



UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea Magistrale INGEGNERIA ROBOTICA E DELL'AUTOMAZIONE

Corso di Robotica
Modulo di Controllo dei Robot

Tavole Applicative

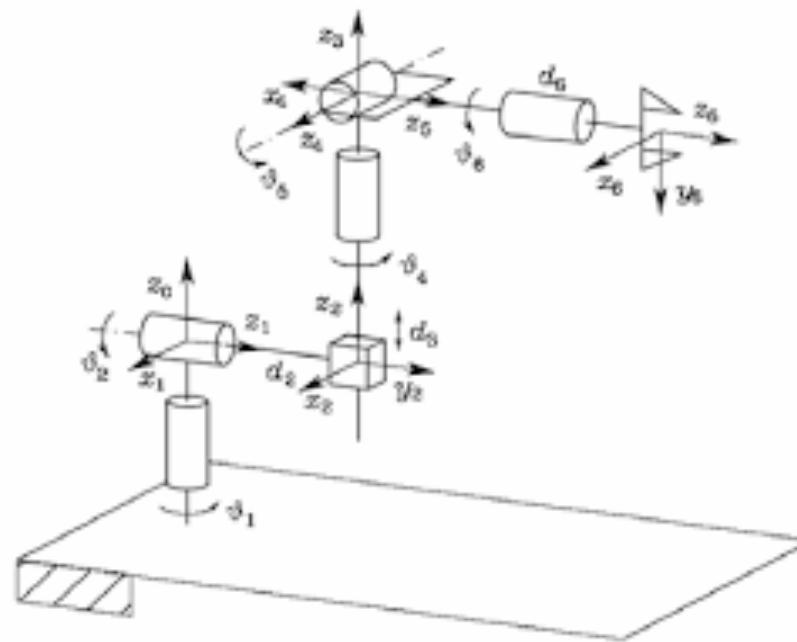
Docenti:
Prof. Antonio BICCHI
Prof. Giorgio GRIOLI

Studente:
Arianna GASPARRI

Indice:

- Manipolatore di Stanford
 - Controllore PD con compensazione di Gravità
 - Controllore Computed Torque
 - Controllore Adaptive Computed Torque
 - Confronto tra controllori
- Grancy crane
 - Controllabilità e Osservabilità
 - Feedback Linearization

Manipolatore di Stanford



Parametri del manipolatore:

$$m_1 = m_3 = 10 \text{ kg}$$

$$m_2 = 5 \text{ kg}$$

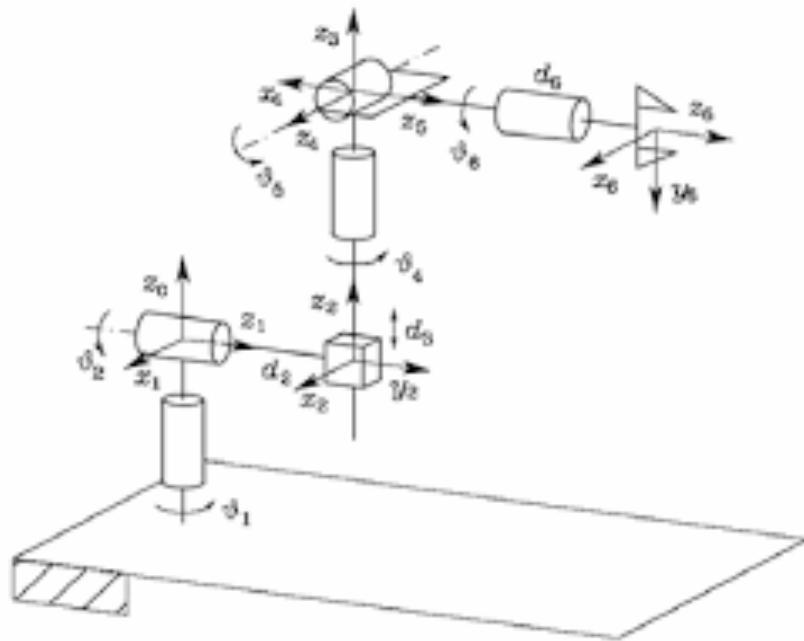
$$m_4 = m_6 = 2 \text{ kg}$$

$$m_5 = 4 \text{ kg}$$

$$d_1 = d_2 = d_6 = 1 \text{ m}$$

$$d_3 = d_4 = d_5 = 0 \text{ m}$$

Manipolatore di Stanford



Il manipolatore di Stanford può essere scomposto in un manipolatore sferico, giunti 1, 2, 3, e un polso sferico, giunti 4, 5 e 6.

Inoltre i giunti si considerano ideali, privi di elasticità.

Link	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$-\pi/2$	0	ϑ_1^*
2	0	$\pi/2$	d_2	ϑ_2^*
3	0	0	d_3^*	0
4	0	$-\pi/2$	0	ϑ_4^*
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5^*
6	0	0	d_6	ϑ_6^*

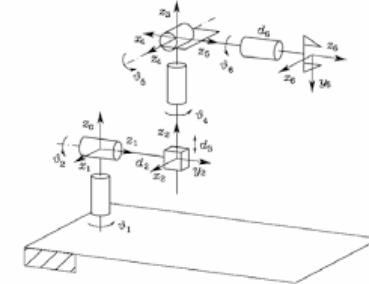
Tabella dei parametri secondo convenzione D-H

Manipolatore di Stanford

CINEMATICA DIRETTA

A partire dalla tabella di D-H è possibile associare a ciascun giunto una terna destrorsa di riferimento e ricavare le matrici di trasformazione tra la terna i e la terna i+1.

Componendo le trasformazioni in assi correnti a partire dalla terna base fino alla terna dell'end-effector, si ottiene una mappa della cinematica diretta che rappresenta la postura dell'organo terminale rispetto alla base.



$$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + (c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + (s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) d_6 \\ c_2 d_3 + (-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) d_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_6^0 = \mathbf{T}_3^0 \mathbf{T}_6^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{n}^0 & \mathbf{s}^0 & \mathbf{a}^0 & \mathbf{p}^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}^0 = \begin{bmatrix} c_1(c_2(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) - s_1(s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_1(c_2(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) + c_1(s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ -s_2(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6 \end{bmatrix}$$

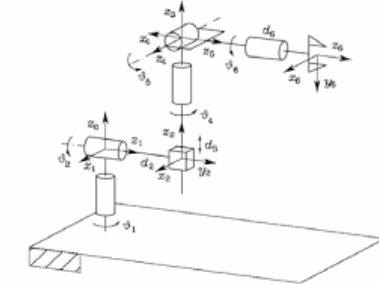
$$\mathbf{s}^0 = \begin{bmatrix} c_1(-c_2(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) - s_1(-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_1(-c_2(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) + c_1(-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_2(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^0 = \begin{bmatrix} c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

Manipolatore di Stanford

DINAMICA DIRETTA:

Il problema della dinamica diretta consiste nel determinare, per $t > t_0$, le accelerazioni dei giunti $\ddot{q}(t)$ (e quindi $\dot{q}(t)$ e $q(t)$) risultanti dalle date coppie di giunti $\tau(t)$, una volta che le posizioni iniziali $q(t_0)$ e le velocità iniziali $\dot{q}(t_0)$ sono note (stato iniziale del sistema).



DINAMICA INVERSA:

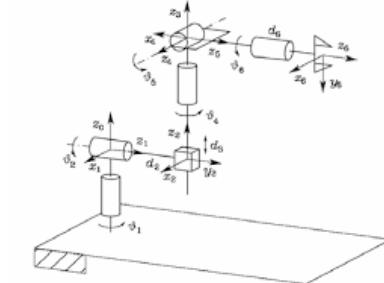
Il problema della dinamica inversa consiste nel determinare le coppie articolari $\tau(t)$ che sono necessarie per generare il movimento specificato dall'accelerazioni $\ddot{q}(t)$, velocità $\dot{q}(t)$ e posizioni $q(t)$.

$$B(\underline{q})\ddot{\underline{q}} + C(\underline{q}, \dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}} + G(\underline{q}) = \underline{\tau}$$

Manipolatore di Stanford

MATRICE DI INERZIA

$$\begin{aligned}
 B = & (m(1)*(JpG1')*JpG1 + (JgG1')*rG1*I_f(m(1),d(1))*(rG1')*JgG1+... \\
 & m(2)*(JpG2')*JpG2 + (JgG2')*rG2*I_f(m(2),d(2))*(rG2')*JgG2+... \\
 & m(3)*(JpG3')*JpG3 + (JgG3')*rG3*I_f(m(3),q(3))*(rG3')*JgG3+... \\
 & m(4)*(JpG4')*JpG4 + (JgG4')*rG4*I_f(m(4),d(4))*(rG4')*JgG4+... \\
 & m(5)*(JpG5')*JpG5 + (JgG5')*rG5*I_f(m(5),d(5))*(rG5')*JgG5+... \\
 & m(6)*(JpG6')*JpG6 + (JgG6')*rG6*I_f(m(6),d(6))*(rG6')*JgG6);
 \end{aligned}$$



MATRICE DELLE FORZE CENTRIFUGHE E DI CORIOLIS

Calcolata mediante i simboli di Christoffel

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k$$

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right)$$

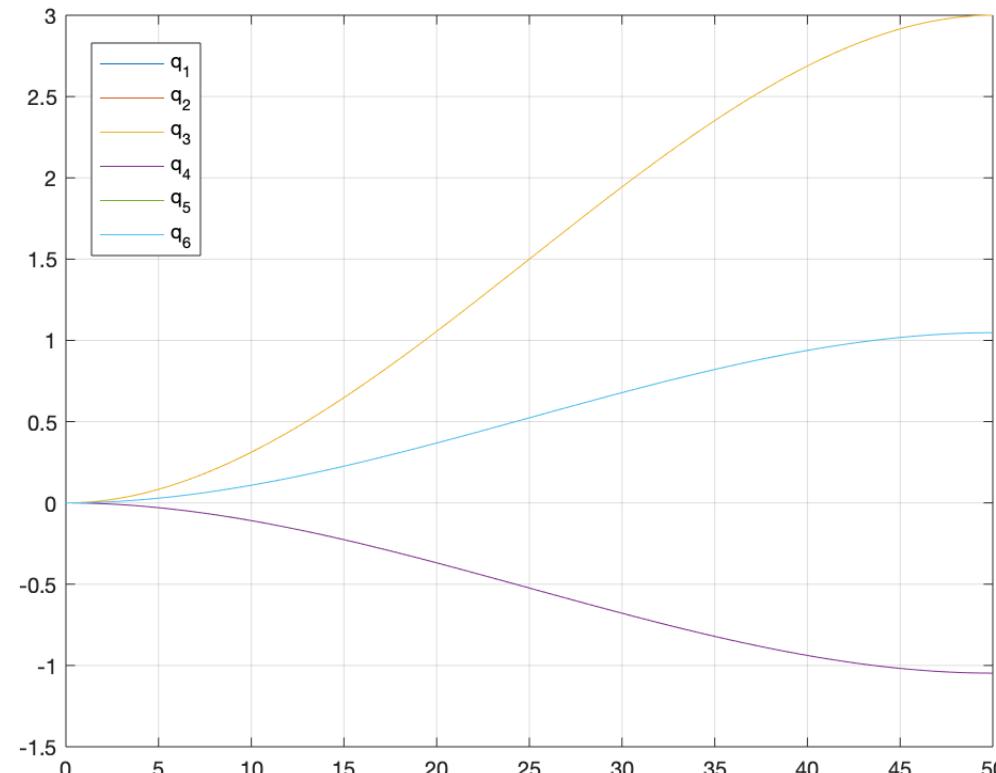
MATRICE GRAVITAZIONALE

$$\begin{aligned}
 G = & -(m(1)*(JpG1')*g0 + m(2)*(JpG2')*g0 + m(3)*(JpG3')*g0 +... \\
 & m(4)*(JpG4')*g0 + m(5)*(JpG5')*g0 + m(6)*(JpG6')*g0);
 \end{aligned}$$

Manipolatore di Stanford

Controllore PD con compensazione di Gravità

A partire dalla posizione iniziale $q_0 = [0,0,0,0,0,0]^T$ con velocità iniziale nulla,
si desidera raggiungere la posizione finale $q_d = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 3, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]^T$ sempre con velocità nulla.
Le traiettorie desiderate sono state ottenute interpolando dalla posizione iniziale alla posizione finale desiderata con un polinomio del terzo ordine del tipo $q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$.



Manipolatore di Stanford

Controllore PD con compensazione di Gravità

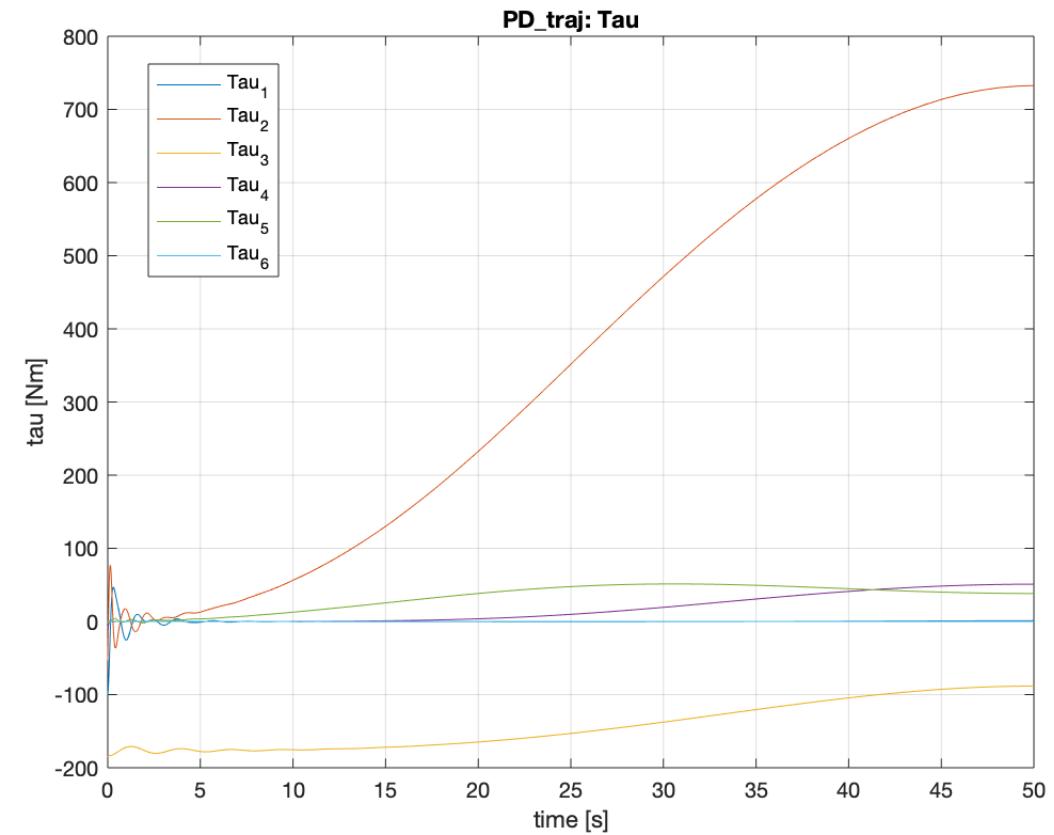
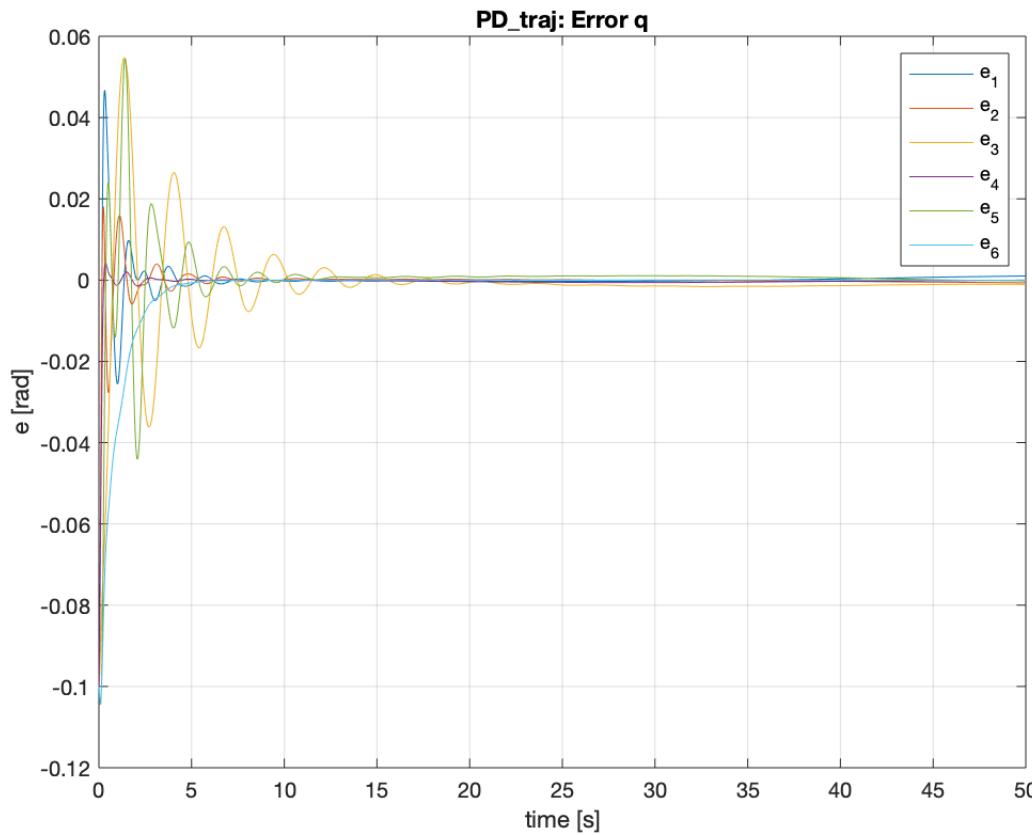
$$\tau = K_p e + K_d \dot{e} + G(q)$$

Per avere la convergenza a zero dell'errore angolare, è stato introdotto un errore sulla posizione iniziale pari a 0.1 rad.
 I valori dei guadagni del controllore sono stati tarati sulla base del comportamento del sistema, il risultato è stato:

$$K_p = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Manipolatore di Stanford

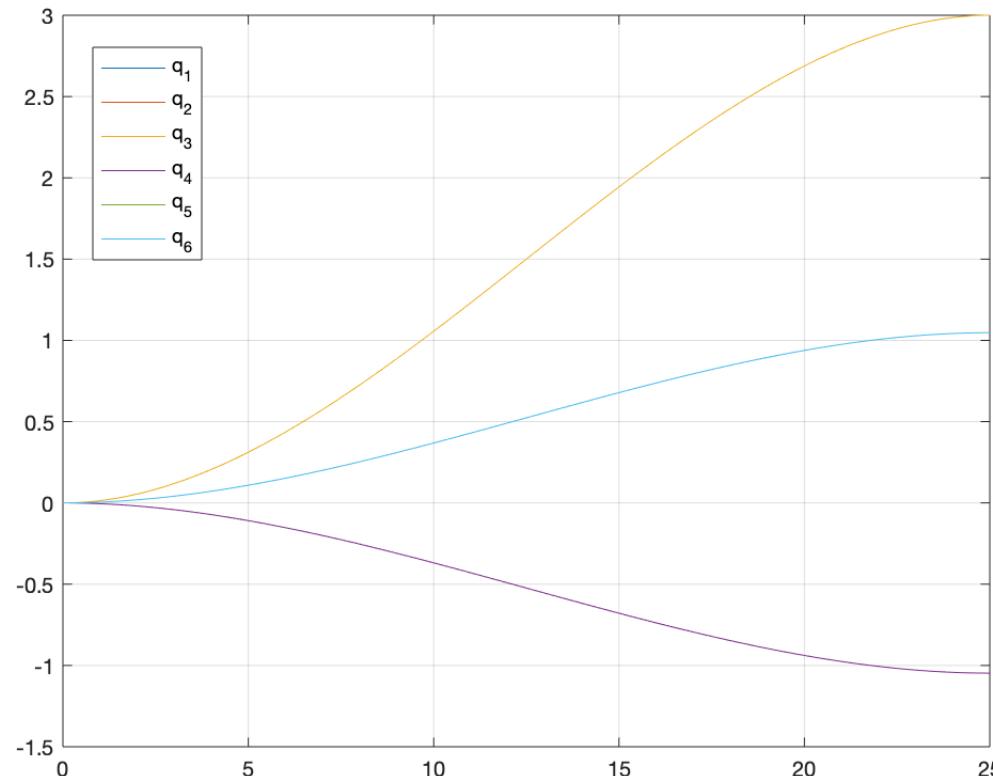
Controllore PD con compensazione di Gravità



Manipolatore di Stanford

Controllore Computed Torque

A partire dalla posizione iniziale $q_0 = [0,0,0,0,0,0]^T$ con velocità iniziale nulla,
si desidera raggiungere la posizione finale $q_d = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 3, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]^T$ sempre con velocità nulla.
Le traiettorie desiderate sono state ottenute interpolando dalla posizione iniziale alla posizione finale desiderata con un polinomio del terzo ordine del tipo $q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$.



Manipolatore di Stanford

Controllore Computed Torque

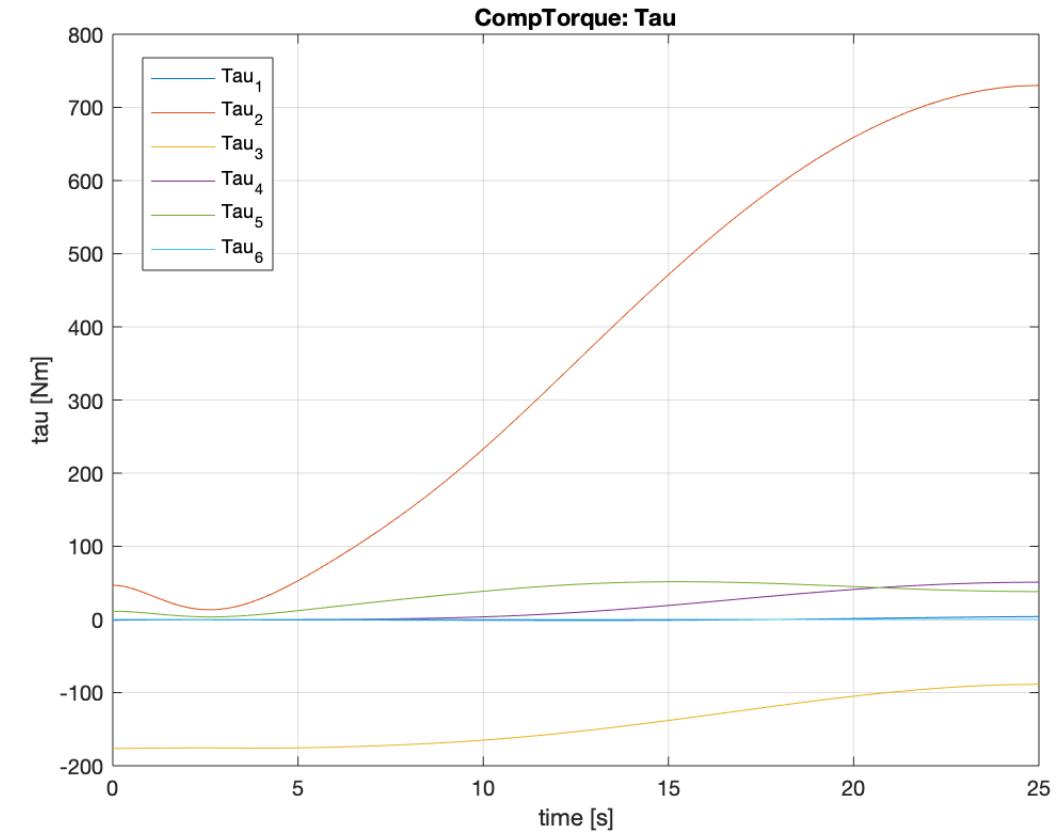
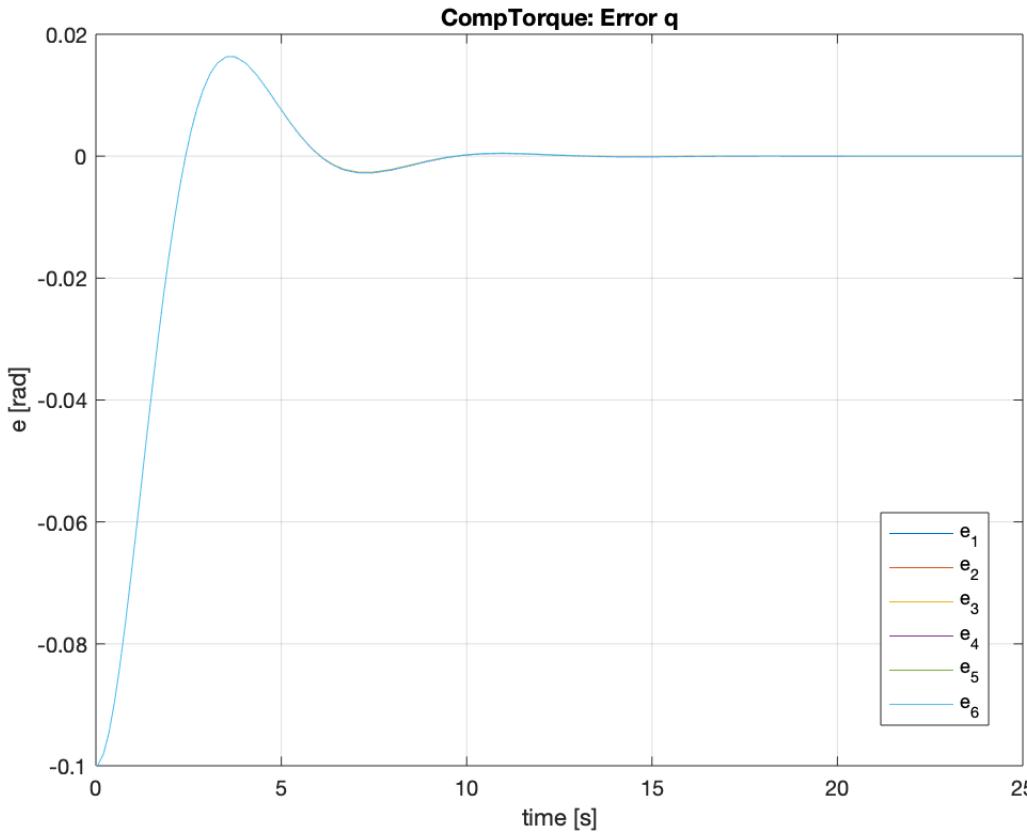
$$\tau = B(q)[\ddot{q}_d + K_p e + K_d \dot{e}] + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q)$$

Per avere la convergenza a zero dell'errore angolare, è stato introdotto un errore sulla posizione iniziale pari a 0.1 rad.
Non è stato necessario il tuning dei guadagni, poiché sufficienti delle matrici identità:

$$K_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore di Stanford

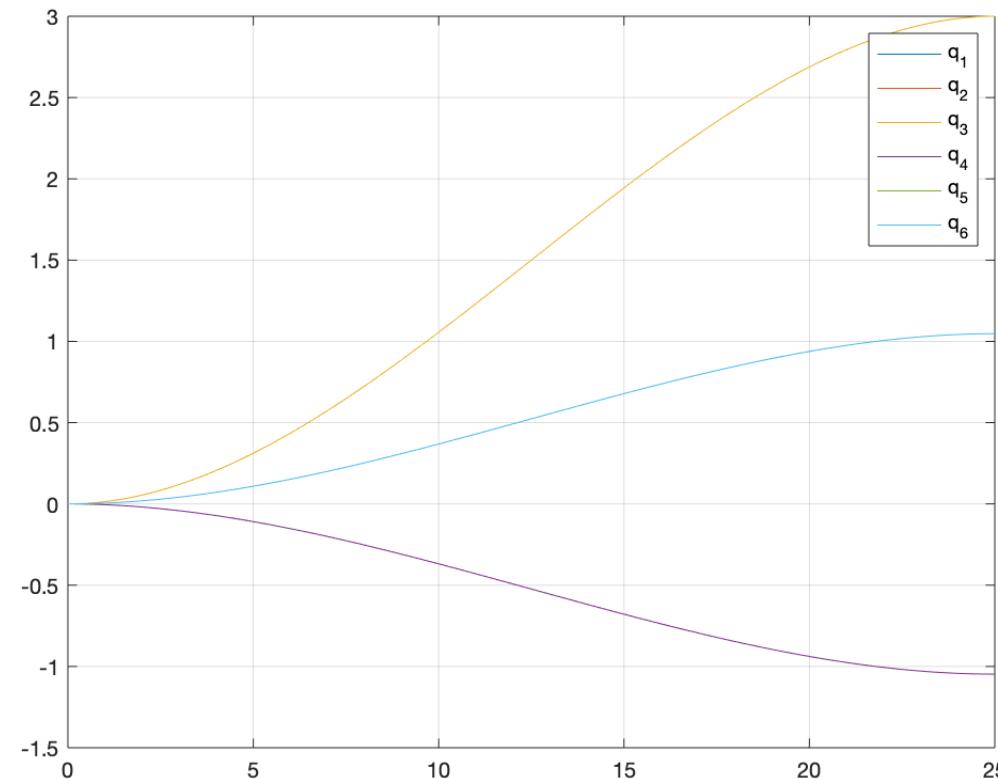
Controllore Computed Torque



Manipolatore di Stanford

Controllore Adaptive Computed Torque

A partire dalla posizione iniziale $q_0 = [0,0,3,0,0,0]^T$ con velocità iniziale nulla,
si desidera raggiungere la posizione finale $q_d = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 3, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]^T$ sempre con velocità nulla.
Le traiettorie desiderate sono state ottenute interpolando dalla posizione iniziale alla posizione finale desiderata con un polinomio del terzo ordine del tipo $q(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0$.



Manipolatore di Stanford

Controllore Adaptive Computed Torque

$$\tau = Y\hat{\pi} + K_d\dot{e} + K_p e$$

$$u_\pi = R^{-1}Y^T M^{-T} B^T Px$$

Per avere la convergenza a zero dell'errore angolare, è stato introdotto un errore sulla posizione iniziale pari a 0.1 rad.
I valori dei guadagni del controllore sono stati tarati sulla base del comportamento del sistema, il risultato è stato:

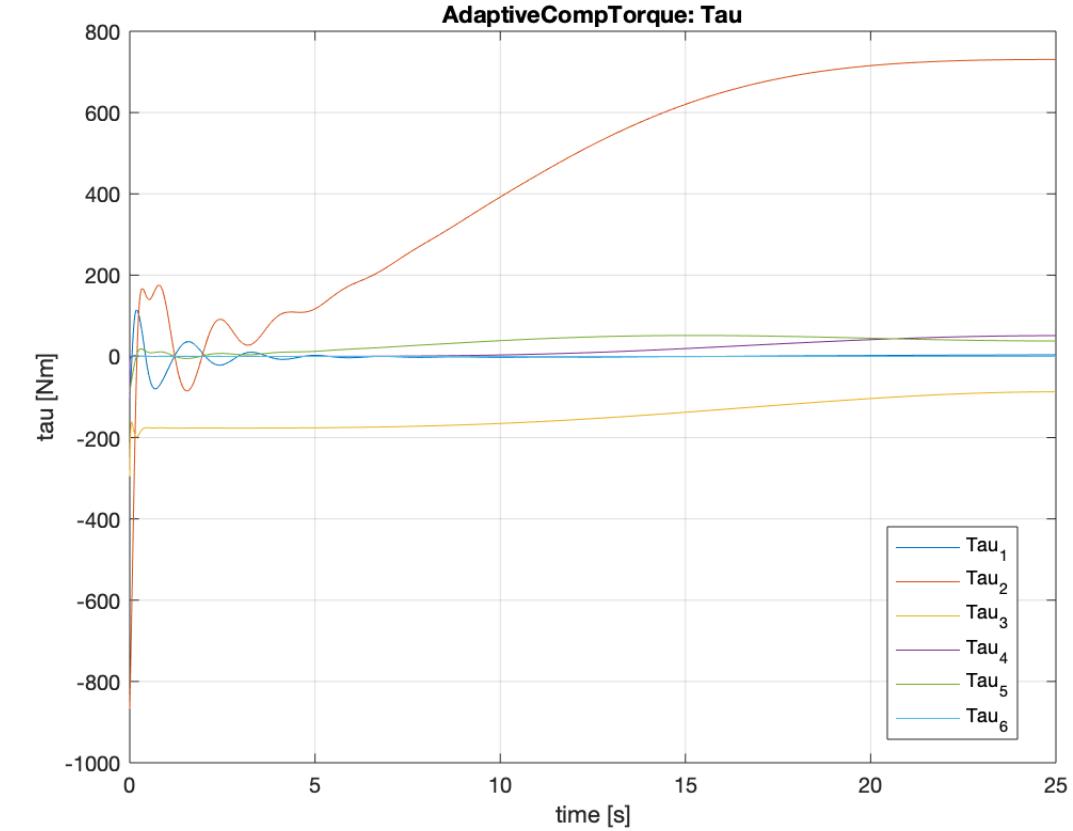
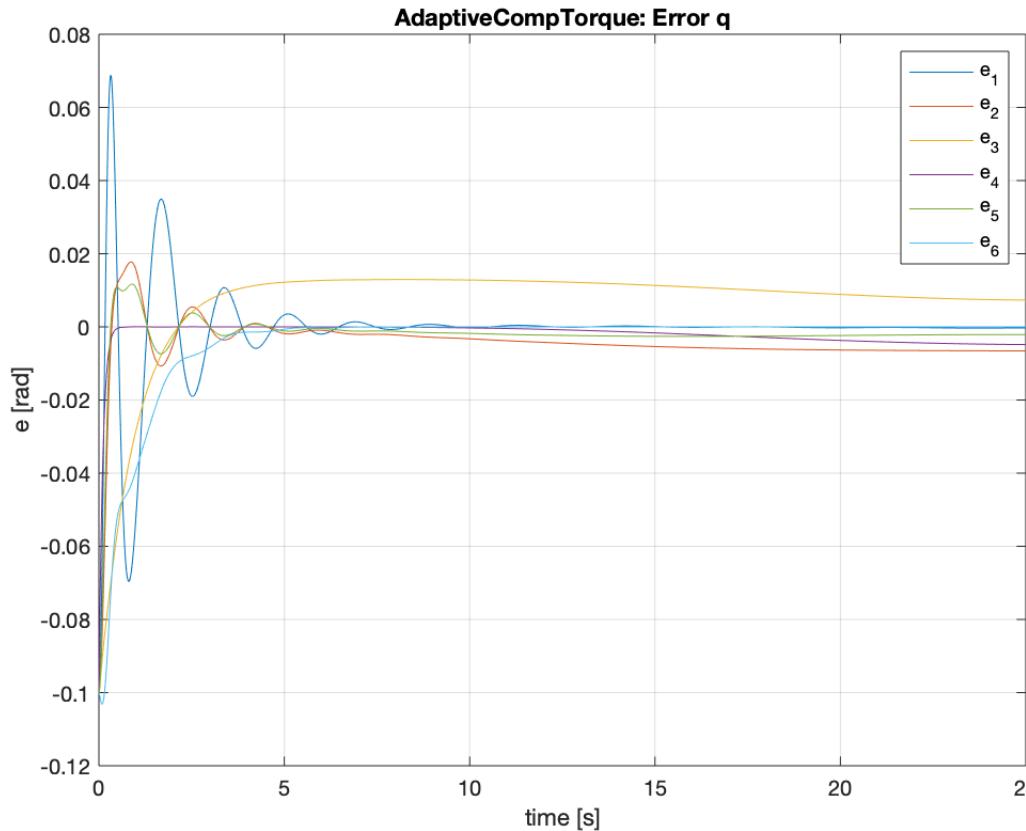
$$K_p = \begin{bmatrix} 1000 & 00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad K_d = \begin{bmatrix} 100 & 00 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0_6 & I_6 \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0_6 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad R = I_6 \quad Q = I_{12}$$

$$A^T P + PA = -Q$$

Manipolatore di Stanford

Controllore Adaptive Computed Torque



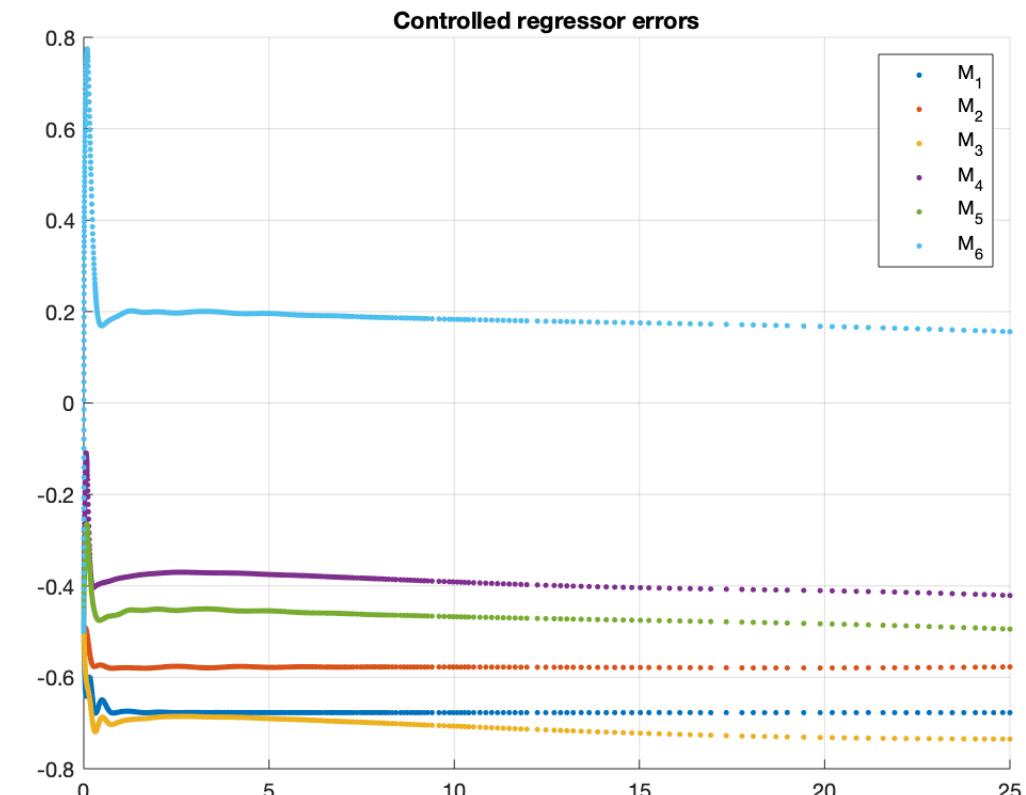
Manipolatore di Stanford

Controllore Adaptive Computed Torque

Il regressore è stato calcolato estrapolando i parametri dinamici relativi alle masse di ciascun link dalle equazioni della dinamica, utilizzando come vettore dei parametri:

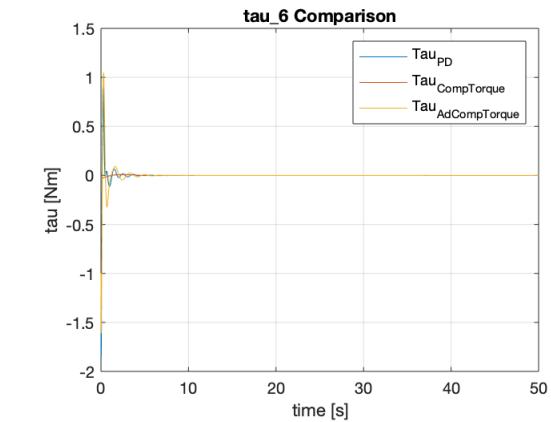
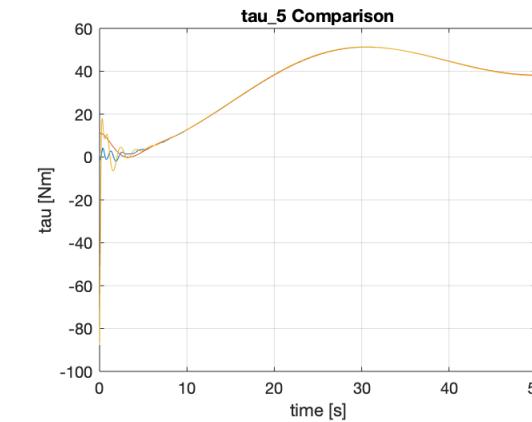
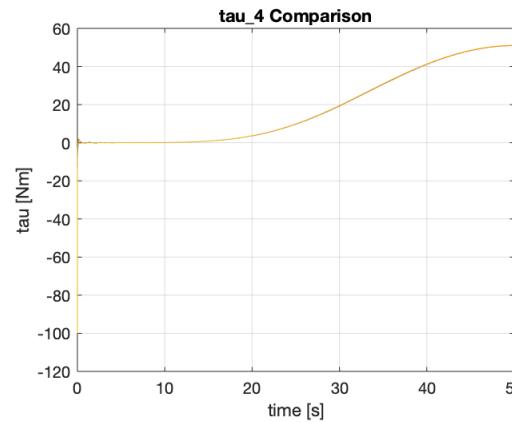
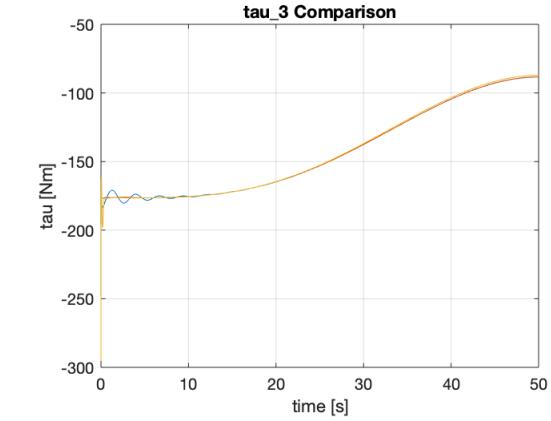
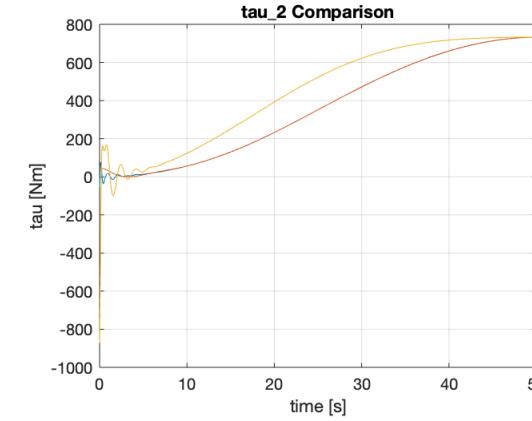
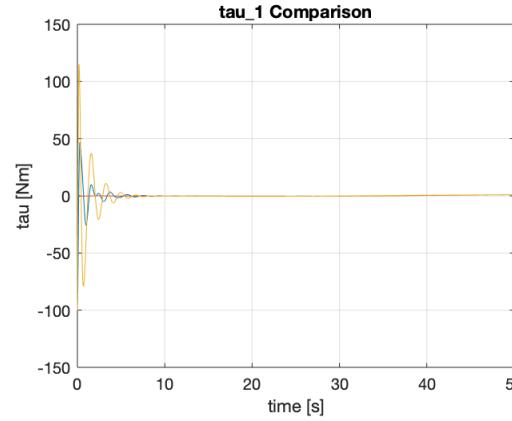
$$\pi = [m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6]^T$$

Inizializzando il vettore di parametri dinamici stimati come $\hat{\pi}$ in modo che le masse avessero uno scostamento di +0.5 kg rispetto a quelle reali e per la scelta fatta delle matrici R e Q si ottiene il seguente andamento dell'errore di stima.



Manipolatore di Stanford

Confronto tra controllori



Manipolatore di Stanford

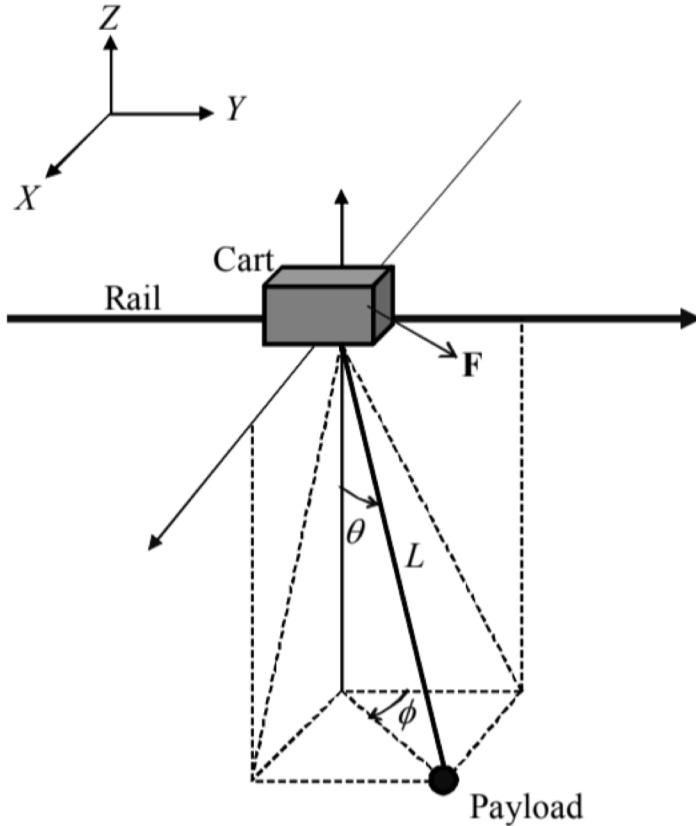
Confronto tra controllori

Dall'immagine precedente è possibile concludere il controllore Adaptive Computed Torque è quello che genera le coppie più alte, fino a 10 volte maggiori di quelle prodotte dal controllore PD con Compensazione di Gravità e ancora maggiori delle coppie generate dal controllo a Coppia Calcolata.

La coppia minore è generata, però, dal controllore Computed Torque, che è anche il più veloce, per il quale l'errore di annulla già dopo 15 s.

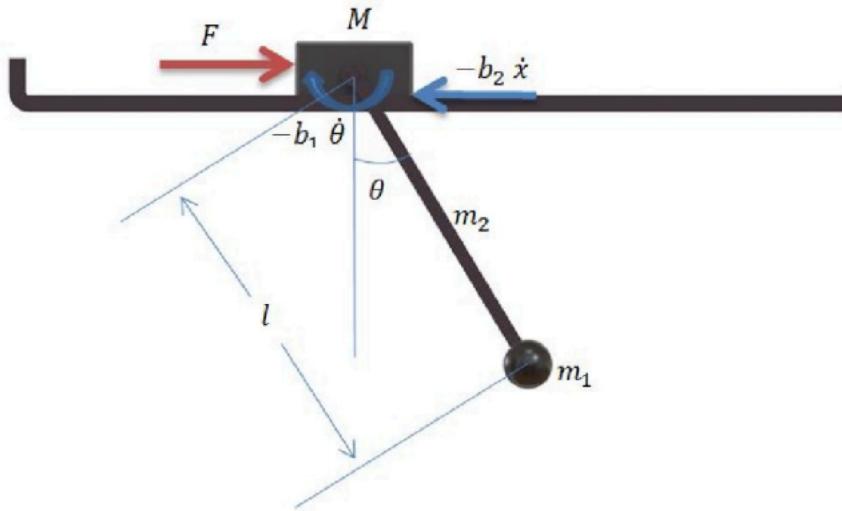
Inoltre il controllore a coppia calcolata adattivo, non è in grado di fare convergere a 0 l'errore di posizione angolare ai giunti, pur presentando un errore massimo di 0.01 rad, cioè circa 0.5°.

Graty crane



Un modello di carro-ponte è rappresentato nella figura a fianco, assumendo che il carrello possa muoversi soltanto lungo la direzione del binario sul quale è posto, è ragionevole assumere che lo spostamento nella direzione perpendicolare al binario sia nullo e così anche l'angolo ϕ . Si assume che anche la forza sia diretta lungo la direzione del binario, riportando così il modello ad una sua semplificazione in 2D.

Granty crane



Parametri del modello:

$$l = 0.2 \text{ m}$$

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$M = 0.548069759 \text{ kg}$$

$$m_1 = 0.088338025 \text{ kg}$$

$$m_2 = 0.022245336 \text{ kg}$$

$$b_1 = 0.1 \quad b_2 = 0.5$$

MODELLO DINAMICO:

$$\ddot{\theta}D + [\ddot{x}l\cos\theta + g\sin\theta]B = -b_1\dot{\theta}$$

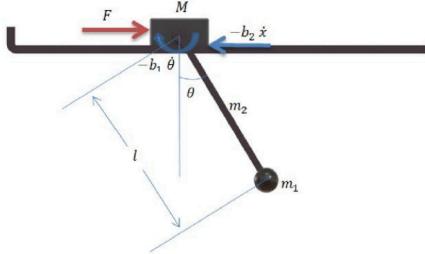
$$\ddot{x}C + [\ddot{x}l\cos\theta + g\sin\theta]B = F - b_2\dot{x}$$

$$B = m_1 + \frac{1}{3}m_2$$

$$C = m_1 + m_2 + M$$

$$D = \frac{2}{5}m_1r^2$$

Grandy crane



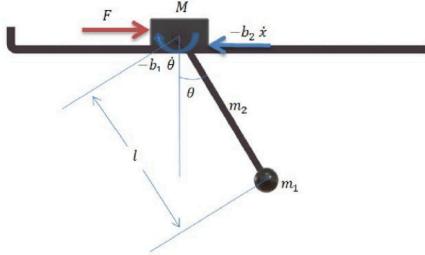
MODELLO DINAMICO:

A partire dalle equazioni della slide precedente, con semplici calcoli si ottengono le equazioni della dinamica del modello, scritte in forma standard che seguono, con vettore di stato:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = q_1 \\ \dot{q}_1 = \frac{-b_1 q_1}{D} - \frac{g \sin(q_0) B}{D} + \frac{(b_2 q_3 + g \sin(q_0) B)(l \cos(q_0) B)}{(C + l \cos(q_0) B) D} - \frac{F l \cos(q_0) B}{(C + l \cos(q_0) B) D} \\ \dot{q}_2 = q_3 \\ \dot{q}_3 = \frac{(-b_2 q_3 - g \sin(q_0) B)}{C + l \cos(q_0) B} + \frac{F}{C + l \cos(q_0) B} \end{cases}$$

Granty crane



MODELLO DINAMICO:

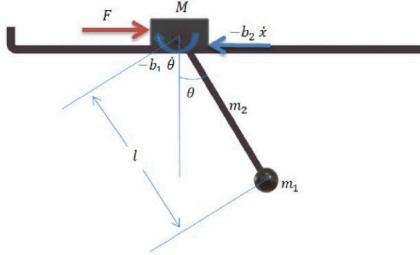
È quindi possibile individuare il vettore delle funzioni di stato, delle funzioni di ingresso e delle uscite e scrivere il sistema nella forma

$$\begin{aligned}\dot{q} &= f(q) + g(q)u \\ y &= h(q)\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}(q) = \begin{bmatrix} \frac{-b_1 q_1}{D} - \frac{g \sin(q_0) B}{D} + \frac{(b_2 q_3 + g \sin(q_0) B)(l \cos(q_0) B)}{(C + l \cos(q_0) B) D} \\ q_3 \\ \frac{(-b_2 q_3 - g \sin(q_0) B)}{C + l \cos(q_0) B} \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{F l \cos(q_0) B}{(C + l \cos(q_0) B) D} \\ 0 \\ \frac{F}{C + l \cos(q_0) B} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}(q) = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Granty crane



CONTROLLABILITÀ'

A partire dal *Teorema di Chow*, è stato verificato che il sistema fosse localmente accessibile, costruendo la *distribuzione di accessibilità* e verificando la condizione $\langle \Delta | \Delta_0 \rangle = n$ nella quale

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \text{span}(g) \\ \Delta &= \text{span}(f, g)\end{aligned}$$

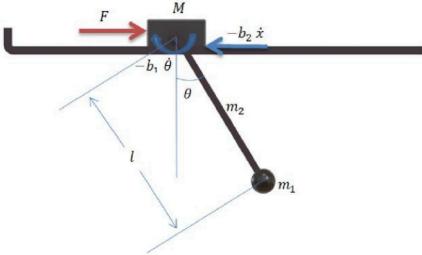
La matrice $\Delta = [g \ [f, g] \ [f, [f, g]] \ [f, [f, [f, g]]] \ [f, [f, [f, [f, g]]]]]$ ha rango 4 e quindi il sistema è localmente accessibile.

Il teorema di Chow è condizione necessaria e sufficiente per l'accessibilità, ma solo necessaria per la controllabilità, perché il sistema sia anche controllabile è necessario verificare che sia soddisfatta la condizione:

$$f(q_0) = 0 \text{ e } \dim \Delta_L(q_0) = n \text{ con } \Delta_L = \text{span}(g, [f, g], \dots, ad_f^{\mu_i} g)$$

Questa condizione risulta verificata dal sistema in esame e pertanto è possibile concludere che sia anche localmente controllabile.

Granty crane



OSSERVABILITÀ

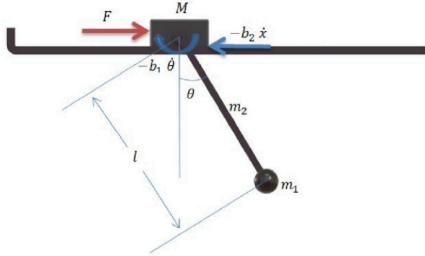
Per valutare l'osservabilità del sistema è stata costruita la *codistribuzione di osservabilità* e verificata la condizione

$$dO = \text{span} \left(dh(q), dLfh(q), dLgh(q), dL_{f^2}h(q), dLgLfh(q), dLfLgh(q) \right) = n$$

per cui il sistema risulta localmente osservabile.

Per la scelta effettuata delle funzioni di uscita il rango della matrice dO risulta essere pari a 4, è quindi possibile concludere che il sistema sia localmente osservabile.

Grandy crane



FEEDBACK LINEARIZATION

Per la scelta fatta delle funzioni di uscita, il sistema ha grado relativo pari a 4, dimensione dello spazio di stato.

Inoltre il sistema verifica le condizioni:

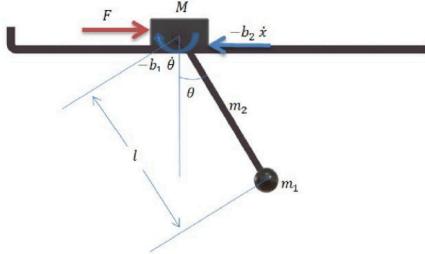
- (a) $\text{rank} \left[g(q_0) \ adfg(q_0) \ \dots \ ad_f^{(n-1)} g(q_0) \right] = n$
- (b) $\text{span} \left(g, adfg, \ \dots, \ ad_f^{(n-2)} g \right)$ sia involutivo

per cui esistono un cambiamento di variabili $\Phi(q)$ e le funzioni di retroazione statica $\alpha(q)$ e $\beta(q)$ tali da linearizzare il sistema.

Si ottiene quindi una nuova espressione per il sistema in forma linearizzata:

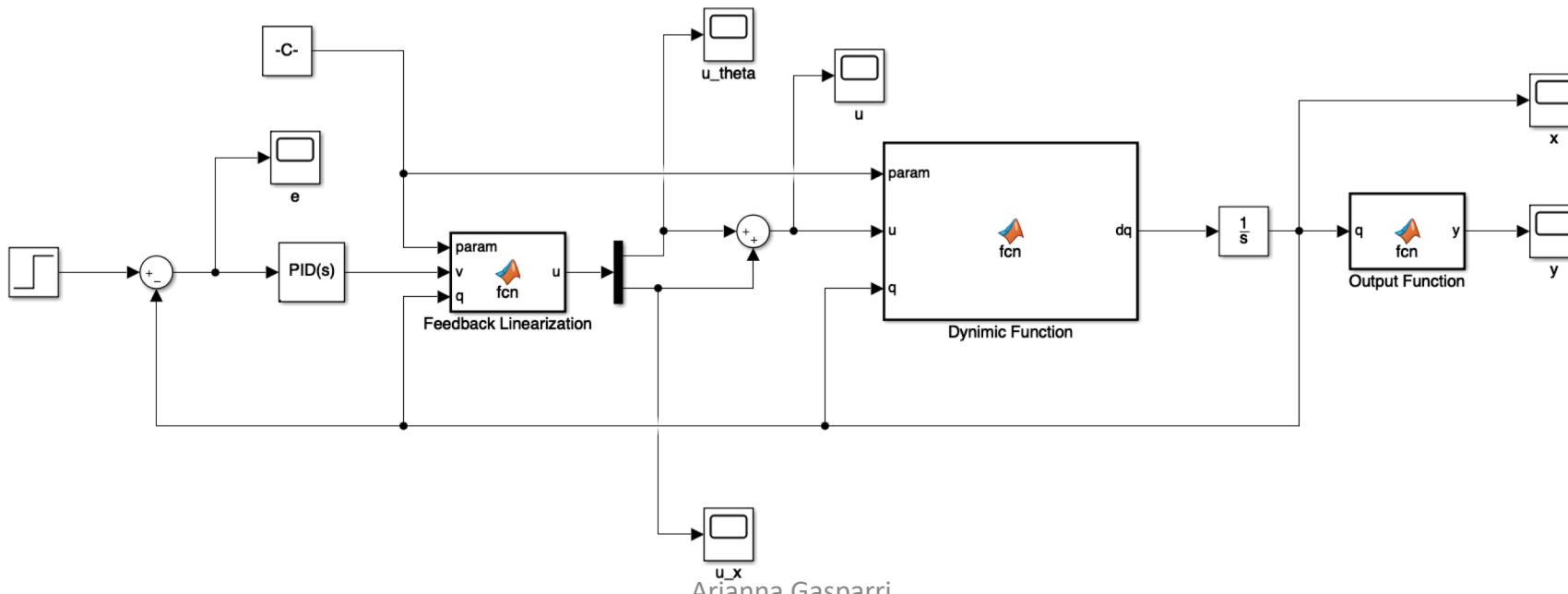
$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} y_0 \\ L_f h_0 \\ y_1 \\ L_f h_1 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} L_f h_0 \\ L_f^2 h_0 + L_g L_f h_0 F \\ L_f h_1 \\ L_f^2 h_1 + L_g L_f h_1 F \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{v_0 + L_f^2 h_0}{L_g L_f h_0} \\ \frac{v_1 + L_f^2 h_1}{L_g L_f h_1} \end{bmatrix}$$

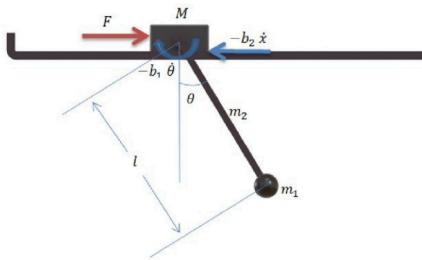
Grandy crane



FEEDBACK LINEARIZATION - CONTROLLER

Per il sistema linearizzato è stato progettato un controllore di tipo PD, imponendo come riferimento il vettore $q_{ref} = [0,0,3,0]^T$, cioè richiedendo che all'istante finale il sistema abbia velocità lineare e angolare nulle e la posizione del carrello sia spostata di 3m a destra rispetto alla posizione iniziale, pur mantenendo l'angolo del carico nullo.





Graney crane

FEEDBACK LINEARIZATION - CONTROLLER

