Übungsbeispiele

107.A04 Wahrscheinlichkeitstheorie und stochastische Prozesse für Informatik 4.0

Byte Unit

10. März 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Übung

Übung 1.1

Die Ereignisse A, B und C erfüllen die Bedingungen

$$\mathbb{P}(A) = 0.7, \mathbb{P}(B) = 0.6, \mathbb{P}(C) = 0.5,$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4, \mathbb{P}(A \cap C) = 0.3, \mathbb{P}(B \cap C) = 0.2,$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap B) = 0.1.$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(A \cup C)$, $\mathbb{P}(B \cup C)$, $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

Lösung zu Übung 1.1

Mit dem Additionstheorem (siehe Satz im Skriptum)

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i$$

(bzw. Axiomen von Kolmogorov (siehe Definition im Skriptum)) folgt:

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.4 = 0.9$$
$$\mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) = 0.7 + 0.5 - 0.3 = 0.9$$
$$\mathbb{P}(B \cup C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) = 0.6 + 0.5 - 0.2 = 0.9$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \\
&= 0.7 + 0.6 + 0.5 - 0.4 - 0.3 - 0.2 + 0.1 = 1
\end{aligned}$$

Übung 1.2

Von einer Krankheit sind 2% der Bevölkerung betroffen. Ein Test gibt bei einem Kranken mit Wahrscheinlichkeit 0.99 ein positives Ergebnis bei einem Gesunden mit Wahrschinlichkeit 0.01.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person positiv getestet wird.

(b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig gewählte Person krank ist, wenn das Testergebnis positiv ist.

Lösung zu Übung 1.2

(a) In diesem Fall gibt es 2 Möglichkeiten:

i) Person ist krank und der Test ist positiv ($A \cap B$)

ii) Person ist gesund und der Test ist positiv ($A^c \cap B$)

Mit dem Satz der vollständigen Wahrscheinlichkeit (siehe Satz im Skriptum)

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}(A|B_i).$$

folgt:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)$$
$$\mathbb{P}(B) = \frac{99}{100} \cdot \frac{2}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{98}{100} = \frac{198}{10k} + \frac{98}{10k} = \frac{296}{10k} \approx 3\%$$

(b) $\mathbb{P}(A|B)$ ist gesucht:

Mit der Bedingten Wahrscheinlichkeit (siehe Definition im Skriptum) und dem Satz von Bayes (siehe Satz im Skriptum)

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}$$

folgt:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{99}{100} \cdot \frac{2}{100}}{\frac{296}{10k}} = \frac{99 \cdot 2}{10k} \cdot \frac{10k}{296} \approx 0.669 \approx 67\%$$

Übung 1.3

Beim norddeutschen Bingo ("die Umweltlotterie") werden 22 Zahlen aus 1, . . . 75 ohne Zurücklegen gezogen. Die Wettscheine sind Quadrate mit 5×5 Feldern. In der ersten Spalte stehen Zahlen zwischen 1 und 15, in der zweiten Zahlen von 16 bis 30 usw.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keine Zahlen aus der ersten Spalte (also zwischen 1 und 15) gezogen werden.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 Zahlen aus der ersten Spalte gezogen werden.

Lösung zu Übung 1.3

(a) Mit der

Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit (siehe Definition im Skriptum) folgt:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Ereignisse:
$A_1 \;\Rightarrow\;$ 1. Zahl liegt zwischen $16 - 75$: $\mathbb{P}(A_1) = \frac{60}{75}$
$A_2 \;\Rightarrow\;$ 2. Zahl liegt zwischen $16 - 75$: $\mathbb{P}(A_2|A_1) = \frac{59}{74}$
$A_3 \;\Rightarrow\;$ 3. Zahl liegt zwischen $16 - 75$: $\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{58}{73}$
$A_4 \;\Rightarrow\;$ 4. Zahl liegt zwischen $16 - 75$: $\mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{57}{72}$
...
$A_{22} \;\Rightarrow\;$ 22. Zahl liegt zwischen $16 - 75$: $\mathbb{P}(A_{22}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{21}) = \frac{39}{54}$

Mit dem Multiplikationssatz (siehe Satz im Skriptum)

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|a_1 \cap A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

folgt:

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{22}) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2|A_1) \cdot ... \cdot \mathbb{P}(A_{22}|A_1 \cap A_2 \cap ... A_{21})$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{22}) = \frac{60}{75} \cdot \frac{59}{74} \cdot \frac{58}{73} \cdot ... \cdot \frac{39}{54} = \frac{60!}{38!} \cdot \frac{53!}{75!} \approx 0.002741 \approx 0.3\%$$

(b) Wenn man sich vorstellt, dass es 2 Gruppen von Zahlen gibt: jene, die zwischen 1 und 15 liegen und jene, die darüber liegen: $\Rightarrow \mathbb{P}(mind.8) = \mathbb{P}(8) + \mathbb{P}(9) + \mathbb{P}(10) + ... + \mathbb{P}(15)$ (mehr als 15 geht nicht)

Mit der Hypergeometrischen Verteilung (siehe Kapitel im Skriptum)

$$p(x) = \frac{\binom{A}{x}\binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

folgt:

$$\Rightarrow h(k|N, A, n) \; k = 8 - 15, \; N = 75, \; A = 15, \; n = 22$$

$$h(8|75, 15, 22) = \frac{\binom{15}{8} \cdot \binom{75-15}{22-8}}{\binom{75}{22}} \approx 0.0216$$

$$h(9|75, 15, 22) = \frac{\binom{15}{9} \cdot \binom{75-15}{22-9}}{\binom{75}{22}} \approx 0.005$$

$$h(10|75,15,22) = \frac{\binom{15}{10}\cdot\binom{75-15}{22-10}}{\binom{75}{22}} \approx 0.0008$$

$$h(11|75,15,22) = \frac{\binom{15}{11}\cdot\binom{75-15}{22-11}}{\binom{75}{22}} \approx 0.0001$$

$$h(12|75,15,22) = \frac{\binom{15}{12}\cdot\binom{75-15}{22-12}}{\binom{75}{22}} \approx 0$$

$$...$$

$$h(15|75,15,22) = \frac{\binom{15}{15}\cdot\binom{75-15}{22-15}}{\binom{75}{22}} \approx 0$$

$\mathbb{P}(mind.8) = \mathbb{P}(8) + \mathbb{P}(9) + \mathbb{P}(10) + ... + \mathbb{P}(15) \approx 0.0216 + 0.005 + 0.0008 + 0.0001 \approx$
$\mathbb{P}(mind.8) \approx 0.0275 \approx 3\%$

Übung 1.4

Fortsetzung zu Beispiel 1.3:

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer Spalte keine Zahlen gezogen werden.

Lösung zu Übung 1.4

Wenn man sich vorstellt, dass es 5 Gruppen von Zahlen gibt: jede, bestehend aus 15 Zahlen ($1-15$, $16-30$, ...) gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass 0 Zahlen aus dieser Gruppe gezogen werden.

Mit der Hypergeometrischen Verteilung (siehe Kapitel im Skriptum)

$$p(x) = \frac{\binom{A}{x}\binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

folgt:

$$\mathbb{P}(Spalte\ 1) = h(0|75,15,22) \approx 0.0027$$

$$\mathbb{P}(Spalte\ 2) = h(0|75,15,22) \approx 0.0027$$

$$...$$

$$\mathbb{P}(Spalte\ 5) = h(0|75,15,22) \approx 0.0027$$

$$\mathbb{P}(Spalte\ 1-5) = \mathbb{P}(Spalte\ 1) + \mathbb{P}(Spalte\ 2) + ... + \mathbb{P}(Spalte\ 5) =$$
$$= 5\cdot\mathbb{P}(Spalte\ 1) \approx 0.0135$$

Aber: wir haben doppelt gezählt
Wir müssen das Additionstheorem verwenden!

Mit dem Additionstheorem (siehe Satz im Skriptum)

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i$$

folgt:

$$\mathbb{P}(S1 \cup S2 \cup S3 \cup S4 \cup S5) =$$

$$\mathbb{P}(S1)+...+\mathbb{P}(S5)-\mathbb{P}(S1 \cap S2)-...-\mathbb{P}(S4 \cap S5)+\mathbb{P}(S1 \cap S2 \cap S3)+...+\mathbb{P}(S3 \cap S4 \cap S5) =$$

$$\mathbb{P}(S1 \cup S2 \cup S3 \cup S4 \cup S5) = 5 \cdot \mathbb{P}(S) - \binom{5}{2}\mathbb{P}(2S) \approx 0.0135 - 0.000008 \approx 0.0135$$

$\Rightarrow$ Folglich brauchen wir nicht mehr weiterrechnen, das Ergebnis ist genau genug.
$\Rightarrow \mathbb{P}(ges) = 5 \cdot \mathbb{P}(S) + 0 \approx 0.0135 \approx 1.4\%$

Übung 1.5

Die symmetrische Differenz von zwei Mengen (”exklusives Oder”) ist

$$A \Delta B = (AB) \cup (BA)$$

Bestimmen Sie Ausdrücke für $\mathbb{P}(A\Delta B)$ und $\mathbb{P}(A\Delta B\Delta C)$

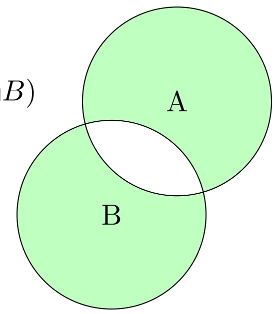
(Zusatzaufgabe: Raten Sie, wie die Formel für n-Mengen aussieht)

Lösung zu Übung 1.5

i) Ausdruck für $A\Delta B$:

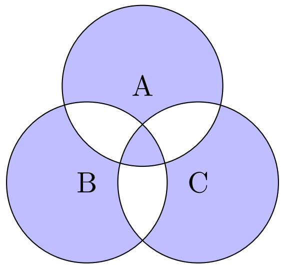
$$\mathbb{P}(A\Delta B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\mathbb{P}(A\Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$$



ii) Ausdruck für $A\Delta B\Delta C$:

$\mathbb{P}(A\Delta B\Delta C) =$
$= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A\cap C)$
$+ \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(B\cap C)$
$+ \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A\cap C) - \mathbb{P}(B\cap C)$
$+ 4\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$



$\mathbb{P}(A\Delta B\Delta C) =$
$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2\mathbb{P}(A\cap B) - 2\mathbb{P}(A\cap C) - 2\mathbb{P}(B\cap C) + 4\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$

Achtung: da die Schnittmenge von $A\cap B\cap C$(also der Mittelpunkt) zur Symmetrischen Differenz dazugehört, folgt: $+4\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$, da die Schnittmenge 3-mal addiert wird, dann 6-mal subtrahiert wird, muss sie folglich 4-mal addiert werden. $(3x - 6x + 4x = 1x)$

iii) Ausdruck für n-Mengen:

$$\mathbb{P}(A_1\Delta A_2\Delta ... \Delta A_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot 2^{k-1}\cdot S_k$$

$$\text{wobei } S_k = \sum_{1\le i_1\le i_2\le ...\le i_k\le n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap ... \cap A_{i_k})$$

Übung 1.6

In einer Urne sind 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen und mit einer zusätzlichen Kugel der selben Farbe zurückgelegt (nach der ersten Ziehung sind also insgesamt 6 Kugeln in der Urne). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel weiß ist.

Lösung zu Übung 1.6

Mit der Bedingten Wahrscheinlichkeit (siehe Definition im Skriptum)

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B)}{\mathbb{P}(A)}$$

und dem Additionstheorem (siehe Satz im Skriptum)

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_i$$

folgt:

1. Schritt: die Wahrscheinlichkeit, dass bei 5 Kugeln beim 1. Schritt eine Weiße gezogen wird:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5} \Rightarrow \mathbb{P}(A^c) = \frac{2}{5} \leftarrow \boxed{\text{Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze Kugel gezogen wurde.}}$$

2. Schritt: die Wahrscheinlichkeit, dass bei 6 Kugeln eine Weiße gezogen wird.

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \leftarrow \boxed{\begin{array}{l}\text{Ereignisse paarweise unabhängig.}\\ \Rightarrow \text{Schnittmenge von beiden ist 0.}\end{array}} \rightarrow \mathbb{P}(B|A^c) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(B|A^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Übung 1.7

Ein Würfel wird dreimal geworfen. Die Augenzahlen werden der Größe nach geordnet, die Zufallsvariable X sei die mittlere (etwa $(2,2,5) \rightarrow 2$).
Bestimmen Sie die Verteilung von X.

Lösung zu Übung 1.7

1. Schritt: 4 Fälle betrachten:
   - I) $y = X = z \;\Rightarrow 1$ Permutation $(\frac{3!}{3!})$
   - II) $y = X < z \;\Rightarrow 3$ Permutationen $(\frac{3!}{2!})$
   - III) $y < X = z \;\Rightarrow 3$ Permutationen $(\frac{3!}{2!})$
   - IV) $y < X < z \;\Rightarrow 6$ Permutationen $(\frac{3!}{1!})$
     z.B. kann $2 < 3 < 4$ durch folgende 6 Würfelkonstellationen/Permutationen entstehen: $(2,3,4)$, $(2,4,3)$, $(3,2,4)$, $(3,4,2)$, $(4,2,3)$, $(4,3,2)$

2. Schritt: Bestimmen der Wahrscheinlichkeit für X=k:

$$X = 1: \; 1 \cdot I + 5 \cdot II + 0 \cdot III + 0 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 6 = 16$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 1) = \frac{16}{216} \approx \;\; 7.4\%$$

$$X = 2: \; 1 \cdot I + 4 \cdot II + 1 \cdot III + 4 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 40$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 2) = \frac{40}{216} \approx 18.5\%$$

$$X = 3: \; 1 \cdot I + 3 \cdot II + 2 \cdot III + 6 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 6 = 52$$

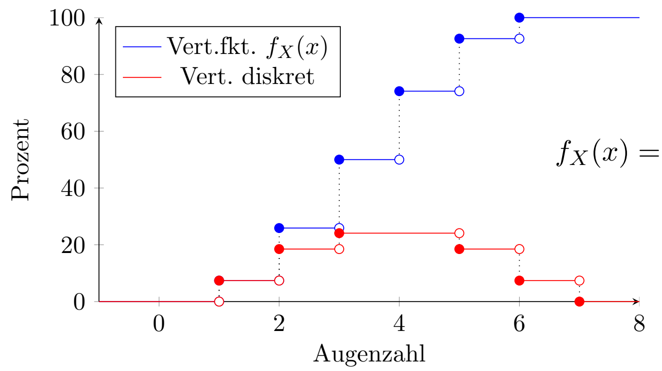
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 3) = \frac{52}{216} \approx 24.1\%$$

$$X = 4: \; 1 \cdot I + 2 \cdot II + 3 \cdot III + 6 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 6 = 52$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 4) = \frac{52}{216} \approx 24.1\%$$

$$X = 5: \; 1 \cdot I + 1 \cdot II + 4 \cdot III + 4 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 40$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 5) = \frac{40}{216} \approx 18.5\%$$
$$X = 6: \; 1 \cdot I + 0 \cdot II + 5 \cdot III + 0 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 0 \cdot 6 = 16$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 6) = \frac{16}{216} \approx \; 7.4\%$$

3. Verteilungsfunktion $F_X(x)$:



$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 1 \\ \frac{16}{216} \approx 7.4\% & \text{wenn } x < 2 \\ \frac{56}{216} \approx 25.9\% & \text{wenn } x < 3 \\ \frac{108}{216} \approx 50\% & \text{wenn } x < 4 \\ \frac{160}{216} \approx 74.1\% & \text{wenn } x < 5 \\ \frac{200}{216} \approx 92.6\% & \text{wenn } x < 6 \\ \frac{216}{216} \approx 100\% & \text{wenn } x < 7 \end{cases}$$

Die rote Linie gibt die Verteilung diskret an, während die blaue Linie die Verteilungsfunktion $f_X(x)$ rechts darstellt.

2. Übung

Übung 2.1

Die Poissonverteilung (siehe Kapitel im Skriptum) $\mathcal{P}(\lambda)$ hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p\left(x\right)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}\left(x\geq 0\right)$$

Zeigen Sie, dass dies als Grenzwert der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung (siehe Kapitel im Skriptum) mit $p=\frac{\lambda}{n}$, $n\to\infty$ erhalten werden kann.

Lösung zu Übung 2.1

Die Binomialverteilung (siehe Kapitel im Skriptum) $\mathcal{B}(n,p)$:

$$p(x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}.$$

und der Binomialkoeffizient (siehe Anhang im Skriptum)

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Demnach:

$$\mathcal{B}(k|n,p)=\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}=\textbf{wir ersetzen } p \textbf{ durch } \frac{\lambda}{n}=\binom{n}{k}(\frac{\lambda}{n})^{k}(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{\lambda}{n})^{k}(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)((n-k)!)}{k!(n-k)!}\frac{\lambda^{k}}{n^{k}}(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}=$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^{k}}\frac{\lambda^{k}}{k!}(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}$$

Betrachten wir nun zuerst den linken Teil des Ausdrucks:

$$\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}=1*(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})*\dots*(1-\frac{k+1}{n})$$

Bilden wir nun davon den $\lim_{n\to\infty}$ vereinfacht sich der linke Teilausdruck zu 1.

Nun betrachten wir den verbleibenden rechten Teilausdruck

$$\frac{\lambda^k}{k!}(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}(1-\frac{\lambda}{n})^{n}(1-\frac{\lambda}{n})^{-k}$$

Bilden wir nun auch hier den $\lim_{n\to\infty}$ wird $(1-\frac{\lambda}{n})^{-k}$ zu 1. Mit dem Wissen, dass:

$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$

Erhalten wir, wie erhofft:

$$\lim_{n\to\infty} B(k|n,\frac{\lambda}{n}) = p\,(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Übung 2.2

Es sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \frac{x^2}{4} & \text{für } 0 \le x < 1 \\ \frac{x}{2} & \text{für } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

(b) X sei nach F verteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X<1)$, $\mathbb{P}(X\le 1)$, $\mathbb{P}(X=0)$,$\mathbb{P}(X=1)$, $\mathbb{P}(X=2)$.

Lösung zu Übung 2.2

(a) Die Kriterien für eine Verteilungsfunktion (siehe Definition im Skriptum) lauten:

$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist genau dann eine Verteilungsfunktion, wenn

a) $0 \le F(x) \le 1$ für alle x,

b) F ist monoton nichtfallend,

c) F ist rechtsstetig,

d) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$,

e) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Wie wir sehen sind die Punkte alle erfüllgt:

a) ✓: Die Werte die x^2 (bei $0 \le x < 1$) annehmen kann liegen im Bereich [0;1[selbes gilt für $\frac{x^2}{4}$. Auch die Werte für $\frac{x}{2}$ (bei $1 \le x < 2$) liegen im Bereich [0,5;1[.

b) ✓: Sowohl $\frac{x^2}{4}$ als auch $\frac{x}{2}$ sind monoton steigend.

c) ✓: erfüllt

d) ✓: erfüllt

e) ✓: erfüllt

(b) Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich am besten aus der Verteilungsfunktion berechnen:

Mit den Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Verteilungsfunktion (siehe Kapitel im Skriptum) folgt:

$$\mathbb{P}(X \leq a) = F_X(a),$$
$$\mathbb{P}(X < a) = F_X(a - 0),$$
$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a),$$
$$\mathbb{P}(a < X < b) = F_X(b - 0) - F_X(a),$$
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a - 0),$$
$$\mathbb{P}(a \leq X < b) = F_X(b - 0) - F_X(a - 0).$$
$$\mathbb{P}(X = a) = F_X(a) - F_X(a - 0).$$

Dabei ist $F(x - 0) = \lim_{h \downarrow 0} F(x - h)$ der linksseitige Grenzwert von F in x.

Daraus ergibt sich für unser Beispiel:

- $\mathbb{P}(X < 1) = F_X(1 - 0) = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(X \leq 1) = F_X(1) = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{P}(X = 0) = F_X(0) - F_X(0 - 0) = \frac{0^2}{4} - 0 = 0$
- $\mathbb{P}(X = 1) = F_X(1) - F_X(1 - 0) = \frac{1}{2} - \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4}$
- $\mathbb{P}(X = 2) = F_X(2) - F_X(2 - 0) = 1 - \frac{2}{2} = 0$

Übung 2.3

X und Y seien unabhängig poissonverteilt mit Parameter λ und μ. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

Lösung zu Übung 2.3

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung (siehe Kapitel im Skriptum) ist wie folgt definiert:

$$\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Für zwei unabhängigie Zufallsvariablen (X, Y) (siehe Definition im Skriptum) gilt:

$$p(x) = F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Außerdem gilt, für die gemeinsame Dichte (siehe Satz im Skriptum):

$$f_{x+y} = \underbrace{f_X * f_Y(z)}_{\text{Faltung}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)dx$$

Aus der Angabe wissen wir also:

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \text{ und } p(y) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!}$$

Wir führen eine neue Variable ein: $Z = X + Y \Rightarrow Y = Z - X$

$\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_x \mathbb{P}(X = x, Y = z - x)$

Da die Varaiblen unabhängig sind ergibt das:
$\sum_x \mathbb{P}(X = x, Y = z - x) = \sum_x [p(x)p(z - x)]$ was der Faltung entspricht.

$= \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \cdot \frac{\mu^{(z-x)} e^{-\mu}}{(z-x)!} = e^{-\lambda-\mu} \cdot \sum_{x=0}^{z} \frac{1}{x! \cdot (z-x)!} \cdot \lambda^z \cdot \mu^{z-x} = e^{-\lambda-\mu} \cdot \sum_{x=0}^{z} \cdot \binom{z}{x} \cdot \frac{1}{z!} \cdot \lambda^z \cdot \mu^{z-x} = \frac{e^{-\lambda-\mu}}{z!} \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} \cdot \lambda^z \cdot \mu^{z-x} = \frac{e^{-\lambda-\mu}}{z!} \sum_{x=0}^{z} \binom{z}{x} \cdot \lambda^z \cdot \mu^{z-x}$

Mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes (siehe Anhang im Skriptum) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k$ lässt sich dies weiter vereinfachen zu:

$p(z) = \frac{(\lambda+\mu)^z \cdot e^{-(\lambda+\mu)}}{z!}$

Dies entspricht wiederum einer Poisson-Verteilung von Z.

Übung 2.4

X und Y seien unabhängig gleichverteilt auf $[0, 1]$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

Lösung zu Übung 2.4

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der diskreten Gleichverteilung (siehe Kapitel im Skriptum) ist wie folgt definiert:

$$\frac{1}{b-a} \quad \forall a \leq x \leq b$$

Für zwei unabhängigie Zufallsvariablen (X, Y) (siehe Definition im Skriptum) gilt:

$$p(x) = F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Außerdem gilt, für die gemeinsame Dichte (siehe Satz im Skriptum):

$$f_{x+y} = \underbrace{f_X * f_Y(z)}_{\text{Faltung}} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)dx$$

D.h.: als Ausgangssituation haben wir:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir führen eine neue Variable ein: $Z = X + Y \Rightarrow Y = Z - X \Rightarrow z \in [0, 2]$

Wenn die gemeinsame Verteilung diskret bzw. stetig ist, kann man in dieser Definition von den zwei Zufallsvariablen(vorher) die Verteilungsfunktion durch die Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichte- funktion ersetzen:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y).$$

(siehe Definition im Skriptum)

$f_{X,Y} = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = f_Z(z)$
Wir betrachten nur das Integral von 0 bis 1 da außerhalb $f_X(x) = 0$ für alle gilt:
$f_Z(z) = \int_0^1 \underbrace{f_X(x)}_{=1} f_Y(z-x)dx$

Innerhalb des Intervalls [0,1] ist $f_X(x) = 1$ für alle x.
$f_Z(z) = \int_0^1 f_Y(z-x)dx$
Da $y \in [0,1] \Rightarrow (z-x) \in [0,1]$ dies führt auf 2 Fälle:

1. $z \in [0,1[$: $z - x \geq 0 \Rightarrow z \geq x$

   $f_{(X+Y)_1}(z) = \int_0^z 1dx = z$

2. $z \in [1,2[$: $z - x \leq 1$ damit $f_Y = 1$
   $z - 1 \leq x$
   $f_{(X+Y)_2}(z) = \int_{z-1}^1 1dx = 1 - (z-1) = 2 - z$

Insgesamt ergibt sich also:

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} z & \text{für } 0 \le z < 1 \\ 2 - z & \text{für } 1 \le z < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Übung 2.5

X sei gleichverteilt auf $[0,1]$. Bestimmen Sie die Verteilung von $-\log X$.

Lösung zu Übung 2.5

Laut Skriptum:
Wenn die gemeinsame Verteilung diskret bzw. stetig ist, kann man in dieser Definition die Verteilungsfunktion durch die Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion ersetzen.

Transformationssatz für Dichten
$X = (X_1, \ldots, X_n)$ sei stetig verteilt mit der Dichte f_X. $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und eindeutig umkehrbar. $Y = g(X)$ (d.h. $Y_i = g_i(X_1, \ldots, X_n)$) ist dann ebenfalls stetig verteilt mit der Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|\frac{\partial g^{-1}}{\partial y}(y)| = f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{|\frac{\partial g}{\partial x}(g^{-1}(y))|} & \text{wenn } y \in g(\mathbb{R}^n), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \det((\frac{\partial g_i}{\partial x_j})_{n \times n})$$

die Funktionaldeterminate.

$Y = g(x) = -log(x) = -ln(x)$
$-Y = ln(x)$
$x = e^{-y} = g^{-1}(y)$

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(-ln(x) \le y) = \mathbb{P}(x \ge e^{-y}) = e^{-y}$**???**

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |((g^{-1})')| = f_X(g^{-1}(y)) \cdot |((e^{-y})')| = f_X(g^{-1}(y)) \cdot | - e^{-y}| =$
$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \cdot e^{-y}$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit $f_X(x)$ eingesetzt in $f_Y(y)$ folgt:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \le g^{-1}(y) \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wobei das aber keine richtige Einschränkung ist, denn $g^{-1}(y) = e^{-y}$ ist sowieso immer kleiner als 1 für $x \in [0, 1]$

Übung 2.6

X und Y haben eine gemeinsame Verteilung mit der Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} \text{c(x+y)} & \text{für } 0 \leq x,\, y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen c und die Randdichten von X und Y.

Lösung zu Übung 2.6

Eigenschaften der gemeinsamen Dichtefunktion:

...

Mit dem 2. Punkt folgt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1$$

Da sowohl x als auch y nur im Intervall [0,1] interessant sind, kann man die Integralgrenzen einschränken:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f_{XY}(x, y) dx dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 c \cdot (x + y) dx dy = 1$$

$$c \cdot \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (x + y) dx dy$$

$$c \cdot \int\limits_0^1 (\tfrac{x^2}{2} + xy)|_{x=0}^1 dy$$

$$c \cdot \int\limits_0^1 (\tfrac{1}{2} + y) dy = c \cdot (\tfrac{y}{2} + \tfrac{y^2}{2})|_{y=0}^1 = c \cdot (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) = c \Rightarrow c = 1$$

Die Randdichten von X und Y sind definiert durch:

- $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$
- $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx$

Randdichte von X:

$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy = c \cdot \int\limits_0^1 (x + y) dy = c \cdot (xy + \frac{y^2}{2})|_0^1 = c \cdot (x + \frac{1}{2})$ **und mit c=1 folgt:**

$f_X(x) = (x + \frac{1}{2})$

Randdichte von Y:

$f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx = c \cdot \int\limits_0^1 (x + y) dx = c \cdot (\frac{x^2}{2} + xy)|_0^1 = c \cdot (y + \frac{1}{2}) = (y + \frac{1}{2})$

Übung 2.7

Ein Würfel wird dreimal geworfen. X sei die größte der drei Augenzahlen, Y die kleinste. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y und die beiden Randverteilungen.

Lösung zu Übung 2.7

3. Übung

Übung 3.1

X und Y seien unabhängig gammaverteilt mit Parametern (α, λ) und (β, λ). Zeigen Sie, dass $S = X + Y$ ebenfalls gammaverteilt ist.

Lösung zu Übung 3.1

z.z. die Reproduktivität von X und Y mit (α, λ) und $(\beta, \lambda) \Rightarrow \Gamma_{\alpha,\lambda} * \Gamma_{\beta,\lambda} = \Gamma_{\alpha+\beta,\lambda}$.

Mit dem Satz (siehe Satz im Skriptum) gilt: (kommt aus Transformationssatz für Dichten (siehe Kapitel im Skriptum)):

$$f_{X+Y}(z) = f_X * f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx.$$

und der Gammaverteilung (siehe Kapitel im Skriptum) $\Gamma(\alpha, \lambda)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda\, x} & \text{wenn } x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

folgt:

Einführen der Variable $S = x + y \Rightarrow y = S - x$

$$\begin{aligned}
f_{\Gamma_{\alpha,\lambda} * \Gamma_{\beta,\lambda}} &= \int_0^S f_{\Gamma_{\alpha,\lambda}}(x) \cdot f_{\Gamma_{\beta,\lambda}}(x) dx \\
&= \int_0^S \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot \frac{\lambda^\beta (S-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\lambda(S-x)} dx \\
&= \frac{\lambda^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^S x^{\alpha-1} \cdot \cancel{e^{-\lambda x}} \cdot (S-x)^{\beta-1} e^{-\lambda S} \cancel{e^{\lambda x}} dx \\
&= \frac{\lambda^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot e^{-\lambda S} \int_0^S x^{\alpha-1} \cdot (S-x)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{\lambda^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot e^{-\lambda S} \int_0^S \left(\frac{S \cdot x}{S} \right)^{\alpha-1} \cdot \left(S \left(1 - \frac{x}{S} \right) \right)^{\beta-1} dx \\
&= \frac{\lambda^{\beta+\alpha} S^{\alpha-1} S^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot e^{-\lambda S} \int_0^S \left(\frac{x}{S} \right)^{\alpha-1} \cdot \left(1 - \frac{x}{S} \right)^{\beta-1} dx
\end{aligned}$$

Anschließend wird $u = \dfrac{x}{S}$ substituiert: $\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{S}$

Für die Grenze S gilt: $\dfrac{S}{S} = 1$, da wir statt x das S einsetzen.

Die Betafunktion ist definiert als:

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\begin{aligned}
f_{\Gamma_{\alpha,\lambda}*\Gamma_{\beta,\lambda}} &= \frac{\lambda^{\beta+\alpha}S^{\alpha-1}S^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\cdot e^{-\lambda S}\int_0^1 u^{\alpha-1}\cdot(1-u)^{\beta-1}du\cdot\frac{1}{S^{-1}} \\
&= \frac{\lambda^{\beta+\alpha}S^{\alpha-1}S^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\cdot e^{-\lambda S}\beta(\alpha,\beta)\cdot\frac{1}{S^{-1}} \\
&= \frac{\lambda^{\beta+\alpha}S^{\alpha-1}S^{\beta\cancel{-1}}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\cancel{S^{-1}}}\cdot e^{-\lambda S}\frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\lambda^{\beta+\alpha}S^{\alpha+\beta-1}}{\cancel{\Gamma(\alpha)}\cdot\cancel{\Gamma(\beta)}}\cdot e^{-\lambda S}\frac{\cancel{\Gamma(\alpha)}\cdot\cancel{\Gamma(\beta)}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\lambda^{\beta+\alpha}S^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot e^{-\lambda S} = f_{\Gamma_{(\alpha+\beta),\lambda}} \\
f_{\Gamma_{\alpha,\lambda}*\Gamma_{\beta,\lambda}} &= f_{\Gamma_{(\alpha+\beta),\lambda}} \ \boxed{\text{q.e.d.}}
\end{aligned}$$

Übung 3.2

X und Y seien unabhängig gammaverteilt mit Parametern (α,λ) und (β,λ). Zeigen Sie, dass $Q = X/(X+Y)$ betaverteilt ist (für Wagemutige: bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von S und Q und zeigen Sie, dass sie unabhängig sind).

Lösung zu Übung 3.2

Mit der Gammaverteilung (siehe Kapitel im Skriptum) $\Gamma(\alpha,\lambda)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda\, x} & \text{wenn } x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und dem Transformationssatz für Dichten (siehe Kapitel im Skriptum)

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|\frac{\partial g^{-1}}{\partial y}(y)| & \text{wenn } y \in g(\mathbb{R}^n), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

folgt:

Mit $g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x+y} \\ x \end{pmatrix}$ (wobei hier *oben* $= Q$ und *unten* $= x$ gilt), der Umkehrfunktion $g^{-1}(Q,x) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{Q} - x \end{pmatrix}$ (*oben* $= x$, *unten* $= y$) und den Determinantenrechenregeln (siehe Anhang im Skriptum) folgt:

$$\left|\frac{\partial g^{-1}}{\partial y}(y)\right| = \left| det \left| \begin{matrix} \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial g_1^{-1}}{\partial Q} \\ \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial x} & \frac{\partial g_2^{-1}}{\partial Q} \end{matrix} \right| \right| = \left| det \left| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial Q} \\ \frac{\partial \frac{x}{Q}-x}{\partial x} & \frac{\partial \frac{x}{Q}-x}{\partial Q} \end{matrix} \right| \right| = \left| det \left| \begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{Q}-1 & -\frac{x}{Q^2} \end{matrix} \right| \right| =$$
$$= \left| -\frac{x}{Q^2} \right| = \frac{x}{Q^2}$$

$$\begin{aligned} f_a &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Gamma_{\alpha,\lambda}} \cdot f_{\Gamma_{\beta,\lambda}} \cdot \left|\frac{\partial g^{-1}}{\partial y}(y)\right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda\, x} \cdot \frac{\lambda^\beta y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\lambda\, y} \cdot \frac{x}{Q^2} dx \quad \boxed{\text{wobei hier gilt: } y \;=\; y(x)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda\, x} \cdot \frac{\lambda^\beta \left(\frac{x}{Q}-x\right)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\lambda(\frac{x}{Q}-x)} \cdot \frac{x}{Q^2} dx \quad \boxed{\text{mit } y = \frac{x}{Q} - x.} \\ &= \frac{\lambda^\alpha \cdot \lambda^\beta}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1} \cancel{e^{-\lambda x}} \cdot \left(\frac{x}{Q}-x\right)^{\beta-1} e^{-\frac{\lambda\, x}{Q}} \cancel{e^{\lambda x}} \cdot \frac{x}{Q^2} dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha \cdot \lambda^\beta}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot \left(x\left(\frac{1}{Q}-1\right)\right)^{\beta-1} e^{-\frac{\lambda\, x}{Q}} \cdot \frac{x}{Q^2} dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha \cdot \lambda^\beta}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot x^{\beta-1} \cdot \left(\frac{1}{Q}-1\right)^{\beta-1} e^{-\frac{\lambda\, x}{Q}} \cdot \frac{x}{Q^2} dx \end{aligned}$$

Anschließend wird $u = \frac{x}{Q}\cdot\lambda \Rightarrow x = \frac{Q}{\lambda}\cdot u$ Substituiert. (Außerdem: $\frac{du}{dx} = \frac{\lambda}{Q} \Rightarrow dx = \frac{Q}{\lambda}\cdot du$)

Die Gammafunktion ist definiert als:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = (z-1)\Gamma(z-1)$$

$$
\begin{aligned}
f_a &= \frac{\lambda^\alpha \cdot \lambda^\beta}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{Q}{\lambda}\right)^{\alpha-1} u^{\alpha-1} \cdot \left(\frac{Q}{\lambda}\right)^{\beta-1} u^{\beta-1} \cdot \left(\frac{1}{Q}-1\right)^{\beta-1} e^{-u} \cdot \frac{\cancel{Q}\, u}{\lambda\, \cancel{Q^2}} \frac{\cancel{Q}}{\lambda} \cdot du \\
&= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} Q^{\alpha-1} \cdot u^{\alpha-1} \cdot Q^{\beta-1} \cdot u^{\beta-1} \cdot \left(\frac{1}{Q}-1\right)^{\beta-1} e^{-u} \cdot u \cdot \lambda^{-2} \cdot \lambda^{-\beta+1} \cdot \lambda^{-\alpha+1} \cdot du \\
&= \frac{\lambda^{\cancel{\alpha}+\cancel{\beta}-\cancel{\alpha}+1-\cancel{\beta}+1-2}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} Q^{\alpha-1} \cdot u^{\alpha-1} \cdot u^{\beta-1} \cdot Q^{\beta-1} \cdot \left(\frac{1}{Q}-1\right)^{\beta-1} e^{-u} \cdot u \cdot du \\
&= \frac{\lambda^{1+1-2}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} Q^{\alpha-1} \cdot u^{\alpha+\beta-2} \cdot u \cdot \left(\frac{Q}{Q}-Q\right)^{\beta-1} e^{-u} \cdot du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} Q^{\alpha-1} \cdot u^{\alpha+\beta-1} \cdot (1-Q)^{\beta-1} e^{-u} \cdot du \\
&= \frac{Q^{\alpha-1}\cdot(1-Q)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} u^{\alpha+\beta-1} \cdot e^{-u} \cdot du \quad \boxed{\text{einsetzen der Gammafunktion}} \\
f_a &= \frac{Q^{\alpha-1}\cdot(1-Q)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot \Gamma(\alpha+\beta)
\end{aligned}
$$

Die Betafunktion ist definiert als:

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Die Betaverteilung 1. Art (siehe Kapitel im Skriptum) $\beta(\alpha,\lambda)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^{\beta-1}x^{\alpha-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & \text{wenn } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
f_a &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \cdot Q^{\alpha-1} \cdot (1-Q)^{\beta-1} = \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot Q^{\alpha-1} \cdot (1-Q)^{\beta-1} \\
f_a &= \frac{Q^{\alpha-1}\cdot(1-Q)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} \quad \boxed{\text{q.e.d. (denn so ist die Beta-Verteilung definiert)}}
\end{aligned}
$$

Übung 3.3

Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der Betaverteilung.

Lösung zu Übung 3.3

i) Erwartungswert:

Der Erwartungswert für stetige Zufallsvariablen (siehe Kapitel im Skriptum) ist mit

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

definiert

Die Betaverteilung 1. Art (siehe stetige Verteilungen im Skriptum) $\beta(\alpha, \lambda)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)^{\beta-1}x^{\alpha-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & \text{wenn } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(x) &= \int_0^1 x \cdot f_X(x) dx \quad \boxed{\text{denn Betaverteilung nur im Bereich } 0 \leq x \leq 1 \text{ def.}} \\
&= \int_0^1 x \cdot \frac{(1-x)^{\beta-1}x^{\alpha-1}}{\beta(\alpha, \beta)} dx \\
&= \frac{1}{\beta(\alpha, \beta)} \int_0^1 (1-x)^{\beta-1} \cdot x^{\alpha} dx \quad \boxed{\text{substituiere } \Delta = \alpha + 1 \Rightarrow \alpha = \Delta - 1} \\
\mathbb{E}(x) &= \frac{1}{\beta(\alpha, \beta)} \int_0^1 (1-x)^{\beta-1} \cdot x^{\Delta-1} dx
\end{aligned}$$

Die Betafunktion ist definiert als:

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(x) &= \frac{1}{\beta(\alpha, \beta)} \int_0^1 (1-x)^{\beta-1} \cdot x^{\Delta-1} dx \\
&= \frac{1}{\beta(\alpha, \beta)} \beta(\Delta, \beta) = \frac{\beta(\Delta, \beta)}{\beta(\alpha, \beta)} \quad \boxed{\text{rücksubstituieren: } \Delta = \alpha + 1} \\
&= \frac{\beta(\alpha+1, \beta)}{\beta(\alpha, \beta)} \quad \boxed{\text{mit der Betafunktion eingesetzt:}} \\
\mathbb{E}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+1) \cdot \cancel{\Gamma(\beta)}}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha) \cdot \cancel{\Gamma(\beta)}} \quad \boxed{\text{mit der Gammafktn. eingesetzt:}}
\end{aligned}$$

Die Gammafunktion ist definiert als:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = (z-1)\Gamma(z-1)$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\cancel{\Gamma(\alpha)} \cdot \alpha}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \\
&= \frac{\alpha \cdot \Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} = \frac{\alpha \cdot \cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)} \cdot (\alpha+\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\
\mathbb{E}(x) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}
$$

ii) Varianz:

> Die Varianz (siehe Kapitel im Skriptum) ist mit
>
> $$\mathbb{V}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}(x))^2 \cdot f_X(x) dx$$
>
> definiert.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(x) &= \int_0^1 (x - \mathbb{E}(x))^2 \cdot f_X(x) \cdot dx = \int_0^1 \left(x - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^2 \cdot \frac{(1-x)^{\beta-1} x^{\alpha-1}}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot dx \\
&= \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot \int_0^1 \left(x^2 - \frac{2\,\alpha\,x}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \right) \cdot (1-x)^{\beta-1} x^{\alpha-1} \cdot dx \\
&= \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot \int_0^1 \left((1-x)^{\beta-1} x^{\alpha+1} - \frac{2\,\alpha\,(1-x)^{\beta-1}\,x^{\alpha}}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha^2\,(1-x)^{\beta-1}\,x^{\alpha-1}}{(\alpha+\beta)^2} \right) \cdot dx \\
&= \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot \left(\int_0^1 (1-x)^{\beta-1} x^{\alpha+1} \cdot dx - \int_0^1 \frac{2\,\alpha\,(1-x)^{\beta-1}\,x^{\alpha}}{\alpha+\beta} \cdot dx + \int_0^1 \frac{\alpha^2\,(1-x)^{\beta-1}\,x^{\alpha-1}}{(\alpha+\beta)^2} \cdot d \right. \\
\mathbb{V}(x) &= \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot (NR1 - NR2 + NR3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
NR1 &= \int_0^1 (1-x)^{\beta-1} x^{\alpha+1} \cdot dx \\
&= \int_0^1 (1-x)^{\beta-1} x^{\Delta-1} \cdot dx \\
&= \frac{\Gamma(\Delta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\Delta+\beta)} = \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+2+\beta)} \\
&= \frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)(\alpha+1+\beta)} \\
NR1 &= \frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)(\alpha+1+\beta)(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
NR2 &= \int_0^1 \frac{2\,\alpha\,(1-x)^{\beta-1}\,x^{\alpha}}{\alpha+\beta} \cdot dx \\
&= \frac{2\,\alpha}{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-x)^{\beta-1} \cdot x^{\alpha} \cdot dx \\
&= \frac{2\,\alpha}{\alpha+\beta} \int_0^1 (1-x)^{\beta-1} \cdot x^{\epsilon-1} \cdot dx \\
&= \frac{2\,\alpha}{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\epsilon)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\epsilon+\beta)} \\
&= \frac{2\,\alpha}{\alpha+\beta} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+1+\beta)} \\
&= \frac{2\,\alpha}{\alpha+\beta} \frac{\alpha \cdot \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \\
NR2 &= \frac{2\,\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
NR3 &= \int_0^1 \frac{\alpha^2\,(1-x)^{\beta-1}\,x^{\alpha-1}}{(\alpha+\beta)^2} \cdot dx \\
&= \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \cdot \int_0^1 (1-x)^{\beta-1}\,x^{\alpha-1} \cdot dx \\
NR3 &= \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(x) &= \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)(\alpha+1+\beta)(\alpha+\beta)} - \frac{2\,\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} + \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right) \\
\mathbb{V}(x) &= \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot \left(\frac{\alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha+\beta) - 2\,\alpha^2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha+\beta+1) + \alpha^2\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha+\beta+1}{\Gamma(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \right. \\
\mathbb{V}(x) &= \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot \left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\left(\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \cancel{2}\,\alpha^2(\alpha+\beta+1) + \cancel{\alpha^2(\alpha+\beta+1)}\right)}{\Gamma(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \right) \\
\mathbb{V}(x) &= \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot \left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\left(\alpha(\alpha+1)(\alpha+\beta) - \alpha^2(\alpha+\beta+1)\right)}{\Gamma(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \right) \\
\mathbb{V}(x) &= \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot \left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\left(\cancel{\alpha^3} + \cancel{\alpha^2} + \cancel{\alpha^2\beta} + \alpha\beta - \cancel{\alpha^3} - \cancel{\alpha^2\beta} - \cancel{\alpha^2}\right)}{\Gamma(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \right) \\
\mathbb{V}(x) &= \frac{1}{\beta(\alpha,\beta)} \cdot \left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\alpha\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \right) \boxed{\text{Einsetzen der Beta-Fktn.}} \\
\mathbb{V}(x) &= \frac{\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\cancel{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}} \cdot \left(\frac{\cancel{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\alpha\beta}{\cancel{\Gamma(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \right) \\
\mathbb{V}(x) &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}
\end{aligned}
$$

Übung 3.4

Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz der geometrischen Verteilung.

Lösung zu Übung 3.4

i) Erwartungswert:

Der Erwartungswert für diskrete Zufallsvariablen (siehe Kapitel im Skriptum) ist mit

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x p_X(x)$$

definiert

Die Geometrische Verteilung (siehe Kapitel im Skriptum) $\mathcal{G}(p)$:

$$f(x) = \begin{cases} p(1-p)^x & \text{wenn } 0 \leq x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot q^i = \frac{q}{(1-q)^2} \quad \forall |q| < 1$$

In Form $\sum x \cdot \alpha^x$ (die der Geometrischen Reihe) bringen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot p(1-p)^{x-1} = p \cdot \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^{x-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^x \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot (1-p)^x = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{1-p}{(1-(1-p))^2} = \frac{p}{\cancel{1-p}} \cdot \frac{\cancel{1-p}}{(1-1+p)^2} = \\
\mathbb{E}(X) &= \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

ii) Varianz:

Die Varianz (siehe Kapitel im Skriptum) ist mit

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(x))^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(x))^2)$$

definiert.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(x))^2)$$

mit $\mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{p^2}$ ist der eine Teil bereits bekannt. Der 2. Teil $\mathbb{E}(X^2)$ ist gesucht:

Sonderform der geometrischen Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} i^2 \cdot q^i = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3} \quad \forall |q| < 1$$

Wir versuchen, $\mathbb{E}(X^2)$ in die Form $\sum x^2 \cdot \alpha^x$ (Sonderform der Geometrischen Reihe) zu bringen.

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot p(1-p)^{x-1} = p\sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot (1-p)^{x-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot (1-p)^x$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{p}{1-p}\sum_{x=1}^{\infty} x^2 \cdot (1-p)^x = \frac{p}{\cancel{1-p}} \frac{\cancel{(1-p)}(1+1-p)}{(1-(1-p))^3} = \frac{p\,(2-p)}{p^3} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(x))^2) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Übung 3.5

Bei einem Spiel kann auf die Ausgänge $1, ..., m$ gesetzt werden, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, ..., pm$ gezogen werden. Wenn Ausgang i gezogen wird, werden die Einsätze auf i m-fach zurückgezahlt, die anderen verfallen. Ein Spieler spielt nach folgender Strategie: er verteilt sein Kapital K im Verhältnis $q_1 : ... : q_m$ (mit $\sum_i q_i = 1$) auf die möglichen Ausgänge und verwendet den Gewinn aus einer Runde als Einsatz in der nächsten.

(a) Zeigen Sie, dass das Kapital nach n (unabhängigen) Runden

$$K_n = K_0 X_1 ... X_n$$

ist, mit $\mathbb{P}(X_i = mq_j) = p_j$.

(b) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} log(K_n)$$

(c) Wie sind $q_1, ..., q_m$ zu wählen, damit dieser Grenzwert maximal wird?

Lösung zu Übung 3.5

Übung 3.6

Wie oft muss man Würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Sechsen mindestens 100 beträgt, mindestens 0.9 ist?

Lösung zu Übung 3.6

Die Binomialverteilung $\mathcal{B}_n(p)$ (siehe Kapitel im Skriptum), wie folgt def.:

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{wenn } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = n \cdot p$ und die Varianz $\mathbb{V}(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.

Da die Binomialverteilung jedoch schwer zu berechnen ist $\Rightarrow$ Approximation mit der Standardnormalverteilung.

Die Dichte der Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (siehe Kapitel im Skriptum), wie folgt def.:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$, wie folgt def.:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mu$ und die Varianz $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

Die Dichte der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$, wie folgt def.:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$, wie folgt def.:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = 0$ und die Varianz $\mathbb{V}(X) = 1$.
$\Rightarrow$ Transformation zur Normalverteilung: $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung , wie folgt def.: Satz von Moivre-Laplace: $B(n, p) \approx N(np, np(1-p))$, wenn $np(1-p) \geq 9$

$$B(n, p) \approx N(np, np(1-p)) \approx \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right)$$

Der Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mu = np$ und die Varianz $\mathbb{V}(X) = \sigma^2 = np(1-p)$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein 6-er bei einem Wurf gewürfelt wird: $p = \frac{1}{6}$
Der Erwartungswert beträgt somit: $\mathbb{E}(X) = \mu = np = \frac{n}{6}$

Die Varianz beträgt somit: $\mathbb{V}(X) = \sigma^2 = n \cdot p(1-p) = n \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot n}{36}$

Berechnung der Wahrscheinlichkeit mittels Gegenwahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(x \geq 100) \geq 0.9 = 1 - \mathbb{P}(x < 100) \geq 0.9 = 1 - \mathbb{P}(x \leq 99) \geq 0.9$$

Bessere Approximation mittels Stetigkeitskorrektur: (Obere Grenze +0.5)

$$1 - \mathbb{P}(x \leq 99.5) \geq 0.9 \Rightarrow -\mathbb{P}(x \leq 99.5) \geq -0.1 \Rightarrow \mathbb{P}(x \leq 99.5) \geq 0.1$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x \leq 99.5) &\approx \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{99.5 - \frac{n}{6}}{\frac{\sqrt{5n}}{6}}\right) = \Phi\left(\left(99.5 - \frac{n}{6}\right)\frac{6}{\sqrt{5n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{99.5 \cdot 6 - n}{\sqrt{5n}}\right) \end{aligned}$$

$$\Phi\left(\frac{99.5 \cdot 6 - n}{\sqrt{5n}}\right) \leq 0.1 \;\Rightarrow\; \frac{99.5 \cdot 6 - n}{\sqrt{5n}} \leq \Phi^{-1}(0.1)$$

In der Standardnormalverteilungstabelle (siehe Tabelle im Skriptum) den Wert für $\Phi^{-1}(0.1)$ nachsehen, der 0.1 am nächsten kommt: (Achtung: es kommen nur Werte zwischen 0.5 und 1 vor, das bedeutet, man muss $1 - x$ berechnen: folglich muss man für 0.9 nachsehen.)

Dabei bekommt man für $\Phi^{-1}(0.9) = 1.28$ heraus, folglich muss $\Phi^{-1}(0.1) = -1.28$ sein.

$$\frac{99.5 \cdot 6 - n}{\sqrt{5n}} \leq -1.28 \;\Rightarrow\; 99.5 \cdot 6 - n \leq -1.28 \cdot \sqrt{5n} \;\Rightarrow\; (597 - n)^2 \leq 1.6384 \cdot 5n$$

$$\begin{aligned} 597^2 - 1194n + n^2 \leq 1.6384 \cdot 5n \;&\Rightarrow\; 597^2 - 1194n + n^2 - 8.192 \cdot n \leq 0 \\ &\Rightarrow\; 356409 - 1202.192n + n^2 \leq 0 \end{aligned}$$

Mit der Quadratischen Lösungsformel (siehe Section im Skriptum) folgt:$n_1 = 671.1488$ und $n_2 = 531.0432$.

Es kann aber nur eine von beiden Lösungen stimmen. $\Rightarrow$ herausfinden, welche stimmt, mittels Einsetzen:

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{99.5 \cdot 6 - n_1}{\sqrt{5n}}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{99.5 \cdot 6 - 671.1488}{\sqrt{5 * 671.1488}}\right) &= \Phi\left(\frac{-74.1488}{57.9287}\right) \\ &= \Phi(-1.2800) \text{ ...richtig} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{99.5 \cdot 6 - n_2}{\sqrt{5n}}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{99.5 \cdot 6 - 531.0432}{\sqrt{5 * 531.0432}}\right) &= \Phi\left(\frac{65.9568}{51.5287}\right) \\ &= \Phi(1.2800) \text{ ...falsch} \end{aligned}$$

Mit 671.14 $\Rightarrow$ 672 Würfen beträgt die Zahl der 6en (mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9) mindestens 100.

Übung 3.7

Bestimmen Sie die momentenerzeugende Funktion für die Gammaverteilung.

Lösung zu Übung 3.7

Die Gammaverteilung (siehe Kapitel im Skriptum) $\Gamma(\alpha, \lambda)$: ist wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda\, x} & \text{wenn } x \geq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die momentenerzeugende Funktion ist wie folgt definiert:

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{Xt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x) dx$$

Die Gammafunktion ist definiert als:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx = (z-1)\Gamma(z-1)$$

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{xt}) = \int_0^\infty e^{xt} \frac{\lambda^\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{x(t-\lambda)} x^{\alpha-1} dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-x(\lambda-t)} x^{\alpha-1} dx \quad \boxed{\text{Substituiere: } u = x(\lambda-t), \; \tfrac{du}{dx} = \lambda - t \;\Rightarrow\; dx = \tfrac{du}{\lambda-t}} \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda-t}\right)^{\alpha-1} \frac{du}{\lambda-t} = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{(\lambda-t)^\alpha} \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} du \\
M_X(t) &= \frac{\lambda^\alpha}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} \cdot \frac{\cancel{\Gamma(\alpha)}}{(\lambda-t)^\alpha} = \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha}
\end{aligned}$$

4. Übung

5. Übung

6. Übung

7. Übung

Übung 7.1

$X_1, ..., X_n$ ist eine Stichprobe einer Verteilung mit der Dichte

$$f(x,\theta) = \theta x^{\theta-1}[0 \le x \le 1$$

Bestimmen Sie den Momentenschätzer.

Lösung zu Übung 7.1

i) **Bestimmen des Erwartungswertes für die gegebene Verteilungsfunktion**

Der Erwartungswert (siehe Definition im Skriptum) für stetige Zufallsvariablen mit Dichte $f(x)$ ist definiert als:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot \theta x^{\theta-1}dx = \int_0^1 \theta x^{\theta}dx = \theta \int_0^1 x^{\theta}dx \\
\mathbb{E}(X) &= \theta \frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\Big|_{x=0}^{1} = \theta \frac{1^{\theta+1} - 0^{\theta+1}}{\theta+1} = \frac{\theta}{\theta+1}
\end{aligned}$$

ii) **Parameter θ_i der Verteilung als Funktion der Momente m_k:**
In unserer Verteilungsfunktion kommt nur ein unbekannter Parameter θ vor, folglich müssen wir nur θ_1 schätzen. ($k = 1$). Mit dem Moment (siehe Definition im Skriptum) $m_k = \mathbb{E}(X^k)$ folgt:

$$m_1 = \mathbb{E}(X^1)$$

Somit können wir unseren Parameter definieren, als:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\theta}{\theta+1} \Leftrightarrow \mathbb{E}(X) \cdot (\theta+1) = \theta \Leftrightarrow \mathbb{E}(X)\theta + \mathbb{E}(X) = \theta \Leftrightarrow \mathbb{E}(X) = \theta - \mathbb{E}(X)\theta$$

$$\theta(1 - \mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) \Leftrightarrow \theta = \frac{\mathbb{E}(X)}{1 - \mathbb{E}(X)}$$

iii) **Berechnung der Momentenschätzer $\hat{\theta}_i$**

Für jedes k die entsprechenden $\hat{m}_k$ durch empirische Momente(siehe Skriptum) berechnen:

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

$$\hat{m}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \mathbb{E}(X) \ \Rightarrow\ \hat{\theta}_n = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{\overline{x}_n}{1-\overline{x}_n}$$

Übung 7.2

$X_1, ..., X_n$ ist eine Stichprobe einer Verteilung mit der Dichte

$$f(x,\theta) = \theta x^{\theta-1}[0 \le x \le 1]$$

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer.

Lösung zu Übung 7.2

Die Likelihoodfunktion (siehe Definition im Skriptum) in unserem Fall (stetige Zufallsvariable) ist definiert, als

$$L(X;\theta) = f_\theta(X) \quad \text{bzw.} \quad \ln L(X;\theta) = l(X;\theta)$$

und da es sich um unabhängige Zufallsvariablen X handelt, gilt der Multiplikationssatz (siehe Definition im Skriptum)

$$L(\vec{X};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X)$$

bzw. für die Log-Likelihood:

$$\ln L(\vec{X};\theta) = l(\vec{X};\theta) = \sum_{i=1}^{n} l(X_i;\theta)$$

i) **Likelihood-Funktion zusammenbauen:** Ein bisschen Umformen mit den Logarithmusregeln (siehe Anhang im Skriptum):

$$\begin{aligned} l(\vec{x};\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln \theta \cdot x_i^{\theta-1} = \sum_{i=1}^{n} \ln\theta + (\theta-1)\ln x_i \\ l(\vec{x};\theta) &= n\cdot\ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \end{aligned}$$

ii) **Ableiten der Likelihood-Funktion:**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l(\vec{x};\theta)}{\partial\theta} &= \frac{\partial(n\cdot\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)}{\partial\theta}= \\
\frac{\partial l(\vec{x};\theta)}{\partial\theta} &= \frac{\partial(n\cdot\ln\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial(\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)}{\partial\theta}-\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n}\ln x_i)}{\partial\theta} \\
\frac{\partial l(\vec{x};\theta)}{\partial\theta} &= \frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i
\end{aligned}$$

iii) **Ableitung=0 für Maximum und auf θ umstellen**

$$\frac{\partial l(\vec{x};\theta)}{\partial\theta}=0=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \;\Leftrightarrow\; \frac{n}{\theta}=-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$\hat{\theta}_n=-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

8. Übung

Übung 8.1

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter λ einer Poissonverteilung und zeigen Sie, dass er effizient ist.

Lösung zu Übung 8.1

Die Likelihoodfunktion (siehe Definition im Skriptum) in unserem Fall (diskrete Zufallsvariable) ist definiert, als

$$L(X;\lambda) = P_\lambda(X) \quad \text{bzw.} \quad \ln L(X;\lambda) = l(X;\lambda)$$

und da es sich um unabhängige Zufallsvariablen X handelt, gilt der Multiplikationssatz (siehe Definition im Skriptum)

$$L(\vec{X};\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(X)$$

bzw. für die Log-Likelihood:

$$\ln L(\vec{X};\lambda) = l(\vec{X};\lambda) = \sum_{i=1}^{n} l(X_i;\lambda)$$

die Poissonverteilung (siehe Kapitel im Skriptum) hat außerdem die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$$

i) **Likelihood-Funktion zusammenbauen:** Ein bisschen Umformen mit den Logarithmusregeln (siehe Anhang im Skriptum):

$$\begin{aligned}
l(\vec{k};\lambda) &= \sum_{i=1}^{n} \ln P(k_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{k_i!}\lambda^{k_i} e^{-\lambda}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{1}{k_i!}\right) + \ln \lambda^{k_i} + \ln e^{-\lambda}\right) \\
l(\vec{k};\lambda) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(k_i!\right)^{-1} + k_i \cdot \ln \lambda + -\lambda \cdot \underbrace{\ln e}_{=1}\right) \\
l(\vec{k};\lambda) &= -n \cdot \lambda + \ln \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(k_i!)
\end{aligned}$$

ii) **Ableiten der Likelihood-Funktion:**

$$\frac{\partial l(\vec{x};\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\left(-n\cdot\lambda+\ln\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i-\sum_{i=1}^{n}\ln(k_i!)\right)}{\partial\lambda}$$

$$\frac{\partial l(\vec{x};\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial\left(-n\cdot\lambda\right)}{\partial\lambda}+\frac{\partial\left(\ln\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i\right)}{\partial\lambda}-\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(k_i!)\right)}{\partial\lambda}$$

$$\frac{\partial l(\vec{x};\lambda)}{\partial\lambda} = -n+\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i$$

iii) **Ableitung=0 für Maximum und auf λ umstellen**

$$\frac{\partial l(\vec{x};\lambda)}{\partial\lambda}=0=-n+\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i\Leftrightarrow n=\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i\Leftrightarrow n\cdot\lambda=\sum_{i=1}^{n}k_i$$

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i=\overline{x}_n=\hat{\lambda}_n$$

iv) **Check, ob Erwartungstreu**

Hier reicht es, zu zeigen, dass gilt: $\mathbb{E}_\lambda(\hat{\lambda}_n)=\lambda$. (siehe Definition im Skriptum)

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda})=\mathbb{E}(\overline{k}_n)=\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k_i\right)=\frac{1}{n}\cdot\underbrace{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}k_i\right)}_{=n\cdot\lambda}=\frac{1}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}\cdot\lambda=\lambda$$

v) **Check, ob Effizient**

Nur ein Erwartungstreuer Schätzer kann auf effizient sein. Außerdem muss er unter allen erwartungstreuen Schätzern die kleinste Varianz besitzen. (siehe Definition im Skriptum)

Außerdem muss mittels der Cramér-Rao-Schranke (siehe Satz im Skriptum) überprüft werden, ob es sich um einen effizienten Schätzer handelt:

$$\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n)\geq\frac{1}{I_n(\lambda)}=\frac{1}{nI(\lambda)}.$$

Wobei die Fisher-Information wie folgt berechnet wird:

$$I_n(\lambda)=-\mathbb{E}_\lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}l(k_1,\ldots,k_n;\lambda)\right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\vec{k};\lambda)}{\partial^2\lambda} = \frac{\partial\left(-n+\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i\right)}{\partial\lambda}=-\frac{1}{\lambda^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i$$

$$I_n(\lambda) = -\mathbb{E}_\lambda \left(-\frac{1}{\lambda^2} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} k_i}_{=n\cdot\lambda} \right) = \frac{1}{\cancel{\lambda^2}} n \cdot \cancel{\lambda} = \frac{n}{\lambda}$$

$$\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = \mathbb{V}(\overline{k}_i) = \mathbb{V}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(\sum_{i=1}^{n} k_i) \boxed{\text{... denn alles aus } \mathbb{V} \text{ wird quadriert.}}$$

$$\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(k_i) = \frac{1}{\cancel{n^2}} \cancel{n} \cdot \mathbb{V}(k) = \frac{\mathbb{V}(k)}{n} = \frac{\lambda}{n} \boxed{\text{...} \mathbb{V}(k) = \lambda \text{ aus Tabelle}}$$

$$\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = \frac{\lambda}{n} \geq \frac{1}{I_n(\lambda)} = \frac{\lambda}{n}. \boxed{\text{Es herrscht Gleichheit, somit effizient.}}$$

Übung 8.2

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter einer Exponentialverteilung mit der Dichte

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \quad [x \geq 0]$$

und zeigen Sie, dass er effizient ist.

Lösung zu Übung 8.2

Die Likelihoodfunktion (siehe Definition im Skriptum) in unserem Fall (stetige Zufallsvariable) ist definiert, als

$$L(X;\theta) = f_\theta(X) \quad \text{bzw.} \quad \ln L(X;\theta) = l(X;\theta)$$

und da es sich um unabhängige Zufallsvariablen X handelt, gilt der Multiplikationssatz (siehe Definition im Skriptum)

$$L(\vec{X};\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X)$$

bzw. für die Log-Likelihood:

$$\ln L(\vec{X};\theta) = l(\vec{X};\theta) = \sum_{i=1}^{n} l(X_i;\theta)$$

i) **Likelihood-Funktion zusammenbauen:** Ein bisschen Umformen mit den Logarithmusregeln (siehe Anhang im Skriptum):

$$\begin{aligned} l(\vec{x};\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\theta} e^{-x_i/\theta}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\frac{1}{\theta} - \frac{x_i}{\theta}\ln(e)\right) \\ l(\vec{x};\theta) &= n\ln\frac{1}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{x_i}{\theta}\right) = n\ln\theta^{-1} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i = -n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

ii) **Ableiten der Likelihood-Funktion:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\vec{x};\theta)}{\partial\theta} &= \frac{\partial\left(-n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\partial\theta} = \frac{\partial\left(-n\ln\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial\left(\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}{\partial\theta} \\ \frac{\partial l(\vec{x};\theta)}{\partial\theta} &= -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

iii) **Ableitung=0 für Maximum und auf θ umstellen**

$$\frac{\partial l(\vec{x};\theta)}{\partial\theta} = 0 = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i \Leftrightarrow \frac{n}{\cancel{\theta}} = \frac{1}{\theta^{\cancel{2}}}\sum_{i=1}^{n} x_i \Leftrightarrow n\cdot\theta = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \overline{x}_n$$

iv) **Check, ob Erwartungstreu**

Hier reicht es, zu zeigen, dass gilt: $\mathbb{E}_\theta(\hat{\theta}_n) = \theta$. (siehe Definition im Skriptum)

$$\mathbb{E}(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}(\overline{x}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\cdot\underbrace{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}_{=n\cdot\theta} = \frac{1}{\cancel{n}}\cdot\cancel{n}\cdot\theta = \theta$$

v) **Check, ob Effizient**

Nur ein Erwartungstreuer Schätzer kann auf effizient sein. Außerdem muss er unter allen erwartungstreuen Schätzern die kleinste Varianz besitzen. (siehe Definition im Skriptum)

Außerdem muss mittels der Cramér-Rao-Schranke (siehe Satz im Skriptum) überprüft werden, ob es sich um einen effizienten Schätzer handelt:

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{1}{nI(\theta)}.$$

Wobei die Fisher-Information wie folgt berechnet wird:

$$I_n(\theta) = -\mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(x_1, \ldots, x_n; \theta) \right)$$

$$\frac{\partial^2 l(\vec{x};\theta)}{\partial^2 \theta} = \frac{\partial \left(-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i\right)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

$$I_n(\theta) = -\mathbb{E}_\theta \left(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \right) = -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} \cdot n\theta = \frac{2n}{\theta^2} - \frac{n}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}$$

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}_n) = \mathbb{V}(\overline{x}_i) = \mathbb{V}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(\sum_{i=1}^n x_i) \boxed{\mathbb{V} \Rightarrow x^2 \text{ (siehe Definition im Skriptum).}}$$

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(x_i) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cancel{n} \cdot \mathbb{V}(x) = \frac{\mathbb{V}(x)}{n} = \frac{\theta^2}{n} \boxed{\text{...}\mathbb{V}(x) = \theta^2 \text{ aus Tabelle}}$$

$$\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^\infty \frac{x}{\theta} e^{-x/\theta} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty x e^{-x/\theta} = \frac{1}{\theta}\, \theta \left(-e^{-\frac{x}{\theta}}\right) (\theta + x) \Big|_{x=0}^{\infty}$$

$$\mathbb{E}(x) = \left(-e^{-\frac{x}{\theta}}\right)(\theta + x)\Big|_{x=0}^{\infty} = \underbrace{\left(-e^{-\frac{\infty}{\theta}}\right)(\theta + \infty)}_{\to 0} + \left(e^{-\frac{0}{\theta}}\right)(\theta + 0) = \theta$$

$$\mathbb{V}(x) = \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}^2(x) = -\theta^2$$

$$\mathbb{V}(\hat{\theta}_n) = \frac{\theta^2}{n} \geq \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{\theta^2}{n}. \boxed{\text{Es herrscht Gleichheit, somit effizient.}}$$

Übung 8.3

Bestimmen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein approximatives Konfidenzintervall für den Parameter θ der Exponentialverteilung mit der Dichte

$$f(x, \theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \quad [x \geq 0]$$

Lösung zu Übung 8.3

Die Stichprobe $X_1, ..., X_n$ mit $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n$:

Konfidenzintervall $\mathbb{P}_\theta(a \leq \theta \leq b) \geq \gamma$ (siehe Definition im Skriptum) Wobei γ die Überdeckungswahrscheinlichkeit ist.
Ansatz: $[\overline{X}_n - c, \overline{X}_n + c]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta(\overline{X}_n - c \leq \theta \leq \overline{X}_n + c) &\geq \gamma \\
\mathbb{P}_\theta(\theta - c \leq \overline{X}_n \leq \theta + c) &\geq \gamma \\
\mathbb{P}_\theta(-c \leq \overline{X}_n - \theta \leq +c) &\geq \gamma \\
\mathbb{P}_\theta(-n \cdot c \leq \overline{n} \cdot X_n - n \cdot \theta \leq +n \cdot c) &\geq \gamma \\
\mathbb{P}_\theta(-n \cdot c \leq \cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} \sum_{i+1}^{n} x_i - n \cdot \theta \leq +n \cdot c) &\geq \gamma \\
\mathbb{P}_\theta(-n \cdot c \leq \sum_{i+1}^{n} x_i - n \cdot \theta \leq +n \cdot c) &\geq \gamma \\
\mathbb{P}_\theta(-n \cdot c \leq s_n - n \cdot \theta \leq +n \cdot c) &\geq \gamma \\
\mathbb{P}_\theta(-\frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}} \leq \frac{s_n - n \cdot \theta}{\sqrt{n\theta^2}} \leq +\frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}}) &\geq \gamma
\end{aligned}$$

Der Zentrale Grenzwertsatz (siehe Satz im Skriptum) besagt, dass $\overline{X}_n = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ für $\lim n \to \infty$ gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ konvergiert ($\mu = \mathbb{E}(X) = \theta$ und $\sigma^2 = \mathbb{V}(X) = \theta^2$).

$$X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{P}_\theta(-\frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}} \leq \frac{s_n - n \cdot \theta}{\sqrt{n\theta^2}} \leq +\frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}}) \approx \Phi\left(\frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}}\right) - \Phi\left(-\frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}}\right)\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}}\right) - 1 \geq \gamma$$

$$2 \cdot \Phi\left(\frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}}\right) \geq \gamma + 1 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}}\right) \geq \frac{\gamma + 1}{2} \Leftrightarrow \frac{n \cdot c}{\sqrt{n\theta^2}} \geq \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)$$

$$c \geq \frac{\sqrt{n\theta^2}}{n} \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) \Leftrightarrow c \geq \frac{\theta}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)$$

Nun wird θ durch $\hat{\theta}_n$ angenähert:

$$c = \frac{\hat{\theta}_n}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) = \frac{\overline{X}_n}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) = \frac{\overline{X}_n}{\sqrt{n}} z_{\frac{\gamma+1}{2}}$$

Somit erhalten wir als Konfidenzintervall:

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\overline{X}_n}{\sqrt{n}} z_{\frac{\gamma+1}{2}}; \overline{X}_n + \frac{\overline{X}_n}{\sqrt{n}} z_{\frac{\gamma+1}{2}}\right] = \left[\overline{X}_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\gamma+1}{2}}\right); \overline{X}_n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\gamma+1}{2}}\right)\right]$$

Übung 8.4

Bestimmen Sie für die folgende Stichprobe einer Normalverteilung

$$0.7\ 1.3\ 1.2\ 1.5\ 1.8\ 0.9\ 1.1\ 1.4\ 1.9\ 1.7$$

ein 95%-Konfidenzintervall für μ.

Lösung zu Übung 8.4

i) **Schätzen von μ:**
Für $\hat{\mu}_n$ gilt:

$$\hat{\mu}_n = \overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{13.5}{10} = 1.35$$

ii) **Schätzen von σ^2:**

Korrigierte Stichprobenvarianz für ML-Schätzer (siehe Definition im Skriptum)

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$s_n^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - 1.35)^2 = 0.15$$

iii) **Konvidenzintevall für μ bei unbekanntem σ^2**

Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ^2 (siehe Kapitel im Skriptum):

$$KI = \left[\overline{X}_n - t_{n-1;\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}, \overline{X}_n + t_{n-1;\frac{1+\gamma}{2}}\sqrt{\frac{S_n^2}{n}}\right]$$

$$t_{n-1;\frac{1+\gamma}{2}} = t_{9;0.975}$$

Aus Tabelle (siehe Anhang im Skriptum) der t-Verteilungsquantile den Wert rauslesen:

$$t_{9;0.975} = 2.262$$

iv) **Konfidenzintervall bilden**

$$KI : \left[1.35 - 2.262 \cdot \sqrt{\frac{0.15}{10}}, 1.35 + 2.262 \cdot \sqrt{\frac{0.15}{10}}\right] \Leftrightarrow$$

$$KI : [1.35 - 2.262 \cdot 0.1224, 1.35 + 2.262 \cdot 0.1224] \Leftrightarrow [1.35 - 0.277, 1.35 + -0.277] \Leftrightarrow$$

$$KI : [1.073, 1.627]$$

9. Übung

Übung 9.1

Bestimmen Sie den Likelihoodquotiententest für $H_0 : \lambda = \lambda_0$ gegen $H_1 : \lambda = \lambda_1$ einer Poissonverteilung (für $\lambda_0 < \lambda_1$).

Lösung zu Übung 9.1

Die Likelihoodfunktion (siehe Definition im Skriptum) in unserem Fall (diskrete Zufallsvariable) ist definiert, als

$$L(X;\lambda) = \mathbb{P}_\lambda(X) \quad \text{bzw.} \quad \ln L(X;\lambda) = l(X;\lambda)$$

und da es sich um unabhängige Zufallsvariablen X handelt, gilt der Multiplikationssatz (siehe Definition im Skriptum)

$$L(\vec{X};\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(X)$$

bzw. für die Log-Likelihood:

$$\ln L(\vec{X};\lambda) = l(\vec{X};\lambda) = \sum_{i=1}^{n} l(X_i;\lambda)$$

Der Likelihoodquotientest für Hypothesen (siehe Definition im Skriptum) $H_0 : \{\lambda_0\}$ und $H_1 : \{\lambda_1\}$:

$$L(X_1,...,X_n) = \frac{L(X_1,...,X_n,\lambda_0)}{L(X_1,...,X_n,\lambda_1)}$$

H_0 annehmen, wenn $l(X_1,...,X_n) \geq \lambda_c$.

Die Poissonverteilung (siehe Kapitel im Skriptum) hat außerdem die folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$$

$$l(\vec{k};\lambda) \;=\; \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\lambda(k_i) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}\lambda^{k_i}e^{-\lambda}\right) = e^{-n\lambda}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{k!}\lambda^{k_i}$$

$$L(\vec{k};\lambda) = \frac{e^{-n\lambda_0}\prod_{i=1}^{n}\cancel{\frac{1}{k!}}\lambda_0^{k_i}}{e^{-n\lambda_1}\prod_{i=1}^{n}\cancel{\frac{1}{k!}}\lambda_1^{k_i}} = \frac{e^{-n\lambda_0}\prod_{i=1}^{n}\lambda_0^{k_i}}{e^{-n\lambda_1}\prod_{i=1}^{n}\lambda_1^{k_i}} = e^{n(\lambda_1-\lambda_0)}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n}k_i} < c$$

$$\begin{aligned} l(\vec{k};\lambda) &= \ln\left(e^{n(\lambda_1-\lambda_0)}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n}k_i}\right) = \ln e^{n(\lambda_1-\lambda_0)} + \ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n}k_i} \\ l(\vec{k};\lambda) &= n(\lambda_1-\lambda_0)\ln e + \sum_{i=1}^{n}k_i\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) = n(\lambda_1-\lambda_0) + \sum_{i=1}^{n}k_i\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right) < \ln c \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}k_i < \frac{\ln c + n(\lambda_0-\lambda_1)}{\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)}$$

da gilt $\lambda_1 > \lambda_0$ folgt:$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} < 1$

Übung 9.2

Gegeben sei folgende Stichprobe:

1.5 2.1 1.3 1.7 2.2 1.1 1.9 0.9 1.4 1.6

1.8 1.7 2.3 1.8 1.6 2.0 1.7 2.1 1.8 1.7

einer Normalverteilung. Testen Sie $H_0 : \mu_0 = 1.5$ gegen die zweiseitige Alternative.

Lösung zu Übung 9.2

Folgende Überlegung liegt zu Grunde:
Liegt der vorgegebene Wert μ_0 nahe dem Mittelwert der Stichprobe, dann liegt der vorgegebene Wert auch nahe dem Mittelwert der Grundgesamtheit. $\Rightarrow$ Nullhypothese annehmen, sonst:$\Rightarrow$ Nullhypothese ablehnen.

Somit lautet die Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ und die Alternativhypothese $H_1 : y \neq \mu_0$.

i) **Berechnung des Mittelwertes:**

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}x_i = \frac{34.2}{20} = 1.71$$

ii) **Test für den Mittelwert:**

Test für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit (für Normalverteilung, wenn σ^2 unbekannt) (siehe Kapitel im Skriptum)

$$T = \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2/n}}$$

Für $H_0 : \mu = \mu_0$ gegen $H_1 : \mu \neq \mu_0$: verwerfen H_0, wenn $|T| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$

Wobei S_n^2 definiert ist, als die korrigierte Stichprobenvarianz (siehe Definition im Skriptum):

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$T = \frac{1.71 - 1.5}{\sqrt{s_n^2}}\sqrt{20}$$

$$s_n^2 = \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}(x_i - 1.71)^2 = \frac{1}{19}((1.5-1.71)^2 + (2.1-1.71)^2 + ... + (1.7-1.71)^2)$$

$$s_n^2 = \frac{2.398}{19} \approx 0.1262$$

$$T = \frac{0.21\sqrt{20}\sqrt{19}}{\sqrt{2.398}} = \sqrt{\frac{0.0441 \cdot 20 \cdot 19}{2.398}} = \sqrt{6.9883} = 2.64354$$

iii) $t_{n-1,1-\alpha/2}$ **aus der Tabelle bestimmen:** Für Signifikanzniveau (siehe Definition im Skriptum) $\alpha = 0.5$:

$$t_{20-1,1-5/2} = t_{19,0.975} = 2.093 \leftarrow \boxed{\text{aus Tabelle (siehe Anhang im Skriptum)}}$$

iv) **Ungleichung lösen**

$$2.64354 = T > t_{19,0.975} = 2.093 \Rightarrow \boxed{\text{verwerfen } H_0}$$

Übung 9.3

Gegeben sei folgende Stichprobe:

1.5 2.1 1.3 1.7 2.2 1.1 1.9 0.9 1.4 1.6

1.8 1.7 2.3 1.8 1.6 2.0 1.7 2.1 1.8 1.7

einer Normalverteilung. Testen Sie $H_0 : \sigma_0^2 \leq 0.1$ gegen $H_1 : \sigma^2 > 0.1$.

Lösung zu Übung 9.3

Test für die Varianz σ^2 (für Normalverteilung) (siehe Kapitel im Skriptum)

$$T = \frac{S_n^2(n-1)}{\sigma_0^2}$$

Für $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ gegen $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$: verwerfen H_0, wenn $T > \chi^2_{n-1;1-\alpha}$

Wobei S_n^2 definiert ist, als die korrigierte Stichprobenvarianz (siehe Definition im Skriptum):

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

i) **Berechnung des Mittelwertes:**

$$\overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{34.2}{20} = 1.71$$

ii) **Berechnung der korrigierten Stichprobenvarianz:**

$$\begin{aligned} s_n^2 &= \frac{1}{19}\sum_{i=1}^{20}(x_i - 1.71)^2 = \frac{1}{19}((1.5-1.71)^2 + (2.1-1.71)^2 + ... + (1.7-1.71)^2) \\ s_n^2 &= \frac{2.398}{19} \approx 0.1262 \end{aligned}$$

iii) **Berechnung von T :**

$$T = \frac{2.398 \cdot (20-1)}{19 \cdot \sigma_0^2} = \frac{2.398}{0.1} = 23.98 > \chi^2_{n-1;1-\alpha}$$

iv) $t_{n-1,1-\alpha/2}$ **aus der Tabelle bestimmen:** Für Signifikanzniveau (siehe Definition im Skriptum) $\alpha = 0.5$:

$$\chi^2_{20-1,1-5} = \chi^2_{19,0.95} = 30.144 \leftarrow \boxed{\text{aus Tabelle (siehe Anhang im Skriptum)}}$$

v) **Ungleichung lösen**

$$23.98 = T > \chi^2_{19,0.95} = 30.144 \Rightarrow \boxed{\text{können } H_0 \text{ nicht verwerfen.}}$$

Übung 9.4

Gegeben sei folgende Stichprobe:

1.5 2.1 1.3 1.7 2.2 1.1 1.9 0.9 1.4 1.6

1.8 1.7 2.3 1.8 1.6 2.0 1.7 2.1 1.8 1.7

einer Normalverteilung. Testen Sie mit dem Chiquadrattest auf Normalverteilung.

Lösung zu Übung 9.4

Wenn nicht alle Parameter aus der Verteilung bekannt sind, müssen diese mit der ML-Methode geschätzt werden. (siehe Satz im Skriptum)

i) **Schätzen von μ:**
Für $\hat{\mu}_n$ gilt:

$$\hat{\mu}_n = \overline{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{34.2}{20} = 1.71$$

ii) **Schätzen von σ^2:**

Stichprobenvarianz für ML-Schätzer (siehe Definition im Skriptum)

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$s_n^2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i - 1.71)^2 = 0.12$$

iii) **Klasseneinteilung**:
Wir teilen die Stichproben auf $k = 5$ Klassen auf:

$k_1 = [0{-}20\%],\ k_2 = [20{-}40\%],\ k_3 = [40{-}60\%],\ k_4 = [60{-}80\%],\ k_5 = [80{-}100\%]$

ausgehend von Standardnormalverteilung erhalten wir für somit für z_{p_i}: (die Werte aus Tabelle (siehe Anhang im Skriptum) lesen)

$$z_{20\%} = -0.842, z_{40\%} = -0.253, z_{60\%} = 0.253, z_{80\%} = 0.842$$

.

Umgerechnet auf die Normalverteilung mit den vorher geschätzen Parametern $\hat{\mu}$ und s_n^2 ergeben sich somit folgende Werte (siehe Definition im Skriptum):

$$\tau_{20} = \mu + \sigma \cdot z_{20} = 1.71 + 0.346 \cdot (-0.842) = 1.42$$

$$\tau_{40} = \mu + \sigma \cdot z_{40} = 1.71 + 0.346 \cdot (-0.253) = 1.62$$

$$\tau_{60} = \mu + \sigma \cdot z_{60} = 1.71 + 0.346 \cdot (0.253) = 1.80$$

$$\tau_{80} = \mu + \sigma \cdot z_{80} = 1.71 + 0.346 \cdot (0.842) = 2.00$$

Nun können wir die einzelnen Stichprobenwerte in die Klassen einsortieren:

Klasse	1	2	3	4	5
Untere Schranke	$-\infty$	1.42	1.62	1.8	2
Obere Schranke	1.42	1.62	1.8	2	∞
Anzahl	5	2	4	3	6

Wir erwarten aber Elemente in Klasse laut Verteilungsfunktion
$n_i = p_i \cdot n = \frac{1}{5} \cdot 20 = 4$ Stichproben.

iv) **Bestimmen der Statistik** T

Die Statistik T(Gewichtete Quadratsumme) ist definiert, als

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(Y_i - np_i)^2}{np_i}$$

Somit erhalten wir für die Statistik T :

$$T = \sum_{i=1}^{5} \frac{(n_i - 4)^2}{4} = \frac{(5-4)^2}{4} + \frac{(2-4)^2}{4} + \frac{(4-4)^2}{4} + \frac{(3-4)^2}{4} + \frac{(6-4)^2}{4}$$

$$T = \frac{5}{2}$$

v) $\chi^2_{n-1-d,1-\alpha}$ **aus der Tabelle bestimmen:**

Da wir 2 Parameter($d = 2$) geschätzt haben, muss die Anzahl der Freiheitsgrade korrigiert werden: $k - 1 - d = 5 - 1 - 2 = 2$. Somit müssen wir statt $k-1$ -Freiheitsgraden $k-1-d$ -Freiheitsgrade verwenden. Und in der Tabelle (siehe Anhang im Skriptum) nach $\chi^2_{n-1-d,1-\alpha}$ suchen.

$$\chi^2_{2,0.95} = 5.99$$

vi) **Ungleichung lösen**:
Wir müssen H_0 verwerfen, wenn $T > \chi^2$:

$$2.5 = T > \chi^2 = 5.99$$

$\Rightarrow H_0$ annhemen, $\Rightarrow$ Stichprobe ist normalverteilt.

10. Übung

11. Übung

Übung 11.1

Eine Markovquelle mit drei Zuständen

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \tag{11..1}$$

Bestimmen Sie die Entropie dieser Quelle.

Lösung zu Übung 11.1

Zuerst benötigen wir die stationäre Verteilung:

$\pi^* = \pi^* P \Rightarrow$ Die Matrix P besitzt zum Eigenwert 1 den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zusätzlich gilt:
$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$

Ergibt eine stationäre Verteilung von:
$\pi^* = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

und eine Entropie von: $H(X) = \sum \pi_i H(P_i)$

$$= \frac{1}{3}(0.7log_2(\frac{1}{0.7}) + 0.2log_2(\frac{1}{0.2}) + 0.1log_2(\frac{1}{0.1}))$$
$$+\frac{1}{3}(0.1log_2(\frac{1}{0.1}) + 0.7log_2(\frac{1}{0.7}) + 0.2log_2(\frac{1}{0.2}))$$
$$+\frac{1}{3}(0.1log_2(\frac{1}{0.1}) + 0.3log_2(\frac{1}{0.3}) + 0.6log_2(\frac{1}{0.6}))$$

Übung 11.2

X und Y haben die gemeinsame Verteilung

	Y			
X	1	2	3	4
1	1/4	0	1/8	1/8
2	0	1/8	1/8	0
3	0	1/16	0	1/16
4	0	1/16	0	1/16

Bestimmen Sie $H(X), H(Y), H(X,Y), H(X|Y), H(Y|X), I(X,Y)$

Lösung zu Übung 11.2

Zuerst bestimmen wir die gemeinsame Entropie (aus der Tabelle die Zahlen lesen):

$H(X,Y) = \sum_{x,y} p(x,y) log_2(\frac{1}{p(x,y)}) = 3$

Als nächstes bestimmen wir die Randverteilungen:

$P_X = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$

und

$P_Y = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

Daraus ergeben sich die Entropien:

$H(X) = \sum_{i=1}^{4} P_{Xi} log_2 \left(\frac{1}{P_{Xi}}\right) = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{4}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{8}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{8}}\right) + \frac{1}{8}\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{8}}\right) =$
$\frac{1}{2}\log_2(2) + \frac{1}{4}\log_2(4) + \frac{1}{4}\log_2(8) = \frac{7}{4}$

und $H(Y) = 2$

Das ist alles um die bedingten Entropien sowie die Information zwischen X und Y zu berechnen:

$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1$

$H(X|Y) = H(X,Y) - H(X) = \frac{5}{4}$

$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = \frac{3}{4}$