Übung 0.1

Ein Würfel wird dreimal geworfen. X sei das Minimum der drei Augenzahlen, Y das Maximum. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y, die Randverteilungen und Erwartungswerte.

Lösung zu Übung 0.1

1. Schritt: 4 Fälle betrachten:

   I) $X = z = Y \;\Rightarrow 1$ Permutation $(\frac{3!}{3!})$
   z.B. kann $1 = 1 = 1$ nur durch eine Würfelknstellation/Permuation entstehen: $(1, 1, 1)$

   II) $X = z < Y \;\Rightarrow 3$ Permutationen $(\frac{3!}{2!})$
   z.B. kann $1 = 1 < 2$ nur durch 3 Würfelknstellationen/Permuationen entstehen: $(1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$

   III) $X < z = Y \;\Rightarrow 3$ Permutationen $(\frac{3!}{2!})$
   z.B. kann $1 < 2 = 2$ nur durch 3 Würfelknstellationen/Permuationen entstehen: $(1, 2, 2), (2, 2, 1), (2, 1, 2)$

   IV) $X < z < Y \;\Rightarrow 6$ Permutationen $(\frac{3!}{1!})$
   z.B. kann $2 < 3 < 4$ durch folgende 6 Würfelkonstellationen/Permutationen entstehen: $(2, 3, 4)$, $(2, 4, 3)$, $(3, 2, 4)$, $(3, 4, 2)$, $(4, 2, 3)$, $(4, 3, 2)$

2. Wahrscheinlichkeitstabelle erstellen: Achtung, die Werte in der folgenden Tabelle müssen noch mit $\frac{1}{216}$ multipliziert werden!

$y =$ \ $x =$	1	2	3	4	5	6	$\sum$
1	1	0	0	0	0	0	1
2	6	1	0	0	0	0	7
3	12	6	1	0	0	0	19
4	18	12	6	1	0	0	37
5	24	18	12	6	1	0	61
6	30	24	18	12	6	1	91
$\sum$	91	61	37	19	7	1	216

   Diese Tabelle zeigt für jede x/y-Kombination die Wahrscheinlichkeit an. z.B: $x = 4$ und $y = 5$ hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{216}$.

   Man sieht hier auch gut, dass die Wahrscheinlichkeit, dass $x > y$ ist immer 0 ist.

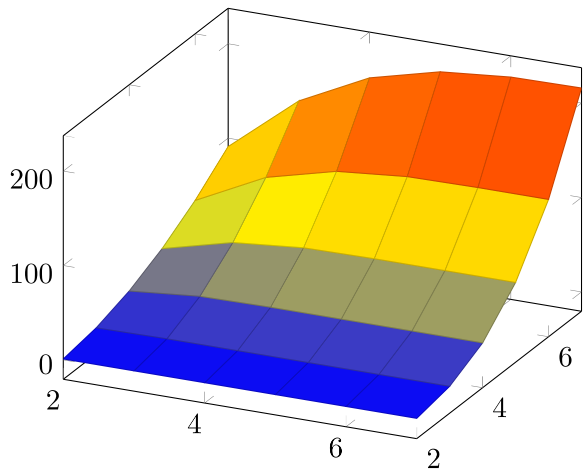
   Die rechteste Spalte und die unterste Zeile sind die Randwahrscheinlichkeiten.

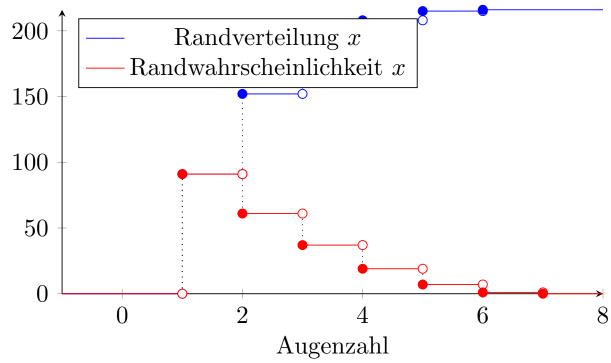
3. Verteilungstabelle erstellen: Dazu werden die Werte der vorderen Tabelle verwendet:

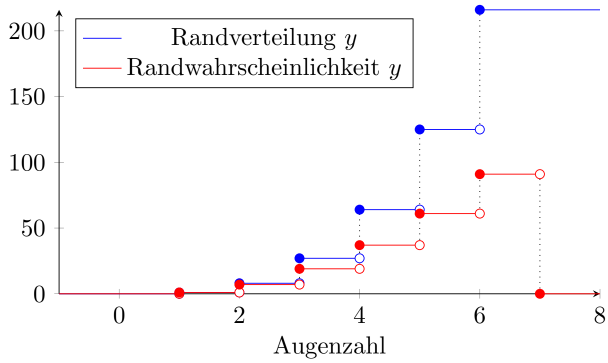
$\mathbb{P}_{X,Y}(x,y)$	$x<2$	$x<3$	$x<4$	$x<5$	$x<6$	$x<\infty$
$y<2$	1	1	1	1	1	1
$y<3$	7	8	8	8	8	8
$y<4$	19	26	27	27	27	27
$y<5$	37	56	63	64	64	64
$y<6$	61	98	117	124	125	125
$y<\infty$	91	152	189	208	215	216

Der blaue Wert entsteht beispielsweise durch die Summierung aller Blauen Zahlen in der vorigen Tabelle. Der grün eingerahmte durch die Summation der grün eingerahmten Werte und der orange hinterlegte Wert durch die Summe der Orange hinterlegten Werte. usw.

Die Zeile mit $y<\infty$ bzw. die Spalte mit $x<\infty$ sind die Randverteilungen.







4. Erwartungswert für x:

$$\frac{1 \cdot 91 + 2 \cdot 61 + 3 \cdot 37 + 4 \cdot 19 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 1}{216} \approx 2.042$$

5. Erwartungswert für y:

$$\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 19 + 4 \cdot 37 + 5 \cdot 61 + 6 \cdot 91}{216} \approx 4.958$$

6. Schritt: Bestimmen der Wahrscheinlichkeit für X=k (nicht wirklich notwendig, nur der Vollständigkeit halber):

$$X = 1: \; 1 \cdot I + 5 \cdot II + 5 \cdot III + 10 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 6 = 91$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 1) = \frac{91}{216} \approx \quad 42.13\%$$

$$X = 2: \; 1 \cdot I + 4 \cdot II + 4 \cdot III + 6 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 6 = 61$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 2) = \frac{61}{216} \approx 28.24\%$$

$$X = 3: \; 1 \cdot I + 3 \cdot II + 3 \cdot III + 3 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 37$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 3) = \frac{37}{216} \approx 17.13\%$$

$$X = 4: \; 1 \cdot I + 2 \cdot II + 2 \cdot III + 1 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 19$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 4) = \frac{19}{216} \approx 8.80\%$$

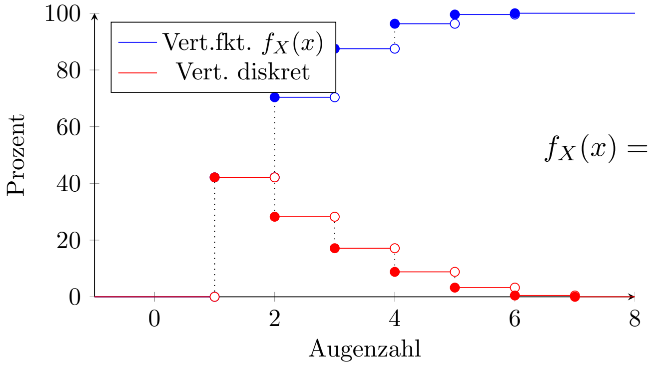
$$X = 5: \; 1 \cdot I + 1 \cdot II + 1 \cdot III + 0 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 = 7$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 5) = \frac{7}{216} \approx 3.24\%$$

$$X = 6: \; 1 \cdot I + 0 \cdot II + 0 \cdot III + 0 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 6 = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{216} \approx \quad 0.46\%$$

7. Verteilungsfunktion $F_X(x)$ (nicht wirklich notwendig, nur der Vollständigkeit halber):



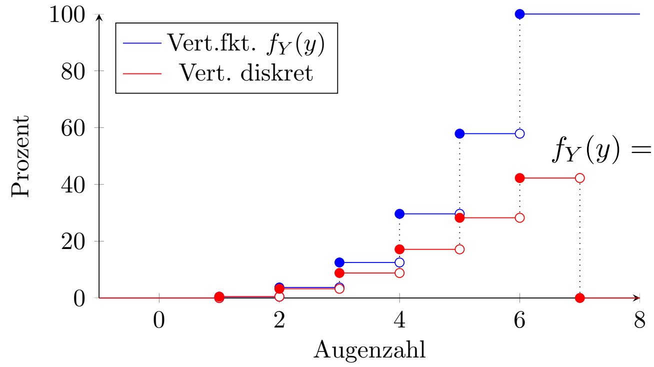
$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x < 1 \\ \frac{91}{216} \approx 42.13\% & \text{wenn } x < 2 \\ \frac{152}{216} \approx 70.37\% & \text{wenn } x < 3 \\ \frac{189}{216} \approx 87.50\% & \text{wenn } x < 4 \\ \frac{208}{216} \approx 96.30\% & \text{wenn } x < 5 \\ \frac{215}{216} \approx 99.54\% & \text{wenn } x < 6 \\ \frac{216}{216} \approx 100\% & \text{wenn } x < 7 \end{cases}$$

Die rote Linie gibt die Verteilung diskret an, während die blaue Linie die Verteilungsfunktion $f_X(x)$ rechts darstellt.

8. Bestimmen der Wahrscheinlichkeit für $Y = k$ (nicht wirklich notwendig, nur der Vollständigkeit halber): Diese ist die selbe Verteilungsfunktion wie für $X = k$ nur in umgekehrter Reihenfolge:

$$Y = 1: \ 1 \cdot I + 0 \cdot II + 0 \cdot III + 0 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 6 = 1$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{216} \approx \ 0.46\%$$
$$Y = 2: \ 1 \cdot I + 1 \cdot II + 1 \cdot III + 0 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6 = 7$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 5) = \frac{7}{216} \approx 3.24\%$$
$$Y = 3: \ 1 \cdot I + 2 \cdot II + 2 \cdot III + 1 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 19$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 4) = \frac{19}{216} \approx 8.80\%$$
$$Y = 4: \ 1 \cdot I + 3 \cdot II + 3 \cdot III + 3 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 37$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 3) = \frac{37}{216} \approx 17.13\%$$
$$Y = 5: \ 1 \cdot I + 4 \cdot II + 4 \cdot III + 6 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 6 = 61$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 2) = \frac{61}{216} \approx 28.24\%$$
$$Y = 6: \ 1 \cdot I + 5 \cdot II + 5 \cdot III + 10 \cdot IV = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 10 \cdot 6 = 91$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}(X = 1) = \frac{91}{216} \approx \ 42.13\%$$

9. Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ (nicht wirklich notwendig, nur der Vollständigkeit halber):



$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } y < 1 \\ \frac{1}{216} \approx 0.46\% & \text{wenn } y < 2 \\ \frac{8}{216} \approx 3.7\% & \text{wenn } y < 3 \\ \frac{27}{216} \approx 12.5\% & \text{wenn } y < 4 \\ \frac{64}{216} \approx 29.63\% & \text{wenn } y < 5 \\ \frac{125}{216} \approx 57.87\% & \text{wenn } y < 6 \\ \frac{216}{216} \approx 100\% & \text{wenn } y < 7 \end{cases}$$

Die rote Linie gibt die Verteilung diskret an, während die blaue Linie die Verteilungsfunktion $f_Y(y)$ rechts darstellt.

Übung 0.2

Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimme Sie die Klassen von Zuständen, die Absorptionswahrscheinlichkeiten und die mittleren Absorptionszeiten.

Lösung zu Übung 0.2

i) Klassen bilden:
   1) Klasse C_1: $\{1\}$
   2) Klasse C_2: $\{4\}$
   3) Klasse C_3: $\{2, 3\}$

ii) Bestimmen der Absorptionswahrscheinlichkeiten für Zustand 1:

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} \sum_j p_{ij} a_j & \\ 1 & i = 1 \\ 0 & i = \text{anderer absorbierender Zustand.} \end{cases}$$

Somit können wir uns $a_2^{(1)}$, bzw. $a_3^{(1)}$ ausdrücken.

$$\begin{aligned} a_2^{(1)} &= 0.2 \cdot a_1^{(1)} + 0.4 \cdot a_2^{(1)} + 0.2 \cdot a_3^{(1)} + 0.2 \cdot a_4^{(1)} \\ &= 0.2 \cdot 1 + 0.4 \cdot a_2^{(1)} + 0.2 \cdot a_3^{(1)} + 0.2 \cdot 0 = 0.2 + 0.4 \cdot a_2^{(1)} + 0.2 \cdot a_3^{(1)} \\ a_3^{(1)} &= 0.4 \cdot a_1^{(1)} + 0.2 \cdot a_2^{(1)} + 0.2 \cdot a_3^{(1)} + 0.2 \cdot a_4^{(1)} = \\ &= 0.4 \cdot 1 + 0.2 \cdot a_2^{(1)} + 0.2 \cdot a_3^{(1)} + 0.2 \cdot 0 = 0.4 + 0.2 \cdot a_2^{(1)} + 0.2 \cdot a_3^{(1)} \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir 2 Gleichungen:

$$0.4 = -0.2a_2^{(1)} + 0.8a_3^{(1)}$$

$$0.2 = 0.6a_2^{(1)} - 0.2a_3^{(1)}$$

Diese werden mit Gauss gelöst:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.2 & 0.8 & 0.4 \\ 0.6 & -0.2 & 0.2 \end{array}\right) \xRightarrow{Z_2 = Z_2 + Z_1 \cdot 3} \left(\begin{array}{cc|c} -0.2 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 2.2 & 1.4 \end{array}\right)$$

$a_3^{(1)}$ berechnen:

$$2.2 \cdot a_3^{(1)} = 1.4 \;\Rightarrow\; a_3^{(1)} = \frac{1.4}{2.2} = \frac{7}{11}$$

$a_2^{(1)}$ berechnen:

$$-0.2 \cdot a_2^{(1)} + 0.8 \cdot a_3^{(1)} = 0.4 \;\Rightarrow\; -0.2 \cdot a_2^{(1)} + 0.8 \cdot \frac{7}{11} = 0.4 \;\Rightarrow$$

$$-0.2 \cdot a_2^{(1)} = \frac{44 - 56}{110} \;\Rightarrow\; a_2^{(1)} = \frac{12 \cdot \cancel{10}}{11\cancel{0} \cdot 2} = \frac{6}{11}$$

iii) Bestimmen der Absorptionswahrscheinlichkeiten für Zustand 4: Da es bei uns nur 2 absorbierende Zustände gibt, müssen die Absorptionswahrscheinlichkeiten in Summe 1 ergeben. Somit können wir uns die Absorptionswahrscheinlichkeiten berechnen, indem wir einfach die vorher berechneten Wahrscheinlichkeiten von 1 abziehen:

Die Absorptionswahrscheinlichkeit $a_2^{(4)}$ lautet somit:

$$a_2^{(4)} = 1 - a_2^{(1)} = \frac{11}{11} - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

Die Absorptionswahrscheinlichkeit $a_3^{(4)}$ lautet somit:

$$a_3^{(4)} = 1 - a_3^{(1)} = \frac{11}{11} - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}$$

Zur Kontrolle werden wir aber trozdem noch die Wahrscheinlichkeiten mit der herkömmlichen Methode berechnen:

$$a_i^{(4)} = \begin{cases} \sum_j p_{ij} a_j & \\ 1 & i = 4 \\ 0 & i = \text{anderer absorbierender Zustand.} \end{cases}$$

Somit können wir uns $a_2^{(4)}$, bzw. $a_3^{(4)}$ ausdrücken.

$$\begin{aligned}
a_2^{(4)} &= 0.2 \cdot a_1^{(4)} + 0.4 \cdot a_2^{(4)} + 0.2 \cdot a_3^{(4)} + 0.2 \cdot a_4^{(4)} \\
&= 0.2 \cdot 0 + 0.4 \cdot a_2^{(4)} + 0.2 \cdot a_3^{(4)} + 0.2 \cdot 0 = 0.2 + 0.4 \cdot a_2^{(4)} + 0.2 \cdot a_3^{(4)} \\
a_3^{(4)} &= 0.4 \cdot a_1^{(4)} + 0.2 \cdot a_2^{(4)} + 0.2 \cdot a_3^{(4)} + 0.2 \cdot a_4^{(4)} = \\
&= 0.4 \cdot 0 + 0.2 \cdot a_2^{(4)} + 0.2 \cdot a_3^{(4)} + 0.2 \cdot 1 = 0.2 \cdot a_2^{(4)} + 0.2 \cdot a_3^{(4)} + 0.2
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir 2 Gleichungen:

$$0.2 = -0.2a_2^{(4)} + 0.8a_3^{(4)}$$

$$0.2 = 0.6a_2^{(4)} - 0.2a_3^{(4)}$$

Diese werden mit Gauss gelöst:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & -0.2 & 0.2 \end{array}\right) \xRightarrow{Z_2=Z_2+Z_1\cdot 3} \left(\begin{array}{cc|c} -0.2 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 2.2 & 0.8 \end{array}\right)$$

$a_3^{(4)}$ berechnen:

$$2.2 \cdot a_3^{(4)} = 0.8 \;\Rightarrow\; a_3^{(4)} = \frac{0.8}{2.2} = \frac{4}{11}$$

$a_2^{(4)}$ berechnen:

$$-0.2a_2^{(4)} + 0.8a_3^{(4)} = 0.2 \;\Rightarrow\; -0.2a_2^{(4)} + 0.8 \cdot \frac{4}{11} = 0.2 \;\Rightarrow$$

$$-0.2a_2^{(4)} = \frac{22-32}{110} \;\Rightarrow\; a_2^{(4)} = \frac{10 \cdot \cancel{10}}{11\cancel{0} \cdot 2} = \frac{5}{11}$$

iv) Mittlere Absorptionszeiten:

$$m_i = 1 + \sum_j p_{ij} m_j, i \neq i_0 \;\text{ sowie }\; m_{i_0} = 0$$

Somit wissen wir bereits: $m_1 = 0$ bzw. $m_4 = 0$.

$$m_2 = 1 + 0.2 \cdot m_1 + 0.4 \cdot m_2 + 0.2 \cdot m_3 + 0.2 \cdot m_4 = 1 + 0.4 \cdot m_2 + 0.2 \cdot m_3$$

$$0.6 \cdot m_2 = 1 + 0.2 \cdot m_3 \;\Rightarrow\; 0.6 \cdot m_2 - 0.2 \cdot m_3 = 1$$

$$m_3 = 1 + 0.4 \cdot m_1 + 0.2 \cdot m_2 + 0.2 \cdot m_3 + 0.2 \cdot m_4 = 1 + 0.2 \cdot m_2 + 0.2 \cdot m_3$$

$$0.8 \cdot m_3 = 1 + 0.2 \cdot m_2 \;\Rightarrow\; 0.8 \cdot m_3 - 0.2 \cdot m_2 = 1$$

Somit haben wir 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.2 & 0.8 & 1 \\ 0.6 & -0.2 & 1 \end{array}\right) \xRightarrow{Z_2=Z_2+Z_1\cdot 3} \left(\begin{array}{cc|c} -0.2 & 0.8 & 1 \\ 0 & 2.2 & 4 \end{array}\right)$$

$$2.2 \cdot m_3 = 4 \;\Rightarrow\; m_3 = \frac{4}{2.2} = \frac{20}{11}$$

$$-0.2 \cdot m_2 + 0.8 \cdot m_3 = 1 \;\Rightarrow\; -0.2 \cdot m_2 = 1 - \frac{8}{1\cancel{0}} \cdot \frac{2\cancel{0}}{11} = \frac{11}{11} - \frac{16}{11} = -\frac{5}{11} \;\Rightarrow$$

$$m_2 = \frac{5}{11} \cdot \frac{10}{2} = \frac{25}{11}$$

Übung 0.3

Bestimmen Sie für die Verteilung $P = (0.10, 0.30, 0.15, 0.10, 0.20, 0.15)$ den Huffman-, Shannon- und Fano-Code, die mittlere Unbestimmtheit und die Entropie.

Lösung zu Übung 0.3

i) Entropie bestimmen: Denn diese ist für alle Codes die gleiche.

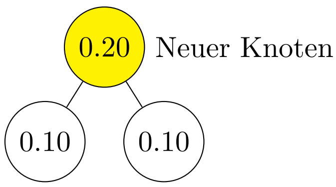
$$H(P) = \sum_{i=1}^{6} p_i \log_2 \left(\frac{1}{p_i}\right)$$

$$H(P) = 2 \cdot 0.10 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0.1}\right) + 2 \cdot 0.15 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0.15}\right) + 0.2 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0.2}\right) + 0.3 \cdot \log_2\left(\frac{1}{0.3}\right)$$

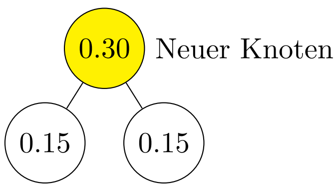
$$H(P) \approx 2.47$$

ii) Huffman-Code:

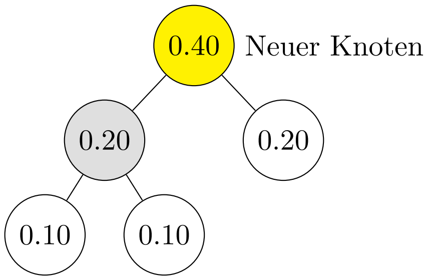
1) nach Wahrscheinlichkeit aufsteigend sortieren:
   $P = (0.10, 0.10, 0.15, 0.15, 0.20, 0.30)$
2) Fasse die kleinsten Knoten $\{0.10, 0.10\}$ zusammen:



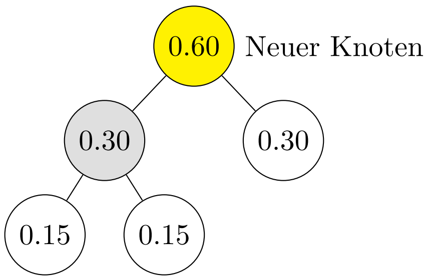
3) Fasse die nächstkleineren Knoten $\{0.15, 0.15\}$ zusammen:



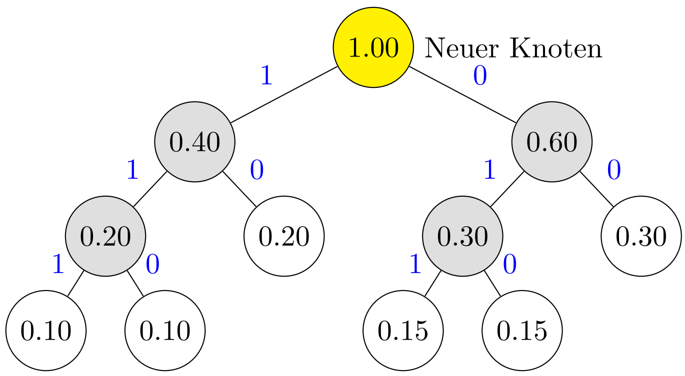
4) Fasse die nächstkleineren Knoten $\{0.20(0.10 + 0.10), 0.20\}$ zusammen:



5) Fasse die nächstkleineren Knoten $\{0.30(0.15 + 0.15), 0.30\}$ zusammen:



6) Fasse die verbleibenden Knoten $\{0.40, 0.60\}$ zusammen:



7) Codes bestimmen:

Wahrscheinlichkeit p_i	Codewortlänge l_i	Codewort c_i
0.1	3	111
0.1	3	110
0.15	3	011
0.15	3	010
0.2	2	10
0.3	2	00

8) Mittlere Unbestimmtheit:

$$H^*(P) = \sum_{i=1}^{6} p_i l_i$$

$$H^*(P) = 0.3 \cdot 2 + 0.2 \cdot 2 + 2 \cdot 0.15 \cdot 3 + 2 \cdot 0.1 \cdot 3 = 2.5$$

iii) Shannon-Code

1) nach Wahrscheinlichkeit absteigend sortieren:
$P = (0.30, 0.20, 0.15, 0.15, 0.10, 0.10)$

2) Verteilung f_i und Codewortlänge l_i berechnen: (mit den Formeln $f_i = \sum_j = 1^i p_i$ bzw. $l_i = \lceil \log_2(1/p_i) \rceil$).

Wahrscheinlichkeit p_i	l_i	f_{i-1}
0.30	2	0
0.20	3	0.3
0.15	3	0.5
0.15	3	0.65
0.10	4	0.8
0.10	4	0.9

3) Codewort c_i bestimmen: (die f_i in binär umgewandelt)

Wahrscheinlichkeit p_i	l_i	f_{i-1}	c_i
0.30	2	0	00
0.20	3	0.3	010
0.15	3	0.5	100
0.15	3	0.65	101
0.10	4	0.8	1100
0.10	4	0.9	1110

4) Mittlere Unbestimmtheit:

$$H^*(P) = \sum_{i=1}^{6} p_i l_i$$

$$H^*(P) = 0.3 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 + 2 \cdot 0.15 \cdot 3 + 2 \cdot 0.1 \cdot 4 = 2.9$$

iv) Fanu-Code:

1) Gleich ohne sortieren die Codewortlängen l_i, die Verteilung f_i sowie $\frac{f_{i-1}+f_i}{2}$ zu berechnen (wobei hier $l_i = \lceil \log_2(1/p_i) \rceil + 1$)

Wahrscheinlichkeit p_i	l_i	f_{i-1}	f_i	$\frac{f_i+f_{i-1}}{2}$
0.10	5	0	0.1	0.05
0.30	3	0.1	0.4	0.25
0.15	4	0.4	0.55	0.475
0.10	5	0.55	0.65	0.6
0.20	4	0.65	0.85	0.75
0.15	4	0.85	1.00	0.925

2) Codewort c_i bestimmen: ($\frac{f_{i-1}+f_i}{2}$ in binär umgewandelt)

Wahrscheinlichkeit p_i	l_i	f_{i-1}	f_i	$\frac{f_i+f_{i-1}}{2}$	c_i
0.10	5	0	0.1	0.05	00001
0.30	3	0.1	0.4	0.25	010
0.15	4	0.4	0.55	0.475	0111
0.10	5	0.55	0.65	0.6	10011
0.20	4	0.65	0.85	0.75	1100
0.15	4	0.85	1.00	0.925	1110

3) Mittlere Unbestimmtheit:

$$H^*(P) = \sum_{i=1}^{6} p_i l_i$$

$$H^*(P) = 0.3 \cdot 3 + 0.2 \cdot 4 + 2 \cdot 0.15 \cdot 4 + 2 \cdot 0.1 \cdot 5 = 3.9$$

Übung 0.4

Ein Würfel wird 100-mal geworfen, mit den Häufigkeiten

1	2	3	4	5	6
23	16	13	22	14	12

Istder Würfel fair?

Lösung zu Übung 0.4

Wir sollen testen, ob es sich bei den Würfelergebnissen um eine Gleichverteilung handelt, mit $\mathbb{P}(X = 1) = P(X = 2) = ... = P(X = 6) = \frac{1}{6}$ und Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$.

Die Häufigkeiten $y_k(y_1, ..., y_6)$ geben an, wie oft k-Werte gewürfelt wurden.

Somit lautet unsere Nullhypothese H_0: die Häufigkeiten sind Gleichverteilt und der Würfel ist fair.

i) Wir checken, ob die Faustregel erfüllt ist: $n \cdot p_i > 5$

$$n \cdot p_i = \frac{100}{6} = 16.66... > 5$$

ii) Ergebnis für

$$T = \sum_j = 1^6 \frac{(y_i - np_i)^2}{np_i}$$

berechnen:

k	y_i	$n \cdot p_i$	$\frac{(y_i-np_i)^2}{np_i}$
1	23	$\frac{100}{6} = 16.\overline{6}$	$\frac{(23-16.\overline{6})^2}{16.\overline{6}} = 2.40\overline{6}$
2	16	$\frac{100}{6} = 16.\overline{6}$	$\frac{(16-16.\overline{6})^2}{16.\overline{6}} = 0.02\overline{6}$
3	13	$\frac{100}{6} = 16.\overline{6}$	$\frac{(13-16.\overline{6})^2}{16.\overline{6}} = 0.80\overline{6}$
4	22	$\frac{100}{6} = 16.\overline{6}$	$\frac{(22-16.\overline{6})^2}{16.\overline{6}} = 1.70\overline{6}$
5	14	$\frac{100}{6} = 16.\overline{6}$	$\frac{(14-16.\overline{6})^2}{16.\overline{6}} = 0.42\overline{6}$
6	12	$\frac{100}{6} = 16.\overline{6}$	$\frac{(12-16.\overline{6})^2}{16.\overline{6}} = 1.30\overline{6}$
		$\sum_{i=1}^{6}$	$2.40\overline{6} + 0.02\overline{6} + 0.80\overline{6} + 1.70\overline{6} + 0.42\overline{6} + 1.30\overline{6} = 6.68$

Dieses Ergebnis muss nun mit $\chi^2_{5;0.95}$ verglichen werden:

$$T = 6.68 < \chi^2_{5;0.95} = 11.07$$

.

Somit wird die Nullhypothese nicht verworfen.