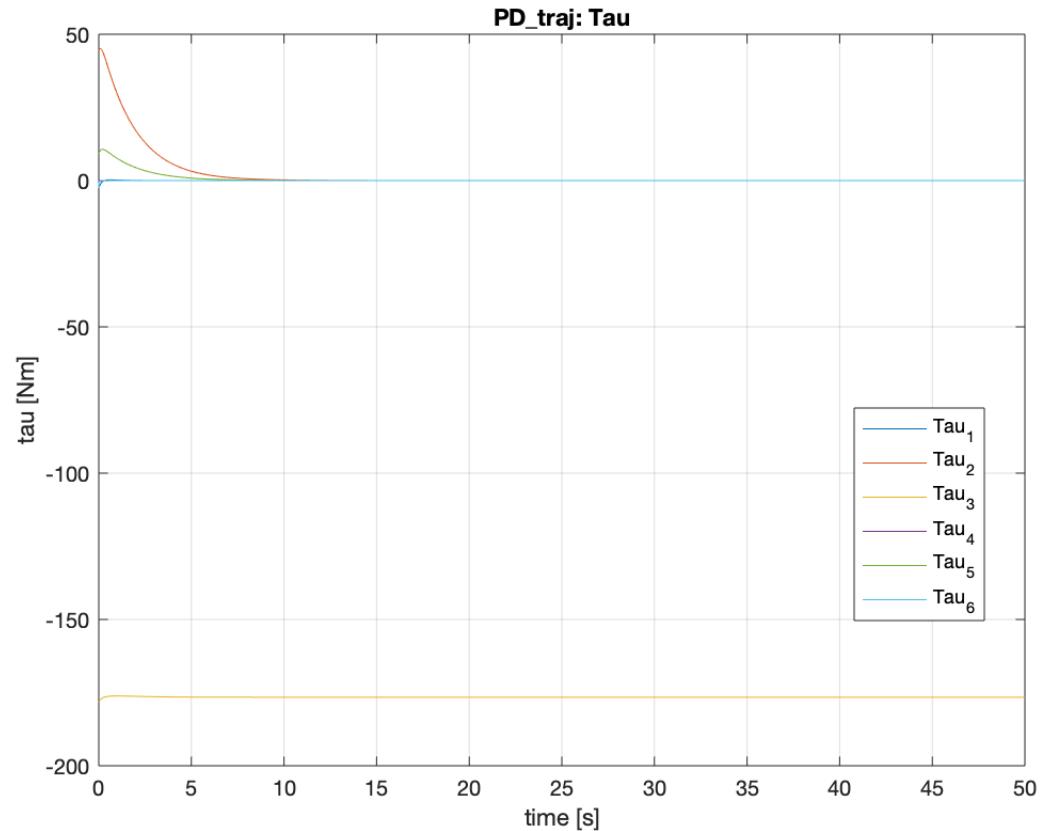


# Manipolatore di Stanford

## Reiezione di un disturbo sullo stato iniziale $q_0$

### Controllore PD con compensazione di Gravità

Di seguito è riportato l'andamento della coppia in ingresso ai giunti ottenuta per il controllo PD+G sulla dinamica libera del manipolatore descritto nelle slide precedenti.

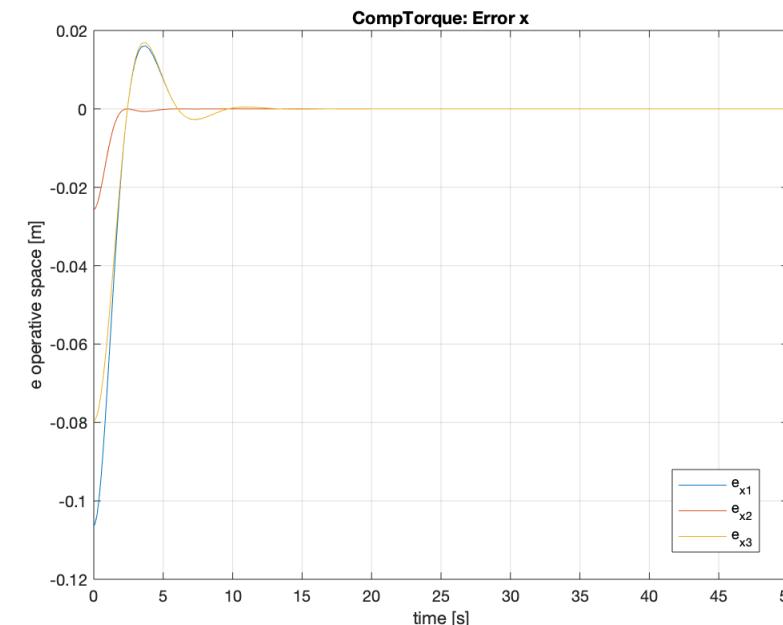
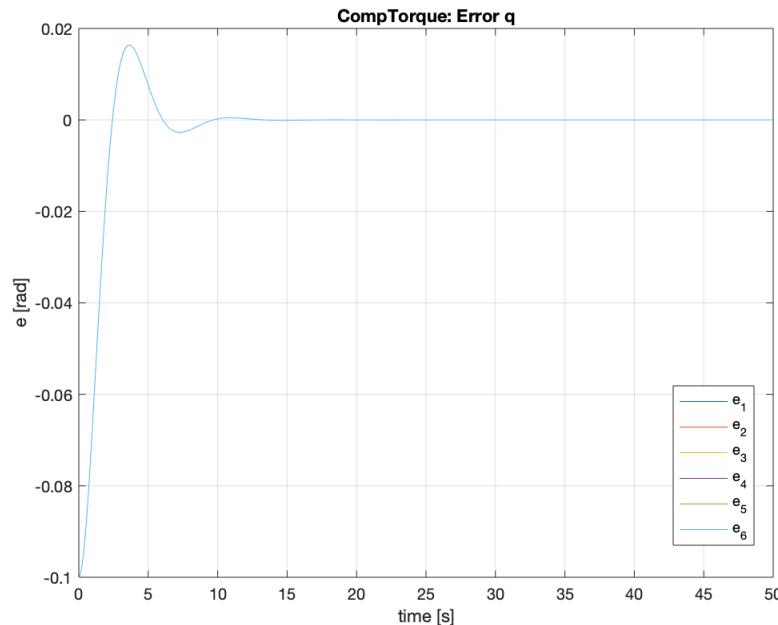


# Manipolatore di Stanford

## Reiezione di un disturbo sullo stato iniziale $q_0$

### Controllore Computed Torque

Di seguito è riportato l'andamento dell'errore nello spazio dei giunti e nello spazio operativo ottenuto per il controllo a coppia calcolata sulla dinamica libera del manipolatore descritto nelle slide precedenti.

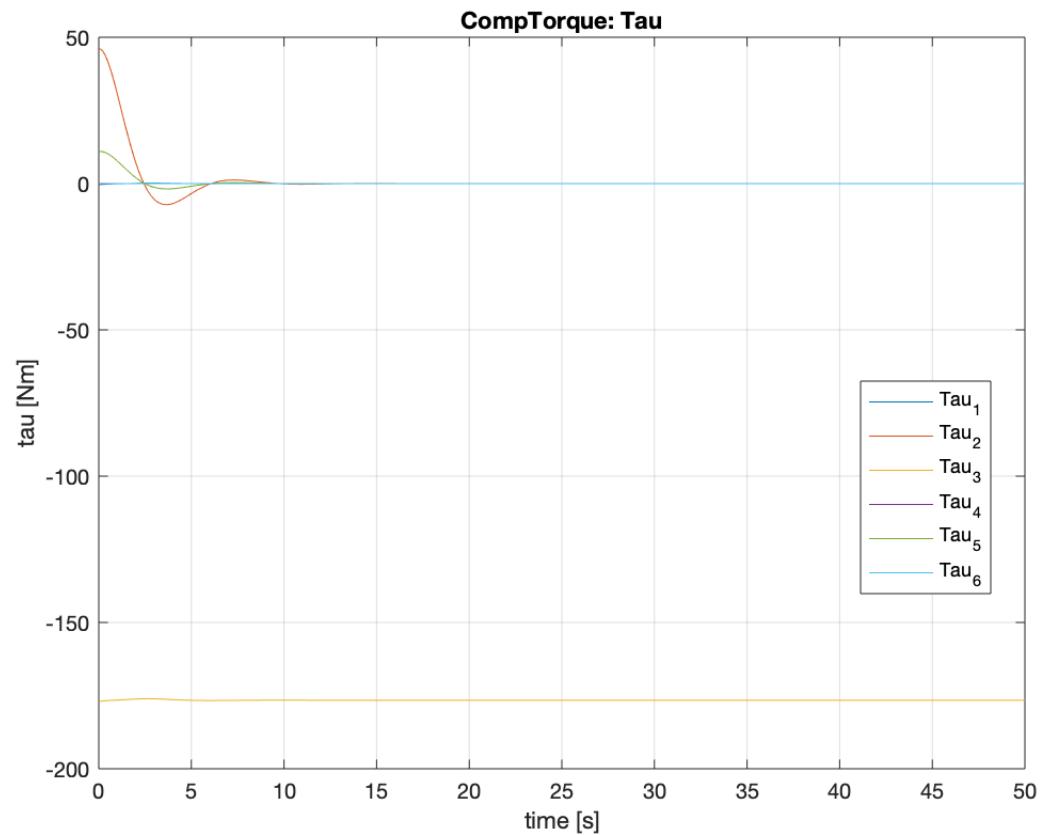


# Manipolatore di Stanford

## Reiezione di un disturbo sullo stato iniziale $q_0$

### Controllore Computed Torque

Di seguito è riportato l'andamento della coppia in ingresso ai giunti ottenuta per il controllo a coppia calcolata sulla dinamica libera del manipolatore descritto nelle slide precedenti.

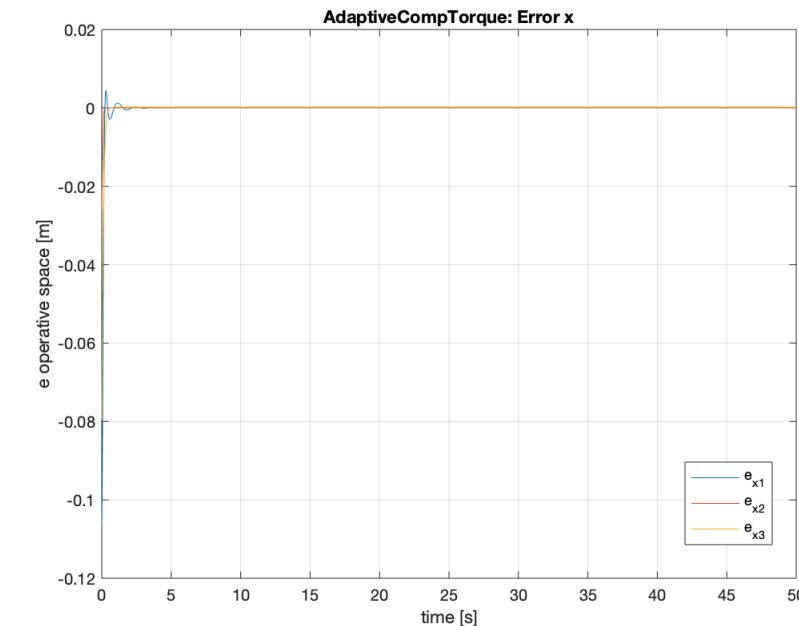
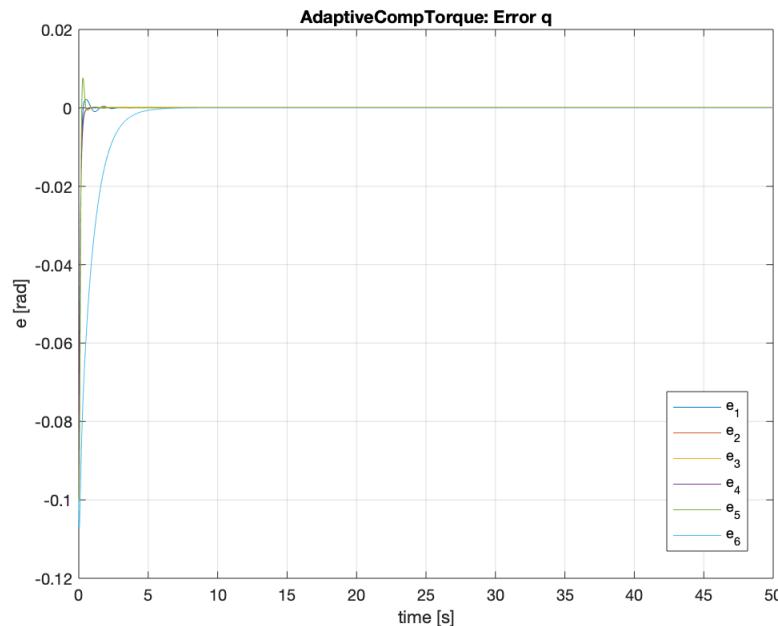


# Manipolatore di Stanford

## Reiezione di un disturbo sullo stato iniziale $q_0$

### Controllore Adaptive Computed Torque

Di seguito è riportato l'andamento dell'errore nello spazio dei giunti e nello spazio operativo ottenuto per il controllo a coppia calcolata adattivo sulla dinamica libera del manipolatore descritto nelle slide precedenti.



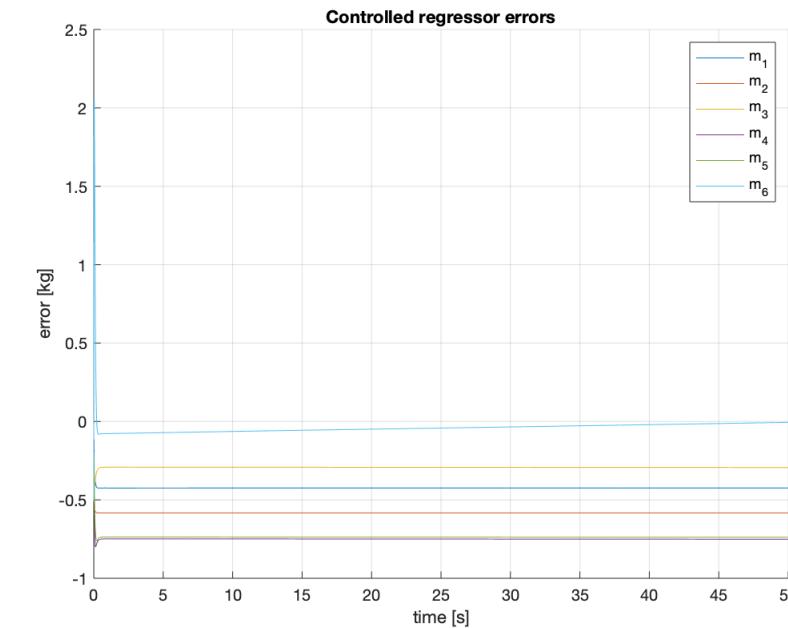
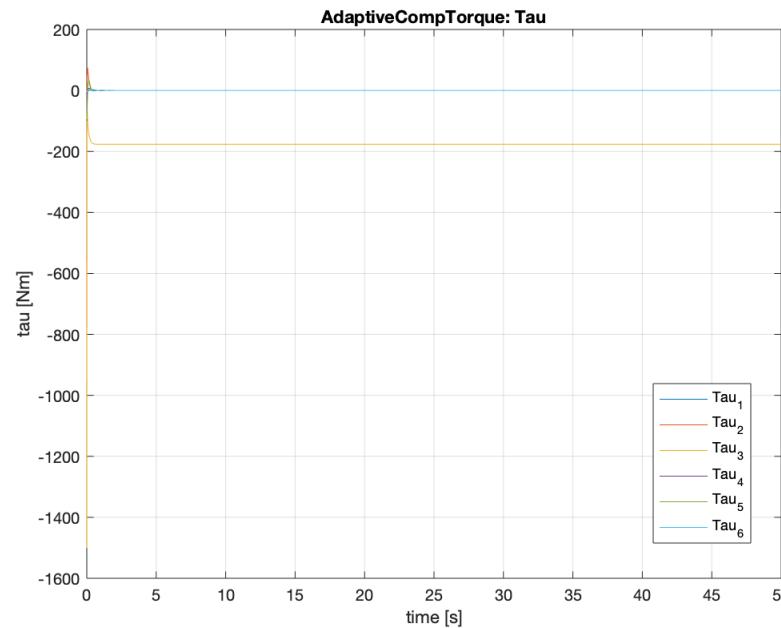
# Manipolatore di Stanford

## Reiezione di un disturbo sullo stato iniziale $q_0$

### Controllore Adaptive Computed Torque

Di seguito è riportato, nell'immagine di sinistra, l'andamento della coppia in ingresso ai giunti ottenuto per il controllo a coppia calcolata adattivo sulla dinamica libera del manipolatore descritto nelle slide precedenti.

Nell'immagine di destra è riportato l'errore di adattamento dei parametri in presenza di un errore iniziale di 0.5 kg su ciascuna massa dei link.

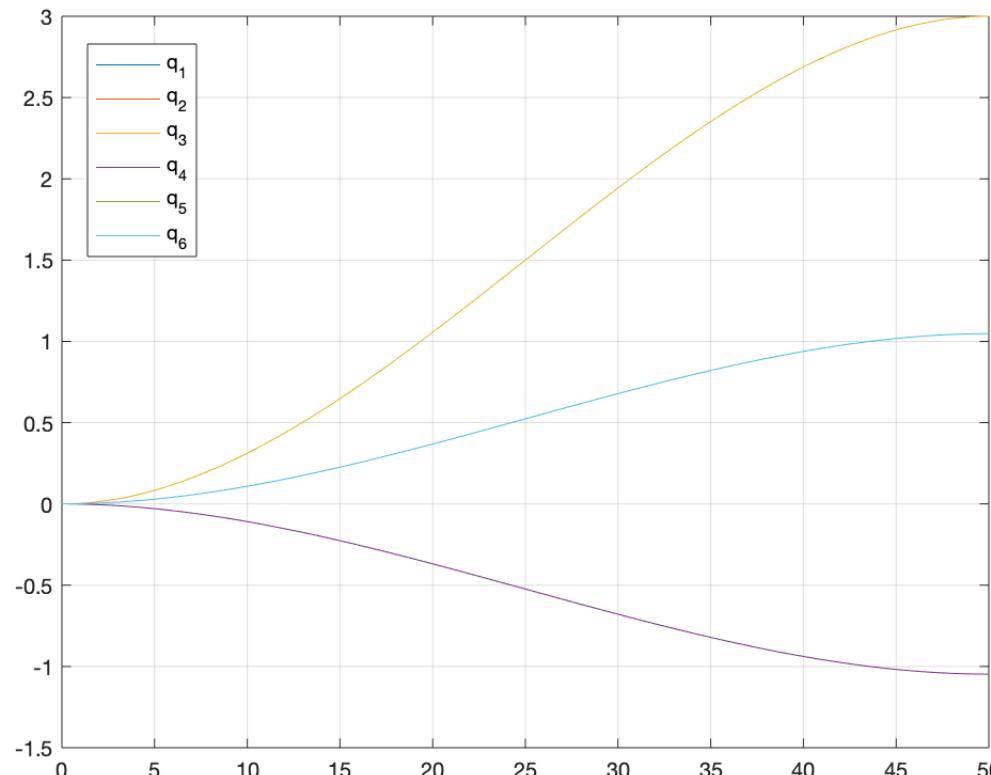
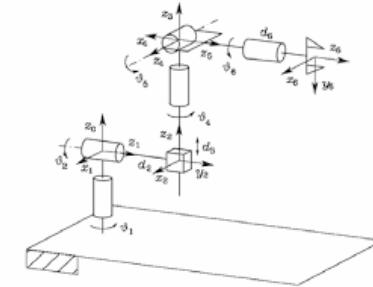


# Manipolatore di Stanford

Nelle slide successive è mostrato il comportamento del sistema nel caso di inseguimento di traiettoria, utilizzando ancora una volta i controllori visti nelle slide precedenti.

A partire dalla posizione iniziale  $q_0 = [0,0,0,0,0,0]^T$  con velocità iniziale nulla, desidera raggiungere la posizione finale  $q_d = \left[ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 3, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]^T$  sempre con velocità nulla.

Le traiettorie desiderate sono state ottenute interpolando dalla posizione iniziale alla posizione finale desiderata con un polinomio del terzo ordine del tipo  $q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ , ottenendo il risultato dell'immagine riportata a lato.



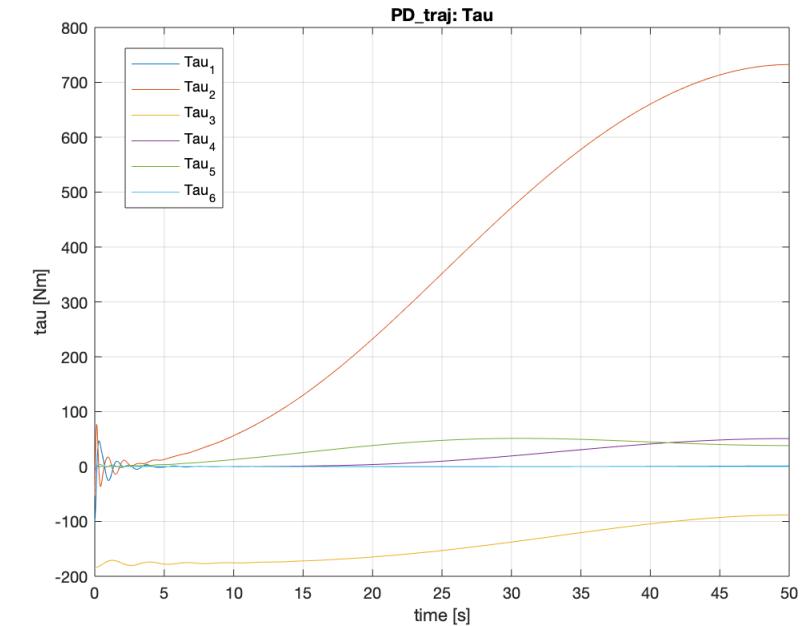
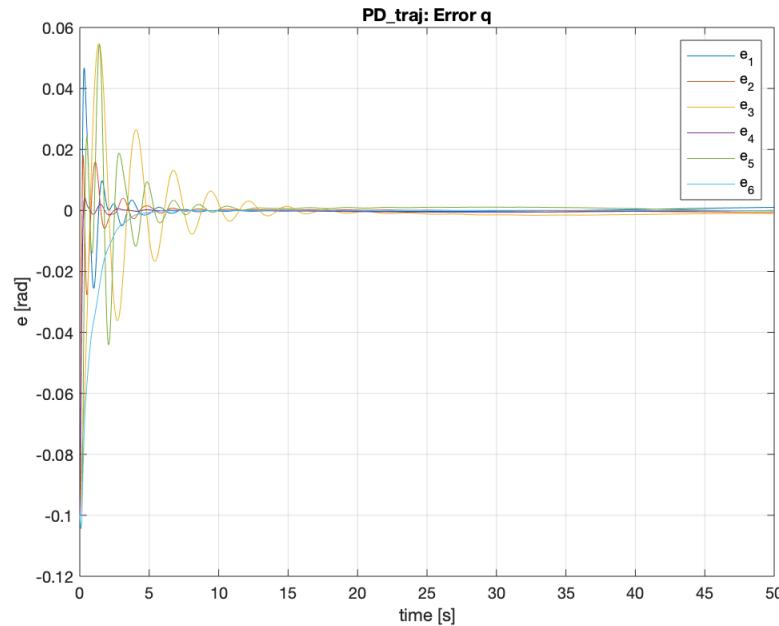
# Manipolatore di Stanford

## Controllore PD con compensazione di Gravità

$$\tau = K_p e + K_d \dot{e} + G(q)$$

I valori dei guadagni del controllore sono stati tarati sulla base del comportamento del sistema.

$$K_p = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

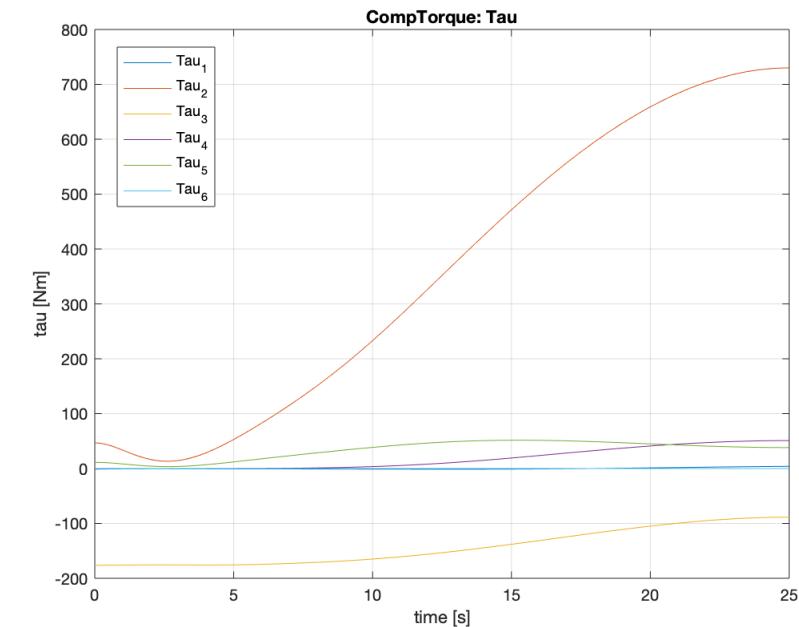
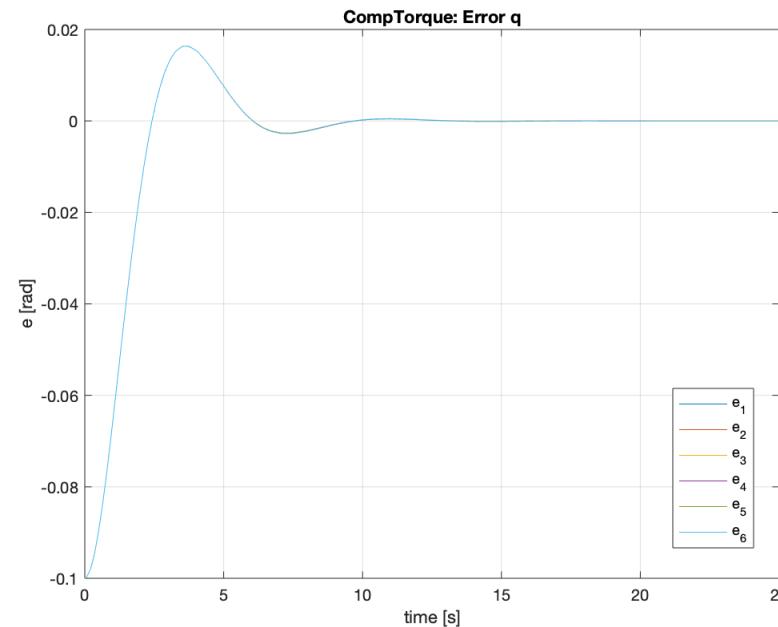


# Manipolatore di Stanford

## Controllore Computed Torque

$$\tau = B(q)[\ddot{q}_d + K_p e + K_d \dot{e}] + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

Non è stato necessario il tuning dei guadagni, poiché sufficienti delle matrici identità.



# Manipolatore di Stanford

## Controllore Adaptive Computed Torque

$$\tau = Y\hat{\pi} + K_d\dot{e} + K_p e$$

$$u_\pi = R^{-1}Y^T M^{-T} B^T P x$$

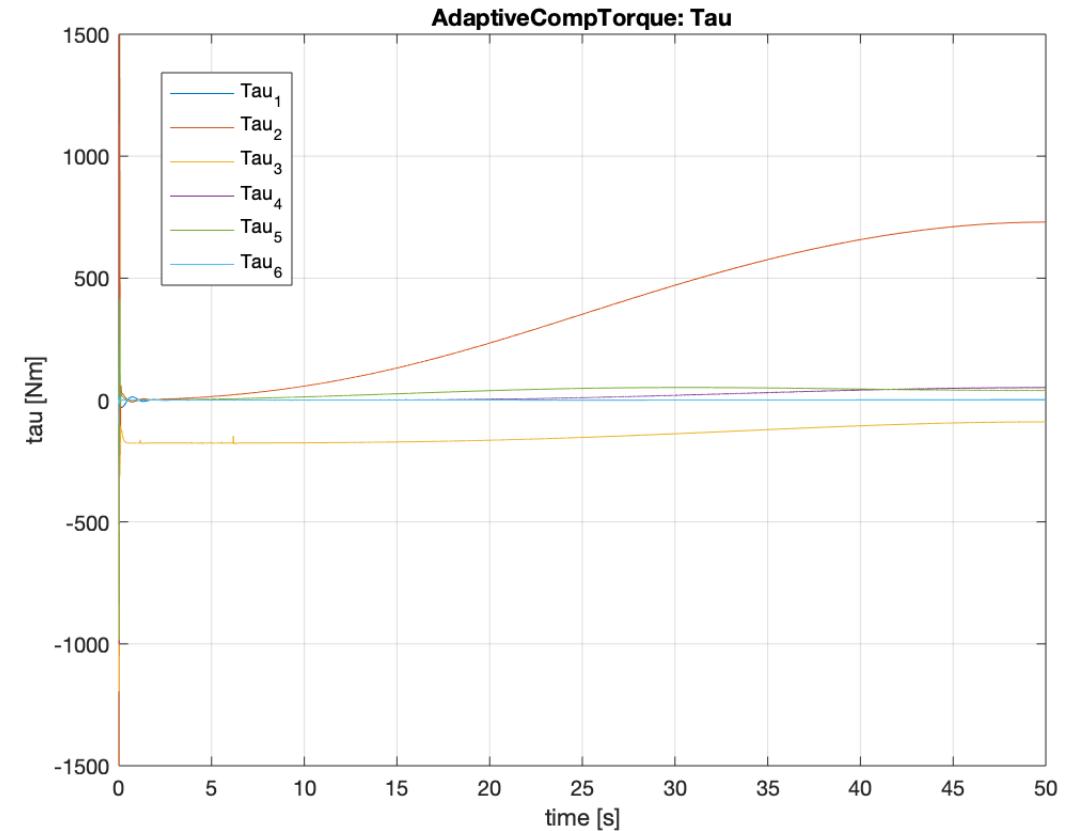
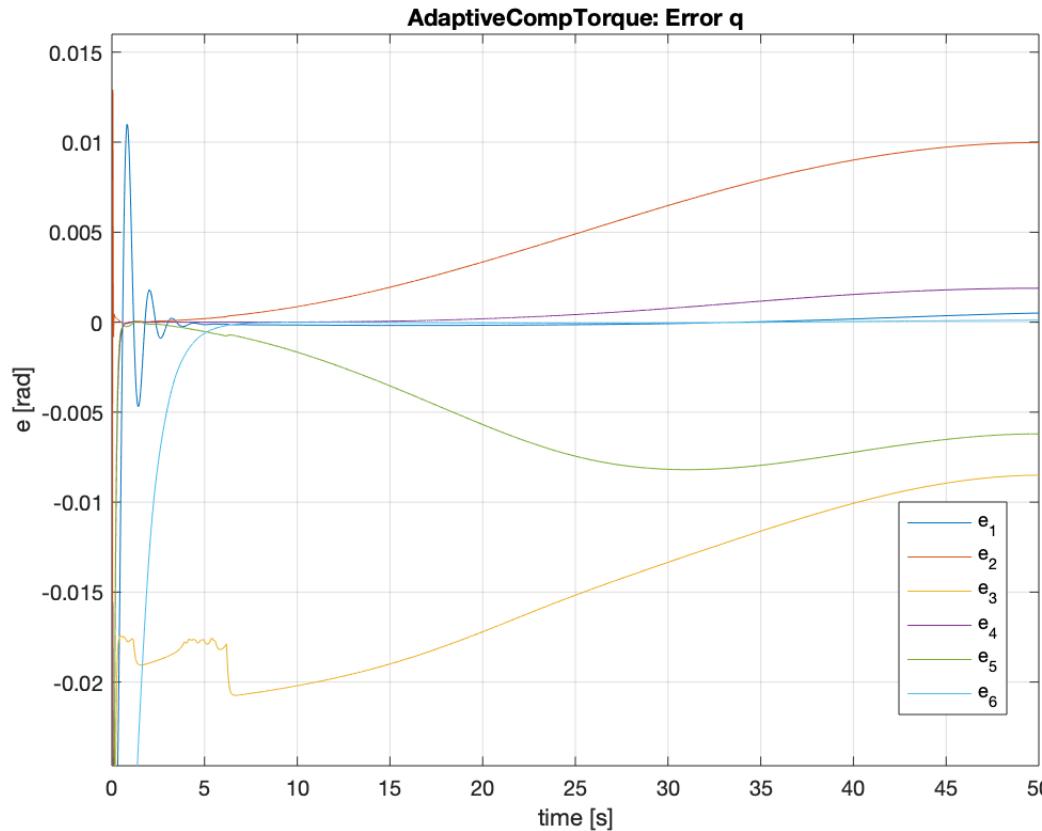
I valori dei guadagni del controllore sono stati tarati sulla base del comportamento del sistema.

$$K_p = \begin{bmatrix} 1000 & 00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 100 & 00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0_6 & I_6 \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0_6 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad R = I_6 \quad Q = I_{12} \quad A^T P + PA = -Q$$

# Manipolatore di Stanford

## Controllore Adaptive Computed Torque



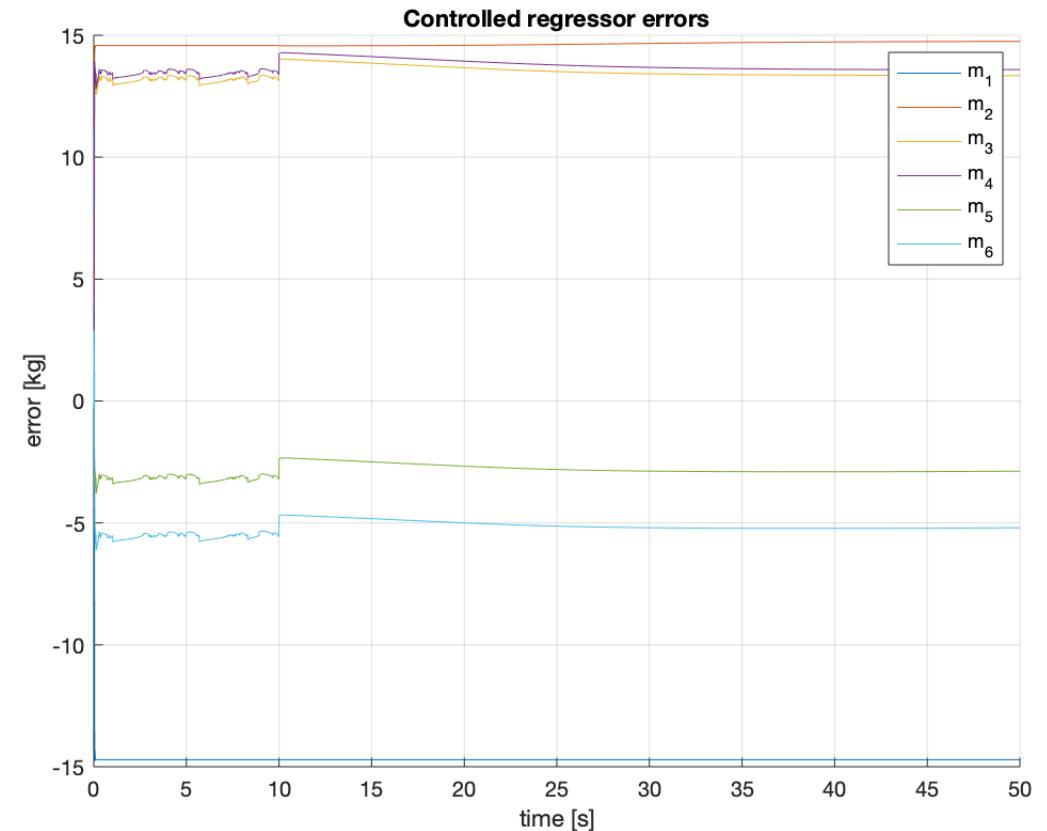
# Manipolatore di Stanford

## Controllore Adaptive Computed Torque

Il regressore è stato calcolato estrapolando i parametri dinamici relativi alle masse di ciascun link dalle equazioni della dinamica, utilizzando come vettore dei parametri:

$$\pi = [m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6]^T$$

Inizializzando il vettore di parametri dinamici stimati come  $\hat{\pi}$  in modo che le masse fossero uguali a quelle reali e per la scelta fatta delle matrici R e Q si ottiene il seguente andamento dell'errore di stima.



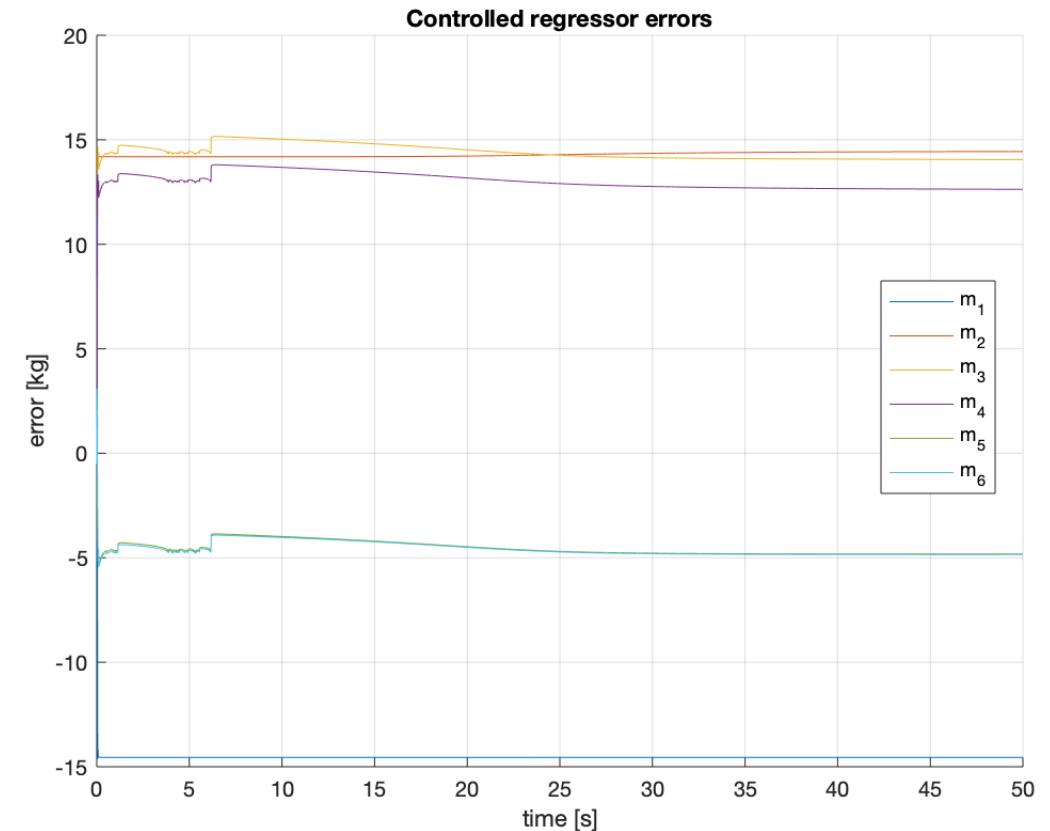
# Manipolatore di Stanford

## Controllore Adaptive Computed Torque

Il regressore è stato calcolato estrapolando i parametri dinamici relativi alle masse di ciascun link dalle equazioni della dinamica, utilizzando come vettore dei parametri:

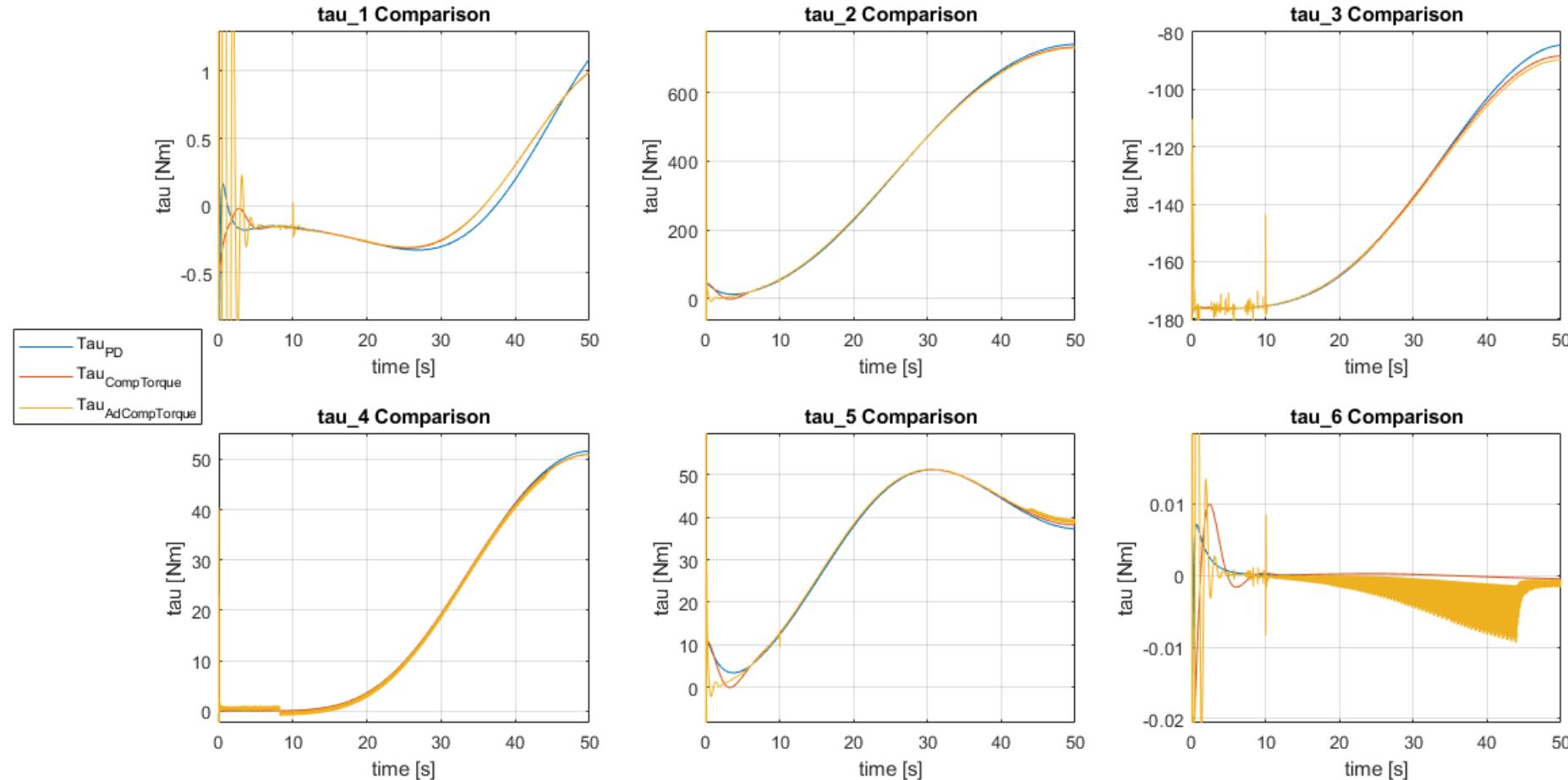
$$\pi = [m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6]^T$$

Inizializzando il vettore di parametri dinamici stimati come  $\hat{\pi}$  in modo che le masse avessero uno scostamento di +0.5 kg rispetto a quelle reali e per la scelta fatta della matrici R e Q si ottiene il seguente andamento dell'errore di stima.



# Manipolatore di Stanford

## Confronto tra controllori



# Manipolatore di Stanford

## Confronto tra controllori

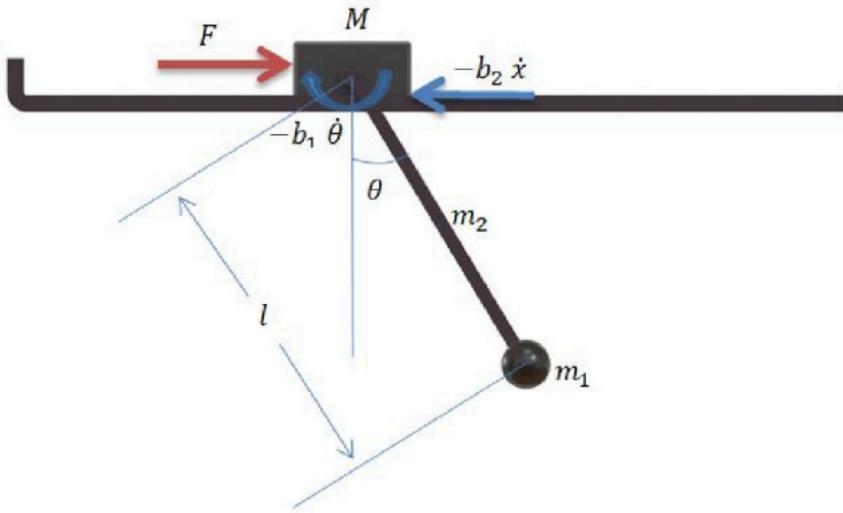
Dall'immagine precedente è possibile concludere che il controllore a Coppia Calcolata Adattivo produce delle coppie generate con oscillazioni a circa 20Hz, queste possono essere accettabili se date in ingresso a dei motori con banda passante tra 30 e 50Hz, che riuscirebbero a smorzarle.

Analizzando gli errori nello spazio dei giunti, è facile notare come il miglior controllore sia quello a Coppia Calcolata, per il quale l'errore di annulla già dopo 15s.

Per il controllore PD con Compensazione di Gravità, non essendo presente una componente che pesi la derivata seconda della posizione desiderata  $\ddot{q}_d$ , non è possibile annullare l'errore finale ai giunti, senza aggiungere una componente integrale al controllo stesso.

Anche il controllore a Coppia Calcolata Adattivo non è in grado di fare convergere a 0 l'errore di posizione angolare ai giunti, pur presentando un errore massimo di 0.01 rad, cioè circa 0.5°.

# Gantry crane



Parametri del modello:

$$l = 0.2 \text{ m}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$M = 0.548069759 \text{ kg}$$

$$m_1 = 0.088338025 \text{ kg}$$

$$m_2 = 0.022245336 \text{ kg}$$

$$b_1 = 0.1 \quad b_2 = 0.5$$

Un modello di carro-ponte è rappresentato nella figura a fianco e descritto dalle seguenti equazioni della dinamica:

$$\ddot{\theta}D + [\ddot{x}lc\cos\theta + g\sin\theta]B = -b_1\dot{\theta}$$

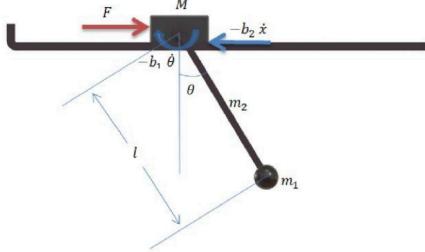
$$\ddot{x}C + [\ddot{x}lc\cos\theta + g\sin\theta]B = F - b_2\dot{x}$$

$$B = m_1 + \frac{1}{3}m_2$$

$$C = m_1 + m_2 + M$$

$$D = \frac{2}{5}m_1r^2$$

# Gantry crane



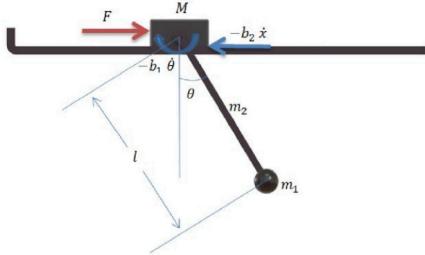
## MODELLO DINAMICO:

A partire dalle equazioni della slide precedente, con semplici calcoli si ottengono le equazioni della dinamica del modello, scritte in forma standard che seguono, con vettore di stato:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = q_1 \\ \dot{q}_1 = \frac{-b_1 q_1}{D} - \frac{g \sin(q_0) B}{D} + \frac{(b_2 q_3 + g \sin(q_0) B)(l \cos(q_0) B)}{(C + l \cos(q_0) B) D} - \frac{F l \cos(q_0) B}{(C + l \cos(q_0) B) D} \\ \dot{q}_2 = q_3 \\ \dot{q}_3 = \frac{(-b_2 q_3 - g \sin(q_0) B)}{C + l \cos(q_0) B} + \frac{F}{C + l \cos(q_0) B} \end{cases}$$

# Gantry crane



## MODELLO DINAMICO:

È quindi possibile individuare il vettore delle funzioni di stato, delle funzioni di ingresso. Assumendo come uscita la posizione della massa del carico  $m_1$  nel piano x-y, è possibile scrivere il sistema nella forma:

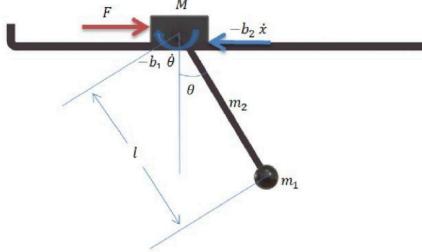
$$\dot{q} = f(q) + g(q)u$$

$$y = h(q)$$

$$\mathbf{f}(q) = \begin{bmatrix} \frac{-b_1 q_1}{D} - \frac{g \sin(q_0) B}{D} + \frac{(b_2 q_3 + g \sin(q_0) B)(l \cos(q_0) B)}{(C + l \cos(q_0) B) D} \\ \frac{q_3}{C + l \cos(q_0) B} \\ \frac{(-b_2 q_3 - g \sin(q_0) B)}{C + l \cos(q_0) B} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{F l \cos(q_0) B}{(C + l \cos(q_0) B) D} \\ 0 \\ \frac{F}{C + l \cos(q_0) B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}(q) = q_2 + l \sin(q_0)$$

# Gantry crane



## CONTROLLABILITÀ'

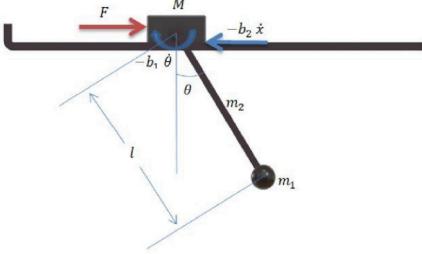
A partire dal *Teorema di Chow*, è stato verificato che il sistema fosse localmente accessibile, costruendo la *distribuzione di accessibilità* e verificando la condizione  $\langle \Delta \mid \Delta_0 \rangle = n$  nella quale:

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \text{span}(g) \\ \Delta &= \text{span}(f, g)\end{aligned}$$

La matrice  $\Delta = [ g \ [f, g] \ [f, [f, g]] \ [f, [f, [f, g]]] \ [f, [f, [f, [f, g]]]] ]$  ha rango 4 e quindi il sistema è localmente accessibile, si riporta di seguito la matrice calcolata, nella quale è riportato un \* in corrispondenza degli elementi non nulli:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

# Gantry crane

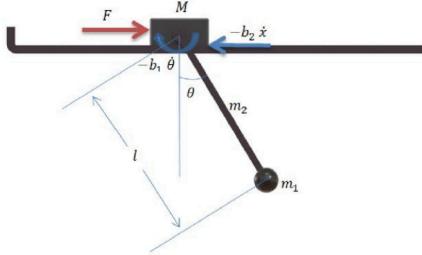


Il teorema di Chow è condizione necessaria e sufficiente per l'accessibilità, ma solo necessaria per la controllabilità, perché il sistema sia anche controllabile è necessario verificare che sia soddisfatta la condizione:

$$f(q_0) = 0 \text{ e } \dim \Delta_L(q_0) = n \text{ con } \Delta_L = \text{span}(g, [f, g], \dots ad_f^{\mu_i} g)$$

Questa condizione risulta verificata dal sistema in esame e pertanto è possibile concludere che sia anche localmente controllabile.

# Gantry crane



## OSSERVABILITÀ

Per valutare l'osservabilità del sistema è stata costruita la *codistribuzione di osservabilità* e verificata la condizione:

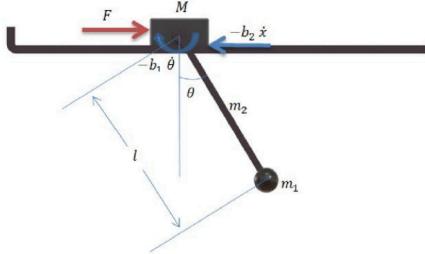
$$dO = \text{span} \left( dh(q), dLfh(q), dLgh(q), dL_{f^2}h(q), dLgLfh(q), dLfLgh(q) \right) = n$$

per cui il sistema risulta localmente osservabile.

Per la scelta effettuata della funzione di uscita il rango della matrice  $dO$  risulta essere pari a 4 ,  
è quindi possibile concludere che il sistema sia localmente osservabile,  
si riporta di seguito la matrice calcolata, nella quale è riportato un \* in corrispondenza degli elementi non nulli  
e dalla quale sono state eliminate le righe completamente nulle:

$$dO = \begin{bmatrix} * & 0 & 1 & 0 \\ * & * & 0 & 1 \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Gantry crane



## FEEDBACK LINEARIZATION

Il sistema verifica le condizioni:

- (a)  $\text{rank} \left[ g(q_0) \ adfg(q_0) \ \dots \ ad_f^{(n-1)} g(q_0) \right] = n$
- (b)  $\text{span} \left( g, adfg, \dots, ad_f^{(n-2)} g \right)$  sia involutivo

per cui esistono un cambiamento di variabili  $\Phi(q)$  e le funzioni di retroazione statica  $\alpha(q)$  e  $\beta(q)$  tali da linearizzare il sistema.

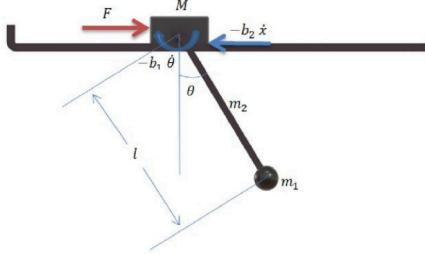
Inoltre per la scelta fatta delle funzioni di uscita, il sistema ha grado relativo pari a 2, si procede quindi ad una linearizzazione approssimata del sistema.

Si ottiene quindi una nuova espressione per il sistema in forma linearizzata, nella quale le variabili complementari sono state scelte in modo da essere linearmente indipendenti dalle prime due  $\det \left( \frac{\partial \Phi}{\partial q} \right) \neq 0$

e che la loro dinamica sia indipendente dall'ingresso  $L_g \Phi_i(q) = 0, r + 1 \leq i \leq n$ .

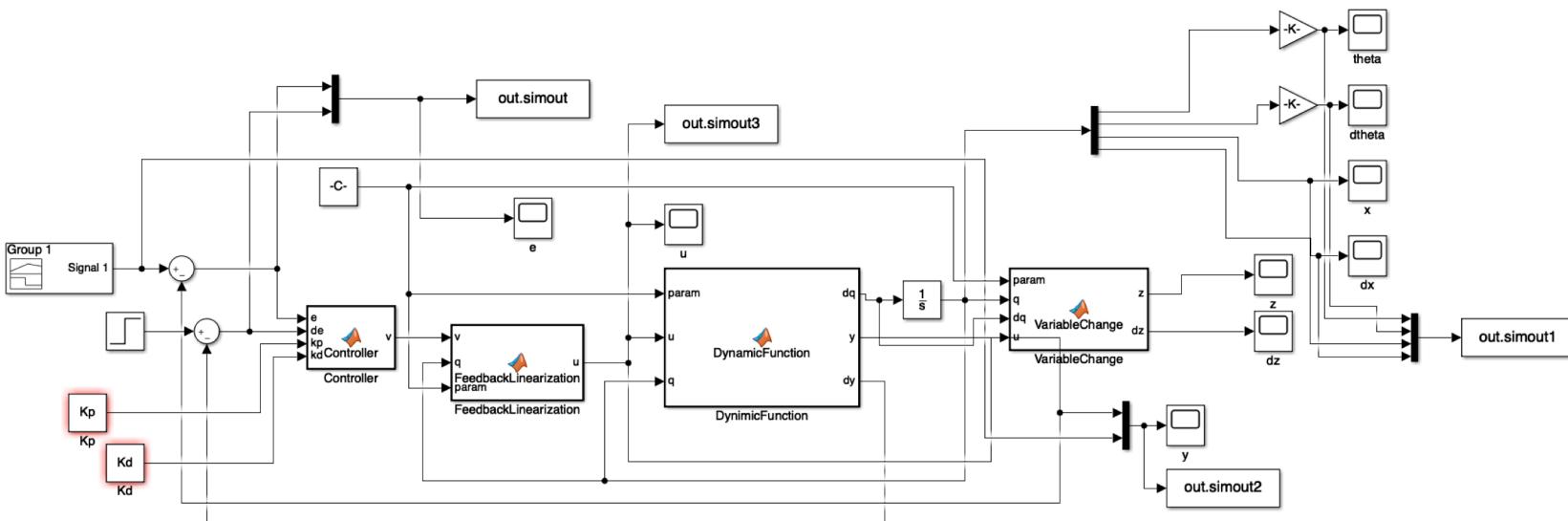
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} h \\ L_f h \\ q_0 \\ \frac{-1}{l \cos q_0} B q_1 + q_3 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} L_f h \\ L_f^2 h + L_g L_f h u \\ \dot{q}_0 \\ \frac{\partial z_3}{\partial q} (f + g u) \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \frac{v + L_f^2 h}{L_g L_f h}$$

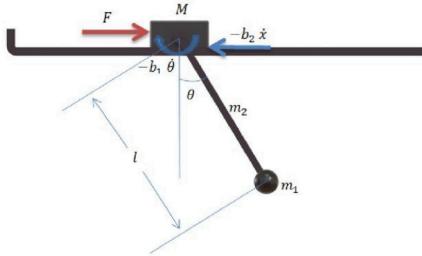
# Gantry crane



## FEEDBACK LINEARIZATION - CONTROLLER

Per il sistema linearizzato è stato progettato un controllore di tipo PD, richiedendo che la posizione finale della massa di carico  $m_1$  avesse le seguenti componenti  $\theta = 0, x = 3m$ , cioè richiedendo che all'istante finale il sistema abbia velocità lineare e angolare nulle e la posizione del carrello sia spostata di 3m a destra rispetto alla posizione iniziale, pur mantenendo l'angolo del carico nullo.

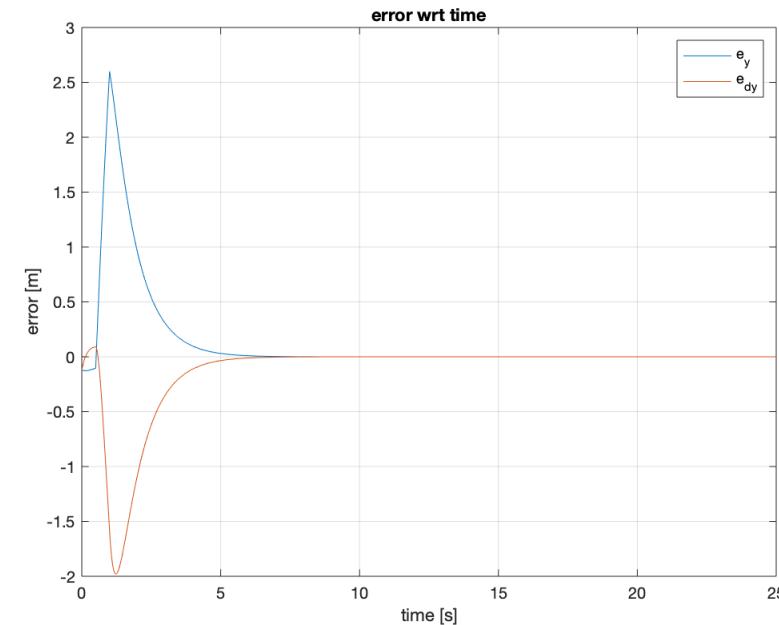
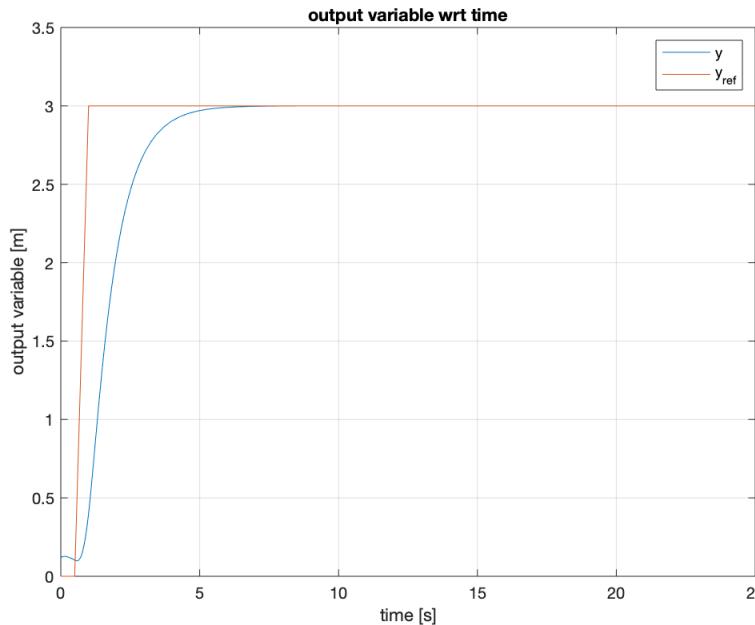


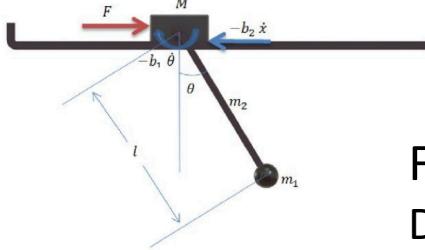


# Gantry crane

## FEEDBACK LINEARIZATION – CONTROLLER

I parametri del controllore sono stati impostati a  $K_p = 5, K_d = 5.5$  per fare in modo l'andamento della variabile di uscita non presentasse sovraelongazioni, questo infatti in una situazione reale avrebbe comportato che la massa di carico sarebbe potuta andare a urtare contro ostacoli posti oltre la posizione finale desiderata. Di seguito l'andamento della variabile di uscita e dell'errore ottenuto:

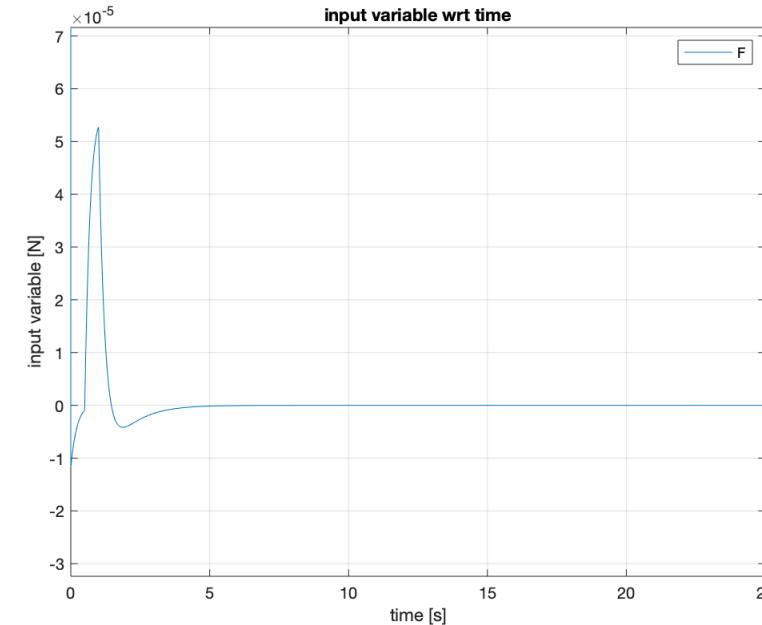
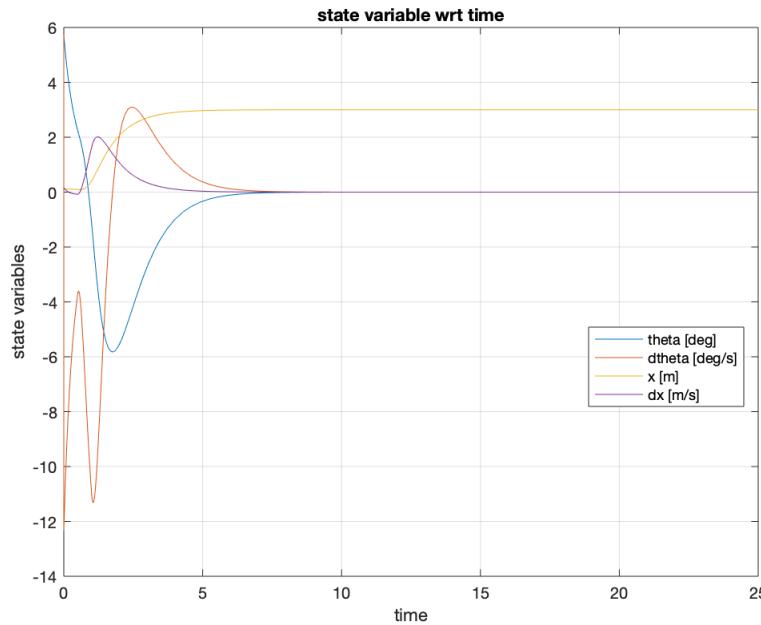


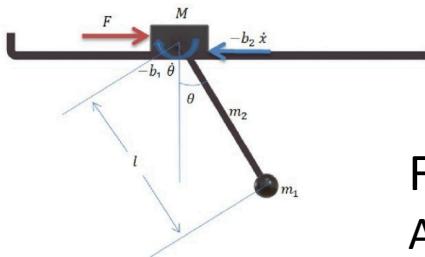


# Gantry crane

## FEEDBACK LINEARIZATION – CONTROLLER

Di seguito è riportato l'andamento della variabile di stato e di ingresso. Come è possibile notare dal grafico che riporta l'evoluzione delle variabili di stato nel tempo, l'angolo di carico finale è nullo (linea blu) e la sua posizione lungo l'asse x è pari a 3m (linea gialla). Per quanto riguarda la forza applicata al carrello i valori risultano essere molto bassi, in accordo con la massa complessiva del modello, pari a circa 0.66 Kg





# Gantry crane

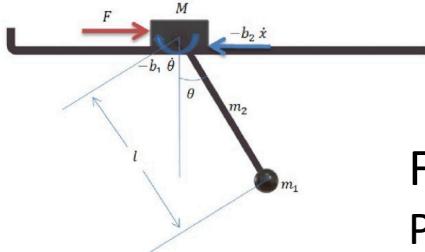
## FEEDBACK LINEARIZATION – ZERO DYNAMIC

Analisi della dinamica delle variabili non osservabili: per la scelta effettuata di tali variabili è possibile affermare che la loro dinamica è ininfluente sull'uscita del sistema linearizzato e non dipende direttamente dagli ingressi  $v$ , a cui resta comunque legata attraverso l'evoluzione delle variabili  $\xi$ .

Partendo dalla condizione  $y(t) = \xi_1(t) \equiv 0$  e procedendo in modo ricorsivo si ricava  $\dot{\xi}_1(t) = \xi_2(t) \equiv 0$  fino a ottenere  $\xi_i(t) \equiv 0 \forall i = 1, \dots, r$  e  $\dot{\xi}_r(t) = v(t) \equiv 0$  si ottiene che la dinamica compatibile con uscita identicamente nulla, Zero Dinamica, è descritta dalle equazioni seguenti:

$$\dot{\eta}_1 = \frac{lBl\eta_2 \cos \eta_1}{Bl^2 \cos^2 \eta_1 - 1}$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_2 &= \frac{F}{D(C + Bl \cos \eta_1)} - \frac{Bgl \sin \eta_1 + \frac{Bb_2 l^2 \eta_2 \cos^2 \eta_1}{Bl^2 \cos^2 \eta_1 - 1}}{C + Bl \cos \eta_1} \\ &+ \frac{\frac{Bgl \sin \eta_1}{D} + \frac{Bl F \cos \eta_1}{D(C + Bl \cos \eta_1)}}{Bl \cos \eta_1} + \frac{\frac{Bl \cos \eta_1 (Bgl \sin \eta_1 + \frac{Bb_2 l^2 \eta_2 \cos^2 \eta_1}{Bl^2 \cos^2 \eta_1 - 1})}{D(C + Bl \cos \eta_1)}}{Bl \cos \eta_1} + \frac{\frac{Bb_1 l \eta_2 \cos \eta_1}{D(Bl^2 \cos^2 \eta_1 - 1)}}{Bl \cos \eta_1} \\ &- \frac{Bl \eta_2^2 \sin \eta_1}{(Bl^2 \cos^2 \eta_1 - 1)^2} \end{aligned}$$



# Gantry crane

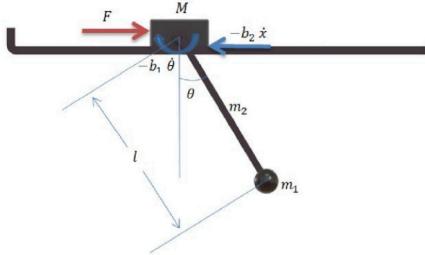
## FEEDBACK LINEARIZATION – ZERO DYNAMIC

Per verificare la stabilità delle equazioni descritte nella slide precedente si è proceduto con il calcolo del jacobiano del sistema e quindi al calcolo degli autovalori della matrice Q ottenuta e riportata di seguito.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \frac{Bl}{Bl^2-1} \\ \frac{\frac{Bgl}{D} + \frac{B^2 gl^2}{D(C+Bl)}}{Bl} - \frac{Bgl}{C+Bl} & \frac{\frac{Bb_1 l}{D(Bl^2-1)} + \frac{B^2 b_2 l^3}{D(C+Bl)(Bl^2-1)}}{Bl} - \frac{Bb_2 l^2}{(C+Bl)(Bl^2-1)} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1.879 \\ \lambda_2 &= -7301 \end{aligned}$$

Essendo questi autovalori entrambe a parte reale negativa è quindi possibile concludere che la dinamica delle variabili non osservabili sia asintoticamente stabile. Ne segue infine che il sistema non lineare di partenza sia asintoticamente stabile sia esternamente che internamente.

# Gantry crane



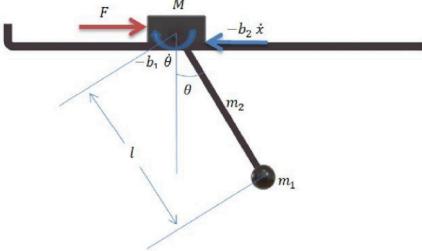
Mantenendo lo stesso modello dinamico, è stata scelta come uscita la variabile di stato  $x$  e ripetuto lo studio della controllabilità e della osservabilità del sistema ottenuto.

$$\begin{aligned}\dot{q} &= f(q) + g(q)u \\ y &= h(q)\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{-b_1 q_1}{D} - \frac{g \sin(q_0) B}{D} + \frac{(b_2 q_3 + g \sin(q_0) B)(l \cos(q_0) B)}{(C + l \cos(q_0) B) D} \\ \frac{q_3}{C + l \cos(q_0) B} \\ \frac{(-b_2 q_3 - g \sin(q_0) B)}{C + l \cos(q_0) B} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{F l \cos(q_0) B}{(C + l \cos(q_0) B) D} \\ 0 \\ \frac{F}{C + l \cos(q_0) B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = q_2 = x$$

# Gantry crane



## CONTROLLABILITÀ'

La modifica della funzione di uscita  $h(q)$  non comporta nessun cambiamento nello studio della controllabilità del sistema, poiché la matrice  $\Delta$  resta invariata, così come le funzioni di stato e di ingresso.

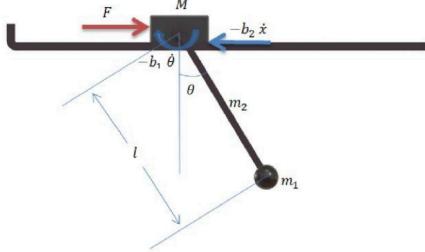
## OSSERVABILITÀ'

Al contrario per valutare l'osservabilità del sistema è necessario calcolare la nuova *codistribuzione di osservabilità* e verificare se la condizione:

$$dO = \text{span} \left( dh(q), dLfh(q), dLgh(q), dL_{f^2}h(q), dLgLf h(q), dLf Lgh(q) \right) = n$$

per cui il sistema risulta localmente osservabile risulta ancora verificata.

# Gantry crane

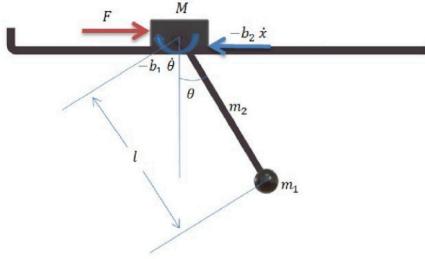


Per la scelta effettuata della funzione di uscita il rango della matrice dO risulta essere pari a 3,  
è quindi possibile concludere che il sistema NON sia localmente osservabile,  
si riporta di seguito la matrice calcolata, nella quale è riportato un \* in corrispondenza degli elementi non nulli e dalla quale sono state eliminate le righe completamente nulle:

$$dO = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Risulta di immediato come il rango della matrice non possa essere pieno, in quanto questa presenta una colonna interamente nulla.

# Gantry crane



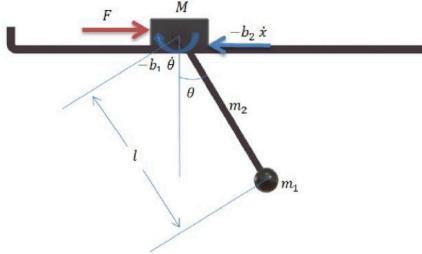
Anche scegliendo come uscita la variabile di stato  $\theta$  e ripetendo lo studio della osservabilità del sistema per cui:

$$\mathbf{h}(\mathbf{q}) = q_0 = \theta$$

il rango della matrice dO risulta essere pari a 3,  
è quindi possibile concludere che il sistema NON sia localmente osservabile,  
si riporta di seguito la matrice calcolata, nella quale è riportato un \* in corrispondenza degli elementi non nulli  
e dalla quale sono state eliminate le righe completamente nulle:

$$\mathbf{dO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Gantry crane



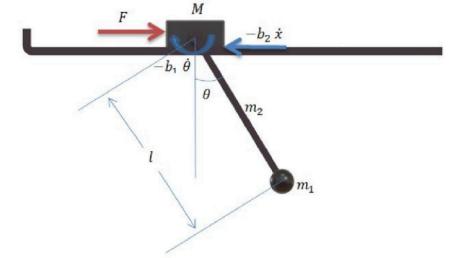
Per la scelta effettuata della funzione di uscita il rango della matrice dO risulta essere pari a 3 , è quindi possibile concludere che il sistema NON sia localmente osservabile,  
si riporta di seguito la matrice calcolata, nella quale è riportato un \* in corrispondenza degli elementi non nulli e dalla quale sono state eliminate le righe completamente nulle:

$$dO = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Risulta di immediato come il rango della matrice non possa essere pieno, in quanto questa presenta una colonna interamente nulla.

# Gantry crane

## Conclusioni



Per quanto riguarda il sistema non lineare analizzato in queste ultime slide sono state calcolate le matrici di controllabilità ed osservabilità per tre diverse uscite:

$y = x$  la posizione del carrello lungo il binario sul quale può spostarsi;

$y = \vartheta$  la posizione angolare della massa oscillante;

$y = x + l \sin \vartheta$  la posizione cartesiana della massa oscillante.

Per quest'ultimo caso, essendo sia localmente controllabile che localmente osservabile, si è proceduto con la linearizzazione in retroazione: cioè mediante la retroazione dell'uscita si è ricavato un nuovo ingresso in grado di linearizzare il sistema di partenza.

Per il sistema linearizzato si è poi provveduto a cercare un controllore che stabilizasse il sistema e che permetesse di inseguire un riferimento scelto per la funzione di uscita, questo semplice controllore di tipo PD ha permesso di ottenere i risultati desiderati e riportati nelle slide 32-33. Non essendo stata possibile una linearizzazione in retroazione esatta, ma soltanto approssimata, si è reso necessario verificare che la parte non osservabile del sistema fosse asintoticamente stabile, così da poter concludere sulla asintotica stabilità anche del sistema controllato.



UNIVERSITÀ DI PISA

Grazie per l'attenzione.